

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثلجي بالأغواط
UNIVERSITÉ AMAR TÉLÉDJI DE LAGHOUE
كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES
قسم الرياضيات
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématique

Présenté par :

Soundous Takhi

THEME

Certains espaces de Sobolev et leurs propriétés

Soutenance publique devant le jury composé de :

Dr. Rahmoune Abdelazize
Dr. Rahmoune Abita
Dr. Saf Salim

M.C.A
M.C.A
M.C.B

Président
Encadreur
Examineur

Année Universitaire 2022/2023

ملخص

أَلْهَدَف مِن هَاتِهِ الْمَذْكُورَةِ هُوَ دَرَاْسَةُ نَظَرِيَّةٍ لِبَعْضِ فُضَاءَاتِ بَانَاخ Banach وَ الْخَصَائِصِ الْمَتَعَلِّقَةِ بِهَا وَ خُصُوصًا تِلْكَ الْمُسْتَعْمَلَةِ فِي الدَّرَاسَاتِ النَّظَرِيَّةِ عَنِ الْمَعَادَلَاتِ التَّفَاضِلِيَّةِ ذَاتِ الْمَتَغَيِّرَاتِ الْحَزْبِيَّةِ. اِرْتَبَطَتْ هَاتِهِ الْفُضَاءَاتُ بِاسْمِ الْعَالَمِ السُّوْفِيَّاتِي سِيرْغِي سُوْبُولِف Syrgi L'vovich Sobolev أَوَّاخِرِ الثَّلَاثِيْنَآتِ مِنَ الْقَرْنِ الْمَاضِي.

كَلِمَاتُ مِفْتَاحِيَّةٍ : فُضَاءُ بَانَاخ، أَلْدَوَالُ الْقَابِلَةِ لِلِاسْتِمْرَارِ وَ التَّفَاضُلِ ضَعْفًا، اِنْعِمَاسَاتُ سُوْبُولِفِ وَ يُوَانِكْرِيه .

Résumé

Cette mémoire vise à proposer une contribution à l'étude des propriétés de certains espaces de Banach de fonctions faiblement différentiables de plusieurs variables réelles qui se posent en relation avec de nombreux problèmes de la théorie des équations aux dérivées partielles et des domaines connexes de l'analyse mathématique, et qui sont devenus un outil essentiel dans ces disciplines. Ces espaces sont désormais le plus souvent associés au nom du mathématicien soviétique S. L. Sobolev, bien que leurs origines soient antérieures à ses contributions majeures à leur développement à la fin des années 1930.

Mots - clés : Espace ; Banach ; domaines connexes ; fonctions faiblement différentiables, injections de Sobolev et Poincaré.

**

Dédicaces

EDédie ce fruit de mes longues années d'études tout d'abord : mes très chers parents qui sont la lumière de ma vie, qui ont tant souffert et sacrifiés pour que je sois heureuse, pour leurs conseils et leurs encouragements. et vous remercie pour tout vos efforts fournis pour moi, que Dieu vous garde, vous protège, et vous bénisse la vie. Et je le dédie :

tous les membres de ma famille, mes soeurs , mes frères tous mes professeurs et mes collègues avec qui j'ai partagé de très bons moments tout le long de ces années.

Remerciements

Tout d'abord je remercie **Allah** le tout puissant, qui nous a donné la puissance et la volonté pour achever ce travail..

Je remercie vivement monsieur **Dr. ABD EL AZIZE Rahmoune**, qui a accepté de présider et d'honorer de sa présence le jury de soutenance du présent mémoire de Master.

Je tiens également à remercier **Dr. Saf Salim** pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens à remercier mon encadreur **Dr. ABITA Rahmoune** pour son soutien et son aide considérables, ses conseils précieux et ses remarques pertinentes qui m'ont guidé durant la réalisation de ce mémoire.

Soundous Takhi

Table des matières	1
Introduction	1
Notation	2
1 Les Espace $L^p(\Omega)$	6
1.1 Définition et propriétés de base	6
1.2 Complétude de $L^p(\Omega)$	12
1.3 Approximation par fonctions continues, séparabilité	14
1.4 Mollificateurs, approximation par les fonctions lisses	15
1.5 Ensembles précompacts dans $L^p(\Omega)$	18
1.6 La convexité uniforme de $L^p(\Omega)$	22
1.7 Le dual normé de $L^p(\Omega)$	27
2 Les Espaces $W^{m,p}(\Omega)$	33
2.1 Définitions et propriétés de base	33
2.2 Dualité, les Espaces $W^{-m,p'}(\Omega)$	38
2.3 Approximation par les fonctions lisses sur Ω	44
2.4 Approximation par les fonctions lisses sur $\mathbb{R}^n$	47
2.5 Approximation par les fonctions dans $C_0^\infty(\Omega)$; (m, p') -Ensembles polaires	50
2.6 Transformation des coordonnées	58
3 Injection de $W^{m,p}(\Omega)$	61
3.1 Le théorème d'injection de Sobolev	61
3.2 Preuve du théorème d'injection	67
3.3 Traces de fonctions dans $W^{m,p}(\Omega)$ sur la frontière de Ω	86
3.4 $W^{m,p}(\Omega)$ comme une algèbre de Banach	89
3.5 Contre-exemples et théorèmes non imbriqués	92
Appendices	99
Bibliographie	109

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}^N$: Espace euclidien de dimension N .

Ω : Un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx .

$\|\cdot\|$: La norme associée aux produits scalaires.

p.p. : Presque partout.c'est-à-dire par tout sauf eventuellement sur un ensemble de mesure

$|x|$: La norme associée aux produits scalaires.

$\|x\|$: La norme de x .

L^p : L'espace des fonctions de puissance p -ème intégrable pour la mesure de Lebesgue dx

$L^2(\Omega)$: L'espace des fonctions carré intégrable pour la mesure de Lebesgue dx .

$L^\infty(\Omega) : \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable ; } \sup |u(t)| < +\infty\}$

$\longrightarrow$: Convergence .

E' : Le dual topologique de E ou l'espace des formes linéaire et continue sur E .

E'' : Bidual de E (Le dual topologique de E').

C^∞ : Espace des fonctions infiniment dérivables.

$C_0^\infty(\Omega)$: L'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact incluse dans Ω .

$D^\alpha \varphi$: Dérivée de φ d'ordre α .

$W^{1,p}(\Omega)$

$jacH$: espace de Sobolev des fonctions de L^p dont les dérivées partielles au sens faible

C_c^m : désigne la matrice jacobienne $\frac{\partial H_1}{\partial y_j}$; il s'agit donc d'une fonction de $L^\infty(\Omega')^{N \times N}$

T espace des fonctions m fois continument dérivable à support compact

L_{loc}^1 opérateur de $W^{1,p}$ dans E .

$W^{1,p}, W_0^{1,p}$, espace des fonctions localement intégrable.

$W^{m,p}, H^1$,

H^m, H_0^1 espaces de Sobolev.

Cet écrit est consacrée à l'étude des propriétés de certains espaces de Banach de fonctions faiblement différentiables de plusieurs variables réelles qui se posent en relation avec de nombreux problèmes de la théorie des équations aux dérivées partielles et des domaines connexes de l'analyse mathématique, et qui sont devenus un outil essentiel dans ces disciplines. Ces espaces sont désormais le plus souvent associés au nom du mathématicien soviétique S. L. Sobolev, bien que leurs origines soient antérieures à ses contributions majeures à leur développement à la fin des années 1930. Les espaces de Sobolev sont des structures mathématiques très intéressantes à part entière, mais leur signification principale réside dans le rôle central qu'ils, et leurs nombreuses généralisations, jouent maintenant dans les équations aux dérivées partielles. En conséquence, la majeure partie de ce livre se concentre sur les aspects de la théorie des espaces de Sobolev qui se sont avérés les plus utiles dans les applications. Bien qu'aucune application spécifique aux problèmes des équations aux dérivées partielles ne soit discutée (elles se trouvent dans presque tous les manuels modernes sur les équations aux dérivées partielles), cette monographie est néanmoins principalement destinée à servir de manuel et de référence sur les espaces de Sobolev pour les étudiants diplômés et les chercheurs, dans les équations différentielles. Le concret est organisé en trois chapitres. Chapitre I est un pot-pourri de tonics standard d'analyse réelle et fonctionnelle, inclus, principalement sans preuves, mais se concentre sur un sujet spécifique, les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$, dont

les espaces de Sobolev sont des sous-espaces spéciaux. Pour être complet, les preuves sont incluses ici. La majeure partie du matériel de ces deux premiers chapitres sera tout à fait familière au lecteur et peut être omise, ou simplement donnée une lecture superficielle pour régler les questions de notation et autres. L'inclusion de ces chapitres élémentaires rend la monographie assez autonome.

CHAPITRE 1

LES ESPACE $L^p(\Omega)$

1.1 Définition et propriétés de base

Soit Ω un domaine dans $\mathbb{R}^n$ et soit p un nombre réel positif. On note $L^p(\Omega)$ la classe de toutes les fonctions mesurables u , définies sur Ω , pour lesquelles

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty. \quad (1.1)$$

On identifie dans $L^p(\Omega)$ des fonctions égales presque partout sur Ω . Les éléments de $L^p(\Omega)$ sont donc en fait des classes d'équivalence de fonctions mesurables vérifiant (1.1), deux fonctions, équivalentes si elles sont égales p.p. en Ω . Par commodité, cependant, nous ignorons cette distinction et écrivons $u \in L^p(\Omega)$ si u satisfait (1.1) et $u = 0$ dans $L^p(\Omega)$ si $u(x) = 0$, p.p. en Ω . Il est clair que si $u \in L^p(\Omega)$ et $c \in \mathbb{C}$, alors $cu \in L^p(\Omega)$. De plus, si $u, v \in L^p(\Omega)$, alors puisque

$$|u(x) + v(x)|^p \leq (|u(x)| + |v(x)|)^p \leq 2^p (|u(x)|^p + |v(x)|^p),$$

donc $u + v \in L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel.

Nous vérifierons immédiatement que la fonctionnelle $\|\cdot\|_p$ définie par

$$\|u\|_p = \left\{ \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}$$

si $0 < p < 1$.

Dans les arguments où la confusion des domaines pourrait se produire, nous utiliserons $\|\cdot\|_{p,\Omega}$ à la place de $\|\cdot\|_p$. Il est clair que $\|u\|_p \geq 0$ et l'égalité se produit si et seulement si $u = 0$ dans $L^p(\Omega)$. De plus,

$$\|cu\|_p = |c| \|u\|_p, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Il reste alors à montrer que si $1 \leq p < \infty$,

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p, \quad (1.2)$$

qui est connue sous le nom d'inégalité de Minkowski. La condition (1.2) est certainement vraie pour $p = 1$ puisque

$$\int_{\Omega} |u(x) + v(x)| dx \leq \int_{\Omega} |u(x)| dx + \int_{\Omega} |v(x)| dx.$$

Si $1 < p < \infty$, on note p' le nombre $p/(p-1)$ tel que $1 < p' < \infty$ et

$$(1/p) + (1/p') = 1.$$

p' est appelé l'exposant conjugué à p .

Théorème 1.1 (Inégalité de Holder). *Si $1 < p < \infty$ et $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^{p'}(\Omega)$, alors $uv \in L^1(\Omega)$ et*

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}. \quad (1.3)$$

Démonstration. La fonction $f(t) = (t^p/p) + (1/p') - t$ a, pour $t \geq 0$, la valeur minimale nulle, et ce minimum n'est atteint qu'à $t = 1$. En posant $t = ab^{-p'/p}$, on conclut, pour les nombres non négatifs a et b , que

$$ab \leq (a^p/p) + (b^{p'}/p') \quad (1.4)$$

avec égalité survenant si et seulement si $a^p = b^{p'}$. Si $\|u\|_p = 0$ or $\|v\|_{p'} = 0$, alors $u(x)v(x) = 0$ p.p. en Ω donc (1.3) est satisfaite. Sinon on obtient (1.3) en posant $a = |u(x)|/\|u\|_p$ et $b = |v(x)|/\|v\|_{p'}$, dans (1.4) et en intégrant sur Ω . L'égalité se produit dans (1.3) si et seulement si $|u(x)|^p$ et $|v(x)|^{p'}$ sont proportionnels p.p. en Ω . $\square$

On remarque qu'une forme d'inégalité de Holder pour des sommes finies ou infinies,

$$\sum |a_k b_k| \leq \left\{ \sum |a_k|^p \right\}^{1/p} \left\{ \sum |b_k|^{p'} \right\}^{1/p'},$$

peut se prouver de la même manière.

Théorème 1.2. *Si $1 \leq p < \infty$, alors*

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p. \quad (1.5)$$

Démonstration. Nous avons déjà fait le cas où $p = 1$ donc nous supposons $1 < p < \infty$. On peut aussi supposer que $u, v \in L^p(\Omega)$, sinon le côté droit de (1.5) est infini. Maintenant

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(x) + v(x)|^p dx &\leq \int_{\Omega} |u(x) + v(x)|^{p-1} (|u(x)| + |v(x)|) dx \\ &\leq \left\{ \int_{\Omega} |u(x) + v(x)|^p dx \right\}^{1/p'} (\|u\|_p + \|v\|_p) \end{aligned}$$

par des applications séparées de l'inégalité de Holder. L'inégalité (1.5) s'ensuit par annulation, ce qui est valable puisque $\|u + v\|_p < \infty$. $\square$

la fonction u , mesurable sur Ω est dite essentiellement bornée sur Ω pourvu qu'il existe une constante K pour laquelle $|u(x)| \leq K$ p.p. sur Ω . La plus grande borne inférieure de telles

constantes K est appelée le supremum essentiel de $|u|$ sur Ω et est noté $\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$. On note $L^\infty(\Omega)$ l'espace vectoriel constitué de toutes les fonctions u essentiellement bornées sur Ω , les fonctions étant à nouveau identifiées si elles sont égales p.p. sur Ω . On vérifie facilement que la fonctionnelle $\|\cdot\|_\infty$ définie par la fonction u , mesurable sur Ω est dite essentiellement bornée sur Ω pourvu qu'il existe une constante K pour laquelle $|u(x)| \leq K$ p.p. sur Ω . La plus grande borne inférieure de telles constantes K est appelée le supremum essentiel de $|u|$ sur Ω et est noté $\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$. On note $L^\infty(\Omega)$ l'espace vectoriel constitué de toutes les fonctions u essentiellement bornées sur Ω , les fonctions étant à nouveau identifiées si elles sont égales p.p. sur Ω . On vérifie facilement que la fonctionnelle $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\|u\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$$

est une norme sur $L^\infty(\Omega)$. De plus, l'inégalité de Holder (1.3) s'étend clairement pour couvrir les deux cas $p = 1, p' = \infty$, et $p = \infty, p' = 1$. La paire de théorèmes suivante établit les formes inverses des inégalités de Holder et de Minkowski pour le cas $0 < p < 1$. Cette dernière inégalité sera utilisée plus tard pour établir la convexité uniforme de certains espaces L^p .

Théorème 1.3. *Soit $0 < p < 1$ de sorte que $p' = p/(p-1) < 0$. Supposer $f \in L^p(\Omega)$ et*

$$0 < \int_{\Omega} |g(x)|^{p'} dx < \infty.$$

Alors

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \geq \left\{ \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p} \left\{ \int_{\Omega} |g(x)|^{p'} dx \right\}^{1/p'}. \quad (1.6)$$

Démonstration. On peut supposer $fg \in L^1(\Omega)$; sinon, le côté gauche de (1.6) est infini. Fixer $\phi = |g|^{-p}$. et $\psi = |fg|^p$ de sorte que $\phi\psi = |f|^p$. Alors $\psi \in L^q(\Omega)$ où $q = 1/p > 1$, et puisque $p' = -pq'$ où $q' = q/(q-1)$ on a $\phi \in L^{q'}(\Omega)$. Par la version directe de l'inégalité de Holder

(1.3), on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x)|^p dx &= \int_{\Omega} \phi(x) \psi(x) dx \leq \|\psi\|_Q \|\phi\|_{Q'} \\ &= \left\{ \int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \right\}^p \left\{ \int_{\Omega} |g(x)|^{p'} dx \right\}^{1-p}. \end{aligned}$$

En prenant les p ièmes racines et en divisant par le dernier facteur du côté droit on obtient (1.6). $\square$

Théorème 1.4. Soit $0 < p < 1$. Si $u, v \in L^p(\Omega)$, alors

$$\| |u| + |v| \|_p \geq \|u\|_p + \|v\|_p. \quad (1.7)$$

Démonstration. Si $u = v = 0$ dans $L^p(\Omega)$, alors (1.7) est trivial. Sinon, le membre de gauche est supérieur à zéro. En appliquant l'inégalité inverse de Holder (1.6), on obtient

$$\begin{aligned} \| |u| + |v| \|_p^p &= \int_{\Omega} (|u(x)| + |v(x)|)^{p-1} (|u(x)| + |v(x)|) dx \\ &\geq \left\{ \int_{\Omega} (|u(x)| + |v(x)|)^{(p-1)p'} dx \right\}^{1/p'} (\|u\|_p + \|v\|_p) \\ &= \| |u| + |v| \|_p^{p/p'} (\|u\|_p + \|v\|_p) \end{aligned}$$

donc (1.7) suit par annulation. $\square$

Le théorème suivant donne un résultat de plongement utile pour les espaces L^p sur des domaines de volume fini, et quelques conséquences de ce plongement.

Théorème 1.5. Supposer $\text{vol } \Omega = \int_{\Omega} 1 dx < \infty$ et $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Si $u \in L^q(\Omega)$, alors $u \in L^p(\Omega)$ et

$$\|u\|_p \leq (\text{vol } \Omega)^{(1/p)-(1/q)} \|u\|_q. \quad (1.8)$$

Ainsi

$$L^q(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega). \quad (1.9)$$

Si $u \in L^\infty(\Omega)$, alors

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|u\|_p = \|u\|_\infty. \quad (1.10)$$

Enfin, si $u \in L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$ et s'il existe une constante K telle que pour tout tel p

$$\|u\|_p \leq K, \quad (1.11)$$

alors $u \in L^\infty(\Omega)$ et

$$\|u\|_\infty \leq K \quad (1.12)$$

Démonstration. Si $p = q$, (1.8) sont triviaux. Si $1 \leq p < q \leq \infty$ et $u \in L^q(\Omega)$. L'inégalité de Holder donne

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \leq \left\{ \int_{\Omega} |u(x)|^q dx \right\}^{p/q} \left\{ \int_{\Omega} 1 dx \right\}^{1-(p/q)}$$

d'où (1.8) et (1.9) suivent immédiatement. Si $u \in L^\infty(\Omega)$, on obtient de (1.8)

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sup \|u\|_p \leq \|u\|_\infty \quad (1.13)$$

Par contre, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble $A \subset \Omega$ de mesure positive $\mu(A)$ tel que

$$|u(x)| \geq \|u\|_\infty - \varepsilon \text{ si } x \in A.$$

D'où

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \geq \int_A |u(x)|^p dx \geq \mu(A) (\|u\|_\infty - \varepsilon)^p.$$

Il s'ensuit que $\|u\|_p \geq (\mu(A))^{1/p} (\|u\|_\infty - \varepsilon)$, où

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \|u\|_p \geq \|u\|_\infty. \quad (1.14)$$

L'équation (1.10) découle maintenant de (1.13) et (1.14).

Supposons maintenant que (1.11) soit valable pour $1 \leq p < \infty$. Si $u \notin L^\infty(\Omega)$ ou bien si (1.12) ne tient pas, alors on peut trouver une constante $K_1 > K$ et un ensemble $A \subset \Omega$ avec

$\mu(A) > 0$ tel que pour $x \in A$, $|u(x)| \geq K_1$. Le même argument utilisé pour obtenir (1.14) montre maintenant que

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \|u\|_p \geq K_1$$

qui contredit (1.11). □

Corollaire 1.6. $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ pour $1 \leq p \leq \infty$ et n'importe quel domaine Ω .

1.2 Complétude de $L^p(\Omega)$

Théorème 1.7. $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach si $1 \leq p \leq \infty$.

Démonstration. Supposons d'abord $1 \leq p < \infty$ et soit $\{u_n\}$ une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$.

Il existe une sous-suite $\{u_{n_j}\}$ de $\{u_n\}$ telle que

$$\|u_{n_{j+1}} - u_{n_j}\|_p \leq 1/2^j, \quad j = 1, 2, \dots$$

Soit $v_m(x) = \sum_{j=1}^m |u_{n_{j+1}}(x) - u_{n_j}(x)|$. Alors

$$\|v_m\|_p \leq \sum_{j=1}^m (1/2^j) < 1, \quad m = 1, 2, \dots$$

En posant $v(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} v_m(x)$, qui peut être infini pour certains x , on obtient par le lemme de Fatou (voir (3.5))

$$\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |v_m(x)|^p dx \leq 1.$$

Donc $v(x) < \infty$ p.p. en Ω et la série

$$u_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} (u_{n_{j+1}}(x) - u_{n_j}(x)) \tag{1.15}$$

converge vers une limite $u(x)$ p.p. en Ω . Soit $u(x) = 0$ chaque fois qu'il est indéfini comme

limite de (1.15). Depuis les télescopes (1.15) nous avons

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_{n_m}(x) = u(x) \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que si $m, n \geq N$, alors $\|u_m - u_n\|_p < \varepsilon$. Ainsi, par le lemme de Fatou encore

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(x) - u_n(x)|^p dx &= \int_{\Omega} \lim_{j \rightarrow \infty} |u_{n_j}(x) - u_n(x)|^p dx \\ &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_{n_j}(x) - u_n(x)|^p dx \leq \varepsilon^p \end{aligned}$$

si $n \geq M$. Ainsi $u = (u - u_n) + u_n \in L^p(\Omega)$ et $\|u - u_n\|_p \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Donc $L^p(\Omega)$ est complet.

Enfin, si $\{u_n\}$ est une suite de Cauchy dans $L^\infty(\Omega)$, alors il existe un ensemble $A \subset \Omega$ de mesure nulle tel que si $x \notin A$, alors pour tout $n, m = 1, 2, \dots$

$$|u_n(x)| \leq \|u_n\|_\infty, \quad |u_n(x) - u_m(x)| \leq \|u_n - u_m\|_\infty$$

Comme $\{\|u_n\|_\infty\}$ est borné dans $\mathbb{R}$, u_n converge uniformément sur $\Omega \setminus A$ vers une fonction bornée u . En posant $u(x) = 0$ pour $x \in A$, on a $u \in L^\infty(\Omega)$ et $\|u_n - u\|_\infty \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Ainsi $L^\infty(\Omega)$ est complet. $\square$

Corollaire 1.8. *Si $1 \leq p \leq \infty$, une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$ possède une sous-suite convergeant ponctuellement presque partout sur Ω .*

Corollaire 1.9. *$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert par rapport au produit scalaire*

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx.$$

L'inégalité de Holder pour $L^2(\Omega)$ n'est en fait que l'inégalité bien connue de Schwarz

$$|(u, v)| \leq \|u\|_2 \|v\|_2.$$

1.3 Approximation par fonctions continues, séparabilité

Théorème 1.10. $C_0(\Omega)$ est dense en $L^p(\Omega)$ si $1 \leq p < \infty$.

Démonstration. Soit $u \in L^p(\Omega)$ et soit $\varepsilon > 0$. On montre qu'il existe une fonction $\phi \in C_0(\Omega)$ telle que $\|u - \phi\|_p < \varepsilon$. En posant $u = u_1 - u_2 + i(u_3 - u_4)$ où chaque $u_j, 1 \leq j \leq 4$, est réel et non négatif, on trouve $\phi_j \in C_0(\Omega)$ tel que $\|\phi_j - u_j\|_p < \varepsilon/4, 1 \leq j \leq 4$. Alors $\|u - \phi_1 + \phi_2 - i(\phi_3 - \phi_4)\|_p < \varepsilon$. Nous supposons donc sans perte de généralité que u est à valeur réelle et non négatif. D'après le théorème de l'intégrale de Lebesgue, il existe une suite monotone croissante $\{s_n\}$ de fonctions simples non négatives (voir (3.5)) convergeant ponctuellement vers u sur Ω . Puisque $0 \leq s_n(x) \leq u(x)$ on a $s_n \in L^p(\Omega)$. Puisque $(u(x) - s_n(x))^p \leq (u(x))^p$ on a $s_n \rightarrow u$ dans $L^p(\Omega)$ par le théorème de convergence dominé (voir (3.5)). On peut donc choisir $s \in \{s_n\}$ tel que $\|u - s\|_p < \varepsilon/2$. Puisque s est simple et $p < \infty$ le support de s doit avoir un volume fini. On peut aussi supposer que $s(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega^c$. En appliquant le théorème de Lusin (voir (3.5)) on obtient une fonction $\phi \in C_0(\Omega)$ telle que

$$|\phi(x)| \leq \|s\|_\infty \text{ pour tout } x \in \Omega$$

et

$$\text{vol}\{x \in \Omega : s(x) \neq \phi(x)\} < (\varepsilon/4\|s\|_\infty)^p.$$

Ainsi d'après le théorème ensembles compacts

$$\begin{aligned} \|s - \phi\|_p &\leq \|s - \phi\|_\infty (\text{vol}\{x \in \Omega : s(x) \neq \phi(x)\})^{1/p} \\ &< 2\|s\|_\infty (\varepsilon/4\|s\|_\infty) = \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\|u - \phi\|_p < \varepsilon$. □

La preuve ci-dessus montre qu'en fait, l'ensemble des fonctions simples dans $L^p(\Omega)$ est

dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$. Que cela soit aussi vrai pour $L^\infty(\Omega)$ est une conséquence directe du théorème (voir (3.5)).

Théorème 1.11. $L^p(\Omega)$ est séparable si $1 \leq p < \infty$.

Démonstration. Pour $m = 1, 2, \dots$ soit

$$\bar{\Omega}_m = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq 1/m \text{ et } |x| \leq m\}.$$

Ainsi $\bar{\Omega}_m$ est un sous-ensemble compact de Ω . Soit P l'ensemble de tous les polynômes sur $\mathbb{R}^n$ ayant des coefficients complexes rationnels. Soit $P_m = \{\chi_{\bar{\Omega}_m} f : f \in P\}$ où $\chi_{\bar{\Omega}_m}$ est la fonction caractéristique de $\bar{\Omega}_m$. D'après le corollaire (voir (3.5)), P_m est dense dans $C(\bar{\Omega}_m)$. De plus, $\bigcup_{m=1}^\infty P_m$ est dénombrable. Si $u \in L^p(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\phi \in C_0(\Omega)$ tel que $\|u - \phi\|_p < \varepsilon/2$. Si $1/m < \text{dist}(\text{supp } \phi, \partial\Omega)$, il existe $f \in P_m$ tel que $\|\phi - f\|_\infty < (\varepsilon/2) (\text{vol } \bar{\Omega}_m)^{-1/p}$. Il s'ensuit que

$$\|\phi - f\|_p \leq \|\phi - f\|_\infty (\text{vol } \bar{\Omega}_m)^{1/p} < \varepsilon/2$$

et donc $\|u - f\|_p < \varepsilon$. Ainsi l'ensemble dénombrable $\bigcup_{m=1}^\infty P_m$ est dense dans $L^p(\Omega)$ et $L^p(\Omega)$ est séparable. $\square$

$C(\Omega)$, étant un sous-espace fermé propre de $L^\infty(\Omega)$, n'est pas dense dans cet espace. Ainsi ni $C_0(\Omega)$ ni $C_0^\infty(\Omega)$, et $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable.

1.4 Mollificateurs, approximation par les fonctions lisses

Soit J une fonction non négative à valeurs réelles appartenant à $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et ayant les propriétés

- (i) $J(x) = 0$ si $|x| \geq 1$, et
- (ii) $\int_{\mathbb{R}^n} J(x) dx = 1$.

Par exemple, nous pouvons prendre

$$J(x) = \begin{cases} k \exp [-1/(1 - |x|^2)] & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1, \end{cases}$$

où $k > 0$ est choisi de manière à ce que la condition (ii) soit satisfaite. Si $\varepsilon > 0$, la fonction $J_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} J(x/\varepsilon)$ est positive, appartient à $C_0^\alpha(\mathbb{R}^n)$, et vérifie :

(i) $J_\varepsilon(x) = 0$ si $|x| \geq \varepsilon$, et

(ii) $\int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x) dx = 1$.

J_ε est appelé un mollificateur, et la convolution

$$J_\varepsilon * u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x - y) u(y) dy \quad (1.16)$$

définie pour les fonctions u pour lesquelles le côté droit de (1.16) a un sens, est appelée une mollification ou régularisation de u . Nous résumons quelques propriétés de la mollification dans le lemme suivant.

Lemme 1.1. *Soit u une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ et identiquement nulle en dehors du domaine Ω .*

(a) *Si $u \in L_{loc}^1(\bar{\Omega})$, alors $J_\varepsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

(b) *Si aussi $\text{supp } u \subset\subset \Omega$, alors $J_\varepsilon * u \in C_0^\infty(\Omega)$ à condition que*

$$\varepsilon < \text{dist}(\text{supp } u, \partial\Omega).$$

(c) *Si $u \in L^p(\Omega)$ où $1 \leq p < \infty$, alors $J_\varepsilon * u \in L^p(\Omega)$. De plus,*

$$\|J_\varepsilon * u\|_p \leq \|u\|_p \text{ et } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|J_\varepsilon * u - u\|_p = 0.$$

(d) Si $u \in C(\Omega)$ et $G \subset\subset \Omega$, alors $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} J_\varepsilon u(x) = u(x)$ uniformément sur G .

Démonstration. Puisque $J_t(x - y)$ est une fonction infiniment différentiable de x et s'annule si $|y - x| \geq \varepsilon$, et puisque pour tout multi-indice α et toute fonction u intégrable sur des ensembles compacts dans $\mathbb{R}^n$ on a

$$\widehat{D}^\alpha(J_\varepsilon * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} D_x^\alpha J_\varepsilon(x - y)u(y)dy,$$

il s'ensuit que les conclusions (a) et (b) sont valables.

Supposons $u \in L^p(\Omega)$. Si $1 < p < \infty$, on pose $p' = p/(p - 1)$ et on obtient par l'inégalité de Holder

$$\begin{aligned} |J_\varepsilon * u(x)| &= |\int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x - y)u(y)dy| \\ &\leq \{\int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x - y)dy\}^{1/p'} \{\int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x - y)|u(y)|^p dy\}^{1/p} \\ &= \{\int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x - y)|u(y)|^p dy\}^{1/p}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

D'où le théorème de Fubini

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |J_\varepsilon * u(x)|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x - y)|u(y)|^p dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^p dy \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x - y)dx = \|u\|_p^p. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Soit $\eta > 0$. D'après le Théorème de copacité il existe $\phi \in C_0(\Omega)$ tel que $\|u - \phi\|_p < \eta/3$. Ainsi d'après (1.18), $\|J_t * u - J_z * \phi\|_p < \eta/3$. Maintenant

$$\begin{aligned} |J_\varepsilon * \phi(x) - \phi(x)| &= |\int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x - y)(\phi(y) - \phi(x))dy|. \\ &\leq \sup_{|y-x|<\varepsilon} |\phi(y) - \phi(x)|. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Puisque ϕ est uniformément continue sur Ω , le membre droit de (1.19) tend vers zéro quand $\varepsilon \rightarrow 0+$. Puisque $\text{supp } \phi$ est compact on peut donc s'arranger pour avoir $\|J_t * \phi - \phi\|_p < \eta/3$ en choisissant ε suffisamment petit. Pour un tel ε nous avons donc $\|J_\varepsilon * u - u\|_p < \eta$ et (c) suit. Si $p = 1$, (1.18) découle directement de (1.16) sans utiliser l'inégalité de Holder, et le

reste de la preuve de (c) est le même que ci-dessus. Les preuves de (d) et (e) peuvent être obtenues en remplaçant φ par u dans (1.19). $\square$

Théorème 1.12. $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ si $1 \leq p < \infty$.

1.5 Ensembles précompacts dans $L^p(\Omega)$

Le théorème suivant joue un rôle dans l'étude des espaces L^p similaire à celui joué par le théorème d'Ascoli-Arzelà (voir (3.5)) dans l'étude des espaces de fonctions continues. Si u est une fonction définie (p.p.) sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on note $\tilde{u}$ l'extension nulle de u en dehors de Ω , c'est-à-dire

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

Théorème 1.13. Soit $1 \leq p < \infty$. Un sous-ensemble borné $K \subset L^p(\Omega)$ est précompact dans $L^p(\Omega)$ si et seulement si pour tout nombre $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\delta > 0$ et un sous-ensemble $G \subset\subset \Omega$ tel que pour tout $u \in K$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$ avec $|h| < \delta$

$$\int_{\Omega} |\tilde{u}(x+h) - \tilde{u}(x)|^p dx < \varepsilon^p \quad (1.20)$$

et

$$\int_{\Omega \setminus G} |u(x)|^p dx < \varepsilon^p \quad (1.21)$$

Démonstration. Il suffit de prouver le théorème pour le cas particulier $\Omega = \mathbb{R}^n$, car le théorème découle pour le général Ω de son application dans ce cas particulier à l'ensemble $\tilde{K} = \{\tilde{u} : u \in K\}$. Supposons d'abord que K soit précompact dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Comme K admet un $(\varepsilon/6)$ -réseau fini (théorème (voir (3.5))), et comme $C_0(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, il existe un ensemble fini S de fonctions continues à support compact, tel que pour tout $u \in K$ il existe $\phi \in S$ satisfaisant $\|u - \phi\|_p < \varepsilon/3$. Puisque S est fini il

existe $r > 0$ tel que $\text{supp}\phi \subset \bar{B}_r$ pour tout $\phi \in S$, où B_r est la boule $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$. En posant $G = B_r$, on obtient (1.21). Aussi, $\phi(x+h) - \phi(x)$ est uniformément continue pour tout x et s'annule identiquement en dehors de B_{r+1} pourvu que $|h| < 1$. Ainsi

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x+h) - \phi(x)|^p dx = 0 \quad (1.22)$$

Comme S est fini, (1.22) est uniforme pour $\phi \in S$. Pour $u \in K$ soit $T_h u$ le translaté de u par h :

$$T_h u(x) = u(x+h) \quad (1.23)$$

Si $\phi \in S$ satisfait $\|u - \phi\|_p < \delta/3$, alors aussi $\|T_h u - T_h \phi\|_p < \varepsilon/3$. Par (1.22) on a donc pour $|h|$ suffisamment petit (indépendant de $u \in K$),

$$\begin{aligned} \|T_h u - u\|_p &\leq \|T_h u - T_h \phi\|_p + \|T_h \phi - \phi\|_p + \|\phi - u\|_p \\ &< (2\varepsilon/3) + \|T_h \phi - \phi\|_p < \varepsilon, \end{aligned}$$

et (1.20) suit. [Cet argument montre que la translation est continue dans $L^p(\Omega)$.]

Pour prouver la réciproque, donnons $\varepsilon > 0$ et choisissons $G \subset\subset \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $u \in K$

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{G}} |u(x)|^p dx < \varepsilon/3 \quad (1.24)$$

Pour tout $\eta > 0$ la fonction $J_\eta * u$ définie comme en (1.16) appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et en particulier à $C(\bar{G})$. Si $\phi \in C_0(\mathbb{R}^n)$, alors par l'inégalité de Holder

$$\begin{aligned} |J_\eta * \phi(x) - \phi(x)|^p &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} J_\eta(y) (\phi(x-y) - \phi(x)) dy \right|^p \\ &\leq \int_{B_\eta} J_\eta(y) |T_{-y}\phi(x) - \phi(x)|^p dy \end{aligned}$$

où $T_h \phi$ est donné comme dans (1.23).

$$\|J_\eta * \phi - \phi\|_p \leq \sup_{h \in B_\eta} \|T_h \phi - \phi\|_p \quad (1.25)$$

Si $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, soit $\{\phi_n\}$ une suite dans $C_0(\mathbb{R}^n)$ convergeant vers u en L^p -norme. D'après le lemme (1.1)(c), $\{J_\eta * \phi_n\}$ est une suite de Cauchy convergeant vers $J_\eta * u$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. Puisque aussi $T_h \phi_n \rightarrow T_h u$ dans $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, (1.25) s'étend à tout $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$:

$$\|J_\eta * u - u\|_p \leq \sup_{h \in B_\eta} \|T_h u - u\|_p$$

Or (1.20) implique que $\lim_{|h| \rightarrow 0} \|T_h u - u\|_p = 0$ uniformément pour $u \in K$. Donc

$\lim_{\eta \rightarrow 0} \|J_\eta * u - u\|_p = 0$ uniformément pour $u \in K$. On fixe maintenant $\eta > 0$ de sorte que

$$\int_{\bar{G}} |J_\eta * u(x) - u(x)|^p dx < \frac{\varepsilon}{3.2^p} \quad (1.26)$$

pour tout $u \in K$.

Nous montrons que $\{J_\eta * u : u \in K\}$ vérifie les conditions du théorème d'Ascoli-Arzelà sur $\bar{G}$ et est donc précompact dans $C(\bar{G})$. Par (1.17) nous avons

$$|J_\eta * u(x)| \leq \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} J_\eta(x) \right)^{1/p} \|u\|_p$$

qui est uniformément borné pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $u \in K$ puisque K est un ensemble borné dans $L^p(\Omega)$ et η est fixe. De la même manière

$$|J_\eta * u(x+h) - J_\eta * u(x)| \leq \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} J_\eta(x) \right)^{1/p} \|T_h u - u\|_p$$

et donc $\lim_{|h| \rightarrow 0} J_\eta * u(x+h) = J_\eta * u(x)$ uniformément pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $u \in K$.

Ainsi $\{J_\eta * u : u \in K\}$ est précompact dans $C(\bar{G})$ et d'après le théorème (voir (3.5)) il existe un ensemble fini $\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$ de fonctions dans $C(\bar{G})$ tel que si $u \in K$, alors pour certains j , $1 \leq j \leq m$, et tout $x \in \bar{G}$ on a

$$|\psi_j(x) - J_\eta * u(x)|^p < \frac{\varepsilon}{3.2^p \cdot \text{vol } \bar{G}} \quad (1.27)$$

En notant $\tilde{\psi}_j$ l'extension nulle de ψ_j en dehors de $\bar{G}$, on obtient de (1.24), (1.26), (1.27), et l'inégalité $(|a| + |b|)^p \leq 2^p (|a|^p + |b|^p)$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x) - \psi_j(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n \sim \bar{G}} |u(x)|^p dx + \int_{\bar{G}} |u(x) - \psi_j(x)|^p dx \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + 2^p \int_{\bar{G}} (|u(x) - J_\eta * u(x)|^p + |J_\eta * u(x) - \psi_j(x)|^p) dx \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + 2^p \left(\frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^p} + \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^p \cdot \text{vol } \bar{G}} \text{vol } \bar{G} \right) = \varepsilon \end{aligned}$$

Donc K a un ε -net fini dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, à savoir $\{\tilde{\psi}_j : 1 \leq j \leq m\}$, et est donc précompact par le théorème (voir (3.5)). $\square$

Théorème 1.14. Soit $1 \leq p < \infty$ et soit $K \subset L^p(\Omega)$. Supposons qu'il existe une suite $\{\Omega_j\}$ de sous-domaines de Ω ayant les propriétés suivantes :

- (a) pour chaque j , $\Omega_j \subset \Omega_{j+1}$,
- (b) pour chaque j l'ensemble des restrictions à Ω_j des fonctions dans K est précompact dans $L^p(\Omega_j)$;
- (c) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe j tel que

$$\int_{\Omega \sim \Omega_j} |u(x)|^p dx < \varepsilon \quad \text{pour tout } u \in K.$$

Alors K est précompact dans $L^p(\Omega)$.

Démonstration. Soit $\{u_n\}$ une suite dans K . Alors d'après (b) il existe une sous-suite $\{u_n^{(1)}\}$ telle que les restrictions $\left\{ \left| u_n^{(1)} \right|_{\Omega_1} \right\}$ convergent dans $L^p(\Omega_1)$. Après avoir sélectionné $\{u_n^{(1)}\}, \dots, \{u_n^{(k)}\}$, nous pouvons sélectionner une sous-séquence $\{u_n^{(k+1)}\}$ de $\{u_n^{(k)}\}$ tel que $\{u_n^{(k+1)} \mid \Omega_{n_{k+1}}\}$ converge dans $L^p(\Omega_{k+1})$. Donc aussi $\left\{ \left| u_n^{(k+1)} \right|_{\Omega_j} \right\}$ converge dans $L^p(\Omega_j)$ pour $1 \leq j \leq k+1$ par (a).

Soit $v_n = u_n^{(n)}$ pour $n = 1, 2, \dots$. Clairement $\{v_n\}$ est une sous-séquence de $\{u_n\}$. Étant

donné $\varepsilon > 0$, il existe j [par (c)] tel que

$$\int_{\Omega \sim \Omega_j} |v_n(x) - v_m(x)|^p dx < \varepsilon/2 \quad (1.28)$$

pour tout $n, m = 1, 2, \dots$. Sauf pour les $j - 1$ premiers termes, $\{v_n\}$ est une sous-suite de $\{u_n^{(j)}\}$ et donc $\{|v_n|_{\Omega_j}\}$ est une Suite de Cauchy dans $L^p(\Omega_j)$. Ainsi pour n, m suffisamment grand on a

$$\int_{\Omega_j} |v_n(x) - v_m(x)|^p dx < \varepsilon/2 \quad (1.29)$$

En combinant (1.28) et (1.29) on voit que $\{v_n\}$ est une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$ et y converge donc K est précompact dans $L^p(\Omega)$. $\square$

Remarquons que le théorème 1.14 n'est qu'un cadre, adapté à nos besoins, d'un théorème bien connu stipulant que la limite d'opérateur-norme d'une suite d'opérateurs compacts et précompacts.

1.6 La convexité uniforme de $L^p(\Omega)$

Pour $1 < p < \infty$ l'espace $L^p(\Omega)$ est uniformément convexe, sa norme $\|\cdot\|_p$, p satisfait la condition prescrite dans la section (3.5). Ce résultat, dû à Clarkson [4], est obtenu via un ensemble d'inégalités pour $L^p(\Omega)$ qui généralise la loi du parallélogramme dans $L^2(\Omega)$.

Théorème 1.15. Si $1 \leq p < \infty$ et $a \geq 0, b \geq 0$, alors

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1} (a^p + b^p). \quad (1.30)$$

Démonstration. Si $a = 0$, (1.30) est clairement vérifié. Si $a > 0$, (1.30) peut être réécrit sous la forme

$$(1 + x)^p \leq 2^{p-1} (1 + x^p) \quad (1.31)$$

où $0 \leq x = b/a$. La fonction $f(x) = (1 + x)^p / (1 + x^p)$ satisfait $f(0) = 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

et $f(x) > 1$ si $0 < x < \infty$. Donc f a son maximum pour $x \geq 0$ en son seul point critique, $x = 1$. Puisque $f(1) = 2^{p-1}$, (1.31) suit. $\square$

Lemme 1.2. Si $0 < s < 1$, la fonction $f(x) = (1 - s^x)/x$ est décroissante pour $x > 0$.

Démonstration. $f'(x) = (1/x^2)(g(s^x) - 1)$ où $g(t) = t - t \ln t$. Puisque $0 < s^x < 1$ et comme $g'(t) = -\ln t \geq 0$ pour $0 < t \leq 1$, il s'ensuit que $g(s^x) < g(1) = 1$ d'où $f'(x) < 0$. $\square$

Lemme 1.3. Si $1 < p \leq 2$ et $0 \leq t \leq 1$, alors

$$\left| \frac{1+t}{2} \right|^{p'} + \left| \frac{1-t}{2} \right|^{p'} \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} t^p \right)^{1/(p-1)} \quad (1.32)$$

où $p' = p/(p-1)$ est l'exposant conjugué de p .

Démonstration. Puisque l'égalité est clairement vérifiée dans (1.32) si $p = 2$ ou $t = 0$ ou $t = 1$, nous pouvons supposer que $1 < p < 2$ et $0 < t < 1$. Sous la transformation $t = (1-s)/(1+s)$, qui applique l'intervalle $0 < t < 1$ sur l'intervalle $1 > s > 0$, (1.32) se réduit à la forme équivalente

$$\frac{1}{2} [(1+s)^p + (1-s)^p] - (1+s^p)^{p-1} \geq 0. \quad (1.33)$$

Si nous dénotons

$$\binom{p}{0} = 1 \text{ et } \binom{p}{k} = \frac{p(p-1)(p-2) \cdots (p-k+1)}{k!}, \quad k \geq 1,$$

le développement en série entière du membre gauche de (1.33) prend la forme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} s^k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} (-s)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p-1}{k} s^{p'k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{2k} s^{2k} - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p-1}{k} s^{p'k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \binom{p}{2k} s^{2k} - \binom{p-1}{2k-1} s^{p'(2k-1)} - \binom{p-1}{2k} s^{2p'k} \right\}. \end{aligned}$$

Cette dernière série est convergente pour $0 \leq s \leq 1$. On prouve (1.33) en montrant que chaque terme de la série est positif pour $0 < s < 1$. Le k terme peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} & \frac{p(p-1)(2-p)(3-p)\cdots(2k-1-p)}{(2k)!} s^{2k} \\ & - \frac{(p-1)(2-p)(3-p)\cdots(2k-1-p)}{(2k-1)!} s^{p'(2k-1)} + \frac{(p-1)(2-p)\cdots(2k-p)}{(2k)!} s^{2kp'} \\ & = \frac{(2-p)(3-p)\cdots(2k-p)}{(2k-1)!} s^{2k} \left[\frac{p(p-1)}{2k(2k-p)} - \frac{p-1}{2k-p} s^{p'(2k-1)-2k} + \frac{p-1}{2k} s^{2kp'-2k} \right] \\ & = \frac{(2-p)(3-p)\cdots(2k-p)}{(2k-1)!} s^{2k} \left[\frac{1-s^{(2k-p)/(p-1)}}{(2k-p)/(p-1)} - \frac{1-s^{2k/(p-1)}}{2k/(p-1)} \right]. \end{aligned}$$

Le premier facteur ci-dessus est positif puisque $p < 2$; le facteur entre parenthèses est positif lemme 1.2 puisque $0 < (2k-p)/(p-1) < 2k/(p-1)$. Ainsi (1.33) et donc (1.32) est établi. $\square$

Lemme 1.4. Soient $z, w \in \mathbb{C}$. Si $1 < p \leq 2$, alors

$$\left| \frac{z+w}{2} \right|^{p'} + \left| \frac{z-w}{2} \right|^{p'} \leq \left(\frac{1}{2} |z|^p + \frac{1}{2} |w|^p \right)^{1/(p-1)} \quad (1.34)$$

où $p' = p/(p-1)$. Si $2 \leq p < \infty$, alors

$$\left| \frac{z+w}{2} \right|^p + \left| \frac{z-w}{2} \right|^p \leq \frac{1}{2} |z|^p + \frac{1}{2} |w|^p. \quad (1.35)$$

Démonstration. Puisque (1.34) est évidemment vrai si $z = 0$ ou $w = 0$ et est symétrique en z et w , on peut supposer que $|z| \geq |w| > 0$. Dans ce cas (1.34) peut être réécrit sous la forme

$$\left| \frac{1+re^{i\theta}}{2} \right|^{p'} + \left| \frac{1-re^{i\theta}}{2} \right|^{p'} \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} r^p \right)^{1/(p-1)}, \quad (1.36)$$

où $w/z = re^{i\theta}$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Si $\theta = 0$, (1.36) est déjà démontré lemme 1.3. On complète la preuve de (1.36) en montrant que pour r fixe la fonction

$$f(\theta) = \left| 1+re^{i\theta} \right|^{p'} + \left| 1-re^{i\theta} \right|^{p'}$$

a une valeur maximale pour $0 \leq \theta < 2\pi$ à $\theta = 0$. Depuis

$$f(\theta) = \left(1 + r^2 + 2r \cos \theta\right)^{p'/2} + \left(1 + r^2 - 2r \cos \theta\right)^{p'/2},$$

il est clair que $f(2\pi - \theta) = f(\pi - \theta) = f(\theta)$, il faut donc considérer f uniquement sur l'intervalle $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Puisque $p' \geq 2$, on a a cet intervalle

$$f'(\theta) = -p'r \sin \theta \left[\left(1 + r^2 + 2r \cos \theta\right)^{(p'/2)-1} - \left(1 + r^2 - 2r \cos \theta\right)^{(p'/2)-1} \right] \leq 0.$$

Si $2 \leq p < \infty$, alors $1 < p' \leq 2$ et on a, en intervertissant p et p' dans (1.34) et en utilisant le lemme 1.15,

$$\begin{aligned} \left| \frac{z+w}{2} \right|^p + \left| \frac{z-w}{2} \right|^p &\leq \left(\frac{1}{2} |z|^{p'} + \frac{1}{2} |w|^{p'} \right)^{1/(p'-1)} \\ &= \left(\frac{1}{2} |z|^{p'} + \frac{1}{2} |w|^{p'} \right)^{p/p'} \\ &\leq 2^{(p/p')-1} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{p/p'} |z|^p + \left(\frac{1}{2} \right)^{p/p'} |w|^p \right) \\ &= \frac{1}{2} |z|^p + \frac{1}{2} |w|^p, \end{aligned}$$

de sorte que (1.35) se prouve aussi. □

Théorème 1.16 (Les inégalités de Clarkson). *Soit $u, v \in L^p(\Omega)$. Pour $1 < p < \infty$ soit $p' = p/(p-1)$. Si $2 \leq p < \infty$, alors*

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_p^p \leq \frac{1}{2} \|u\|_p^p + \frac{1}{2} \|v\|_p^p, \quad (1.37)$$

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_p^{p'} + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_p^{p'} \geq \left(\frac{1}{2} \|u\|_p^p + \frac{1}{2} \|v\|_p^p \right)^{p'-1}. \quad (1.38)$$

Si $1 < p \leq 2$, alors

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_p^{p'} + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_p^{p'} \leq \left(\frac{1}{2} \|u\|_p^p + \frac{1}{2} \|v\|_p^p \right)^{p'-1}, \quad (1.39)$$

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_p^p \geq \frac{1}{2} \|u\|_p^p + \frac{1}{2} \|v\|_p^p. \quad (1.40)$$

Démonstration. Pour $2 \leq p < \infty$, (1.37) s'obtient en prenant $z = u(x)$ et $w = v(x)$ dans (1.35) et en intégrant sur Ω . Pour prouver (1.39) pour $1 < p \leq 2$ on note d'abord que $\| |u|^{p'} \|_{p-1} = \|u\|_p^{p'}$ pour tout $u \in L^p(\Omega)$. En utilisant l'inégalité inverse de Minkowski (1.7) correspondant à l'exposant $p-1 < 1$, et (1.34) avec $z = u(x)$, $w = v(x)$, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u+v}{2} \right\|_p^{p'} + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_p^{p'} &= \left\| \left| \frac{u+v}{2} \right|^{p'} \right\|_{p-1} + \left\| \left| \frac{u-v}{2} \right|^{p'} \right\|_{p-1} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} \left(\left| \frac{u(x)+v(x)}{2} \right|^{p'} + \left| \frac{u(x)-v(x)}{2} \right|^{p'} \right)^{p-1} dx \right)^{1/(p-1)} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |u(x)|^p + \frac{1}{2} |v(x)|^p \right) dx \right)^{p'-1} \\ &= \left(\frac{1}{2} \|u\|_p^p + \frac{1}{2} \|v\|_p^p \right)^{p'-1} \end{aligned}$$

qui est (1.39).

L'inégalité (1.38) peut être prouvée pour $2 \leq p < \infty$ par la même méthode utilisée pour prouver (1.39), sauf que l'inégalité directe de Minkowski (1.5), correspondant à $p-1 \geq 1$, est utilisée à la place de l'inégalité inverse, et à la place de (1.34) on utilise l'inégalité

$$\left(\left| \frac{\xi + \eta}{2} \right|^{p'} + \left| \frac{\xi - \eta}{2} \right|^{p'} \right)^{p-1} \geq \frac{1}{2} |\xi|^p + \frac{1}{2} |\eta|^p,$$

qui s'obtient à partir de (1.34) en remplaçant p par p' , z par $\xi + \eta$, et w par $\xi - \eta$. Enfin, (1.40) peut être obtenu à partir d'une révision similaire de (1.35). Nous remarquons que les quatre inégalités de Clarkson se réduisent à la loi du parallélogramme

$$\|u+v\|_2^2 + \|u-v\|_2^2 = 2\|u\|_2^2 + 2\|v\|_2^2$$

dans le cas $p = 2$. □

Corollaire 1.17. *Si $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ est uniformément convexe.*

Démonstration. Soient $u, v \in L^p(\Omega)$ satisfaire $\|u\|_p = \|v\|_p = 1$ et $\|u - v\|_p \geq \varepsilon > 0$. Si $2 \leq p < \infty$, nous avons de (1.37)

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_p^p \leq 1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}.$$

Si $1 < p \leq 2$, nous avons de (1.39)

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_p^{p'} \leq 1 - \frac{\varepsilon^{p'}}{2^{p'}}.$$

Dans les deux cas il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $\|(u+v)/2\|_p \leq 1 - \delta$. $\square$

Étant uniformément convexe, $L^p(\Omega)$ est réflexive pour $1 < p < \infty$ d'après le théorème (voir (3.5)). Nous donnerons une preuve directe de cette réflexivité après avoir calculé le dual de $L^p(\Omega)$.

1.7 Le duel normé de $L^p(\Omega)$

Soit $1 \leq p \leq \infty$ et soit p' l'exposant conjugué à p . Pour chaque élément $v \in L^{p'}(\Omega)$ on peut définir une fonctionnelle linéaire L_v sur $L^p(\Omega)$ via

$$L_v(u) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \quad u \in L^p(\Omega)$$

Par l'inégalité de Holder $|L_v(u)| \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}$ de sorte que $L_v \in [L^p(\Omega)]'$ et

$$\|L_v; [L^p(\Omega)]'\| \leq \|v\|_{p'} \quad (1.41)$$

Nous montrons que l'égalité doit être vérifiée dans (1.41). $1 < p \leq \infty$, let $u(x) = |v(x)|^{p'-2} \overline{v(x)}$ si $v(x) \neq 0$ et $u(x) = 0$ sinon. Alors $u \in L^p(\Omega)$ et $L_v(u) = \|u\|_p \|v\|_{p'}$. Supposons maintenant $p = 1$ donc $p' = \infty$. Si $\|v\|_{p'} = 0$, soit $u(x) = 0$. Si $\|v\|_{p'} > 0$, soit $0 < \varepsilon < \|v\|_{\infty}$ et soit A

un sous-ensemble mesurable de Ω tel que $0 < \mu(A) < \infty$ et $|v(x)| \geq \|v\|_x - \varepsilon$ sur A . Soit $u(x) = |v(x)|^{-1} \overline{v(x)}$ pour $x \in A$; $u(x) = 0$ sinon. Alors $u \in L'(\Omega)$ et $L_v(u) \geq \|u\|_1 (\|v\|_\infty - \varepsilon)$. Ainsi nous avons montré que

$$\|L_v; [L^p(\Omega)]'\| = \|v\|_{p'} \quad (1.42)$$

de sorte que l'opérateur L associant v à L_v est un isomorphisme isométrique de $L^{p'}(\Omega)$ sur un sous-espace de $[L^p(\Omega)]'$. Il est naturel de se demander si le domaine de l'isomorphisme L est tout $L^{p'}(\Omega)$, c'est-à-dire si toute fonctionnelle linéaire continue sur $L^p(\Omega)$ est de la forme L_v pour un certain $v \in L^{p'}(\Omega)$. Nous allons montrer que tel est le cas pourvu que $1 \leq p < \infty$. Pour $p = 2$ c'est une conséquence immédiate du théorème de représentation de Riesz pour les espaces de Hilbert. Pour p général une preuve directe peut être - donnée en utilisant le théorème de Radon-Nikodym (voir Rudin [11]). Nous donnerons une preuve plus élémentaire basée sur la convexité uniforme de $L^R(\Omega)$ et un argument variationnel. Cette méthode de preuve est également utilisée par Hewitt et Stromberg [3]. Enfin, nous utiliserons un argument limite pour obtenir le cas $p = 1$ à partir du cas $p > 1$.

Lemme 1.5. *Soit $1 < p < \infty$. Si $L \in [L^p(\Omega)]'$ et $\|L; [L^p(\Omega)]'\| = 1$, alors il existe unique $w \in L^p(\Omega)$ tel que $\|w\|_p = L(w) = 1$. Réciproquement, si $w \in L^p(\Omega)$ est donné et $\|w\|_p = 1$, alors il existe un unique $L \in [L^p(\Omega)]'$ tel que $\|L; [L^p(\Omega)]'\| = L(w) = 1$.*

Démonstration. Supposons d'abord que $L \in [L^p(\Omega)]'$ est donné et $\|L\| = 1$. Il existe une suite $\{w_n\} \in L^p(\Omega)$ telle que $\|w_n\| = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} |L(w_n)| = 1$. On peut supposer que $|L(w_n)| > \frac{1}{2}$ pour chaque n , et, en remplaçant w_n par un multiple convenable de w_n par un nombre complexe de module unitaire, que $L(w_n) > 0$. Supposons que la suite $\{w_n\}$ n'est pas une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\|w_n - w'_m\|_p \geq \varepsilon$ pour des valeurs arbitrairement grandes de m et n , de sorte que par convexité uniforme on a

$\left\| \frac{1}{2} (w_n + w_m) \right\|_p \leq 1 - \delta$, où δ est un nombre positif fixe. Ains

$$\begin{aligned} 1 &\geq L \left(\frac{w_n + w_m}{\|w_n + w_m\|_p} \right) = \left\| \frac{w_n + w_m}{2} \right\|_p^{-1} L \left(\frac{w_n + w_m}{2} \right) \\ &\geq \frac{1}{1-\delta} \cdot \frac{1}{2} [L(w_n) + L(w_m)]. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Puisque la dernière expression tend vers $1/(1-\delta)$ lorsque $n, m \rightarrow \infty$, on a une contradiction. Ainsi $\{w_n\}$ est une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$ et converge donc vers un élément w de cet espace. Clairement $\|w\|_p = 1$ et $L(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(w_n) = 1$. L'unicité de w découle de (1.43) appliqué à deux candidats distincts.

Supposons maintenant que $w \in L^p(\Omega)$ soit donné et $\|w\|_p = 1$, la fonctionnelle L_v définie par

$$L_v(u) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \quad u \in L^p(\Omega), \quad (1.44)$$

où

$$v(x) = \begin{cases} |w(x)|^{p-2} \overline{w(x)} & \text{si } w(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.45)$$

satisfait $L_v(w) = \|w\|_p^p = 1$ et $\|L_v; [L^p(\Omega)]'\| = \|v\|_{p'} = \|w\|_p^{p/p'} = 1$. Il reste donc à montrer que si $L_1, L_2 \in [L^p(\Omega)]'$ satisfont $\|L_1\| = \|L_2\| = 1$, alors $L_1 = L_2$. Supposons que non. Alors il existe $u \in L^p(\Omega)$ tel que $L_1(u) \neq L_2(u)$. En remplaçant u par un multiple convenable de u , on peut supposer que $L_1(u) - L_2(u) = 2$. Puis en remplaçant u par sa somme par un multiple convenable de w , on peut faire en sorte que $L_1(u) = 1$ et $L_2(u) = -1$. Si $t > 0$, alors $L_1(w + tu) = 1 + t$; puisque $\|L_1\| = 1$, donc $\|w + tu\|_p \geq 1 + t$. De même, $L_2(w - tu) = 1 + t$ donc $\|w - tu\|_p \geq 1 + t$. Si $1 < p \leq 2$, l'inégalité de Clarkson (1.40) donne

$$\begin{aligned} 1 + t^p \|u\|_p^p &= \left\| \frac{(w+tu)+(w-tu)}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{(w+tu)-(w-tu)}{2} \right\|_p^p \\ &\geq \frac{1}{2} \|w + tu\|_p^p + \frac{1}{2} \|w - tu\|_p^p \geq (1+t)^p. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Si $2 \leq p < \infty$, l'inegalite de Clarkson (1.38) donne

$$\begin{aligned} 1 + t^{p'} \|u\|_p^{p'} &= \left\| \frac{(w+tu) + (w-tu)}{2} \right\|_p^{p'} + \left\| \frac{(w+tu) - (w-tu)}{2} \right\|_p^{p'} \\ &\geq \left(\frac{1}{2} \|w + tu\|_p^p + \frac{1}{2} \|w - tu\|_p^p \right)^{p'-1} \geq (1+t)^{p'}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Les equations (1.46) et (1.47) ne sont pas possibles pour tout $t > 0$ sauf si $\|u\|_p = 0$ ce qui est impossible. Ainsi $L_1 = L_2$. $\square$

Théorème 1.18 (Le théorème de représentation de Riesz pour $L^p(\Omega)$). *Soit $1 < p < \infty$ et soit $L \in [L^p(\Omega)]'$. Alors il existe $v \in L^{p'}(\Omega)$ tel que pour tout $u \in L^p(\Omega)$*

$$L(u) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

De plus, $\|v\|_{p'} = \|L; [L^p(\Omega)]'\|$. Ainsi $[L^p(\Omega)]' \cong L^{p'}(\Omega)$.

Démonstration. $LfL = 0$, on peut prendre $v = 0$. En conséquence, nous supposons $L \neq 0$ et, sans perte de généralité, que $\|L; [L^p(\Omega)]'\| = 1$. D'après le lemme 1.5 il existe $w \in L^p(\Omega)$ avec $\|w\|_p = 1$ tel que $L(w) = 1$. Soit v donné par (1.45). Alors L_v , défini par (1.44), satisfait $\|L_v; [L^p(\Omega)]'\| = 1$ et $L_v(w) = 1$. D'après le lemme 1.5, nous avons à nouveau $L = L_v$. Puisque $\|v\|_{p'} = 1$, la preuve est complète. $\square$

Théorème 1.19 (représentation de Riesz pour $L^1(\Omega)$). *Soit $L \in [L^1(\Omega)]'$. Alors il existe $v \in L^\infty(\Omega)$ telle que pour tout $u \in L^1(\Omega)$*

$$L(u) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

et $\|v\|_\infty = \|L; [L^1(\Omega)]'\|$. Ainsi $[L^1(\Omega)]' \cong L^\infty(\Omega)$.

Démonstration. Encore une fois on peut supposer que $L \neq 0$ et $\|L; [L^1(\Omega)]'\| = 1$. Supposons, pour le moment, que Ω soit de volume fini. Alors d'après le théorème 1.5 si $1 < p < \infty$, on a $L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ et

$$|L(u)| \leq \|u\|_1 \leq (\text{vol } \Omega)^{1-(1/p)} \|u\|_p$$

pour tout $u \in L^p(\Omega)$. Donc $L \in [L^p(\Omega)]'$ et d'après le théorème 1.18 il existe $v_p \in L^{p'}(\Omega)$ tel que

$$\|v_p\|_{p'} \leq (\text{vol } \Omega)^{1-(1/p)} \quad (1.48)$$

et pour chaque $u \in L^p(\Omega)$

$$L(u) = \int_{\Omega} u(x)v_p(x)dx \quad (1.49)$$

Puisque $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 < p < \infty$, et puisque pour tout p, q vérifiant $1 < p, q < \infty$ et tout $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ on a

$$\int_{\Omega} \phi(x)v_p(x)dx = L(\phi) = \int_{\Omega} \phi(x)v_q(x)dx,$$

il s'ensuit que $v_p = v_q$ p.p. sur Ω . On peut donc remplacer v_p dans (1.49) bv une fonction v appartenant à $L^p(\Omega)$ pour tout p , $1 < p < \infty$, et vérifiant, d'après (1.48),

$$\|v\|_{p'} \leq (\text{vol } \Omega)^{1-(1/p)}.$$

Il découle à nouveau du théorème 1.5 que $v \in L^\infty(\Omega)$ et

$$\|v\|_\infty \leq \lim_{p' \rightarrow \infty} (\text{vol } \Omega)^{1-(1/p)} = 1 \quad (1.50)$$

L'argument au début de section (Le duel normé de $L^p(\Omega)$) montre que l'égalité doit prévaloir dans (1.50). Si Ω n'a pas de volume fini, on peut néanmoins écrire $\Omega = \bigcup_{j=1}^\infty G_j$, où $G_j = \{x \in \Omega : j-1 \leq |x| < j\}$ est de volume fini. Les ensembles G_j sont disjoints entre eux. Soit $\chi_j(x)$ la fonction caractéristique de G_j . Si $u_j \in L^1(G_j)$, notons $\tilde{u}_j$ l'extension nulle de u_j en dehors de G_j , c'est-à-dire $\tilde{u}_j(x) = u_j(x)$ si $x \in G_j$, $\tilde{u}_j(x) = 0$ sinon. Soit $L_j(u_j) = L(\tilde{u}_j)$. Alors $L_j \in [L^1(G_j)]'$ et $\|L_j; [L^1(G_j)]'\| \leq 1$. Par le cas des volumes finis considéré ci-dessus il

existe $v_j \in L^\infty(G_j)$ tel que $\|v_j\|_{\infty, G_j} \leq 1$ et

$$L_j(u_j) = \int_{G_j} u_j(x) v_j(x) dx = \int_{\Omega} \tilde{u}_j(x) v(x) dx,$$

où $v(x) = v_j(x)$ pour $x \in G_j (j = 1, 2, \dots)$, de sorte que $\|v\|_{\infty} \leq 1$. Si $u \in L^1(\Omega)$, on pose $u = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_j u$; la série convergeant en norme dans $L^1(\Omega)$ par convergence dominée. Depuis

$$L\left(\sum_{j=1}^k \chi_j u\right) = \sum_{j=1}^k L_j(\chi_j u) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^k \chi_j(x) u(x) v(x) dx,$$

on obtient, en passant à la limite par convergence dominée,

$$L(u) = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx.$$

Il s'ensuit alors, comme dans le cas des volumes finis, que $\|v\|_{\infty} = 1$. □

Théorème 1.20. $L^p(\Omega)$ est réflexif si et seulement si $1 < p < \infty$.

Démonstration. Soit $X = L^p(\Omega)$, où $1 < p < \infty$. Puisque $X' \cong L^{p'}(\Omega)$, à tout $w \in X''$ correspond $\tilde{w} \in [L^{p'}(\Omega)]'$ tel que $w(v) = \tilde{w}(v)$, où

$$v(u) = \int_{\Omega} \tilde{v}(x) u(x) dx, \quad u \in X.$$

De même, correspondant à $\tilde{w} \in [L^{p'}(\Omega)]'$ il existe $u \in X$ tel que

$$\tilde{w}(\tilde{v}) = \int_{\Omega} \tilde{v}(x) u(x) dx, \quad \tilde{v} \in L^{p'}(\Omega).$$

Il s'ensuit que

$$w(v) = \tilde{w}(\tilde{v}) = \int_{\Omega} \tilde{v}(x) u(x) dx = v(u) = J_x u(v)$$

pour tout $v \in X'$, J_X étant l'isomorphisme isométrique naturel (voir (3.5)) de X dans X'' . Cela montre que J_X applique X sur X'' de sorte que $X = L^p(\Omega)$ est réflexif. Puisque

$L^1(\Omega)$ est séparable alors qu'il est dual, qui est isométriquement isomorphe à $L^\infty(\Omega)$, n'est pas séparable, ni $L^1(\Omega)$ ni $L^\infty(\Omega)$ ne peuvent être réflexifs. $\square$

CHAPITRE 2

LES ESPACES $W^{M,P}(\Omega)$

2.1 Définitions et propriétés de base

Dans ce chapitre, nous introduisons les espaces de Sobolev d'ordre entier et établissons certaines de leurs propriétés de base. Ces espaces sont définis sur un domaine arbitraire $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et sont des sous-espaces vectoriels de différents espaces $L^p(\Omega)$. Nous définissons une fonctionnelle $\|\cdot\|_{m,p}$, où m est un entier non négatif et $1 \leq p \leq \infty$, comme suit :

$$\|u\|_{m,p} = \left\{ \sum_{0 \leq |a| \leq m} \|D^a u\|_p^p \right\}^{1/p} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty, \quad (2.1)$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{0 \leq |a| \leq m} \|D^a u\|_\infty \quad (2.2)$$

pour toute fonction u pour laquelle le membre de droite a un sens, $\|\cdot\|_p$ étant bien entendu la norme $L^p(\Omega)$. (Dans les situations où la confusion des domaines peut se produire, nous écrirons $\|u\|_{m,p,\Omega}$ à la place de $\|u\|_{m,p}$). Il est clair que (2.1) ou (2.2) définit une norme sur tout espace vectoriel de fonctions dont le côté droit prend des valeurs finies à condition que les fonctions soient identifiées dans l'espace si elles sont égales presque partout dans Ω . Nous

considérons trois de ces espaces correspondant à des valeurs données quelconques de m et p :

$H^{m,p}(\Omega) \equiv$ la complétion de $\{u \in C^m(\Omega) : \|u\|_{m,p} < \infty\}$ par rapport à la norme $\|\cdot\|_{m,p}$,

$W^{m,p}(\Omega) \equiv \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ pour } 0 \leq |\alpha| \leq m\}$, où $D^\alpha u$ est la dérivée partielle faible (ou distributionnelle) de la section (3.5), et $W_0^{m,p}(\Omega) \equiv$ la clôture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans l'espace $W^{m,p}(\Omega)$.

Munis de la norme appropriée (2.1) ou (2.2), ceux-ci sont appelés espaces de Sobolev sur Ω . Clairement $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$, et si $1 \leq p < \infty$, $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. Pour tout m la chaîne de injections

$$W_0^{m,p}(\Omega) \rightarrow W^{m,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$$

est également clair. Nous montrerons dans le théorème 2.7 que $H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$ pour tout domaine Ω . Ce résultat, publié en 1964 par Meyers et Serrin [9], a dissipé une grande confusion sur la relation entre ces espaces qui avait existé dans la littérature avant cette époque. Il est surprenant que ce résultat élémentaire soit resté si longtemps inconnu.

Les espaces $W^{m,p}(\Omega)$ ont été introduits par Sobolev [10] avec de nombreux espaces apparentés étudiés par d'autres auteurs, en particulier, Morrey [1] et Deny et Lions [5]. De nombreux symboles différents ($W^{m,p}$, $H^{m,p}$, $P^{m,p}$, L_m^p , etc.) ont été (et sont) utilisés pour désignent ces espaces et leurs variantes, et avant qu'ils ne soient généralement associés au nom de Sobolev, ils étaient parfois désignés sous d'autres noms, par exemple, comme «espaces Beppo Levi».

De nombreuses généralisations et extensions des espaces de base $W^{m,p}(\Omega)$ ont été faites ces dernières années, la grande majorité de la littérature provenant de l'Union soviétique. En particulier, nous mentionnons les extensions qui autorisent des valeurs réelles arbitraires de m et sont interprétées comme correspondant à des ordres fractionnaires de différenciation, des espaces pondérés qui introduisent des fonctions de poids dans les normes L^p , des espaces $W^{m,p}$ qui impliquent différents ordres de différenciation et différentes normes L^p dans les différentes directions de coordonnées (espaces anisotropes), et espaces d'Orlicz-Sobolev modélisés sur les

généralisations des espaces L^p connus sous le nom d'«espaces d'Orlicz».

Il ne sera pas possible d'étudier le spectre complet des généralisations possibles dans cette monographie.

Théorème 2.1. $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de banach.

Démonstration. Soit $\{u_n\}$ une suite de Cauchy dans $W^{m,p}(\Omega)$. Alors $\{D^\alpha u_n\}$ est une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$ for $0 \leq |\alpha| \leq m$ pour $0 \leq |\alpha| \leq m$. Puisque $L^p(\Omega)$ est complet il existe des fonctions u et $u_\alpha, 0 < |\alpha| \leq m$, dans $L^p(\Omega)$ telles que $D^\alpha u_n \rightarrow u_\alpha$ dans $L^p(\Omega)$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Ou $L^p(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ et donc u_n détermine une distribution $T_{u_n} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (voir (3.5)). Pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a

$$|T_{u_n}(\phi) - T_u(\phi)| \leq \int_{\Omega} |u_n(x) - u(x)| \cdot |\phi(x)| dx \leq \|\phi\|_{p'} \|u_n - u\|_p$$

par l'inégalité de Holder, où $p' = p/(p-1)$ (ou $p' = \infty$ si $p = 1, p' = 1$ si $p = \infty$). D'où $T_{u_n}(\phi) \rightarrow T_u(\phi)$ pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ lorsque $n \rightarrow \infty$. De même, $T_{D^\alpha u_n}(\phi) \rightarrow T_{u_n}(\phi)$ pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Il s'ensuit que

$$T_{u_\alpha}(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{D^\alpha u_n}(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} T_{u_n}(D^\alpha \phi) = (-1)^{|\alpha|} T_u(D^\alpha \phi)$$

pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Ainsi $u_\alpha = D^\alpha u$ au sens répartitionnel sur Ω pour $0 \leq |\alpha| \leq m$, d'où $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{m,p} = 0$, $W^{m,p}(\Omega)$ est complet $\square$

Les dérivées partielles distributionnelles et classiques coïncident lorsque ces dernières existent et sont continues; il est donc clair que l'ensemble

$$S = \{\phi \in C^m(\Omega) : \|\phi\|_{m,p} < \infty\}$$

est contenu dans $W^{m,p}(\Omega)$. Puisque $W^{m,p}(\Omega)$ est complet, l'opérateur d'identité dans S s'étend à un isomorphisme isométrique entre $H^{m,p}(\Omega)$, la complétion de S et la fermeture de

S dans $W^{m,p}(\Omega)$. Il est donc naturel d'identifier $H^{m,p}(\Omega)$ à cette fermeture et d'obtenir ainsi le corollaire suivant.

Corollaire 2.2. $H^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$.

Plusieurs propriétés importantes des espaces $W^{m,p}(\Omega)$ sont plus facilement obtenues en considérant $W^{m,p}(\Omega)$ comme un sous-espace fermé d'un produit cartésien d'espaces $L^p(\Omega)$. Soit $N \equiv N(n, m) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} 1$ le nombre de multiindices α vérifiant $0 \leq |\alpha| \leq m$. Pour $1 \leq p \leq \infty$ soit $L_N^p = \prod_{j=1}^N L^p(\Omega)$, la norme de $u = (u_1, \dots, u_N)$ dans L_N^p étant donné par

$$\|u; L_N^p\| = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^N \|u_j\|_p^p \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \max_{1 \leq j \leq N} \|u_j\|_\infty & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

L_N^p est un espace de Banach séparable si $1 \leq p < \infty$ et réflexif et uniformément convexe si $1 < p < \infty$. Supposons que les N multi-indices α vérifiant $0 \leq |\alpha| \leq m$ soient ordonnés linéairement d'une manière commode de sorte qu'à chaque $u \in W^{m,p}(\Omega)$ on puisse associer le vecteur bien défini Pu dans L_N^p donné par

$$Pu = (D^\alpha u)_{0 \leq |\alpha| \leq m}. \quad (2.3)$$

Puisque $\|Pu; L_N^p\| = \|u\|_{m,p}$, P est un isomorphisme isométrique de $W^{m,p}(\Omega)$ sur un sous-espace $W \subset L_N^p$. Puisque $W^{m,p}(\Omega)$ est espace complet, W est un sous-espace fermé de L_N^p (voir (3.5)). W est séparable si $1 < p < \infty$ et réflexif et uniformément convexe si $1 \leq p < \infty$. Les mêmes conclusions doivent donc valoir pour

Théorème 2.3. $W^{m,p}(\Omega)$ est séparable si $1 \leq p < \infty$, et est réflexive et uniformément convexe si $1 < p < \infty$. En particulier, donc, $W^{m,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable avec produit scalaire

$$(u, v)_m = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v),$$

où $(u, v) = \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx$ est le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

2.2 Dualité, les Espaces $W^{-m,p'}(\Omega)$

Dans les sections suivantes, nous prendrons, pour Ω , m et p fixes, le nombre N , les espaces L_N^p et W , et l'opérateur P comme spécifié dans la section (2.1). Nous définissons également

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

pour toute fonction u, v pour laquelle le côté droit a un sens. Pour p donné, p' désignera toujours l'exposant conjugué :

$$p' = \begin{cases} \infty & \text{si } p = 1 \\ p/(p-1) & \text{si } 1 < p < \infty \\ 1 & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Lemme 2.1. Soit $1 \leq p < \infty$. A tout $L \in (L_N^p)'$ correspond un unique $v \in L_N^{p'}$ tel que pour tout $u \in L_N^p$

$$L(u) = \sum_{j=1}^N \langle u_j, v_j \rangle$$

De plus,

$$\|L; (L_N^p)'\| = \|v; L_N^{p'}\|. \quad (2.4)$$

Ainsi $(L_N^p)' \cong L_N^{p'}$.

Démonstration. Si $1 \leq j \leq N$ et $w' \in L^p(\Omega)$, soit $w_{(j)} = (0, \dots, 0, w, 0, \dots, 0)$ cet élément de L_N^p dont la j ième composante est w , toutes les autres composantes étant nulles. En posant $L_j(w) = L(w_{(j)})$, on voit que $L_j \in (L^p(\Omega))'$ et donc il existe (unique) $v_j \in L^{p'}(\Omega)$ tel que pour tout $w \in L^p(\Omega)$

$$L(w_{(j)}) = L_j(w) = \langle w, v_j \rangle.$$

Si $u \in L_N^p$, alors

$$L(u) = L\left(\sum_{j=1}^N u_{j(j)}\right) = \sum_{j=1}^N L(u_{j(j)}) = \sum_{j=1}^N \langle u_j, v_j \rangle.$$

Par l'inégalité de Holder (pour les fonctions et pour les sommes finies), on a

$$|L(u)| \leq \sum_{j=1}^N \|u_j\|_p \|v_j\|_{p'} \leq \|u; L_N^p\| \|v; L_N^{p'}\|$$

de sorte que $\|L; (L_N^p)'\| \leq \|v; L_N^{p'}\|$. Nous montrons que ces normes sont en fait égales comme suit : si $1 < p < \infty$ et $1 \leq j \leq N$, soit

$$u_j(x) = \begin{cases} |v_j(x)|^{p'-2} \overline{v_j(x)} & \text{si } v_j(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } v_j(x) = 0. \end{cases}$$

On vérifie facilement que $|L(u_1, \dots, u_N)| = \|v; L_N^{p'}\|^{p'} = \|u; L_N^p\| \|v; L_N^{p'}\|$. Si $p = 1$, on choisit k pour que $\|v_k\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq N} \|v_j\|_\infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble mesurable $A \subset \Omega$ de volume fini non nul, tel que $|v_k(x)| \geq \|v_k\|_\infty - \varepsilon$ pour $x \in A$. Posant

$$u(x) = \begin{cases} \overline{v_k(x)}/v_k(x) & \text{si } x \in A \text{ et } v_k(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} L(u_{(k)}) &= \langle u, v_k \rangle = \int_A |v_k(x)| dx \geq (\|v_k\|_\infty - \varepsilon) \|u\|_1 \\ &= (\|v; L_N^\infty\| - \varepsilon) \|u_{(k)}; L_N^{-1}\|. \end{aligned}$$

Puisque ε est arbitraire, (2.4) doit suivre dans ce cas également. $\square$

Théorème 2.4. Soit $1 \leq p < \infty$. Pour tout $L \in (W^{m,p}(\Omega))'$ il existe un élément $v \in L_N^{p'}$ tel que, en écrivant le vecteur v sous la forme $(v_\alpha)_{0 \leq |\alpha| \leq m}$, on a pour tout $u \in W^{m,p}(\Omega)$

$$L(u) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, v_\alpha \rangle. \quad (2.5)$$

Da plus,

$$\|L; (W^{m,p}(\Omega))'\| = \inf \|v; L_N^{p'}\| = \min \|v; L_N^{p'}\|, \quad (2.6)$$

l'infimum étant pris en charge, et atteint sur l'ensemble de tous les $v \in L_N^{p'}$ pour lesquels (2.5) est vrai pour tout $u \in W^{m,p}(\Omega)$.

Démonstration. Une fonctionnelle linéaire L^* est définie comme suit sur le domaine W de l'opérateur P défini par (2.3) :

$$L^*(Pu) = L(u), \quad u \in W^{m,p}(\Omega).$$

Puisque P est un isomorphisme isométrique, $L^* \in W'$ et

$$\|L^*; W'\| = \|L; (W^{m,p}(\Omega))'\|.$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une extension préservant la norme $\tilde{L}$ de L^* à L_N^p , et d'après le lemme 2.1 il existe $v \in L_N^{p'}$ tel que si $u = (u_\alpha)_{0 \leq |\alpha| \leq m} \in L_N^p$, alors

$$\tilde{L}(u) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle u_\alpha, v_\alpha \rangle$$

Ainsi pour $u \in W^{m,p}(\Omega)$ on obtien

$$L(u) = L^*(Pu) = \tilde{L}(Pu) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, v_\alpha \rangle.$$

De plus,

$$\|L; (W^{m,p}(\Omega))'\| = \|L^*; W'\| = \|\tilde{L}; (L_N^p)'\| = \|v; L_N^{p'}\|. \quad (2.7)$$

Ou tout élément $v \in L_N^{p'}$ pour lequel (2.5) est vrai pour tout $u \in W^{m,p}(\Omega)$ correspond à une extension L de L^* et aura donc pour norme $\|v; L_N^{p'}\|$ pas moins de $\|L; (W^{m,p}(\Omega))'\|$. En combinant ceci avec (2.7), on obtient (2.6). $\square$

On remarque qu'au moins si $1 < p < \infty$, l'élément $v \in L_N^{p'}$ vérifiant (2.5) et (2.6) est unique. Puisque L_N^p et $L_N^{p'}$ sont uniformément convexes, il s'ensuit par un argument similaire à celui du lemme 1.5 que les fonctionnelles linéaires définies sur des sous-espaces fermés de L_N^p ont des extensions uniques préservant la norme à L_N^p .

Pour $1 \leq p < \infty$ tout élément L de l'espace $(W^{m,p}(\Omega))'$ est une extension à $W^{m,p}(\Omega)$ d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pour voir cela supposons que L est donné par (2.5) pour un certain $v \in L_N^{p'}$ et définissons T_{v_α} , $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, par

$$\begin{aligned} T_{v_\alpha}(\phi) &= \langle \phi, v_\alpha \rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad 0 \leq |\alpha| \leq m, \\ T &= \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha T_{v_\alpha}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$ on a

$$T(\phi) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} T_{v_\alpha}(D^\alpha \phi) = L(\phi)$$

de sorte que L est clairement une extension de T . De plus, on a, le suivant (2.6),

$$\|L; (W^{m,p}(\Omega))'\| = \min \left\{ \|v; L_N^{p'}\| : L \text{ prolongé } T \text{ donné par (2.8)} \right\}.$$

Les remarques ci-dessus sont également valables pour $L \in (W_0^{m,p}(\Omega))'$ puisque toute fonction de ce type possède une extension préservant la norme à $W^{m,p}(\Omega)$. Supposons maintenant que T est un élément quelconque de $\mathcal{D}'(\Omega)$ ayant la forme (2.8) pour un certain $v \in L_N^{p'}$, où $1 \leq p' \leq \infty$. Alors T possède éventuellement des extensions continues non uniques de $W^{m,p}(\Omega)$. Nous montrons, cependant, que T possède une telle extension unique à $W_0^{m,p}(\Omega)$. Si $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, soit $\{\phi_n\}$ une suite dans $C_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\|\phi_n - u\|_{m,p} \rightarrow 0$ lorsque

$n \rightarrow \infty$. Alors

$$\begin{aligned} |T(\phi_k) - T(\phi_n)| &\leq \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} |T_{v_\alpha}(D^\alpha \phi_k - D^\alpha \phi_n)| \\ &\leq \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha(\phi_k - \phi_n)\|_p \|v_\alpha\|_{p'} \\ &\leq \|\phi_k - \phi_n\|_{m,p} \|v; L_N^{p'}\| \rightarrow 0, \text{ lorsque } k, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Donc $\{T(\phi_n)\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$ et converge donc vers une limite que l'on peut noter $L(u)$ puisqu'il est clair que si aussi $\{\psi_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ et $\|\psi_n - u\|_{m,p} \rightarrow 0$, alors $T(\phi_n) - T(\psi_n) \rightarrow 0$ orsque $n \rightarrow \infty$. La fonctionnelle L ainsi définie est linéaire et appartient à $(W_0^{m,p}(\Omega))'$, car si $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n$ comme ci-dessus, alors

$$|L(u)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |T(\phi_n)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\phi_n\|_{m,p} \|v; L_N^{p'}\| = \|u\|_{m,p} \|v; L_N^{p'}\|$$

Nous avons donc démontré le théorème suivant.

Théorème 2.5. *Soit $1 \leq p < \infty$. L'espace dual $(W_0^{m,p}(\Omega))'$ est isométriquement isomorphe à l'espace de Banach constitué des distributions $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ satisfaisant (2.8) pour un certain $v \in L_N^{p'}$, normé par*

$$\|T\| = \inf \left\{ \|v; L_N^{p'}\| : v \text{ satisfait (2.8)} \right\}.$$

En général, on ne peut s'attendre à une caractérisation aussi simple de $(W^{m,p}(\Omega))'$ si $W_0^{m,p}(\Omega)$ est un sous-espace propre de $W^{m,p}(\Omega)$.

Si $m = 1, 2, \dots$ et $1 \leq p < \infty$, notons p' l'exposant conjugué à p et notons $W^{-m,p'}(\Omega)$ l'espace de Banach des distributions sur Ω cité dans le théorème ci-dessus. (La complétude de cet espace est une conséquence de l'isomorphisme isométrique qui y est affirmé.) Évidemment $W^{-m,p'}(\Omega)$ est séparable et réflexive si $1 < p < \infty$. Chaque élément $v \in L^{p'}(\Omega)$ détermine un élément L_v de $(W_0^{m,p}(\Omega))'$ au moyen de $L_v(u) = \langle u, v \rangle$ pour

$$|L_v(u)| = |\langle u, v \rangle| \leq \|v\|_{p'} \|u\|_p \leq \|v\|_{p'} \|u\|_{m,p}.$$

On définit la $(-m, p')$ -norme de $v \in L^{p'}(\Omega)$ comme étant la norme de L_v , c'est-à-dire

$$\|v\|_{-m,p'} = \|L_v; (W_0^{m,p}(\Omega))'\| = \sup_{\substack{u \in W \\ \|u\|_{m,p} \leq 1}} |\langle u, v \rangle|,$$

où nous avons écrit W pour représenter $W_0^{m,p}(\Omega)$ sur le côté droit, une pratique que nous continuons ci-dessous, par souci de simplicité. Clairement, pour tout $u \in W$ et $v \in L^{p'}(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} \|v\|_{-m,p'} &\leq \|v\|_{p'} \\ |\langle u, v \rangle| &= \|u\|_{m,p} |\langle u/\|u\|_{m,p}, v \rangle| \leq \|u\|_{m,p} \|v\|_{-m,p'}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Cette dernière formule est une inégalité de Holder généralisée.

Soit $V = \{L_v : v \in L^{p'}(\Omega)\}$. Ainsi V est un sous-espace vectoriel de $W' = (W_0^{m,p}(\Omega))'$. Nous montrons que V est en fait dense dans W' . C'est facilement considéré comme équivalent à montrer que si $F \in W''$ satisfait $F(L_v) = 0$ pour tout $L_v \in V$, alors $F = 0$ dans W'' . Puisque W est réflexif, il existe $f \in W$ correspondant à $F \in W''$ tel que $\langle f, v \rangle = L_v(f) = F(L_v) = 0$ pour tout $v \in L^{p'}(\Omega)$. Puisque $f \in L^p(\Omega)$, il s'ensuit que $f(x) = 0$ p.p. en Ω . Donc $f = 0$ en W et $F = 0$ en W'' .

Soit $H^{-m,p'}(\Omega)$ la complétion de $L^{p'}(\Omega)$ par rapport à la norme $\|\cdot\|_{-m,p'}$. Ensuite nous avons

$$H^{-m,p'}(\Omega) \cong (W_0^{m,p}(\Omega))' \cong W^{-m,p'}(\Omega).$$

En particulier, correspondant à chaque $v \in H^{-m,p'}(\Omega)$, il existe $T_1 \in W^{-m,p'}(\Omega)$ tel que $T_v(\Omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \phi, v_n \rangle$ pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et toute suite $\{v_n\} \subset L^{p'}(\Omega)$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_{-m,p'} = 0$ et inversement tout $T \in H^{-m,p'}(\Omega)$ vérifie $T = T_v$ pour un tel v . De plus, d'après (2.9), $|T_v(\phi)| \leq \|\phi\|_{m,p} \|v\|_{-m,p'}$. Par un argument similaire à , l'espace dual $(W^{m,p}(\Omega))'$ peut être caractérisé pour $1 < p < \infty$ comme le complément de $L^{p'}(\Omega)$ avec respect de la norme

$$\|v\|_{-m,p'} = \sup_{\substack{u \in W^{m,p}(\Omega) \\ \|u\|_{m,p} \leq 1}} |\langle u, v \rangle|$$

2.3 Approximation par les fonctions lisses sur Ω

On souhaite prouver que $\{\phi \in C^\infty(\Omega) : \|\phi\|_{m,p} < \infty\}$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$. À cette fin, nous avons besoin du théorème d'existence standard suivant pour les partitions infiniment différentiables de l'unité.

Théorème 2.6. *Soit A un sous-ensemble arbitraire de $\mathbb{R}^n$ et soit $\mathcal{O}$ une collection d'ensembles ouverts dans $\mathbb{R}^n$ qui recouvrent A , c'est-à-dire tels que $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{O}} U$. Alors il existe une collection Ψ de fonctions $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ayant les propriétés suivantes*

- (i) *Pour tout $\psi \in \Psi$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq \psi(x) \leq 1$.*
- (ii) *Si $K \subset\subset A$, tous sauf éventuellement un nombre fini de $\psi \in \Psi$ s'annulent identiquement sur K .*
- (iii) *Pour tout $\psi \in \Psi$ il existe $U \in \mathcal{O}$ tel que $\text{supp } \psi \subset U$.*
- (iv) *Pour tout $x \in A$, $\sum_{\psi \in \Psi} \psi(x) = 1$.*

Une telle collection Ψ est appelée une C^∞ -partition d'unité pour A subordonnée à $\mathcal{O}$.

Démonstration. Comme la preuve peut être trouvée dans de nombreux textes, nous n'en donnons ici qu'un aperçu, laissant les détails au lecteur. Supposons d'abord que A est compact de sorte que $A \subset \bigcup_{j=1}^N U_j$, où $U_1, \dots, U_N \in \mathcal{O}$. Les ensembles compacts $K_1 \subset U_1, \dots, K_N \subset U_N$ peuvent être construits de sorte que $A \subset \bigcup_{j=1}^N K_j$. Pour $1 \leq j \leq N$ il existe une fonction non négative $\phi_j \in C_0^\infty(U_j)$ telle que $\phi_j(x) > 0$ pour $x \in K_j$. Une fonction ϕ peut alors être construite de manière à être infiniment différentiable et positive sur $\mathbb{R}^n$ et à satisfaire $\phi(x) = \sum_{j=1}^N \phi_j(x)$ pour $x \in A$. Maintenant $\Psi = \{\psi_j : \psi_j(x) = \phi_j(x)/\phi(x), 1 \leq j \leq N\}$ a les propriétés souhaitées. Supposons maintenant que A soit ouvert. Alors $A = \bigcup_{j=1}^N A_j$, où

$$A_j = \{x \in A : |x| \leq j \text{ et } \text{dist}(x, \partial A) \geq 1/j\}$$

est compacte. Pour chaque j la collection

$$\mathcal{O}_j = \left\{ U \cap \left(\overset{o}{A}_{j+1} \cap A_{j-2}^c \right) : U \in \mathcal{O} \right\}$$

couvre A_j et il existe donc une C^∞ -partition finie d'unité Ψ_j pour A_j subordonné à $\mathcal{O}_j$. La somme $\sigma(x) = \sum_{j=1}^\infty \sum_{\phi \in \psi} \phi(x)$ ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls en chaque point et est positive en chaque $x \in A$. La collection $\Psi = \{\psi : \psi(x) = \phi(x)/\sigma(x)\}$ pour un certain ϕ dans un certain Ψ_j si $x \in A$, $\psi(x) = 0$ si $x \notin A$ a la valeur prescrite propriété p.p.. Enfin, si A est arbitraire, alors $A \subset B = \bigcup_{U \in \mathcal{O}} U$, où B est ouvert. Toute partition d'unité pour B conviendra également pour A . $\square$

Lemme 2.2. Soit J_ε défini et soit $1 \leq p < \infty$ et $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Si $\Omega' \subset \subset \Omega$, alors $\lim_{t \rightarrow 0+} J_\varepsilon * u = u$ dans $W^{m,p}(\Omega')$.

Démonstration. Soit $\varepsilon < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega')$ où

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} J_\varepsilon * u(x) D^\alpha \phi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(x-y) J_\varepsilon(y) D^\alpha \phi(x) dx dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} D_x^\alpha \tilde{u}(x-y) J_\varepsilon(y) \phi(x) dx dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega'} J_\varepsilon * D^\alpha u(x) \phi(x) dx, \end{aligned}$$

où u est l'extension nulle de u en dehors de Ω . Ainsi $D^\alpha J_\varepsilon * u = J_\varepsilon * D^\alpha u$ au sens distributionnel en Ω' . Puisque $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ pour $0 \leq |\alpha| \leq m$ on a par le Lemme 1.1(c)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \|D^\alpha J_\varepsilon * u - D^\alpha u\|_{p,\Omega} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \|J_\varepsilon * D^\alpha u - D^\alpha u\|_{p,\Omega'} = 0$$

Ainsi $\lim_{t \rightarrow 0+} \|J_t * u - u\|_{m,p,\Omega} = 0$. $\square$

Théorème 2.7 (Meyers et Serrin [9]). Si $1 \leq p < \infty$, alors

$$H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega).$$

Démonstration. En vertu du corollaire 2.2 il suffit de montrer que $W^{m,p}(\Omega) \subset H^{m,p}(\Omega)$, c'est-

à-dire que $\{\phi \in C^m(\Omega) : \|\phi\|_{m,p} < \infty\}$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$. Si $u \in W^{m,p}(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$, on montre en fait qu'il existe $\phi \in C^\infty(\Omega)$ tel que $\|u - \phi\|_{m,p} < \varepsilon$. Pour $k = 1, 2, \dots$ soit

$$\Omega_k = \{x \in \Omega : |x| < k \text{ et } \text{dist}(x, \partial\Omega) > 1/k\}$$

et soit $\Omega_0 = \Omega_{-1} = \emptyset$, l'ensemble vide. Alors

$$\mathcal{O} = \{U_k : U_k = \Omega_{k+1} \cap (\overline{\Omega_{k-1}})^c, k = 1, 2, \dots\}$$

est une collection de sous-ensembles ouverts de Ω qui couvre Ω . Soit Ψ une partition C^∞ d'unité pour Ω subordonnée à $\mathcal{O}$. Soit ψ_k la somme des fonctions en nombre fini $\psi \in \Psi$ dont les supports sont contenus dans U_k . Alors $\psi_k \in C_0^\infty(U_k)$ et $\sum_{k=1}^\infty \psi_k(x) = 1$ sur Ω . Si $0 < \varepsilon < 1/(k+1)(k+2)$, alors $J_\varepsilon * (\psi_k u)$ a un support dans $\Omega_{k+2} \cap (\Omega_{k-2})^c = \mathcal{V}_k \subset \subset \Omega$. Puisque $\psi_k u \in W^{m,p}(\Omega)$ on peut choisir $\varepsilon_k, 0 < \varepsilon_k < 1/(k+1)(k+2)$, tel que

$$\|J_{\varepsilon_k} * (\psi_k u) - \psi_k u\|_{m,p,\Omega} = \|J_{\varepsilon_k} * (\psi_k u) - \psi_k u\|_{m,p,\mathcal{V}_k} < \varepsilon / 2k$$

Soit $\phi = \sum_{k=1}^\infty J_{\varepsilon_k} * (\psi_k u)$. Sur tout $\Omega' \subset \subset \Omega$, seuls un nombre fini de termes dans la somme peuvent ne pas disparaître. Ainsi $\phi \in C^\infty(\Omega)$. Pour $x \in \Omega_k$ on a

$$u(x) = \sum_{j=1}^{k+2} \psi_j(x)u(x), \quad \phi(x) = \sum_{j=1}^{k+2} J_{\varepsilon_j} * (\psi_j u)(x).$$

$$\|u - \phi\|_{m,p,\Omega_k} \leq \sum_{j=1}^{k+2} \|J_{\varepsilon_j} * (\psi_j u) - \psi_j u\|_{m,p,\Omega} < \varepsilon$$

Par le théorème de convergence monotone (voir (3.5)), $\|u - \phi\|_{m,p,\Omega} < \varepsilon$. □

Remarquons que le théorème ne s'étend pas au cas $p = \infty$. Par exemple, si $\Omega = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\}$ et $u(x) = |x|$, alors $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ mais $u \notin H^{1,\infty}(\Omega)$; en effet, si $\varepsilon < \frac{1}{2}$, il n'existe pas de fonction $\phi \in C^1(\Omega)$ tel que $\|\phi' - u'\|_\infty < \varepsilon$.

2.4 Approximation par les fonctions lisses sur $\mathbb{R}^n$

Après avoir montré qu'un élément de $W^{m,p}(\Omega)$ peut toujours être approximé par des fonctions lisses sur Ω , nous demandons maintenant si oui ou non l'approximation peut en fait être faite avec des fonctions bornées ayant des dérivées bornées de tous ordres, ou, dire, de toutes les commandes jusqu'à m . Autrement dit, on se demande si pour toute valeur de $k \geq m$ l'espace $C^k(\bar{\Omega})$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$. La réponse peut être négative comme le montre l'exemple suivant :

Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < 1, 0 < y < 1\}$. Alors la fonction u spécifié par

$$u(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

appartient évidemment à $W^{1,p}(\Omega)$. Le lecteur pourra vérifier cependant que pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit aucune fonction $\phi \in C^1(\bar{\Omega})$ ne peut satisfaire $\|u - \phi\|_{1,p} < \varepsilon$. Ce domaine est difficile car il se situe de part et d'autre d'une partie de sa frontière (le segment $x = 0$, $0 < y < 1$). On dira qu'un domaine Ω a la propriété de segment si pour tout $x \in \partial\Omega$ il existe un ouvert U_x et un vecteur y_x non nul tel que $x \in U_x$ et si $z \in \bar{\Omega} \cap U_x$, alors $z + ty_x \in \Omega$ pour $0 < t < 1$. Un domaine ayant cette propriété doit avoir une frontière de dimension $(n - 1)$ et ne peut pas se trouver simultanément des deux côtés d'une partie donnée de sa frontière. Le théorème suivant montre que cette propriété est suffisante pour garantir que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$, et donc en particulier que $C^k(\bar{\Omega})$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$ pour tout m .

Théorème 2.8. *Si Ω a la propriété de segment, alors l'ensemble des restrictions à Ω des fonctions dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.*

Démonstration. Soit f une fonction fixe dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifiant

- (i) $f(x) = 1$ si $|x| \leq 1$,
- (ii) $f(x) = 0$ si $|x| \geq 2$,

(iii) $|D^\alpha f(x)| \leq M$ (constant) pour tout x et $0 \leq |\alpha| \leq m$.

Let $f_\varepsilon(x) = f(\varepsilon x)$ pour $\varepsilon > 0$. Alors $f_\varepsilon(x) = 1$ si $|x| \leq 1/\varepsilon$ et $|D^\alpha f_\varepsilon(x)| \leq M\varepsilon^{|\alpha|} \leq M$ si $\varepsilon \leq 1$. Si $u \in W^{m,p}(\Omega)$, alors $u_\alpha = f_\alpha \cdot u$ appartient à $W^{m,p}(\Omega)$ et est à support borné. Puisque, pour $0 < \varepsilon \leq 1$ et $|\alpha| \leq m$,

$$|D^\alpha u_\varepsilon(x)| = \left| \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u(x) D^{\alpha-\beta} f_\varepsilon(x) \right| \leq M \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |D^\beta u(x)|,$$

nous avons, posé $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : |x| > 1/\varepsilon\}$,

$$\begin{aligned} \|u - u_\varepsilon\|_{m,p,\Omega} &= \|u - u_\varepsilon\|_{m,p,\Omega_\varepsilon} \\ &\leq \|u\|_{m,p,\Omega_\varepsilon} + \|u_\varepsilon\|_{m,p,\Omega_\varepsilon} \leq \text{const } \|u\|_{m,p,\Omega_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Le côté droit tend vers zéro lorsque ε tend vers 0. Ainsi tout $u \in W^{m,p}(\Omega)$ peut être approximé dans cet espace par des fonctions à supports bornés.

On peut donc maintenant supposer que $K = \{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}$ est borné. L'ensemble $F = \bar{K} \sim (\bigcup_{x \in \partial\Omega} U_x)$ est donc compact et contenu dans Ω , $\{U_x\}$ étant l'ensemble des ouverts référencés dans la définition de la propriété segment. Il existe un ouvert U_0 tel que $F \subset\subset U_0 \subset\subset \Omega$. Puisque K est compact, il existe un nombre fini d'ensembles U_x ; renommons-les $U_1, \dots, U_k$, tels que $\bar{K} \subset U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_k$. De plus, on peut trouver d'autres ensembles ouverts $\tilde{U}_0, \tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_k$ tels que $\tilde{U}_j \subset\subset U_j$, $0 \leq j \leq k$, mais toujours $\bar{K} \subset \tilde{U}_0 \cup \tilde{U}_1 \cup \dots \cup \tilde{U}_k$.

Soit Ψ une C^∞ -partition d'unité subordonnée à $\{\tilde{U}_j : 0 \leq j \leq k\}$, et soit ψ_j la somme des fonctions en nombre fini $\psi \in \Psi$ dont les supports sont dans $\tilde{U}_j$. Soit $u_j = \psi_j u$. Supposons que pour chaque j nous puissions trouver $\phi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que

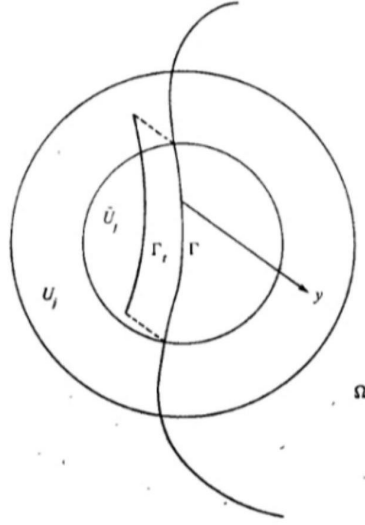
$$\|u_j - \phi_j\|_{m,p,\Omega} < \varepsilon/(k+1). \quad (2.10)$$

En mettant alors $\phi = \sum_{j=0}^k \phi_j$, on obtiendrait

$$\|\phi - u\|_{m,p,\Omega} \leq \sum_{j=0}^k \|\phi_j - u_j\|_{m,p,\Omega} < \varepsilon$$

Une fonction $\phi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifiant (2.10) pour $j = 0$ peut être trouvée via le Lemme 2.2 puisque $\text{supp} u_0 \subset \tilde{U}_0 \subset \subset \Omega$. Il reste donc à trouver ϕ_j satisfaisant (2.10) pour $1 \leq j \leq k$. Pour un tel j fixé, nous étendons u_j pour qu'il soit identiquement nul en dehors de Ω . Ainsi $u_j \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n \sim \Gamma)$, où $\Gamma = \tilde{U}_j \cap \partial\Omega$. Soit y le vecteur non nul associé à l'ensemble U_j dans la définition de la propriété segment (Fig. 1). Soit $\Gamma_t = \Gamma - ty$, où t est choisi de telle sorte que

$$0 < t < \min \left(1, \text{dist} \left(\tilde{U}_j, \mathbb{R}^n \sim U_j \right) / |y| \right)$$



Alors $\Gamma_t \subset U_j$ et $\Gamma_t \cap \bar{\Omega}$ est vide par la propriété du segment. Soit $U_{j,t}(x) = u_j(x + ty)$. Alors $u_{j,t} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n \sim \Gamma_t)$. La translation est continue dans $L^p(\Omega)$ donc $D^\alpha u_{j,t} \rightarrow D^\alpha u_j$ dans $L^p(\Omega)$ lorsque $t \rightarrow 0+$, $|\alpha| \leq m$. Donc $u_{j,t} \rightarrow u_j$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ lorsque $t \rightarrow 0+$ donc il suffit de trouver $\phi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que $\|u_{j,t} - \phi_j\|_{m,p}$ est suffisamment petit. Cependant, $\Omega \cap U_j \subset \subset \mathbb{R}^n \sim \Gamma_t$ et donc d'après le lemme 2.2 on peut prendre $\phi_j = J_\delta * u_{j,t}$ pour $\delta > 0$ convenablement petit. Ceci achève la preuve. $\square$

Corollaire 2.9. $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

2.5 Approximation par les fonctions dans $C_0^\infty(\Omega); (m, p')$ -Ensembles polaires

Le corollaire 2.9 suggère la question : Pour quels domaines Ω est-il vrai que $W^{m,p}(\Omega) = W_0^{m,p}(\Omega)$, c'est-à-dire quand est $C_0^\infty(\Omega)$ dense en $W^{m,p}(\Omega)$? Une réponse partielle à ce problème peut être formulée en termes de nature des distributions appartenant à $W^{-m,p'}(\mathbb{R}^n)$. L'approche donnée ci-dessous est due à Lions [8].

Tout au long de la discussion qui suit, nous supposons que $1 < p < \infty$ et p' est conjugué à p . Soit F un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$. Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ a un support dans F ($\text{supp} T \subset F$) à condition que $T(\phi) = 0$ pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ -s'annule identiquement sur F . On dit que l'ensemble fermé F est (m, p') -polaire si la seule distribution T dans $W^{-m,p'}(\mathbb{R}^n)$ à support dans F est la distribution nulle $T = 0$. Si F a une mesure positive, elle ne peut pas être (m, p') -polaire car la fonction caractéristique de tout sous-ensemble compact de F ayant une mesure positive appartient à $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ et donc à $W^{-m,p'}(\mathbb{R}^n)$. Nous montrerons plus loin que si $mp > n$, alors $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$ (voir théorème 3.1) au sens où si $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, alors il existe $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$ tel que $u(x) = u_0(x)$ p.p. et

$$|u_0(x)| \leq c \|u\|_{m,p},$$

la constante étant indépendante de x et u . Il s'ensuit que la distribution de Dirac δ_x donnée par $\delta_x = \phi(x)$ appartient à $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)' = (W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n))' \cong W^{-m,p'}(\mathbb{R}^n)$. Ainsi, si $mp > n$, un ensemble F ne peut être (m, p') -polaire que s'il est vide. Puisque $W^{m+1,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ toute fonctionnelle linéaire bornée sur le dernier espace est également bornée sur le premier, c'est-à-dire $W^{-m,p'}(\Omega) \subset W^{-m-1,p'}(\Omega)$. Donc tout ensemble $(m+1, p)$ -polaire est aussi (m, p) -polaire. L'inverse n'est bien sûr généralement pas vrai. Soit l'application $u \rightarrow \tilde{u}$ dénotant une

extension nulle de u en dehors d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \Omega^c \end{cases} \quad (2.11)$$

Le lemme suivant montre que cette application prend $W_0^{m,p}(\Omega)$ (isométriquement) dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

Lemme 2.3. *Soit $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$. Si $|\alpha| \leq m$, alors $D^\alpha \tilde{u} = (D^\alpha u)^\sim$ au sens distributionnel dans $\mathbb{R}^n$. Ainsi $\tilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. Soit $\{\phi_n\}$ une suite dans $C_0^\infty(\Omega)$ convergeant vers u dans l'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$. Si $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a pour $|\alpha| \leq m$

$$\begin{aligned} (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(x) D^\alpha \psi(x) dx &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) D^\alpha \psi(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \phi_n(x) D^\alpha \psi(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} D^\alpha \phi_n(x) \psi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha u)^\sim(x) \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Ainsi $D^\alpha \tilde{u} = (D^\alpha u)^\sim$ au sens distributionnel sur $\mathbb{R}^n$ et donc ces fonctions localement intégrables sont égales p.p. dans $\mathbb{R}^n$. Il s'ensuit que $\|\tilde{u}\|_{m,p,\mathbb{R}^n} = \|u\|_{m,p,\Omega}$. $\square$

Nous donnons maintenant une condition nécessaire et suffisante sur Ω que l'application (2.11) porte $W_0^{m,p}(\Omega)$ isométriquement sur $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 2.10. $C_0^\infty(\Omega)$ is dense in $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ if and only if the complement Ω^c of Ω is (m, p') -polar

Démonstration. Supposons d'abord que $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Soit $T \in W^{-m,p'}(\mathbb{R}^n)$ à support contenu dans Ω^c . Si $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, alors il existe une suite $\{\phi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ convergeant en $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ vers u . Donc $T(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(\phi_n) = 0$ donc $T = 0$ et Ω^c is (m, p') -polaire. Inversement, si $C_0^\infty(\Omega)$ n'est pas dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, alors il existe $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$

tel que $\|u - \phi\|_{m,p,R^n} \geq k > 0$ pour tout $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, k étant indépendant de ϕ . D'après le théorème d'extension de Hahn-Banach il existe $T \in W^{-m,p'}(\mathbb{R}^n)$ tel que $T(\phi) = 0$ pour tout $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ mais $T(u) \neq 0$. Puisque $\text{supp } T \subset \Omega^\circ$ mais $T \neq 0$, Ω° ne peut pas être (m, p') -polaire. $\square$

Comme préparation finale pour notre enquête sur l'identité possible de $W_0^{m,p}(\Omega)$ et $W^{m,p}(\Omega)$, nous établissons un analogue distributionnel du fait, évident pour les fonctions différentiables, que la disparition identique des dérivées premières sur un rectangle implique une constance sur ce rectangle. Nous étendons cela d'abord aux distributions puis aux fonctions localement intégrables

Lemme 2.4. Soit $B = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ être une boîte rectangulaire ouverte dans $\mathbb{R}^n$. Soit $\phi \in \mathcal{D}(B)$. Si $\int_B \phi(x) dx = 0$, alors $\phi(x) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x)$, où $\phi_j \in \mathcal{D}(B)$ et

$$\int_{a_j}^{b_j} \phi_j(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) dx_j = 0 \quad (2.12)$$

pour chaque fixe $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Démonstration. Pour $1 \leq j \leq n$ sélectionner les fonctions $u_j \in C_0^\infty(a_j, b_j)$ tel que $\int_{a_j}^{b_j} u_j(t) dt =$

1. Soit

$$\begin{aligned} B_j &= (a_j, b_j) \times (a_{j+1}, b_{j+1}) \times \cdots \times (a_n, b_n), \\ \psi_j(x_j, \dots, x_n) &= \int_{a_1}^{b_1} dt_1 \int_{a_2}^{b_2} dt_2 \cdots \int_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \phi(t_1, \dots, t_{j-1}, x_j, \dots, x_n) dt_{j-1}, \\ \omega_j(x) &= u_1(x_1) \cdots u_{j-1}(x_{j-1}) \psi_j(x_j, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Alors $\psi_j \in \mathcal{D}(B_j)$ et $\omega_j \in \mathcal{D}(B)$. De plus,

$$\int_{B_j} \psi_j(x_j, \dots, x_n) dx_j \cdots dx_n = \int_B \phi(x) dx = 0.$$

Soit $\phi_1 = \phi - \omega_2$, $\phi_j = \omega_j - \omega_{j+1}$ ($2 \leq j \leq n-1$), $\phi_n = \omega_n$. Clairement, $\phi_j \in \mathcal{D}(B)$ pour

$1 \leq j \leq n$, et $\phi = \sum_{j=1}^n \phi_j$. Finalement,

$$\begin{aligned}
& \int_{a_1}^{b_1} \phi_1(x_1, \dots, x_n) dx_1 \\
&= \int_{a_1}^{b_1} \phi(x_1, \dots, x_n) dx_1 - \psi_2(x_2, \dots, x_n) \int_{a_1}^{b_1} u_1(x_1) dx_1 = 0, \\
& \int_{a_j}^{b_j} \phi_j(x_1, \dots, x_n) dx_j \\
&= u_1(x_1) \cdots u_{j-1}(x_{j-1}) \\
&\times \left(\int_{a_j}^{b_j} \psi_j(x_j, \dots, x_n) dx_j - \psi_{j+1}(x_{j+1}, \dots, x_n) \int_{a_j}^{b_j} u_j(x_j) dx_j \right) \\
&= 0, \quad 2 \leq j \leq n-1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{a_n}^{b_n} \phi_n(x_1, \dots, x_n) dx_n &= u_1(x_1) \cdots u_{n-1}(x_{n-1}) \int_{a_n}^{b_n} \psi_n(x_n) dx_n \\
&= u_1(x_1) \cdots u_{n-1}(x_{n-1}) \int_B \phi(x) dx = 0
\end{aligned}$$

□

Corollaire 2.11. Si $T \in \mathcal{D}'(B)$ et $D_j T = 0$ pour $1 \leq j \leq n$, alors il existe une constante k telle que pour tout $\phi \in \mathcal{D}(B)$

$$T(\phi) = k \int_B \phi(x) dx$$

Démonstration. Notez d'abord que si $\int_B \phi(x) dx = 0$, alors $T(\phi) = 0$, car, par le lemme ci-dessus, nous pouvons écrire $\phi = \sum_{j=1}^n \phi_j$, où $\phi_j \in \mathcal{D}(B)$ satisfait (2.12), et donc $\phi_j = D_j \theta_j$, où $\theta_j \in \mathcal{D}(B)$ est défini par

$$\theta_j(x) = \int_{a_j}^{x_j} \phi_j(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n) dt.$$

$$\text{Ainsi } T(\phi) = \sum_{j=1}^n T(D_j \theta_j) = - \sum_{j=1}^n D_j T(\theta_j) = 0.$$

Supposons maintenant $T \neq 0$. Alors il existe $\phi_0 \in \mathcal{D}(B)$ tel que $T(\phi_0) = k_1 \neq 0$. D'où $\int_B \phi_0(x) dx = k_2 \neq 0$ et $T(\phi_0) = k \int_B \phi_0(x) dx$, où $k = k_1/k_2$. Si $\phi \in \mathcal{D}(B)$ est arbitraire, soit $K(\phi) = \int_B \phi(x) dx$. Alors

$$\int_B \left(\phi(x) - \frac{K(\phi)}{k_2} \phi_0(x) \right) dx = 0$$

et ainsi $T(\phi - [K(\phi)/k_2]\phi_0) = 0$. Il s'ensuit que

$$T(\phi) = \frac{K(\phi)}{k_2} T(\phi_0) = kK(\phi) = k \int_B \phi(x) dx$$

□

Il faut remarquer que ce corollaire peut être étendu à tout ensemble ouvert et connexe B dans $\mathbb{R}^n$ via une partition d'unité pour Ω subordonnée à une couverture ouverte de Ω par des boîtes rectangulaires ouvertes qui sont contenues dans Ω . Nous n'exigerons cependant pas cette extension. Le lemme suivant montre que différentes fonctions localement intégrables sur un ensemble ouvert Ω déterminent différentes distributions sur Ω

Lemme 2.5. *Soit $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ satisfaire $\int_\Omega u(x)\phi(x)dx = 0$ pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Alors $u(x) = 0$ p.p. dans Ω .*

Démonstration. Si $\psi \in C_0(\Omega)$, alors pour ε positif suffisamment petit, le mollificateur $J_\varepsilon * \psi$ appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$. D'après le lemme 1.1, $J_\varepsilon * \psi \rightarrow \psi$ uniformément sur Ω lorsque $\varepsilon \rightarrow 0+$. Donc $\int_\Omega u(x)\psi(x)dx = 0$ pour tout $\psi \in C_0(\Omega)$. Soit $K \subset\subset \Omega$ et soit $\varepsilon > 0$. Soit χ_K la fonction caractéristique de K . Alors $\int_K |u(x)|dx < \infty$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout ensemble mesurable $A \subset K$ avec $\mu(A) < \delta$ on a $\int_A |u(x)|dx < \varepsilon/2$ (voir par exemple le livre de Munroe [48, p. 136]). D'après le théorème de Lusin (voir (3.5)) il existe $\psi \in C_0(\Omega)$ avec $\text{supp}\psi \subset K$ et $|\psi(x)| \leq 1$ pour tout x , tel que

$$\mu\left(\left\{x \in \Omega : \psi(x) \neq \chi_K(x) \operatorname{sgn} \overline{u(x)}\right\}\right) < \delta.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_K |u(x)|dx &= \int_\Omega u(x)\chi_K(x) \operatorname{sgn} \overline{u(x)}dx \\ &= \int_\Omega u(x)\psi(x)dx + \int_\Omega u(x) \left[\chi_K(x) \operatorname{sgn} \overline{u(x)} - \psi(x) \right] dx \\ &\leq 2 \int_{\{x \in \Omega : \psi(x) \neq \chi_K(x) \operatorname{sgn} \overline{u(x)}\}} |u(x)|dx < \varepsilon. \end{aligned}$$

Puisque ε est arbitraire, $u(x) = 0$ p.p. en K et donc p.p. dans Ω . $\square$

Corollaire 2.12. *Si B est une boîte rectangulaire comme dans le lemme 2.4 et $u \in L_{loc}^1(B)$ possède des dérivées faibles $D_j u = 0$ pour $1 \leq j \leq n$, alors pour une constante k , $u(x) = k$ p.p. en B .*

Démonstration. Par le corollaire 2.11 nous avons, puisque $D_j T_u = 0, 1 \leq j \leq n$,

$$\int_B u(x) \phi(x) dx = T_u(\phi) = k \int_B \phi(x) dx$$

Anisi $u(x) - k = 0$ p.p. dans B . $\square$

Théorème 2.13. .

1. Si $W^{m,p}(\Omega) = W_0^{m,p}(\Omega)$, alors Ω^c est (m, p') -polar.
2. Si Ω^c est à la fois $(1, p)$ -polaire et (m, p') -polaire, alors $W^{m,p}(\Omega) = W_0^{m,p}(\Omega)$.

Démonstration. Supposons que $W^{m,p}(\Omega) = W_0^{m,p}(\Omega)$. On en déduit d'abord que Ω^c doit être de mesure nulle. Sinon, il existerait un rectangle ouvert $B \subset \mathbb{R}^n$ qui coupe à la fois Ω et Ω^c dans des ensembles de mesure positive. Soit u la restriction à Ω d'une fonction dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui est identiquement une sur $B \cap \Omega$. Alors $u \in W^{m,p}(\Omega)$ et donc $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$. D'après le lemme 2.3, $\tilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ et $D_j \tilde{u} = (D_j u)^\sim$ au sens distributionnel dans $\mathbb{R}^n$, pour $1 \leq j \leq n$. Ou $(D_j u)^\sim$ s'annule identiquement sur B d'où $D_j \tilde{u}$ en tant que distribution sur B . D'après le corollaire 2.12, u doit avoir une valeur constante p.p. dans B . Puisque $u(x) = 1$ sur $B \cap \Omega$ et $\tilde{u}(x) = 0$ on $B \cap \Omega^c$, on a une contradiction. Ainsi Ω^c est de mesure nulle.

Maintenant si $v \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ et u est la restriction de v à Ω , alors u appartient à $W^{m,p}(\Omega)$ et donc, par hypothèse, à $W_0^{m,p}(\Omega)$. D'après le lemme 2.3, $\tilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ et peut être approximé par des éléments de $C_0^\infty(\Omega)$. Mais $v(x) = \tilde{u}(x)$ sur Ω , c'est-à-dire p.p. dans $\mathbb{R}^n$. Par conséquent, v et $\tilde{u}$ ont les mêmes dérivées distributionnelles et coïncident donc dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Donc $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ et Ω^c est (m, p') -polaire d'après le théorème 2.10.

2. Supposons maintenant que Ω^c est $(1, p)$ -polaire et (m, p') -polaire. Soit $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Nous montrons que $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$. Puisque $\tilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^n)$, la distribution $T_{D,\tilde{u}}$, correspondant à $D_j \tilde{u}$, appartient à $W^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$. Puisque $(D_j u)^\sim \in L^p(\mathbb{R}^n) \subset H^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$, donc $T_{(D_j u)^\sim} \in W^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$. D'où $T_{D,u-(D_j u)^\sim} \in W^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$. Mais $D_j \tilde{u} - (D_j u)^\sim$ s'annule sur Ω donc $\text{supp } T_{D_j \tilde{u} - (D_j u)^\sim} \subset \Omega^c$. Puisque Ω^c est $(1, p)$ polaire $D_j \tilde{u} = (D_j u)^\sim$ au sens distributionnel sur $\mathbb{R}^n$. Par induction sur $|\alpha|$ on peut montrer de même que $D^\alpha \tilde{u} = (D^\alpha u)^\sim$ au sens distributionnel, pour $|\alpha| \leq m$. Donc $\tilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ d'où, d'après le théorème 2.10, $\tilde{u}$ la restriction de u à Ω , appartient à $W_0^{m,p}(\Omega)$, Ω^c étant (m, p') -polaire

□

Si la polarité (m, p') implique la polarité $(1, p)$, alors le théorème 2.13 revient à affirmer que la polarité (m, p') de Ω^c est nécessaire et suffisante pour l'égalité de $W^{m,p}(\Omega)$ et $W_0^{m,p}(\Omega)$. Nous examinons maintenant cette possibilité, en établissant deux premiers lemmes contenant des propriétés importantes de polarité. La première montre que la (m, p) -polarité est une propriété locale.

Lemme 2.6. $F \subset \mathbb{R}^n$ est (m, p') -polaire si et seulement si $F \cap K$ est (m, p') -polaire pour chaque ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^n$.

Démonstration. Il est clair que la (m, p) -polarité de F implique celle de $F \cap K$ pour tout compact K . On démontre la réciproque. Soit $T \in W^{-m,p'}(\mathbb{R}^n)$ donné par (2.8) et à support dans F . Il faut montrer que $T = 0$. Soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfait $f(x) = 1$ si $|x| \leq 1$ et $f(x) = 0$ si $|x| \geq 2$. Pour $\varepsilon > 0$ soit $f_\varepsilon(x) = f(\varepsilon x)$ de sorte que $D^\alpha f_\varepsilon(x) = \varepsilon^{|\alpha|} D^\alpha f(\varepsilon x) \rightarrow 0$ uniformément en x lorsque $\varepsilon \rightarrow 0+$. Alors $f_\varepsilon T \in W^{-m,p'}(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\begin{aligned}
|T(\phi) - f_\varepsilon T(\phi)| &= |T(\phi) - T(f_\varepsilon \phi)| \\
&= \left| \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} v_\alpha(x) D^\alpha [\phi(x) (1 - f_\varepsilon(x))] dx \right| \\
&= \left| \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \int_{\mathbb{R}^n} v_\alpha(x) D^\beta \phi(x) D^{\alpha-\beta} (1 - f_\varepsilon(x)) dx \right| \\
&\leq \sum_{0 < |\beta| < m} \int_{\mathbb{R}^n} |w_\beta(x) D^\beta \phi(x)| dx \leq \|\phi\|_{m,p} \|w; L_N^{p'}\|
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} w_\beta(x) &= \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ \alpha \geq \beta}} \binom{\alpha}{\beta} v_\alpha(x) D^{\alpha-\beta} (1 - f_\varepsilon(x)) \\ &= v_\beta(x) (1 - f_\varepsilon(x)) - \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ \alpha \geq \beta, \alpha \neq \beta}} \binom{\alpha}{\beta} v_\alpha(x) D^{\alpha-\beta} f_\varepsilon(x) : \end{aligned}$$

Puisque $f_\varepsilon(x) = 1$ pour $|x| \leq 1/\varepsilon$, on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \|w_\beta\|_p = 0$. Ainsi $f_\varepsilon T \rightarrow T$ dans $W^{-m, p'}(\mathbb{R}^n)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0+$. Puisque $f_\varepsilon T$ a un support compact dans K , elle s'annule par hypothèse. Ainsi $T = 0$. $\square$

Lemme 2.7. Si $p' \leq q'$ et $F \subset \mathbb{R}^n$ est (m, p') -polaire, alors F est aussi (m, q') -polaire.

Démonstration. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ compact. D'après le lemme 2.6, il suffit de montrer que $F \cap K$ est (m, q') -polaire. Soit G un ensemble ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$ contenant K . D'après le lemme 1.5, $W_0^{m, p}(G) \rightarrow W_0^{m, q}(G)$ de sorte que $W^{-m, q}(G) \subset W^{-m, p'}(G)$. Toute distribution $T \in W^{-m, q'}(\mathbb{R}^n)$ ayant un support dans $K \cap F$ appartient aussi à $W^{-m, q}(G)$ et donc à $W^{-m, p'}(G)$. Puisque $K \cap F$ est (m, p') -polaire, $T = 0$. Ainsi $K \cap F$ est (m, q') -polaire. $\square$

Théorème 2.14. Soit $p \geq 2$. Alors $W^{m, p}(\Omega) = W_0^{m, p}(\Omega)$ si et seulement si Ω^c est (m, p') -polar.

Démonstration. Puisque $p' \leq p$, Ω est (m, p) -polar, et alors $(1, p)$ -polar, Si c'est (m, p') polar. Le résultat suit maintenant par le théorème 2.13. $\square$

Le théorème d'injection de Sobolev (théorème 3.1) peut être utilisé pour étendre le théorème 2.14 pour couvrir certaines valeurs de $p < 2$. Si $(m - 1)p < n$, le théorème d'injection donne

$$W^{m, p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow W^{1, q}(\mathbb{R}^n), \quad q = np/[n - (m - 1)p],$$

ce qui implique à son tour que $W^{-1, q'}(\mathbb{R}^n) \subset W^{-1, p'}(\mathbb{R}^n)$. Si aussi $p \leq 2n/(n + m - 1)$, alors $q' \leq p$, et donc d'après le Lemme 2.7, Ω^c est $(1, p)$ -polaire s'il est (m, p') -polaire. Notez que

$2n/(n+m-1) < 2$ fourni $m > 1$. Si, au contraire, $(m-1)p \geq n$, alors $mp > n$ et, Ω^c ne peut être (m, p') -polaire que s'il est vide, auquel cas il est trivialement $(1, p)$ -polaire.

Ainsi, les seules valeurs de p pour lesquelles la polarité (m, p') de Ω^c n'est pas connue pour impliquer la polarité $(1, p)$ et donc être équivalente à l'identité de $W^{m,p}(\Omega)$ et $W_0^{m,p}(\Omega)$ sont donnés par $1 \leq p \leq \min(n/(m-1), 2n/(n+m-1))$.

Lorsque $W_0^{m,p}(\Omega) \neq W^{m,p}(\Omega)$, le premier espace est un sous-espace fermé du second. Dans le cas de l'espace de Hilbert, $p = 2$, on peut considérer l'espace $W_0^\perp$ constitué de tous les $v \in W^{m,p}(\Omega)$ tels que $(v, \phi)_m = 0$ pour tout $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Chaque $u \in W^{m,p}(\Omega)$ peut être décomposé de manière unique sous la forme $u = u_0 + v$, où $u_0 \in W_0^{m,p}(\Omega)$ et $v \in W_0^\perp$. L'intégration par parties montre que tout $v \in W_0^\perp$ doit satisfaire

$$\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} v(x) = 0$$

au sens faible, et donc p.p. dans Ω .

2.6 Transformation des coordonnées

Soit Φ une transformation biunivoque d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ en un domaine $G \subset \mathbb{R}^n$, d'inverse $\Psi = \Phi^{-1}$. On appelle Φ -lisse si, en écrivant $y = \Phi(x)$ et

$$\begin{aligned} y_1 &= \phi_1(x_1, \dots, x_n), & x_1 &= \psi_1(y_1, \dots, y_n) \\ y_2 &= \phi_2(x_1, \dots, x_n), & x_2 &= \psi_2(y_1, \dots, y_n) \\ y_n &= \phi_n(x_1, \dots, x_n), & x_n &= \psi_n(y_1, \dots, y_n), \end{aligned}$$

les fonctions $\phi_1, \dots, \phi_n$ appartiennent à $C^m(\bar{\Omega})$ et les fonctions $\psi_1, \dots, \psi_n$ appartiennent à $C^m(\bar{G})$.

Si u est une fonction mesurable définie sur Ω , on peut définir une fonction mesurable sur

G par

$$Au(y) = u(\Psi(y)) \quad (2.13)$$

Supposons que Φ soit 1-lisse de sorte que pour tout $x \in \Omega$

$$c \leq |\det \Phi'(x)| \leq C \quad (2.14)$$

pour certaines constantes $c, C, 0 < c \leq C$. [Ici, bien sûr, $\Phi'(x)$ désigne la matrice jacobienne $\partial(y_1, \dots, y_n) / \partial(x_1, \dots, x_n)$.] On voit aisément que l'opérateur A défini par (2.13) transforme $L^p(\Omega)$ bornée en $L^p(G)$ et a une inverse bornée; en fait (pour $1 \leq p < \infty$),

$$c^{1/p} \|u\|_{p,\Omega} \leq \|Au\|_{p,G} \leq C^{1/p} \|u\|_{p,\Omega}.$$

Nous établissons un résultat similaire pour les espaces de Sobolev.

Théorème 2.15. *Soit Φ m -lisse, où $m \geq 1$. Alors A transforme $W^{m,p}(\Omega)$ bornée en $W^{m,p}(G)$ et a une inverse bornée.*

Démonstration. Nous montrons que l'inégalité $\|Au\|_{m,p,G} \leq c \|u\|_{m,p,\Omega}$ est vraie pour tout $u \in W^{m,p}(\Omega)$, la constante ne dépendant que de la transformation Φ . L'inégalité inverse $\|Au\|_{m,p,G} \geq c \|u\|_{m,p,\Omega}$ peut être établie de manière similaire en utilisant l'opérateur A^{-1} en prenant des fonctions définies sur G en fonctions définies sur Ω . D'après le théorème 2.7 il existe pour tout $u \in W^{m,p}(\Omega)$ une suite $\{u_n\}$ de fonctions en $C^\infty(\Omega)$ convergeant vers u en norme $W^{m,p}(\Omega)$. Pour un tel u_n lisse, il est facile de vérifier par induction que

$$D^\alpha (Au_n)(y) = \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} M_{\alpha\beta}(y) \left[A \left(D^\beta u_n \right) \right] (y) \quad (2.15)$$

où $M_{\alpha\beta}$ est un polynôme de degré n'excédant pas $|\beta|$ en dérivées, d'ordres n'excédant pas $|\alpha|$, des différentes composantes de Ψ . Si $\phi \in \mathcal{D}(G)$, on obtient de (2.15) et intégration par

parties

$$(-1)^{|\alpha|} \int_G (Au_n)(y) D^\alpha \phi(y) dy = \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \int_G \left[A(D^\beta u_n) \right](y) M_{\alpha\beta}(y) dy, \quad (2.16)$$

soit en remplaçant y par $\Phi(x)$ et en exprimant les intégrales sur Ω ,

$$\begin{aligned} & (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_n(x) (D^\alpha \phi)(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)| dx \\ &= \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \int_\Omega D^\beta u_n(x) M_{\alpha\beta}(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)| dx. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Puisque $D^\beta u_n \rightarrow u$ dans $L^p(\Omega)$ pour $|\beta| \leq m$, on peut prendre la limite par (1.2) comme $n \rightarrow \infty$ et donc obtenir (2.16) avec u remplaçant u_n . Ainsi (2.15) est vérifiée au sens faible pour tout $u \in W^{m,p}(\Omega)$. On obtient maintenant de (2.15) et (2.14)

$$\begin{aligned} & \int_G |D^\alpha (Au)(y)|^p dy \\ & \leq \left(\sum_{|\beta| \leq |\alpha|} 1 \right)^p \max_{|\beta| \leq |\alpha|} \left(\sup_{y \in G} |M_{\alpha\beta}(y)|^p \int_G |(D^\beta u)(\Psi(y))|^p dy \right) \\ & \leq c \max_{|\beta| \leq |\alpha|} \int_\Omega |D^\beta u(x)|^p dx \end{aligned}$$

d'où il suit que $\|Au\|_{m,p,G} \leq c\|u\|_{m,p,\Omega}$. □

Le cas du théorème ci-dessus correspondant aux transformations linéaires non singulières Φ ou, plus généralement, aux transformations affines (compositions de transformations linéaires non singulières et de translations) revêt une importance particulière dans les chapitres suivants. Pour de telles transformations, $\det \Phi'(x)$ est une constante non nulle.

CHAPITRE 3

INJECTION DE $W^{M,P}(\Omega)$

3.1 Le théorème d'injection de Sobolev

Ce sont principalement les caractéristiques d'injection des espaces de Sobolev qui rendent ces espaces si utiles dans l'analyse, en particulier dans l'étude des opérateurs différentiels et intégraux. Les propriétés d'injection les plus importantes des espaces $W^{m,p}(\Omega)$ sont généralement regroupées dans un seul théorème appelé théorème d'injection de Sobolev. Les principaux résultats sont dus à Sobolev [10] mais notre énoncé 3.1 inclut des raffinements dus à d'autres, en particulier à Morrey [1] et Gagliardo [2].

La plupart des résultats d'injection sont valables pour les domaines Ω dans $\mathbb{R}^n$ ayant la propriété de cône mais autrement sans restriction ; certains encastréments nécessitent cependant la forte propriété Lipschitz locale. Plus précisément, aucun plongement de $W^{m,p}(\Omega)$ dans un espace de fonctions uniformément continues sur Ω n'est possible sous la seule propriété du cône, comme on peut le voir en considérant l'exemple donné au deuxième paragraphe.

Le théorème d'incorporation de Sobolev affirme l'existence de $W^{m,p}(\Omega)$ d'injection dans des espaces des types suivants :

- (i) $W^{j,q}(\Omega)$, $j \leq m$, et en particulier $L^q(\Omega)$.

- (ii) $C_B^j(\Omega) = \{u \in C^j(\Omega) : D^\alpha u \text{ est borné sur } \Omega \text{ pour } |\alpha| \leq j\}$. Cet espace est plus grand que $C^j(\bar{\Omega})$ en ce que ses éléments n'ont pas besoin d'être uniformément continus sur Ω . Or, $C_B^j(\Omega)$ est un espace de Banach sous la norme

$$\|u; C_B^j(\Omega)\| = \max_{0 \leq |\alpha| \leq j} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|.$$

- (iii) $C^{j,\lambda}(\bar{\Omega})$ (voir (3.5)) et en particulier $C^j(\bar{\Omega})$.
- (iv) $W^{j,q}(\Omega^k)$, et en particulier $L^q(\Omega^k)$. Ici Ω^k désigne l'intersection de Ω avec un plan de dimension k dans $\mathbb{R}^n$, considéré comme un domaine dans $\mathbb{R}^k$. Puisque les éléments de $W^{m,p}(\Omega)$ ne sont pas des fonctions définies partout sur Ω mais plutôt des classes d'équivalence de telles fonctions définies et égales à des ensembles de mesure zéro près, nous devons clarifier ce que l'on entend par une injection de $W^{m,p}(\Omega)$ dans un espace de type (ii)-(iv). Dans le cas de (ii) ou (iii), l'intention est que la "classe d'équivalence" $u \in W^{m,p}(\Omega)$ contienne un élément appartenant à l'espace continu des fonctions cible de l'injection, et bornée dans cet espace par $c\|u\|_{m,p,\Omega}$. Ainsi, par exemple, $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow C^j(\bar{\Omega})$ signifie que chaque $u \in W^{m,p}(\Omega)$ peut, lorsqu'il est considéré comme une fonction, être redéfini sur un ensemble de mesure nulle dans Ω de telle manière que la fonction modifiée $\tilde{u}$ [qui vaut u dans $W^{m,p}(\Omega)$] appartient à $C^j(\bar{\Omega})$ et vérifie $\|\tilde{u}; C^j(\bar{\Omega})\| \leq K\|u\|_{m,p,\Omega}$ avec K indépendant de u .

Encore plus de soin est nécessaire dans l'interprétation de l'injection $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow W^{j,q}(\Omega^k)$ où $k < n$. Chaque élément $u \in W^{m,p}(\Omega)$ est, par le théorème 2.7, une limite dans cet espace d'une suite $\{u_n\}$ de fonctions dans $C^\infty(\Omega)$. Les fonctions u_n ont des traces sur Ω^k appartenant à $C^\infty(\Omega^k)$. L'injection ci-dessus signifie que ces traces convergent dans $W^{j,q}(\Omega^k)$ vers une fonction u satisfaisant $\|\tilde{u}\|_{j,q,\Omega^k} \leq K\|u\|_{m,p,\Omega}$ avec K indépendant de u .

Notons comme point d'intérêt (mais qui ne nous sera d'aucune utilité plus tard) que l'injection $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow W^{j,q}(\Omega)$ est équivalent au confinement simple $W^{m,p}(\Omega) \subset W^{j,q}(\Omega)$.

Certes, le premier implique le second. Pour voir la réciproque supposons $W^{m,p}(\Omega) \subset W^{j,q}(\Omega)$ et soit I l'opérateur linéaire défini sur $W^{m,p}(\Omega)$ dans $W^{j,q}(\Omega)$ par $Iu = u$. Si $u_n \rightarrow u$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ [et donc dans $L^p(\Omega)$] et $Iu_n \rightarrow v$ dans $W^{j,q}(\Omega)$ [et donc dans $L^q(\Omega)$], alors, en passant à une sous-suite si nécessaire, on a par Corollaire 1.8 que $u_n(x) \rightarrow u(x)$ p.p. en Ω et $u_n(x) = Iu_n(x) \rightarrow v(x)$ p.p. en Ω . Ainsi $u(x) = v(x)$ p.p. dans Ω , c'est-à-dire $Iu = v$, et I est continu par le théorème du graphe fermé de l'analyse fonctionnelle.

Soit Ω un domaine dans $\mathbb{R}^n$ ayant la propriété de cône spécifiée par un certain cône fini C (voir (3.5)). C peut être considéré comme l'intersection d'un cône infini C^* ayant le même sommet que C avec une boule B centrée à ce sommet. Par la hauteur de C , nous entendons le rayon de B . Par l'ouverture de C , nous entendons la surface $[(n-1)\text{-mesure}]$ de l'intersection de C^* avec la sphère de rayon unitaire ayant pour centre le sommet de C . Ces paramètres géométriques sont clairement invariants par transformations rigides de C . En affirmant qu'une injection de la forme

$$W^{m,p}(\Omega) \rightarrow X \quad (3.1)$$

(où X est un espace de Banach de fonctions définies sur Ω) vaut pour Ω ayant la propriété de cône, il est prévu qu'une constante d'injection pour 3.1, c'est-à-dire une constante K pour laquelle l'inégalité

$$\|u; X\| \leq K \|u\|_{m,p,\Omega}$$

est satisfaite pour tout $u \in W^{m,p}(\Omega)$, peut être choisi pour ne dépendre de Ω que par la dimension n et divers paramètres du cône C qui sont invariants par les mouvements rigides de C .

Théorème 3.1 (Le théorème d'injection de Sobolev). *Soit Ω un domaine dans $\mathbb{R}^n$ et soit Ω^k le domaine k -dimensionnel obtenu en coupant Ω avec un plan k -dimensionnel dans $\mathbb{R}^n$, $1 \leq k < n$.*

$k \leq n$ (Donc $\Omega^n \equiv \Omega$.) Soient j et m entiers non négatifs et p satisfaire $1 \leq p < \infty$.

Partie **I** Si Ω a la propriété du cône, alors il existe les imbrications suivantes :

Case **A** Supposons $mp < n$ et $n - mp < k \leq n$. Alors

$$W^{j+m,p}(\Omega) \rightarrow W^{j,q}(\Omega^k), \quad p \leq q \leq kp/(n - mp) \quad (3.2)$$

et en particulier,

$$W^{j+m,p}(\Omega) \rightarrow W^{j,q}(\Omega), \quad p \leq q \leq np/(n - mp), \quad (3.3)$$

où

$$W^{m,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega), \quad p \leq q \leq np/(n - mp). \quad (3.4)$$

De plus, si $p = 1$, de sorte que $m < n$, l'injection 3.2 existe aussi pour $k = n - m$.

Case **B** Supposons $mp = n$. Alors pour chaque k , $1 \leq k \leq n$,

$$W^{j+m,p}(\Omega) \rightarrow W^{j,q}(\Omega^k), \quad p \leq q < \infty \quad (3.5)$$

de sorte que notamment

$$W^{m,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega), \quad p \leq q < \infty \quad (3.6)$$

De plus, si $p = 1$ tel que $m = n$, les injections 3.5 et 3.6 existent également avec $q = \infty$; En fait,

$$W^{j+n,1}(\Omega) \rightarrow C_B^j(\Omega) \quad (3.7)$$

Case **C** Supposons $mp > n$. Alors

$$W^{j+m,p}(\Omega) \rightarrow C_B^j(\Omega). \quad (3.8)$$

Partie **II** Si Ω possède la forte propriété Lipschitz locale, alors

Case **C** de Partie **I** peut être affiné comme suit :

Case **C'** Supposons $mp > n > (m-1)p$. Alors

$$W^{j+m,p}(\Omega) \rightarrow C^{j,\lambda}(\bar{\Omega}), \quad 0 < \lambda \leq m - (n/p). \quad (3.9)$$

Case **C''** Supposons $n = (m-1)p$. Alors

$$W^{j+m,p}(\Omega) \rightarrow C^{j,\lambda}(\bar{\Omega}), \quad 0 < \lambda < 1. \quad (3.10)$$

Aussi, si $n = m-1$ et $p = 1$, alors 3.10 est également valable pour $\lambda = 1$.

Partie **III** Toutes les conclusions des parties **I** et **II** sont valables pour des domaines arbitraires à condition que les espaces W subissant l'injection soient remplacés par les espaces W_0 correspondants.

Remarque 3.1. Les imbrications 3.2-3.8 sont essentiellement dues à Sobolev [10] dont la preuve originale ne couvrirait cependant pas les cas $q = kp/(n-mp)$ en 3.2, ou $q = np/(n-mp)$ en 3.3 et 3.4. Les injections 3.9 et 3.10 trouvent leurs origines dans les travaux de Morrey [1].

2. Les injections de type 3.2 et 3.5 impliquant des traces de fonctions sur des plans de dimension inférieure peuvent être étendues de manière raisonnable pour s'appliquer à des traces sur des variétés lisses plus générales. Par exemple, voir Théorème 3.4.
3. La partie **III** du théorème est une conséquence immédiate des parties **I** et **II** appliquées à $\mathbb{R}^n$ car, d'après le lemme 2.3, l'opérateur d'extension nulle des fonctions hors de Ω applique $W_0^{m,p}(\Omega)$ isométriquement dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.
4. Supposons que toutes les conclusions du théorème d'injection soient prouvées pour $\Omega = \mathbb{R}^n$. Il s'ensuit qu'ils doivent également être valables pour tout domaine Ω satisfaisant aux exigences de l'extension de Calderón par exemple, si $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, et si E est un (m,p) -opérateur d'extension pour Ω , alors pour tout $u \in W^{m,p}(\Omega)$ on a

$$\|u\|_{0,q,\Omega} \leq \|Eu\|_{0,q,\mathbb{R}^n} \leq K_1 \|Eu\|_{m,p,\mathbb{R}^n} \leq K_1 K_2 \|u\|_{m,p,\Omega}$$

avec K_1 et K_2 indépendants de u . Cependant, nous ne démontrerons pas le théorème d'insertion par de tels arguments d'extension.

5. Il suffit d'établir chacun des injection [3.2](#), [3.3](#), [3.5](#), [3.7](#), [3.10](#) pour le cas particulier $j = 0$. Par exemple, si $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ a été établi, alors pour tout $u \in W^{j+m,p}(\Omega)$ on a $D^\alpha u \in W^{m,p}(\Omega)$ pour $|\alpha| \leq j$, d'où $D^\alpha u \in L^q(\Omega)$, ainsi $u \in W^{j,q}(\Omega)$; et

$$\begin{aligned} \|u\|_{j,q} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq j} \|D^\alpha u\|_{0,q}^p \right)^{1/q} \\ &\leq K_1 \left(\sum_{|\alpha| \leq j} \|D^\alpha u\|_{m,p}^p \right)^{1/p} \leq K_2 \|u\|_{j+m,p}. \end{aligned}$$

En conséquence, nous spécialiserons toujours $j = 0$ dans les preuves.

6. Si Ω^k (ou Ω) a un volume fini, il résulte du théorème [1.5](#) que les injection [3.2-3.6](#) sont valables pour $1 \leq q < p$ en plus des valeurs de q affirmées dans le théorème. On montrera plus tard (voir [3.5](#)) qu'aucune injection de la forme $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ où $q < p$ n'est possible à moins que Ω n'ait un volume fini.

3.2 Preuve du théorème d'injection

La preuve donnée ici est due à Gagliardo [2]. Même si c'est plutôt long, les techniques impliquées sont assez élémentaires, étant basées sur un peu plus que de simples calculs combinés avec des applications astucieuses de l'inégalité de Hölder. De plus, la preuve de Gagliardo établit le théorème d'injection dans la plus grande généralité possible et est capable de généralisation pour produire des résultats d'injection pour certains domaines n'ayant pas la propriété du cône.

La preuve est effectuée dans une chaîne de lemmes auxiliaires. Dans chacun de ces lemmes, les constantes $K_1, K_2, \dots$ apparaissant dans la preuve sont autorisées à dépendre des mêmes paramètres que la constante K mentionnée dans l'énoncé du lemme.

Lemme 3.1. *Soit*

$$R = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i; 1 \leq i \leq n\}$$

et

$$R' = \{x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : a_i < x_i < b_i; 1 \leq i \leq n-1\}$$

être des rectangles ouverts bornée dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{n-1}$, respectivement. Si $a_n < \zeta < b_n$ et $p \geq 1$, alors pour chaque $u \in C^\infty(R) \cap W^{1,p}(R)$ on a

$$\|u(., \zeta)\|_{0,p,R'} \leq K \|u\|_{1,p,R} \quad (3.11)$$

où $K = K(p, b_n - a_n)$. Ainsi la cartographie des traces $u \rightarrow u(., \zeta)$ s'étend à une injection de $W^{1,p}(R)$ dans $L^p(R_\zeta^{n-1})$, où $R_\zeta^{n-1} = R \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = \zeta\}$.

Démonstration. Par théorème 2.8, $C^\infty(\bar{R})$ est dense dans $W^{1,p}(R)$ on peut donc supposer $u \in C^\infty(\bar{R})$. Ainsi $\int_{R'} |u(x', .)|^p dx'$ appartient à $C^\infty([a_n, b_n])$ et par le théorème de la valeur

moyenne des intégrales, nous avons

$$\|u\|_{0,p,R}^p = \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{R'} |u(x', x_n)|^p dx' \right) dx_n = (b_n - a_n) \int_{R'} |u(x', \sigma)|^p dx'$$

pour certains $\sigma \in [a_n, b_n]$. Maintenant

$$\begin{aligned} |u(x', \zeta)|^p &= \left| u(x', \sigma) + \int_0^\zeta D_n u(x', t) dt \right|^p \\ &\leq 2^{p-1} \left[|u(x', \sigma)|^p + |\zeta - \sigma|^{p-1} \int_0^\zeta |D_n u(x', t)|^p dt \right] \end{aligned}$$

par l'inégalité de Hölder. L'intégration sur R' conduit à

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, \zeta)\|_{0,p,R'}^p &\leq 2^{p-1} \left[\|u(\cdot, \sigma)\|_{0,p,R'}^p + (b_n - a_n)^{p-1} \|D_n u\|_{0,p,R}^p \right] \\ &\leq 2^{p-1} \left[(b_n - a_n)^{-1} \|u\|_{0,p,R}^p + (b_n - a_n)^{p-1} \|D_n u\|_{0,p,R}^p \right] \end{aligned}$$

ce qui donne 3.11 with $K = \left[2^{p-1} \max \left((b_n - a_n)^{-1}, (b_n - a_n)^{p-1} \right) \right]^{1/p}$. Notons que K dépend continûment de $b_n - a_n$ mais peut tendre vers l'infini si $b_n - a_n$ tend vers zéro ou l'infini. $\square$

Lemme 3.2. *Soit R comme dans le lemme précédent. Alors*

$$W^{n,1}(R) \rightarrow C(\bar{R})$$

La constante d'injection ne dépend que de n et des dimensions de R

Démonstration. Soit x un point quelconque de R , et soit R' comme dans le lemme précédent.

Si $u \in C^\infty(\bar{R})$ et $|\alpha| \leq n - 1$, on a par ce lemme que

$$\|D^\alpha u(\cdot, x_n)\|_{0,1R'} \leq K_1 \|D^\alpha u\|_{1,1,R}.$$

Anisi

$$\|u(\cdot, x_n)\|_{n-1,1,R} \leq K_2 \|u\|_{n,1,R}$$

avec K_2 selon $b_n - a_n$. L'itération de cet argument sur des rectangles de dimension successivement inférieure conduit à

$$\|u(\cdot, x_2, x_3, \dots, x_n)\|_{1,1,(a_1,b_1)} \leq K_3 \|u\|_{n,1,R}$$

avec K_3 selon $b_j - a_j, 2 \leq j \leq n$. D'après le théorème de la valeur moyenne des intégrales, il existe $\sigma \in [a_1, b_1]$ tel que

$$\|u(\cdot, x_2, \dots, x_n)\|_{0,1,(a_1,b_1)} = (b_1 - a_1) |u(\sigma, x_2, \dots, x_n)|$$

Anisi

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq |u(\sigma, x_2, \dots, x_n)| + \int_{\sigma}^{x_1} |D_1 u(t, x_2, \dots, x_n)| dt \\ &\leq [1/(b_1 - a_1)] \|u(\cdot, x_2, \dots, x_n)\|_{0,1,(a_1,b_1)} \\ &\quad + \|D_1 u(\cdot, x_2, \dots, x_n)\|_{0,1,(a_1,b_1)} \\ &\leq K \|u\|_{n,1,R}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Supposons maintenant $u \in W^{n,1}(R)$. D'après le théorème 2.8, u est la limite dans $W^{n,1}(R)$ d'une suite de fonctions appartenant à $C^\infty(\bar{R})$. Il découle de 3.12 que cette suite converge uniformément sur R vers une fonction $\tilde{u} \in C(\bar{R})$. Puisque $u(x) = \tilde{u}(x)$ p.p. dans R , le lemme est prouvé. Intéressons-nous maintenant à des domaines plus généraux. Le lemme suivant de Gagliardo, qui est essentiellement de nature combinatoire, est le fondement sur lequel repose sa preuve du théorème d'injection. $\square$

Lemme 3.3. Soit Ω être un domaine dans $\mathbb{R}^n$ où $n \geq 2$. Soit k être un entier satisfaisant $1 \leq k \leq n$, et soit $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n)$ désignent un k -uplet d'entiers satisfaisant $1 \leq \kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_k \leq n$. Soit S être l'ensemble de tous $\binom{n}{k}$ tel que k -tuples. Aussi, étant donné

$x \in \mathbb{R}^n$, soit x_κ dénoter le point $(x_{\kappa_1}, \dots, x_{\kappa_k}) \in \mathbb{R}^k$; $dx_\kappa = dx_{\kappa_1} \cdots dx_{\kappa_k}$.

Pour $\kappa \in S$ donné, soit E_κ le plan k -dimensionnel dans $\mathbb{R}^n$ couvert par les axes de coordonnées correspondant aux composantes de x_κ :

$$E_\kappa = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = 0 \text{ si } i \notin \kappa\}$$

et pour tout ensemble $G \subset \mathbb{R}^n$ soit G_κ la projection de G sur E_κ ; en particulier

$$\Omega_\kappa = \{x \in E_\kappa : \exists y \in \Omega \text{ tel que } y_\kappa = x_\kappa\}.$$

Soit F_κ une fonction dépendant des k composantes de x_κ et appartenant à $L^\lambda(\Omega_\kappa)$, où $\lambda = \binom{n-1}{k-1}$. Alors la fonction F est définie sur Ω par

$$F(x) = \prod_{\kappa \in S} F_\kappa(x_\kappa)$$

appartient à $L^1(\Omega)$, et $\|F\|_{1,\Omega} \leq \prod_{\kappa \in S} \|F_\kappa\|_{\lambda,\Omega_\kappa}$, c'est,

$$\left[\int_\Omega |F(x)| dx \right]^\lambda \leq \prod_{\kappa \in S} \int_{\Omega_\kappa} |F_\kappa(x_\kappa)|^\lambda dx_\kappa. \quad (3.13)$$

Démonstration. Pour $\kappa \in S$ et $\xi_\kappa \in \mathbb{R}^k$ soit $\Omega(\xi_\kappa)$ la section plane k -dimensionnelle de Ω par le plan $x_\kappa = \xi_\kappa$

$$\Omega(\xi_\kappa) = \{x \in \Omega : x_\kappa = \xi_\kappa\}$$

On établit 3.13 par récurrence sur n , et donc on considère d'abord le cas $n = 2$. On peut aussi supposer que $k = 1$ puisque, pour tout n , le sous-cas $k = n$ de 3.13 est trivial. Pour

$n = 2$, $k = 1$, on a $\lambda = 1$ et S n'a que deux éléments, $\kappa = 1$ et $\kappa = 2$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |F_1(x_1) F_2(x_2)| dx_1 dx_2 &= \int_{\Omega_1} dx_1 \int_{\Omega(x_1)} |F_1(x_1) F_2(x_2)| dx_2 \\ &= \int_{\Omega_1} |F_1(x_1)| dx_1 \int_{(\Omega(x_1))_2} |F_2(x_2)| dx_2 \\ &\leq \int_{\Omega_1} |F_1(x_1)| dx_1 \int_{\Omega_2} |F_2(x_2)| dx_2 \end{aligned}$$

puisque clairement $(\Omega(x_1))_2 \subset \Omega_2$ pour tout x_1 . C'est 3.13 pour le cas considéré. (Un calcul similaire donnera 3.13 pour n arbitraire et $k = 1$.) Maintenant, nous supposons que 3.13 a été établi pour $n = N - 1$. Nous considérons le case $n = N$ et, comme indiqué ci-dessus, peut supposer $2 \leq k \leq N - 1$. Ainsi $\lambda = \binom{N-1}{k-1}$. Soit $\mu = \binom{N-2}{k-1}$ et $v = \binom{N-2}{k-2}$. L'intégrande du côté gauche de 3.13 est un produit de $\binom{N}{k}$ facteurs $|F_k|$ appartenant chacun à l'espace correspondant $L^\lambda(\Omega_\kappa)$. Exactement $\binom{N-1}{\kappa}$ de ces facteurs, disons ceux correspondant à $\kappa \in A \subset S$, sont indépendants de x_n . Il découle de l'application de l'hypothèse d'induction sur le domaine $(N-1)$ dimensionnel $\Omega(x_N)$ et de la constatation $(\Omega(x_N))_K \subset \Omega_\kappa$ que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(x_N)} \prod_{\kappa \in A} |F_\kappa(x_\kappa)|^{\lambda/\mu} dx_1 \cdots dx_{N-1} &\leq \prod_{\kappa \in A} \left[\int_{(\Omega(x_N))_k} |F_\kappa(x_\kappa)|^\lambda dx_k \right]^{1/\mu} \\ &\leq \prod_{\kappa \in A} \left[\int_{\Omega_\kappa} |F_\kappa(x_\kappa)|^\lambda dx_\kappa \right]^{1/\mu}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Le reste $\binom{N}{k} - \binom{N-1}{k} = \lambda$ facteurs $|F_k|$ dépendent de x_N , et donc lorsqu'ils sont restreindre à $\Omega(x_N)$ ne dépendent que de $k-1$ variables. En appliquant à nouveau

l'hypothèse d'induction sur $\Omega(x_N)$, mais cette fois avec $k - 1$ à la place de k , on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(x_N)} \prod_{\kappa \in S \sim A} |F_\kappa(x_\kappa)|^{\alpha/v} dx_1 \cdots dx_{N-1} \\ & \leq \prod_{\kappa \in S \sim A} \left[\int_{(\Omega(x_N))_\kappa} |F_k(x_\kappa)|^\lambda dx_{\kappa_1} \cdots dx_{\kappa_{k-1}} \right]^{1/v}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Maintenant $\mu + v = \lambda$ et donc par l'inégalité de Hölder, et 3.14 et 3.15,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(x_N)} \prod_{\kappa \in S} |F_\kappa(x_\kappa)| dx_1 \cdots dx_{N-1} \\ & \leq \prod_{\kappa \in A} \left[\int_{\Omega_\kappa} |F_k(x_\kappa)|^\lambda dx_\kappa \right]^{1/\lambda} \\ & \times \prod_{\kappa \in S \sim A} \left[\int_{(\Omega(x_N))_\kappa} |F_\kappa(x_\kappa)|^\lambda dx_{\kappa_1} \cdots dx_{\kappa_{k-1}} \right]^{1/\lambda}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Puisque $S \sim A$ contient λ éléments que nous obtenons par (la forme à plusieurs fonctions de) l'inégalité de Hölder qui

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_N} \prod_{\kappa \in S \sim A} \left[\int_{(\Omega(x_N))_\kappa} |F_k(x_k)|^\lambda dx_{\kappa_1} \cdots dx_{\kappa_{k-1}} \right]^{1/\lambda} dx_N \\ & \leq \prod_{\kappa \in S \sim A} \left[\int_{\Omega_N} \int_{(\Omega(x_N))_\kappa} |F_k(x_k)|^\lambda dx_k \right]^{1/\lambda} \\ & \leq \prod_{\kappa \in S \sim A} \left[\int_{\Omega_k} |F_k(x_k)|^\lambda dx_k \right]^{1/\lambda}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Il s'ensuit par insertion de 3.17 dans 3.16 que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \prod_{\kappa \in S} |F_K(x_k)| dx &= \int_{\Omega_N} dx_N \int_{\Omega(x_N)} \prod_{\kappa \in S} |F_k(x_k)| dx_1 \cdots dx_{N-1} \\ &\leq \prod_{\kappa \in S} \left[\int_{\Omega_\kappa} |F_\kappa(x_\kappa)|^\lambda dx_\kappa \right]^{1/\lambda}, \end{aligned}$$

ce qui achève l'induction et la preuve de 3.13. $\square$

Lemme 3.4. *Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ ayant la propriété de cône. Si $1 \leq p < n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$, où $q = np/(n - p)$. La constante d'injection peut être choisie pour*

ne dépendre que de m, p, n , et du cône C déterminant la propriété du cône pour Ω .

Démonstration. Il faut montrer que pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\|u\|_{0,q,\Omega} \leq K \|u\|_{1,p,\Omega}, \quad (3.18)$$

avec $K = K(m, p, n, C)$. (voir (3.5)), Ω peut être exprimé comme une union d'un nombre fini de sous-domaines dont chacun a la propriété Lipschitz locale forte (et donc la propriété de segment), et dont chacun est lui-même une union de translations parallèles d'un parallélépipède correspondant. Un examen de la preuve de ce théorème montre que le nombre de sous-domaines et les dimensions des parallélépipèdes correspondants dépendent de n et C . Il suffit donc d'établir 3.18 pour l'un de ces sous-domaines.

Par le théorème 2.15 et une transformation linéaire non singulière appropriée, nous pouvons supposer que le parallélépipède impliqué est, en fait, un cube Q ayant une longueur d'arête de 2 unités et ayant des arêtes parallèles aux axes de coordonnées. En conséquence nous supposons ci-après que $\Omega = \bigcup_{x \in A} (x + Q)$ avec $A \subset \Omega$, et que Ω a la propriété de segment. Par le théorème 2.8 il suffit d'établir 3.18 pour $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Pour $x \in \Omega$ soit $w_i(x)$ désignent l'intersection de Ω avec la droite passant par x parallèle à l'axe de coordonnées x_i . Clairement, $w_i(x)$ contient un segment de longueur unitaire avec une extrémité en x , disons le segment $x + te_i, 0 \leq t < 1$, où e_i est un vecteur unitaire le long de x_i -axe. Soit $\gamma = (np - p)/(n - p)$ de sorte que $\gamma \geq 1$. L'intégration par parties donne, pour $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |u(x + (1-t)e_i)|^\gamma dt \\ &= |u(x)|^\gamma - \gamma \int_0^1 t |u(x + (1-t)e_i)|^{\gamma-1} \frac{d}{dt} |u(x + (1-t)e_i)| dt. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Soit $\hat{x}_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ et posons

$$F_i(\hat{x}_i) = \sup_{y \in w_i(x)} |u(y)|^{p/(n-p)}.$$

Aors 3.19 donne

$$|F_i(\hat{x}_i)|^{n-1} \leq \int_{w_i(x)} |u(x)|^\gamma dx_i + \gamma \int_{w_i(x)} |u(x)|^{\gamma-1} |D_i u(x)| dx_i. \quad (3.20)$$

L'intégration sur Ω_i , la projection de Ω sur le plan $x_i = 0$, conduit maintenant à

$$\int_{\Omega_i} |F_i(\hat{x}_i)|^{n-1} d\hat{x}_i \leq \int_{\Omega} |u(x)|^\gamma dx + \gamma \int_{\Omega} |u(x)|^{\gamma-1} |D_i u(x)| dx.$$

Si $p > 1$, alors $\gamma > 1$ et une application de l'inégalité de Hölder donne

$$\begin{aligned} \|F_i\|_{0,n-1,\Omega_i}^{n-1} &\leq \gamma \left[\int_{\Omega} (|u(x)| + |D_i u(x)|)^p dx \right]^{1/p} \left[\int_{\Omega} |u(x)|^{(\gamma-1)p'} dx \right]^{1/p'} \\ &\leq 2^{(p-1)/p} \gamma \|u\|_{1,p,\Omega} \|u\|_{0,q,\Omega}^{q/p'} \end{aligned}$$

car $(\gamma - 1)p' = q$.

On applique maintenant le lemme 3.3 aux fonctions F_i , $1 \leq i \leq n$, en notant que $k = n - 1$ de sorte que l'exposant λ de ce lemme est lui-même $n - 1$

$$\begin{aligned} \|u\|_{0,q,\Omega}^q &= \int_{\Omega} |u(x)|^{np/(n-p)} dx \leq \int_{\Omega} \prod_{i=1}^n F_i(\hat{x}_i) dx \leq \prod_{i=1}^n \|F_i\|_{0,n-1,\Omega_i} \\ &\leq \left(2^{(p-1)/p} \gamma \|u\|_{1,p,\Omega} \|u\|_{0,q,\Omega}^{q/p'} \right)^{n/(n-1)}. \end{aligned}$$

Puisque $(n-1)q/n - q/p' = 1$, 3.18 suit par annulation. L'annulation est justifiée, car depuis $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ et Ω est bornée, $\|u\|_{0,q,\Omega}$ est finie. Puisque $C^\infty(\bar{\Omega})$ est dense dans $W^{1,p}(\Omega)$, 3.18 s'étend par continuité à l'ensemble de $W^{1,p}(\Omega)$. $\square$

Remarque 3.2. Soit $u \in C_0(\mathbb{R}^n)$ et soit q, r être comme dans la preuve ci-dessus. De l'identité

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt} |u(x + te_i)|^\gamma dt = -|u(x)|^\gamma$$

we obtain

$$\sup_{y \in w_i(x)} |u(y)|^\gamma \leq \gamma \int_{-\infty}^\infty |u(x)|^{\gamma-1} |D_i u(x)| dx_i,$$

où $w_i(x)$ est la droite passant par x parallèle à l'axe x_i . En comparant cela avec 3.20, nous voyons que les calculs de la preuve ci-dessus peuvent être reproduits pour donner dans ce cas

$$\|u\|_{0,q,\mathbb{R}^n} \leq K|u|_{1,p,\mathbb{R}^n}, \quad (3.21)$$

où la semi-norme $|\cdot|_{1,p}$ est définie (voir (3.5)). L'inégalité 3.21 est connue sous le nom d'inégalité de Sobolev.

Lemme 3.5. Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ ayant la propriété de cône. Si $mp < n$, alors $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ pour $p \leq q \leq np/(n - mp)$. La constante d'intégration peut être choisie pour ne dépendre que de m, p, n, q et du cône C déterminant la propriété du cône pour Ω .

Démonstration. Soit $q_0 = np/(n - mp)$. On prouve d'abord par induction sur m que $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow L^{q_0}(\Omega)$. Notez que le lemme 3.4 établit le cas $m = 1$. Supposons donc que $W^{m-1,p}(\Omega) \rightarrow L^r(\Omega)$ pour $r = np/(n - mp + p)$ chaque fois que $n > (m - 1)p$. Si $u \in W^{m,p}(\Omega)$, où $n > mp$, alors u et $D_j u$ ($1 \leq j \leq n$) appartient à $W^{m-1,p}(\Omega)$. Il s'ensuit que $u \in W^{1,r}(\Omega)$ et

$$\|u\|_{1,r,\Omega} \leq K_1 \|u\|_{m,p,\Omega}$$

Puisque $mp < n$, on a $r < n$ et donc par lemme 3.4 on a $W^{1,r}(\Omega) \rightarrow L^{q_0}(\Omega)$ où $q_0 = nr/(n - r) = np/(n - mp)$ et

$$\|u\|_{0,q_0,\Omega} \leq K_2 \|u\|_{1,r,\Omega} \leq K_3 \|u\|_{m,p,\Omega} \quad (3.22)$$

Ceci termine l'induction.

Supposons $p \leq q \leq q_0$. Nous fixons

$$s = (q_0 - q)p / (q_0 - p) \text{ et } t = p/s = (q_0 - p) / (q_0 - q)$$

et obtenir par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
\|u\|_{0,q,\Omega}^q &= \int_{\Omega} |u(x)|^s |u(x)|^{q-s} dx \\
&\leq \left[\int_{\Omega} |u(x)|^{st} dx \right]^{1/t} \left[\int_{\Omega} |u(x)|^{(q-s)t'} dx \right]^{1/t'} \\
&= \|u\|_{0,p,\Omega}^{p/t} \|u\|_{0,q_0,\Omega}^{q_0/t'} \leq K_3^{q_0/t'} \|u\|_{m,p,\Omega}^q
\end{aligned} \tag{3.23}$$

par 3.22. □

Corollaire 3.2. *Si $mp = n$, alors $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ pour $p \leq q < \infty$. La constante d'injection ici peut aussi dépendre de $|\Omega|$.*

Démonstration. Si $q \geq p' = p/(p-1)$, alors $q = ns/(n-ms)$, où $s = pq/(p+q)$ satisfait $1 \leq s < p$. Par théorème 3.5, $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow W^{m,s}(\Omega)$ avec une constante d'injection dépendant de $|\Omega|$. Puisque $ms < n$, $W^{m,s}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ par le lemme 1.8. Si $p \leq q \leq p'$ l'injection souhaité s'ensuit par interpolation entre $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ et $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow L^{p'}(\Omega)$ comme dans 3.23.

Pour $mp = n$ et $q \geq p$ la dépendance de la constante d'injection sur $|\Omega|$ peut être supprimée comme nous le montrons dans le lemme suivant qui supprime la restreindre de bornitude de Ω du lemme 3.5 et du corollaire 3.2. □

Lemme 3.6. *Soit Ω un domaine arbitraire dans $\mathbb{R}^n$ ayant la propriété de cône. Si $mp < n$, alors $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ pour $p \leq q \leq np/(n-mp)$. Si $mp = n$, alors $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ pour $p \leq q \leq \infty$. Si $p = 1$ et $m = n$, alors $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow C_B^0(\Omega)$. Alors les constantes de ces imbrications peuvent dépendre de m, p, n, q , et du cône C déterminant la propriété du cône pour Ω .*

Démonstration. Nous pavant $\mathbb{R}^n$ par des cubes de côté unitaire, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est un n -uplet d'entiers, soit $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \lambda_i \leq x_i \leq \lambda_i + 1; 1 \leq i \leq n\}$. Alors $\mathbb{R}^n = \bigcup_{\lambda} H_{\lambda}$.

Comme remarqué dans le premier paragraphe de la preuve, même un domaine non borné Ω avec la propriété de cône peut être exprimé comme une union d'un nombre fini de sous-domaines, disons $\Omega = \bigcup_{j=1}^N \Omega_j$, tel que $\Omega_j = \bigcup_{x \in A_j} (x + P_j)$, où $A_j \subset \Omega$ est un parallélépipède

avec un sommet à l'origine. Le nombre N et les dimensions des parallélépipèdes P_j dépendent de n et du cône C déterminant la propriété du cône pour Ω . Pour chaque λ et pour $1 \leq j \leq N$ soit

$$\Omega_{\lambda,j} = \bigcup_{x \in A_j \cap H_\lambda} (x + P_j).$$

Les domaines $\Omega_{\lambda,j}$ possèdent évidemment les propriétés suivantes :

- (i) $\Omega = \bigcup_{\lambda,j} \Omega_{\lambda,j}$;
- (ii) $\Omega_{\lambda,j}$ est bornée ;
- (iii) il existe un cône fini C' dépendant uniquement de $P_1, \dots, P_N$ (et donc uniquement de n et C) tel que chaque $\Omega_{\lambda,j}$ ait la propriété de cône déterminée par C' ;
- (iv) il existe un entier positif R dépendant de n et C tel que tout $R+1$ des domaines $\Omega_{\lambda,j}$ ait une intersection vide ;

il existe des constantes K' et K'' dépendant de n et C telles que pour chaque $\Omega_{\lambda,j}$,

$$K' \leq \text{vol } \Omega_{\lambda,j} \leq K''. \quad (3.24)$$

Supposons $mp < n$ et soit $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Si $p \leq q \leq np/(n - mp)$, puis par (ii), (iii), et le lemme 3.5, on a

$$\|u\|_{0,q,\Omega_{\lambda,j}} \leq K \|u\|_{m,p,\Omega_{\lambda,j}},$$

où $K = K(m, p, n, q, C)$ est indépendant de λ et j . D'où par (i) et (iv) et puisque $q \geq p$

$$\begin{aligned} \|u\|_{0,q,\Omega}^q &\leq \sum_{\lambda,j} \|u\|_{0,q,\Omega}^q \leq K^q \sum_{\lambda,j} [\|u\|_{m,p,\Omega_{\lambda,j}}]^{q/p} \\ &\leq K^q \left[\sum_{\lambda,j} \|u\|_{m,p,\Omega_{\lambda,j}}^q \right]^{q/p} \leq K^q R^{q/p} \|u\|_{m,p,\Omega}^q. \end{aligned}$$

Ans $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ avec la constante d'injection $K R^{1/p}$.

Si $mp = n$, 3.24 vaut pour tout q tel que $p \leq q < \infty$ en vertu du corollaire 3.2, et la constante K peut être choisie indépendamment de λ et j grâce à (v). Le reste de la preuve

ci-dessus s'applique alors à ce cas. Enfin, si $p = 1$ et $m = n$, on a par le lemme 3.2 et une transformation linéaire non singulière que $W^{n,1}(P) \rightarrow C^0(\bar{P})$ pour tout parallélépipède $P \subset \Omega$ la constante d'injection ne dépendant que de n et des dimensions de P . D'où $W^{n,1}(\Omega) \rightarrow C_B^0(\Omega)$ grâce à la décomposition $\Omega = \bigcup \Omega_{\lambda,j}$. $\square$

Nous avons maintenant prouvé la partie **I**, cas **A** et **B** du théorème 3.1.1 pour le cas $k = n$. Avant de terminer ces cas en considérant l'imbedding de trace ($k < n$), nous établissons les imbeddings de l'espace des fonctions continues, Partie **I**, Cas **C** et Partie **II**.

Lemme 3.7. Soit Ω être bornée $\mathbb{R}^n$ ayant la propriété de cône. Si $mp > n$, alors $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow C_B^0(\Omega)$, la constante d'injection ne dépendant que de m, p, n , et le cône C déterminant la propriété du cône pour Ω .

Démonstration. Supposons que l'on puisse prouver que pour tout $\phi \in C^\infty(\Omega)$,

$$\sup_{x \in \Omega} |\phi(x)| \leq K \|\phi\|_{m,p,\Omega}, \quad (3.25)$$

où $K = K(m, p, n, C)$. Si $u \in W^{m,p}(\Omega)$, puis par théorème 2.7 il existe une suite $\{\phi_n\}$ dans $C^\infty(\Omega)$ convergeant vers u en norme dans $W^{m,p}(\Omega)$. Puisque $\{\phi_n\}$ est une suite de Cauchy dans $W^{m,p}(\Omega)$, 3.25 implique que $\{\phi_n\}$ converge vers une fonction continue sur Ω . Ainsi, vous devez coïncider p.p. avec un élément de $C_B^0(\Omega)$. Il suffit donc d'établir 3.25.

Supposons d'abord $m = 1$ pour que $p > n$. Soit $x \in \Omega$ et soit $C_x \subset \Omega$ un cône fini congru à C et ayant un sommet en x . Soit h la hauteur de C . Soit (r, θ) les coordonnées polaires sphériques dans $\mathbb{R}^n$ d'origine en x tel que C_x soit spécifié par $0 < r < h$, $\theta \in A$. L'élément de volume dans ce système est désigné par $r^{n-1}\omega(\theta)drd\theta$. On a

$$\phi(x) = \phi(0, \theta) = \phi(r, \theta) - \int_0^r \frac{d}{dt} \phi(t, \theta) dt,$$

d'où l'on conclut, pour $0 < r < h$,

$$|\phi(x)| \leq |\phi(r, \theta)| + \int_0^h |\operatorname{grad} \phi(t, \theta)| dt.$$

En multipliant cette inégalité par $r^{n-1}\omega(\theta)$ et en intégrant r sur $(0, h)$ et θ sur A , on obtient

$$\begin{aligned} (\operatorname{vol} C_x) |\phi(x)| &\leq \int_{C_x} |\phi(y)| dy + \frac{h^n}{n} \int_{C_x} \frac{|\operatorname{grad} \phi(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy \\ &\leq (\operatorname{vol} C_x)^{1/p'} \|\phi\|_{0,p,C_x} \\ &\quad + \frac{h^n}{n} \|\operatorname{grad} \phi\|_{0,p,C_x} \left| \int_{C_x} |x-y|^{-(n-1)p'} dy \right|^{1/p'}, \end{aligned}$$

la dernière inégalité résultant de deux applications de l'inégalité de Hölder. Puisque $p > n$ on a $(n-1)(1-p') > -1$ et donc

$$\int_{C_x} |x-y|^{-(n-1)p'} dy = \int_{\Lambda} \omega(\theta) d\theta \int_0^n r^{(n-1)(1-p')} dr < \infty.$$

Ansi

$$|\phi(x)| \leq K \|\phi\|_{1,p,C_x} \leq K \|\phi\|_{1,p,\Omega}$$

avec $K = K(m, p, n, C_x) = K(m, p, n, C)$. Ansi 3.25 est prouvé pour $m = 1$.

Si $m > 1$ mais $p > n$, nous avons toujours

$$|\phi(x)| \leq K \|\phi\|_{1,p,C_x} \leq K \|\phi\|_{m,p,C_x} \leq K \|\phi\|_{m,p,\Omega}.$$

Si $p \leq n < mp$, il existe un entier j vérifiant $1 \leq j \leq m-1$ tel que $jp \leq n < (j+1)p$. Si $jp < n$, poser $r = np/(n-jp)$; si $jp = n$, choisir $r > \max(n, p)$. Dans les deux cas, on a par le résultat démontré ci-dessus et par le lemme 3.6 that

$$|\phi(x)| \leq K_1 \|\phi\|_{1,r,C_x} \leq K_1 \|\phi\|_{m-j,r,C_x} \leq K \|\phi\|_{m,p,C_x} \leq K \|\phi\|_{m,p,\Omega},$$

les constantes ne dépendant que de m, p, n et C . Ceci achève la démonstration. $\square$

Corollaire 3.3. *Si $mp > n$, alors $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ pour $p \leq q \leq \infty$. Les constantes d'injection ne dépendent que de m, p, n, q et du cône C .*

Démonstration. Nous avons déjà établi que

$$\|u\|_{0,\infty,\Omega} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)| \leq K \|u\|_{m,p,\Omega}$$

pour tous $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Si $p \leq q < \infty$, on a

$$\begin{aligned} \|u\|_{0,q,\Omega}^q &= \int_{\Omega} |u(x)|^p |u(x)|^{q-p} dx \\ &\leq K^{q-p} \|u\|_{m,p,\Omega}^{q-p} \|u\|_{0,p,\Omega}^p \leq K^{q-p} \|u\|_{m,p,\Omega}^q. \end{aligned}$$

□

Lemme 3.8. *Soit Ω soit un domaine dans $\mathbb{R}^n$ ayant la propriété Lipschitz locale forte, et supposons que $mp > n \geq (m-1)p$. Alors $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ pour :*

- (i) $0 < \lambda \leq m - n/p$ si $n > (m-1)p$, ou
- (ii) $0 < \lambda < 1$ si $n = (m-1)p$, ou
- (iii) $0 < \lambda \leq 1$ si $p = 1, n = m-1$.

En particulier $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow C^0(\bar{\Omega})$. Les constantes d'injection dépendent de m, p, n et des paramètres δ, M spécifiés dans la description de la propriété Lipschitz locale forte pour Ω .

Démonstration. Soit $u \in W^{m,p}(\Omega)$. La propriété Lipschitz locale forte implique la propriété du cône donc par le lemme 3.7 on peut supposer que u est continue sur Ω et satisfait

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x)| \leq K_1 \|u\|_{m,p,\Omega} \quad (3.26)$$

Il suffit donc d'établir plus avant que pour des λ ,

$$\sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\lambda} \leq K_2 \|u\|_{m,p,\Omega} \quad (3.27)$$

Puisque $mp > n \geq (m-1)p$ nous avons par lemme 3.6 que $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,r}(\Omega)$ où :

- (i) $r = np/(n - mp + p)$ et $1 - (n/r) = m - (n/p)$ si $n > (m-1)p$, ou
- (ii) r is arbitrary, $p < r < \infty$ et $0 < 1 - (n/r) < 1$ si $n = (m-1)p$, ou
- (iii) $r = \infty$, $1 - (n/r) = m - (n/p) = 1$ si $p = 1$ et $n = m - 1$.

Il suffit donc d'établir 3.27 pour $m = 1$; c'est-à-dire que nous voulons prouver que si $n < p \leq \infty$ et $0 < \lambda \leq 1 - (n/p)$, alors

$$\sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\lambda} \leq K_3 \|u\|_{1,p,\Omega} \quad (3.28)$$

Supposons, pour le moment, que Ω soit un cube, que l'on peut aussi supposer sans perte de généralité avoir une arête unité. Pour $0 < t < 1$, Ω_t désignera un cube d'arête t avec des faces parallèles à celles de Ω et tel que $\Omega_t \subset \Omega$. Soit $u \in C^\infty(\Omega)$.

Soit $x, y \in \Omega$, $|x - y| = \sigma < 1$. Alors il existe un cube fixe Ω_σ avec $x, y \in \bar{\Omega}_\sigma \subset \Omega$. Si $z \in \Omega_\sigma$, alors

$$u(x) = u(z) - \int_0^1 \frac{d}{dt} u(x + t(z - x)) dt,$$

de sorte que

$$|u(x) - u(z)| \leq \sqrt{n} \sigma \int_0^1 |\text{grad } u(x + t(z - x))| dt$$

Ansi

$$\begin{aligned} \left| u(x) - \frac{1}{\sigma^n} \int_{\Omega_\sigma} u(z) dz \right| &\leq \left| \frac{1}{\sigma^n} \int_{\Omega_\sigma} (u(x) - u(z)) dz \right| \\ &\leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma^{n-1}} \int_{\Omega_\sigma} dz \int_0^1 |\text{grad } u(x + t(z - x))| dt \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sigma^{n-1}} \int_0^1 t^{-n} dt \int_{\Omega_{t\sigma}} |\text{grad } u(z)| dz \\ &\leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma^{n-1}} \|\text{grad } u\|_{0,p,\Omega} \int_0^1 (\text{vol } \Omega_{t\sigma})^{1/p'} t^{-n} dt \\ &\leq K_4 \sigma^{1-(n/p)} \|\text{grad } u\|_{0,p,\Omega}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

où $K_4 = K_4(n, p) = \sqrt{n} \int_0^1 t^{-n/p} dt < \infty$. Une inégalité similaire est valable avec y à la place

de x et ainsi

$$|u(x) - u(y)| \leq 2K_4|x - y|^{1-(n/p)} \|\text{grad } u\|_{0,p,\Omega}.$$

Il s'ensuit pour $0 < \lambda \leq 1 - (n/p)$ que 3.28 est valable pour Ω un cube, et donc, via une transformation linéaire non singulière, pour Ω un parallélépipède.

Supposons maintenant que Ω ait la propriété de Lipschitz locale forte $\delta, M, \Omega_\delta, U_j$, et $\mathcal{V}_j$ être tel que (voir (3.5)), il existe un parallélépipède P de diamètre δ dont les dimensions ne dépendent que de δ et M tel qu'à chaque j correspond un parallélépipède P_j congru à P et ayant un sommet à l'origine, tel que pour tout $x \in \mathcal{V}_j \cap \Omega$ on a $x + P_j \subset \Omega$. De plus il existe des constantes δ_0 et δ_1 ne dépendant que de δ et P , avec $\delta_0 \leq \delta$, tel que $x, y \in \mathcal{V}_j \cap \Omega$ et $|x - y| < \delta_0$, alors il existe $z \in (x + P_j) \cap (y + P_j)$ avec $|x - z| + |y - z| \leq \delta_1|x - y|$. Il découle de l'application de 3.28 à $x + P_j$ et $y + P_j$ que si $u \in C^\infty(\Omega)$, alors

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq |u(x) - u(z)| + |u(y) - u(z)| \\ &\leq K_5|x - z|^\lambda \|u\|_{1,p,\Omega} + K_5|y - z|^\lambda \|u\|_{1,p,\Omega} \\ &\leq 2^{1-\lambda} K_5 \delta_1^\lambda |x - y|^\lambda \|u\|_{1,p,\Omega}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Maintenant, soit $x, y \in \Omega$ être arbitraire. Si $|x - y| < \delta_0 \leq \delta$ et $x, y \in \Omega_\delta$, alors $x, y \in \mathcal{V}_j$ pour certain j et estimation 3.30 obtenir. Si $|x - y| < \delta_0, x \in \Omega_\delta, y \in \Omega \sim \Omega_\delta$, alors $x \in \mathcal{V}_j$ pour certains j et 3.30 suit par l'application de 3.28 à $x + P_j$ et $y + P_j$ encore. Si $|x - y| < \delta_0$ et $x, y \in \Omega \sim \Omega_\delta$, alors 3.30 découle de l'application de 3.28 à $x + P', y + P'$, où P' est tout parallélépipède congru à P et ayant un sommet à l'origine. Enfin, si $|x - y| \geq \delta_0$, alors on a

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x)| + |u(y)| \leq K_6 \|u\|_{1,p,\Omega} \leq K_6 \delta_0^{-\lambda} |x - y|^\lambda \|u\|_{1,p,\Omega}.$$

Ceci achève la preuve de 3.28 pour $u \in C^\infty(\Omega)$, et donc par théorème 2.7, pour tout continu u . □

Nous avons maintenant terminé la preuve de toutes les parties du théorème d'injection

3.1 sauf les imbrications de trace des cas A et B (correspondant à $k < n$). Pour la preuve de ceux-ci, nous aurons besoin du résultat d'interpolation suivant.

Lemme 3.9. *Soit Q un cube de longueur d'arête l , ayant des arêtes parallèles aux axes de coordonnées dans $\mathbb{R}^n$. Si $p > 1, q \geq 1$ et $mp - p < n < mp$, alors il existe une constante $K = K(p, q, m, n, l)$ telle que pour tout $u \in W^{m,p}(Q)$ nous avons (p.p. dans Q)*

$$|u(x)| \leq K \|u\|_{0,q,Q}^s \|u\|_{m,p,Q}^{1-s}, \quad (3.31)$$

où $s = (mp - n)q / [np + (mp - n)q]$.

Démonstration. Il suffit d'établir 3.31 pour $u \in C^\infty(\bar{Q})$. Puisque chaque point de Q est un point d'angle d'un cube contenu dans Q , ayant des arêtes parallèles à celles de Q et ayant une longueur d'arête $l/2$, nous pouvons supposer sans perte de généralité que x est lui-même un point d'angle de Q , disons $Q = \{y \in \mathbb{R}^n : x_i < y_i < x_i + l; 1 \leq i \leq n\}$. Par le lemme 3.8 nous avons pour $y \in Q$,

$$|u(x)| - |u(y)| \leq |u(x) - u(y)| \leq K_1 |x - y|^{m-(n/p)} \|u\|_{m,p,Q}. \quad (3.32)$$

Soit $U = \|u\|_{m,p,Q}$, que nous pouvons supposer être positifs, soit $\rho = |x - y|$ et $\zeta = [|u(x)| / K_1 U]^{p/(mp-n)}$. Supposons pour le moment que $\zeta \leq l$. On a $\rho \leq \zeta$

$$|u(y)| \geq |u(x)| - K_1 U \rho^{m-(n/p)} \geq 0.$$

En élevant l'inégalité ci-dessus à la puissance q et en intégrant y sur Q , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(y)|^q dy &\geq K_2 \int_0^\zeta \left(|u(x)| - K_1 U \rho^{m-(n/p)} \right)^q \rho^{n-1} d\rho \\ &= K_2 \zeta^n |u(x)|^q \int_0^1 \left(1 - \sigma^{m-(n/p)} \right) \sigma^{n-1} d\sigma \\ &= K_3 |u(x)|^{q+(np/(mp-n))} U^{-np/(mp-n)}, \end{aligned}$$

d'où 3.31 suit aussitôt. Si par contre $\zeta > l$, alors à partir de 3.32 on obtient

$$\begin{aligned} |u(y)| &\geq |u(x)| - K_1 U \rho^{m-(n/p)} \geq |u(x)| - |u(x)| (\rho/l)^{m-(n/p)} \\ &\geq 0 \quad \text{if } \rho \leq l. \end{aligned}$$

Si $t > 0$, alors

$$\int_Q |u(y)|^t dy \geq K_2 \int_0^l |u(x)|^t \left(1 - (\rho/l)^{m-(n/p)}\right)^t \rho^{n-1} d\rho = K_4 |u(x)|^t.$$

Soit $t = [(mp - n)q + np]/mp$. Aors

$$\begin{aligned} |u(x)|^{[(mp-n)q+np]/mp} &\leq (1/K_4) \int_{\Omega} [|u(y)|^q]^{(mp-n)/mp} [|u(y)|^p]^{n/mp} dy \\ &\leq (1/K_4) \|u\|_{0,q,\Omega}^{q(mp-n)/mp} / mp \|u\|_{0,p,\Omega}^{n/m}, \end{aligned}$$

par une application de l'inégalité de Hölder. Puisque $\|u\|_{0,p,\Omega} \leq \|u\|_{m,p,\Omega}$, 3.31 suit immédiatement. $\square$

Remarquons que le lemme ci-dessus vaut aussi pour le cas $p = 1, m = n$. Dans ce cas on a du lemme 3.6 that $W^{n,1}(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)$ so that $|u(x)| \leq K \|u\|_{n,1,Q}$ p.p. dans Q , lequel est 3.31 dans ce cas.

Lemme 3.10. Soit Ω être un domaine dans $\mathbb{R}^n$ ayant la propriété de cône, et soit Ω^k désigne l'intersection de Ω avec un plan k -dimensionnel, où $1 \leq k \leq n$ ($\Omega^n \equiv \Omega$). Si $n \geq mp$ et $n - mp < k \leq n$, alors

$$W^{m,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega^k) \quad (3.33)$$

pour $p \leq q \leq kp/(n - mp)$ si $n > mp$, ou pour $p \leq q < \infty$ si $n = mp$. Si $p = 1$, $n > m$ et $n - m \leq k \leq n$; alors 3.33 attends pour $1 \leq q \leq k/(n - m)$.

Les constantes d'injection ne dépendent que de m, p, k, n, q , et du cône C déterminant la propriété du cône pour Ω .

Démonstration. Il suffit d'établir les conclusions ci-dessus pour Ω botnée, $n > mp$, et $q =$

$kp/(n - mp)$, car l'extension aux autres cas peut être effectuée de la même manière que celle décrite pour le cas $k = n$ dans le corollaire 3.2 et le lemme 3.6. On peut aussi supposer, comme dans le lemme 3.4, que Ω est une réunion de cubes de coordonnées d'arête 2 unités.

Soit $\mathbb{R}_0^k$ un k -sous-espace de coordonnées dimensionnelles de $\mathbb{R}^n$ sur lequel Ω^k a une projection un à un Ω_0^k . Supposons, pour le moment, que $p > 1$. Soit v le plus grand entier inférieur à mp . Alors $mp - p < v < mp$ et puisque $n - mp < k$ on a $n - v \leq k$. (Notez que si $p = 1$, la même conclusion est valable avec $k = n - m$, $v = m$.) Soit $\mu = \binom{k}{n}$ et soit E_i ($1 \leq i \leq \mu$) les divers sous-espaces de coordonnées de $\mathbb{R}_0^k$ de dimension $n - v$. Soit Ω_i la projection de Ω_0^k (et donc de Ω^k) sur E_i . Aussi, pour chaque $x \in \Omega_i$ soit $\Omega_{i,x}$ l'intersection de Ω avec le plan de dimension v passant par x perpendiculaire à E_i . Alors $\Omega_{i,x}$ contient un cube de coordonnées de dimension v d'arête unitaire avec un sommet en x . D'après le lemme 3.9, avec $q = q_0 = np/(n - mp)$, on a pour $u \in C^\infty(\Omega)$

$$\sup_{y \in \Omega_{i,x}} |u(y)|^{(n-v)p/(n-mp)} \leq K_1 \|u\|_{0,q_0,\Omega_{i,x}}^{(mp-v)q_0/mp} \|u\|_{m,p,\Omega_{i,x}}^{v/m}. \quad (3.34)$$

Soit dx^i et dx_*^i désignent les éléments de volume dans E_i et le complément orthogonal de E_i , respectivement. L'intégration de 3.34 sur Ω_i conduit à

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_i} \sup_{y \in \Omega_{i,x}} |u(y)|^{(n-v)p/(n-mp)} dx^i \\ & \leq K_1 \int_{\Omega_i} \left[\int_{\Omega_{i,x}} |u(x)|^{q_0} dx_*^i \right]^{(mp-v)/mp} \\ & \quad \times \left[\int_{\Omega_{i,x}} \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u(x)|^p dx_*^l \right]^{v/mp} dx^l \\ & \leq K_1 \left[\int_{\Omega} |u(x)|^{q_0} dx \right]^{(mp-v)/mp} \left[\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u(x)|^p dx \right]^{v/mp} \\ & = K_1 \|u\|_{0,q_0,\Omega}^{q_0(mp-v)/mp} \|u\|_{m,p,\Omega}^{v/m} \end{aligned} \quad (3.35)$$

par l'inégalité de Hölder. Enfin, nous appliquons le lemme 3.3 aux sous-espaces E_i de $\mathbb{R}_0^k$.

Remarquons que la constante λ de ce lemme est ici égale à $\binom{k-1}{n-v-1}$. Soit $dx^{(k)}$ désignent l'élément de volume dans $\mathbb{R}_0^k$ et la mise en place $q = kp/(n - mp)$, on obtient

$$\begin{aligned} \|u\|_{0,q,\Omega^k} &\leq K_2 \int_{\Omega_0} \prod_{i=1}^{\mu} \sup_{y \in \Omega_{i,x}} |u(y)|^{q/\mu} dx^{(k)} \\ &\leq K_2 \prod_{i=1}^{\mu} \left[\int_{\Omega_i} \sup_{y \in \Omega_{i,x}} |u(y)|^{q\lambda/\mu} dx^i \right]^{1/\lambda}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Puisque $q\lambda/\mu = (n - v)p/(n - mp)$, il découle de 3.35 et 3.36 et du lemme 3.6 que

$$\begin{aligned} \|u\|_{0,q,\Omega^k} &\leq K_3 \prod_{i=1}^{\mu} \|u\|_{0,q_0,\Omega}^{q_0(mp-v)/mp\lambda q} \|u\|_{m,p,\Omega}^{v/m\lambda q} \\ &\leq K_4 \left[\|u\|_{m,p,\Omega}^{q(mp-v)/mp} \|u\|_{m,p,\Omega}^{v/m} \right]^{\mu/\lambda q} = K_4 \|u\|_{m,p,\Omega}. \end{aligned}$$

Ceci établit l'injection souhaitée. Nous avons maintenant terminé la preuve du théorème 3.1. □

3.3 Traces de fonctions dans $W^{m,p}(\Omega)$ sur la frontière de Ω

La détermination des espaces de fonctions définis sur le bord de Ω contenant les traces $u|_{\partial\Omega}$ des fonctions u dans $W^{m,p}(\Omega)$. Par exemple, si $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow C(\bar{\Omega})$, alors clairement $u|_{\partial\Omega}$ appartient à $C(\partial\Omega)$. Nous décrivons ci-dessous un théorème d'intégration L^q pour de telles traces qui peut être obtenu comme corollaire du théorème 3.1.

Le problème de la caractérisation de l'image de $W^{m,p}(\Omega)$ sous l'opérateur $u \rightarrow u|_{\partial\Omega}$ a été largement étudié par de nombreux auteurs. La solution, qui fait intervenir des espaces de Sobolev d'ordre fractionnaire m , sera donnée au chapitre VII (voir (3.5)). L'approche utilisée dans ce chapitre est due à Lions [6],[7]. Soit Ω un domaine dans $\mathbb{R}^n$ ayant la propriété C^m de régularité uniforme. Il existe donc un ouvert localement fini cover $\{U_j\}$ de $\partial\Omega$, et

transformations m -lisses correspondantes Ψ_j le carte $B = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\}$ dans U_j tel que $U_j \cap \partial\Omega = \Psi_j(B_0)$; $B_0 = \{y \in B : y_n = 0\}$. Si f est une fonction ayant un support dans U_j , on peut définir l'intégrale de f sur $\partial\Omega$ via

$$\int_{\partial\Omega} f(x) d\sigma = \int_{U_j \cap \partial\Omega} f(x) d\sigma = \int_{B_0} f \circ \Psi_j(y', 0) J_j(y') dy',$$

où $y' = (y_1, \dots, y_{n-1})$ et si $x = \Psi_j(y)$, alors

$$J_j(y') = \left\{ \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial(x_1, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_{n-1})} \right)^2 \right\}^{1/2} \Big|_{y_n=0}.$$

Si f est une fonction arbitraire définie sur $\partial\Omega$, on peut poser

$$\int_{\partial\Omega} f(x) d\sigma = \sum_j \int_{\partial\Omega} f(x) v_j(x) d\sigma$$

où $\{v_j\}$ est une partition d'unité pour $\partial\Omega$ subordonné à $\{U_j\}$.

Théorème 3.4. *soit Ω être un domaine dans $\mathbb{R}^n$ avoir l'uniforme C^m propriété de régularité, et supposons qu'il existe un simple (m, p) -opérateur d'extension E pour Ω . Si $mp < n$ et $p \leq q \leq (n-1)p/(n-mp)$, alors*

$$W^{m,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\partial\Omega). \quad (3.37)$$

Si $mp = n$, alors 3.37 attend pour $p \leq q < \infty$.

Démonstration. L'injection 3.37 doit être interprétée dans le sens suivant : Si $u \in W^{m,p}(\Omega)$, alors Eu a une trace sur $\partial\Omega$ au sens décrit, et $\|Eu\|_{0,q, \partial\Omega} \leq K\|u\|_{m,p,\Omega}$ avec K indépendant de u . [Notez que puisque $C_0(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$, $\|Eu\|_{0,q, \partial\Omega}$ est indépendant de l'opérateur d'extension particulier E utilisé.] Il suffit de prouver le théorème pour $mp < n$ et

$q = (n-1)p/(n-mp)$. Il existe une constante K_1 telle que pour tout $u \in W^{m,p}(\Omega)$

$$\|Eu\|_{m,p,\mathbb{R}^n} \leq K_1 \|u\|_{m,p,\Omega}.$$

Par les conditions de la propriété uniforme C^m -régularité (voir (3.5)), il existe une constante K_2 telle que pour chaque j et chaque $y \in B, x = \Psi_j(y) \in U_j$

$$|J_j(y')| \leq K_2 \text{ et } \left| \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right| \leq K_2.$$

En notant que $0 \leq v_j(x) \leq 1$ sur $\mathbb{R}^n$, et en utilisant l'injection 3.2 du théorème 3.1 appliqué sur B , on a pour $u \in W^{m,p}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_{bdry\Omega} |Eu(x)|^q d\sigma &\leq \sum_j \int_{U_j \cap bdry\Omega} |Eu(x)|^q d\sigma \\ &\leq K_2 \sum_j \|Eu \circ \Psi_j\|_{0,q,B_0}^q \\ &\leq K_3 \sum_j \left(\|Eu \circ \Psi_j\|_{m,p,B}^p \right)^{q/p} \\ &\leq K_4 \left(\sum_j \|Eu\|_{m,p,U}^p \right)^{q/p} \\ &\leq K_4 R \|Eu\|_{m,p,\mathbb{R}^n}^q \\ &\leq K_5 \|u\|_{m,p,\Omega}^q. \end{aligned}$$

L'avant-dernière inégalité ci-dessus utilise la propriété d'intersection finie possédée par la couverture $\{U_j\}$. La constante K_4 est indépendante de j puisque $|D^\alpha \Psi_{j,i}(y)| \leq c$ pour tout i, j , où $\Psi_j = (\Psi_{j,1}, \dots, \Psi_{j,n})$. Ceci achève la preuve. $\square$

3.4 $W^{m,p}(\Omega)$ comme une algèbre de Banach

Étant donné les fonctions u et v dans $W^{m,p}(\Omega)$, où Ω est un domaine dans $\mathbb{R}^n$, on ne peut pas en général s'attendre à ce que leur produit ponctuel uv appartienne à $W^{m,p}(\Omega)$. $[(uv)(x) = u(x)v(x)$ p.p. dans Ω .] Il s'agit cependant d'une application simple du théorème d'intégration de Sobolev pour montrer que c'est le cas à condition que $mp > n$ et que Ω ait la propriété de cône.

Théorème 3.5. *Soit Ω un domaine dans $\mathbb{R}^n$ ayant la propriété de cône. Si $mp > n$, alors il existe une constante K^* dépendant de m, p, n , et le cône fini C déterminant la propriété du cône pour Ω , tel que pour tout $u, v \in W^{m,p}(\Omega)$ le produit uv , défini ponctuellement p.p. en Ω , appartient à $W^{m,p}(\Omega)$ et vérifie*

$$\|uv\|_{m,p,\Omega} \leq K^* \|u\|_{m,p,\Omega} \|v\|_{m,p,\Omega}. \quad (3.38)$$

En particulier, $W^{m,p}(\Omega)$ est une algèbre de Banach commutative par rapport à la multiplication ponctuelle et à la norme équivalente

$$\|u\|_{m,p,\Omega}^* = K^* \|u\|_{m,p,\Omega}.$$

Démonstration. Afin d'établir 3.38 il suffit de montrer que si $|\alpha| \leq m$, alors

$$\int_{\Omega} |D^{\alpha}[u(x)v(x)]|^p dx \leq K_{\alpha} \|u\|_{m,p,\Omega}^p \|v\|_{m,p,\Omega}^p,$$

où $K = K(m, p, n, C)$. Supposons pour le moment que $u \in C^{\infty}(\Omega)$. Par la règle de Leibniz pour les dérivées distributionnelles, c'est-à-dire

$$D^{\alpha}[uv] = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\beta}u D^{\alpha-\beta}v,$$

il suffit de montrer que pour tout $\beta \leq \alpha, |\alpha| \leq m$, nous avons

$$\int_{\Omega} \left| D^{\beta} u(x) D^{\alpha-\beta} v(x) \right|^p dx \leq K_{\alpha,\beta} \|u\|_{m,p,\Omega}^p \|v\|_{m,p,\Omega}^p,$$

où $K_{\alpha,\beta} = K_{\alpha,\beta}(m, p, n, C)$. Par le théorème d'injection il existe, pour chaque β avec $|\beta| \leq m$, une constante $K(\beta) = K(\beta, m, p, n, C)$ telle que pour tout $w \in W^{m,p}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left| D^{\beta} w(x) \right|^r dx \leq K(\beta) \|w\|_{m,p,\Omega}^r \quad (3.39)$$

à condition $(m - |\beta|)p \leq n$ et $p \leq r \leq np/(n - (m - |\beta|)p)$ [ou $p \leq r < \infty$ si $(m - |\beta|)p = n$],
ou

$$\left| D^{\beta} w(x) \right| \leq K(\beta) \|w\|_{m,p,\Omega} \text{ p.p. dans } \Omega$$

à condition $(m - |\beta|)p > n$.

Soit k le plus grand entier tel que $(m - k)p > n$. Puisque $mp > n$ on a que $k \geq 0$. Si $|\beta| \leq k$, alors $(m - |\beta|)p > n$, donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| D^{\beta} u(x) D^{\alpha-\beta} v(x) \right|^p dx &\leq K(\beta)^p \|u\|_{m,p,\Omega}^p \|D^{\alpha-\beta} v\|_{0,p,\Omega}^p \\ &\leq K(\beta)^p \|u\|_{m,p,\Omega}^p \|v\|_{m,p,\Omega}^p. \end{aligned}$$

De même, si $|\alpha - \beta| \leq k$, aors

$$\int_{\Omega} \left| D^{\beta} u(x) D^{\alpha-\beta} v(x) \right|^p dx \leq K(\alpha - \beta)^p \|u\|_{m,p,\Omega}^p \|v\|_{m,p,\Omega}^p.$$

Maintenant si $|\beta| > k$ et $|\alpha - \beta| > k$, alors en fait, $|\beta| \geq k + 1$ et $|\alpha - \beta| \geq k + 1$ de sorte que $n \geq (m - |\beta|)p$ et $n \geq (m - |\alpha - \beta|)p$. De plus,

$$\begin{aligned} &\frac{n - (m - |\beta|)p}{n} + \frac{n - (m - |\alpha - \beta|)p}{n} \\ &= 2 - \frac{(2m - |\alpha|)p}{n} < 2 - \frac{mp}{n} < 1. \end{aligned}$$

Il existe donc des nombres positifs r, r' avec $(1/r) + (1/r') = 1$ tels que

$$p \leq rp < \frac{np}{n - (m - |\beta|)p}, \quad p \leq r'p < \frac{np}{n - (m - |\alpha - \beta|)p}.$$

Ainsi par l'inégalité de Hölder et 3.39 nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |D^{\beta}u(x)D^{\alpha-\beta}v(x)|^p dx &\leq \left[\int_{\Omega} |D^{\beta}u(x)|^{rp} dx \right]^{1/r} \left[\int_{\Omega} |D^{\alpha-\beta}v(x)|^{r'p} dx \right]^{1/r'} \\ &\leq [K(\beta)]^{1/r} [K(\alpha - \beta)]^{1/r'} \|u\|_{m,p,\Omega}^p \|v\|_{m,p,\Omega}^p \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve de 3.38 pour $u \in C^{\infty}(\Omega), v \in W^{m,p}(\Omega)$.

Si $u \in W^{m,p}(\Omega)$, puis par théorème 2.7 il existe une séquence $\{u_n\}$ de $C^{\infty}(\Omega)$ fonctions convergeant vers u dans $W^{m,p}(\Omega)$. Then by the above argument $\{u_nv\}$ est une suite de Cauchy dans $W^{m,p}(\Omega)$ converge donc vers un élément w de cet espace. Puisque $mp > n$, u et v peuvent être supposés continus et bornés sur Ω . Ainsi

$$\begin{aligned} \|w - uv\|_{0,p,\Omega} &\leq \|w - u_nv\|_{0,p,\Omega} + \|(u_n - u)v\|_{0,p,\Omega} \\ &\leq \|w - u_nv\|_{0,p,\Omega} + \|v\|_{0,\infty,\Omega} \|u_n - u\|_{0,p,\Omega} \\ &\rightarrow 0 \quad \text{as} \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Ans $w = uv$ dans $L^p(\Omega)$ et ainsi $w = uv$ au sens des distributions. Donc $w = uv$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ et

$$\|uv\|_{m,p,\Omega} = \|w\|_{m,p,\Omega} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_nv\|_{m,p,\Omega} = \|u\|_{m,p,\Omega} \|v\|_{m,p,\Omega}$$

Ceci achève la preuve du théorème. □

On remarque que l'algèbre de Banach $W^{m,p}(\Omega)$ a une identité si et seulement si Ω est bornée, c'est-à-dire que la fonction $e(x) \equiv 1$ appartient à $W^{m,p}(\Omega)$ si et seulement si $|\Omega| < \infty$, mais il n'y a pas de domaines bornées de volume fini ayant la propriété de cône.

3.5 Contre-exemples et théorèmes non imbriqués

L'examen de l'énoncé du théorème d'injection de Sobolev 3.1 peut amener le lecteur à spéculer sur plusieurs directions de généralisation possibles. Avant d'explorer la possibilité de prouver des théorèmes d'injection pour des domaines ne satisfaisant pas les conditions du théorème 3.1, nous construisons d'abord des exemples montrant qu'à certains égards ce théorème donne "le meilleur possible". injection les résultats pour les domaines considérés, et en fait pour n'importe quel domaine.

Soit Ω être un domaine arbitraire dans $\mathbb{R}^n$ et supposons, sans perte de généralité, que l'origine appartient à Ω . Soit $R > 0$ être tel que la boule fermée $\overline{B_{2R}}$ est contenu dans Ω . (Ici $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$.) Dans chacun des exemples suivants, nous construisons une fonction $u \in C^\infty(B_{3R} \setminus \{0\})$ ne dépendant que de $\rho = |x|$. Si $f \in C^\infty(0, \infty)$ satisfait $f(t) = 1$ si $t \leq R$ alors que $f(t) = 0$ si $t \geq 2R$, alors la fonction w définie par

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho = |x| \geq 3R \\ f(\rho)u(\rho) & \text{si } 0 < \rho < 3R \end{cases}.$$

a un support compact dans Ω et appartient à $W^{m,p}(\Omega)$ si et seulement si $u \in W^{m,p}(B_R)$.

Exemple 3.1. Soit k être un entier tel que $1 \leq k \leq n$ et supposons que $mp < n$ et $q > kp/(n - mp)$. Nous construisons u de sorte que $u \in W^{m,p}(B_R)$ mais $u \notin L^q(B_R^k)$, où $B_R^k = \{x \in B_R : x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$. Donc pas d'injection du type $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega^k)$ est possible si $q > kp/(n - mp)$.

Soit $u(x) = \rho^\lambda$, où $\rho = |x|$ et l'exposant λ , sera précisé ci-dessous. Elle se vérifie facilement par induction sur $|\alpha|$ que

$$D^\alpha u(x) = P_\alpha(x) \rho^{\lambda - 2|\alpha|} \quad (3.40)$$

où P_α est un polynôme homogène de degré $|\alpha|$ dans les composants de x . Ainsi $|D^\alpha u(x)| \leq$

$K_a \rho^{\lambda-|\alpha|}$ et

$$\int_{B_R} |D^\alpha u(x)|^p dx \leq c \int_0^R \rho^{(\lambda-|\alpha|)p+n-1} dx.$$

Donc u appartient à $W^{m,p}(B_R)$ à condition

$$(\lambda - m)p + n > 0. \quad (3.41)$$

D'autre part, si $\sigma = (x_1^2 + \dots + x_k^2)^{1/2}$, alors

$$\int_{B_{R^k}} |u(x)|^q dx_1 \dots dx_k = c \int_0^R \sigma^{\lambda q + k - 1} d\sigma$$

de sorte que $u \notin L^q(B_R^k)$ si

$$\lambda q + k < 0. \quad (3.42)$$

Puisque $q > kp/(n - mp)$, il est possible de sélectionner λ pour satisfaire à la fois 3.41 et 3.42 comme demandé.

– Puisque la fonction u construite ci-dessus est illimitée près de 0, pas d'injection de la forme $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow C_B^0(\Omega)$ est possible si $mp < n$.

Exemple 3.2. Supposons $p > 1$ et $mp = n$. Nous construisons $u \in W^{m,p}(B_R)$ tel que $u \notin L^\infty(B_R)$. D'où les imbrications $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$, valable $p \leq q < \infty$ si $mp = n$ et Ω a la propriété de cône, ne peut pas être étendu pour donner $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)$ ou $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow C_B^0(\Omega)$ sauf si $p = 1$ et $n = m$.

Soit $u(x) = \log(\log 4R/\rho)$, où $\rho = |x|$. Clairement $u \notin L^\infty(B_R)$. Encore une fois, il est facile de vérifier par induction que

$$D^\alpha u(x) = \sum_{j=1}^{|\alpha|} P_{\alpha,j}(x) \rho^{-2|\alpha|} [\log(4R/\rho)]^{-j}, \quad (3.43)$$

où $P_{\alpha,j}$ est un polynôme homogène de degré $|\alpha|$ dans les composants de x . Puisque $p = n/m$

on a

$$|D^\alpha u(x)|^p \leq \sum_{j=1}^{|\alpha|} K_{\alpha,j} \rho^{-|\alpha|n/m} [\log(4R/\rho)]^{-jp},$$

de sorte que

$$\int_{B_R} |D^\alpha u(x)|^p dx \leq c \sum_{j=1}^{|\alpha|} \int_0^R [\log(4R/\rho)]^{-jp} \rho^{-|\alpha|n/m+n-1} d\rho.$$

Le côté droit de l'inégalité ci-dessus est certainement fini si $|\alpha| < m$. Si $|\alpha| = m$, nous avons, pour $\sigma = \log(4R/\rho)$,

$$\int_{B_R} |D^\alpha u(x)|^p dx \leq c \sum_{j=1}^{|\alpha|} \int_{\log 4}^{\infty} \sigma^{-jp} d\sigma$$

qui est fini puisque $p > 1$. Ainsi $u \in W^{m,p}(B_R)$.

Il est intéressant de noter que la fonction u ci-dessus est indépendante du choix de m et p avec $mp = n$.

Exemple 3.3. Supposons $mp > n > (m-1)p$, et soit $\lambda > m - (n/p)$. Nous construisons $u \in W^{m,p}(B_R)$ tel que $u \notin C^{0,\lambda}(\overline{B_R})$. Donc pas d'injection de la forme $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ est possible si $mp > n > (m-1)p$ et $\lambda > m - (n/p)$.

Comme dans l'exemple 3.1 nous prenons $u(x) = \rho^\mu$, $\rho = |x|$. De 3.41 on a $u \in W^{m,p}(B_R)$ à condition $\mu > m - (n/p)$. Maintenant $|u(x) - u(0)|/|x - 0|^\lambda = \rho^{\mu-\lambda}$ tel que $u \notin C^{0,\lambda}(\overline{B_R})$ quand $\mu < \lambda$. Ainsi u a les propriétés requises si nous choisissons μ pour satisfait $m - (n/p) < \mu < \lambda$.

Exemple 3.4. Supposons $(m-1)p = n$ et $p > 1$. Nous construisons $u \in W^{m,p}(B_R)$ tel que $u \notin C^{0,1}(\overline{B_R})$. Ainsi l'injection $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$, valable pour $0 < \lambda < 1$ quand Ω possède la propriété Lipschitz locale forte, ne peut pas être étendu à $\lambda = 1$ sauf si $p = 1$, $m - 1 = n$. Soit $u(x) = \rho \log(\log 4R/\rho)$ où $\rho = |x|$. Puisque

$$|u(x) - u(0)|/|x - 0| = \log(\log 4R/\rho) \rightarrow \infty \quad \text{quand } x \rightarrow 0$$

il est clair que $u \notin C^{0,1}(\overline{B_R})$. Suivant 3.40 et 3.43 on a

$$D^\alpha u(x) = \sum_{j=1}^{|\alpha|} P_{\alpha,j}(x) \rho^{1-2|\alpha|} [\log(4R/\rho)]^{-j},$$

où $P_{\alpha,j}$ est un polynôme homogène de degré $|\alpha|$. Ainsi

$$|D^\alpha u(x)|^p \leq \sum_{j=1}^{|\alpha|} K_{\alpha,j} \rho^{p(1-|\alpha|)} [\log(4R/\rho)]^{-jp}.$$

Il s'ensuit alors comme dans l'exemple 3.2 que $u \in W^{m,p}(B_R)$.

Les exemples ci-dessus montrent que même pour des domaines très réguliers, il ne peut exister d'injection des types considérés dans le théorème 3.1, à l'exception de ceux qui y sont explicitement énoncés. Il reste à voir si des injections de ces types peuvent exister pour des domaines irréguliers n'ayant pas la propriété du cône. Nous montrerons que le théorème 3.1 peut être étendu, avec des conclusions affaiblies, à certains types de tels domaines irréguliers, mais nous montrons d'abord qu'aucune extension n'est possible si le domaine est "trop irrégulier". Un domaine bornée Ω dans $\mathbb{R}^n$ peut avoir une frontière lisse et toujours ne pas avoir la propriété de cône s'il devient réduit à l'infini, c'est-à-dire si

$$\lim_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ x \in \Omega}} \text{dist}(x, \partial\Omega) = 0.$$

Le théorème suivant montre que les parties **I** et **II** du théorème 3.1 échouent complètement pour tout Ω non borné de volume fini.

Théorème 3.6. Soit Ω un domaine non borné dans $\mathbb{R}^n$ de volume fini, et soit $q > p$. Alors $W^{m,p}(\Omega)$ n'est pas plongé dans $L^q(\Omega)$.

Démonstration. On construit une fonction $u(x)$, en fonction uniquement de la distance $\rho = |x|$ de x depuis l'origine, dont la croissance à mesure que ρ augmente est suffisamment rapide pour empêcher l'appartenance de u à $L^q(\Omega)$ mais pas assez rapide pour empêcher $u \in W^{m,p}(\Omega)$.

Sans perte de généralité on suppose $\text{vol } \Omega = 1$. Soit $A(\rho)$ désigner la surface $[(n-1)\text{-mesure}]$ de l'intersection de Ω avec la surface sphérique de rayon ρ centrée à l'origine. Alors

$$\int_0^\infty A(\rho) d\rho = 1$$

Soit $r_0 = 0$ et définir r_n pour $n = 1, 2, \dots$ par

$$\int_{r_n}^\infty A(\rho) d\rho = 1/2^n = \int_{r_{n-1}}^{r_n} A(\rho) d\rho.$$

Clairement r_n décroissant à l'infini avec n . Soit $\Delta r_n = r_{n+1} - r_n$ et fixons ε tel que $0 < \varepsilon < [1/(mp)] - [1/(mq)]$. Il doit exister une suite croissante $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ tel que $\Delta r_n \geq 2^{-\varepsilon n_j}$, pour autrement $\Delta r_n < 2^{-\varepsilon n}$ pour toutes mais peut-être un nombre fini de valeurs de n d'où nous aurions $\sum_{n=0}^\infty \Delta r_n < \infty$, une contradiction. Par commodité, nous supposons $n_1 \geq 1$ de sorte que $n_j \geq j$ pour tout j . Soit $a_0 = 0$, $a_j = r_{n_j+1}$, et $b_j = r_{n_j}$. Noter que $a_{j-1} \leq b_j < a_j$ et $a_j - b_j = \Delta r_{n_j} \geq 2^{-\varepsilon n_j}$.

Soit f une fonction non négative, infiniment différentiable sur $\mathbb{R}$ ayant les propriétés :

- (i) $0 \leq f(t) \leq 1$ pour tout t ,
- (ii) $f(t) = 0$ si $t \leq 0$, $f(t) = 1$ si $t \geq 1$,
- (iii) $|(d/dt)^k f(t)| \leq M$ pour tout t si $1 \leq k \leq m$.

Si $x \in \Omega$ et $\rho = |x|$, posons

$$u(x) = \begin{cases} 2^{n_{j-1}/q} & \text{pour } a_{j-1} \leq \rho \leq b_j \\ 2^{n_{j-1}/q} + \left(2^{n_j/q} - 2^{n_{j-1}/q}\right) f\left(\frac{\rho-b_j}{a_j-b_j}\right) & \text{pour } b_j \leq \rho \leq a_j. \end{cases}$$

Clairement $u \in C^\infty(\Omega)$. Dénnotant $\Omega_j = \{x \in \Omega : a_{j-1} \leq \rho \leq a_j\}$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_j} |u(x)|^p dx &= \left\{ \int_{a_{j-1}}^{b_j} + \int_{b_j}^{a_j} \right\} [u(x)]^p A(\rho) d\rho \\ &\leq 2^{n_{j-1}p/q} \int_{a_{j-1}}^\infty A(\rho) d\rho + 2^{n_j p/q} \int_{b_j}^{a_j} A(\rho) d\rho \\ &= \frac{1}{2} \left[2^{-n_{j-1}(1-p/q)} + 2^{-n_j(1-p/q)} \right] \leq 2^{-(j-1)(1-p/q)}. \end{aligned}$$

Puisque $p < q$ les forces d'inégalité ci-dessus

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\Omega_j} |u(x)|^p dt < \infty.$$

Aussi, si $1 \leq k \leq m$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_j} \left| \frac{d^k u}{d\rho^k} \right|^p dx &= \int_{b_j}^{a_j} \left| \frac{d^k u}{d\rho^k} \right|^p A(\rho) d\rho \\ &\leq M^p 2^{n_j p/q} [a_j - b_j]^{-k_p} \int_{b_j}^{a_j} A(\rho) d\rho \\ &= \frac{1}{2} M^p 2^{-n_j(1-p/q-\varepsilon k p)} \leq \frac{1}{2} M^p 2^{-c_j}, \end{aligned}$$

où $C = 1 - p/q - \varepsilon k p > 0$ puisque $\varepsilon < [1/(mp)] - [1/(mq)]$. Ainsi $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ pour $|\alpha| \leq m$, c'est, $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Cependant, $u \notin L^q(\Omega)$, car nous avons pour chacun j ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_j} |u(x)|^q dx &\geq 2^{n_{j-1}} \int_{a_{j-1}}^{a_j} A(\rho) d\rho \\ &= 2^{n_{j-1}} \left[2^{-n_{j-1}-1} - 2^{-n_j-1} \right] \geq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Donc $W^{m,p}(\Omega)$ ne peut pas être injecté dans $L^q(\Omega)$. □

Les conclusions du théorème ci-dessus peuvent être étendues (voir (3.5)) aux domaines non bornés Ω de volume infini mais satisfaisant

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \text{vol}\{x \in \Omega : N \leq |x| \leq N + 1\} = 0.$$

Les parties **I** et **II** du théorème 3.1 échouent également complètement pour les domaines avec des cuspidés de frontière suffisamment nettes. Si Ω est un domaine dans $\mathbb{R}^n$ et x_0 est un point sur la frontière de Ω , soit $B_r = B_r(x_0)$ la boule ouverte de rayon r autour de x_0 , soit $\Omega_r = B_r \cap \Omega$, soit $S_r = \partial B_r \cap \Omega$, et soit $A(r, \Omega)$ la surface $[(n-1)\text{-mesure}]$ de S_r . On dira que Ω a une cuspide exponentielle en $x_0 \in \partial\Omega$ si pour tout réel k , on a

$$\lim_{r \rightarrow 0+} \frac{A(r, \Omega)}{r^k} = 0. \quad (3.44)$$

Théorème 3.7. *Si Ω est un domaine dans $\mathbb{R}^n$ ayant une cuspide exponentielle au point x_0 sur $\partial\Omega$, et si $q > p$, alors $W^{m,p}(\Omega)$ n'est pas injecté dans $L^q(\Omega)$.*

Appendices

Une injection linéaire naturelle d'un espace normé X dans son second espace dual $X'' = (X')'$ est fournie par l'application J_X dont la valeur en $x \in X$ est donnée par

$$J_X x(x') = x'(x), \quad x' \in X'.$$

Puisque $|J_X x(x')| \leq \|x'; X'\| \|x; X\|$ on a

$$\|J_X x; X''\| \leq \|x; X\|.$$

D'autre part, le théorème de Hahn-Banach nous assure que pour tout $x \in X$ on peut trouver un $x' \in X'$ tel que $\|x'; X'\| = 1$ et $x'(x) = \|x; X\|$. Ainsi

$$\|J_X x; X''\| = \|x; X\|,$$

et J_X est un isomorphisme isométrique de X dans X'' .

Si le domaine de l'isomorphisme est tout l'espace X'' , on dit que l'espace normé X est réflexif. Un espace réflexif doit être complet et donc un espace de Banach.

Théorème .1. *Un ensemble A est précompact dans un espace de Banach séparable X si et seulement si pour tout nombre positif ε il existe un sous-ensemble fini N_ε de points de X avec la propriété*

$$A \subset \bigcup_{y \in N_\varepsilon} B_\varepsilon(y)$$

Un ensemble N_ε avec cette propriété est appelé un ε -net fini pour A .

Convexité uniforme

Tout espace normé est localement convexe par rapport à sa topologie de norme. La norme sur X est dite uniformément convexe si pour tout nombre ε vérifiant $0 < \varepsilon \leq 2$ il existe un nombre $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que si $x, y \in X$ vérifient $\|x; X\| = \|y; X\| = 1$ et $\|x - y; X\| \geq \varepsilon$, puis $\|(x + y)/2; X\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$. L'espace normé X est lui-même appelé «uniformément convexe»

dans ce cas. Il faut cependant noter que la convexité uniforme est une propriété de la norme ε - X peut posséder une norme équivalente qui n'est pas uniformément convexe. Tout espace normable est dit «uniformément convexe» s'il possède une norme uniformément convexe. La loi du parallélogramme (2) montre qu'un espace de Hilbert est uniformément convexe.

Théorème .2. *Un espace de Banach uniformément convexe est réflexif. Les deux théorèmes suivants seront utilisés pour établir la séparabilité, la réflexivité et la convexité uniforme des espaces de Sobolev introduits au chapitre III.*

Corollaire .1. *Si Ω est borné dans $\mathbb{R}^n$, alors l'ensemble P de tous les polynômes de $x = (x_1, \dots, x_n)$ ayant des coefficients rationnels complexes est dense dans $C(\bar{\Omega})$. ($c \in \mathbb{C}$ est un complexe rationnel si $c = c_1 + ic_2$, où c_1 et c_2 sont des nombres rationnels). Donc $C(\bar{\Omega})$ est séparable.*

Théorème .3 (Théorème d'Ascoli-Arzelà). *Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$. Un sous-ensemble K de $C(\bar{\Omega})$ est précompact dans $C(\bar{\Omega})$ pourvu que les deux conditions suivantes soient remplies :*

- (i) *Il existe une constante M telle que pour tout $\phi \in K$ et $x \in \Omega$, $|\phi(x)| \leq M$.*
- (ii) *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $\phi \in K$, $x, y \in \Omega$, et $|x - y| < \delta$, alors $|\phi(x) - \phi(y)| < \varepsilon$.*

Ce qui suit est un théorème d'intégration simple pour les espaces introduits ci-dessus.

Théorème .4. (a) *Si f est mesurable, tout comme $|f|$.*

(b) *Si f et g sont mesurables et ont une valeur réelle, alors le sont aussi $f + g$ et fg .*

(c) *Si $\{f_n\}$ est une suite de fonctions mesurables, alors $\sup_n f_n, \inf_n f_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$, and $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ are measurable.*

(d) *Si f est continue et définie sur un ensemble mesurable, alors f est mesurable.*

(e) *Si f est continu sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et g est mesurable et à valeurs réelles, alors la fonction composée $f \circ g$ Défini par $f \circ g(x) = f(g(x))$ est mesurable.*

(f)(théorème de Lusin) Si f est mesurable et $f(x) = 0$ pour $x \in A^c$ où $\mu(A) < \infty$, et si $\varepsilon > 0$, alors il existe une fonction $g \in C_0(A)$ tel que $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$ et $\mu\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon$.

Théorème .5. Étant donné une fonction f à valeurs réelles de domaine $A \subset \mathbb{R}^n$, il existe une séquence $\{s_n\}$ de fonctions simples convergeant ponctuellement vers f sur A . Si f est borné, $\{s_n\}$ peut être choisi de sorte que la convergence est uniforme. Si f est mesurable, chaque s_n peut être choisi comme mesurable. Si f est une valeur non négative, la séquence $\{s_n\}$ peut être choisie pour être croissante de façon monotone à chaque point.

Lemme .1 (Lemme de Fatou). Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ être mesurable et laisser $\{f_n\}$ être une séquence de fonctions non négatives et mesurables

$$\int_A \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) dx.$$

Théorème .6 (Théorème de convergence dominé). Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ être mesurable et les $\{f_n\}$ être une séquence de fonctions mesurables convergeant vers une limite ponctuelle sur A . S'il existe une fonction $g \in L^1(A)$ tel que $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour tout n et tout $x \in A$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) dx = \int_A \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx.$$

Théorème .7. Soient X un espace de Banach et M un sous-espace de X fermé par rapport à la topologie normale sur X . Alors M est lui-même un espace de Banach sous la norme héritée de X . De plus,

- (i) M est séparable si X est séparable,
- (ii) M est réflexif si X est réflexif,
- (iii) M est uniformément convexe si X est uniformément convexe.

La complétude, la séparabilité et la convexité uniforme de M découlent facilement des propriétés correspondantes pour X . La réflexivité de M est une conséquence du théorème

1.17 et du fait que M , étant fermé et convexe, est fermé dans la topologie faible de X .

Théorème .8. *Pour $j = 1, 2, \dots, n$ soit X_j un espace de Banach de norme $\|\cdot\|_j$. Le produit cartésien $X = \prod_{j=1}^n X_j$, composé de points $x = (x_1, \dots, x_n)$ avec $x_j \in X_j$, est un espace vectoriel sous les définitions*

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad cx = (cx_1, \dots, cx_n),$$

et est un espace de Banach par rapport à l'une des normes équivalentes

$$\|x\|_{(p)} = \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|_j^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$
$$\|x\|_{(\infty)} = \max_{1 \leq j \leq n} \|x_j\|_j.$$

De plus,

- (i) *si X_j est séparable pour $1 \leq j \leq n$, alors X est séparable ;*
 - (ii) *si X_j est réflexif pour $1 \leq j \leq n$, alors X est réflexif ;*
 - (iii) *si X_j est uniformément convexe pour $1 \leq j \leq n$, alors X est uniformément convexe.*
- Plus précisément, $\|\cdot\|_p$ est une norme uniformément convexe sur X pourvu que $1 < p < \infty$.*

Le lecteur pourra vérifier que les fonctionnelles $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, sont bien des normes sur X et que X est complet par rapport à chacune d'elles. L'équivalence des normes découle des inégalités

$$\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_p \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_{\infty}.$$

La séparabilité et la convexité uniforme de X se déduisent aisément des propriétés correspondantes des espaces X_j . La réflexivité de X découle de celle de X_j , $1 \leq j \leq n$, via un isomorphisme naturel entre X' et $\prod_{j=1}^n X'_j$.

Théorème .9 (Théorème de convergence monotone). *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ mesurable, et $\{f_n\}$ une suite de fonctions mesurables vérifiant $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$ pour tout $x \in A$. Alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) dx = \int_A \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx.$$

Une fonction u définie presque partout sur Ω est dite localement intégrable sur Ω pourvu que $u \in L^1(A)$ pour tout mesurable $A \subset\subset \Omega$. Dans ce cas, on écrit $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. A chaque $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ correspond une distribution $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ définie par

$$T_u(\phi) = \int_{\Omega} u(x)\phi(x)dx, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Il est clair que T_u , ainsi défini, est une fonctionnelle linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Pour voir qu'il est continu supposons que $\phi_n \rightarrow \phi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Alors il existe $K \subset\subset \Omega$ tel que $\text{supp}(\phi_n - \phi) \subset K$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$. Ainsi

$$|T_u(\phi_n) - T_u(\phi)| \leq \sup_{x \in K} |\phi_n(x) - \phi(x)| \int_K |u(x)| dx.$$

Le membre droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$ puisque $\phi_n \rightarrow \phi$ uniformément sur K .

Nous définissons maintenant la notion de dérivée faible d'une fonction localement intégrable. Soit $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Il peut exister ou non une fonction $v_{\alpha} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ telle que $T_{v_{\alpha}} = D^{\alpha}(T_u)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Si un tel v_{α} existe, elle est unique à des ensembles de mesure près de zéro et elle est appelée la dérivée partielle faible ou distributionnelle de u et est notée $D^{\alpha}u$. Ainsi $D^{\alpha}u = v_{\alpha}$ au sens faible (distributionnel) à condition que $v_{\alpha} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ satisfait

$$\int_{\Omega} u(x) D^{\alpha} \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_{\alpha}(x) \phi(x) dx$$

pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Si u est suffisamment lisse pour avoir une dérivée partielle continue $D^{\alpha}u$ au sens usuel

(classique), alors $D^\alpha u$ est aussi une dérivée partielle distributionnelle de u . Bien sûr $D^\alpha u$ peut exister au sens distributionnel sans exister au sens classique. Par exemple, une fonction u , continue sur $\mathbb{R}$, qui a une dérivée bornée u' sauf en un nombre fini de points, a une dérivée au sens distributionnel. Nous montrerons dans le Théorème 2.33 que les fonctions ayant des dérivées faibles peuvent être convenablement approchées par des fonctions lisses.

Si $0 < \lambda \leq 1$, on définit $C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ comme étant le sous-espace de $C^m(\bar{\Omega})$ constitué des fonctions ϕ pour lesquelles, pour $0 \leq |\alpha| \leq m$, $D^\alpha \phi$ vérifie dans Ω une condition de Holder d'exposant λ , c'est-à-dire qu'il existe une constante K telle que

$$|D^\alpha \phi(x) - D^\alpha \phi(y)| \leq K|x - y|^\lambda, \quad x, y \in \Omega.$$

$C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ est un espace de Banach de norme donnée par

$$\|\phi; C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})\| = \|\phi; C^m(\bar{\Omega})\| + \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|D^\alpha \phi(x) - D^\alpha \phi(y)|}{|x - y|^\lambda}.$$

Il convient de noter que pour $0 < v < \lambda \leq 1$,

$$C^{m,\lambda}(\bar{\Omega}) \subsetneq C^{m,v}(\bar{\Omega}) \subsetneq C^m(\bar{\Omega}).$$

Il est également clair que $C^{m,1}(\bar{\Omega}) = C^{m+1}(\bar{\Omega})$. En général $C^{m+1}(\bar{\Omega}) \not\subset C^{m,1}(\bar{\Omega})$ non plus, mais l'inclusion est possible pour certains domaines Ω , par exemple les domaines convexes comme on peut le voir en faisant appel à la valeur moyenne théorème.

Si Ω est borné, les deux théorèmes bien connus suivants fournissent des critères utiles pour la densité et la compacité des sous-ensembles de $C(\bar{\Omega})$. Si $\phi \in C(\bar{\Omega})$, on peut considérer ϕ comme défini sur $\bar{\Omega}$, c'est-à-dire qu'on identifie ϕ avec son unique extension continue à la clôture de Ω .

Ω a la propriété de cône s'il existe un cône fini C tel que chaque point $x \in \Omega$ soit le sommet d'un cône fini C_x contenu dans Ω et conforme à C . (Notez que C_x n'a pas besoin

d'être obtenu à partir de C par translation parallèle, juste par un mouvement rigide.)

Ω a la propriété Lipschitz locale forte à condition qu'il existe des nombres positifs δ et M , une couverture ouverte localement finie $\{U_j\}$ de $\text{bdry } \Omega$, et pour chaque U_j une fonction à valeurs réelles f_j de $n - 1$ variables réelles, telles que les conditions suivantes soient remplies :

- (i) Pour un R fini, toute collection de $R + 1$ des ensembles U_j une intersection vide.
- (ii) Pour tout couple de points $x, y \in \Omega_\delta = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}$ tel que $|x - y| < \delta$ il existe j tel que

$$x, y \in \mathcal{V}_j = \{x \in U_j : \text{dist}(x, \partial U_j) > \delta\}.$$

- (iii) Chaque fonction f_j satisfait une condition de Lipschitz de constante M :

$$|f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) - f(\eta_1, \dots, \eta_{n-1})| \leq M |(\xi_1 - \eta_1, \dots, \xi_{n-1} - \eta_{n-1})|.$$

- (iv) Pour un système de coordonnées cartésiennes $(\xi_{j,1}, \dots, \xi_{j,n})$ dans U_j l'ensemble $\Omega \cap U_j$ est représenté par l'inégalité

$$\xi_{j,n} < f_j(\xi_{j,1}, \dots, \xi_{j,n-1}).$$

On remarque que si Ω est borné, les conditions assez compliquées ci-dessus se réduisent à la simple condition que Ω ait localement un bord Lipschitz, c'est-à-dire que chaque point x sur le bord de Ω doit avoir un voisinage U_x tel que $\partial\Omega \cap U_x$ est le graphe d'une fonction continue de Lipschitz.

Ω a la propriété de régularité uniforme C^m s'il existe une couverture ouverte localement finie $\{U_j\}$ de $\partial\Omega$, et une séquence correspondante $\{\Phi_j\}$ de m -transformations biunivoques lisses avec Φ_j prenant U_j sur $B = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\}$, tel que :

- (i) Pour certains $\delta > 0$, $\bigcup_{j=1}^\infty \Psi_j \left(\left\{ y \in \mathbb{R}^n : |y| < \frac{1}{2} \right\} \right) \supset \Omega_\delta$, où $\Psi_j = \Phi_j^{-1}$.
- (ii) Pour un R fini, toute collection de $R + 1$ des ensembles U_j a une intersection vide. For some finite R , every collection of $R + 1$ of the sets has empty intersection.

(iii) Pour chaque j , $\Phi_j(U_j \cap \Omega) = \{y \in B : y_n > 0\}$.

(iv) Si $(\phi_{j,1}, \dots, \phi_{j,n})$ et $(\psi_{j,1}, \dots, \psi_{j,n})$ dénotons respectivement les composantes de Φ_j et Ψ_j , alors il existe un M fini tel que pour tout α , $|\alpha| \leq m$, pour tout i , $1 \leq i \leq n$, et pour tout j , on

$$|D^\alpha \phi_{j,i}(x)| \leq M, \quad x \in U_j$$

$$|D^\alpha \psi_{j,i}(y)| \leq M, \quad y \in B.$$

Théorème .10. *Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ ayant la propriété de cône. Pour tout $\rho > 0$ il existe une collection finie $\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m\}$ d'ouverts de Ω tel que $\Omega = \bigcup_{j=1}^m \Omega_j$, et tel que à chaque Ω_j correspond un sous-ensemble A_j de $\bar{\Omega}_j$ ayant un diamètre n'excédant pas ρ , et un parallélépipède ouvert P_j avec un sommet en 0, tel que $\Omega_j = U_{x \in A_1}(x + P_j)$. De plus, si ρ est suffisamment petit, alors chaque Ω_j possède la propriété Lipschitz locale forte.*

Pour $1 \leq p < \infty$ et pour les entiers j , $0 \leq j \leq m$, on introduit les fonctionnelles $|\cdot|_{j,p}$ sur $W^{m,p}(\Omega)$ comme suit :

$$|u|_{j,p} = |u|_{j,p,\Omega} = \left\{ \sum_{|\alpha|=j} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Evidament, $|u|_{0,p} = \|u\|_{0,p} = \|u\|_p$ est la norme de u dans $L^p(\Omega)$ et

$$\|u\|_{m,p} = \left\{ \sum_{0 \leq j \leq m} |u|_{j,p}^p \right\}^{1/p}.$$

Si $j \geq 1$, $|\cdot|_{j,p}$ est une semi-norme-elle a toutes les propriétés d'une norme sauf que $|u|_{j,p} = 0$ n'implique pas que u s'annule dans $W^{m,p}(\Omega)$; par exemple, u peut être une constante non nulle sur un domaine Ω de volume fini. Dans certaines circonstances que nous étudierons plus tard, $|\cdot|_{m,p}$ est une norme équivalente pour l'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$. En particulier, c'est le cas si Ω est borné.

Il s'agit pour l'instant d'établir des inégalités d'interpolation de la forme

$$|u|_{j,p} \leq K\varepsilon |u|_{m,p} + K\varepsilon^{-j/(m-j)} |u|_{0,p},$$

où $0 \leq j \leq m-1$. Le lemme suivant montre qu'en général il suffit d'établir pour le cas particulier $j=1, m=2$, une réduction qui sera utilisée dans les trois théorèmes d'interpolation qui suivent.

Considérons les implications du corollaire ci-dessus. Si l'imbrication (38) existe pour certains $q > p$, alors l'une des alternatives suivantes doit être vérifiée :

- (a) Il existe $\varepsilon > 0$ et une translation T de $\mathbb{R}^n$ constituée de cubes de taille fixe telle que $\mu(H \cap \Omega) \geq \varepsilon$ pour une infinité de cubes $H \in T$.
- (b) Pour tout $\lambda > 0$ et tout pavage T de $\mathbb{R}^n$ par des cubes de taille fixe, T ne contient qu'un nombre fini de cubes λ - gras.

Théorème .11. *Supposons que le injection (39) existe pour certains p, q tels que $1 \leq q < p$. Alors Ω est de volume fini.*

Théorème .12. *Soit $1 < p < \infty$ et soit Ω satisfait les conditions prescrites ci-dessus. Alors l'application γ donnée par (37) se prolonge par continuité en un isomorphisme et homéomorphisme de $W^{m,p}(\Omega)/\ker \gamma$ sur*

$$\prod_{k=0}^{m-1} W^{m-k-1/p,p}(\partial\Omega).$$

Théorème .13. *L'espace dual $[E_A(\Omega)]'$ de $E_A(\Omega)$ est isomorphe et homéomorphe à $L_\lambda(\Omega)$.*

Théorème .14. *Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ ayant la propriété de cône. Soit $mp = n$ et $p > 1$. Posons*

$$A(t) = \exp \left[t^{n/(n-m)} \right] - 1 = \exp \left[t^{p/(p-1)} \right] - 1.$$

Alors il existe l'injection

$$W^{m,p}(\Omega) \rightarrow L_A(\Omega).$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. B. Morrey, Functions of several variables and absolute continuity, 11, Duke J. Math. 6 (1940), 187-215.
- [2] E. Gagliardo, Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili, Ricerche Mat. 7(1958), 102-137.
- [3] E. Hewitt and K. Stromberg, "Real and Abstract Analysis," Springer-Verlag, New York, 1969.
- [4] J. A. Clarkson, Uniformly convex spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), 396-414.
- [5] J. Deny and J. L. Lions, Les espaces du type de Beppo Levi, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 5 (1955), 305-370.
- [6] J. L. Lions, Sur les espaces d'interpolation; dualité, Matit. Scaul. 9 (1961), 147 I 7.
- [7] J. L. Lions, Théorèmes de traces d'interpolation (IV), Math. Ann. 151 ([963), 42-56.
- [8] J. L. Lions, Problèmes aux Limites dans les équations aux-Dérivées Partielles,(Seminar notes), Univ. of Montreal Press, 1965.
- [9] N. Meyers and J. Serrin, $H = W$, Proc. Nat. Acad. Sci. US, 4 51 (I 964), 1055-1056.
- [10] S. L. Sobolev, On a theorem of functional analysis, Mat. Sb. 46 (1938), 471-496.
- [11] W. Rudin, "Real and Complex Analysis," McGraw-Hill, New York, 1966.*