



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Amar Téliidji de Laghouat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique

PROJET DE FIN D'ETUDE (Licence)

Domaine : Mathématiques informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques

Thème

Résolution analytique de l'équation des ondes en dimension un

Présentée par :

M^{elle} N. Belghechoua & *M^{elle}* I. Laidi

Encadré par : Dr. NOUIRI Brahim

Année universitaire 2014/2015

Remerciements

Ce projet a été réalisé au sein du laboratoire d'Informatique et de Mathématiques (LIM) à l'université de Laghouat sous la direction de Monsieur NOURI Brahim, Maître de conférences à l'université de Laghouat. Je tien à le remercier pour leur disponibilité leurs conseils et pour avoir guidé ce travail avec beaucoup d'intérêt. Mes remerciements s'adressent a Monsieur Lagraa Nacereddine chef de laboratoire d'Informatique et de Mathématiques d'avoir disponibilité tous les moyens de laboratoire durant la période de la préparation de ce projet. Je remercie les membres du Jury pour leurs acceptations d'examiner ce projet. Mes derniers et profonds remerciements vont à mes chers parents à qui je dédie ce travail ainsi qu'à toute ma famille et mes amis pour leur grand soutien. Aussi, je remercie tout mes collègues et aux qui m'ont aidé de près ou de loin en vue de réaliser ce projet.

Dédicaces

Je voudrais dédier ce modeste de travail :

A ma très chère mère "Rekaya" et mon très chère père "El hadj selimane" qui m'ont tant soutenu et encouragé pendant tout de ma période d'étude.

A mes Sœur "Khadidja, Aouali, Houria, Fatima et son marie Abasse, Rabia et son marie Allal"

A mes frère "Mohammed , Kada, Mabrouk et sa femme Regia"

A ma binôme Iness et tous mes amies spécialement : Wafaa, Imen et son marie Ismail et leurs fils Abdou,

Maria, Manal, Taymoucha, Amina, Ibtissam, Akila, Fatima G, Nihad, Karima, Fatima T , Maroua, Hanane, wafaa S.

A tous membres des Familles "mes oncles, mes tentes et leurs enfants, surtout mon grand père "Abd El Kader".

A mon prof "Ali Gandouzi".

Sans oublier les enfants "Samsouma, Issam, Ayoub, Nana, Isslam"

A toute la promotion 2015 de Mathématique.

Nour El Houda

Je dédie ce modeste travail à :

*A ma précieuse mère :Fatna ;honorable ;aimable :tu représentés pour moi le symbole de la
bonté par excellence,*

*Mon père Mohamed pour leur présence, pour leurs aides,encouragements et conseils durant ma
formation et mes études*

*Mes chères Nahouda et Rima qui mon aide et encourager dans tous les instants. Mes chères
sœurs Nesrin, israaa et la petit oumniya*

Mon cher frère Ayoub

A tout ma chère famille Laidi et Serghini

A ma binôme Nour el houda qui a partagé avec moi les moments difficiles de ce travail

A tous mes

amies :zineb,sara,fella,zahro,soumaya,karima,maroua,amina,fatima,kheira,meryam.

*Sans oublier toute la section de 3ème année licence 2014/2015. A Tous qui mon aide de loin ou
de pris pour réaliser ce travail.*

Iness Zahrat l'islem

Résumé

*D*ans ce projet, nous avons résolu analytiquement l'équation des ondes dans \mathbb{R} et dans un segment. Notre projet se décompose en deux chapitres :

- ☞ Équation des ondes dans \mathbb{R} ,
- ☞ Équation des ondes dans un segment.

Table des matières

1	Équation des ondes dans \mathbb{R}	2
1.1	Problème de Cauchy	3
1.1.1	Interprétation la solution de D'Alembert pour $u(x, 0) = 0$ et $u_t(x, 0) = 0$:	6
1.1.2	Problème de Cauchy de l'équation des ondes homogènes avec une extrémité fixée	7
1.1.3	Problème de Cauchy de l'équation des ondes homogènes avec une extrémité libre :	8
1.1.4	Équation des ondes homogène avec des conditions initiales et aux limites non homogène	9
1.2	Vibration d'une corde avec extrémités fixes :	11
1.3	Équation des ondes non homogène avec condition initiales	13
2	Équation des ondes dans un segment	16
2.1	Méthode de séparation des variables	17

Introduction générale

L'équation des ondes est une équation aux dérivées partielles hyperbolique qui décrit la propagation d'une onde, qui peut être représentée par une grandeur scalaire ou vectorielle. Dans ce projet, nous avons résolu analytiquement l'équation des ondes dans \mathbb{R} et dans un segment. Notre projet se décompose en deux chapitres :

- ☞ Chapitre 1 : Équation des ondes dans \mathbb{R}
- ☞ Chapitre 2 : Équation des ondes dans un segment.

Chapitre 1

Équation des ondes dans \mathbb{R}

1.1 Problème de Cauchy

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad (1.1)$$

où $f(x)$ est le déplacement initiale et $g(x)$ est la vitesse initiale $f \in c^2(\mathbb{R})$ et $g \in c(\mathbb{R})$ On pose :

$$A = -c^2, B = 0, C = 1.$$

$$\Delta = B^2 - 4AC = -4(-c^2)(1) = 4c^2 > 0$$

Alors l'équation d'onde est une équation hyperbolique.

Les équations caractéristiques :

$$\frac{dt}{dx} = \frac{B + \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{2c}{-2c^2} = \frac{-1}{c} \Leftrightarrow dt = \frac{1}{c} dx \Leftrightarrow -cdt = dx \Leftrightarrow C_1 = x + ct ; C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{B - \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{-2c^2}{2c} = \frac{1}{c} \Leftrightarrow dt = \frac{1}{c} dx \Leftrightarrow cdt = dx \Leftrightarrow C_2 = x - ct ; C_2 \in \mathbb{R}$$

Les coordonnées caractéristiques :

$$\xi = x + ct \text{ et } \eta = x - ct$$

On a :

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta.$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

$$u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = cu_\xi - cu_\eta.$$

$$u_{tt} = u_{\xi\xi} \xi_t^2 + u_{\eta\eta} \eta_t^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_t \eta_t + u_\xi \xi_{tt} + u_\eta \eta_{tt} = c^2 u_{\xi\xi} - 2c^2 u_{\xi\eta} + c^2 u_{\eta\eta}.$$

En remplaçant u_{xx} et u_{tt} dans l'équation(1.1) on obtient :

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = c^2 u_{\xi\xi} - 2c^2 u_{\xi\eta} + c^2 u_{\eta\eta} - c^2 u_{\xi\xi} - 2c^2 u_{\xi\eta} - c^2 u_{\eta\eta} = -4c^2 u_{\xi\eta} = 0$$

$$u_{\xi\eta} = 0$$

$$u(\xi, \eta) = \psi(\eta) + \phi(\xi).$$

En intégrant par rapport ξ et η on obtient :

$$u(\xi, \eta) = \int \psi^*(\eta) d\eta + \phi(\xi).$$

$\psi^*(\eta)$ est une fonction arbitraire.

On pose :

$$\psi(\eta) = \int \psi^*(\eta) d\eta.$$

$$u(\xi, \eta) = \psi(\eta) + \phi(\xi).$$

Donc la solution générale de l'équation d'onde est donnée par :

$$u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct). \quad (1.2)$$

ϕ et ψ des fonctions différentiables.

On a :

$$u(x, 0) = f(x)$$

et

$$u_t(x, 0) = g(x).$$

Alors :

$$u(x, 0) = \phi(x) + \psi(x). \quad (1.3)$$

et

$$u_t(x, 0) = c\phi'(x) - c\psi'(x) = g(x). \quad (1.4)$$

En intégrant l'équation (1.4) on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^x g(\tau) d\tau &= \int_0^x c\phi'(x) - c\psi'(x) dx = \int_0^x c [\phi'(x) - \psi'(x)] dx \\ &= c \left[\int_0^x \phi'(x) - \int_0^x \psi'(x) \right] = c [\phi(x) - \psi(x)]. \end{aligned}$$

$$\phi(x) - \psi(x) = \frac{1}{c} \int_0^x g(\tau) d\tau + K. \quad (1.5)$$

K est une constante. On a :

$$f(x) = \phi(x) + \psi(x) \Rightarrow \psi(x) = f(x) - \phi(x). \quad (1.6)$$

par la sommation de (1.5) et (1.6) :

$$2\phi(x) = \frac{1}{c} \int_0^x g(\tau) d\tau + f(x) + K.$$

Donc :

$$\phi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(\tau) d\tau + \frac{K}{2}.$$

Pour trouver $\psi(x)$ en remplaçant $\phi(x)$ dans l'équation (1.6) :

$$\psi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(\tau) d\tau - \frac{K}{2}.$$

Donc la solution générale est donnée par :

$$u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct).$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2}f(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(\tau) d\tau + \frac{K}{2} \\ &+ \frac{1}{2}f(x - ct) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} g(\tau) d\tau - \frac{K}{2}. \end{aligned}$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - ct) + f(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau. \quad (1.7)$$

Ceci est appelée la solution de D'Alembert de problème de cauchy pour l'équation d'onde homogène en dimension un, Donc c'est existe .

L'unicité

La solution générale est donnée par :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau.$$

u^*

est la solution associer à

f^*

et

$$g^*$$

$$u^*(x, t) = \frac{1}{2} [f^*(x + ct) + f^*(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g^*(\tau) d\tau$$

on démontre que : $\forall \epsilon > 0, t \in \mathcal{R}$

$$|u(x, t) - u^*(x, t)| < \epsilon$$

$$\begin{aligned} |u(x, t) - u^*(x, t)| &\leq \frac{1}{2} |f(x + ct) + f(x - ct)| \\ &+ \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |g(\tau)| d\tau - \frac{1}{2} |f^*(x + ct) + f^*(x - ct)| \\ &- \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |g^*(\tau)| d\tau \\ &\leq \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon 2t \\ &\leq \epsilon + \epsilon t = \epsilon(1 + t) \approx \epsilon \end{aligned}$$

Donc la solution est unique.

1.1.1 Interprétation la solution de D'Alembert pour $u(x, 0) = 0$ et $u_t(x, 0) = 0$:

Nous considérons deux cas particulier :

la première cas :

La vitesse initiale est nulle, alors que le déplacement initiale est existe $[-b, b]$:

$$g(x) = 0$$

et

$$f(x) \neq 0$$

Donc la solution (1.7) s'écrit sous la forme suivant :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] = \frac{1}{2} f(x) \quad (1.8)$$

La solution (1.8) est la forme de deux ondes se propageant à droite et à gauche avec une vitesse c dont la forme de début égale à la moitié du déplacement initiale.

la deuxième cas :

le déplacement initiale est nul : $f(x) = 0$ et $g(x) \neq 0$ sur certain intervalle $[b, -b]$

Donc la solution (1.7) est donnée par :

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau = \frac{1}{2c} [G(x+ct) + G(x-ct)]$$

1.1.2 Problème de Cauchy de l'équation des ondes homogènes avec une extrémité fixée

Corde fini :

Soit une corde de longueur l fixée aux extrémités, le problème de vibration d'une corde fini se ramène à la solution de l'équation d'onde :

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(0, t) = g(x) \\ u(0, t) = 0 \end{cases}$$

De la solution de D'Alembert

$$u(x, t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

On a :

$$\phi(\xi) = \frac{1}{2}f(\xi) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(\tau) d\tau + \frac{K}{2}$$

$$\psi(\eta) = \frac{1}{2}f(\eta) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(\tau) d\tau - \frac{K}{2}$$

En utilisant les conditions au limite, on obtient :

$$u(0, t) = \phi(ct) + \psi(-ct) = 0$$

Donc :

$$\psi(-ct) = -\phi(ct)$$

En remplaçant $-ct$ par α :

$$\psi(\alpha) = -\phi(-\alpha)$$

En remplaçant α par $x-ct$:

$$\psi(x-ct) = -\phi(ct-x)$$

Alors :

$$\psi(x-ct) = -\frac{1}{2}f(ct-x) - \frac{1}{2c} - \frac{1}{2c} \int_0^{ct-x} g(\tau) d\tau$$

La solution de problème avec condition initiale est donnée par :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(ct-x)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} g(\tau) d\tau$$

1.1.3 Problème de Cauchy de l'équation des ondes homogènes avec une extrémité libre :

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \\ u_x(0, t) = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

$$u(x, t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

On a :

$$u_x(x, t) = \phi'(x+ct) + \psi'(x-ct) = 0$$

$$u_x(0, t) = \phi'(ct) + \psi'(-ct)$$

Par l'intégrale :

$$\int [\phi'(ct) + \psi'(-ct)] = \int \phi'(ct) + \int \psi'(-ct) = 0$$

$$\phi(ct) - \psi(-ct) = K$$

k est une constante.

On pose $\alpha = -ct$ on obtient :

$$\psi(\alpha) = \phi(-\alpha) - K$$

et

$$\alpha = x - ct$$

on obtient :

$$\psi(x - ct) = \phi(ct - x) - K$$

Donc :

$$\psi(x - ct) = \frac{1}{2}f(ct - x) + \frac{1}{2c} \int_0^{ct-x} g(\tau) d\tau - \frac{K}{2}$$

Donc la solution est donnée par :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[f(x + ct) + \frac{1}{2}f(ct - x) \right] + \frac{1}{2c} \left[\int_0^{x+ct} g(\tau) d\tau + \int_0^{ct-x} g(\tau) d\tau \right]$$

1.1.4 Équation des ondes homogène avec des conditions initiales et aux limites non homogène

Dans le cas des problèmes de valeurs initiales de limites avec les conditions des limites non homogènes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad x > 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x); \quad x \geq 0 \\ u_t(x, 0) = g(x); \quad x \geq 0 \\ u(t, 0) = p(t); \quad t \geq 0 \end{array} \right. \quad (1.10)$$

on utilise les condition aux limites non homogène dans (1.1)ou obtient :

$$u(0, t) = \phi(ct) + \psi(-ct) = p(t)$$

on a :

$$\psi(-ct) = p(t) - \phi(ct)$$

si on pose

$$\alpha = -ct$$

$$\psi(\alpha) = p(t) - \phi(-\alpha)$$

$$\psi(\alpha) = p\left(-\frac{\alpha}{c}\right) - \phi(-\alpha)$$

en remplaçant α par $x - ct$ on obtient

$$\psi(x - ct) = p\left(\frac{ct - x}{c}\right) - \phi(ct - x)$$

$$\psi(x - ct) = p\left(t - \frac{x}{c}\right) - \phi(ct - x)$$

pour $0 \leq x \leq ct$ Donc la solution est donne par :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2}f(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(\tau) d\tau + \frac{K}{2} + p\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}f(ct - x) - \frac{1}{2c} \int_0^{ct-x} g(\tau) d\tau - \frac{K}{2} \\ &= \frac{1}{2}[f(x + ct) - f(ct - x)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{ct+x} g(\tau) d\tau + p\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{aligned}$$

Donc :

$$u(x, t) = p\left(t - \frac{x}{c}\right) + \phi(x + ct) - \psi(ct - x) \quad (1.11)$$

on considère la condition initiale aux limite non homogène on obtient :

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \geq 0, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \geq 0 \\ u_t(x, 0) = g(x) & x \geq 0 \\ u_x(0, t) = q(1) & t \geq 0 \end{cases}$$

on utilise (1.1) nous appliquons la condition de valeur limite pour obtenir :

$$u_x(0, t) = \phi'(ct) + \psi'(-ct) = q(t)$$

et après l'intégration nous trouvons :

$$\int_0^t \phi'(ct) + \psi'(-ct) = \int_0^t q(\tau) d\tau + K'$$

$$\frac{1}{c} (\phi(ct) - \psi(-ct)) = \int_0^t q(\tau) d\tau + K'$$

$$\phi(ct) - \psi(-ct) = c \int_0^t q(\xi) d\xi + K'$$

si on pose $\alpha = -ct$ on obtient :

$$\phi(-\alpha) - \psi(\alpha) = c \int_0^{\frac{-\alpha}{c}} q(\tau) d\tau + K'$$

$$\psi(\alpha) = \phi(-\alpha) - c \int_0^{\frac{-\alpha}{c}} q(\tau) d\tau - K'$$

en remplaçant α par $x-ct$, on obtient :

$$\psi(x-ct) = \phi(ct-x) - c \int_0^{t-\frac{x}{c}} q(\tau) d\tau - K'$$

Alors la solution est donnée par :

$$u(x, t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct) = \phi(x+ct) + \phi(ct-x) - c \int_0^{t-\frac{x}{c}} q(\tau) d\tau - K'$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} f(x+ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(\tau) d\tau + \frac{K}{2} \\ &+ \frac{1}{2} f(ct-x) + \frac{1}{2c} \int_0^{ct+x} g(\tau) d\tau + \frac{K}{2} - c \int_0^{t-\frac{x}{c}} q(\tau) d\tau - K' \end{aligned}$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(ct-x)] + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(\tau) d\tau \quad (1.12)$$

$$+ \frac{1}{2c} \int_0^{ct-x} g(\tau) d\tau - c \int_0^{t-\frac{x}{c}} q(\tau) d\tau \quad (1.13)$$

1.2 Vibration d'une corde avec extrémités fixes :

On considère la vibration d'une caractère de longueur l fixée dans les deux extrémités. Donc, le problème est de trouver la solution de :

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 \leq x \leq l \\ u_t(x, 0) = g(x) \\ u_x(0, t) = 0 & t \geq 0 \quad u_x(l, t) = 0, t \geq 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

de la résultat précédent, la solution de l'équation d'onde est :

$$u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

Nous appliquons la condition initiale, nous avons :

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \phi(x) + \psi(x) = f(x) \\ u_t(x, 0) &= c(\phi'(x) - \psi'(x)) = g(x) \end{aligned}$$

Nous trouvons :

$$\phi(\xi) = \frac{1}{2}f(\xi) + \frac{1}{2c} \int_0^\xi g(\tau) d\tau + \frac{k}{2} \quad (1.15)$$

$$\psi(\eta) = \frac{1}{2}f(\eta) - \frac{1}{2c} \int_0^\eta g(\tau) d\tau - \frac{k}{2} \quad (1.16)$$

Donc :

$$u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

Nous appliquons les condition aux limites ,on obtient :

$$u(0, t) = \phi(ct) + \psi(-ct) = 0$$

$$\psi(-ct) = -\phi(ct) \quad (1.17)$$

$$u(l, t) = \phi(l + ct) + \psi(l - ct) \quad (1.18)$$

Si on pose $\alpha = -ct$ dans(1.17)on obtient :

$$\psi(\alpha) = -\phi(-\alpha) \quad (1.19)$$

En remplaçant α par $l + ct$ dans(1.18) on obtient :

$$\phi(\alpha) = \psi(2l - \alpha) \quad (1.20)$$

avec $\xi = -\eta$ en remplaçant dans(1.15) on obtient :

$$\phi(-\eta) = \frac{1}{2}f(-\eta) + \frac{1}{2c} \int_0^{-\eta} g(\tau) d\tau + \frac{k}{2} \quad (1.21)$$

de(1.21) et(1.19) et en remplaçant α par η :
alors

$$\psi(\eta) = -\phi(\eta) = -\frac{1}{2}f(-\xi) - \frac{1}{2c} \int_0^{-\eta} g(\tau) d\tau - \frac{k}{2} \quad (1.22)$$

si on a $\alpha = \xi$ dans l'équation(1.20) on obtient :

$$\phi(\xi) = -\psi(2l - \xi) \quad (1.23)$$

On suppose que $\eta = 2l - \xi$ en remplaçant dans l'équation (1.16)donc :

$$\psi(2l - \xi) = \frac{1}{2}f(2l - \xi) - \frac{1}{2c} \int_0^{2l - \xi} g(\tau) d\tau - \frac{k}{2} \quad (1.24)$$

En remplaçant (1.24) dans (1.23) on obtient :

$$\psi(\xi) = -\phi(2l - \xi) = -\frac{1}{2}f(2l - \xi) - \frac{1}{2c} \int_0^{2l - \xi} g(\tau) d\tau + \frac{k}{2}$$

Donc la solution est donnée par :

$$u(\xi, \eta) = \phi(\xi) + \psi(\eta) = -\frac{1}{2}f(2l - \xi) + \frac{1}{2c} \int_0^{2l - \xi} g(\tau) d\tau + \frac{k}{2} \\ - \frac{1}{2}f(-\eta) - \frac{1}{2c} \int_0^{-\eta} g(\tau) d\tau - \frac{k}{2}.$$

$$u(x, t) = -\frac{1}{2}[f(2l - \xi) + f(-\eta)] + \frac{1}{2c} \int_{-\eta}^{2l - \xi} g(\tau) d\tau$$

$$u(x, t) = -\frac{1}{2}[f(x - ct) + f(ct - x)] + \frac{1}{2c} \int_{ct - x}^{x + ct} g(\tau) d\tau$$

1.3 Équation des ondes non homogène avec condition initiales

Théorème de Green :Nous allons examiner maintenant le problème de Cauchy pour l'équation d'onde non homogène :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + h^*(x, t)$$

avec les condition initiales :

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x), \\ u_t(x, 0) = g^*(x) \end{cases}$$

par la transformation de coordonnées : $y = ct$
le problème est réduit à :

$$\begin{aligned}
 u_{xx} - u_{yy} &= h(x, y) \\
 u_{tt} - c^2 u_{xx} &= h^*(x, y) \\
 \frac{1}{c^2} u_{tt} - u_{xx} &= \frac{1}{c^2} h^*(x, t) \\
 u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} &= \frac{-1}{c^2} h^*(x, t) \\
 u_{xx} - u_{yy} &= h(x, y) \tag{1.25}
 \end{aligned}$$

ou

$$h(x, t) = \frac{-h^*}{c^2}(x, y) \in \mathfrak{R}$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$u_y(x, 0) = g(x)$$

$$g(x) = \frac{g^*}{c}$$

$$\int_R \int (u_{xx} - u_{yy}) dR = \int_R \int h(x, y) dR \tag{1.26}$$

Nous appliquons le théorème de Green suivant :

$$\int_R \int u_{xx} - u_{yy} dR = \oint_B u_x dy + u_y dx. \tag{1.27}$$

Où B est composée de B_0, B_1 et B_2 .

$$\int_{B_0} (u_x dy + u_y dx) = \int_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} u_x 0 + u_y dx = \int_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} u_y dx$$

$$\int_{B_1} (u_x dy + u_y dx) = \int_{B_1} (-u_x dy - u_y dx) = u(x_0 + y_0, 0) - u(x_0, y_0)$$

$$\int_{B_2} (u_x dy + u_y dx) = \int_{B_2} (u_x dy + u_y dx) = u(x_0 - y_0, 0) - u(x_0, y_0)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \oint_B u_y dx + u_x dy &= \int_{B_0} (u_x dy + u_y dx) + \int_{B_1} (u_x dy + u_y dx) + \int_{B_2} (u_x dy + u_y dx) \\ &= -2u(x_0, y_0) + u(x_0 + y_0, 0) + \int_{x_0 - y_0}^{x_0 + y_0} u_y dx. \end{aligned}$$

(1.28)

(1.26), (1.27), (1.28) on obtient :

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) &= \frac{1}{2} [u(x_0 + y_0, 0) + u(x_0 - y_0, 0)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{x_0 - y_0}^{x_0 + y_0} u_y dx - \frac{1}{2} \int_R \int h(x, y) dR \end{aligned}$$

en remplaçant x_0, y_0 par x et y dans : alors

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{2} [f(x + ct) - f(x - ct)] \\ &\quad + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_R \int h(x, y) dR. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Équation des ondes dans un segment

2.1 Méthode de séparation des variables

On considère l'équation des ondes posée sur le domaine d'espace $[0, l]$:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, t > 0, x \in]0, l[\\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

Par la séparation des variables :
nous posons

$$u(x, t) = F(x) G(t)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} u_{tt} &= G''(t) F(x) \\ u_{xx} &= F''(x) G(t) \end{aligned}$$

l'équation s'écrit alors :

$$G''(t) F(x) = c^2 F''(x) G(t) = \lambda$$

$$\frac{G''(t) F(x)}{G(t) F(x)} = \frac{c^2 F''(x) G(t)}{G(t) F(x)} = \lambda$$

D'où

$$\frac{G''(t)}{G(t)} = c^2 \frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda$$

nous donnons deux équations différentielles découplées :

$$\begin{cases} F''(x) - \lambda F(x) = 0 \\ G''(t) - c^2 \lambda G(t) = 0 \end{cases}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

$$= F(0)G(t) = 0$$

$$\Rightarrow F(0) = 0$$

$$F''(x) - \lambda F(x) = 0$$

$$r^2 - \lambda = 0$$

$$\Rightarrow r^2 = \lambda$$

si $\lambda > 0$

$$r = \pm\sqrt{\lambda}$$

$$F(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

$$F(0) = A + B = 0$$

$$F(l) = Ae^{\sqrt{\lambda}l} + Be^{-\sqrt{\lambda}l} = 0$$

$$\Rightarrow A = B = 0$$

alors

$$F(x) = 0 \Rightarrow u(x, t) = 0$$

si $\lambda = 0$

$$F''(x) = 0$$

$$\Rightarrow F'(x) = C_1$$

$$\Rightarrow F(x) = C_1 x + C_2$$

$$F(0) = C_2 = 0$$

$$F(l) = C_1 l = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

alors

$$F(x) = 0 \Rightarrow u(x, t) = 0$$

si $\lambda = 0$ et $\lambda > 0$

$u(x, t)$ est nulle ce qui est exclu et contredit la condition initiale $u(x, 0) = f(x)$

si $\lambda < 0$

$$\lambda = -p^2$$

$$r^2 = -p^2 \Rightarrow r = \mp i p$$

$$F(x) = A \cos Px + B \sin Px \tag{2.1}$$

$$F(0) = A \cos P(0) + B \sin P(0) = 0$$

$$\Rightarrow A = 0 \text{ et } F(0) = F(l) = 0$$

$$F(l) = B \sin Pl = 0 \Rightarrow Pl = k\pi; k = 1, 2, \dots$$

D'où les valeurs de $P_k = \frac{k\pi}{l}$

Avec $B \neq 0$, donc :

$$F_k = \sin \frac{k\pi x}{l} \quad K \in \mathbb{Z}$$

De même de

$$G''(t) - C^2 \lambda G(t) = 0$$

$$\lambda = -(P_k)^2$$

$$G_k''(t) + [C(P_k)]^2 G(t) = 0$$

$$\lambda_k = \frac{ck\pi}{l}$$

donc la solution est :

$$G_k(t) = C_k \cos\left(\frac{ck\pi}{l}t\right) + D_k \sin\left(\frac{ck\pi}{l}t\right).$$

C_k et D_k sont des constantes arbitraire.

donc :

$$u_k(x, t) = F_k(x) G_k(t) = \left[a_k \cos\left(\frac{ck\pi}{l}t\right) + b_k \sin\left(\frac{ck\pi}{l}t\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right).$$

d'après l'équation (1.1) et les condition de Dirichlet

$$a_k = C_k B_k \text{ et } b_k = D_k B_k$$

On a l'équation(1.1) est linéaire et homogène, par la superposition principale la série infinie est :

$$u(x, t) = F_k(x) G_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{ck\pi}{l}t\right) + b_k \sin\left(\frac{ck\pi}{l}t\right) \right) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right).$$

nous appliquons les conditions initiales ,on obtient :

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$$

on a :

$$u_t(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ck\pi}{l} \left(-a_k \sin\left(\frac{ck\pi}{l}t\right) + b_k \cos\left(\frac{ck\pi}{l}t\right) \right) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$$

$$u_t(x, 0) = g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{ck\pi}{l}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$$

a_k et b_k sont les coefficients de la série de Fourier de sinus de $f(x)$ et $g(x)$:

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx$$

$$b_k = \frac{2}{ck\pi} \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx$$

On a les conditions de Neumann suivants :

$$\frac{du}{dx}(0, t) = \frac{du}{dx}(l, t) = 0$$

d'après (2,2)

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx}(x, t) &= F'(x) G(t) \\ \frac{du}{dx}(0, t) &= \frac{du}{dx}(l, t) = 0 \\ \Rightarrow F'(0) G(t) &= F'(l) G(t) = 0 \\ F'(0) &= F'(l) = 0 \end{aligned}$$

on a :

$$F(x) = A \cos Px + B \sin Px$$

$$F'(x) = -AP \sin Px + BP \cos Px$$

$$F'(0) = BP = 0$$

$$\Rightarrow B = 0$$

$$F(x) = A \cos Px$$

$$F'(l) = -AP \sin Pl = 0$$

$$Pl = k\pi$$

$k \in \mathbb{R}$

$$F_k(x) = A_k \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$$

et

$$G_k(t) = C_k \cos\left(\frac{ck\pi}{l}t\right) + D_k \sin\left(\frac{ck\pi}{l}t\right).$$

Les fonctions propres $u_k(x, t)$ sont les solutions

$$u_k(x, t) = A_k \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \left(C_k \cos\left(\frac{ck\pi}{l}t\right) + D_k \sin\left(\frac{ck\pi}{l}t\right) \right)$$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \left(C_k \cos\left(\frac{ck\pi}{l}t\right) + D_k \sin\left(\frac{ck\pi}{l}t\right) \right)$$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \left(a_k \cos\left(\frac{ck\pi}{l}t\right) + b_k \sin\left(\frac{ck\pi}{l}t\right) \right)$$

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$$

$$u_t(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ck\pi}{l} \left(-a_k \sin\left(\frac{ck\pi}{l}t\right) + b_k \cos\left(\frac{ck\pi}{l}t\right) \right) \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$$

$$u_t(x, 0) = g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{ck\pi}{l}\right) \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$$

On a les conditions de mixtes suivants :

$$u(0, t) = \frac{du}{dx}(l, t) = 0$$

d'après (2,2)

$$F(0)G(t) = F'(l)G(t) = 0$$

$$F(0) = F'(l) = 0$$

alors l'équation s'écrit sous la forme (2,3)

$$F'(x) = -AP \sin(Px) + BP \cos(Px)$$

$$F'(l) = -AP \sin Pl + BP \cos Pl = 0$$

$$F(0) = A = 0$$

donc

$$F'(l) = BP \cos Pl = 0 \Rightarrow \cos Pl = 0$$

$$\Rightarrow Pl = \frac{(2k+1)\pi}{2} \Rightarrow P = \frac{(2k+1)\pi}{2l}$$

les fonction propres $u_k(x, t)$ sont les solutions

$$P_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l}$$

$$F_k(x) = B_k \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}x\right)$$

$$G_k(t) = C_k \cos\left(\frac{c(2k+1)\pi}{2l}t\right) + D_k \sin\left(\frac{c(2k+1)\pi}{2l}t\right)$$

$$u_k(x, t) = B_k \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}x\right) \left(C_k \cos\left(\frac{c(2k+1)\pi}{2l}t\right) + D_k \sin\left(\frac{c(2k+1)\pi}{2l}t\right) \right)$$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}x\right) \left(C_k \cos\left(\frac{c(2k+1)\pi}{2l}t\right) + D_k \sin\left(\frac{c(2k+1)\pi}{2l}t\right) \right)$$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{c(2k+1)\pi}{2l}t\right) + b_k \sin\left(\frac{c(2k+1)\pi}{2l}t\right) \right) \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}x\right)$$

avec les conditions initiales, on obtient :

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}x\right)$$

$$u_t(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(-a_k \frac{c(2k+1)\pi}{2l} \right) \sin\left(\frac{c(2k+1)\pi}{2l} t\right) + b_k \left(\frac{c(2k+1)\pi}{2l}\right) \cos\left(\frac{c(2k+1)\pi}{2l} t\right) \right] \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l} x\right)$$

$$u_t(x, 0) = g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{c(2k+1)\pi}{2l}\right) \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l} x\right)$$

Bibliographie

- [1] T. Myint-U ; L. Debnath. *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Fourth Edition, Birkhäuser, Boston, 2007.
- [2] G. Giraud ; J-P. Dufour. *Mathématiques : résolution des équations aux dérivées partielles*. Cépaduès, 2004.
- [3] C. David ; P. Gosselet. *Équations aux dérivées partielles Cours et exercices corrigés*. Dunod, 2012.
- [4] L. Boughar H. Bousen. Résolution numérique d'équation des ondes en dimension un. Master's thesis, Université de Laghoaut, 2014.
- [5] A. Abassov K. Baddari. *Equations de la physique mathématique Appliquées*. OBU, 2009.