REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

UNIVERSITE AMAR TELIDJI DE LAGHOUAT.

FACULTE DES SIENCES

DEPARTEMENT DE MATHS ET INFORMATIQUE

Mémoire en vue de l'obtention d'un diplôme de Licence en Mathématiques , Option : Mathématiques

Thème :

APPROXIMATION DANS L'ESPACE DES FONCTIONS CONTINUS SUR UN COMPACT

Proposé et Encadré par :

Pf : A. MOKHTARI

PrésentéPar :

-Mouissi Messaouda

-Djaidir Fatma

N° d'ordre:………… 2013-PFE/DGI


بسم الله الرحمن الرحيم
www.hitarek.net

Remerciements

Avant touts nous remercions le dieu le plus puissant qui nous a donné La force, La santé et la volonté pour terminer ce Travail.

Nous représentons nous sincères remerciements à notre encadreur *M.A.MOKHTARI* qui nous à aidé et bien dirigé pour orienter et réaliser ce Travail,

Ainsi nous tenons à remercier tous les enseignants et les Travailleurs de la bibliothèque du département d'informatique qui nous ont dirigés et conseillés durant notre formation.

Un grand merci à toute notre promotion 2013, pour leur aide et leur soutien, ainsi que leurs En couragements chaleureux et réconfortants.

En fin on remercier touts les personnes ayant contribué de prés ou de loin à cette réalisation.

Dédicace

je vous remercie tout d'abord le dieu qui Mon aide de réalisé ce travail là .

de dédie à mes chéres ce parents qui on la grand mérite pour moi ,lesoutien de ma vie ma fréres Abd el hamid - Omar et soeurs Fatiha-Khaira-

Ammera-Zohra-Fatna.

A tout ma famille spécialement la famille

DJAIDIR

A tout ce qui j'aime :Meriam-kharfia-Amra-Saida-Fatima-Tofaha-Khadidja-Hada-Soad-Saida.

Ame amie sons aublié le Trinome

Messaouda

Fatma

Dédicace

je vous remercie tout d'abord le dieu qui Mon aide de réalisé ce travaile là.

je dédie à mes chéres parents qui on la grand mérite pour moi, le soutien de ma vie mes fréres et soeurs.

A tout ma famille, spécialement la famille Mouissi.

A me amie sans aublié le Trinome fatma.

A tout ce qui j'aime.

Messaouda

Sommaire

Introduction

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude de l'approximation dans l'espace des fonctions continues sur un compact.

Ce mémoire est divisé en trois chapitres, dans le premier nous présentons quelques rappels .

Le deuxième chapitre est consacré à l'approximation, et au théorème de Stone.

Au dernier chapitre, on donne des applications.

Chapitre 1
Rappels

1. A)Espace vectoriel norme et complet :

Un espace vectoriel réel R s'appelle espace réel normé si, à tout vecteur $x \in \mathbb{R}$, on fait correspondre un nombre $|x|$ (noté par fois $\|x\|$ ou même $||| x |||$) appelé norme du vecteur x et satisfaisant aux conditions :

(1) $|x| > 0 \quad si \;\; x \neq 0$, $|0| = 0$;

(2) $|\alpha x| = |\alpha||x|$ pour tout $x \epsilon \mathbb{R}$ pour tout nombre réel α.

(3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ quels que soient x et y de $\mathbb{R}$ (axiome triangle).

Par définition posons $\rho(x, y) = |x - y|$.

Il est aisé de prouver que les axiomes de l'espace métrique sont satisfaits ; il en résulte qu'un espace normé est métrique.

Ainsi, dans un espace normé on peut mesurer les distances entre les vecteurs et se servir du passage à la limite.

Un espace complet normé est dit de Banach.

L'espace $R^s(M)$ de toutes les fonctions réelles $x(t)$ continues et bornées sur un espace métrique M, que l'on a considére en tant qu'exemple d'un espace vectoriel et d'un espace métrique .Dans $R^s(M)$ est donnée par la formule

$$\|x\| = sup_t|x(t)| .$$

Nous désignons ici la norme d'une fonction $x(t)$ non pas par $|x|$ mais par $\|x\|$ pour mettre en relief la différence entre la normé de la fonction $x(t)$ comme élément de l'espace $R^s(M)$ et sa valeur absolue dépendant du

point t les axiomes d'un espace vectoriel normé (1) – (3) de la normé sont dans ce cas presque évidents, en particulier :

$$\begin{aligned} |x(t) + y(t)| &\leq |x(t) + |y(t)\,|. \\ &\leq sup_t|x(t)| + sup_t|y(t)| \\ &= \|x\| + \|y\| ; \end{aligned}$$

On passant au maximum dans le premier membre, on obtient l'inégalité demandée.

$$\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\| .$$

1. B).ESPACE VECTORIELS COMPLEXES NORMES:

L'espace $C^S(M)$ toutes les fonctions $x(t)$ continues et bornées sur un espace métrique M, à valeurs dans un espace complexe normé C , muni de la normé $\|x\| = sup_t|x(t)|$

(Où $|x(t)|$ est la normé de l'espace C), est un espace complexe normé ; il est désigne par $C^s(M)$.

Il est complet si C est complet.

2) Algèbre :

Un espace vectoriel U sur un corps K est appelé algèbre (plus précisément, algèbre sur K) si, pour les éléments $x, y,$ ……………..de U, une opération de multiplication désignée par $x * y$ $(ou\ \ xy\ )\ est$ définie de sorte que les conditions suivantes soit satisfaites :

(1) $\alpha(xy) = (\alpha x)y$ pour tout x et y de U et tout $\alpha \in K$,
(2) $(xy)z = x(yz)$ quels que soient x, y, z de U ;
(3) $(x+y)z = xz + yz$ quels que soient $x, y, z\ de\ U$;
(4) $x(y+z) = xz + xz$ quels que soient$x, y, z\ de\ U$.

- Les conditions (1) et (2) sont appelées loi associatives,
- Les conditions (3) et (4) lois distributives.

3) Valeurs d'adhérence et Points d'accumulation :

3.a) valeurs d'adhérence :

Soit toujours une suite (x_n) de points d'un espace métrique M. Nous dirons qu'un point yϵM est valeur d'adhérence de la suite (x_n) si, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout N naturel, on peut trouver un numéro $n \geq N$ pour lequel $\rho(y, x_n) < \varepsilon$.

3.b) points d'accumulations :

Soit A un sous-ensemble d'un espace métrique M on dit qu'un point $y \in M$ est un point d'accumulation de l'ensemble A si tout voisinage.

$V_r(y) = \{ x: \rho(x,y) < r \}$ du point y contient un point $x \in A$ autre que y.

4) Ensembles partout dense -Fermetures :

4.a) Ensemble partout dense :

On dit qu'un ensemble A dans un espace métrique M est partout dense par rapport à un ensemble $B \subset M$ si tout point $x \in B$ ou bien appartient lui-même à A, ou bien en est un point d'accumulation.

En d'autres termes, A est partout dense par rapport à B si toute boule centrée en un point $x \in B$ contient un point $y \in A$.

Si de plus $A \subset B$, on dit que A est partout dense dans B .

Ainsi, l'ensemble des points rationnels est partout dense sur la droite numérique $-\infty \leq x \leq +\infty$,

L'ensemble des points $(r_1, \dots \dots \dots, r_n)$ de coordonnées rationnelles est partout dense dans l'espace euclidien n- dimensionnel.

4.b) Fermeture :

Soit A un ensemble dans un espace métrique M.
L'ensemble des points de A et de tous ses points d'accumulations s'appelle fermeture de l'ensemble A et se note $\bar{A}$. si A est un ensemble fermé, c'est - à- dire que A contient tous ses points d'accumulations alors $\bar{A} = A$.
En général, $\bar{A} \supset A$, si $\bar{A} = A$, cela veut dire que tous les points d'accumulations de l'ensemble A appartiennent à A et que, par conséquent , A est fermé.
Donc, les affirmations ‹‹ A *est* fermé ›› et ‹‹ $\bar{A} = A$ ›› sont équivalentes.
Si $\bar{A} \subset A$, alors puisque on a toujours $\bar{A} \supset A$, il vient $\bar{A} = A$, de sorte que A est fermé.

5) convergence simple et convergence uniforme :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonction d'un ensemble Δ non vide vers un corps $\mathbb{K}(\mathbb{K} : \mathbb{R}\ ou\ \mathbb{C})$

$$f_n : \Delta \to \mathbb{K}.$$

$$x \to f_n(x)$$

5.a) convergence simple :

Définition :

On dire que la suite de fonction (f_n) Converge simplement sur $\triangle$
s'il existe $f \in \mathcal{F}(\triangle, \mathbb{K})$, (appelée limite simple de la suite (f_n) telle que :

$\forall\, x \in \triangle : \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$;

Ce ci traduit par :

$\forall\, x \in \triangle, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ (\forall\, n \geq n_O)$,

$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

5.b) Convergence uniforme :

Définition :

On dira que la suite de fonction (f_n) convergence uniformément sur Δ

S'il exist $f \in \boldsymbol{\mathcal{F}}(\triangle, \mathbb{K})$ (appelée limité de la suite (f_n) telle que

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} / \forall x \in \Delta\, , \forall n \geq n_0$

$$\Longrightarrow\ |f_n - f(x)| < \varepsilon\,.$$

6. Compacité :

6.a) Définition :

Un espace métrique M dans lequel tout suite (infinie) de points possède

Une valeur d'adhérence est appelé espace compact ou compact.

Dans un espace métrique (M, d) , tout compact est borné.

6.b) Théorème :

Tout espace compact est complet

Démonstration :

Soient $x_1, x_2,$ … une suite de couchy de point d'un espace compact Q

et $x_0$une valeur d'adhérence de cette suit.

Montrons que $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$, Pour un $\varepsilon > 0$ donné , trouvons d'abord un numéro N de façon à avoir $\rho(x_{n,}x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ pour $m > N$, $n > N$, puis un numéro $\rho > N$ tel que $\rho(x_p, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors, pour tout les $n > N$,

$$\rho(x_n\,, x_0) \leq \rho\big(x_n, x_p\big) + \rho\big(x_p, x_0\big) < \varepsilon,$$

D'où notre proposition.

6.c) La proposition suivante concernant les compacts est souvent appliqueé :

<u>Lemme sur le recouvrement fini :</u>

Si une famille $B = \{B_\propto\}$ de sous-ensembles ouverts de l'espace P recouvre

Un sous-ensemble compact K d'un espace métrique P,

Alors il existe une sous-famille finie $B_1, \dots, B_m$ de B recouvrant K.

<u>Démonstration :</u>

Supposons le contraire : aucune sous-famille finie de la famille B ne recouvre K.

Comme K est un compact , il existe , pour tout $\varepsilon > 0$, et un nombre fini de boules (fermées) $U_1, \dots, U_m$, de rayon ε qui recouvrent K .

S'il existait , pour chacune des boules U_j $(j = 1, \dots., m)$, une sous-famille finie B_j de la famille B recouvrant la boule U_j , alors en réunissant ces sous-familles nous aurions une sous-famille finie de B recouvrant K , Donc l'une au moins des boules U_j , par exemple U_1 , ne peut être recouverte par aucune sous-famille finie de la famille B.

Donnes au nombre ε des valeurs successives $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$,.....Pour tout n , nous avons une boule $U_{\frac{1}{n}}(x_n)$ de rayon $\frac{1}{n}$ et de centre x_n qui ne peut-être recouverte par aucune sous-famille finie de la famille B.

Soit x une valeur d'adhérence de la suite $U_\rho(x)$ d'un rayon ρ , A Partir d'un certain numéro, la boule $U_\rho(x)$ contient les boules $U_{\frac{1}{n}}(x_n)$ avec les numéros arbitrairement grands .

Donc, ces boules sont recouvertes par un seul ensemble $B_\propto$, ce qui contredit la construction. Le lemme est démontré.

7) Fonction continues sur un compact :

Les fonctions continues sur un compact métrique M possèdent certaines propriétés spécifiques que nous étudions ici.

7.**a) Théorème** :

L'ensemble de toutes les valeurs d'une fonction continue $f(x)$ définie sur un compact Q est compact.

Démonstration :

Soit $f(x_1), \ldots, f(x_n)$,... Une suite quelconque des valeurs d'un fonction continue $f(x)$ défini sur un compact Q.

Extrayons de la suite des points $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ une suite convergente x_{n_k}

$(k = 1,2, \ldots)$; par exemple $x_{n_k} \rightarrow a$.

la fonction $f(x)$ étant continue pour $x = a$, on a $f(x_{n_k}) \rightarrow f(a)$.

Ainsi , on a extrait de la suite $f(x_n)$ une sous_ suite convergente, ce qu'il fallait démontrer.

7.b) continuité uniforme :

Définition :

Une fonction $y = f(x)$ définie sur un espace métrique M, à valeurs dans espace métrique p est dite uniformément continue sur M si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que $\rho(x_1, x_2) < \delta$ implique $\rho\,[f(x_1), f(x_2)] < \varepsilon$ quels que soient les points x_1 et x_2 de M.

Il est évident que toute fonction uniformément continue est continue en tout point de l'espace M.

Mais, dans le cas général , la continuité d'un fonction $f(x)$ sur un espace M n'implique pas sa continuité uniforme.

Remarque :

Une fonction continue $y = f(x)$ définie sur un compact métrique K, à valeur dans un espace métrique P est uniformément continue sur K.

8) Séries de puissances :

8 .a)Définition :

Une série de la forme :

$$a_1 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots + a_n (z - z_0)^n + \cdots$$

où $\begin{cases} z = x + iy \\ z_0 = x_0 + iy_0 \end{cases}$

et les coefficients $a_0 , a_1 ,$….. Sont des nombres complexes, S'appelle sérié de puissances (ou sérié entière).

8.b) Nous avons qu'une série de puissances peut converger aussi bien que diverger sur la frontière de son cercle de convergence

Mais si elle converge en un point z_1 de la frontière , tout l'intervalle fermé qui joint le centre du cercle au point z_1 peut être inclus dans le domaine de convergence uniforme de la série.

9) Formule de Taylor avec reste sous forme intégrale :

On peut mettre la série suivante :

$$(1+z)^{\propto} = 1 + \propto z + \frac{\propto(\propto-1)}{1.2} z^2 + \cdots + \frac{\propto(\propto-1)\ldots(\propto-n+1)}{1.2\ldots n} z^n + \cdots \qquad (1)$$

$$/ \ z = x + iy \ ; |z| < 1.$$

Sous la forme

$(1+z)^{\propto}$ =1+$(-\propto)(-z)+\frac{(-\propto)(1-\propto)}{1.2}(-z)^2+\cdots+\frac{(-\propto)(1-\propto)\ldots(n-1-\propto)}{1.2\ldots n}(-z)^n+\cdots$

Si 1> $-\propto +1$, C'est-à-dire ∝>0 , alors la série (1)converge pour $-z=1$

C'est-à-dire pour $z=-1$. En vertu le théorème suivante (*) supposons qu'une fonction $f(x)$ Soit continue pour $0 \leq x \leq x_1$ et que l'égalité $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{\mathrm{n}}$ ait lieu pour $0 \leq x < x_1$ Alors , Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ converge ,

on a :

$$f(x_1)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, {x_1}^{\mathrm{n}}.$$

On obtient une relation intéressante :

$$1-\propto+\frac{\propto(\propto-1)}{1.2}-\frac{\propto(\propto-1)(\propto-2)}{1.2.3}+\cdots=0 \qquad (2)$$

D'après ce qu'on a vu, elle est valable pour tout les $\propto > o$

Si $1 > -\propto$, c'est-à-dire $\propto > -1$, alors la série (1) converge pour $-z = -1$, c'est-à-dire pour $z = 1$; dans ce cas la théorénne ($*$) conduit à la relation :

$$1+\propto+\frac{\propto(\propto-1)}{1.2}+\frac{\propto(\propto-1)(\propto-2)}{1.2.3}+\cdots=2^{\propto} \qquad (3)$$

Qui est valable pour $\propto > -1$.

Les égalités (2) et (3) étendent aux exposants non entiers Les propriétés connues des nombres $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ pour k et n naturels:

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n,$$

$$C_n^0-C_n^1+C_n^2-\cdots+(-1)^n C_n^n=0.$$

Chapitre 2

Approximation sur un compact

1) **Approximation** :

Soient (E, d) un espace métrique et F un sous ensemble de E on veut chercher à approcher un élément de F,

C'est déterminer g de F tel que :

$d\ (f, g) = min_{h \in F}\ d\ (f, h)$ s'il existe, cet élément est appelle meilleur approximation de f dans F au de la distance d.

Nous allons maintenant rappeler , sans démonstration ,

Un théorème donnant : l'existence de cet élément sous certaines hypothèses.

Théorème :

Si F est une partie compact de E , alors il existe au mois un élément g de F

Tel que :

$$d(f, g) = min_{h \in F}\ \mathrm{d}(f, h).$$

Si E est un espace normé nous avons également le corollaire :

Si F est un sous – espace vectoriel, de dimension finie, Alors il existe au mois un élément g de F tel que :

$$\|f - g\| = min_{h \in F}\ \|f - h\| .$$

Nous supposerons désormais que E est l'ensemble des fonctions continus sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Nous chercherons dans des fonctions continues, d'un type préalablement choisi, approchant une fonction f continue sur $[a, b]$.

La fonction g est le plus souvent cherchée sous la forme :

$$g(x) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \cdots + a_n g_n(x).$$

Où les $g_k(x)$ sont des fonctions prises généralement

- dans la classe des monômes x^k
- dans la classe des fonctions trigonométrique $Cos\ kx, sin\ kx$ ...

- dans la classe des fonctions exponentielles,… plus précisément on a :

$$g(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \ldots + a_nx + a_{n+1}$$

Ou

$$g(x) = c + a_1cosx + a_2cos2x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots + b_1\, sinx + b_2sin2x + \cdots + b_nsin\, nx$$

Ou

$$g(x) = a_1\, e^{b_1x} + a_2e^{b_2x} \ldots \ldots \ldots \ldots . + a_ne^{b_nx}$$

On peut également chercher g sous la forme d'une fraction rationnelle du type :

$$g\ (x) = \frac{a_1x^n + a_2x^{n-1} \ldots\ldots\ldots + a_nx + a_{n+1}}{b_1x^m + b_2x^{m-1} + \cdots \ldots\ldots\ldots + b_mx + b_{m+1}}$$

L'approximation de f par des polynômes , dite approximation polynomiale , est la plus fréquente car les polynômes sont très aisément dérivables, intégrables et constituent un espace vectoriel.

2) Approximation sur un compact :

*) L'espace $R^s(Q)$ (resp.$C^s(Q)$) de toutes les fonctions réelles (resp .complexe) continues sur un compact Q est un espace vectoriel normé et complet. Nous considérons de défférentes familles linéaires $B(Q)$ de fonctions réelles (resp.complexes) continues sur le compact Q. Quelles sont les conditions à imposer à la famille $B(Q)$ pour que sa fermeture par rapport à la convergence uniforme sur le compact Q, i.e par rapport à la norme de l'espace R^s (Q)

(resp .$C^s(Q)$), contienne toutes les fonctions continues sur Q ?

a)- Nous dirons qu'une famille $B(Q)$ de fonctions sépare deux points z et y de l'ensemble Q s'il existe dans $B(Q)$ une fonction $\varphi(x)$ telle que $\varphi(z) \neq \varphi(y)$ (fonction séparatrice pour les points $x\ et\ y$) .L'affirmation que $B(Q)$ ne sépare pas les points z et y signifié que

$f(z) = f(y)$ Pour toutes les fonctions $f(x) \epsilon\ B(Q)$.

Dans ce cas, vu que la dernière égalité est conservée en passant à la fermeture de la famille $B(Q)$ par rapport à la convergence uniforme, la fermeture de la famille $B(Q)$ ne peut contenir tout les fonctions continues, Par exemple, elle ne contient pas la fonction $\rho\ (x, y)$ qui est nulle pour $x = y$ et non nulle pour $x = z$. Donc, si nous voulons que la fermeture d'une famille $B(Q)$ contienne toutes les fonctions continues sur le compact Q , nous avons à supposer qu'elle sépare n'importe quels deux points du compact Q.

b)- une famille linéaire $B(Q)$ de fonctions réelles sur l'ensemble Q est appelée réseau linéaire si, avec toute sa fonction $f(x)$, l'ensemble $B(Q)$ contient la fonction $|f(x)|$.

Quels que soient deux nombres réels α et β, on a :

$$max\{\alpha,\beta\} + min\{\alpha,\beta\} = \alpha + \beta$$

$$max\{\alpha,\beta\} - min\{\alpha,\beta\} = |\alpha - \beta|$$

Par conséquent, quelles que soient deux fonctions réelles $f(x), g(x)$ on a :

$$max\{f(x), g(x)\} + min\{f(x), g(x)\} = f(x) + g(x)$$

$$max\{f(x), g(x)\} - min\{f(x), g(x)\} = |f(x) - g(x)|$$

En résolvant ces équations par rapport à $max\{f(x), g(x)\}$ et $min\{f(x). g(x)\}$ nous voyons que, avec deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ un réseau linéaire contient les fonctions $max\{f(x), g(x)\}$ et $min\{f(x), g(x)\}$. En suite, en raisonnant par récurrence on conclut aisément que si un réseau linéaire contient des fonctions $f_1(x) \dots . f_n(x)$, il contient aussi les fonctions max $\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ et min $\{f_1(x) \dots f_n(x)\}$.

c)- Théorème :

Un réseau linéaire $B(Q)$ sur un compact Q est partout dense dans l'espace $R^s(Q)$ de toutes les fonctions continues sur Q s'il sépare n'importe quels deux points du compact et contient la fonction $e(x) \equiv 1$.

<u>Démonstration</u> :

Un réseau linéaire $\beta(Q)$ contient 1 et séparant deux points z et y contient toute fonction qui prend aux points z et y n'importe quelles valeurs données ; on peut trouver une telle fonction sous la forme $a\varphi(x) + b.1$, où $\varphi(x)$ est une fonction de $B(Q)$ qui sépare les points z et y et a, b des constantes.

Donnons-nous un $\varepsilon > 0$ et une fonction continue $f(x)$.

Quels que soient deux points z et y (pas nécessairement distincts) , on peut trouver d'après ce qu'on a dit plus haut une fonction $\varphi_{zy}(x) \in B(Q)$ pour laquelle :

$$\varphi_{zy}(z) = f(z), \ \varphi_{zy}(y) = f(y).$$

Soit :

$$u_{zy} = \{x \in Q : \varphi_{zy}(x) < f(x) + \varepsilon\}$$

L'ensemble u_{zy} est ouvert et contient les points z et y.

Fixons z ; alors les ensembles ouverts u_{zy} considérés pour tous les $y \in Q$ forment un recouvrement du compact Q.

D'après le lemme (1.6.c) on peut en extraire un recouvrement fini $u_{zy_1}, \ldots u_{zy_m}$. Considérons la fonction :

$$\varphi_z(x) = min\ \{\varphi_{zy_1}(x), \ldots, \varphi_{zy_m}(x)\}$$

appartenant au réseau linéaire $B(Q)$. Vu que, pour tout $x \in Q$ et pour z fixe, l'une au moins des inégalités définissant les domaines u_{zy_k} est valable, nous avons

$\varphi_z(x) \equiv min_k \varphi_{zy_k} < f(x) + \varepsilon$ pour tout $x \in Q$. En même temps nous avons

$$\varphi_z(z) = min_k\ \varphi_{zy_k}(z) = f(z)$$

Posons :

$$v_z = \{x \epsilon Q : \varphi_z(x) > f(x) - \varepsilon\}$$

L'ensemble v_z est ouvert et contient le point z. Les ensembles v_z pour tous les $z \in Q$ forment un recouvrement du compact Q. D'après le lemme (1.6.c) on peut en extraire un recouvrement fini $v_{z_1}, \ldots, v_{z_n}$.

Posons maintenant

$$\varphi(x) = max\ \{\varphi_{z_1}(x), \ldots, \varphi_{z_n}(x)\} ;$$

cette fonction appartient elle aussi au réseau linéaire $B(Q)$, et l'on a par construction

$$\varphi(x) = max_j\ \varphi_{z_j}(x) < f(x) + \varepsilon .$$

Or, en tout point $x \in Q$ l'une au moins des inégalités définissant le domaine v_{z_j} est valable, donc **:**

$$\varphi(x) = max\ \varphi_{z_j}(x) > f(x) - \varepsilon$$

Définitivement, pour tout $x \in Q$ on a

$$f(x) - \varepsilon < \varphi(x) < f(x) + \varepsilon$$

Ce qui démontre le théorème.

Remarque :

Le théorème tombe en défaut en rejetant l'hypothèse $e(x) \equiv 1 \epsilon B(Q)$ étant donnés deux points $z \ et \ y$, le réseau linéaire de toutes les fonctions continues $f(x)$ vérifiant la condition $f(z) = 2f(y)$ n'est pas partout dense dans l'espace $R^s(Q)$.

3) *Théorème de stone* :

a) Conformément à la définition générale d'une algèbre, une famille linéaire $B(Q)$ composé de fonction (réelle) sur un compact Q s'appelle algèbre si, avec ses deux fonctions quelconques $f(x) \ et \ g(x)$, la famille $B(Q)$ contient la fonction $f(x) \ g(x)$.

b) Lemme :

Une algèbre réelle B(Q) qui contient l'unité et est fermée par rapport à la convergence uniforme représente un réseau linéaire.

Démonstration : Démonstrations que la fonction $|f(x)|$ appartient à l'algèbre $B(Q)$ dès que $f(x)$ le fait.

Sans porter atteinte à généralité on peut poser $max_x|f(x)| = 1$.

Considérons la série de Taylor :

$$(1-\xi)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}\xi + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{1.2}\xi^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\ldots\ldots\ldots\ldots(\frac{1}{2}-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots n}(-\xi)^n + \ldots\ldots\ldots)$$

On a vu dans ″ 1.9 ″ (il faut y poser $\alpha = ½$) et dans "1.8.b" qu'elle converge uniformément pour $0 \leq \xi \leq 1$.

L'inégalité $0 \leq f^2 \leq 1$ étant vérifiée sur le compact Q ,on à d'après ce qu'on a dit plus haut :

$$|f(x| = \sqrt{1-(1-f^2}(x))$$

$$= 1 - {}^1\!/_2\left(1-f^2(x)\right) - {}^1\!/_8\,(1-f^2(x))^2 + \cdots;$$

La série à droite étant uniformément convergente sur Q comme l'algèbre $B(Q)$ est fermée par rapport à la convergence uniforme, $|f(x)| \epsilon B(Q)$, ce qu'il était à démontrer.

C. Théorème de stone (pour une algèbre réelle) :

Une algèbre $B(Q)$ formée de fonctions réelles, séparant n'importe quels deux points du compact Q et contenant l'unité est partout dense dans l'espace $R^s(Q)$.

Démonstration :

Désignons par $\overline{B(Q)}$ la fermeture de l'algèbre $B(Q)$. Par rapport à la convergence uniforme.

"Evidemment", la famille $\overline{B(Q)}$ est encore une algèbre **:**

Si $f_n(x) \rightarrow f(x)$ (uniformément sur Q) et que $g_n(x) \rightarrow g(x)$ (Uniformément sur Q), alors **:**

$$f_n(x)\, g_n(x) \rightarrow f(x)\, g(x)$$

(uniformément sur Q) de sorte que **:**

$$f(x)\, g\,(x) \in \overline{B(Q)}$$

résulte de **:**

$$f(x) \epsilon\, \overline{B(Q)}\,,\ g(x) \epsilon\, \overline{B(Q)}.$$

L'algèbre $\overline{B(Q)}$ est un réseau linéaire (lemme b) et partout dense dans l'espace $R^s(Q)$ (théorème 2.2.c).

Comme l'algèbre $\overline{B(Q)}$est fermée , $\overline{B(Q)} = R^s(Q)$, ce qu'il fallait démontrer.

4-a) On pourrait s'attendre à ce qu'une algèbre formée de fonctions à valeurs complexes , à condition qu'elle sépare n'importe quels de points du compact Q et contienne l'unité, soit partout dense dans l'espace $C^s(Q)$ de toutes les fonctions complexes continues sur Q. Cependant, sous cette forme, le théorème s'avère faux.

b) Tout de même, dans une hypothèse supplémentaire, le théorème de Stone s'étend aux algèbres de fonctions à valeurs complexes.

Une algèbre complexe $B(Q)$ est dite symétrique si, avec toute sa fonction

$\varphi(x) = u(x) + iv(x)$, elle contient la fonction conjuguée $\bar{\varphi}(x) = u(x) - iv(x)$.

D.Théorème de stone (pour une algèbre complexe) :

Une algèbre $B(Q)$ formée de fonctions à valeurs complexes, séparant n'importe quels deux points du compact Q, contenant l'unite et symétrique est partout dense dans l'espace $C^s(Q)$.

Démonstration :

Par hypothèse, l'algèbre B(Q) contient, avec une fonction **:**

$$\varphi\,(x) = u(x) + i\,v(x)$$

Les fonctions réelles **:**

$$u(x) = \frac{1}{2}[\varphi(x) + \bar{\varphi}\,(x)]\;et\;v(x) = \frac{1}{2i}\,[\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)].$$

Désignons par $B_R(Q)$ la sous – algèbre des fonctions réelles $h(x) \in B(Q)$.

Cette sous – algèbre sépare n'importe quels deux points $y\ et\ z$ du compact Q¸

(Si $\varphi(y) \neq \varphi(z)$, alors ou bien $u(y) \neq u(z)$ ou bien $v(y) \neq v(z)$) et contient l'unité.

D'après le théorème de Stone (2.3.c), on a $\overline{B_R}(Q) = R^s\,(Q)$, d'où $(\overline{B(Q)}) = C^s(Q)$.

Chapitre 3

Applications

Le théorème d'approximation de Weierstrass :

Une application légèrement différente du procède de convolution décrit avant va nous permettre de prouver le remarquable théorème d'approximation de Weierstrass.

Tout fonction complexe f continue dans un intervalle fermé borné $[a, b]$

Peut être approchée uniformément dans $[a, b]$ par des polynômes.

Notons en premier lieu qu'on peut supposer que $f(a) = f(b) = 0$

et prolonger ensuite f dans $\mathbb{R}$ tout entier en prenant $f(x) = 0$ $hors\ de\ [a, b]$:

En effet,

Si les conditions $f(a) = f(b) = 0$ ne sont pas remplies, on considère un intervalle plus grand $[c\,, d]$ avec $c < a$, $b < d$ et on prolonge f dans $[c\,, a]$ (resp dans $[b\,, d]$) par une fonction linéaire affine prenant la valeur **0** au point c et la valeur $f(a)$ au point a (resp . la valeur $f(b)$ au point b et la valeur **0** au point d) par un changement de variable linéaire affine ,

On peut en outre supposer que $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$

Posons pour tout entier $n \geq 1$

$$\begin{cases} g_n(x) = (1 - x^2)^n & pour \quad -1 \leq x \leq 1 \\ g_n(x) = 0 & pour \quad |x| > 1 \end{cases}$$

Soit :

$a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)dt = \int_{-1}^{1} g_n(t)dt,$

Et posons : $h_n = a_n^{-1} g_n$;

On a donc $h_n > 0 \; dans \;]-1,1[$, $h_n(x) = 0$ hors de cet intervalle, h_n est continue dans $\mathbb{R}$ et vérifier la condition de normalisation :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)dt = 1$$

En autre, comme $1 - x^2 \geq 1 - |x| \; pour \; -1 \leq x \leq 1$;

On a :

$$a_n \geq 2 \int_0^1 (1-t)^n \; dt = 2/(n+1) \qquad (1)$$

On en déduit la propriété (*) suivante :

Pour tout nombre δ tel que $0 < \delta \leq 1$, la fonction h_n tend uniformément vers 0 dans chacun des intervalle $[-1, -\delta]$ et $[\delta, 1]$, lorsque n tend vers $+\infty$.

En effet,

la fonction h_n étant paire , il suffit de considéré l'intervalle $[\delta, 1]$, où l'on a, en vertu de (1)

$$0 \leq h_n \leq (n+1)(1-\delta^2)^n$$

D'où la conclusion.

Cela étant, considérons la fonction, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$(f * h_n)(x) = a_n^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g_n(x-t) \, dt$$

$$= a_n^{-1} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(t) g_n(x-t) \, dt \qquad (2)$$

Puisque f est nulle hors de l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ Lorsque $x \in \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

on a :

$$g_n(x-t) = (1-(x-t)^2)^n \qquad \text{Puisque } -1 \leq x-t \leq 1;$$

Développant et partout dans (2) on voit que dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ La fonction $f * h_n$ coincide avec un polynôme de degré $\leq 2n$.

Montrons d'autre part que $f * h_n$ converge uniformément vers f dans tout intervalle borné $[-a, a]$ Lorsque $(n \to +\infty)$.

On a comme dans (régularisation avec convolution)

$$f(x) - (f * h_n)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(x)f(x-t)\big) h_n(t) dt$$

Donnons nous un nombre $\varepsilon > 0$; il résulte de (la continuité uniforme) qu'il existe un nombre $\delta \in]0,1[$ dépendant de ε tel que, pour x, x' dans $[-a-1, a+1]$

et tel que $|x - x'| \leq \delta$.

On ait $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$. δ étant ainsi fixé,

On écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x) f(x-t)) h_n(t)\, dt = \int_{-\infty}^{-\delta} (f(x) f(x-t)) h_n(t)\, dt$$

$$+ \int_{-\delta}^{\delta} \big(f(x) f(x-t)\big) h_n(t)\, dt + \int_{\delta}^{+\infty} (f(x) f(x-t)) h_n(t)\, dt$$

Le théorème de la moyenne, joint au fait que h_n est positif et vérifie la condition de normalisation$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt = 1\right)$

Donne :

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta}(f(x) - f(x-t)h_n(t)dt\right| \leq \int_{-\delta}^{\delta}|f(x) - f(x-t)|\, h_n(t)dt \leq \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} h_n(t)dt \leq \varepsilon$$

Pour tout x tel que $-a \leq x \leq a$. D'autre part, la fonction f est bornée dans $\mathbb{R}$.

Soit $|f(x)| \leq A$; on a donc par le th. de la moyenne

$$\left|\int_{\delta}^{+\infty}\big(f(x) - f(x-t)\big)h_n(t)dt\right| \leq 2A\int_{\delta}^{+\infty} h_n(t)dt = 2A\int_{0}^{1} h_n(t)dt$$

Puisque h_n est nulle hors de $[-1,1]$.

Mais en vertu de (la propriété (*)) il existe un n_0 (dépendant de, donc de ε).

Tel que pour $n \geq n_0$ on dit $h_n \leq \varepsilon/2A$ pour tout t, tel que $\delta \leq t \leq 1$; on en conclut par le th. de la moyenne que l'on a, pour $n \geq n_0$,

$$\left|\int_{\delta}^{1}(f(x) - f(x-t)h_n(t)dt\right| \leq \varepsilon.$$

On prouve de même (h_n etant une fonction paire) que l'on a :

$$\left|\int_{-1}^{-\delta}\big(f(x) - f(x-t)\big)h_n(t)dt\right| \leq \varepsilon,$$

Pour $n \geq n_0$;

On en conclut que pour $n \geq n_0$ et pour tout $x \in [-a,a]$, On a :

$$|f(x) - (f * h_n)(x)| \leq 2\varepsilon\,,$$

Ce qui démontre le théorème.

Approximation des fonctions périodiques pour la convergence uniforme :

Pour simplifier les coefficients, on va considérer seulement des fonctions continues

et périodiques de période 2π de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. L'ensemble de ces fonctions, qu'on va noter $p_{2\pi}$ est une sous-algèbre de $B(\mathbb{R},\mathbb{C})$, posons $\mathrm{I}=[-\pi,\pi]$.

On munit toujours B ($\mathbb{R}$,$\mathbb{C}$) de la norme de convergence uniforme :

$$\|f\|_{\infty =} sup_{t\epsilon\mathbb{R}}|f(t)| = sup_{t\in I}|f(t)|$$

Où la seconde égalité résulte de la périodicité de f.

L'ensemble $p_{2\pi}$ contient évidement les fonctions.

$$\varphi : t \to e^{it} \quad \text{et} \quad \overline{\varphi} : t \to e^{-it}$$

Par multiplication, addition et produit par les scalaires, ces fonctions engendrent une sous-algèbre de $p_{2\pi}$ qui est formée des fonctions :

$$t \to \sum_{finie} c_n \, e^{int} \quad avec \quad n \epsilon \, \mathbb{Z} \;\; et \;\; c_n \epsilon \mathbb{C}$$

Qu'on appelle **polynôme trigonométrique .**

<u>Théoréme :</u>

Toute fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, périodique de période 2π peut être approchée uniformément sur $\mathbb{R}$ par des polynômes trigonométriques.

<u>Preuve</u> :

Soit $\mathbb{U}$ le cercle unité de $\mathbb{C}$ qui est compact et considérons l'espace de Banach $C\,(\mathbb{U},\mathbb{C})$ muni de la norme de convergence uniforme. pour chaque fonction h de $C\,(\mathbb{U},\mathbb{C})$ la fonction composée $h \circ \varphi$ est évidement 2π périodique et continue, donc appartient à $P_{2\pi}$ en prenant $\phi(h) = h \circ \varphi$.

On définit ainsi une application

$\phi : C\ (\mathbb{U}\ ,\mathbb{C}) \to P_{2\pi}\ \ avec\ \ \phi(h)(t) = h\big(e^{it}\big);\ \ t\epsilon\mathbb{R}$

comme tout élément de U s'écrit e^{it} avec t dans $\mathbb{R}$, On a :

$$\|\phi(t)\|_\infty = sup_{t\epsilon\mathbb{R}}\big|h(e^{it})\big| = sup_{|z|=1}|h(z)| = \|h\|_\infty$$

Donc ϕ est une isométrie de $C(\mathbb{U},\mathbb{C})$ sur son image.

En fait ϕ est surjective car pour chaque fonction f de $p_{2\pi}$ on a $f = \phi(h)$, où $h = \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ est la fonction continue définie par :

$$\begin{cases} h\big(e^{i\theta}\big) = f(\theta) \qquad\quad pour \quad -\pi < \theta < \pi, \\ h(-1) = f(\pi) = f(-\pi). \end{cases}$$

Soit maintenant $f\epsilon\, p_{2\pi}$ et $\varepsilon > 0$. on va montrer l'existence d'un polynôme trigonométrique g tel que :

$\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon$ ce qui prouvera la propriété énoncée dans le théorème.

D'abord, comme ϕ est surjective, il existe une fonction h dans $C\ (\mathbb{U},\mathbb{C})$ telle que $h\big(e^{it}\big) = f(t)$, pour tout t dans $\mathbb{R}$.

D'après l'exemple suivantes :

Considérons un ouvert borné U de $\mathbb{C}$, alors $E = \overline{U}$ est compact et pour chaque polynôme $p\ \ de\ \ \mathbb{C}\,[X,Y]$,

On peut considérer la fonction $Z \to P(Z,\bar{Z}\ )$ de E dans $\mathbb{C}$.

Il existe un polynôme en deux variables à coefficients complexes P tel que :

$sup_{|z|=1}\big|h(Z) - p(Z,\overline{Z})\big| \leq \varepsilon,$ Pour $t\epsilon\mathbb{R}$

Posons $g(t) = p(e^{it},e^{-it})$;

Alors :

$$|f(t)-g(t)| = \left|h\left(e^{it}\right) - p(e^{i,t}, e^{-it})\right| \leq \varepsilon$$

Donc $\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon$ et la preuve est terminée puisque g est évidement

Un polynôme trigonométrique.

Remarque :

On peut résumer ce qui précède en disant que les fonctions $Z \to P\ (Z, \overline{Z})$ où $P \epsilon\ \mathbb{C}[X, Y]$ forment une partie dense de $C(U, \mathbb{C})$, et que, par l'isométrie ϕ de $C(U, \mathbb{C})$ sur $p_{2\pi}$ cette partie dense devient une partie dense de $P_{2\pi}$ qui est exactement l'ensemble des polynômes trigonométriques.

Théorème :

Soit E une partie compact de $\mathbb{R}^n$ tout fonction continue de E dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme sur E d'une suite de fonction polynômes à n variables.

preuve :

Soit A l'ensemble des restrictions à E des fonctions polynômes à n variables.

Alors A est une sous $\mathbb{R}$-agébre de $C(E, \mathbb{R})$ qui contient les fonctions constantes

et les fonctions $(x_1, \dots \dots \dots x_n) \to x_i$ pour chaque i.

Donc A Sépare les pointes de E.

Remarques :

1- On peut exprimer le résultat du théorème en disant que les restrictions à E des fonctions $(x_1, \dots \dots ., x_n) \to (x_1^{m_1} \dots \dots \dots x_n^{m_n})$ avec m_i entier ≥ 0 forment une famille totale dans l'espace de Banach $C(E, \mathbb{R})$.

2- Pour n= 1 et $E = [a,b] \subset \mathbb{R}$, on retrouve le théorème de weisstross dans sa forme la plus simple .

3- Pour des fonctions continument dérivable, on peut préciser le résultat précédent comme ce ci.

Soit f une fonction p fois continument dérivable avec $1 \leq p \leq +\infty$, d'un intervalle $[a,b]$ $dans$ $\mathbb{R}$;

Alors il existe une suite $(p_n)_{n\geq 0}$ de polynômes, telle que pour chaque entier r avec $1 \leq r \leq P$.

La suite des dérivées $(D^r\, p_n)_{n\geq 0}$ converge uniforment sur $[\,a,b\,]$ vers $D^r f$.

De plus, cet énoncé reste vrai en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

4- Pour l'algèbre B (Q) (familles linéaires) des polynômes $P(x_1, \dots \dots \dots, x_n)$ à valeurs complexes, les hypothèses du théoréme de Stone sont vérifiées ; par conséquent, tout fonction à valeurs complexes $f(x)$ continue sur un ensemble ferme bornée $Q \subset \mathbb{R}_n$ est la limite uniforme sur Q d'une suite de polynôme (à valeur complexe) eu $x_1, \dots \dots, x_n$.

5- En particulier, tout fonction (réelle ou complexe) continue sur un intervalle ferme $a \leq x \leq b$ est la limite uniforme d'une suite de polynôme (respectivement réels ou complexe) eu x.

Conclusion

Conclusion

- **Le théorème de Stone établit la possibilité d'approcher toute fonction continue par les fonctions d'une algèbre $\overline{B(Q)}$.**
- **Le théorème d'approximation se généralise dans deux directions :**
  - **L'intervalle compact $[a\,,b]$ peut être remplacé par un espace compact Q.**
  - **L'algèbre des fonctions polynomiales peut être remplacée par une autre sous-algèbre B de $C(Q)$ à condition qu'elle vérifie une propriété cruciale qui est la séparation des points .**
- **Le théorème de stone-Weierstrass est une généralisation du théorème d'approximation de Weierstrass en analyse réelle.**

Bibliographie

[1] G .Chilov, Analyse Mathématique Fonction D'une variable , Tome 1,Mir.Moscou 1973.

[2] Claude Tisseron , Notions de Topologie, Introduction Aux espaces fonctionnels, Hermann Paris 1985.

[3] Approximation et équations différentielle , Tome 2 ,Hermann Paris 1988.

[4] G.Chilov, Analyse Mathématique Fonction D'une variable , Tome 2 ,Mir. Moscou 1973.