

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثلجي بالأغواط
UNIVERSITÉ AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES
قسم الرياضيات
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE DE MASTER
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse fonctionnelle et applications.

PAR : BELAID NADA

Thème

Transformations Conformes.

Devant le jury composé de :

BOUKHATEM Amina	Maître de conférence B	Université de Laghouat	Président
CHOUCHA Omar	Maître de conférence B	Université de Laghouat	Examineur
BELABBACI Chafika	Maître de conférence A	Université de Laghouat	Encadreur

Année Universitaire : 2024-2025

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A ma chère mère et mon cher père,

à mes sœurs Nossaiiba, Iman et Manar et mon frère Abdou,

à toute ma famille,

à mon professeur superviseur Chafika Belabaci,

à tous mes enseignants à mes amis sans exception.

Remerciements

Je remercie tout d'abord mon Dieu qui m'a donné la force pour terminé ce modeste travail.

*Je remercie vivement mon encadreur **Dr. Chafika Belabbaci** d'avoir encadré ce travail. Merci pour votre disponibilité et pour vos conseils éclairés.*

Je remercie également les membres du jury d'avoir accepté ce travail. Un grand merci a mère, mon père pour leur patience, leur soutien, leur encouragement et leur amour, que Dieu les garde et les protèges.

Je remercie tout les enseignants de département de mathématique pour leur efforts fournis pendant la durée de mes études.

Résumé

Ce mémoire étudie les transformations conformes dans le plan complexe, caractérisées par leur conservation des angles. Nous analysons leurs propriétés fondamentales et leur relation avec les fonctions holomorphes, en démontrant notamment le théorème de Riemann sur la bijection conforme entre ouverts simplement connexes et le disque unité. L'étude couvre les principales classes de transformations : applications linéaires, inversion $z \rightarrow \frac{1}{z}$, transformations homographiques, et d'autres... Ainsi que des cas particuliers comme la transformation de Joukowski et les fonctions trigonométriques complexes.

Mots clés : Homographique, Conforme, Inversion, Joukowski.

ملخص

تتناول هذه المذكرة دراسة التحويلات المطابقة في المستوى العقدي، والتي تتميز بالحفاظ على الزوايا. نقوم بتحليل خصائصها الأساسية وعلاقتها بالدوال الهولومورفية، مع إثبات خاص لنظرية ريمان حول التقابل المطابق بين الفتحات المتصلة ببساطة والقرص الواحدي. تشمل الدراسة الفئات الرئيسية من التحويلات، مثل التطبيقات الخطية، والانعكاس، والتحويلات الكسرية الخطية (الهوموغرافية)، وغيرها... بالإضافة إلى حالات خاصة مثل تحويل جوكوفسكي والدوال المثلثية العقدية.

الكلمات المفتاحية : تحويل هوموغرافي، التحويلات المطابقة، الإنعكاس، تحويل جوكوفسكي.

Abstract

This thesis studies conformal transformations in the complex plane, characterized by their preservation of angles. We analyze their fundamental properties and their relationship with holomorphic functions, notably demonstrating Riemann's theorem on the conformal bijection between simply connected open sets and the unit disk. The study covers the main classes of transformations : linear mappings, the inversion , homographic transformations, and others... as well as particular cases such as the Joukowski transformation and complex trigonometric functions.

Keywords : Homographic, Conformal, Inversion, Joukowski.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	2
1.1 L'ensemble des nombres complexes	2
1.1.1 Forme polaire des nombres complexes	3
1.1.2 Cercle, disque unité ouvert et ellipse	4
1.2 Fonctions Trigonométriques et Hyperboliques	4
1.3 Fonctions à variable complexe	5
1.4 L'inégalité principale pour les intégrales curvilignes	8
1.5 Principe de l'argument	10
2 Transformations conformes	11
2.1 Définitions. Propriétés fondamentales	11
2.2 Principaux théorèmes des transformations conformes	20
2.2.1 Théorème de Darboux	20
2.2.2 Théorème de Riemann	22
3 Transformations particulières	25
3.1 Transformations élémentaires fondamentales	25
3.1.1 Translation $w = z + \beta$	25
3.1.2 Homothétie, rotation	26
3.1.3 Transformation linéaire	27
3.1.4 Transformation $\omega = z^2$	28
3.1.5 Transformation $\omega = z^n, n \geq \frac{1}{2}$	29



3.1.6	Inversion $\omega = \frac{1}{z}$	29
3.2	Transformations homographiques	31
3.2.1	Applications conformes des demi-plans	36
3.2.2	Caractérisation des applications conformes du disque unité dans lui-même	37
3.3	Transformation $\omega = e^z$	37
3.4	Transformation $w = \sin z$	38
3.5	Transformation de Joukowski	39
	Conclusion	43
	Bibliographie	43

Notations

$ Z $	Le module de z ,
θ	L'argument de z ,
$H(\Omega)$	Ensemble des fonctions holomorphes sur Ω ,
$B(a, r)$	Disque ouvert de centre a et de rayon r ,
$Im(z)$	Partie imaginaire d'un nombre complexe ,
$Re(z)$	Partie réelle d'un nombre complexe ,
U	Disque unité ouvert,
γ	Lacet simple,
$v_{z_j}(f)$	Valuation de f en z_j ,
z_j	pôle,
$Ind()$	Indice,
K	Compact,
$Z_{j,k}$	Nombres des zéros,
$P_{f,k}$	Nombres des pôles.

Introduction

L'analyse complexe est désormais une partie essentielle du quotidien des mathématiciens et des physiciens, car elle permet de résoudre de nombreux problèmes. Parmi les sujets abordés dans l'analyse complexe, on trouve les "transformations conformes".

Les transformations conformes sont des transformations qui préservent les angles entre les courbes ou les surfaces, ce qui signifie qu'elles maintiennent la structure géométrique locale des formes. Ces transformations jouent un rôle crucial dans la théorie des champs quantiques, où elles sont utilisées pour étudier les propriétés de commutation des champs, et en relativité générale pour analyser la géométrie de l'espace-temps. D'autre part, les transformations particulières font référence à des transformations spécifiques dotées de propriétés distinctes, telles que les transformations linéaires ou celles qui préservent la forme de certaines équations physiques.

Ce mémoire est composé de trois chapitres, le premier chapitre porte sur les rappels indispensables pour les autres chapitres. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des propriétés des transformations conformes, et le dernier chapitre est consacré à l'étude de quelques transformations particulières.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre porte sur les notions préliminaires nécessaires et indispensables pour traiter les autres chapitres. Plus précisément rappelons les principaux notions des nombres complexes. Le chapitre développe également la notion de fonction d'une variable complexe, les conditions de dérivabilité via les équations de Cauchy-Riemann, et des propriétés essentielles des fonctions holomorphes, telles que le principe du maximum, le théorème de Liouville, et le théorème de Montel. Les principaux ouvrages utilisés pour la rédaction de ce chapitre sont [1],[3],[2],[8],[9].

1.1 L'ensemble des nombres complexes

Il n'existe pas de nombre réel x qui soit solution de l'équation algébrique $x^2 + 1 = 0$. L'ensemble des nombres complexes a été introduit des solutions à cette équation et à des équations semblables.

Nous pouvons considérer un nombre complexe comme étant de la forme $a + bi$, où a et b sont réels et i , appelé l'unité imaginaire, a la propriété $i^2 = -1$. Si $z = a + bi$, alors a est appelée la partie réelle de z et b la partie imaginaire de z ; ces parties réelle et imaginaire sont respectivement notées $Re(z)$ et $Im(z)$. Le symbole z qui représente n'importe quel élément de l'ensemble des nombres complexes est appelée une variable complexe.

Deux nombres complexes $a + bi$ et $c + di$ sont égaux si et seulement si $a = c$ et $b = d$. Nous pouvons considérer l'ensemble des nombres réels comme le sous-

ensemble des nombres complexes pour lequel $b = 0$. Ainsi les nombres complexes $0 + 0i$ et $-3 + 0i$ représentent respectivement les nombres réels 0 et -3 . Si $a = 0$ le nombre complexe $0 + bi$, ou bi , est appelé purement imaginaire.

Le nombre complexe conjugué (ou le conjugué), noté \bar{z} , d'un nombre complexe $a + bi$ est $a - bi$. Le module d'un nombre complexe $z = a + bi$ est définie par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$.

1.1.1 Forme polaire des nombres complexes

Si $P = (x, y)$ désigne un point du plan complexe, nous voyons d'après la Fig. 1.1 que

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

où r est le module de z et θ appelé l'amplitude ou l'argument de $z = x + iy$ est l'angle que fait le vecteur OP avec le demi-axe positif OX .

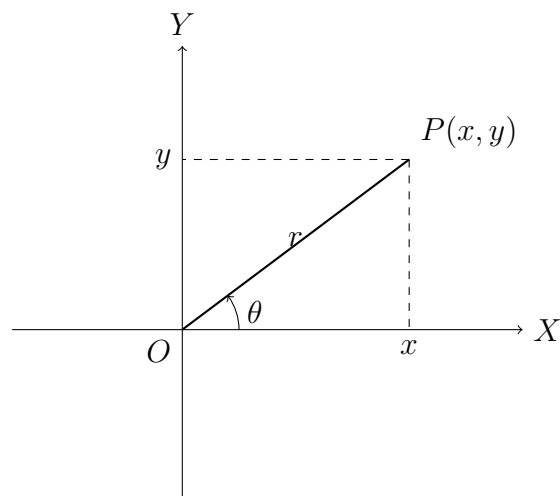


FIGURE 1.1

On en tire que $z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

1.1.2 Cercle, disque unité ouvert et ellipse

Cercle soient z et z_0 des nombres complexes où $z = x + iy$ et $z_0 = x_0 + iy_0$. La distance entre z et z_0 est donnée par

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Dans le plan complexe, la distance entre z_0 et un point z satisfait l'équation

$$|z - z_0| = r, \quad r > 0$$

représente un cercle de rayon r centré en z_0 .

Disque unité ouvert est défini de manière similaire, mais en excluant les points situés exactement à la distance 1 $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Ellipse c'est le lieu géométrique d'un point se déplaçant de telle sorte que la somme de ses distances à deux points fixes (appelés foyers) soit constante

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a.$$

À partir de cela, nous obtenons

$$|x + iy - x_1 - iy_1| + |x + iy - x_2 - iy_2| = 2a$$

$$|(x - x_1) + i(y - y_1)| + |(x - x_2) + i(y - y_2)| = 2a$$

où $\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = 2a$.

Les foyers de l'ellipse sont aux points $(-c, 0)$ et $(c, 0)$ où $c^2 = a^2 - b^2$, et l'équation de l'ellipse est donnée par $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1.2 Fonctions Trigonométriques et Hyperboliques

D'après la formule d'Euler, on a

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta), \quad e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta.$$

En les additionnant et en les soustrayant, nous obtenons

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Pour $z = \theta$, $\cos z$ et $\sin z$ sont définis par

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Nous avons des fonctions hyperboliques

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

et si nous posons $\theta = iy$, nous obtenons

$$\cos(iy) = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \cosh y,$$

$$\sin(iy) = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} = \frac{e^y - e^{-y}}{-2i} = i \frac{e^y - e^{-y}}{2} = i \sinh y,$$

$$\tanh y = \frac{\sinh y}{\cosh y}.$$

1.3 Fonctions à variable complexe

Soit f une fonction à variable complexe définie dans un domaine complexe D à valeurs dans \mathbb{C} . On peut identifier $f(z)$ par $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, où u et v sont des fonctions de deux variables réelles ; u représente la partie réelle de f notée $\operatorname{Re}(f)$ et v représente la partie imaginaire de f notée $\operatorname{Im}(f)$. Les fonctions $u(x, y)$, $v(x, y)$ sont appelées fonctions conjuguées.

Définition 1.3.1 (Dérivable). *Soit $z_0 \in \Omega$. On dit que f est dérivable (ou différentiable) en z_0 si*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe sur n'importe quel chemin qui lie les points z et z_0 .

Définition 1.3.2 (Holomorphe). *La fonction f est dite holomorphe dans Ω si f est dérivable en tout point de Ω .*

On désigne par $H(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur un ouvert Ω .

Définition 1.3.3 (Fonctions entières). *Une fonction qui est holomorphe en tout le plan est appelée une fonction entière.*

Définition 1.3.4 (Domaine élémentaire). *Un domaine Ω de \mathbb{C} est un domaine élémentaire si pour tout $f \in H(\Omega)$, on a une primitive $F \in H(\Omega)$.*

Proposition 1.3.1 (Équations de Cauchy-Riemann). *Soit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ une fonction complexe définie sur un ouvert de \mathbb{C} . Les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Ces équations expriment que les dérivées partielles de u et v par rapport à x et y doivent satisfaire ces relations pour que f soit holomorphe.

Définition 1.3.5. *Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est dite univalente sur un domaine $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ si elle est injective, c'est-à-dire si pour tout $z_1, z_2 \in \Omega$, on a*

$$f(z_1) = f(z_2) \implies z_1 = z_2.$$

Cela signifie que la fonction f ne prend jamais la même valeur pour deux points différents de Ω .

Proposition 1.3.2 (Principe du maximum). *Soit f une fonction holomorphe non constante dans un domaine Ω de \mathbb{C} ; alors la fonction $z \mapsto |f(z)|$, $z \in \Omega$, ne peut pas avoir un maximum relatif dans Ω (ce qui veut dire qu'il n'existe pas de point $a \in \Omega$ tel que $|f(a)| \geq |f(z)|$ pour tout z dans un voisinage ouvert de a contenu dans Ω).*

Théorème 1.3.1 (Théorème de Liouville). *Supposons que quel que soit z dans le plan complexe*

(i) $f(z)$ est holomorphe,

(ii) $f(z)$ est bornée, i.e. $|f(z)| < M$ où M désigne une constante.

Alors $f(z)$ est constante.

Définition 1.3.6. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , (f_n) une suite de fonctions définies sur I , et f définie sur I . On dit que (f_n) converge uniformément vers f sur I si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \forall n \geq n_\varepsilon, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Théorème 1.3.2 (Théorème de Weierstrass). Soit Ω une partie ouverte non vide de \mathbb{C} ; soit $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ supposons que f_n converge uniformément localement dans Ω vers $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

— Si les f_n sont holomorphes, alors f est holomorphe; dans ce cas, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k)}(z) = f^{(k)}(z), \quad z \in \Omega.$$

La dernière convergence est encore uniforme localement dans Ω .

Théorème 1.3.3 (Théorème d'injectivité). Soit Ω un domaine de \mathbb{C} ; supposons que $f_n \in H(\Omega)$ est une application injective de Ω dans $\mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$. Si $\{f_n\}$ converge uniformément localement dans Ω vers une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, alors ou bien f est constante dans Ω ou bien f est une fonction holomorphe injective dans Ω .

Définition 1.3.7. Un point en lequel une fonction $f(z)$ cesse d'être holomorphe est appelé un point singulier ou une singularité de $f(z)$.

Il existe plusieurs types de singularités, définissons quelques types.

- **Point singulier isolé** : On dit qu'un point z_0 est un point singulier isolé de $f(z)$ s'il existe un voisinage de z_0 ne contenant pas de singularité autre que z_0 .
- **Pôle** : On dit qu'un point z_0 est un pôle d'ordre n de $f(z)$ si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = c \neq 0.$$

Pour $n = 1$, on dit que z_0 est un pôle simple de f .

- **Singularité apparente** : Le point singulier z_0 est appelé singularité apparente de $f(z)$ si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \text{ existe.}$$

- **Singularité essentielle** : Une singularité qui n'est ni un pôle, ni une singularité apparente est appelée singularité essentielle, z_0 est une singularité essentielle de f si et seulement si $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)|$ n'existe pas dans $\overline{\mathbb{R}}$; dans ce cas on a (*le théorème de Casorati-Weierstrass*) que pour tout $\delta > 0$, $0 < \delta < r$,

$$\overline{f(B(z_0; \delta))} = \mathbb{C}.$$

Plus explicitement, pour chaque choix de $c \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, il existe un z tel que $|z - z_0| < \delta$ et $|f(z) - c| < \varepsilon$.

Remarque 1.3.1. Si une fonction est uniforme et possède une singularité, celle-ci ne peut être qu'un pôle ou une singularité essentielle.

Définition 1.3.8 (Fonctions méromorphes). *Une fonction f est dite méromorphe si ces seules singularité sont des pôles.*

Définition 1.3.9 (Famille normale). *Soit A une partie ouverte non vide de \mathbb{C} ; une famille \mathcal{F} de fonctions holomorphes dans A s'appelle famille normale (dans A) si toute suite de fonctions dans \mathcal{F} possède une sous-suite qui converge uniformément sur toute partie compacte de A .*

Théorème 1.3.4 (Théorème de Montel). *Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes localement bornée dans une partie ouverte non vide A de \mathbb{C} . Il existe une sous-suite qui converge uniformément sur toute partie compacte de A , vers une fonction holomorphe dans A .*

1.4 L'inégalité principale pour les intégrales curvilignes

Définition 1.4.1 (C^1 par morceaux). *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est continue par morceaux s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$*

de l'intervalle $[a, b]$ telle que, pour tout $i = 0, \dots, n-1$, si on pose $g_i = f|_{[a_i, a_{i+1}[}$, alors g_i se prolonge en une fonction continue sur tout l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$. Autrement dit, f est continue par morceaux s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$ de l'intervalle $[a, b]$ telle que, pour tout $i = 0, \dots, n-1$, f est continue sur l'intervalle $[a_i, a_{i+1}[$ et si f admet une limite à gauche et une limite à droite (éventuellement différentes) en chaque a_i , pour $i = 1, \dots, n-1$, une limite à gauche en $a = a_0$ et une limite à droite en $b = a_n$.

Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, nous posons $[\gamma]$ pour la *trace* de γ , ce qui est l'ensemble $\gamma([a, b])$.

On a l'**inégalité principale** suivante : si $\gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{C}$ est C^1 par morceaux et f est continue dans $[\gamma]$, alors

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz| \leq ML$$

où

$$M = \sup_{z \in [\gamma]} |f(z)| = \sup_{a \leq t \leq b} |f(\gamma(t))|, \quad L = \int_a^b |\gamma'(t)| dt \quad (\text{longueur de } \gamma).$$

En effet,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt = \int_{\gamma} |f(z)| |dz| \\ &\leq M \int_a^b |\gamma'(t)| dt = ML. \end{aligned}$$

Définition 1.4.2 (Courbe de Jordan). *Une courbe de Jordan est une courbe fermée du plan sans points doubles. Formellement, une courbe de Jordan est une application continue $\gamma = [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que*

$$\begin{cases} \gamma(0) = \gamma(1) \\ 0 < s \leq t < 1 \text{ et } \gamma(t) = \gamma(s) \text{ entraînent } s = t. \end{cases}$$

Théorème 1.4.1 (Théorème de Jordan). *Soit Γ une courbe de Jordan dans $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.*

Alors on a une partition de \mathbb{R}^2 comme suit $\mathbb{R}^2 = D \cup \Gamma \cup D'$ ou D, γ, D' étant deux à deux disjoint, D est un domaine borné, D' est un domaine non borné et $\Gamma = \partial D = \partial D'$.

1.5 Principe de l'argument

Soit f une fonction méromorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ simplement connexe dont l'ensemble F des zéros et des pôles est fini. Alors pour tout lacet γ à image dans $\Omega \setminus F$,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{z_j \in F} v_{z_j}(f) \text{Ind}_{\gamma}(z_j)$$

où $v_{z_j}(f)$ est la valuation de f en z_j , c'est-à-dire l'ordre de z_j si z_j est un zéro, et l'opposé de l'ordre de z_j si c'est un pôle, et $\text{Ind}_{\gamma}(z_j)$ est l'indice du point par rapport au lacet.

Si γ est un lacet simple positivement orienté formant le bord ∂K d'un compact K , la relation ci-dessus se réécrit :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z_{f,K} - P_{f,K}$$

où $Z_{f,K}$ et $P_{f,K}$ représentent respectivement le nombre de zéros et de pôles de f dans K comptés avec leur multiplicité.

Chapitre 2

Transformations conformes

L'ensemble des équations

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

définit en général une **transformation** ou une **représentation**, qui établit une correspondance entre les points du plan des w et les points du plan des z . Les équations (1) sont appelées équations de la transformation. Si à chaque point du plan des w correspond un point et un seul du plan des z , on parlera d'une transformation biunivoque. Dans un tel cas, un ensemble de points du plan des z tel qu'une courbe ou un ouvert connexe est appliqué sur un ensemble de points du plan des w courbe ou ouvert connexe et réciproquement. Les ensembles de points qui se correspondent ainsi dans les deux plans sont souvent dits images l'un de l'autre. Les principaux ouvrages utilisés sont [2],[4],[7],[6], pour rédiger ce chapitre qui porte sur les propriétés et les principaux théorèmes des transformations.

2.1 Définitions. Propriétés fondamentales

Supposons que le point (x_0, y_0) du plan des z soit transformé en un point (u_0, v_0) du plan des w [Figure (2.1)]. Supposons que les courbes C_1 et C_2 , se coupant en (x_0, y_0) sont respectivement transformées en C'_1 et C'_2 , se coupant en (u_0, v_0) .

Définition 2.1.1. Une transformation telle que l'angle entre C_1 et C_2 , en (x_0, y_0) est égal en grandeur au sens, à l'angle entre C'_1 et C'_2 en (u_0, v_0) , est dite conforme au point (x_0, y_0) .

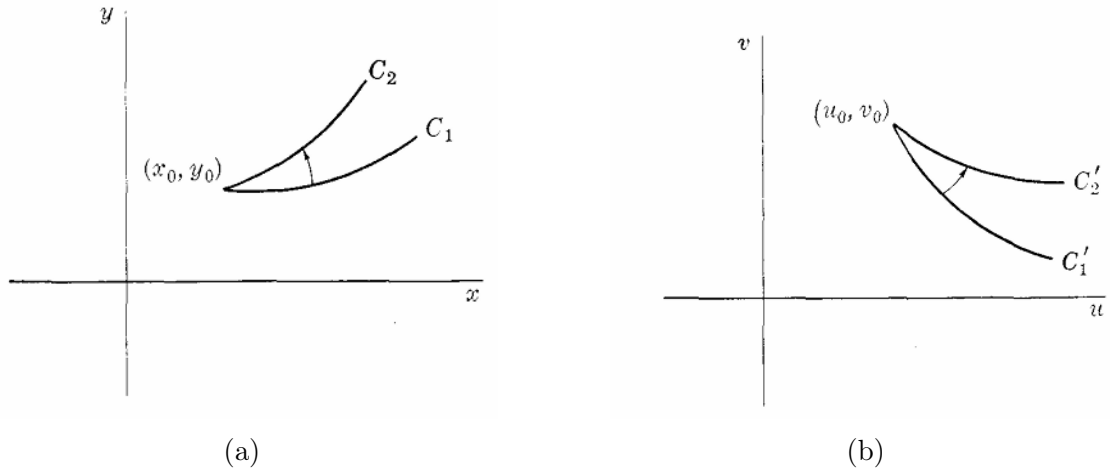


FIGURE 2.1

Remarque 2.1.1. Une transformation qui conserve les angles en grandeur mais pas nécessairement en sens, est dite isogonale. Par exemple, la transformation $\omega = \bar{z}$ transforme le premier quadrant ($z \geq 0; y \geq 0$) du plan des z en quatrième quadrant du plan ω , cette transformation est isogonale mais non conforme.

Théorème 2.1.1 (conformité des applications holomorphes). Soient Ω une partie ouverte non vide de \mathbb{C} , $f \in H(\Omega)$, $a \in \Omega$. Si $f'(a) \neq 0$ alors f est conforme au point a .

Démonstration. Soient C_1, C_2, C'_1, C'_2 comme auparavant avec $C_j(0) = a$, $j = 1, 2$; alors

$$C'_j(0) = f'(C_j(0))C'_j(0) = f'(a)C'_j(0), \quad j = 1, 2,$$

d'où

$$\frac{C'_2(0)}{C'_1(0)} = \frac{C'_2(0)}{C'_1(0)}$$

car $f'(a) \neq 0$; donc

$$\left(\frac{C'_2(0)}{C'_1(0)} \right) = \left(\frac{C'_2(0)}{C'_1(0)} \right).$$

□

Remarque 2.1.2. Notons que si $f'(a) = 0$, on aura $C'_j(0) = 0$, $j = 1, 2$, et l'angle orienté entre C_1 et C_2 au point $f(a)$ n'est pas défini si l'on adopte nos définitions. On peut, en fait, introduire d'autres définitions qui n'ont pas cet inconvénient mais le résultat auquel on arrive est le même : si $f'(a) \neq 0$, alors f *préserve les angles et leurs orientations*, si $f'(0) = 0$, ceci n'est pas le cas.

L'intérêt d'une définition plus générale est qu'elle permet une nouvelle caractérisation d'holomorphic : *si f est un homéomorphisme entre deux parties ouvertes non vides de \mathbb{C} et si f préserve les angles et leurs orientations en chaque point, alors f est holomorphe*. Nous n'aurons pas besoin de cette caractérisation ; la plupart du temps, nous utiliserons la conformité pour en déduire que l'image de deux droites perpendiculaires ou l'image d'une droite et d'un cercle qui s'intersectent orthogonalement donne des courbes qui s'intersectent aussi orthogonalement.

Le théorème d'inversion locale holomorphe suivant indique qu'une fonction holomorphe f avec $f'(a) \neq 0$ est localement une bijection et que la fonction réciproque est aussi holomorphe ; par contre, si $f'(a) = 0$ en un point a , alors f ne peut pas être localement bijective.

Théorème 2.1.2 (Théorème d'inversion locale holomorphe). *Soit f une fonction holomorphe dans une partie ouverte non vide Ω de \mathbb{C} .*

- i) Si $a \in \Omega$ et $f'(a) \neq 0$, alors il existe un voisinage ouvert $V \subset \Omega$ de a , et un voisinage ouvert W de $b = f(a)$ tels que f est une bijection entre V et W . De plus, la fonction inverse de W dans V est holomorphe.*
- ii) Si $a \in \Omega$ et $f'(a) = f^{(k-1)}(a) = 0$, $f^{(k)}(a) \neq 0$, $k \geq 2$, alors il existe un voisinage ouvert V de a , $V \subset \Omega$, et un voisinage ouvert W de $b = f(a)$ tels que $f(V) = W$ et pour tout $w \neq b$ dans W ,*

$$f^{-1}(w) = \{z \in V : f(z) = w\}$$

contient exactement k points ; en particulier, f n'est pas localement bijective.

- iii) Posons $f(\Omega) = \tilde{\Omega}$; si $f : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ est une application bijective, alors $f'(z) \neq 0$*

pour $z \in \Omega$ et l'application $g = f^{-1} : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ est holomorphe. De plus, si $w = f(z)$, alors $g'(w) = \frac{1}{f'(z)}$, $z \in \Omega$.

Démonstration. i) Soit $B(a; r)$ un disque ouvert contenu dans Ω nous montrons que si z, ζ sont dans $B(a; r)$ avec $z \neq \zeta$, alors

$$\left| \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} - f'(a) \right| \leq M_r = \sup_{|w-a|<r} |f'(w) - f'(a)|.$$

En effet, on a

$$f(z) - f(\zeta) - f'(a)(z - \zeta) = \int_{\zeta}^z f'(w) - f'(a) dw$$

car $p(w) = f(w) - wf'(a)$ est une primitive de la fonction intégrée, donc la valeur de l'intégrale est égale à $p(z) - p(\zeta)$ de cette forme intégrée on obtient (de l'inégalité principale pour les intégrales curvilignes)

$$|f(z) - f(\zeta) - f'(a)(z - \zeta)| \leq M_r |z - \zeta|.$$

Puisque $M_r \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow 0$, on peut déterminer un $r_0 > 0$ tel que non seulement $B(a; r_0)$ est contenu dans Ω mais que $M_{r_0} < |f'(a)|$, ce qui est possible car $f'(a) \neq 0$; alors, si z, ζ ($z \neq \zeta$) sont dans $B(a; r_0) \subset \Omega$, on aura $f(z) \neq f(\zeta)$ conduirait à la contradiction

$$|f'(a)| \leq M_{r_0} < |f'(a)|.$$

Posons $V = B(a; r_0)$, $W = f(V)$; on sait que W est un voisinage ouvert de $b = f(a)$, puisque f est injective dans V , f est une bijection entre V et W . Soit $g : W \rightarrow V$ la fonction réciproque de $f|_V$, c'est-à-dire

$$f(g(w)) = w, \quad w \in W, \quad g(f(z)) = z, \quad z \in V.$$

De ce qui précédé, on a g est continue; il reste à vérifier que g est holomorphe. En effet, si $w, w + h$ sont dans W , $h \neq 0$, alors

$$\frac{g(w + h) - g(w)}{h} = \frac{\zeta - z}{f(\zeta) - f(z)},$$

où ζ, z sont les uniques éléments de V tels que

$$f(\zeta) = w + h, \quad f(z) = w$$

ce qui donne $g(w + h) = \zeta, \quad g(w) = z$; puisque $\zeta \rightarrow z$ lorsque $h \rightarrow 0$ d'après la continuité de g , on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = f'(z)$$

Par conséquent :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(w + h) - g(w)}{h} = g'(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$

ii) D'après le développement de Taylor de f au point a , on sait que, pour z dans un disque ouvert centre en a ,

$$f(z) = b + \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

où $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{(n!)}$, $c_k \neq 0$; on a alors $f(z) = b + (z - a)^k c_k \varphi(z)$ ou $\varphi(z) = 1 + \frac{c_{k+1}}{c_k} (z - a) + \dots$. Puisque $\varphi(a) = 1$ et φ est holomorphe dans un disque ouvert centre en a , on peut choisir un $r > 0$ tel que $B(a; r)$ est contenu dans Ω , φ est holomorphe dans $B(a; r)$ et

$$|\varphi(z) - 1| < 1, \quad z \in B(a; r).$$

Posons

$$h(z) = (z - a) c_k^{\frac{1}{k}} (\varphi(z))^{\frac{1}{k}};$$

$$f(z) = b + h^k(z), \quad z \in B(a; r)$$

De plus, $h'(a) \neq 0$ car

$$h'(z) = c_k^{\frac{1}{k}} (\varphi(z))^{\frac{1}{k}} + (z - a)^{\frac{1}{k}} c_k^{\frac{1}{k}} \frac{1}{k} (\varphi(z))^{\frac{1}{k}-1} \varphi'(z)$$

d'où $h'(a) = c_k^{\frac{1}{k}} \neq 0$.

De la 1 ère partie, on conclut qu'il existe un voisinage ouvert V de a , $V \subset B(a; r)$ et un voisinage ouvert de 0 , que l'on peut choisir comme étant $B(0; \rho)$, tels que h est une bijection (holomorphe) entre V et $B(0; \rho)$; posons maintenant $W = B(b; \rho^k)$ et démontrons que pour tout $w \in W$ avec $w \neq b$, $f^{-1}(w)$ contient exactement k points. En effet, un tel w s'écrit comme $w = b + \zeta$ avec $0 < |\zeta| < \rho^k$;

Soient ζ_1, \dots, ζ_k les racines distinctes de $\zeta : \zeta_j^k = \zeta$, $j = 1, \dots, k$. Alors chaque $\zeta_j \in B(0; \rho)$; h étant une bijection entre V et $B(0; \rho)$, on aura k nombres distincts z_1, \dots, z_k dans V tels que $h(z_j) = \zeta_j$, $j = 1, \dots, k$. Donc on conclut que

$$f(z_j) = b + h^k(z_j) = b + \zeta = w, \quad j = 1, \dots, k;$$

d'autre part, si $z \in V$ est tel que $f(z) = w \in W$, $w \neq b$, alors on vérifie que $h^k(z) = \zeta = (w - b)$ d'où $h(z) = \zeta_j$ pour un j et $z = z_j$; au total, on a démontré que si $w \in W$ et $w \neq b$ alors

$$f^{-1}(w) = \{z_1, \dots, z_k\}.$$

iii) Puisque $f : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ est une bijection, on conclut que $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$; de plus, f étant une application ouverte, $\tilde{\Omega}$ est un ensemble ouvert et f est un homéomorphisme de sorte que si $g = f^{-1}$, $g : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ est continue. De la démonstration de (i), on voit que g est holomorphe.

□

La bijectivité locale dans le théorème précédent (sous l'hypothèse $f'(a) \neq 0$) aurait pu être démontrée directement en utilisant le théorème d'inversion locale de la théorie des fonctions réelles [1].

En effet, si $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, l'application

$$(x, y) \longmapsto (u(x, y), v(x, y))$$

est continûment dérivable ayant pour jacobien

$$J(a) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(a) = \det \begin{bmatrix} u'_x(a) & u'_y(a) \\ v'_x(a) & v'_y(a) \end{bmatrix};$$

en utilisant les équations de Cauchy-Riemann, on voit que

$$J(a) = (u'_x(a))^2 + (v'_x(a))^2 = |f'(a)|^2 > 0$$

ce qui garantit la bijectivité locale. Notons que le déterminant $J(a)$ est positif, ce qui indique que la transformation concernée préserve le sens des parcours.

Définition 2.1.2. Soient $\Omega, \widehat{\Omega}$ deux ensembles ouverts non vides dans \mathbb{C} . Une application bijective holomorphe $f : \Omega \rightarrow \widehat{\Omega}$ s'appelle une application conforme de Ω sur $\widehat{\Omega}$ et on dit parfois isomorphisme de Ω sur $\widehat{\Omega}$.

Définition 2.1.3. Soient $\Omega, \widehat{\Omega}$ deux ensembles ouverts non vides dans \mathbb{C} . S'il existe une application conforme de Ω sur $\widehat{\Omega}$, alors on dit que Ω et $\widehat{\Omega}$ sont conformément équivalents ou encore Ω et $\widehat{\Omega}$ est isomorphes.

Proposition 2.1.1. La relation \mathcal{R} définie par « être conformément équivalents » est une relation d'équivalence entre les ensembles ouverts non vides de \mathbb{C} .

Démonstration. Tout ensemble ouvert est évidemment conformément équivalent à lui-même (on prend $f(z) = z$). Donc \mathcal{R} est réflexive. Si Ω_1 est conformément équivalent à Ω_2 , alors Ω_2 est conformément équivalent à Ω_1 c'est à dire que \mathcal{R} est symétrique. La relation \mathcal{R} est transitive c'est à dire, si Ω_1 est conformément équivalent à Ω_2 et Ω_2 est conformément équivalent à Ω_3 , alors Ω_1 est conformément équivalent à Ω_3 . En effet, si $f_1 : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ et $f_2 : \Omega_2 \rightarrow \Omega_3$ sont des applications conformes concernées, alors $f = f_2 \circ f_1$ sera une application conforme de Ω_1 sur Ω_3 . \square

Notons l'automorphismes de Ω par $\text{aut}(\Omega)$ l'ensemble de toutes les applications conformes de Ω sur Ω .

Proposition 2.1.2. L'ensemble $\text{aut}(\Omega)$ est un groupe où la loi de multiplication est la composition des applications.

Par conséquent, si l'on connaît une application conforme $f : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$, alors toute application conforme $g : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ est de la forme $g = h \circ f$ avec $h \in \text{aut}(\tilde{\Omega})$. Il suffit de prendre $h = g \circ f^{-1}$.

Théorème 2.1.3. *L'espace \mathbb{C} et $U = \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$ ne sont pas isomorphes mais sont homéomorphes.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un isomorphisme $f : \mathbb{C} \rightarrow U$, alors f est une fonction entière bornée donc constante d'après le théorème de Liouville, contradiction.

Soient f un isomorphisme donné de D dans D' et g un isomorphisme quelconque, alors $f^{-1} \circ g = S : D \rightarrow D$ est un isomorphisme de D sur lui-même, i.e. un *automorphisme*. Réciproquement, pour tout automorphisme $S : D \rightarrow D$, $g = f \circ S$ est un isomorphisme : $D \rightarrow D'$.

Les automorphismes de D forment un groupe $\Gamma(D)$ et pour tout $S \in \Gamma(D)$,

$$S \mapsto S' = f \circ S \circ f^{-1} : D' \rightarrow D'$$

est un automorphisme de D' , d'où l'isomorphisme $(D) \simeq \Gamma(D')$. □

Lemme 2.1.1 (Schwarz). *Si f est holomorphe dans U , avec $f(0) = 0$,*

$|f(z)| \leq 1$ pour $z \in U$, alors on a :

i) $|f(z)| \leq |z|$ pour $z \in U$.

ii) $|f'(0)| \leq 1$.

Si $|f(\zeta)| = |\zeta|$ pour un $\zeta \in U \setminus \{0\}$ ou si $|f'(0)| = 1$, alors $f(z) = cz$ pour un c tel que $|c| = 1$.

Démonstration. Posons $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ si $z \neq 0$ avec $g(0) = f'(0)$ et on vérifie que g est holomorphe dans U en notant que

$$g(z) = f'(0) + \frac{f''(0)}{2!}z + \dots, \quad |z| < 1.$$

Si z est un point de U , on prend un r tel que $|z| < r < 1$; d'après le principe du

maximum.

$$|g(z)| \leq \sup_{|\zeta|=r} |g(\zeta)| = \frac{1}{r} \sup_{|\zeta|=r} |f(\zeta)| \leq \frac{1}{r}$$

quand $r \rightarrow 1$, on a $|g(z)| \leq 1$, ce qui donne (i) et (ii).

Si $|f(\zeta)| = |\zeta|$ pour un $\zeta \in U \setminus \{0\}$ ou si $f'(0) = 1$, alors on a $|g(\zeta)| = 1$ pour un $\zeta \in U$, c'est-à-dire un point ζ de U où $|g|$ atteint son maximum; ceci donne la constance de g d'après le principe du maximum, c'est-à-dire $g(z) \equiv c$, $|c| = 1$. \square

Comme conséquence du lemme de Schwarz, nous obtenons le théorème d'unicité des applications conformes sur le disque unité ouvert.

Théorème 2.1.4. *Soient f_1, f_2 deux applications conformes d'un domaine Ω sur U . Si $f_1(a) = f_2(a) = 0$ pour un $a \in \Omega$, alors $f_1(z) = cf_2(z)$, $z \in \Omega$, pour un c tel que $|c| = 1$; si, de plus, $f_1'(a) > 0, f_2'(a) > 0$ (ou, plus généralement $f_1'(a) = tf_2'(a)$ pour un $t > 0$), alors $f_1 = f_2$.*

Démonstration. Posons $f(z) = f_1(f_2^{-1}(z))$, $z \in U$; alors $f : U \rightarrow U$ est une bijection holomorphe telle que

$$f(0) = f_1(f_2^{-1}(0)) = f_1(a) = 0.$$

D'après le lemme de Schwarz, on a

$$|f(z)| \leq |z|, \quad z \in U.$$

Le même raisonnement appliqué à $f^{-1} : U \rightarrow U$ donne

$$|f^{-1}(z)| \leq |z|, \quad z \in U.$$

Puisque $|f(z)| \leq |z| = |f^{-1}(f(z))| \leq |f(z)|$, $z \in U$, on en déduit que $|f(z)| = |z|$, $z \in U$, d'où (d'après le lemme de Schwarz) $f(z) = cz$, $z \in U$, pour un c de module 1. Ainsi,

$$f_1(f_2^{-1}(z)) = cz, \quad z \in U,$$

d'où, en posons $\zeta = f_2^{-1}(z)$,

$$f_1(\zeta) = cf_2(\zeta), \quad \zeta \in \Omega.$$

Si, de plus, $f'_1(a) = tf'_2(a)$, on aura $t = cd$ d'où $t = |c| = 1$ et donc $c = 1$. □

2.2 Principaux théorèmes des transformations conformes

2.2.1 Théorème de Darboux

Lemme 2.2.1. *Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante, Ω étant un domaine (Un ouvert connexe) de \mathbb{C} ; alors f est une application ouverte. En particulier, si V est un domaine contenu dans Ω , alors $f(V)$ est un domaine.*

Théorème 2.2.1. *Soit Ω un domaine du plan complexe \mathbb{C} dont la frontière est formée d'une courbe de Jordan C , C^1 par morceaux. Soit f une fonction holomorphe dans une partie ouverte contenant Ω . Si f est injective dans C , alors f donne une application conforme de Ω sur $f(\Omega)$.*

Démonstration. Puisque f est une fonction holomorphe non constante, alors d'après le lemme 2.2.1 $f(\Omega)$ est un domaine. Il faut démontrer que f est injective dans Ω . Posons $\tilde{C} = f(C)$; d'après l'hypothèse d'injectivité de f dans C , \tilde{C} est aussi une courbe de Jordan, C^1 par morceaux. Posons D_1 pour le domaine borné et D_2 pour le domaine non borné déterminés par \tilde{C} (en utilisant le théorème de Jordan), avec $C = D_1 \cup \tilde{C} \cup D_2$.

Soit $D_1 = \partial D_2 = \tilde{C}$, D_1 et D_2 étant deux à deux disjoints Figure 2.2. Soit $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \tilde{C}$; démontrons que si $w_0 \in D_1$, alors il existe un unique $z_0 \in \Omega$ tel que $f(z_0) = w_0$. En effet, si γ est un paramétrage approprié de C (orientation positive par rapport au domaine intérieur Ω de C), alors $f \circ \gamma = \tilde{\gamma}$ donne un paramétrage de \tilde{C} ; pour $w_0 \in D_1$, on a

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{\gamma}} \frac{dw}{w - w_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z) dz}{f(z) - w_0}. \quad (2)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz = \sum_{j=1}^N n_j - \sum_{j=1}^M m_j = Z(f - a; D) - P(f; D). \quad (3)$$

D'après le principe de l'argument

Pour établir l'équation (2), on remarque d'abord que $f(\gamma(t)) \neq w_0$ pour toutes les valeurs du paramètre t utilisé pour γ ;

L'égalité entre les deux intégrales de l'équation (2) découle immédiatement de la définition de ces intégrales; la valeur de la seconde intégrale, d'après l'équation (3), est un nombre entier positif (éventuellement nul) égal à la multiplicité des solutions de l'équation $f(z) = w_0$ pour z dans Ω .

Puisque $\tilde{\gamma}$ est positivement orienté ou non (par rapport à D_1). On en conclut que $\tilde{\gamma}$ est positivement orienté et que la valeur commune dans l'équation (2) est bien $+1$.

De l'équation(2) on conclut, qu'il existe un unique $z_0 \in \Omega$ tel que $f(z_0) = w_0$ (avec $f'(z_0) \neq 0$).

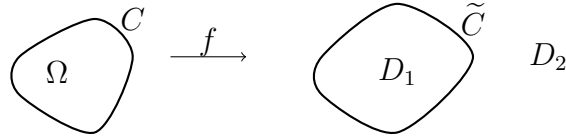


FIGURE 2.2

De même, on démontre que si $w_0 \in D_2$ alors $w_0 \notin f(\Omega)$, c'est-à-dire $w_0 \neq f(z)$ pour z dans Ω ; en effet, si $w_0 \in D_2$, on a

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{\gamma}} \frac{dw}{w - w_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z) dz}{f(z) - w_0}$$

qui entraîne $f(z) \neq w_0$ pour $z \in A$.

On conclut que $D_1 \subset f(\Omega)$, $D_2 \subset \mathbb{C} \setminus f(\Omega)$, d'où

$$D_1 \subset f(\Omega) \subset \mathbb{C} \setminus D_2 = D_1 \cup \tilde{C} = \overline{D_1}. \quad (4)$$

Puisque $f(\Omega)$ est ouvert, on conclut d'après (1) que $f(\Omega) = D_1$; on a déjà vu que chaque $w_0 \in D_1$ correspond à un seul $z_0 \in \Omega$ tel que $f(z_0) = w_0$; ainsi, f est une application conforme de Ω sur $f(\Omega)$. \square

Il est bien clair que deux ensembles ouverts ne peuvent être conformément équivalents que lorsqu'ils sont homéomorphes; le théorème de Riemann que nous dé-

montrons dans la suite montre que si un domaine $\Omega \neq \mathbb{C}$ est homéomorphe à U alors Ω est conformément équivalent à U .

2.2.2 Théorème de Riemann

Théorème 2.2.2. *Soit Ω un domaine élémentaire de \mathbb{C} avec $\Omega \neq \mathbb{C}$; si $a \in \Omega$, il existe une unique application conforme φ de Ω sur U telle que $\varphi(a) = 0$, $\varphi'(a) > 0$.*

Démonstration. L'unicité de φ a déjà été démontrée dans le théorème 2.1.4; on a aussi vu que la condition $\Omega \neq \mathbb{C}$ est bien nécessaire.

Posons \mathcal{F} la famille de fonctions f , injectives et holomorphes dans Ω , telles que

$$f(a) = 0, \quad f'(a) > 0, \quad |f(z)| < 1, \quad z \in \Omega.$$

Démontrons d'abord que \mathcal{F} est non vide; puisque $\Omega \neq \mathbb{C}$, il existe un $\alpha \notin \Omega$; soit g une racine carrée, de la fonction $z \mapsto (z - \alpha)$, $z \in \Omega$, $g^2(z) = z - \alpha$, $z \in \Omega$, dont l'existence est garantie par le fait que Ω est un domaine élémentaire et $z - \alpha \neq 0$, $z \in \Omega$. Notons que g est injective dans Ω et $g(a) \neq 0$; de plus, $g(z_1) \neq -g(z_2)$ pour z_1, z_2 dans Ω . Soit $\varepsilon > 0$ tel que

$$g(\Omega) \supset B(g(a); \varepsilon) = \{w : |w - g(a)| < \varepsilon\};$$

l'existence de ε est garantie par le fait que $g(\Omega)$ est un domaine; alors

$$g(\Omega) \cap B(-g(a); \varepsilon) = \emptyset, \tag{5}$$

car sinon, on aurait un $z_1 \in \Omega$ tel que $|g(z_1) + g(a)| < \varepsilon$ d'où on aurait un $z_2 \in \Omega$ tel que $g(z_2) = -g(z_1)$, ce qui est impossible. Pour $z \in \Omega$, posons

$$h(z) = c \frac{g(z) - g(a)}{g(z) + g(a)}, \quad c = \frac{\varepsilon |g(a)|g'(a)}{4 |g(a)|^2 g'(a)};$$

h est holomorphe et injective dans Ω (car g est holomorphe et injective dans Ω avec

$g(z) \neq -g(a)$, $z \in \Omega$). Aussi, $h(a) = 0$ et un petit calcul montre que

$$h'(a) = \frac{c g'(a)}{2 g(a)} = \frac{\varepsilon |g'(a)|}{8 |g(a)|^2} > 0.$$

De plus, on a

$$\left| \frac{g(z) - g(a)}{g(z) + g(a)} \right| = |g(a)| \left| \frac{1}{g(a)} - \frac{2}{g(z) + g(a)} \right|$$

D'après l'équation (5)

$$|g(z) + g(a)| \geq \varepsilon, \quad z \in \Omega,$$

d'où $2|g(a)| \geq \varepsilon$; ainsi,

$$\left| \frac{g(z) - g(a)}{g(z) + g(a)} \right| \leq |g(a)| \left(\frac{2}{\varepsilon} + \frac{2}{\varepsilon} \right) = \frac{4}{\varepsilon} |g(a)|, \quad z \in \Omega,$$

Par conséquent,

$$|h(z)| \leq \frac{4}{\varepsilon} |g(a)| |c| = 1, \quad z \in \Omega.$$

Au total, on a donc établi que $h \in \mathcal{F}$. Posons

$$\sup\{f'(a) : f \in \mathcal{F}\} = M \leq \infty.$$

Il existe alors une suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans \mathcal{F} telle que $f_n(a) \rightarrow M$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Puisque \mathcal{F} est une famille normale dans Ω , il existe une sous-suite $\{f_{n_k}\}$ qui converge vers une fonction φ holomorphe dans Ω , la convergence étant uniforme dans toute partie compacte de Ω (théorème de Montel). D'après le théorème de Weierstrass, $f_{n_k} \rightarrow \varphi'(z)$ ($k \rightarrow \infty$) pour tout $z \in \Omega$. Il est alors évident que $\varphi(a) = 0$, $|\varphi(z)| \leq 1$ pour $z \in \Omega$ et $\varphi'(a) = M$, ce qui montre aussi que $M < \infty$. Puisque $\varphi'(a) > 0$, φ n'est pas une fonction constante; puisqu'elle est une limite des fonctions injectives f_{n_k} , on conclut du théorème d'injectivité que φ est injective dans Ω . Puisque $|\varphi(z)| \leq 1$, $z \in \Omega$, et d'autre part $\varphi(\Omega)$ est un domaine, on conclut que $\varphi(\Omega) \subset U$.

Démontrons que $\varphi(\Omega) = U$. Sinon, on aurait $\beta \in U$ tel que $\varphi(z) \neq \beta$, $z \in \Omega$;

considérons alors la fonction

$$z \mapsto \frac{\varphi(z) - \beta}{1 - \overline{\beta}\varphi(z)}, \quad z \in \Omega,$$

qui est une fonction holomorphe dans Ω ne s'annulant jamais dans Ω (et dont les valeurs seraient toujours dans U ; d'après proposition 3.2.2). Soit ψ une racine carrée de cette fonction, holomorphe dans Ω , c'est-à-dire

$$\psi^2(z) = \frac{\varphi(z) - \beta}{1 - \overline{\beta}\varphi(z)}, \quad z \in \Omega;$$

posons

$$F(z) = c \frac{\psi(z) - \psi(a)}{1 - \psi(a)\psi(z)}, \quad c = \frac{|\psi'(a)|}{\psi'(a)}, \quad z \in \Omega.$$

Notons que ψ , et donc F , sont des fonctions injectives et holomorphes dans Ω , à valeurs dans U ; aussi, $F(a) = 0$; un calcul montre que

$$F'(a) = \frac{|\psi'(a)|}{1 - |\psi(a)|^2} = \frac{1 + |\beta|}{2|\beta|^{1/2}} \varphi'(0).$$

Ainsi, $F'(a) > 0$, ce qui montre que $F \in \mathcal{F}$; d'autre part, l'inégalité $\frac{1 + |\beta|}{2} > |\beta|^{1/2}$ et le fait que $\varphi'(0) = M$ montrent que $F'(a) > M$, ce qui contredit la définition de M . On conclut que

$$\varphi(\Omega) = U.$$

□

Remarque 2.2.1. La dernière partie de la démonstration précédente peut être vue comme la preuve de l'affirmation générale suivante : soit $\varphi : \Omega \rightarrow U$ une fonction holomorphe injective telle que $\varphi(a) = 0$; si φ n'est pas surjective, alors il existe une fonction $F : \Omega \rightarrow U$, holomorphe, injective, $F(a) = 0$ avec $|F'(a)| > |\varphi'(a)|$.

Chapitre 3

Transformations particulières

Les transformations particulières sont des outils puissants en mathématiques et en physique pour étudier les propriétés géométriques et analytiques des fonctions et des formes. Elles incluent des transformations linéaires, de Möbius, exponentielles, puissance, Joukowski. Chacune de ces transformations a des propriétés et des applications spécifiques, notamment en analyse complexe, en géométrie et en modélisation physique (voir [8],[2],[3],[5]).

3.1 Transformations élémentaires fondamentales

3.1.1 Translation $w = z + \beta$

Définition 3.1.1. *On appelle translation toute fonction complexe de la forme $\omega = z + \beta$ ou β est un nombre complexe différent de zéro donnée.*

Posons $z = x + iy$ et $\beta = x_0 + iy_0$, alors

$$\omega = f(z) = f(x + iy) = (x + iy) + (x_0 + iy_0) = (x + x_0) + i(y + y_0).$$

Donc l'image du point de coordonnées (x, y) par la transformation f est le point de coordonnées $(x + x_0, y + y_0)$. Une translation est une transformation conforme car $f'(z) = 1$.

Exemple : On considère le domaine rectangulaire \mathcal{R} du plan des z , limité par

$x = 0, y = 0, x = 2, y = 1$. Déterminons l'image du domaine \mathcal{R}' par la transformation $w = z + (1 - 2i)$.

- On a $w = z + (1 - 2i)$, alors $u + iv = z + iy + 1 - 2i = (x + 1) + i(y - 2)$ et $u = x + 1, v = y - 2$.

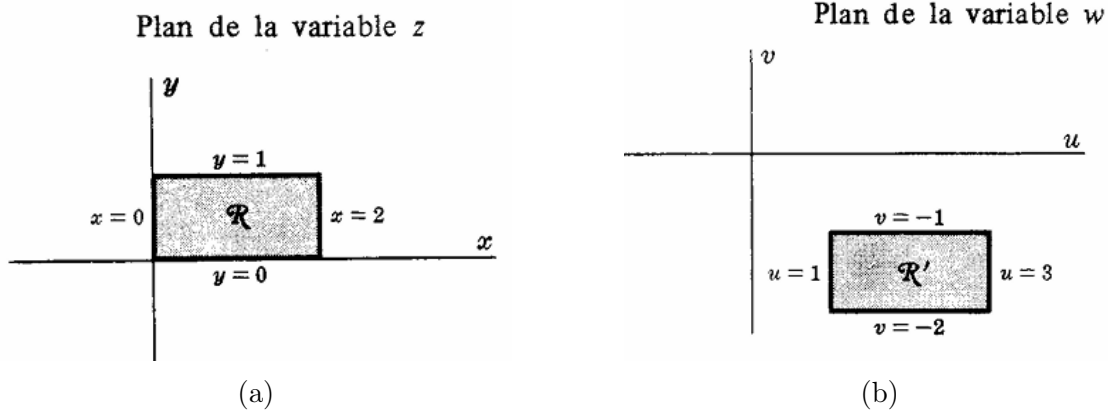


FIGURE 3.1

La droite $x = 0$ est transformée en $u = 1$; $y = 0$ en $v = -2$; $x = 2$ en $u = 3$; $y = 1$ en $v = -1$ [Figure (3.1.b)].

Tout point de \mathcal{R} est transformé en un point et un seul de \mathcal{R}' réciproquement.

La transformation fait subir une translation au rectangle.

En général $w = z + \beta$ fait subir une translation a tout domaine.

3.1.2 Homothétie, rotation

Définition 3.1.2. Soit la transformation $\omega = \alpha z$, on distingue alors plusieurs cas :

Si α est un nombre réel positif, alors la transformation w est une homothétie de rapport α .

Si $|\alpha| = 1$, alors la transformation w est une rotation.

Si α est un nombre complexe quelconque, alors écrivons les nombres α, z sous la forme polaire $\alpha = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z = r e^{i\theta}$. Alors $\omega = \alpha z = (r_1 e^{i\theta_1})(r e^{i\theta}) = r r_1 e^{i(\theta_1 + \theta)}$.

C'est la composition d'une homothétie et d'une rotation. Elles sont conformes.

Exemple : On considère le domaine rectangulaire \mathcal{R} du plan des z , limité par $x = 0, y = 0, x = 2, y = 1$.

Déterminons le domaine \mathcal{R}' du plan des w en lequel \mathcal{R} est transformé par $\omega = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$

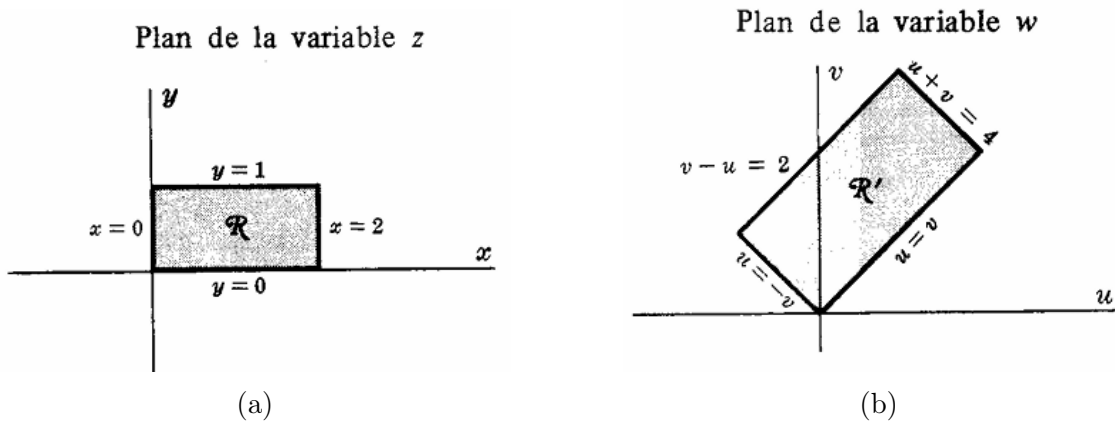


FIGURE 3.2

— On a $w = \sqrt{2}e^{i\pi/4}z$, alors $u+iv = (1+i)(x+iy) = x-y+i(x+y)$ et $u = 5-y$,
 $v = x+y$.

La droite $x = 0$ est transformée en $u = -y$, $v = y$ ou $u = -v$; $y = 0$ en
 $u = x$, $v = x$ ou $u = v$; $x = 2$ en $u = 2$, $v = 2+y$ ou $u+v = 4$; $y = l$ en
 $u = x-l$, $v = x+l$ ou $v-u = 2$ [Figure 3.2.a] [Figure 3.2.b].

La transformation se décompose en une rotation (d'angle $\pi/4$) et une homothétie de rapport $\sqrt{2}$.

Remarque 3.1.1.

1. Pour une homothétie c'est la taille de la figure (le domaine) qui change dans le plan complexe mais la forme de la figure ne change pas.
2. La rotation ne change ni la forme ni la taille d'une figure.

3.1.3 Transformation linéaire

Définition 3.1.3. La transformation $w = \alpha z + \beta$ ou α et β sont des constantes complexes est appelée une transformation linéaire.

Étant donné que l'on peut écrire l'équation au moyen des transformations successives $w = \zeta + \beta$, $\zeta = e^{i\theta_0}\tau$, $\tau = \alpha z$ ou $\alpha = ae^{i\theta_0}$, on voit que la transformation linéaire la plus générale s'exprime sous forme de produit de transformations telles que translation, rotation, homothétie. Pour $a \neq 0$ la transformation est conforme.

3.1.4 Transformation $\omega = z^2$

Soit la fonction complexe définie dans \mathbb{C} par $\omega = z^2$. Écrivons z sous la forme polaire $z = re^{i\theta}$, alors on a $\omega = r^2e^{2i\theta}$. On voit que le module ω est r^2 et que son argument vaut deux fois l'argument de z . Alors l'image par ω est obtenue par une homothétie de rapport r puis une rotation d'angle θ . Représentons z et ω dans le même plan .

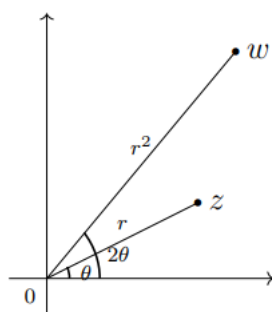


FIGURE 3.3 – Transformation $\omega = z^2$

La transformation $w = z^2$ est conforme partout sauf en $z = 0$. Elle préserve les angles entre les courbes qui se croisent en tout point $z \neq 0$.

Exemple : Déterminons l'image de la droite $x = 1$ par la fonction $w = z^2$ avec une illustration graphique. Soit C l'ensemble des points de la droite $x = 1$, ce qui signifie que $z = 1 + iy$, ou $-\infty < y < \infty$. On a $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Ainsi

$$\begin{cases} u(x, y) = x^2 - y^2 \\ v(x, y) = 2xy \end{cases}$$

En posons $x = 1$

$$\begin{cases} u = 1 - y^2 \\ v = 2y \end{cases}$$

Pour $-\infty < y < \infty$, en substituant $y = \frac{v}{2}$ dans les équations, on trouve

$$u = 1 - \left(\frac{v}{2}\right)^2.$$

Cela représente l'équation d'une parabole. Ainsi, l'image de la droite C est l'ensemble C' , qui est une parabole dont les points sont illustres dans la figure.

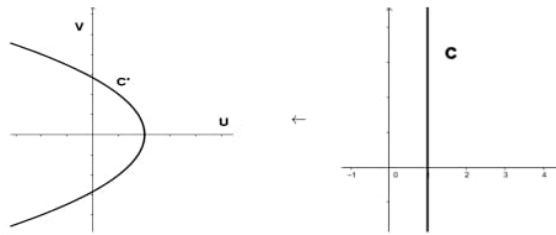


FIGURE 3.4

3.1.5 Transformation $\omega = z^n, n \geq \frac{1}{2}$

La transformation $\omega = z^n, n \geq \frac{1}{2}$ est une transformation conforme sauf au point $z = 0$. Par cette transformation, l'image du secteur d'angle $\alpha = \frac{\pi}{n}$ est le demi-plan supérieur $\text{Im } z \geq 0$. Soit z appartenant au secteur d'angle α , écrivons z sous la forme polaire $z = re^{i\theta}$ avec $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{n}$. Donc $z^n = r^n e^{in\theta}$ et $0 \leq n\theta \leq \pi$.

3.1.6 Inversion $\omega = \frac{1}{z}$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, écrivons z sous la forme polaire $z = re^{i\theta}$. Alors

$$\omega = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}.$$

D'après cette dernière équation, on voit que le module de la fonction inverse ω est l'inverse du module de z et l'argument de ω est l'argument de z multiplié par (-1) . Par conséquent, la fonction inverse ω transforme un point du plan z de coordonnées (r, θ) en un point de coordonnées $\left(\frac{1}{r}, -\theta\right)$

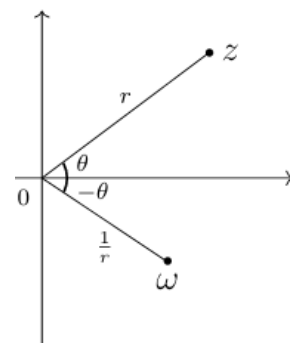


FIGURE 3.5 - Inversion $\omega = \frac{1}{z}$

Lemme 3.1.1. 1) L'équation d'un cercle dans un plan complexe est donnée par $\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}z + \gamma = 0$ ou α, γ sont des constantes réelles et β un nombre complexe donnés.

2) L'équation d'une droite dans le plan complexe est donnée par $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \beta = 0$ avec α un nombre complexe et β un nombre réel donnés

Théorème 3.1.1. [3] La transformation $w = \frac{1}{z}$ transforme les cercles et les droites en des cercles ou en des droites.

Remarque 3.1.2. Si on considère le plan complet (i.e avec le point ∞), $w = \frac{1}{z}$ est une application injective bicontinue du plan complet sur lui-même . Le point 0 est envoyé en point ∞ et le point ∞ en 0. De plus, cette transformation est conforme. La transformation $w = \frac{1}{z}$ est conforme partout sauf en $z = 0$. En $z = 0$ la fonction n'est pas applicable.

Exemple : Lorsque $w = \frac{1}{z}$, le demi-plan $x \geq c_1 (c_1 > 0)$ est transformé en le disque

$$\left(u - \frac{1}{2c_1}\right)^2 + v^2 \leq \left(\frac{1}{2c_1}\right)^2. \quad (6)$$

En effet, toute ligne $x = c (c \geq c_1)$ est transformée en le cercle

$$\left(u - \frac{1}{2c}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2c}\right)^2. \quad (7)$$

De plus, lorsque c augmente en prenant toutes les valeurs supérieures à c_1 , les lignes $x = c$ se déplacent vers la droite et les cercles images (7) rétrécissent en taille. (Voir Figure 3.6)

Puisque les lignes $x = c$ passent par tous les points du demi-plan $x \geq c_1$ et que les cercles (7) passent par tous les points du disque (6), la transformation est établie.

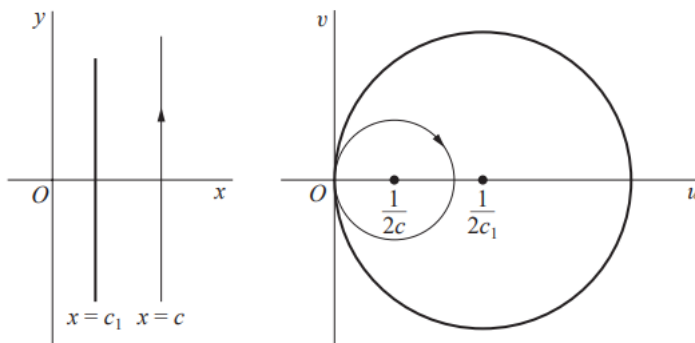


FIGURE 3.6

3.2 Transformations homographiques

Soient a, b, c et d des nombres complexes. La transformation $\omega = \frac{az + b}{cz + d}$ avec

$$\det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

est appelée transformation homographique ou transformation bilinéaire ou parfois une transformation de Möbius.

Le déterminant doit être différent de zéro, autrement la transformation se réduit à une constante $\omega = \frac{a}{c}$. Le domaine de définition d'une transformation homographique est $\mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\}$. De plus, puisque la dérivée $f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0$ alors d'après le théorème 2.1.1, la transformation homographique est une transformation conforme dans $\mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\}$. La transformation linéaire est un cas particulier d'une transformation homographique (il suffit de prendre $c=0$)

Si $a = 0$, alors la transformation $\omega = \frac{b}{cz + d}$ est une transformation linéaire suivie d'une inversion. Étudions maintenant le cas où $c \neq 0$ et $a \neq 0$. Dans ce cas, on peut écrire la transformation ω sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a \left(z + \frac{b}{a} \right)}{c \left(z + \frac{d}{c} \right)} = \frac{a \left(z + \frac{d}{c} \right) - \frac{d}{c} + \frac{b}{a}}{c \left(z + \frac{d}{c} \right)} \\ &= \frac{a}{c} \left(1 + \frac{\frac{b}{a} + \frac{d}{c}}{z + \frac{d}{c}} \right) = \frac{a}{c} \left(1 + \frac{\frac{bc - ad}{ac}}{\frac{cz + d}{c}} \right). \end{aligned}$$

D'où $\omega = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{cz + d}$. Posons $A = b - \frac{ad}{c}$ et $B = \frac{a}{c}$. On voit qu'une transformation homographique peut être exprimée comme la composition d'une transformation linéaire $\omega_1 = cz + d$ suivie de la fonction inverse $\omega_2 = \frac{1}{\omega_1}$ suivie d'une autre transformation linéaire $\omega = A\omega_2 + B$.

On peut l'écrire sous la forme

$$\omega = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a \left(z + \frac{b}{a} \right)}{c \left(z + \frac{d}{c} \right)} = \frac{\varphi(z)}{z - \frac{-d}{c}}$$

où $\varphi(z) = \frac{a}{c}z + \frac{b}{c}$. Comme $ab - bc \neq 0$ alors $\varphi\left(\frac{-d}{c}\right) \neq 0$. On déduit alors que le point $z_0 = -\frac{d}{c}$ est un pôle simple de la transformation ω .

Calculons les limites de $\omega = f(z)$ quand z tend vers $-\frac{d}{c}$ et z tend vers l'infini, on a $\lim_{z \rightarrow \frac{d}{c}} \frac{az + b}{cz + d} = \infty$ et $\lim_{z \rightarrow \frac{d}{c}} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c}$. Par conséquent,

$$\omega = f(z) = \begin{cases} \frac{az + b}{cz + d} & z \neq -\frac{d}{c}; \\ \frac{a}{c} & z = -\frac{d}{c}; \\ \infty & z = -\frac{d}{c}. \end{cases}$$

Remarque 3.2.1. La fonction réciproque (l'inverse) est un cas particulier d'une transformation homographique où $a = 0, b = 1, c = 1$ et $d = 0$ dont les propriétés géométriques ont déjà été étudiées.

La transformation homographique est injective. En effet,

$$f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d}$$

$$\Rightarrow (az_1 + b)(cz_2 + d) = (az_2 + b)(cz_1 + d)$$

$$\Rightarrow (ad - bc)z_1 = (ad - bc)z_2$$

$$\Rightarrow z_1 = z_2.$$

D'où l'injectivité de ω .

Par conséquent, une transformation homographique est une bijection de $\mathbb{C} \cup \infty$ dans $\mathbb{C} \cup \infty$, f^{-1} l'inverse de f existe. De plus, f^{-1} est aussi une transformation homographique. Soit $\omega = \frac{az + b}{cz + d}$ alors $\omega zc + \omega d = az + b$, c'est à dire $(\omega c - a)z = b - \omega d$. Donc $z = \frac{-d\omega + b}{c\omega - a}$. D'où

$$f^{-1}(\omega) = \begin{cases} \frac{d\omega - b}{-c\omega + a} & \omega \neq \frac{a}{c}; \\ \infty & \omega = \frac{a}{c}; \\ -\frac{d}{c} & \omega = \infty. \end{cases}$$

Exemple : Déterminons l'image du disque unité par la transformation $w_1 = \frac{1}{z - i}$. w_1 est la composition d'une translation $w_{11} = z - i$ suivant le vecteur $B(0, -1)$ suivie d'une inversion $w_{12} = \frac{1}{w_{11}}$.

FIGURE 3.7 – 1. Disque unité initial

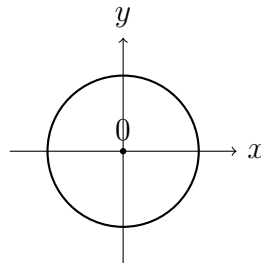
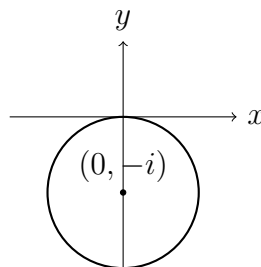
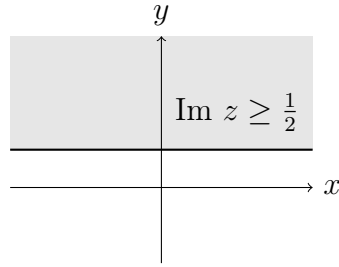


FIGURE 3.8 – 2. Translation du disque



L'image du disque unité par ω_{11} est le disque de centre $(0, -1)$ et de rayon $R = 1$, c'est-à-dire le disque $|w + i| = 1$.

FIGURE 3.9 – 3. Inversion du disque



L'image du disque $|w + i| = 1$ est le demi-plan $y = \frac{1}{2}$. L'image du point $p = (0, -1)$ à l'intérieur du disque $|w + i| = 1$ est le point $p' = (0, 1)$.

$$\begin{cases} u = \frac{x}{x^2 + y^2}, & u = 0 \\ v = \frac{-y}{x^2 + y^2}, & v = 1 \end{cases}$$

D'où l'image du disque unité par ω_1 est le demi-plan supérieur $\text{Im } z \geq \frac{1}{2}$.

Proposition 3.2.1. *Toute application conforme de \mathbb{C} sur \mathbb{C} est donnée par une fonction homographique du type $f(z) = az + b$, $a \neq 0$. Toute application conforme $\widehat{\mathbb{C}}$ sur $\widehat{\mathbb{C}}$ est donnée par une fonction homographique.*

Démonstration. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une application bijective et holomorphe; puisque f est une fonction entière,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n, \quad z \in \mathbb{C};$$

si f n'est pas un polynôme, la fonction g donnée par

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in \mathbb{C}^*,$$

aura une singularité essentielle au point $z = 0$; en posons U le disque unité, $W = \{z : |z| > 1\}$, on observe d'abord que $f(U)$ et $f(W)$ sont des ensembles ouverts non vides qui sont disjoints à cause de l'injectivité de f ; donc

$$g(U) = f(W) \subset \{f(U)\}^c.$$

Or d'après le théorème de Casaroti-Weierstrass, $\overline{g(U)} = \mathbb{C}$, ce qui entraîne que $\{f(U)\}^c = \mathbb{C}$, d'où $f(U) = \emptyset$; ceci est une contradiction.

Maintenant, un polynôme non constant f qui est injectif doit être nécessairement de degré 1 car si le degré de f était $n \geq 2$, on aurait des points z tels que $f'(z) = 0$, contredisant l'injectivité de f . Ainsi $f(z)$ est de la forme $az + b$, $a \neq 0$.

Soit $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ une application conforme; si $f(\infty) = \infty$, on aura le cas précédent; sinon, il existe $p \in \mathbb{C}$ et $q \in \mathbb{C}$ tels que $f(p) = \infty$, $f(\infty) = q$ dans le sens que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = q$, et p est un pôle de f . En passant à $g(z) = f(z + p) - q$ on aura $g : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ une application conforme telle que $g(0) = \infty$, $g(\infty) = 0$; posons

$h = \frac{1}{g}$; puisque $\lim_{z \rightarrow 0} h(z) = 0$ On peut considérer $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ comme une application holomorphe bijective avec $h(0) = 0$, $|h(z)| \rightarrow \infty$ lorsque $|z| \rightarrow \infty$. De la première partie de la démonstration, on déduit $h(z) = \alpha z$ ($\alpha \neq 0$) d'où

$$f(z) = g(z - p) + q = \frac{1}{\alpha(z - p)} + q,$$

ce qui est une fonction homographique. \square

Théorème 3.2.1. *Soit une transformation homographique définie par la donnée de trois points distincts du plan des z, z_1, z_2 et z_3 et leurs trois points transformés dans le plan $\omega, \omega_1, \omega_2$ et ω_3 respectivement. Alors*

$$\frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_3} \frac{\omega_2 - \omega_3}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \quad (8)$$

Démonstration. Pour démontrer ce théorème, il suffit de vérifier en substituant dans l'équation (8) les valeurs $\omega_i = \frac{az_i + b}{cz_i + d}$. Si ω_i correspond à z_i pour $i = 1, 2, 3$ alors on a

$$\begin{aligned} \omega - \omega_i &= \frac{az + b}{cz + d} - \frac{az_i + b}{cz_i + d} \\ &= \frac{(az + b)(cz_i + d) - (az_i + b)(cz + d)}{(cz + d)(cz_i + d)} \\ &= \frac{ad(z - z_i) + bc(z_i - z)}{(cz + d)(cz_i + d)} \\ &= \frac{(ad - bc)(z - z_i)}{(cz + d)(cz_i + d)}. \end{aligned}$$

On obtient alors,

$$\begin{aligned} \omega - \omega_1 &= \frac{(ad - bc)(z - z_1)}{(cz + d)(cz_1 + d)} \quad ; \quad \omega - \omega_3 = \frac{(ad - bc)(z - z_3)}{(cz + d)(cz_3 + d)} \quad ; \\ \omega_2 - \omega_1 &= \frac{(ad - bc)(z_2 - z_1)}{(cz_2 + d)(cz_1 + d)} \quad ; \quad \omega_2 - \omega_3 = \frac{(ad - bc)(z_2 - z_3)}{(cz_2 + d)(cz_3 + d)}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_3} = \frac{(z - z_1)(cz_3 + d)}{(cz_1 + d)(z - z_3)} \quad ; \quad \frac{\omega_2 - \omega_3}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{(z_2 - z_3)(cz_1 + d)}{(cz_3 + d)(z_2 - z_1)}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_3} \cdot \frac{\omega_2 - \omega_3}{\omega_2 - \omega_1} &= \frac{(z - z_1)(cz_3 + d)}{(cz_1 + d)(z - z_3)} \frac{(z_2 - z_3)(cz_1 + d)}{(cz_3 + d)(z_2 - z_1)} \\ &= \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}. \end{aligned}$$

Si l'équation (8) est modifiée correctement, elle peut également être utilisée lorsque le point à l'infini est l'un des points prescrits dans le plan (étendu) z ou

w . Supposons, par exemple, que $z_1 = \infty$. Étant donnée que toute transformation fractionnaire linéaire est continue sur le plan étendu, il suffit de remplacer z_1 dans le membre de droite de l'équation (8) par $\frac{1}{z_1}$, de simplifier les fractions et de laisser z_1 tendre vers zéro. \square

Exemple : Construire une transformation homographique qui transfère les points $z_1 = 1; z_2 = 0; z_3 = -1$ respectivement en les points $w_1 = i; w_2 = \infty; w_3 = 1$. Dans ce cas, nous utilisons la modification

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

de l'équation (8), qui nous dit que

$$\frac{w - i}{w - 1} = \frac{(z - 1)(0 + 1)}{(z + 1)(0 - 1)}.$$

En résolvant ici pour w , nous obtenons la transformation

$$w = \frac{(i + 1)z + (i - 1)}{2z}.$$

3.2.1 Applications conformes des demi-plans

Théorème 3.2.2. Soient $D = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ le demi-plan supérieur de \mathbb{C} et U le disque unité. Toute application conforme de D sur U est donnée par une fonction homographique de la forme

$$f(z) = c \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}$$

où c, α sont des constantes complexes telles que $|c| = 1, \text{Im } \alpha > 0$.

Démonstration. Considérons d'abord la fonction homographique g donnée par $g(z) = \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}$ où α est un point de D . Puisque, pour $x \in \mathbb{R}, |x - \alpha| = |x - \bar{\alpha}|$

on voit que $|g(x)| = 1$ si $x \in \mathbb{R}$; donc $g(\widehat{\mathbb{R}}) = C = \{w : |w| = 1\}$ (le cercle unité) où $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Soit D_- le demi-plan inférieur ($\text{Im } z < 0$) dans \mathbb{C} ; il est évident (géométriquement) que

$$|z - \alpha| \begin{cases} < |z - \bar{\alpha}| & \text{si } z \in D, \alpha \in D \\ > |z - \bar{\alpha}| & \text{si } z \in D_-, \alpha \in D \end{cases}$$

car si $\alpha \in D$, alors $\bar{\alpha} \in D_-$. On conclut que

$$g(D) \subset U, \quad g(D_-) \subset \{w \in \mathbb{C} : |w| > 1\} = V;$$

puisque $\widehat{\mathbb{C}} = D \cup D_- \cup \widehat{\mathbb{R}}, \widehat{\mathbb{C}} = U \cup V \cup C \cup \{\infty\}$ et $g : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ est une bijection telle que $g(\widehat{\mathbb{R}}) = C$, on voit que $g(D) = U, g(D_-) = V$.

Soit f une application conforme quelconque de D sur U ; alors il existe un unique $\alpha \in D$ tel que $f(\alpha) = 0$; puisque f et g sont deux applications conformes de D sur U telles que $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$, on conclut que $f(z) = cg(z), z \in D$, pour un c tel que $|c| = 1$. \square

3.2.2 Caractérisation des applications conformes du disque unité dans lui-même

Les applications conformes du disque unité dans lui-même sont exactement les transformations de Möbius

Proposition 3.2.2 (détermination de $\text{aut}(U)$). *Une fonction $f : U \rightarrow U$ est une application conforme de U sur U si et seulement si f est de la forme suivante*

$$f(z) = c \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad z \in U,$$

où $|a| < 1$ et $|c| = 1$; les paramètres a et c sont uniquement déterminés par f .

Démonstration. Fixons a et c avec $|a| < 1$, $|c| = 1$, et démontrons que l'application donnée par f est une application conforme de U sur U . Il est évident que f est holomorphe dans le disque ouvert $B(0; r)$ avec $r = \frac{1}{|a|} > 1$; si $|z| = 1$, on voit que

$$|f(z)|^2 = \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right|^2 = \frac{(z - a)(\bar{z} - \bar{a})}{(1 - \bar{a}z)(1 - a\bar{z})} = \frac{1 + |a|^2 - (\bar{z}a + z\bar{a})}{1 + |a|^2 - (\bar{z}a + z\bar{a})} = 1;$$

d'après le principe du maximum, on conclut que

$$|f(z)| < 1, \quad z \in U.$$

Si $w \in U$, un calcul simple montre que $f(z) = w$ si et seulement si

$$z = \bar{c} \frac{w + ac}{1 + \bar{a}cw}.$$

Selon la discussion précédente, $|z| < 1$. Ainsi, la fonction f donnée est bien une application bijective holomorphe de U dans U ; on en déduit que $f^{-1}(z) = \frac{z + ac}{1 + \bar{a}z}$. Soit $g : U \rightarrow U$ une application conforme quelconque de U sur U ; alors il existe un unique $a \in U$ tel que $g(a) = 0$. On a déjà vu que

$$z \mapsto \varphi(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

est une application conforme de U sur U telle que $\varphi(a) = 0$; d'après le théorème d'unicité des applications conformes sur U , on conclut qu'il existe un c de module 1 (évidemment unique) tel que $g(z) = c\varphi(z)$, $z \in U$; autrement dit, g est égale à f de la proposition. \square

3.3 Transformation $\omega = e^z$

Écrivons $w = re^{i\theta}$. Alors la transformation $w = e^z$ peut se représenter par

$$\omega = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r \cos \theta + ir \sin \theta.$$

$$U(r, \theta) = r \cos \theta$$

$$V(r, \theta) = r \sin \theta$$

Théorème 3.3.1. *Les droites horizontales $y = k$ se transforment par e^z en des demi-droites qui partent de l'origine. (Le point 0 lui-même ne fait pas partie de l'image.) La fonction e^z transforme les droites verticales $x = k$ en des cercles $\rho = e^k$ mais on note que cette correspondance n'est pas bijective.*

Démonstration. **1) Transformation des lignes horizontales $y = k$:** Considérons une ligne horizontale $y = k$ dans le plan complexe, où $z = x + ik$. Appliquons la fonction exponentielle complexe e^z à cette ligne

$$e^z = e^{x+ik} = e^x \cdot e^{ik} = e^x(\cos(k) + i \sin(k)).$$

Cela montre que chaque point de la ligne horizontale $y = k$ est transformé en un point sur une demi-droite partant de l'origine dans le plan complexe, avec un angle k par rapport à l'axe réel. Le point $x = 0$ est transformé en $e^0 = 1$, mais le point $x = -\infty$ tend vers 0 sans jamais l'atteindre.

2) Transformation des lignes verticales $x = k$: Considérons maintenant une ligne verticale $x = k$ dans le plan complexe, où $z = k + iy$. Appliquons la fonction exponentielle complexe e^z à cette ligne

$$e^z = e^{k+iy} = e^k \cdot e^{iy} = e^k(\cos(y) + i \sin(y)).$$

Cela montre que chaque point de la ligne verticale $x = k$ est transformé en un point sur un cercle de rayon e^k centré à l'origine dans le plan complexe. Cependant, cette correspondance n'est pas bijective, car chaque point sur le cercle correspond à une infinité de points sur la ligne verticale (en raison de la périodicité des fonctions trigonométriques). La transformation e^z est conforme car $f'(z) = e^z \neq 0$ pour tout z . □

Exemple :

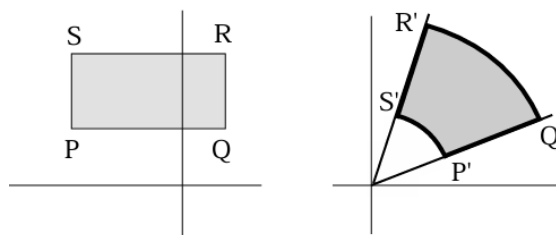


FIGURE 3.10

La partie \mathcal{R} du plan définie par $\mathcal{R} = \{z = x + iy : x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$ se transforme en $\mathcal{S} = \{w = r^{i\theta} : e^{x_1} \leq \rho \leq e^{x_2}, y_1 \leq \phi \leq y_2\}$. (Voir la Figure 3.10)

3.4 Transformation $w = \sin z$

La fonction $w = \sin z$ peut s'écrire sous la forme $w = u + iv = \sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$.

D'où il est évident que la fonction est périodique 2π . De plus, si l'on utilise $\sin z$

pour établir une transformation conforme il faut choisir une partie \mathcal{R} de son domaine ou elle est univalente. Ceci est le cas pour la région

$$\mathcal{R} = \left\{ z : \operatorname{Im}(z) > 0 \quad \wedge \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re}(z) < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Notons d'abord que l'image par l'équation de l'axe imaginaire ($x = 0$) du domaine est l'axe imaginaire ($u = 0$) dans le plan des images et la correspondance entre les points est une bijection. Or, si $0 < c < \frac{\pi}{2}$, on fournit avec les équations paramétriques d'une courbe \mathcal{C} a savoir $u = \sin c \cosh y$ $v = \cos c \sinh y$

Lesquelles représentent la partie a droite de l'hyperbole $\frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1$

Et, si $z \in \mathbb{R}$, seule la partie au-dessus de l'axe réel nous concerne. Si l'on trace toutes ces courbes, le premier quadrant du plan des images est complètement recouvert. (Plus précisément, tout point (u, v) avec $u > 0$ et $v > 0$ se retrouve sur une de ces courbes.) En répétant l'argument pour les valeurs de $c \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0 \right)$, c'est le deuxième quadrant qui est balayé. (La Figure 3.11 indique comment le balayage du premier quadrant s'effectue.) La première image correspond a $0 < \operatorname{Im}(y) < 1$ et la deuxième a $0 < \operatorname{Im}(y) < 2$. Donc, la fonction $w = \sin z$ établit une transformation conforme entre \mathcal{R} et le demi-plan $\{w : \operatorname{Im}(w) > 0\}$.

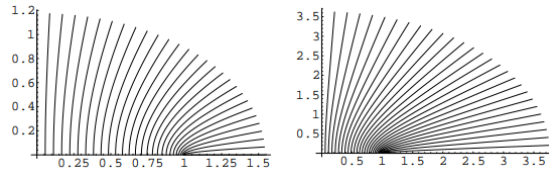


FIGURE 3.11

3.5 Transformation de Joukowski

Il s'agit de la fonction définie par $f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$; le facteur $\frac{1}{2}$ n'est pas essentiel; il simplifie légèrement quelques formules. La fonction f possède un pôle simple en $z = 0$; si $z \neq 0$, $f'(z) = \left(\frac{1}{2} \right) (1 - z^{-2})$ s'annule pour $z = \pm 1$, ce qui indique que, dans les disques ouverts contenant ± 1 , f ne peut pas être injective. Pour tout $w \in \mathbb{C}$, $w \neq \pm 1$, l'équation $f(z) = w$ ou $z^2 - 2wz + 1 = 0$ possède deux solutions distinctes $z = w \pm \sqrt{w^2 - 1}$; noter que le produit de ces deux solutions est 1. Les points ± 1 sont les deux points fixes de f (c'est-à-dire solutions de l'équation $f(z) = z$: $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$); rappelons que $f'(\pm 1) = 0$ de sorte que les valeurs $w = \pm 1$ sont prises de manière double (car $f''(\pm 1) = (\pm 1)^{-3} \neq 0$). On constate que f ne peut pas être injective dans un domaine qui contient z et $\frac{1}{z}$ simultanément; par contre, si le domaine est tel qu'il contient au plus un des nombres $z, \frac{1}{z}$ ($z \in \mathbb{C}^*$),

alors f restreint a ce domaine sera injective ; ainsi, f est injective dans les domaines suivants :

$$U \setminus \{0\} = \{z : 0 < |z| < 1\}, \quad V = \{z : |z| > 1\}, \quad D = \{z : \text{Im } z > 0\}.$$

Pour $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, on a

$$w = f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2} \left(re^{i\theta} + \frac{e^{-i\theta}}{r} \right) = u + iv.$$

d'où

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta, \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta. \quad (9)$$

On voit que l'image des deux cercles $|z| = r, |z| = \frac{1}{r}, r \neq 1$, est la même ellipse d'équation

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1, \quad a = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right), \quad b = \frac{1}{2} \left| r - \frac{1}{r} \right|$$

ce qui montre aussi que f est injective sur chaque cercle $|z| = r$ ($r \neq 1$) ; le cercle $|z| = 1$ devient le segment réel $[-1, 1]$, chaque valeur étant prise deux fois (± 1 étant les valeurs doubles dans le sens explique ci-dessus). Notons que pour $r \neq 1$, on a $a > 1, b < a$ et $a \rightarrow 1, b \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow 1$, indiquant analytiquement que le segment $[-1, 1]$ est une sorte de limite des ellipses ci-dessus. Déjà de cette discussion, nous savons que

$$f : U \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus L, \quad f : V \rightarrow \mathbb{C} \setminus L \quad (L = [-1, 1])$$

sont des applications conformes avec $f(U \setminus \{0\}) = f(V) = \mathbb{C} \setminus L$. L'équation de l'image de la demi-droite $\theta = \theta_0$ issue de $z = 0$ ($-\pi < \theta_0 < \pi, \theta_0 \neq 0, \pm \frac{\pi}{2}$) s'obtient de (9) en éliminant r de ces équations ; l'image est formée d'une branche des hyperboles d'équation

$$\frac{u^2}{\cos^2 \theta_0} - \frac{v^2}{\sin^2 \theta_0} = 1.$$

(qui sont orthogonales aux ellipses précédentes) ; si $\cos \theta_0 > 0$, on a la branche ou $u > 0$ et si $\cos \theta_0 < 0$, on a la branche avec $u < 0$; chaque point de chaque branche est atteint une seule fois, ce qui se constate en étudiant l'équation paramétrique de la branche donnée par (9) en fixant $\theta = \theta_0$. On constate ainsi que la demi-droite $\theta = 0$ devient $[1, \infty[$ (atteint deux fois), $\theta = \pi$ devient $-\infty, -1]$ (atteint deux fois) et que $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ devient $i\mathbb{R}$ (injectivement). De cette discussion on conclut que

$$f : D \rightarrow \mathbb{C} \setminus S, \quad S =]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$$

est une application conforme avec $f(D) = \mathbb{C} \setminus S$; on dit que f est une application conforme du demi-plan ouvert $\text{Im } z > 0$ sur le plan \mathbb{C} muni de la coupure S . Il suffit de réunir les images sous f des demi-droites $\theta = \theta_0, 0 < \theta_0 < \pi$.

L'importance principale de f dans quelques problèmes d'aérodynamique provient de sa propriété suivante : f donne une application conforme de l'extérieur de certains disques sur l'extérieur des domaines qui ressemblent aux profils d'ailes des avions. Illustrons ceci par un exemple.

Soient (fig. 3.12)

$$\begin{aligned} A &= \{z : |z + x_0| < 1 + x_0\}, & B &= \{z : |z + x_0| > 1 + x_0\}, \\ C &= \{z : |z + x_0| = 1 + x_0\}, \end{aligned}$$

avec $0 < x_0 < 1$; A est un disque ouvert de centre $-x_0$ et de rayon $1 + x_0$, $C = \partial A = \partial B$ et le cercle correspondant, B étant le domaine extérieur à A ($B = (A)^c$). Notons que $1 \in C$, $-1 \in A$ et que $U \subset A$, $B \subset V$ ou U est le disque $|z| < 1$, V son extérieur $|z| > 1$.

Soit $\tilde{C} = f(C)$; puisque C est symétrique par rapport à l'axe réel ($z \in C \iff \bar{z} \in C$) et $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$, \tilde{C} sera une courbe de Jordan symétrique par rapport à l'axe réel passant par $f(1) = 1$ et coupant la droite réelle orthogonalement au point $(-1 - 2x_0)$ (à cause de la conformité de f). f est paramètre partout sauf aux points ± 1 , l'image de \mathbb{R} étant $S =] - \infty, -1] \cup [1, \infty[$.

Noter que $C \setminus \{1\}$ est contenu dans V , de sorte que f est injective sur C (car $f(1) = 1$, $f(z) \neq 1$ si $z \neq 1$). La courbe de Jordan \tilde{C} est régulier partout sauf au point 1 car $f'(z) \neq 0$ si $z \neq \pm 1$; en effet, \tilde{C} est paramètre par

$$\tilde{\gamma}(t) = f(\gamma(t)), \quad \gamma(t) = -x_0 + (1 + x_0)e^{it}, \quad 0 \leq t < 2\pi, \quad (10)$$

(γ étant le paramétrage usuel de C) d'où

$$\tilde{\gamma}'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) \neq 0, \quad 0 < t < 2\pi;$$

mais $\tilde{\gamma}'(0) = \tilde{\gamma}'(2\pi) = 0$ car $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = 1$ et $f'(1) = 0$. Ceci indique que \tilde{C} aura un point anguleux en $w = 1$. La courbe de Jordan \tilde{C} partage \mathbb{C} en deux domaines D_1, D_2 (D_1 domaine borne, domaine intérieur déterminé par \tilde{C} et D_2 domaine non borne, domaine extérieur déterminé par \tilde{C}) : $\mathbb{C} = D_1 \cup \tilde{C} \cup D_2$ une réunion des ensembles deux à deux disjoints avec $\tilde{C} = \text{Fr } D_1 = \text{Fr } D_2$. Démontrons que $f(B) = D_2$ et $f(A \cup U) = D_1$. Puisque

$$V = (A \setminus \bar{U}) \cup C \cup B, \quad f(V) = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}, \quad f(\text{Fr } U) = \{-1, 1\},$$

f étant injective dans V , il suffira d'établir que $f(B) \subset D_2$, $f(A \setminus U) \subset D_1$.

Soit $z_0 \in B$, $w_0 = f(z_0)$; on a (avec $\gamma, \tilde{\gamma}$ comme dans (10))

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{dw}{w - w_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz = 1 - 1 = 0 \quad (11)$$

d'après principe de l'argument, car f possède un pôle simple $z = 0$ dans le domaine intérieur A (dont la frontière est paramétré par γ) et

$$f(z) - w_0 = 0 \quad \text{en un point } \frac{1}{z_0} \in U \setminus C \text{ avec } f'\left(\frac{1}{z_0}\right) \neq 0.$$

On conclut de l'équation (11) que $w_0 \in D_2$, domaine extérieur à \tilde{C} (paramétré par $\tilde{\gamma}$). Soit $z_0 \in A \setminus U$, $w_0 = f(z_0)$; si $|z_0| > 1$, le raisonnement précédent donne que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dw}{w - w_0} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz = 2 - 1 = 1 \quad (12)$$

car $f(z) = w_0$ pour $z = z_0$ et $\frac{1}{z_0}$, les deux points étant dans le domaine intérieur A ; si $|z_0| = 1$, alors $w_0 \in [-1, 1]$, et le raisonnement de (12) est de nouveau applicable sauf que l'on doit se rappeler que si $z_0 = -1$, $w_0 = f(z_0)$ est une valeur double (comme expliqué précédemment) et le calcul de (12) reste valable. On a ainsi établi que $f(B) = D_2$; la courbe $\tilde{C} = \partial D_2$ est un exemple simple d'un profil de Joukowski.

La discussion précédente justifie complètement les diagrammes indiqués dans la figure 3.13. En prenant pour B le domaine extérieur à un disque non symétrique par rapport à l'axe réel (donc en prenant comme centre un nombre non réel) qui a 1 (ou -1) sur sa frontière C , on obtient d'autres profils de Joukowski $\tilde{C} = f(C)$ non symétriques.

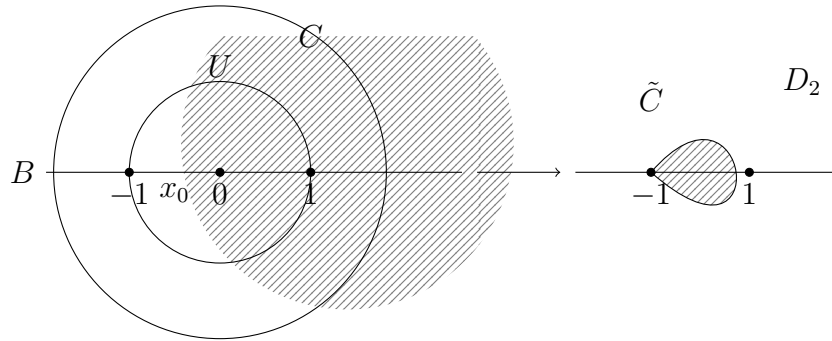


FIGURE 3.12

Il est utile de remarquer que la fonction f peut être étudiée par une méthode de composition des fonctions qui est très commode dans la suite. On remarque que

$$w = f(z) = \frac{z^2 + 1}{2z} = \frac{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 + 1}{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 - 1};$$

ainsi, si $f_1(z) = \frac{z+1}{z-1}$, $f_2(z) = z^2$, on a

$$f(z) = (f_1 \circ f_2 \circ f_1)(z) = f_1(f_2(f_1(z))).$$

On obtient des images $f(U)$, $f(V)$, $f(D)$ avec peu de calculs. L'image de notre cercle C (de centre $-x_0$, de rayon $1+x_0$, $0 < x_0 < 1$) sous f_1 est une droite $\text{Re } \zeta = c$, $c = \frac{x_0}{1+x_0} \in]0, 1/2[$; le domaine $B(|z+x_0| > 1+x_0)$ devient le demi-plan $\text{Re } \zeta > c$ sous f_1 . Pour trouver $\tilde{C} = f(C)$, on doit déterminer d'abord l'image de $\text{Re } \zeta = c$ sous l'application $\zeta \mapsto \zeta^2$, qui est une parabole d'équation ($\zeta = \xi + i\eta$)

$$\eta^2 = 4c^2(c^2 - \xi);$$

l'image $f(B)$ est alors à l'extérieur (vers $\pm\infty$) du domaine limité par cette parabole (qui a l'axe orienté vers $\xi \rightarrow -\infty$). On peut maintenant écrire l'équation paramétrique de \tilde{C} en calculant

$$u + iv = \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} = \frac{(\xi + 1) + i\eta}{(\xi - 1) + i\eta}.$$

Conclusion

À travers ce mémoire, nous avons exploré les transformations conformes en analyse complexe, en mettant en lumière leur capacité remarquable à préserver les angles et la structure locale des figures géométriques. Après avoir introduit les notions fondamentales relatives aux fonctions holomorphes, nous avons étudié en détail plusieurs types de transformations, allant des transformations élémentaires (translations, rotations, homothéties) aux transformations particulières comme celles de Möbius.

Bibliographie

- [1] Srishti D. CHATTERJI. *Cours d'Analyse 1 Analyse vectorielle*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 1997.
- [2] Srishti D. CHATTERJI. *Cours d'Analyse 2 Analyse complexe*. Schüler SA, Bienne, 1997.
- [3] Patrick D. Shanahan DENNIS G. ZILL. *A First Course in Complex Analysis with Applications*. Jones et Bartlett Publishers, 2003.
- [4] John M. HOWIE. *Complex Analysis*. Springer-Verlag London Ltd, 2003.
- [5] Ruel V. Churchill JAMES WARD BROWN. *Complex Variables And Applications*. McGraw-Hill, 2009.
- [6] P.DOLBEAULT. *Analyse Complexe*. Masson Paris, 1990.
- [7] Marcel Lambert RÉAL GÉLINAS. *Élément D'analyse Complexe*. Presses de l'Université du Québec, 1994.
- [8] Murray R. SPIEGEL. *Variables Complexes Cours et Problemes*. Rensselaer Polytechn. Institute, 1973.
- [9] Alain YGER. *Analyse complexe*. Eclipse, 2014.