

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITÉ AMAR TËLÉDJI DE LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES
قسم الرياضيات
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématique

Présenté par :

Gaoui Nour Elhouda

THEME

*Sommes hyperboliques amortie non linéaire problèmes avec des
exposants variables :
Existence, Unicité et explosion en temps fini.*

Soutenance publique devant le jury composé de :

Dr. Rahmoune Abdelazize	M.C.A	Président
Dr. Rahmoune Abita	M.C.A	Encadreur
Dr. Saadaoui Mohamed	M.C.A	Examineur
Dr. Saf Salim	M.C.B	Examineur

Année Universitaire 2022/2023

Résumé

Ce mémoire, propose une contribution à l'étude de l'existence, l'unicité et l'explosion en temps fini(Blow-up) pour deux problèmes : parabolique et hyperbolique amorti non linéaire à exposants variables pour des solutions faible.

Mots - clés : Parabolique, hyperbolique, existence ; unicité ; explosion en temps fini(Blow-up) ; exposants variable.

**

Dédicaces

EDédie ce fruit de mes longues années d'études tout d'abord : mes très chers parents qui sont la lumière de ma vie, qui ont tant souffert et sacrifiés pour que je sois heureuse, pour leurs conseils et leurs encouragements. et vous remercie pour tout vos efforts fournis pour moi, que Dieu vous garde, vous protège, et vous bénisse la vie. Et je le dédie :

tous les membres de ma famille, mes soeurs , mes frère tous mes profeseur et mes collègues avec qui j'ai partagé de très bons moments tout le long de ces années.

Remerciements

Tout d'abord je remercie **Allah** le tout puissant, qui nous a donné la puissance et la volonté pour achever ce travail.

Je remercie vivement monsieur **Dr. Saadaoui Mouhamzd**, qui a accepté de présider et d'honorer de sa présence le jury de soutenance du présent mémoire de Master.

Je tiens également à remercier **Dr. ABDELAZIZE Rahmoune** pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens à remercier mon encadreur **Dr. ABITA Rahmoune** pour son soutien et son aide considérables, ses conseils précieux et ses remarques pertinentes qui m'ont guidé durant la réalisation de ce mémoire.

Gaoui Nour Elhouda

Table des matières		1
Introduction		1
1 Espaces Des Fonctions		4
1.1 Introduction		4
1.2 Préliminaires		4
1.3 Espaces de Lebesgue à Exposants Variables		7
1.3.1 Définition et propriétés de base		7
1.3.2 Norme équivalente et complétude de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$		14
1.3.3 Ensembles denses dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$		18
1.4 Espaces de Sobolev à exposants variables		20
2 Équation d'onde semi-linéaire avec un terme source logarithmique non linéaire : Existence et explosion en temps fini		21
2.1 Introduction		21
2.2 Preliminaries		23
2.3 Existence de solutions faibles		24
2.4 Explosion de solutions faibles		32
3 Équations D'ondes non-linéaires Avec Amortissement : Existence et explosion en temps fini		38
3.1 Introduction		38
3.2 Existence de solutions faibles		41
3.3 Explosion en temp fini(Blow-up)		50
4 Résultats de non-existence globale et d'explosion pour une équation d'évolution quasi-linéaire		56
4.1 Introduction		56

4.1.1	Hypothèses mathématiques	58
4.1.2	Existence et Unicité	58
4.1.2.1	Exploser pour une énergie initiale positive	59
4.1.3	Exploser pour une énergie initiale négative	63
Bibliographie		66

Notre objectif dans ce mémoire est l'existence, l'unicité et l'explosion en temps fini pour des problèmes hyperboliques amortie non linéaire avec des exposants variables.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre, est consacré à une brève exposition de la théorie des espaces de fonctions qui fournissent un cadre analytique pour l'étude des EDPs à exposants variable de non-linéarité. Ce sont les espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposants variables, qui peuvent être considérés comme des cas particuliers des espaces d'Orlicz, ou des espaces semi-modulaires.

Dans le second chapitre, nous intéressent à l'existence et l'unicité de solutions faibles, l'explosion en temp fini(the Blow-up) sous certains conditions sur les données pour un équation d'onde semi-linéaire avec un terme source logarithmique non linéaire sous condition aux limites de Dirichlet homogène

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{m(\cdot)-2} u_t = |u|^{p(\cdot)-2} u \ln |u|, & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ u(x, t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

Dans (2.1), Ω soit un domaine bornée dans $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ avec une frontière lisse $\partial\Omega$, pour tous $m(\cdot), p(\cdot) : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ fonctions mesurables satisfaisant pour la fonction q

$$\begin{cases} 2 \leq q_1 \leq q(x) \leq q_2 \leq \frac{2n}{n-2}, \quad n \geq 3, \\ 2 \leq q_1 \leq q(x) \leq q_2 < \infty, \quad n \leq 2, \end{cases} \quad (2)$$

avec

$$q_1 := \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} q(x), \quad q_2 := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} q(x)$$

et la condition de continuité log-Hölder :

$$\begin{aligned} |q(x) - q(y)| &\leq -\frac{A}{\log|x-y|}, \quad \text{pou p.p. } x, y \in \Omega, \quad \text{avec } |x - y| < \delta \\ A &> 0, \quad 0 < \delta < 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Dans le deuxième chapitre, nous concentrons sur une classe d'existence, d'unicité et d'explosion en un temps fini T de la solution d'un modèle d'équation d'onde logarithmique impliquant des exposant variable et des termes sources non linéaires sous des conditions aux limites de Dirichlet homogènes.

$$u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{m(\cdot)-2} u_t = |u|^{p(\cdot)-2} u \ln |u|$$

Nous avons appliqué la méthode de Faedo-Galerkin combinée au théorème du point fixe de Banach pour déterminer l'existence et l'unicité d'une solution locale dans le temps locale. Sous l'hypothèse de conditions appropriées, différentes techniques des inégalités sont utilisées pour obtenir les explosions en un temps fini T de la solution. Ce type d'équation est lié à la dynamique des fluides, aux fluides électrorhéologiques, à la théorie de la mécanique quantique, à la physique nucléaire, à l'optique et à la géophysique.

Dans le dernier chapitre, un résultats de non-existence globale et d'explosion pour une équation d'évolution quasi-linéaire et l'explosion pour des solution faible avec une énergie initiale négative à été analysée pour un problème aux limites initiales suivant :

$$\begin{cases} a(x, t) u_t - \Delta_{m(\cdot)} u = f(u), & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, t) = 0 \text{ sur } \Gamma, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (4)$$

où

$$\Delta_{m(\cdot)} u = \operatorname{div} \left(|\nabla u|^{m(x)-2} \nabla u \right)$$

appelé l'opérateur $m(\cdot)$ -Laplacien, où Ω un domaine borné dans \mathbb{R}^n , $n \geq 1$ de frontière lisse $\Gamma = \partial\Omega$.

1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à une brève exposition de la théorie des espaces de fonctions qui fournissent un cadre analytique pour l'étude des EDPs à non-linéarité variable. Ce sont les espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposants variables, qui peuvent être considérés comme des cas particuliers des espaces d'Orlicz [92], ou des espaces semi-modulaires [89, 90, 91]. La théorie de tels espaces est très intéressante en soi, ce sujet difficile s'est développé très rapidement au cours des dernières décennies.

Une discussion détaillée de la théorie des espaces de Lebesgue et de Sobolev avec des exposants variables dépasse le cadre de la monographie, pour cette raison, nous nous limitons à décrire un ensemble minimal de propriétés nécessaires dans la suite de la procédure. Notre présentation suit les documents [93, 94, 95, 96, 97].

Un aperçu approfondi et approfondi de la théorie des espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposant variable, ainsi que la discussion de la bibliographie disponible sur cette question, se trouvent dans les monographies [98, 99].

1.2 Préliminaires

Avant de définir les espaces avec des exposants variables, introduisons plusieurs notations et rappelons quelques faits bien connus les plus utilisés tout au long du texte. Sauf au indication spéciale, Ω représente toujours un domaine borné de \mathbb{R}^n à frontière $\Gamma = \partial\Omega$ Lipschitzienne, ou C^1 par morceaux .

Notons que

$$Q = \{(x, t) : x \in \Omega, t \in (0, T)\}$$

est utilisé pour un cylindre générique en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ avec la base Ω et une hauteur finie arbitraire $T < \infty$. La limite latérale de Q est notée $\Gamma = \partial\Omega \times (0, T)$. Si la valeur de T est importante pour la procédure, nous utilisons les notations Q_T et Γ_T . Pour par souci de concision, pour les points du cylindre $Q = \Omega \times (0, T)$ on utilise souvent le notation $z = (x, t)$. étant donné une fonction $\phi(x, t) \in C^0(\overline{Q})$, par convention on désigne

$$\begin{aligned}\phi^+(t) &= \sup_{\Omega} \phi(x, t), & \phi^-(t) &= \inf_{\Omega} \phi(x, t), \\ \phi^+ &= \sup_Q \phi(x, t), & \phi^- &= \inf_Q \phi(x, t).\end{aligned}\tag{1.1}$$

L'espace de Banach $L^p(\Omega)$ à constante $p \in (1, \infty)$ est l'ensemble des fonctions mesurables à norme finie

$$\|u\|_{q,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Par $L^\infty(\Omega)$ on désigne l'ensemble

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \mapsto \mathbb{R} \mid u \text{ est mesurable, } |u| \leq M \text{ p.p. } \Omega \right\}.$$

La norme de $L^\infty(\Omega)$ est définie par

$$\|u\|_{\infty,\Omega} = \inf \{ M > 0 : |u| \leq M \text{ a.e. en } \Omega \}.$$

L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert avec le produit intérieur

$$(u, v)_{2,\Omega} = \int_{\Omega} uv dx.$$

$W^{k,q}(\Omega)$, $k \geq 1$, $1 \leq q \leq \infty$, est l'espace de k fois des fonctions faiblement différentiables à norme bornée

$$\|u\|_{W^{k,q}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} |D^\alpha u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

où α est le multi-indice, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ avec un entier $\alpha_i \geq 0$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

L'espace $W_0^{k,p}(\Omega)$ est la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ (l'ensemble des fonctions lisses à support compact en Ω) dans la norme de $W^{k,p}(\Omega)$. Une norme équivalente de $W_0^{1,p}(\Omega)$ est donnée par

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{p,\Omega}.$$

Dans le cas $p = 2$ on note $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ et $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$. Le produit interne dans l'espace de Hilbert $H_0^k(\Omega)$, $k \geq 1$, est défini par

$$(u, v)_{H_0^k(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{2,\Omega}.$$

On désigne par $L^p(0, T; L^q(\Omega))$, $p, q \geq 1$, l'espace des fonctions mesurables avec la norme bornée

$$\|u\|_{L^p(0, T; L^p(\Omega))} = \left(\int_0^T \|u(\cdot, t)\|_{p, \Omega}^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dans le cas $p = q$, nous écrivons $\|u\|_{L^p(0, T; L^p(\Omega))} = \|u\|_{p, Q}$. La notation $L^q(0, T; W_0^{1, p}(\Omega))$ représente l'espace des fonctions mesurables, faiblement différentiables en x et bornées dans la norme

$$\|u\|_{L^q(0, T; W_0^{1, p}(\Omega))} = \left(\int_0^T \|\nabla u(\cdot, t)\|_{p, \Omega}^q dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Pour chaque $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $p' = \frac{p}{p-1}$, l'inégalité de Hölder satisfaisant :

$$\int_{\Omega} |f||g| dx \leq \|f\|_{p, \Omega} \|g\|_{p', \Omega}.$$

Pour tous les nombres réels non négatifs x, y et chaque $p \in (1, \infty)$, l'inégalité de Young satisfaisant :

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{p'}y^{p'}, \quad p' = \frac{p}{1-p}.$$

Nous utiliserons souvent cette inégalité sous la forme suivante :

pour tout $\varepsilon > 0$, $p \in (1, \infty)$ et réel non négatif x, y

$$xy = \left((\varepsilon p)^{\frac{1}{p}} x (\varepsilon p)^{-\frac{1}{p}} y \right) \leq \varepsilon x^p + \frac{(p-1)\varepsilon^{-\frac{1}{p-1}}}{p^{p'}} y^{p'}.$$

L'inégalité de Gronwall. Soit une fonction non négative $v(t) : [0, T] \mapsto \mathbb{R}$ satisfaisant l'inégalité différentielle

$$v'(t) \leq a(t)v(t) + f(t) \quad \text{a.e in } (0, T), \quad v(0) = v_0,$$

avec $a(t)$ donné, $f(t) \in L^1(0, T)$. Alors pour $a, t \in (0, T)$

$$v(t) \leq v_0 \exp \left(\int_0^t a(\tau) d\tau \right) + \int_0^t f(\tau) \exp \left(\int_{\tau}^t a(s) ds \right) d\tau.$$

Une fonction $f(z, r) : Q \times R \mapsto R$ est appelée *fonction carathéodore* si $f(z, r)$ est mesurable en Q pour tout $r \in R$ et continue par rapport à r pour a.e. $z \in Q$.

1.3 Espaces de Lebesgue à Exposants Variables

1.3.1 Définition et propriétés de base

Soit

$$\begin{cases} \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ un domaine ouvert borné} \\ \text{avec la limite Lipschitz-continue } \partial\Omega \end{cases} . \quad (1.2)$$

et

$$p : \Omega \mapsto (1, \infty) \text{ soit une fonction mesurable.} \quad (1.3)$$

Sur l'ensemble de toutes les fonctions $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ on définit la fonctionnelle

$$A_{p(\cdot)}(f) = \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} dx < \infty$$

et présenter l'ensemble

$$L^1(\Omega) = \left\{ f \text{ mesurable sur } \Omega : A_{p(\cdot)}(f) < \infty \right\},$$

qui est un espace linéaire. Il est facile de vérifier que

1. $A_{p(\cdot)}(f) \geq 0$ pour chaque f ,
2. $A_{p(\cdot)}(f) = 0 \iff f = 0$,
3. $A_{p(\cdot)}(f) = A_{p(\cdot)}(-f)$ pour chaque f ,
4. $A_{p(\cdot)}(f)$ est convexe.

Chaque fonctionnelle qui satisfait aux propriétés (1) à (4) est appelée modulaire convexe.

Le modulaire $A_{p(\cdot)}(f)$ possède aussi les propriétés

(5) si $|f(x)| \geq |g(x)|$ pour p.p. $x \in \Omega$ et si $A_{p(\cdot)}(f) < \infty$, alors $A_{p(\cdot)}(f) \leq A_{p(\cdot)}(g)$, l'inégalité est stricte si $|f| \leq |g|$,

(6) si $0 < A_{p(\cdot)}(f) < \infty$, alors la fonction $\lambda \mapsto A_{p(\cdot)}(f/\lambda)$ est continue et décroissante sur l'intervalle $[1, \infty)$

La propriété (5) est évidente. Pour prouver la propriété (6), on remarque que pour a.e. $x \in \Omega$ $|f(x)/\lambda|^{p(x)}$ est monotone décroissant en fonction de $\lambda > 1$, et que $A_{p(\cdot)}(f/\lambda)$ est monotone en vertu de (5). Soit $0 < A_{p(\cdot)}(f/\lambda) < \infty$ et $\lambda_k \searrow \lambda$. Alors $|f(x)/\lambda_k| \nearrow |f(x)/\lambda|$ et la continuité de $A_{p(\cdot)}(f/\lambda)$ découle du théorème de convergence monotone.

Introduisons le fonctionnel

$$\|f\|_{p(\cdot), \Omega} \equiv \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : A_{p(\cdot)} \left(\frac{f}{\lambda} \right) \leq 1 \right\}. \quad (1.4)$$

Chaque fois que cela ne cause pas de confusion, nous utilisons la sténographie $\|f\|_{p(\cdot), \Omega} = \|f\|_p$.

Proposition 1.1. Si $0 < \|f\|_p < \infty$ alors $A_p(f/\|f\|_p) \leq 1$.

Démonstration. Prend une suite $\{\gamma_k\}$ telle que $\gamma_k \searrow \|f\|_p$. En vertu de la définition de $\|f\|_p$, la propriété (6) et le lemme de Fatou

$$A_p(f/\|f\|_p) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} A_p(f/\gamma_k) \leq 1.$$

□

Corollaire 1.1. Si $0 < \|f\|_p \leq 1$, alors $A_p(f) \leq 1$.

Démonstration.

$$A_p(f) = \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} dx \leq \int_{\Omega} \frac{|f(x)|^{p(x)}}{\|f\|_p^{p(x)}} dx = A_p(f/\|f\|_p) \leq 1.$$

□

Proposition 1.2 (Norme de Luxembourg de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$). La fonctionnelle

$$\|\cdot\|_{p(\cdot),(\Omega)} : L^{p(\cdot)}(\Omega) \mapsto [0, \infty)$$

définit une norme de l'espace $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Démonstration. Nous devons vérifier que

1. $\|f\|_{p(\cdot),\Omega} \geq 0$ pour chaque $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$;
2. $\|f\|_{p(\cdot),\Omega} = 0 \Rightarrow f = 0$ pour la norme en Ω ;
3. $\forall (\mu) \in \mathbb{R}, f \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \|\mu f\|_{p(\cdot),\Omega} = |\mu| \|f\|_{p(\cdot),\Omega}$;
4. $f, g \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \|f + g\|_{p(\cdot),\Omega} \leq \|f\|_{p(\cdot),\Omega} + \|g\|_{p(\cdot),\Omega}$.

(1) La première propriété est évidente.

(2) Notons

$$\mathcal{P} = \{\lambda > 0 : A_{p(\cdot)}(f/\lambda) \leq 1\}.$$

Il est clair que pour $f = 0$, nous avons $\mathcal{P}(0) = (0, \infty)$. Si $\|f\|_{p(\cdot),\Omega} \neq 0$, il résulte de la propriété (6) du modulaire $A_{p(\cdot)}(\cdot)$ et de la Proposition 1.1 que $\mathcal{P}(f) = [\lambda, \infty)$ avec $\lambda = \|f\|_p$. Par (2.4)

$$\|f\|_p = \inf \mathcal{P}(f),$$

c'est pourquoi pour $f = 0$, nous avons $\|f\|_p = \inf \mathcal{P}(0) = 0$. Supposons, par contradiction, qu'il existe $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tel que $\|f\|_{p(\cdot),\Omega} = 0$, mais $f \neq 0$ sur un ensemble de mesure non nulle en Ω . Cela signifie que

$$\int_{\Omega} |f|^{p(x)} dx \geq \varepsilon > 0$$

pour certains $\varepsilon > 0$. Puisque $\inf \mathcal{P}(f) = 0$, il existe une suite $\{\lambda_k\} \subset \mathcal{P}(f) \cap (0, 1)$ telle que $\lambda_k \rightarrow 0$ et $A_{p(\cdot)}(f/\lambda_k) \leq 1$, ce qui est impossible car

$$1 \geq A_{p(\cdot)}(f/\lambda_k) = \int_{\Omega} |f/\lambda_k|^{p(x)} dx \geq \frac{1}{\lambda_k} \int_{\Omega} |f|^{p(x)} dx \geq \frac{\varepsilon}{\lambda_k} \rightarrow \infty \text{ quand } k \rightarrow \infty.$$

(3) La troisième propriété est évidente.

5. Présentons l'ensemble

$$\mathcal{M} = \left\{ f \in L^{p(x)}(\Omega) : A_p(f) \leq 1 \right\}$$

et remarquez que $\mathcal{P}(f) = \{\lambda > 0 : f/\lambda \in \mathcal{M}\}$. Puisque $A_p(\cdot)$ est convexe, l'ensemble \mathcal{M} est également convexe. Pour chaque $f, g \in L^{p(x)}(\Omega)$ et un $\varepsilon > 0$ arbitraire

$$\frac{f}{\varepsilon + \|f\|_p}, \frac{g}{\varepsilon + \|g\|_p} \in \mathcal{M},$$

d'où

$$\frac{\theta f}{\varepsilon + \|f\|_p} + \frac{(1-\theta)g}{\varepsilon + \|g\|_p} \in \mathcal{M} \quad \forall \theta \in (0, 1)$$

en raison de la convexité de \mathcal{M} . Choisissons θ de la manière spéciale :

$$\frac{\theta}{\varepsilon + \|f\|_p} = \frac{(1-\theta)}{\varepsilon + \|g\|_p} \Leftrightarrow \frac{\theta f}{\varepsilon + \|f\|_p} + \frac{(1-\theta)g}{\varepsilon + \|g\|_p} = \frac{f+g}{\|f\|_p + \|g\|_p + 2\varepsilon} \in \mathcal{M}.$$

Il résulte que pour chaque $\varepsilon > 0$

$$\|f\|_p + \|g\|_p + 2\varepsilon \in \mathcal{P}(f+g),$$

C'est,

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p + 2\varepsilon.$$

Puisque ε est arbitraire, l'assertion suit.

□

Il résulte de la proposition 1.2 que l'ensemble $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ équipé de la norme de Luxembourg $\|\cdot\|_{p(\cdot), \Omega}$ est un espace linéaire normé. Dans le cas particulier $p = \text{const}$ le modulaire $A_{p(\cdot)}$ génère l'espace de Banach $L^p(\Omega)$ avec la norme $\|f\|_{p, \Omega} = A_p^{\frac{1}{p}}(f)$, qui est l'espace de Lebesgue classique $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{p, \Omega})$.

L'espace $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est un cas particulier des espaces d'Orlicz-Musielak $L^M(\Omega)$. $L^M(\Omega)$ est constitué de toutes les fonctions f sur Ω telles que

$$\int_{\Omega} M(x, \lambda f(x)) dx < \infty \text{ pour certains } \lambda > 0,$$

où $M : \Omega \times \mathbb{R} \mapsto [0, \infty)$ est une fonction mesurable non négative, semi-continue inférieure, convexe, $m\tilde{A}^a$ me pour a.e. $x \in \Omega$, et satisfaisant la condition $\lim_{u \rightarrow 0} M(x, u) = M(x, 0) = 0$. Pour les espaces de Lebesgue-Orlicz $L^{p(\cdot)}(\Omega) = L^M(\Omega)$ avec $M(x, u) = |u|^{p(x)}$.

Dénotons

$$p^- = \operatorname{ess\,inf}_{\Omega} p(x), \quad p^+ = \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} p(x).$$

Proposition 1.3. *Si $p^+ < \infty$, alors pour tout f avec $0 < \|f\|_{p(\cdot), \Omega} < \infty$*

$$A_{p(\cdot)}(f/\|f\|_{p(\cdot), \Omega}) = 1.$$

Démonstration. En vertu de la Proposition 1.1, il suffit de vérifier que l'inégalité $A_{p(\cdot)}(f/\|f\|_{p(\cdot), \Omega}) < 1$ est impossible. Pour chaque $0 < \lambda \leq \|f\|_{p(\cdot), \Omega}$

$$\begin{aligned} A_{p(\cdot)}(f/\lambda) &= \int_{\Omega} \frac{|f|^{p(x)}}{\lambda^{p(x)}} dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{|f|}{\|f\|_{p(\cdot), \Omega}} \right)^{p(x)} \left(\frac{\|f\|_{p(\cdot), \Omega}}{\lambda} \right)^{p(x)} dx \\ &\leq \left(\frac{\|f\|_{p(\cdot), \Omega}}{\lambda} \right)^{p^+} A_{p(\cdot)}(f/\|f\|_{p(\cdot), \Omega}). \end{aligned}$$

Si $A_{p(\cdot)}(f/\|f\|_{p(\cdot), \Omega}) < 1$, on peut choisir $\lambda < \|f\|_{p(\cdot), \Omega}$ tel que $A_{p(\cdot)}(f/\lambda) \leq 1$, ce qui contredit la définition de la norme $\|f\|_{p(\cdot), \Omega}$. □

Corollaire 1.2. *Pour $p^+ < \infty$ propriétés (2) et (4) de le modulaire $A_{p(\cdot)}(f)$ avec la proposition ?? donnent :*

$$\text{si } \|f\|_{p(\cdot), \Omega}, \text{ alors } A_{p(\cdot)}(f) \leq \|f\|_{p(\cdot), \Omega}.$$

Supposons maintenant que

$$\forall p.p.x \in \Omega \quad p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, \infty). \quad (1.5)$$

La relation entre la norme de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ et le modulaire $A^{p(\cdot)}(\cdot)$ est donnée dans l'assertion suivante.

Lemme 1.1. *Que les conditions (2.3) et (2.6) soient remplies. Alors pour chaque $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$*

$$\min \left\{ \|f\|_{p(\cdot), \Omega}^{p^-}, \|f\|_{p(\cdot), \Omega}^{p^+} \right\} \leq A_{p(\cdot)}(f) \leq \max \left\{ \|f\|_{p(\cdot), \Omega}^{p^-}, \|f\|_{p(\cdot), \Omega}^{p^+} \right\}. \quad (1.6)$$

Démonstration. Supposons d'abord que $\mu = \|f\|_{p(\cdot), \Omega} \neq 0$ et considérons la fonction $h(x) = f(x)/\mu$. D'après la proposition 1.3 $h \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ avec $\|h\|_{p(\cdot), \Omega} = 1$. D'autre part,

$$1 = \|h\|_{p(\cdot), \Omega} \leq A_{p(\cdot)}(h) \leq \begin{cases} \mu^{-p^+} A_{p(\cdot)}(f) & \text{si } \mu \leq 1, \\ \mu^{-p^-} A_{p(\cdot)}(f) & \text{si } \mu > 1, \end{cases}$$

d'où $A_{p(\cdot)}(f) \geq \min \{ \mu^{p^+}, \mu^{p^-} \}$. Plus,

$$A_{p(\cdot)}(f) = \int_{\Omega} |f|^{p(x)} dx = \int_{\Omega} \mu^{p(x)} |h|^{p(x)} dx \leq \{ \mu^{p^-} \text{ si } \mu \leq 1, \mu^{p^+} \text{ si } \mu > 1, \}$$

ce qui donne $A_{p(\cdot)}(f) \geq \min \{ \mu^{p^+}, \mu^{p^-} \}$. Si $\|f\|_{p(\cdot), \Omega} = 0$, alors $f = 0$ a.e. en Ω et $A_{p(\cdot), \Omega} = 0$ par la propriété (2) du modulaire. \square

Corollaire 1.3. *L'assertion précédente peut être représentée sous la forme équivalente : si les conditions (2.3) et (2.6) sont remplies, alors pour tout $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$*

$$\min \left\{ A_{p(\cdot)}^{\frac{1}{p^-}}(f), A_{p(\cdot)}^{\frac{1}{p^+}}(f) \right\} \geq \|f\|_{p(\cdot), \Omega} \geq \max \left\{ A_{p(\cdot)}^{\frac{1}{p^-}}(f), A_{p(\cdot)}^{\frac{1}{p^+}}(f) \right\}. \quad (1.7)$$

Si l'exposant p est constant, alors $p^+ = p^-$, ce qui convertit (2.11) et (2.9) en égalité $A_p(f) = \|f\|_{p, \Omega}^p$.

Corollaire 1.4. *Il résulte de (2.11) et (2.9) que si les conditions (2.3) et (2.6) sont remplies, alors pour tout $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$*

- (i) $\|f\|_{p(\cdot), \Omega} = 1 \iff A_{p(\cdot)}(f) = 1$
- (ii) $\|f\|_{p(\cdot), \Omega} < 1 \iff A_{p(\cdot)}(f) < 1$
- (iii) $\|f\|_{p(\cdot), \Omega} > 1 \iff A_{p(\cdot)}(f) > 1$.

Lemme 1.2. *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions $f_n \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ et $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ avec $p(x)$ vérifiant (2.3) et (2.6). Puis*

$$\|f_n - f\|_{p(\cdot), \Omega} \rightarrow 0 \quad \text{si et seulement si} \quad A_{p(\cdot)}(f_n - f) \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

Démonstration. L'assertion est un sous-produit du Lemme 1.1. \square

Lemme 1.3. *Soient les fonctions $p(x)$ et $q(x)$ vérifiant les conditions (2.3) et (2.6). Si $p(x) \geq q(x)$ e.a. dans Ω , alors $L^{p(\cdot)}(\Omega) \subset L^{q(\cdot)}(\Omega)$.*

Démonstration. En vertu du lemme 1.1, il suffit de vérifier que la condition $A_{p(\cdot)}(u) < \infty$ donne $A_{q(\cdot)}(u) < \infty$. Par l'inégalité de Young

$$\begin{aligned} A_{p(\cdot)}(u) &\leq \int_{\Omega} \left(\frac{q(x)}{p(x)} |u|^{p(x)} + \frac{p(x) - q(x)}{p(x)} \right) dx \\ &\leq \int_{\Omega} (1 + |u|^{p(x)}) dx = |\Omega| + A_{q(\cdot)}(u). \end{aligned} \quad (1.8)$$

\square

Corollaire 1.5. *Sous les conditions du Lemme 1.3 la norme de l'opérateur plongeant $L^{p(x)}(\Omega) \mapsto L^{q(x)}(\Omega)$ ne dépasse pas $1 + |\Omega|$. Il suffit de remarquer que par vertu de (2.30)*

$$\sup_{A_{p(\cdot),\Omega}(u)=1} \frac{A_{q(\cdot),\Omega}(u)}{A_{p(\cdot),\Omega}(u)} = \sup_{A_{p(\cdot),\Omega}(u)=1} A_{p(\cdot),\Omega}(u) \leq 1 + |\Omega|.$$

Lemme 1.4 (L'inégalité de Hölder). *Soient les conditions (2.3) et (2.6) remplies. Pour tout $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ et $g \in L^{p'(x)}(\Omega)$ avec $p'(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$ ce qui suit inégalité Hölder :*

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{(p^-)'} \right) \|f\|_{p(\cdot),\Omega} \|g\|_{p'(\cdot),\Omega} \leq 2 \|f\|_{p(\cdot),\Omega} \|g\|_{p'(\cdot),\Omega}. \quad (1.9)$$

Démonstration. Notons $\|f\|_{p(\cdot),\Omega} = \lambda$, $\|g\|_{p'(\cdot),\Omega} = \mu$ et supposons que $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$. Par l'inégalité de Young, pour p.p. $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} |f(x)g(x)| &= \lambda\mu \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right| \left| \frac{g(x)}{\mu} \right| \\ &\leq \lambda\mu \left(\frac{1}{p(x)} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} \left| \frac{g(x)}{\mu} \right|^{p'(x)} \right) \\ &\leq \lambda\mu \left(\frac{1}{p^-} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} + \frac{1}{(p^-)'} \left| \frac{g(x)}{\mu} \right|^{p'(x)} \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Par la proposition 1.3

$$A_{p(\cdot)}(f/\lambda) = 1, \quad A_{p(\cdot)}(g/\mu) = 1, \quad (1.11)$$

En intégrant (1.10) sur Ω et en appliquant (2.17) on obtient (2.16) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx &\leq \lambda\mu \left(\frac{1}{p^-} A_{p(\cdot)}(f/\lambda) + \frac{1}{(p^-)'} A_{p(\cdot)}(g/\mu) \right) \\ &= \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{(p^-)'} \right) \|f\|_{p(\cdot),\Omega} \|g\|_{p'(\cdot),\Omega}. \end{aligned}$$

Soit $\lambda\mu = 0$. Supposons par souci de précision, que $\lambda = 0$. Alors $f = 0$ a.e. en Ω et la conclusion est la suivante :

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx = 0.$$

□

Lemme 1.5. *Soit Ω satisfait la condition (2.2), $p(x)$ satisfait les conditions (2.3) et (2.6) et $q = \text{const} \leq 1$. Si $q \geq p(x)$ a.e. en Ω , alors*

$$\|f\|_{q,\Omega} \leq C \|f\|_{p(\cdot),\Omega} \quad \text{avec la constante } C = (1 + |\Omega|)^{\frac{1}{q}}.$$

Démonstration. Soit $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ avec $\|f\|_{q,\Omega} = \lambda < \infty$. On peut supposer que $\lambda > 0$, sinon l'inégalité requise est évidente. Posons $g(x) = f(x)/\lambda$. D'après le lemme 1.3 $g \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ avec $\|g\|_{p(\cdot),\Omega} = A_{p(\cdot)}(g) = 1$. D'après la proposition 1.3

$$\frac{1}{\lambda} \|f\|_{q,\Omega} = \|g\|_{q,\Omega} \leq A_q^{\frac{1}{q}}(g). \quad (1.12)$$

En appliquant l'inégalité de Young et le corollaire 1.5 (i), nous trouvons que

$$\begin{aligned} A_q(g) &= \int_{\Omega} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^q dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left(\frac{p(x) - q}{p(x)} + \frac{q}{p(x)} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} \right) dx \\ &\leq |\Omega| + A_{p(\cdot)}(g) = 1 + |\Omega|. \end{aligned}$$

En introduisant cette inégalité dans (2.18) on arrive à l'inégalité

$$\|f\|_{q,\Omega} \leq (1 + |\Omega|)^{\frac{1}{q}} \lambda = (1 + |\Omega|)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{p(\cdot),\Omega}.$$

□

Lemme 1.6. *Soit les exposants $p(x)$, $q(x)$ satisfont les conditions (2.3) et (2.6) et $p(x) \leq q(x)$ p.p. en Ω . Alors le plongement $L^{p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$ est continu. La norme de l'opérateur de plongement ne dépend que de $|\Omega|$, p^{\pm} et q^{\pm} :*

$$\|f\|_{q(\cdot),\Omega} \leq C \|f\|_{p(\cdot),\Omega}, \quad C = C(|\Omega|, p^{\pm}, q^{\pm}).$$

Démonstration. Preuve Le plongement $L^{p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$ découle du Lemme 1.3. Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ avec $\|f\|_{p(\cdot),\Omega} = \lambda > 0$. Notons

$$\Omega_2 = \{x \in \Omega : p(x) = q(x)\}, \quad \Omega_1 = \Omega \setminus \Omega_2,$$

et considérons la fonction $h = f/\lambda$. D'après la proposition 1.3 $A_{p(\cdot)}(h) = 1$ et

$$\begin{aligned} A_{p(\cdot)}(h) &= \int_{\Omega_1} |h|^{q(x)} dx + \int_{\Omega_2} |h|^{q(x)} dx \\ &= \int_{\Omega_1} \left(|h|^{p(x)} \right)^{\frac{q(x)}{p(x)}} dx + \int_{\Omega_2} |h|^{p(x)} dx \\ &\leq 2 \|1\|_{\frac{p(\cdot)}{p(\cdot)-q(\cdot)},\Omega_1} \| |h|^{q(x)} \|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)},\Omega_1} + \int_{\Omega_2} |h|^{p(x)} dx \\ &\leq 2 \max \left\{ |\Omega|^{1-\frac{q^+}{q^-}}, |\Omega|^{1-\frac{q^-}{q^+}} \right\} \max \left\{ A_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}^{\frac{q^-}{q^+}}}(|h|^{q(x)}), A_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}^{\frac{q^+}{q^-}}}(|h|^{q(x)}) \right\} + A_{p(\cdot)}(h) \\ &= 2 \max \left\{ |\Omega|^{1-\frac{q^+}{q^-}}, |\Omega|^{1-\frac{q^-}{q^+}} \right\} \max \left\{ A_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}^{\frac{q^-}{q^+}}}(h), A_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}^{\frac{q^+}{q^-}}}(h) \right\} + A_{p(\cdot)}(h) \\ &= 2 \max \left\{ |\Omega|^{1-\frac{q^+}{q^-}}, |\Omega|^{1-\frac{q^-}{q^+}} \right\} + 1 \end{aligned}$$

D'autre part, par (2.9)

$$\frac{1}{\lambda} \|f\|_{q(\cdot), \Omega} = \|h\|_{q(\cdot), \Omega} \leq \max \left\{ A_{q(\cdot)}^{\frac{1}{q^-}}(h), A_{q(\cdot)}^{\frac{1}{q^+}}(h) \right\}.$$

□

1.3.2 Norme équivalente et complétude de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

étant donné $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, on définit la fonctionnelle

$$|f|_{p(\cdot), \Omega} = \sup_{A_{p'(\cdot)}(g) \leq 1} \int_{\Omega} f(x)g(x)dx, \quad p'(x) = \frac{p(x)}{p(x) - 1}. \quad (1.13)$$

Proposition 1.4 (La norme d'Orlicz de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$). *La fonctionnelle*

$$|\cdot|_{p(\cdot), \Omega} : L^{p(\cdot)}(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$$

définit une norme de $L^{p(x)}(\Omega)$.

Démonstration. Nous devons vérifier que

1. $|f|_{p(\cdot), \Omega} \geq 0$ pour chaque $f \in L^{p(x)}(\Omega)$;
2. $|f|_{p(\cdot), \Omega} = 0 \Rightarrow f = 0$ p.p. en Ω ;
3. $\forall (\mu) \in \mathbb{R}, f \in L^{p(x)}(\Omega) |\mu f|_{p(\cdot), \Omega} = |\mu| |f|_{p(\cdot), \Omega}$;
4. $f, g \in L^{p(x)}(\Omega) |f + g|_{p(\cdot), \Omega} \leq |f|_{p(\cdot), \Omega} + |g|_{p(\cdot), \Omega}$.

(1) Nous raisonnons par contradiction. Supposons que $|f|_p < 0$. Soit $g \in L^{p'(x)}(\Omega)$ une fonction arbitraire telle que $A_{p(\cdot)}(-g) \leq 1$. D'après (2.32)

$$0 > |f|_{p(\cdot), \Omega} \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

Puisque $A_{p'(\cdot)}(g) = A_{p'(\cdot)}(-g)$, on a aussi

$$0 > |f|_{p(\cdot), \Omega} \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} f(x)(-g(x))dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} f(x)g(x)dx > 0.$$

ce qui est impossible.

(2) Pour $f = 0$ p.p. en Ω l'égalité $|f|_p = 0$ découle de la définition de $|f|_{p(\cdot), \Omega}$. Supposons que $|f|_{p(\cdot), \Omega} = 0$ mais $f \neq 0$ a.e. en Ω , soit $A_{p(\cdot)}(f) \neq 0$. Introduisons la fonction

$$g(x) = |f(x)|^{p(x)-1} \text{signe } f(x) \in L^{p'(x)}(\Omega).$$

Nous avons

$$0 = |f|_{p(\cdot), \Omega} \geq \int_{\Omega} f(x)g(x)dx = \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)}dx = A_{p(\cdot)}(f) \neq 0,$$

ce qui est impossible.

(3)-(4) cette propriété est un sous-produit immédiat des propriétés de la suprême. □

Proposition 1.5. Si $|f|_{p(\cdot),\Omega} < \infty$ et $A_{p'(\cdot)}(g) < \infty$, alors

$$\left| \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \right| \leq \begin{cases} |f|_{p(\cdot),\Omega} & \text{si } A_{p'(\cdot)}(g) \leq 1, \\ |f|_{p(\cdot),\Omega} A_{p'(\cdot)}(g) & \text{autrement.} \end{cases}$$

Démonstration. Le premier cas est un sous-produit immédiat de (2.32). Soit $A_{p'(\cdot)}(g) > 1$. En vertu de la convexité du modulaire $A_{p'(\cdot)}(\cdot)$

$$A_{p'(\cdot)}\left((A_{p'(\cdot)}(g))^{-1}g\right) \leq (A_{p'(\cdot)}(g))^{-1}A_{p'(\cdot)}(g) = 1,$$

d'où

$$\left| \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \right| = A_{p'(\cdot)}(g) \left| \int_{\Omega} f(x)g(x)/A_{p'(\cdot)}(g)dx \right| \leq A_{p'(\cdot)}(g)|f|_{p(\cdot),\Omega}.$$

□

Proposition 1.6. Soit $p(x)$ satisfait (2.3) et (2.6). Si $A_{p(\cdot)}(f) < \infty$ et $|f|_{p(\cdot),\Omega} \leq 1$, alors $A_{p(\cdot)}(f) \leq 1$.

Démonstration. On argumente par contradiction : supposons que $A_{p(\cdot)}(f) > 1$. Par la propriété (6) du modulaire (continuité de $A_{p(\cdot)}(f/\lambda)$ par rapport à λ) il existe $\lambda > 1$ tel que $A_{p(\cdot)}(f/\lambda) = 1$. Posons

$$g(x) = |f(x)/\lambda|^{p(x)-1} \text{sing } f(x), \quad x \in \Omega.$$

Puis

$$A_{p'(\cdot)}(g) = \int_{\Omega} \left(|f(x)/\lambda|^{p(x)-1} \right)^{\frac{p(x)}{p(x)-1}} dx = \int_{\Omega} |f/\lambda|^p dx = 1,$$

d'où

$$|f|_{p(\cdot),\Omega} \geq \int_{\Omega} f(x)g(x)dx = \lambda \int_{\Omega} |f/\lambda|^{p(x)} dx = \lambda > 1,$$

une contradiction. □

Proposition 1.7. Soit $p(x)$ satisfait (2.3) et (2.6). Si $|f|_{p(\cdot),\Omega} \leq 1$, alors $A_{p(\cdot)}(f) \leq |f|_{p(\cdot),\Omega}$.

Démonstration. Supposons d'abord que $A_{p(\cdot)}(f) \leq \infty$. Présenter la fonction

$$g(x) = |f(x)|^{p(x)-1} \text{sing } f(x), \quad x \in \Omega.$$

Puis

$$A_{p(\cdot)}(f) = \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} dx = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \leq |f|_{p(\cdot),\Omega}.$$

Pour éviter l'hypothèse $A_{p(\cdot)}(f) < \infty$ on considère la suite de troncatures

$$f_k(x) = \min\{k, |f(x)|\} \chi_{G_k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

où $\{G_k\}$ est une suite d'ensembles $G_k \subset G_{k+1} \subset \Omega$ tels que $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ et χ_{G_k} est la fonction caractéristique de G_k . Pour tout $k \in \mathbb{N}$ $A_p(f_k) < \infty$ et

$$|f_k|_{p(\cdot), \Omega} \leq |f|_{p(\cdot), \Omega} \leq 1.$$

L'assertion découle maintenant du théorème de convergence monotone de Lebesgue. \square

Théorème 1.6 (équivalence entre les normes de Luxembourg et d'Orlicz). *Soit les conditions (2.3) et (2.6) soient remplies. Alors*

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) = \{f : |f|_{p(\cdot), \Omega} < \infty\}$$

et il existe des constantes C_* , C^* telles que

$$C_* \|f\|_{p(\cdot), \Omega} \leq |f|_{p(\cdot), \Omega} \leq C^* \|f\|_{p(\cdot), \Omega} \quad \forall f \in L^{p(\cdot)}(\Omega).$$

Démonstration. Soit $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. D'après le corollaire 1.5, l'inégalité $A_{p'(\cdot)}(g) \leq 1$ implique $\|g\|_{p'(\cdot), \Omega} \leq 1$, et par l'inégalité de Hölder

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)dx \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{(p')^+} \right) \|f\|_{p(\cdot), \Omega} \|g\|_{p(\cdot), \Omega} \leq 2 \|f\|_{p(\cdot), \Omega}.$$

Supposons maintenant que $0 < |f|_{p(\cdot), \Omega} < \infty$. Par

$$\left| \frac{f}{|f|_{p(\cdot), \Omega}} \right|_{p(\cdot), \Omega} = \sup_{A_{p(\cdot)}(g) \leq 1} \int_{\Omega} \frac{f(x)g(x)}{|f|_{p(\cdot), \Omega}} dx = \frac{|f|_{p(\cdot), \Omega}}{|f|_{p(\cdot), \Omega}} = 1,$$

il résulte de la proposition 1.7 que $A_p(f/|f|_{p(\cdot), \Omega}) \leq 1$. D'après le corollaire 1.5

$$\|f\|/|f|_{p(\cdot), \Omega} \leq 1,$$

d'où $\|f\|_{p(\cdot), \Omega} \leq |f|_{p(\cdot), \Omega}$ par la définition de la norme de Luxembourg. \square

Lemme 1.7. *Si $p(x)$ satisfait (2.3) et (2.6), l'espace $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est complet.*

Démonstration. Soit $\{f_k\}$ une suite de Cauchy de fonctions $f_k \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$: pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\int_{\Omega} |f_m(x) - f_n(x)| |g(x)| dx < \varepsilon \quad \forall m, n \geq k_0 \quad (1.14)$$

et tout g avec $A_{p(\cdot)}(g) \leq 1$. Décomposons Ω en sous-ensembles deux à deux disjoints G_k avec $|G_k| < \infty$ et définir les fonctions

$$g_k = \frac{\mathcal{X}G_k}{1 + |G_k|}, \quad k \in \mathbb{N},$$

Pour qui

$$A_{p(\cdot)}(g_k) = \int_{\Omega} \frac{\mathcal{X}G_k dx}{(1 + |G_k|)^{p(x)}} \leq \frac{|G_k|}{1 + |G_k|} \leq 1.$$

En remplaçant $g = g_k$ dans (2.33) on obtient l'inégalité

$$\int_{G_k} \frac{|f_m - f_n|}{1 + |G_k|} \leq \int_{\Omega} |f_m(x) - f_n(x)| |g_k(x)| dx < \varepsilon,$$

d'où

$$\int_{G_k} |f_m(x) - f_n(x)| dx < \varepsilon(1 + |G_k|).$$

Il s'ensuit que $\{f_k\}$ est une suite de Cauchy dans $L^1(G_k)$ pour tout k . Extrayons de f_k les sous-séquences $\{f_k^{(j)}\}$ et trouvons les fonctions $f^{(j)} \in L^1(G_j)$ telles que

$$\begin{aligned} \{f_k^{(1)}\} &\subset \{f_k\} : f_k^{(1)} \rightarrow f^{(1)} \text{ p.p. en } G_1, f^{(1)} \in L^1(G_1), \\ \{f_k^{(2)}\} &\subset \{f_k^{(1)}\} : f_k^{(2)} \rightarrow f^{(2)} \text{ p.p. en } G_2, f^{(2)} \in L^1(G_2), \\ &\dots \\ \{f_k^{(m)}\} &\subset \{f_k^{(m-1)}\} : f_k^{(m)} \rightarrow f^{(m)} \text{ p.p. en } G_m, f^{(m)} \in L^1(G_m), \end{aligned}$$

Considérons la suite diagonale $\{f_m^{(m)}\}$. Puisqu'il s'agit d'une sous-suite de chaque $\{f_m^{(j)}\}$, alors

$$f_m^{(m)}(x) \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(x) \mathcal{X}G_k := f(x) \text{ pour p.p. } x \in \Omega.$$

En vertu de (2.33)

$$\int_{\Omega} |f_m^{(m)} - f_n| |g(x)| dx \leq \varepsilon$$

pour tout $m, n \leq n_0$ et g tel que $A_{p(\cdot)}(g) \leq 1$. En appliquant le Lemme de Fatou on passer à la limite et conclure que

$$\int_{\Omega} |f_m(x) - f_n(x)| |g(x)| dx \leq \sup_{m \in \mathbb{N}, m \leq n_0} \int_{\Omega} |f_m^{(m)}(x) - f_n(x)| |g(x)| dx \leq \varepsilon$$

pour tout $n \leq n_0$ et tout g tel que $A_{p'}(g) \leq 1$. Par conséquent, $\|f - f_n\|_p \leq \varepsilon$. \square

Corollaire 1.7. *Si les conditions (2.3) et (2.6) sont remplies, $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est un espace de Banach.*

Lemme 1.8. Si $p(x)$ vérifie (2.3) et (2.6), alors $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est réflexif et séparable.

Démonstration. D'après le lemme 1.7 l'espace $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est un sous-espace complet et fermé de $L^{p^-}(\Omega)$. Pour $p^- > 1$ l'espace $L^{p^-}(\Omega)$ est un espace de Banach réflexif et séparable. Il s'ensuit que $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est également réflexif et séparable (voir, par exemple, [100, Chap. 1]).

Soit $p(x)$ satisfaisant (2.3) et (2.6). D'après le corollaire 1.5 $A_p(f) \leq 1$ si et seulement si $\|f\|_p \leq 1$. Il résulte du théorème 1.1 que pour tout $g \in L^{p'(x)}(\Omega)$ l'application $L^{p(x)}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$G(f) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx, \quad f \in L^{p(x)}(\Omega), \quad (1.15)$$

est une fonctionnelle linéaire continue sur $L^{p(x)}(\Omega)$ de norme vérifiant les inégalités $C_* \|g\|_{p'} \leq \|G\| \leq C^* \|g\|_{p'}$. □

Lemme 1.9. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $p \in L^\infty(\Omega)$,

(ii) pour toute fonctionnelle linéaire continue G sur $L^{p(x)}(\Omega)$ il existe une unique fonction $g \in L^{p'(x)}(\Omega)$ tel que (2.34) soit vérifié.

La preuve peut être trouvée dans [101] ou [102, Part I, Sect. 2.7].

Corollaire 1.8. L'espace dual de $L^{p(x)}(\Omega)$ est $L^{p'(x)}(\Omega)$ si et seulement si $p \in L^\infty(\Omega)$.

1.3.3 Ensembles denses dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Lemme 1.10. Si $p(x)$ vérifie (2.3) et (2.6), l'ensemble des fonctions mesurables et bornées en Ω est dense en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Démonstration. Etant donné $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, considérons la suite de fonctions $f_k \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ défini par les formules

$$f_k = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leq k, \\ k \operatorname{sign} f(x) & \text{si } |f(x)| > k. \end{cases}$$

Depuis $|f_k| \leq |f|$ et $f_k \rightarrow f$ a.e. en Ω , par la convergence dominée par Lebesgue théorème $A_{p(\cdot)}(f_k - f) \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$, et l'assertion découle du lemme 1.2. □

Théorème 1.9. Soit $p(x)$ satisfait (2.3) et (2.6). Alors l'ensemble $C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Démonstration. Soit $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. D'après le lemme 1.10 pour tout $\varepsilon > 0$ fixé il existe un fonction $g \in L^\infty(\Omega) \cap L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tel que

$$\|f - g\|_{p(\cdot), \Omega} < \varepsilon. \quad (1.16)$$

D'après le théorème de Luzin il existe une fonction $h(x) \in C(\Omega)$ et un ouvert U tel que ce

$$|U| \leq \min \left\{ 1, \left(\frac{\varepsilon}{2\|g\|_\infty} \right)^{p^+} \right\},$$

$g(x) = h(x)$ partout dans Ω/U et $\sup |h(x)| = \sup_{\Omega/U} |g(x)| \leq \|g\|_\infty$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} A_{p(\cdot)}((g - h)/\varepsilon) &= \int_{\Omega} \frac{|g - h|^{p(x)}}{\varepsilon^{p(x)}} dx \leq \int_U \frac{|f - h|^{p(x)}}{\varepsilon^{p(x)}} dx \\ &\leq \int_U \left(\frac{|g| + |h|}{\varepsilon} \right)^{p(x)} dx \\ &\leq \int_U \left(\frac{2\|g\|_\infty}{\varepsilon} \right)^{p^+} dx \\ &\leq |U| \max \left\{ 1, \left(\frac{2\|g\|_\infty}{\varepsilon} \right)^{p^+} \right\} \leq 1. \end{aligned}$$

pour chaque $\varepsilon > 1$

$$\frac{1}{\varepsilon^{p^-}} \int_{\Omega} |g(x) - h(x)|^{p(x)} dx \leq A_{p(\cdot)}((g - h)/\varepsilon) \leq 1 \Rightarrow A_{p(\cdot)}(g - h) \leq \varepsilon^{p^-}$$

et par le corollaire 1.5

$$\|g - h\|_{p(\cdot), \Omega} \leq \max \left\{ A_{p(\cdot)}^{\frac{1}{p^-}}(g - h), A_{p(\cdot)}^{\frac{1}{p^+}}(g - h) \right\} \leq \max \left\{ \varepsilon, \varepsilon^{\frac{p^-}{p^+}} \right\} = \varepsilon^{\frac{p^-}{p^+}}.$$

En rapportant cette inégalité à (1.16), on trouve que

$$\|f - h\|_{p(\cdot), \Omega} \leq \varepsilon + \varepsilon^{\frac{p^-}{p^+}}.$$

□

Corollaire 1.10. *Sous les conditions du Lemme 1.10 l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ est dense en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$: $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans l'ensemble des fonctions simples, les fonctions simples sont denses dans $C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, et $C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Corollaire 1.11. *Sous les conditions du lemme 1.10 l'espace $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est séparable : l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels est dénombrable et dense dans $C_0^\infty(\Omega)$.*

1.4 Espaces de Sobolev à exposants variables

Soit le domaine Ω satisfait (1.2) et l'exposant $p(x)$ satisfait (2.3) et (2.6). le Espace de Banach $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ est défini par

$$\begin{aligned} W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) &= \{u \in L^{p(\cdot)}(\Omega) : |\nabla u|^{p(x)} \in L^1(\Omega), u = 0 \text{ en } \partial\Omega\}, \\ \|u\|_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)} &= \|u\|_{p(\cdot),\Omega} + \|\nabla u\|_{p(\cdot),\Omega} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Lemme 1.11 (L'inégalité de Poincaré). *Soient Ω et $p(x)$ vérifiant les conditions (2.2) et (2.3) et (2.6). Si $p(x) \in C^0(\overline{\Omega})$, alors il existe une constante finie $C > 0$ telle que pour tout $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$*

$$\|u\|_{p(\cdot),\Omega} \leq C \|\nabla u\|_{p(\cdot),\Omega}. \quad (1.18)$$

Démonstration. Il suffit de prouver (1.18) pour un ensemble $B \cap \Omega$, où B est une boule de rayon suffisamment petit tel que

$$\max_{B \cap \Omega} p(x) \leq \frac{n+1}{n} \min_{B \cap \Omega} p(x). \quad (1.19)$$

Le choix de B dépend du module de continuité de $p(x)$ dans Ω . Dénoter

$$p^+ = \max_{B \cap \Omega} p(x), \quad p^- = \min_{B \cap \Omega} p(x).$$

D'après le théorème d'injection de Sobolev, la chaîne de plongements suivante est vérifiée :

$$W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \subset W^{1,p(\cdot)}(\Omega)(B \cap \Omega) \subset W^{1,p^-}(B \cap \Omega) \subset W^{p^+}(B \cap \Omega) \subset W^{p(\cdot)}(\Omega)(B \cap \Omega).$$

Puisque $p(x)$ est uniformément continue sur Ω , le domaine Ω peut être couvert par un nombre fini de balles satisfaisant (1.19), d'où (1.18).

Une conséquence immédiate de l'inégalité (1.18) est la possibilité de définir un norme équivalent de l'espace $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ par la relation

$$\|u\|_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{p(\cdot),\Omega}. \quad (1.20)$$

Notons $C_{\log}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $p(x)$ qui vérifient les conditions (2.3) et (2.6) et sont continues en Ω avec le module de continuité logarithmique . \square

CHAPITRE 2

ÉQUATION D'ONDE SEMI-LINÉAIRE AVEC UN TERME SOURCE LOGARITHMIQUE NON LINÉAIRE : EXISTENCE ET EXPLOSION EN TEMPS FINI

2.1 Introduction

Ces dernières années, de nombreux auteurs se sont intéressés à l'étude des équations différentielles logarithmiques non locales. Cela est dû en partie au grand emploi de ce type pour modéliser plusieurs phénomènes tels que la dynamique des fluides, les fluides électrorhéologiques, la physique nucléaire, l'optique, la géophysique, la théorie de la mécanique quantique.

Dans ce chapitre, nous traitons l'équation d'onde semi-linéaire avec un terme source logarithmique non linéaire sous condition aux limites de Dirichlet homogène le suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{m(\cdot)-2} u_t = |u|^{p(\cdot)-2} u \ln |u|, & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ u(x, t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

Dans (2.1), Ω soit un domaine bornée dans $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ avec une frontière lisse $\partial\Omega$, pour tous $m(\cdot), p(\cdot) : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ fonctions mesurables satisfaisant pour la fonction q

$$\begin{cases} 2 \leq q_1 \leq q(x) \leq q_2 \leq \frac{2n}{n-2}, \quad n \geq 3, \\ 2 \leq q_1 \leq q(x) \leq q_2 < \infty, \quad n \leq 2, \end{cases} \quad (2.2)$$

avec

$$q_1 := \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} q(x), \quad q_2 := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} q(x)$$

et la condition de continuité log-Hölder :

$$|q(x) - q(y)| \leq -\frac{A}{\log|x-y|}, \quad \text{pou p.p. } x, y \in \Omega, \quad \text{avec } |x - y| < \delta \quad (2.3)$$
$$A > 0, \quad 0 < \delta < 1$$

Dans le cas où m et p sont des constantes, l'existence locale et globale et le comportement à long terme ont été pris en compte par de nombreux auteurs. Par exemple, en l'absence du terme d'amortissement $|u_t|^{m-2}u_t$, les termes logarithmique de non-linéarité $|u|^{p-2}u \ln(|u|)$ provoquent un explosion de temps infini de solutions avec énergie initiale négative. [16, 13, 23, 24], contrairement au terme de source de puissance $|u|^{p-2}u$, qui provoque un exposition en temps fini des solutions [75, 18], il est bien connu que le terme d'amortissement $|u_t|^{m-2}u_t$ assure l'existence globale pour données initiales arbitraires [77, 20, 25]. Nous nous référons également à [21, 22] et aux références qu'il contient pour les problèmes logarithmique de non-linéarité.

Ces équations d'ondes semi-linéaires apparaissent dans l'étude de plusieurs problèmes et peuvent être utilisées comme modèles de fluides viscoélastiques, de processus de filtration à travers un milieu poreux et de fluides dont la viscosité dépend de la température, de la théorie de la filtration, etc. (voir [48, 47]). Nous nous référons également à [26, 27] et aux références qu'il contient pour des problèmes supplémentaires dans ce numéro.

Au cours des dernières années, certaines équations aux dérivées partielles avec des termes de non-linéarité logarithmique ont fait l'objet d'une grande attention en raison de leur large application en physique et dans d'autres sciences appliquées, telles que l'infiltration de fluides homogènes à travers une roche fissurée [28], la conduction thermique impliquant deux systèmes de température [29], la propagation unidirectionnelle d'ondes longues non linéaires et dispersives [29, 30], l'écoulement de fluide dans un milieu poreux fissuré [31], écoulement diphasique en milieu poreux avec pression capillaire dynamique [32, 33] et agrégation de populations [34]. Les équations pseudo-paraboliques peuvent également être considérées comme une équation de type Sobolev ou une équation de type Sobolev-Galpern, que l'on peut voir dans [35, 36], et de nombreux articles ont été consacrés à l'étude du les bien-posé et des propriétés qualitatives des solutions pour ces équations aux dérivées partielles à exposants constants. Il est important de souligner que le calcul du temps et du taux d'explosion aux équations d'évolution non linéaires est un sujet important (voir [37, 38]), et ces évaluations peuvent caractériser le phénomène d'explosion de manière concluante.

La terminologie des exposants variables vient du fait que $m(\cdot)$ et $p(\cdot)$ sont des fonctions et non des nombres réels. Ce terme $|u_t|^{m(\cdot)-2}u_t - |u|^{p(\cdot)-2}u \ln |u|$ est alors une généralisation de $|u_t|^{m-2}u_t - |u|^{p-2}u$, qui correspond à $m(\cdot), p(\cdot) > 1$, et $\ln |u|$. En fait, (2.1) peut être interprété comme une extension du cas variable de l'équation d'onde viscoélastique du second ordre avec des conditions de croissance variables

$$u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{m(\cdot)-2}u_t = |u|^{p(\cdot)-2}u, \text{ in } \Omega \times (0, T) \quad (2.4)$$

qui est obtenu en considérant $|u_t|^{m(\cdot)-2}u_t - |u|^{p(\cdot)-2}u \ln |u|$. L'équation (2.4) est une figure bien connue dans le traitement de la dynamique des fluides, un modèle pour les fluides électrorhéologiques [44]. D'autre part, les résultats pour l'équation d'onde viscoélastique avec amortissement logarithmique et conditions de croissance variables sont limités et rares, et la littérature sur ces équations est beaucoup moins étendue voir [49, 51, 50].

L'intérêt ces dernières années pour l'analyse mathématique des équations aux dérivées partielles pilotées par des opérateurs différentiels non homogènes à exposants variables (voir par exemple [68, 67, 39]). L'étude de ces systèmes est basée sur l'utilisation des espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposants variables. Remarquons que les problèmes d'équations différentielles à croissance $p(x)$ non standard sont un thème peu familier et intéressant. Il s'agit de la théorie de l'élasticité non linéaire, des fluides électrorhéologiques, etc. Ces fluides conservent la propriété motrice que leur viscosité dépend du champ électrique dans le fluide. Pour des rapports généraux sur la physique sous-jacente, voir [43] et pour les visions mathématiques, voir [42]. Une série d'articles liés aux problèmes des fluides dits rhéologiques et électrorhéologiques, qui pointent vers des espaces avec des exposants variables, ont été publiés récemment par Diening et Růžicka [68, 67]. Les résultats élaborés dans ces articles ont été relevés dans les livres [44, 45]. De nombreux modèles mathématiques en mécanique des fluides, en théorie de l'élasticité (récemment en traitement d'image), voir par exemple [46], etc, se sont montrés manifestement liés aux problèmes de croissance locale non standard. Dans cet article, nous considérons (2.1) et établissons un résultat d'existence locale. De plus, pour des données initiales convenables, nous montrons que la solution explose en temps fini T . L'article est organisé de la manière suivante. Dans la section 2, nous présentons quelques préliminaires et notations nécessaires à notre travail. Dans la section 3, nous établissons l'existence locale des solutions au problème. Dans la section 4, nous donnons un résultat éclaté pour les équations d'onde (2.1) avec une énergie initiale négative.

2.2 Preliminaries

Soit $p : \Omega \rightarrow [1, \infty]$ une fonction mesurable. $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions mesurables réelles u sur Ω telles que

$$\int_{\Omega} |\lambda u(x)|^{p(x)} dx < \infty \text{ pour certains } \lambda > 0.$$

L'espace à exposant variable $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ muni de la norme de type Luxembourg

$$\|u\|_{p(\cdot)} = \inf \left\{ \lambda > 0, \int_{\Omega} \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\},$$

est un espace de Banach. Tout au long de l'article, nous utilisons $\|\cdot\|_q$ pour indiquer la norme L^q pour $1 \leq q \leq +\infty$. $H_0^1(\Omega)$ est la clôture de $C_0^\infty(\Omega)$ par rapport à la norme suivante :

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On sait que pour les éléments de $H_0^1(\Omega)$ l'inégalité de Poincaré est satisfait,

$$\|u\|_2 \leq C^* \|\nabla u\|_2, \text{ pour toute } u \in H_0^1(\Omega).$$

et une norme équivalente de $H_0^1(\Omega)$ peut être définie par

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_2 = \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lemme 2.1. [67, 68]. Si $p : \Omega \rightarrow [1, \infty)$ est une fonction mesurable et

$$2 \leq p_1 \leq p(x) \leq p_2 < \frac{2n}{n-2}, \quad n \geq 3. \quad (2.5)$$

Alors le plongement $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est continu et compact.

2.3 Existence de solutions faibles

Dans cette section, nous présentons l'existence locale et l'unicité des solutions pour le système (2.1). Notre méthode de preuve est basée sur le théorème du point fixe de Banach.

Théorème 2.1. Soit $m(\cdot)$, et $p(\cdot)$ satisfait (2.2), (2.3), et de plus $p(\cdot)$ satisfait

$$2 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < 2\frac{n-1}{n-2}, \quad n \geq 3. \quad (2.6)$$

Alors donné $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, il existe $T > 0$ et une unique solution u du problème (2.1) sur $(0, T)$ telle que

$$\begin{aligned} u &\in C\left((0, T), H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left((0, T), L^2(\Omega)\right) \cap L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T)), \\ u_{tt} &\in L^2\left((0, T), H^{-1}(\Omega)\right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Pour prouver le théorème principal, nous avons besoin de l'existence locale et de l'unicité de la solution à un problème connexe. Alors, pour v donné, considérons le problème aux limites à valeur initiales suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{m(\cdot)-2} u_t = v(x, t), & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.8)$$

où l'exposant $m(\cdot)$ est une fonction mesurable donnée sur Ω vérifiant (2.2) et (2.3), et Ω est un domaine borné dans \mathbb{R}^n à bord lisse $\partial\Omega$. Nous devons maintenant énoncer le résultat d'existence suivant de la solution locale au problème (2.8) pour $v \in L^2(\Omega \times (0, T))$, et la valeur initiale $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, que nous avons établi, en utilisant la méthode de Galerkin comme dans [14] ou dans [88, Theorem 3.1, Chapter 1]

Lemme 2.2. Supposons que $m(\cdot)$ satisfait (2.2), et (2.3). Alors, pour tout $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et $v \in L^2(\Omega \times (0, T))$, il existe une unique solution locale u du problème (2.8),

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty\left((0, T), H_0^1(\Omega)\right), \quad u_t \in L^\infty\left((0, T), L^2(\Omega)\right) \cap L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T)) \\ u_{tt} &\in L^2\left((0, T), H^{-1}(\Omega)\right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Démonstration. Unicité : Si le problème (2.8) a deux solutions u et v . Alors, $w = u - v$ doit vérifier Unicité :

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w + u_t |u_t|^{m(\cdot)-2} - v_t |v_t|^{m(\cdot)-2} = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ w(x, t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0, & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

En multipliant par w_t et en intégrant sur Ω , on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} w_t^2 + \int_{\Omega} |\nabla w|^2 \right] + \int_{\Omega} (u_t |u_t|^{m(x)-2} - v_t |v_t|^{m(x)-2}) (u_t - v_t) dx = 0.$$

En intégrant sur $(0, t)$, on obtient

$$\int_{\Omega} (w_t^2 + |\nabla w|^2) + 2 \int_0^t \int_{\Omega} (u_t |u_t|^{m(x)-2} - v_t |v_t|^{m(x)-2}) (u_t - v_t) dx ds = 0.$$

En utilisant l'inégalité

$$(|\mathbf{a}|^{m(x)-2} \mathbf{a} - |\mathbf{b}|^{m(x)-2} \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \geq 0 \quad (2.10)$$

pour tout $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ et p.p $x \in \Omega$, on obtient

$$\int_{\Omega} (w_t^2 + |\nabla w|^2) = 0$$

ce qui signifie que $w = 0$, puisque $w = 0$ sur $\partial\Omega$. Par conséquent, l'unicité suit.

2. **Existence.** Soit $\{(v_j)_{j=1}^{\infty}\}$ une base orthonormée de $H_0^1(\Omega)$, avec

$$-\Delta v_j = \lambda_j v_j \quad \text{dans } \Omega, \quad v_j = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

déterminons le sous-espace de dimension finie $V_k = \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$, sans perte de généralité nous pouvons prendre $\|v_j\|_2 = 1$. On va construire une suite convergente $\{u^k(x, t)\}$,

$$u^k(x, t) = \sum_{j=1}^k a_{kj}(t) v_j,$$

où $u^k(x, t)$ satisfait le système d'équations différentielles linéaires

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_{tt}^k(x, t) v_j(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u^k(x, t) \nabla v_j(x) dx \\ & + \int_{\Omega} |u_t^k(x, t)|^{m(x)-2} u_t^k(x, t) v_j(x) dx = \int_{\Omega} v(x, t) v_j(x) dx \\ & u^k(x, 0) = u_0^k, \quad u_t^k(x, 0) = u_1^k \quad \forall j = 1, 2, \dots, k, \end{aligned} \quad (2.11)$$

où

$$\begin{aligned} u_0^k &= \sum_{i=1}^k (u_0, v_i) v_i \rightarrow u_0 \quad \text{dans } H_0^1(\Omega), \\ u_1^k &= \sum_{i=1}^k (u_1, v_i) v_i \rightarrow u_1 \quad \text{dans } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Il convient de noter que (2.11) est un système d'équations différentielles ordinaires pour $a_{kj}(t)$. L'existence locale des solutions du système (2.11) est garantie par le théorème de Picard-Lindelöf, dont on sait qu'il a une solution locale dans un intervalle $[0, T_k)$ avec $0 < T_k \leq T_{\max} < +\infty$. L'extension de la solution à tout l'intervalle $[0, +\infty)$ est une conséquence des estimations suivantes.

Multiplier (2.11) par $a'_{kj}(t)$ et additionner sur j pour trouver

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} \left(|u_t^k(x, t)|^2 dx + |\nabla u^k(x, t)|^2 \right) dx \right] + \int_{\Omega} |u_t^k(x, t)|^{m(x)} dx = \int_{\Omega} v(x, t) u_t^k(x, t) dx$$

Une intégration simple sur $(0, t)$ donne

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|u_t^k(x, t)|^2 dx + |\nabla u^k(x, t)|^2 \right) dx + \int_0^t \int_{\Omega} |u_t^k(x, s)|^{m(x)} dx ds \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|u_1^k|^2 + |\nabla u_0^k|^2 \right) dx + \int_0^t \int_{\Omega} v(x, s) u_t^k(x, s) dx ds \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(u_1^2 + |\nabla u_0|^2 \right) dx + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} |u_t^k|^2 dx ds + c_{\varepsilon} \int_0^T \int_{\Omega} v^2 dx ds \\ &\leq C_{\varepsilon} + \varepsilon \sup_{(0, t_k)} \int_{\Omega} |u_t^k(x, t)|^2 dx, \quad \forall t \in [0, t_k), \end{aligned} \quad (2.12)$$

ensuite

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sup_{(0, t_k)} \int_{\Omega} |u_t^k(x, t)|^2 dx + \frac{1}{2} \sup_{(0, t_k)} \int_{\Omega} |\nabla u^k(x, t)|^2 dx + \int_0^{t_k} \int_{\Omega} |u_t^k(x, s)|^{m(x)} dx ds \\ &\leq C_{\varepsilon} + \varepsilon \sup_{(0, t_k)} \int_{\Omega} |u_t^k(x, t)|^2 dx \end{aligned}$$

Prendre $\varepsilon = \frac{1}{4}$, nous arrivons à

$$\sup_{(0, t_k)} \int_{\Omega} |u_t^k(x, t)|^2 dx + \sup_{(0, t_k)} \int_{\Omega} |\nabla u^k(x, t)|^2 dx + \int_0^{t_k} \int_{\Omega} |u_t^k(x, s)|^{m(x)} dx ds \leq C$$

Donc, la solution peut être prolongée jusqu'à $[0, T)$ et, de plus, on a

$$\begin{aligned} & \left\{ (u^k) \right\} \text{ est une suite bornée dans } L^{\infty} \left((0, T), H_0^1(\Omega) \right), \\ & (u_t^k) \text{ est une suite bornée dans } L^{\infty} \left((0, T), L^2(\Omega) \right) \cap L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T)), \\ & |u_t^k|^{m(\cdot)-2} u_t^k \text{ est une suite bornée dans } L^{\frac{m(\cdot)}{m(\cdot)-1}}(\Omega \times (0, T)). \end{aligned}$$

Du théorème de Dunford–Pettis, on peut extraire de $\left\{ (u^k) \right\}$ une sous-suite encore notée $\left\{ (u^k) \right\}$ telle que

$$u^k \rightarrow u \text{ faiblement } * \text{ dans } L^{\infty} \left((0, T), H_0^1(\Omega) \right), \quad (2.13)$$

$$u_t^k \rightarrow u_t \text{ faiblement } * \text{ dans } L^{\infty} \left((0, T), L^2(\Omega) \right) \text{ et faiblement dans } L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T)), \quad (2.14)$$

$$|u_t^k|^{m(\cdot)-2} u_t^k \rightarrow \psi \text{ faiblement dans } L^{\frac{m(\cdot)}{m(\cdot)-1}}(\Omega \times (0, T)). \quad (2.15)$$

Ainsi (2.13)–(2.15) permet de passer à la limite dans l'équation approchée pour en déduire que $u \in C([0, T], L^2(\Omega))$, et donc $u(x, 0)$ a un sens.

Montrons maintenant que $u \in C([0, T], L^2(\Omega))$ est une solution du système (2.8). Premièrement, nous essayons de prouver que $\psi = |u_t|^{m(\cdot)-2} u_t$, pour tout $v \in L^\infty((0, T), L^2(\Omega))$, dans (2.11), intégrer sur $(0, t)$, et en faisant $k \rightarrow \infty$ dans les résultats, on peut déduire pour p.p $t \in [0, T]$, que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_t \varphi + \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi + \psi \varphi) dx = \int_{\Omega} v \varphi dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (2.16)$$

Pour plus de simplicité, soit $A(\varphi) = |\varphi|^{m(x)-2} \varphi$ and define (voir [14, Proposition 2.5.]),

$$X^k = \int_0^t \int_{\Omega} (A(u_t^k) - A(\varphi)) (u_t^k - \varphi) dt \geq 0, \quad \forall \varphi \in L^{m(\cdot)}((0, T); H_0^1(\Omega))$$

Ainsi, en utilisant (2.12), on a

$$\begin{aligned} X^k &= \int_0^t \int_{\Omega} v u_t^k dx ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|u_1^k|^2 + |\nabla u_0^k|^2) dx ds - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t^k(x, t)|^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u^k(x, t)|^2 dx - \int_0^t \int_{\Omega} A(u_t^k) \varphi dx ds - \int_0^t \int_{\Omega} A(\varphi) (u_t^k - \varphi) dx ds \end{aligned}$$

Prendre $k \rightarrow \infty$, nous arrivons à

$$\begin{aligned} 0 \leq \limsup_k X^k &\leq \int_0^t \int_{\Omega} v u_t dx ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_1^2 + |\nabla u_0|^2) dx ds - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t(x, t)|^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx - \int_0^t \int_{\Omega} \psi \varphi dx ds - \int_0^t \int_{\Omega} A(\varphi) (u_t - \varphi) dx ds. \end{aligned} \quad (2.17)$$

En posant $\varphi = u_t$ dans (2.16) et en intégrant sur $(0, T)$, on arrive à

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} v u_t dx ds &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t(x, t)|^2 dx ds - \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_1^2 dx ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} \psi u_t dx ds. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Joindre (2.17) et (2.18), produire

$$0 \leq \limsup_k X^k \leq \int_0^t \int_{\Omega} \psi u_t dx ds - \int_0^t \int_{\Omega} \psi \varphi dx ds - \int_0^t \int_{\Omega} A(\varphi) (u_t - \varphi) dx ds.$$

C'est

$$\int_0^t \int_{\Omega} (\psi - A(\varphi)) (u_t - \varphi) dt \geq 0, \quad \forall \varphi \in L^{m(\cdot)}((0, T); H_0^1(\Omega)).$$

Par conséquent

$$\int_0^t \int_{\Omega} (\psi - A(\varphi)) (u_t - \varphi) dx dt \geq 0, \quad \forall \varphi \in L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T)),$$

par densité de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{m(\cdot)}(\Omega)$.

Maintenant, soit $\varphi = \lambda w + u_t$, $w \in L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T))$. Dès lors, nous savons

$$-\lambda \int_0^t \int_{\Omega} (\psi - A(\lambda w + u_t)) w \geq 0, \quad \forall \lambda \neq 0, \quad \forall w \in L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T))$$

pour $\lambda > 0$, on a

$$\int_0^t \int_{\Omega} (\psi - A(\lambda w + u_t)) w \leq 0, \quad \forall w \in L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T))$$

Comme $\lambda \rightarrow \infty$ et en utilisant l'hémi-continuité de A , on obtient

$$\int_0^t \int_{\Omega} (\psi - A(u_t)) w \leq 0, \quad \forall w \in L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T)) \quad (2.19)$$

De manière similaire pour $\lambda < 0$, on trouve

$$\int_0^t \int_{\Omega} (\psi - A(u_t)) w \geq 0, \quad \forall w \in L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T)) \quad (2.20)$$

De (2.19) et (2.20), on obtient $\psi = A(u_t)$, c'est-à-dire comme k tend vers l'infini,

$$|u_t^k|^{m(\cdot)-2} u_t^k \rightarrow |u_t|^{m(\cdot)-2} u_t \text{ faiblement dans } L^{\frac{m(\cdot)}{m(\cdot)-1}}(\Omega \times (0, T)).$$

Donc, du résultat ci-dessus et (2.13)–(2.15), on déduit qu'il existe $u \in C([0, T], L^2(\Omega))$ satisfaisant l'équation suivante

$$(u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{m(\cdot)-2} u_t - v, \varphi) = 0$$

pour tous $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, et les conditions initiales

$$u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1,$$

ce qui achève la preuve d'existence dans le lemme (4.2). □

Le lemme suivant crucial pour la preuve de notre résultat principal

Lemme 2.3. *Pour $p, p_1, p_2 \in \Omega$, et $p(\cdot)$ satisfaisant (2.6), la fonction $F(s) = |s|^{p(x)-2} s (\ln |s|)$ est différentiable et*

$$|F'(s)| \leq (p_2 - 1) |s|^{p(x)-2} |\ln |s|| + |s|^{p(x)-2} \leq \frac{2(p_2-1)}{e((p_1-2)-k_1)} |s|^{k_1} + \frac{2(p_2-1)}{e(k_2-(p_2-2))} |s|^{k_2} + (|s|^{p_1-2} + |s|^{p_2-2}), \quad s \neq 0, \quad (2.21)$$

où

$$\begin{aligned} p_1 - 2 &\leq p_2 - 2 < k_2 \leq \frac{2}{n-2}, \quad \text{pour } n \geq 3, \\ 0 &< p_1 - 2 \leq p_2 - 2 < k_2 \text{ pour } n = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.22)$$

et

$$\begin{aligned} 0 &< k_1 < p_1 - 2 \leq p_2 - 2 \leq \frac{2}{n-2}, \quad \text{pour } n \geq 3, \\ 0 &< k_1 < p_1 - 2 \leq p_2 - 2 \text{ pour } n = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Démonstration. Évidemment, pour $k \neq 0$, puisque $\ln \zeta \leq \frac{1}{ek} \zeta^k$ pour tout $\zeta \geq 1$, et $\ln \zeta \geq -\frac{1}{ek} \zeta^{-k}$, $\zeta < 1$, alors pour tout $k > 0$, on a

$$\begin{aligned} |F'(s)| &= \left| (p(x) - 1) |s|^{p(x)-2} (\ln |s|) + |s|^{p(x)-2} \right| \\ &\leq \frac{p_2-1}{ek} \left(|s|^{p_1+k-2} + |s|^{p_2+k-2} \right) + \frac{p_2-1}{ek} \left(|s|^{p_1-k-2} + |s|^{p_2-k-2} \right) \\ &\quad + (|s|^{p_1-2} + |s|^{p_2-2}) \\ &\leq 2 \frac{p_2-1}{ek} |s|^{p_2+k-2} + 2 \frac{p_2-1}{ek} |s|^{p_1-k-2} + (|s|^{p_1-2} + |s|^{p_2-2}) \\ &= \frac{2(p_2-1)}{e((p_1-2)-k_1)} |s|^{k_1} + \frac{2(p_2-1)}{e(k_2-(p_2-2))} |s|^{k_2} + (|s|^{p_1-2} + |s|^{p_2-2}), \end{aligned}$$

avec k_1 , et k_2 sont dans (2.22)-(2.23). \square

Proof of Theorem (2.1). Existence. Soit $v \in L^\infty((0, T), H_0^1(\Omega))$. Alors

$$\begin{aligned} \left\| |v|^{p(\cdot)-2} v \ln |v| \right\|_2^2 &\leq \int_{\Omega} |v|^{2p_1-2} (\ln |v|)^2 dx + \int_{\Omega} |v|^{2p_2-2} (\ln |v|)^2 dx \\ &= \int_{\{x \in \Omega: |v(t)| < 1\}} |v|^{2p_1-2} (\ln |v|)^2 dx + \int_{\{x \in \Omega: |v(t)| < 1\}} |v|^{2p_2-2} (\ln |v|)^2 dx \\ &\quad + \int_{\{x \in \Omega: |v(t)| \geq 1\}} |v|^{2p_1-2} (\ln |v|)^2 dx + \int_{\{x \in \Omega: |v(t)| \geq 1\}} |v|^{2p_2-2} (\ln |v|)^2 dx. \end{aligned}$$

Choisir σ tel que,

$$\begin{aligned} 2 &\leq 2(p_1 - 1) \leq 2(p_2 - 1) < \sigma \leq \frac{2n}{n-2}, \text{ pour } n \geq 3, \\ 2 &\leq 2(p_1 - 1) \leq 2(p_2 - 1) < \sigma \text{ pour } n = 1, 2, \end{aligned}$$

et, par $\ln \zeta \leq \frac{1}{es} \zeta^s$ pour tous $\zeta \geq 1$, $s > 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\{x \in \Omega: |v(t)| < 1\}} |v|^{2p_1-2} (\ln |v|)^2 dx + \int_{\{x \in \Omega: |v(t)| \geq 1\}} |v|^{2p_1-2} (\ln |v|)^2 dx \\ \leq \frac{|\Omega|}{e^2} + \frac{1}{e^2} \left(\frac{2}{\sigma+2-2p_1} \right)^2 \int_{\Omega} |v|^\sigma dx \\ \leq \frac{|\Omega|}{e^2} + \frac{1}{e^2} C_s^\sigma \left(\frac{2}{\sigma+2-2p_1} \right)^2 \|\nabla v\|_2^\sigma < \infty, \end{aligned} \quad (2.24)$$

de la même manière

$$\begin{aligned} \int_{\{x \in \Omega: |v(t)| < 1\}} |v|^{2p_2-2} (\ln |v|)^2 dx + \int_{\{x \in \Omega: |v(t)| \geq 1\}} |v|^{2p_2-2} (\ln |v|)^2 dx \\ \leq \frac{|\Omega|}{e^2} + \frac{1}{e^2} C_s^\sigma \left(\frac{2}{\sigma+2-2p_2} \right)^2 \|\nabla v\|_2^\sigma < \infty, \end{aligned} \quad (2.25)$$

où C_s est la constante optimale de Sobolev plongeant $H_0^1(\Omega) \rightarrow L^\sigma(\Omega)$. Donc, dans ce cas

$$|v|^{p(\cdot)-2} v \ln |v| \in L^\infty((0, T), L^2(\Omega)) \subset L^2(\Omega \times (0, T))$$

Ainsi, pour chaque $v \in L^\infty((0, T), H_0^1(\Omega))$, il existe un u unique, de sorte que

$$u \in L^\infty((0, T), H_0^1(\Omega)), \quad u_t \in L^\infty((0, T), L^2(\Omega)) \cap L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T)), \quad (2.26)$$

satisfaisant le problème non linéaire

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{m(\cdot)-2} u_t = |v|^{p(\cdot)-2} v \ln |v|, & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ u(x, t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.27)$$

Soit R_0 un réel positif tel que

$$R_0 = \sqrt{2(|u_1|^2 + |\nabla u_0|^2)},$$

pour un temps suffisamment petit $T > 0$, on définit l'espace $B_T(R_0)$ par

$$B_T(R_0) = \left\{ \begin{array}{l} v(t) \in L^\infty((0, T), H_0^1(\Omega)), \\ v_t(t) \in L^\infty((0, T), L^2(\Omega)), \\ |v'(t)|^2 + |\nabla v(t)|^2 \leq R_0^2 \text{ sur } [0, T], \\ v(0) = v_0, \quad v'(0) = u_1. \end{array} \right\}$$

On introduit la métrique d sur l'espace $B_T(R_0)$ par

$$d(u, v) = \sup_{0 \leq t \leq T} (|u_t(t) - v_t(t)|^2 + |\nabla u(t) - \nabla v(t)|^2) \text{ pour } u, v \in B_T(R_0).$$

Évidemment, l'espace $B_T(R_0)$ est un espace métrique complet. Soit $v \in B_T(R_0)$. Alors $|\nabla v(t)| \leq R_0$, $|v'(t)| \leq R_0$ pour tout $t \in [0, T]$. Définissez l'application Φ par

$$\Phi(v) = u,$$

où u satisfait (3.24) et (2.27). Ensuite on a

$$\Phi(v) = u \in B_T(R_0) \text{ pour } v \in B_T(R_0), \quad (2.28)$$

$$\Phi : B_T(R_0) \rightarrow B_T(R_0) \text{ est une application contractant.} \quad (2.29)$$

Pour afficher (2.28), multiplier (2.27) par u_t , donne

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) + \int_{\Omega} |u_t|^{m(x)} dx = \int_{\Omega} |v|^{p(x)-2} v (\ln |v|) u_t dx \quad (2.30)$$

À partir de l'inégalité de Young, (3.1), et (3.2), pour tout $\varepsilon > 0$, les estimations suivantes sont valables,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} v^{p(x)-2} v (\ln |v|) u_t dx \right| &\leq \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} |v|^{2p(x)-2} (\ln |v|)^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{1}{4} \left[\int_{\Omega} |v|^{2p_2-2} (\ln |v|)^2 dx + \int_{\Omega} |v|^{2p_1-2} (\ln |v|)^2 dx \right] \\ &\leq \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{1}{4} \left[2 \frac{|\Omega|}{e^2} + \frac{1}{e^2} C_s^\sigma \left(\frac{2}{\sigma+2-2p_1} \right)^2 \|\nabla v\|_2^\sigma \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{e^2} C_s^\sigma \left(\frac{2}{\sigma+2-2p_2} \right)^2 \|\nabla v\|_2^\sigma \right]. \end{aligned}$$

Donc (2.30) devient

$$\frac{d}{dt} (\|u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2) \leq \frac{1}{e^2} |\Omega| + \frac{2}{e^2} C_s^\sigma \left(\frac{2}{\sigma + 2 - 2p_2} \right)^2 R_0^\sigma + \|u_t\|_2^2.$$

Ainsi nous avons

$$\begin{aligned} \psi_v(u)(t) &\leq \psi_v(u)(0) + \int_0^t \left(\frac{1}{e^2} |\Omega| + \frac{2}{e^2} C_s^\sigma \left(\frac{2}{\sigma + 2 - 2p_2} \right)^2 R_0^\sigma + \psi_v(u)(t) \right) ds \\ &\leq \frac{1}{2} R_0^2 + \beta_0 \int_0^t (1 + \psi_v(u)(t)) ds, \end{aligned}$$

où $\beta_0 = \max \left(\frac{1}{e^2} |\Omega| + \frac{2}{e^2} C_s^\sigma \left(\frac{2}{\sigma + 2 - 2p_2} \right)^2 R_0^\sigma, 1 \right)$, et

$$\psi_v(u)(t) = \|u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2.$$

Par l'inégalité de Gronwall et des calculs simples, nous avons que

$$\|u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 \leq \left(\frac{1}{2} R_0^2 + \beta_0 T_0 \right) e^{\beta_0 T_0} < R_0^2, \quad 0 \leq t \leq T_0,$$

pour suffisamment petit $0 < T_0 \leq T$. Ainsi (2.28) est satisfait.

Ensuite, nous montrons (2.29). Soit $w = u_1 - u_2$, où $u_1 = \Phi(v_1)$, $u_2 = \Phi(v_2)$ avec $v_1, v_2 \in B_T(R_0)$.

Ensuite on a

$$\begin{aligned} &(w_{tt}, v) - (\Delta w, v) + (|u_{1t}(t)|^{m(x)-1} u_{1t}(t) - |u_{2t}(t)|^{m(x)-1} u_{2t}(t), v) \\ &= (|v_1|^{p(x)-2} v_1 \ln |v_1| - |v_2|^{p(x)-2} v_2 \ln |v_2|, v), \text{ dans } L^2(0, T_1; H^{-1}(\Omega)). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Posons

$$\beta_v(w)(t) = |w_t(t)|^2 + |\nabla w(t)|^2.$$

En multipliant w_t par (2.31), en utilisant (2.10), nous avons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|w_t(t)|^2 + |\nabla w(t)|^2) \leq (|v_1|^{p(x)-2} v_1 \ln |v_1| - |v_2|^{p(x)-2} v_2 \ln |v_2|, w_t).$$

Maintenant, nous estimons

$$I = \int_{\Omega} |F(v_1(s)) - F(v_2(s))| |w_t| dx = \int_{\Omega} |F'(\xi)| |v| |w_t| dx,$$

où

$$v = v_1 - v_2 \text{ et } \xi = av_1 + (1-a)v_2, \quad 0 \leq a \leq 1.$$

D'après les inégalités de Hölder, de Young et le lemme (2.3), nous avons

$$\begin{aligned} I^2 &\leq \int_{\Omega} w_t^2 dx \int_{\Omega} |F'(\xi)|^2 |v|^2 dx \\ &\leq 4 \int_{\Omega} w_t^2 dx \left[\left(\frac{2(p_2-1)}{e^{(p_1-2)-k_1}} \right)^2 \int_{\Omega} (|\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2|^{2k_1}) |v|^2 dx \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2(p_2-1)}{e^{(k_2-(p_2-2))}} \right)^2 \int_{\Omega} (|\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2|^{2k_2}) |v|^2 dx \right. \\ &\quad \left. + 4 \int_{\Omega} (|\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2|^{2(p_1-2)}) |v|^2 dx + 4 \int_{\Omega} (|\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2|^{2(p_2-2)}) |v|^2 dx \right] \\ &\leq c_* \left(\int_{\Omega} w_t^2 dx \right) \left(\int_{\Omega} |v|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{n}} \left[\left(\int_{\Omega} |\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2|^{k_1 n} dx \right)^{\frac{2}{n}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{\Omega} |\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2|^{n k_2} dx \right)^{\frac{2}{n}} + \int_{\Omega} (|\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2|^{2(p_1-2)}) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} (|\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2|^{2(p_2-2)}) dx \right] \end{aligned}$$

rappelons (2.6), et (2.17), nous arrivons à

$$\begin{aligned} I^2 &\leq c_* c_s \left(\int_{\Omega} w_t^2 dx \right) \|\nabla v\|_2^2 \left[\|\nabla v_1\|_2^{2k_1} + \|\nabla v_1\|_2^{2k_2} + \|\nabla v_2\|_2^{2k_1} + \|\nabla v_2\|_2^{2k_2} \right. \\ &\quad \left. + \|\nabla v_1\|_2^{2(p_1-2)} + \|\nabla v_1\|_2^{2(p_2-2)} + \|\nabla v_2\|_2^{2(p_1-2)} + \|\nabla v_2\|_2^{2(p_2-2)} \right] \\ &\leq 8c_* c_s R_0^{2(k_2+p_2-2)} d(v_1, v_2) \beta_{v_1}(w)(t), \end{aligned}$$

où $c_* = c(e, p_1, p_2, k_1, k_2)$, et c_s , est le plongement de Sobolev $H_0^1(\Omega) \rightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$, il s'ensuit que

$$\frac{d}{dt} \beta_v(w)(t) \leq \xi d(v_1, v_2)^{\frac{1}{2}} \beta_v(w)(t)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $\beta_v(w)(0) = 0$, par le lemme de Gronwall on a que

$$d(u_1, u_2) \leq \frac{\xi^2 T}{4} d(v_1, v_2) e^T.$$

Choisis un $0 < T_1 \leq T$ assez petit qui satisfait que

$$\frac{\xi^2}{4} T_1 e^{T_1} < 1.$$

Ainsi par le théorème de cartographie de contraction de Banach il existe un point fixe $u = \Phi(u) \in B_{T_1}(R_0)$, qui est une solution faible locale en le temps pour (2.1).

2. **Uniqueness.** Supposons que nous ayons deux solutions u et v , et posons

$$w(s) = \begin{cases} u_1(s) - u_2(s), & s \in [0, t] \\ 0, & s \in [t, T], \end{cases}$$

donc

$$w \in L^2(0, T; W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)), \quad w_t \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$$

et w satisfait

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} w_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \leq \int_0^t \int_{\Omega} (F(u) - F(v)) w_t dx$$

Par conséquent, l'unicité est dérivée de la continuité Lipschitz locale de $F : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ et du plongement $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Ceci achève la preuve du théorème. \square

2.4 Explosion de solutions faibles

Enfin, nous donnons les conditions suffisantes sur $m(\cdot)$ pour l'éclatement en temps fini des solutions faibles du problème (2.1) si

$$2 < m_1 \leq m(x) \leq m_2 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < 2\frac{n-1}{n-2}, \quad n \geq 3, \quad (2.32)$$

est satisfaisant, et $E(0) < 0$, où

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|u_t(x, t)|^2 + |\nabla u(x, t)|^2) dx - \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |u(x, t)|^{p(x)} \ln(|u(x, t)|) dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p^2(x)} |u(x, t)|^{p(x)} dx. \quad (2.33)$$

Pour notre propos, nous avons besoin du lemme suivant montrant la décroissance de l'énergie E .

Lemme 2.4. *L'énergie correspondante au problème (2.1) est donnée par (2.33), de plus*

$$\frac{dE(t)}{dt} = - \int_{\Omega} |u_t|^{m(x)} dx \leq 0, \quad (2.34)$$

et l'inégalité $E(t) \leq E(0)$ est satisfait, où

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|u_1|^2 + |\nabla u_0|^2) dx - \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |u_0|^{p(x)} \ln(|u_0|) dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p^2(x)} |u_0|^{p(x)} dx. \quad (2.35)$$

Soit

$$H(t) = -E(t) \text{ pour } t \geq 0, \quad (2.36)$$

omme $E(t)$ est absolument continue, donc $H'(t) \geq 0$ et

$$0 < H(0) \leq H(t) \leq \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |u(x, t)|^{p(x)} \ln(|u|) dx.$$

Lemme 2.5. *Soit les hypothèses (3.5) et soit u la solution de (2.1). Alors,*

$$\int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx \geq \int_{\Omega_2} |u|^{p_1} dx := \|u\|_{p_1, \Omega_2}^{p_1}, \quad (2.37)$$

où

$$\Omega_2 = \{x \in \Omega / |u(x, t)| \geq 1\}.$$

Démonstration. Soit

$$\Omega_2 = \{x \in \Omega / |u(x, t)| \geq 1\} \text{ et } \Omega_1 = \{x \in \Omega / |u(x, t)| < 1\}.$$

donc nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx &= \int_{\Omega_2} |u|^{p(x)} dx + \int_{\Omega_1} |u|^{p(x)} dx \\ &\geq \int_{\Omega_2} |u|^{p_1} dx + \int_{\Omega_1} |u|^{p_2} dx \geq \int_{\Omega_2} |u|^{p_1} dx := \|u\|_{p_1, \Omega_2}^{p_1}. \end{aligned}$$

Ainsi, (3.28). □

Lemme 2.6. *Sous les hypothèses du théorème(2.1), la fonctionnelle $H(t)$ illustrée ci-dessus fournit les estimations suivantes :*

$$0 < H(0) \leq H(t) \leq \frac{|\Omega|}{p_1 e} + \frac{B_s}{(s - p_2) e p_1} \|\nabla u\|_2^s, \quad t \geq 0, \quad (2.38)$$

où s est choisi suffisamment petit pour que

$$\begin{aligned} p_1 &\leq p_2 < s \leq \frac{2n}{n-2}, \text{ pour } n \geq 3, \\ p_1 &\leq p_2 < s < \infty \text{ pour } n = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.39)$$

et B_s est une constante positive du plongement de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^s(\Omega)$ tel que

$$\|u\|_s \leq B_s \|\nabla u\|_2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \quad (2.40)$$

Démonstration. D'après le lemme (2.4), $H(t)$ est non décroissante en t . Ainsi

$$H(t) \geq H(0) = -E(0) > 0, \quad t \geq 0. \quad (2.41)$$

Combiner (2.33), (2.34), (3.27), utilisant le fait que $\ln \zeta \leq \frac{1}{e\sigma} \zeta^\sigma$ pour chaque $\sigma > 0$, on a

$$\begin{aligned} 0 < H(t) &< \frac{1}{p_1} \int_{\Omega} |u(x,t)|^{p(x)} \ln(|u(x,t)|) dx \\ &= \frac{1}{p_1} \int_{\{x \in \Omega: |u(x)| < 1\}} |u(x,t)|^{p(x)-1} (|u(x,t)| \ln(|u(x,t)|)) dx \\ &\quad + \frac{1}{p_1} \int_{\{x \in \Omega: |u(x)| \geq 1\}} |u(x,t)|^{p(x)} \ln(|u(x,t)|) dx \\ &\leq \frac{|\Omega|}{p_1 e} + \frac{1}{\sigma e p_1} \int_{\{x \in \Omega: |u(x)| \geq 1\}} |u|^{p_2 + \sigma} dx \leq \frac{|\Omega|}{p_1 e} + \frac{1}{\sigma e p_1} \|u\|_{p_2 + \sigma}^{p_2 + \sigma} \\ &\leq \frac{|\Omega|}{p_1 e} + \frac{B_s}{(s-p_2)e p_1} \|\nabla u\|_2^s, \end{aligned} \quad (2.42)$$

et (4.19) suit. \square

Théorème 2.2. *Supposons que les conditions du théorème (2.1) soient satisfaites. De plus, supposons que (2.32) soit vrai et $E(0) < 0$. Alors la solution du problème (2.1) donnée par le théorème (2.1) explose en temps fini.*

Démonstration. pour chaque t dans $[0, T)$, définissons

$$L(t) := H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon \int_{\Omega} u(x,t) u_t(x,t) dx, \quad (2.43)$$

avec ε petit à reprendre plus tard et α tel que

$$0 < \alpha \leq \min \left\{ \frac{p_1 - 2}{2p_1}, \frac{p_1 - m_2}{p_1(m_2 - 1)}, \frac{2(p_1 - m_1)}{s(m_1 - 1)p_1}, \frac{2(p_1 - m_1)}{s(m_2 - 1)p_1} \right\}. \quad (2.44)$$

Un dérivé simple de (2.43), en utilisant Eq. (2.1), on obtient

$$L'(t) = (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon \int_{\Omega} [u_t^2 - |\nabla u|^2] + \varepsilon \int_{\Omega} |u|^{p(x)} (\ln |u|) - \varepsilon \int_{\Omega} |u_t|^{m(x)-2} u u_t \quad (2.45)$$

En additionnant et en soustrayant pour $\varepsilon(1-\eta)p_1 H(t)$, avec $0 < \eta < \frac{p_1-2}{p_1}$, du côté droit de (3.29), on arrive à

$$\begin{aligned} L'(t) &= (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon(1-\eta)p_1 H(t) + \eta \int_{\Omega} |u|^{p(x)} (\ln |u|) dx \\ &\quad + \varepsilon \left(\frac{(1-\eta)p_1}{2} + 1 \right) \|u_t\|_2^2 + \varepsilon \left(\frac{(1-\eta)p_1}{2} - 1 \right) \|\nabla u\|_2^2 - \varepsilon \int_{\Omega} u u_t |u_t|^{m(x)-2} dx, \end{aligned} \quad (2.46)$$

prendre en compte

$$\frac{1}{p_2^2} \int_{\Omega} |u(x, t)|^{p(x)} dx < \frac{1}{p_1} \int_{\Omega} |u|^{p(x)} (\ln |u|) dx,$$

en vertu de (3.28), alors (3.30) conduit à

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq (1 - \alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) - \varepsilon \int_{\Omega} |u_t|^{m(x)-2} uu_t dx \\ &\quad + \varepsilon \beta \left[H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + \int_{\Omega} |u(x, t)|^{p(x)} dx \right] \\ &\geq (1 - \alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) - \varepsilon \int_{\Omega} |u_t|^{m(x)-2} uu_t dx \\ &\quad + \varepsilon \beta \left[H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_{p_1, \Omega_2}^{p_1} \right], \end{aligned} \quad (2.47)$$

où

$$\beta = \min \left\{ (1 - \eta)p_1, \frac{p_1}{p_2^2} \eta, \frac{(1 - \eta)p_1}{2} + 1, \frac{(1 - \eta)p_1}{2} - 1 \right\} > 0.$$

Maintenant, grâce à l'inégalité de Young, nous évaluons le dernier terme de (3.29) comme suit

$$\int_{\Omega} |u_t|^{m(x)-1} |u| dx \leq \frac{1}{m_1} \int_{\Omega} \zeta^{m(x)} |u|^{m(x)} dx + \frac{m_2 - 1}{m_2} \int_{\Omega} \zeta^{-\frac{m(x)}{m(x)-1}} |u_t|^{m(x)} dx, \quad \forall \zeta > 0. \quad (2.48)$$

Donc en prenant δ tel que

$$\zeta^{-\frac{m(x)}{m(x)-1}} = kH^{-\alpha}(t), \quad k > 0,$$

Pour k assez grand où être déterminé plus tard, en le remplaçant dans (3.32) on obtient

$$\int_{\Omega} |u_t|^{m(x)-1} |u| dx \leq \frac{1}{m_1} \int_{\Omega} k^{1-m(x)} |u|^{m(x)} H^{\alpha(m(x)-1)}(t) dx + \frac{(m_2 - 1)k}{m_2} H^{-\alpha}(t)H'(t). \quad (2.49)$$

Joindre (3.31) avec (3.33) donne

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq \left[(1 - \alpha) - \varepsilon \left(\frac{m_2 - 1}{m_2} \right) k \right] H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon \beta \left[H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + \|u(t)\|_{p_1}^{p_1} \right] \\ &\quad - \varepsilon \frac{k^{1-m_1}}{m_1} H^{\alpha(m_2-1)}(t) \int_{\Omega} |u|^{m(x)} dx. \end{aligned} \quad (2.50)$$

En appliquant le lemme (2.6), on a

$$\begin{aligned} &H^{\alpha(m_2-1)}(t) \int_{\Omega} |u(t)|^{m(x)} dx \\ &\leq C \left[\left(2^{\alpha(m_2-1)-1} \left(\frac{|\Omega|}{p_1 e} \right)^{\alpha(m_2-1)} + 2^{\alpha(m_2-1)-1} \frac{1}{(s-p_2)e p_1} \|\nabla u\|_2^{s\alpha(m_2-1)} \right) \right. \\ &\quad \left. \left(\|u\|_{p_1, \Omega_2}^{m_1} + \|u\|_{p_1, \Omega_2}^{m_2} \right) \right] \\ &\leq 2^{\alpha(m_2-1)-1} C \left(\frac{|\Omega|}{p_1 e} \right)^{\alpha(m_2-1)} \left(\left(\|u\|_{p_1, \Omega_2}^{p_1} \right)^{\frac{m_1}{p_1}} + \left(\|u\|_{p_1, \Omega_2}^{p_1} \right)^{\frac{m_2}{p_1}} \right) \\ &\quad + 2^{\alpha(m_2-1)-1} C \frac{1}{(s-p_2)e p_1} \|\nabla u\|_2^{s\alpha(m_2-1)} \left(\|u\|_{p_1, \Omega_2}^{m_1} + \|u\|_{p_1, \Omega_2}^{m_2} \right). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Nous allons analyser les termes du côté droit de (3.35). En exploitant l'inégalité de Young, on a

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_2^{s\alpha(m_2-1)} \|u\|_{p_1, \Omega_2}^{m_1} &\leq \frac{m_1}{p_1} \|u(t)\|_{p_1, \Omega_2}^{p_1} + C \frac{p_1 - m_1}{p_1} \|\nabla u\|_2^{\frac{s\alpha(m_2-1)p_1}{p_1 - m_1}} \\ &= \frac{m_1}{p_1} \|u(t)\|_{p_1, \Omega_2}^{p_1} + C \frac{p_1 - m_1}{p_1} \left(\|\nabla u\|_2^2 \right)^{\frac{s\alpha(m_2-1)p_1}{2(p_1 - m_1)}}, \end{aligned}$$

de la même manière

$$\|\nabla u\|_2^{s\alpha(m_2-1)} \|u(t)\|_{p_1, \Omega_2}^{m_2} \leq \frac{m_2}{p_1} \|u(t)\|_{p_1, \Omega_2}^{p_1} + C \frac{p_1 - m_2}{p_1} \left(\|\nabla u\|_2^2 \right)^{\frac{s\alpha(m_2-1)p_1}{2(p_1-m_2)}}.$$

En exploitant l'inégalité algébrique connue suivante :

$$z^\tau \leq z + 1 \leq \left(1 + \frac{1}{d}\right) (z + d), \quad \forall z \geq 0, \quad 0 < \tau \leq 1, \quad d \geq 0, \quad (2.52)$$

avec $z = \|u(t)\|_{p_1, \Omega_2}^{p_1}$, $a = 1 + \frac{1}{H(0)}$, $d = H(0)$ et $\tau = \frac{m_1}{p_1}$ ($\tau = \frac{m_2}{p_1}$), respectivement, alors la condition (2.32) implique que $0 < \tau \leq 1$, et donc

$$\left(\|u(t)\|_{p_1, \Omega_2}^{p_1}\right)^{\frac{m_1}{p_1}} + \left(\|u(t)\|_{p_1, \Omega_2}^{p_1}\right)^{\frac{m_2}{p_1}} \leq 2a \left(\|u(t)\|_{p_1, \Omega_2}^{p_1} + H(0)\right) \leq 2a \left(\|u(t)\|_{p_1, \Omega_2}^{p_1} + H(t)\right),$$

de même, avec $z = \|\nabla u\|_2^2$, $b = 1 + \frac{1}{H(0)}$, $d = H(0)$ et $\tau = \frac{s\alpha(m_2-1)p_1}{2(p_1-m_1)}$, alors la condition (3.20) implique que $0 < \tau \leq 1$, et donc

$$\left(\|\nabla u\|_2^2\right)^{\frac{s\alpha(m_2-1)p_1}{2(p_1-m_1)}} \leq b \left(\|\nabla u\|_2^2 + H(0)\right) \leq b \left(\|\nabla u\|_2^2 + H(t)\right),$$

aussi, avec $z = \|\nabla u\|_2^2$, $h = 1 + \frac{1}{H(0)}$, $d = H(0)$ et $\tau = \frac{s\alpha(m_2-1)p_1}{2(p_1-m_2)}$,

$$\left(\|\nabla u\|_2^2\right)^{\frac{s\alpha(m_2-1)p_1}{2(p_1-m_2)}} \leq h \left(\|\nabla u\|_2^2 + H(t)\right),$$

par conséquent, (3.35) conduit à

$$H^{\alpha(m_2-1)}(t) \int_{\Omega} |u(t)|^{m(x)} dx \leq C \left(\|u(t)\|_{p_1, \Omega_2}^{p_1} + H(t) + \|\nabla u\|_2^2\right), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.53)$$

où C pour indiquer une constante positive générique dépendant de $(\Omega, e, h, p_{1,2}, m_{1,2})$ seulement. Combiner (3.34) et (3.36) donne

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq \left[(1 - \alpha) - \varepsilon \left(\frac{m_2-1}{m_2} \right) k \right] H^{-\alpha}(t) H'(t) \\ &+ \varepsilon \left(\beta - \frac{k^{1-m_1}}{m_1} C \right) \left[H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + \|u(t)\|_{p_1, \Omega_2}^{p_1} \right]. \end{aligned} \quad (2.54)$$

À ce point nous choisissons $\gamma = \beta - \frac{k^{1-m_1}}{m_1} C > 0$, (c'est le cas quand $k > \left(\frac{\beta m_1}{C}\right)^{\frac{1}{1-m_1}}$).

Une fois que k est fixé, nous choisissons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que

$$(1 - \alpha) - \varepsilon \left(\frac{m_2-1}{m_2} \right) k \geq 0 \quad \text{et} \quad L(0) = H^{1-\alpha}(0) + \varepsilon \int_{\Omega} u_0(x) u_1(x) dx > 0.$$

Ainsi (3.37) prend la forme

$$L'(t) \geq \gamma \left(H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + \|u(t)\|_{p_1, \Omega_2}^{p_1} \right). \quad (2.55)$$

Par conséquent, nous avons

$$L(t) \geq L(0) > 0, \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

D'autre part de (2.43),

$$L^{\frac{1}{1-\alpha}}(t) \leq 2^{1/(1-\alpha)} \left(H(t) + \left| \int_{\Omega} uu_t(x, t) dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \right), \quad (2.56)$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on voit que

$$\left| \int_{\Omega} uu_t(x, t) dx \right| \leq C \|u\|_{p_1} \|u_t\|_2 \leq 2C \|u\|_{p_1, \Omega_2} \|u_t\|_2.$$

Encore l'inégalité algébrique (3.42), avec $z = \|u\|_{p_1, \Omega_2}^{p_1}$, $h = 1 + \frac{1}{H(0)}$, $d = H(0)$ et $0 < \tau = \frac{2}{(1-2\alpha)p_1} \leq 1$ (voir (3.20)), donne

$$\left(\|u\|_{p_1, \Omega_2}^{p_1} \right)^{\frac{2}{(1-2\alpha)p_1}} \leq C \left(\|u\|_{p_1, \Omega_2}^{p_1} + H(t) \right),$$

Ainsi, l'inégalité de Young donne

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} uu_t(x, t) dx \right|^{1/(1-\alpha)} &\leq C \left[\|u\|_{p_1, \Omega_2}^{\frac{2(1-\alpha)}{1-2\alpha}} + \|u_t\|_2^{2(1-\alpha)} \right]^{1/(1-\alpha)} \\ &\leq C \left[\left(\|u\|_{p_1, \Omega_2}^{p_1} \right)^{\frac{2}{(1-2\alpha)p_1}} + \|u_t\|_2^2 \right] \\ &\leq C \left[\|u\|_{p_1, \Omega_2}^{p_1} + H(t) + \|u_t\|_2^2 \right], \text{ pour tous } t \geq 0, \end{aligned}$$

en le joignant avec (3.38) et (3.39), donne

$$L'(t) \geq \delta L^{\frac{1}{1-\alpha}}(t), \text{ pour tous } t \geq 0, \quad (2.57)$$

où δ est une constante positive dépendant de (ε, γ, C) . Avec une simple intégration de (3.40) sur $(0, t)$ on en déduit que

$$L^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(t) \geq \frac{1}{L^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(0) - \frac{\alpha}{1-\alpha} \delta t}. \quad (2.58)$$

Par conséquent, $L(t)$ explose en un temps fini \hat{T} avec

$$\hat{T} \leq \frac{1-\alpha}{\delta \alpha L^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(0)}.$$

□

CHAPITRE 3

ÉQUATIONS D'ONDES NON-LINÉAIRES AVEC AMORTISSEMENT : EXISTENCE ET EXPLOSION EN TEMPS FINI

3.1 Introduction

Soit Ω un domaine borné dans \mathbb{R}^n avec une frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma$. Nous considérons le problème aux limites initiale suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + au_t |u_t|^{k(\cdot)-2} = bu|u|^{p(\cdot)-2}, \text{ dans } \Omega \times (0, T) \\ u(x, t) = 0, \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \text{ dans } \Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

où $a, b \geq 0$ sont des constantes et les exposants $k(\cdot)$ et $p(\cdot)$ sont des fonctions mesurables données sur Ω satisfaisant

$$2 \leq q_1 \leq q(x) \leq q_2 \leq \frac{2n}{n-2}, \quad n \geq 3 \quad (3.2)$$

avec

$$q_1 := \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} q(x), \quad q_2 := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} q(x)$$

et la condition de continuité log-Hölder :

$$|q(x) - q(y)| \leq \frac{M}{\log|x-y|}, \quad \text{pour p.p. } x, y \in \Omega, \quad \text{avec } |x-y| < \delta, \quad (3.3)$$

$$M > 0, \quad 0 < \delta < 1$$

Dans le cas où k, p sont des constantes, l'existence locale, globale et le comportement asymptotique ont été considérés par de nombreux auteurs. Par exemple, en l'absence du terme

d'amortissement $au_t |u_t|^{k-2}$, le terme source $bu|u|^{p-2}$ provoque une explosion en temps fini des solutions avec une initiale négative énergie (voir [75, 76]). Pour $b = 0$, il est bien connu que le terme d'amortissement $au_t |u_t|^{k-2}$ assure l'existence globale de données initiales arbitraires (voir [77, 78]). L'interaction entre l'amortissement et les termes sources d'abord a été considérée par Levine (voir [76, 79]). Il a discuté du cas où $m = 2$ et a établi l'explosion en temps fini pour les solutions d'énergie initiale négative. Georgiev et Todorova [81] ont généralisé le résultat de Levine à la situation où $m > 2$ en introduisant une technique différente. Levine et al. [82] ont étendu les travaux précédents à des domaines non bornée. Ils ont prouvé que toute solution avec une énergie initiale négative explose en un temps fini. si $p > m$. Messaoudi [80] a prouvé que toute solution à énergie initiale négative explose en un temps fini si $p > m$. Ces dernières années, une grande attention a été accordée à l'étude des modèles mathématiques non linéaires d'équations hyperboliques, paraboliques et elliptiques avec des exposants variables de non-linéarité. Par exemple, la modélisation de phénomènes physiques tels que les écoulements de fluides électro-rhéologiques ou de fluides à viscosité dépendante de la température, viscoélasticité non linéaire. procédés de filtration à travers un support poreux et traitement d'image. Plus de détails sur ces problèmes peuvent être trouvés dans [66, ?, ?, 57, 58, 59, 60, 63, 65, 64, 61, 62]. En réalité. il n'existe que peu de travaux concernant les équations à exposants variables de non-linéarité. Mentionnons certains de ces problèmes. Par exemple, Antontsev [84] a étudié le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt} = \operatorname{div} \left(a(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right) + \alpha \Delta u_t + b(x) |u|^{\sigma(x)-2} u + f(x, t), & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ u(x, t) = 0, & \text{sur } \Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

et prouvé l'existence et l'explosion de solutions faibles à énergie initiale négative dans des conditions appropriées sur les fonctions a, b, f, p, σ . Guo et Gao [64] se penchent sur le même problème d'Antontsev [63] et ont prouvé plusieurs résultats explosifs pour certaines solutions associées à une énergie initiale négative. Précisément, ils ont choisi $\sigma(x) = r > 2$, une constante, et ont établi un résultat d'explosion en temps fini. Pour le cas $\sigma(x) = r(x)$, ils ont obtenu le même résultat d'explosion, mais aucune preuve n'a été présentée. Ce travail est considéré comme un ajout à celui d'Antontsev [63]. Dans les travaux de Sun et al, [65], ils ont étudié l'équation suivante :

$$u_{tt} + c(x)u_t |u_t|^{q(x)-1} = \operatorname{div}(a(x)\nabla u) + b(x)u|u|^{p(x)-1}$$

dans un domaine borné Ω , avec des conditions aux limites de Dirichlet, et a établi un résultat d'explosion pour des solutions à énergie initiale positive. Ils ont également fourni des limites inférieures et supérieures pour le temps d'explosion et ont fourni une illustration numérique de leur résultat. Rahmoune in [74], considère un problème aux limites parabolique généralisé semi-linéaire suivant gouvernée par des équations aux dérivées partielles qui décrivent l'évolution des matériaux viscoélastiques avec de type des exposant variable non-linéarités sous la

condition de type Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \int_0^t g(t-s) \Delta u = |u|^{p(x)-2} u, & x \in \Omega, t > 0 \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

Ensuite, le résultat de l'explosion pour une certaine solution avec une énergie initiale positive est établi. L'estimation de la limite supérieure du temps de blow-up pour les solutions de blow-up sera obtenue. Rahmoune in [73], a étudié le problème suivant

$$\begin{aligned} u_t - \operatorname{div} (|\nabla u|^{m(x)-2} \nabla u) &= |u|^{p(x)-2} u + f, & x \in \Omega, t > 0 \\ u &= 0 \text{ sur } \Gamma, & t \geq 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \Omega, \end{aligned}$$

dans un domaine borné Ω dans \mathbb{R}^n avec une frontière lisse $\partial\Omega = \Gamma$, dans des conditions appropriées sur m et p et pour $f = 0$, ils ont montré que toute solution avec une donnée initiale non triviale explose en un temps fini, il donne un nouveaux résultats sur le temps d'explosion T , il sera estimé superieurement par \hat{T} l'orsque la donnée énergétique est positive. Yunzhu Gao et Wenjie Cao [86] ont étudié une équation viscoélastique non linéaire à exposants variables. Ils ont prouvé l'existence de solutions faibles en utilisant la méthode Faedo-Calerkin sous des hypothèses appropriées. Smah el al. [87] a étudié le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \operatorname{div} (|\nabla u|^{m(x)-2} \nabla u) + \mu u_t = |u|^{p(x)-2} u, & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ u(x, t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné dans \mathbb{R}^n avec une frontière lisse $\partial\Omega$. Pour une énergie initiale positive arbitraire, ils ont établi un résultat d'explosion en temps fini. Nous renvoyons le lecteur à Antontsev [83, 84] et Calaktionov [85] pour plus de problèmes impliquant les non-linéarités à exposants variables. Notre but dans ce travail est de prouver un théorème d'existence locale et de trouver des conditions suffisantes sur m , p et les données initiales pour lesquelles l'explosion a lieu.

Lemme 3.1. ([67]) Si $p : \Omega \rightarrow [1, \infty)$ est une fonction mesurable et

$$2 \leq p_1 \leq p(x) \leq p_2 < \frac{2n}{n-2}, \quad n \geq 3 \quad (3.4)$$

Alors l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est continue et compacte.

Lemme 3.2. ([67]) Si $p : \Omega \rightarrow [1, \infty)$ est une fonction mesurable avec $p_2 < \infty$, alors $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Lemme 3.3 (Holder's Inequality). ([67]) Soit $p, q, s \geq 1$ des fonctions mesurables définies sur Ω telles que

$$\frac{1}{s(y)} = \frac{1}{p(y)} + \frac{1}{q(y)}, \text{ pour } y \in \Omega$$

Si $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ et $g \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ alors $fg \in L^{s(\cdot)}(\Omega)$ et

$$\|fg\|_{s(\cdot)} \leq \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_{q(\cdot)}.$$

Lemme 3.4 (Unit Ball Property). ([67]) Soit p une fonction mesurable sur Ω . Alors $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$ si et seulement si $\varrho_{p(\cdot)}(f) \leq 1$.

Lemme 3.5. ([67]) Si p est une fonction mesurable sur Ω satisfaisant (2.1), alors pour p.p. $x \in \Omega$, nous avons

$$\min \left(\|u\|_{p(\cdot)}^{p_1}, \|u\|_{p(\cdot)}^{p_2} \right) \leq \varrho_{p(\cdot)}(u) \leq \max \left(\|u\|_{p(\cdot)}^{p_1}, \|u\|_{p(\cdot)}^{p_2} \right).$$

pour toute $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

3.2 Existence de solutions faibles

Dans cette section, nous prouvons l'existence de solutions faibles de notre problème. Tout d'abord, nous considérons le problème aux limite initiale suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + au_t |u_t|^{k(\cdot)-2} = f(x, t), \text{ dans } \Omega \times (0, T) \\ u(x, t) = 0, \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), \text{ dans } \Omega \end{cases} \quad (\text{P})$$

où $a > 0$ est une constante, $f \in L^2(\Omega \times (0, T))$, $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, l'exposant $m(\cdot)$ est une fonction mesurable donnée satisfaisant (3.1) et (3.2), et Ω est un domaine borné en \mathbb{R}^n à frontière lisse (régulière) $\partial\Omega$.

Théorème 3.1. Dans les conditions ci-dessus, le problème (P) a une solution locale unique

$$u \in L^\infty \left((0, T), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \right), \quad u_t \in L^\infty \left((0, T), L^2(\Omega) \right) \cap L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T)), \\ u_{tt} \in L^2 \left((0, T), H^{-1}(\Omega) \right).$$

Démonstration. Unicité : Supposons que (P) a deux solutions u et v . Alors, $w = u - v$ satisfait

$$\begin{cases} w_{tt} + \Delta^2 w + au_t |u_t|^{m(\cdot)-2} - av_t |v_t|^{m(\cdot)-2} = 0, \text{ dans } \Omega \times (0, T) \\ w(x, t) = 0, \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0, \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

Multiplier par u_t et intégrer sur Ω , pour obtenir

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} w_t^2 + \int_{\Omega} |\Delta w|^2 \right] + a \int_{\Omega} (u_t |u_t|^{m(x)-2} - v_t |v_t|^{m(x)-2}) (u_t - v_t) dx = 0$$

Intégrez sur $(0, t)$, pour obtenir

$$\int_{\Omega} (w_t^2 + |\Delta w|^2) + 2a \int_0^t \int_{\Omega} (u_t |u_t|^{m(x)-2} - v_t |v_t|^{m(x)-2}) (u_t - v_t) dx ds = 0$$

En utilisant l'inégalité

$$(|\mathbf{a}|^{m(x)-2} \mathbf{a} - |\mathbf{b}|^{m(x)-2} \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \geq 0$$

pour tous $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ et p.p. $x \in \Omega$, on a

$$\int_{\Omega} (w_t^2 + |\Delta w|^2) = 0$$

ce qui implique que $w = c = 0$, puisque $w = 0$ sur $\partial\Omega$. Par conséquent, l'unicité.

Existence. Soit $\{(v_j)_{j=1}^{\infty}\}$ une base orthonormée pour $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, avec

$$-\Delta v_j = \lambda_j v_j \quad \text{dans } \Omega, \quad v_j = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega$$

et définir le sous-espace $V_k = \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$, de dimension finie

Par normalisation, nous avons $\|v_j\|_2 = 1$. Nous recherchons des fonctions

$$u^k(x, t) = \sum_{j=1}^k a_j(t) v_j$$

qui satisfont les problèmes approximatifs suivants

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_{tt}^k(x, t) v_j(x) dx + \int_{\Omega} \Delta u^k(x, t) \Delta v_j(x) dx \\ & + a \int_{\Omega} |u_t^k(x, t)|^{m(x)-2} u_t^k(x, t) v_j(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t) v_j(x) dx \\ & u^k(x, 0) = u_0^k, \quad u_t^k(x, 0) = u_1^k \quad \forall j = 1, 2, \dots, k \end{aligned} \quad (3.5)$$

où $u_0^k = \sum_{i=1}^k (u_0, v_i) v_i$, $u_1^k = \sum_{i=1}^k (u_1, v_i) v_i$ sont deux suites dans $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$, respectivement, de telle sorte que $u_0^k \rightarrow u_0$ in $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ et $u_1^k \rightarrow u_1$ dans $L^2(\Omega)$.

Ceci génère le système de k équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} a_j''(t) + \lambda_j a_j(t) = g_j(t) + G_j(a_1'(t), \dots, a_k'(t)) \\ a_j(0) = (u_0, v_j), \quad a_j'(0) = (u_1, v_j), \quad \forall j = 1, 2, \dots, k \end{cases} \quad (3.6)$$

où

$$g_j(t) = \int_{\Omega} f(x, t) v_j(x) dx$$

et

$$G_j(a_1'(t), \dots, a_k'(t)) = -a \int_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^k \alpha_i'(t) v_i(x) \right|^{m(x)-2} \sum_{i=1}^k \alpha_i'(t) v_i(x) v_j(x) dx$$

Ce système peut être résolu par la théorie standard de ODE. Par conséquent, nous obtenons des fonctions

$$a_j : [0, t_k) \rightarrow \mathbb{R}, \quad 0 < t_k < T$$

Ensuite, nous devons montrer que $t_k = T, \forall x \geq 1$. Nous multiplions (3.5) par $a'_j(t)$ et somme sur j pour obtenir

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} \left(|u_t^k(x, t)|^2 dx + |\Delta u^k(x, t)|^2 \right) dx \right] + a \int_{\Omega} |u_t^k(x, t)|^{m(x)} dx = \int_{\Omega} f(x, t) u_t^k(x, t) dx$$

L'intégration sur $(0, t)$ donne

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|u_t^k(x, t)|^2 dx + |\Delta u^k(x, t)|^2 \right) dx + a \int_0^t \int_{\Omega} |u_t^k(x, s)|^{m(x)} dx ds \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|u_1^k|^2 + |\Delta u_0^k|^2 \right) dx + \int_0^t \int_{\Omega} f(x, s) u_t^k(x, s) dx ds \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(u_1^2 + |\Delta u_0|^2 \right) dx + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} |u_t^k|^2 dx ds + c_{\varepsilon} \int_0^T \int_{\Omega} f^2 dx ds \\ &\leq C_{\varepsilon} + \varepsilon \sup_{(0, t_k)} \int_{\Omega} |u_t^k(x, t)|^2 dx, \quad \forall t \in [0, t_k) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sup_{(0, t_k)} \int_{\Omega} |u_t^k(x, t)|^2 dx + \frac{1}{2} \sup_{(0, t_k)} \int_{\Omega} |\Delta u^k(x, t)|^2 dx + a \int_0^{t_k} \int_{\Omega} |u_t^k(x, s)|^{m(x)} dx ds \\ &\leq C_{\varepsilon} + \varepsilon \sup_{(0, t_k)} \int_{\Omega} |u_t^k(x, t)|^2 dx \end{aligned}$$

En choisissant $\varepsilon = \frac{1}{4}$, on arrive à

$$\sup_{(0, t_k)} \int_{\Omega} |u_t^k(x, t)|^2 dx + \sup_{(0, t_k)} \int_{\Omega} |\Delta u^k(x, t)|^2 dx + a \int_0^{t_k} \int_{\Omega} |u_t^k(x, s)|^{m(x)} dx ds \leq C$$

Ainsi, la solution peut être étendue à $[0, T)$ et, de plus, on a $\{(u^k)\}$ est une suite bornée dans $L^{\infty}((0, T), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$, (u_t^k) est une suite bornée dans $L^{\infty}((0, T), L^2(\Omega)) \cap L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T))$. On peut donc extraire une sous suite $\{(u_t^{\ell})\}$ telle que

$$u^{\ell} \rightarrow u \text{ faible } * \text{ dans } L^{\infty}((0, T), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$$

$$u_t^{\ell} \rightarrow u_t \text{ faible } * \text{ dans } L^{\infty}((0, T), L^2(\Omega)) \text{ et faiblement dans } L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T)).$$

Nous pouvons conclure par le Lemme du Lions [88] que $u \in C([0, T], L^2(\Omega))$ de sorte que $u(x, 0)$ a une signification, puisque (u_t^{ℓ}) est borné dans $L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T))$ alors $|u_t^{\ell}|^{m(\cdot)-2} u_t^{\ell}$ est borné dans $L^{\frac{m(\cdot)}{m(\cdot)-1}}(\Omega \times (0, T))$, par conséquent,

$$|u_t^{\ell}|^{m(\cdot)-2} u_t^{\ell} \rightarrow \psi \text{ faiblement dans } L^{\frac{m(\cdot)}{m(\cdot)-1}}(\Omega \times (0, T))$$

Nous devons montrer que $\psi = |u_t|^{m(\cdot)-2} u_t$, in (3.5), nous utilisons u^ℓ au lieu de u^k et intégrer sur $(0, t)$ pour obtenir

$$\int_{\Omega} u_t^\ell v_j - \int_{\Omega} u_1^\ell v_j + \int_0^t \int_{\Omega} \Delta u^\ell \cdot \Delta v_j + a \int_0^t \int_{\Omega} |u_t^\ell|^{m(x)-2} u_t^\ell v_j = \int_0^t \int_{\Omega} f v_j, \forall j < \ell$$

Quand ℓ passe à $+\infty$, on vérifie facilement que

$$\int_{\Omega} u_t t_j - \int_{\Omega} u_1 t_j + \int_0^t \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v_j + a \int_0^t \int_{\Omega} \psi v_j = \int_0^t \int_{\Omega} f v_j, \forall j \geq 1$$

par conséquent.

$$\int_{\Omega} u_t v - \int_{\Omega} u_1 v + \int_0^t \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v + a \int_0^t \int_{\Omega} \psi v = \int_0^t \int_{\Omega} f v, \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

Tous les termes définissent des fonctions continues absolues, nous obtenons donc, pour p.p $t \in [0, T]$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_t v + \int_{\Omega} (\Delta u \cdot \Delta v + a \psi v) = \int_{\Omega} f v, \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \quad (3.8)$$

Ceci implique que

$$u_{tt} + \Delta^2 u + \psi = f, \text{ dans } D'(\Omega \times (0, T)) \quad (3.9)$$

Pour simplifier, soit $A(v) = |v|^{m(x)-2} v$ et définissons

$$X^\ell = \int_0^T \int_{\Omega} (A(u_t^\ell) - A(v)) (u_t^\ell - v) dt \geq 0, \quad \forall v \in L^{m(\cdot)}((0, T); H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$$

Donc, en utilisant (2.30) et en remplaçant u^k par u^ℓ , on obtient

$$\begin{aligned} X^\ell &= \int_0^T \int_{\Omega} f u_t^\ell + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|u_1^\ell|^2 + |\Delta u_0^\ell|^2) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t^\ell(x, T)|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u^\ell(x, T)|^2 - \int_0^T \int_{\Omega} A(u_t^\ell) v - \int_0^T \int_{\Omega} A(v) (u_t^\ell - v) \end{aligned}$$

En prenant $\ell \rightarrow \infty$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 \leq \limsup_t X^\ell &\leq \int_0^T \int_{\Omega} f u_t + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_1^2 + |\Delta u_0|^2) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t(x, T)|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u(x, T)|^2 - \int_0^T \int_{\Omega} \psi v - \int_0^T \int_{\Omega} A(v) (u_t - v) \end{aligned} \quad (3.10)$$

En remplaçant v par u_t par dans (3.8) et en intégrant sur $(0, T)$, on arrive à

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} f u_t &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t(x, T)|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_1^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u(x, T)|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \psi u_t \end{aligned} \quad (3.11)$$

Ajout (3.10) and (3.11), implique

$$0 \leq \limsup_{\ell} X^{\ell} \leq \int_0^T \int_{\Omega} \psi u_t - \int_0^T \int_{\Omega} \psi v - \int_0^T \int_{\Omega} A(v) (u_t - v)$$

C'est,

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\psi - A(v)) (u_t - v) dt \geq 0, \quad \forall v \in L^{m(\cdot)} \left((0, T); H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \right)$$

Par conséquent

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\psi - A(v)) (u_t - v) dt \geq 0, \quad \forall v \in L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T))$$

par densité de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ in $L^{m(\cdot)}(\Omega)$ (Lemme 3.2).

Soit $v = \lambda w + u_t, w \in L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T))$. Alors, on obtient

$$-\lambda \int_0^T \int_{\Omega} (\psi - A(\lambda w + u_t)) w \geq 0, \quad \forall \lambda \neq 0, \quad \forall w \in L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T))$$

Pour $\lambda > 0$, on a

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\psi - A(\lambda w + u_t)) w \leq 0, \quad \forall w \in L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T))$$

Comme $\lambda \rightarrow 0$ et en utilisant la continuité de A par rapport à λ , on obtient

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\psi - A(u_t)) w \leq 0, \quad \forall w \in L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T))$$

De même manière pour $\lambda < 0$, on obtient

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\psi - A(u_t)) w \geq 0, \quad \forall w \in L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T))$$

Ceci implique que $\psi = A(u_t)$. Ainsi (3.8) devient

$$\int_{\Omega} \left(u_{tt}v + \Delta u \cdot \Delta v + a |u_t|^{m(x)-2} u_t v \right) dx = \int_{\Omega} f v, \forall v \in L^{m(\cdot)} \left((0, T) \times H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \right)$$

qui donne

$$u_{tt} + \Delta^2 u + a |u_t|^{m(x)-2} u_t = f, \text{ dans } D'(\Omega \times (0, T))$$

Pour gérer les conditions initiales, nous notons que

$$\begin{aligned} u^{\ell} - u &\text{ faible } * \text{ dans } L^{\infty} \left((0, T), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \right) \\ u_t^{\ell} - u_t &\text{ faible } * \text{ dans } L^{\infty} \left((0, T), L^2(\Omega) \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ainsi, en utilisant le lemme des Lions [88], nous obtenons

$$u^{\ell} \rightarrow u \text{ dans } C([0, T], L^2(\Omega)) \quad (3.13)$$

Par conséquent, $u^\ell(x, 0)$ a un sens et $u^\ell(x, 0) \rightarrow u(x, 0)$ dans $L^2(\Omega)$.

Nous avons aussi

$$u^\ell(x, 0) = u_0^\ell(x) \rightarrow u_0(x) \text{ dans } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

Ainsi

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (3.14)$$

Soit $\phi \in C_0^\infty(0, T)$, en remplaçant (u^k) par (u^ℓ) , on obtient de (3.5) et pour tout $j \leq \ell$ que

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_\Omega u_t^\ell(x, t) v_j(x) \phi'(t) dx dt \\ &= - \int_0^T \int_\Omega \Delta u^\ell(x, t) \Delta v_j(x) \phi(t) dx dt \\ & - a \int_0^T \int_\Omega |u_t^\ell(x, t)|^{m(x)-2} u_t^\ell(x, t) v_j(x) \phi(t) dx dt \\ & \quad + \int_0^T \int_\Omega f(x, t) y(x) \phi(t) dx dt \end{aligned} \quad (3.15)$$

quand $\ell \rightarrow +\infty$, on obtain que

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_\Omega u_t(x, t) v_j(x) \phi'(t) dx dt \\ &= - \int_0^T \int_\Omega \Delta u(x, t) \Delta v_j(x) \phi(t) dx dt \\ & - a \int_0^T \int_\Omega |u_t(x, t)|^{m(x)-2} u_t(x, t) v_j(x) \phi(t) dx dt \\ & \quad + \int_0^T \int_\Omega f(x, t) v_j \phi(t) dx dt \end{aligned} \quad (3.16)$$

pour tout $j \geq 1$. Cela implique

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_\Omega u_t(x, t) v(x) \phi'(t) dx dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega \left[\Delta^2 u - a |u_t(x, t)|^{m(x)-2} u_t(x, t) + f(x, t) \right] v(x) \phi(t) dx dt \end{aligned} \quad (3.17)$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Cela signifie $u_{tt} \in L^2([0, T], H^{-1}(\Omega))$ et u résoudre l'équation

$$u_{tt} + \Delta^2 u + a |u_t|^{m(\cdot)-2} u_t = f \quad (3.18)$$

Donc, $u_t \in L^\infty([0, T], L^2(\Omega))$, $u_{tt} \in L^{\frac{m(\cdot)}{m(\cdot)-1}}([0, T], H^{-1}(\Omega))$. par conséquent.

$$u_t \in C([0, T], H^{-1}(\Omega)) \quad (3.19)$$

Alors, $u_t^\ell(x, 0)$ a un ense (voir [26]). Il s'ensuit que

$$u_t^\ell(x, 0) \rightarrow u_t(x, 0) \quad \text{in } H^{-1}(\Omega)$$

Mais

$$u_t^\ell(x, 0) = u_1^\ell(x) \rightarrow u_1(x) \quad \text{dans } L^2(\Omega) \quad (3.20)$$

Donc

$$u_t(x, 0) = u_1(x)$$

Cela met fin à la preuve du théorème 3.1. □

Lemme 3.6. *Pour $x \in \Omega$ et $p(\cdot)$ satisfaisante*

$$2 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < +\infty$$

la fonction $g(s) = |s|^{p(x)-2}$ est différentiable et $|g'(s)| = |b||p(x) - 1||s|^{p(x)-2}$.

Théorème 3.2. *Supposons que $m(\cdot)$ Satisfait(3.1), (3.2) et $p(\cdot)$ satisfait (3.2) et*

$$2 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < 2\frac{n-1}{n-2}, \quad n \geq 3 \quad (3.21)$$

Supposons en outre que

$$(u_0, u_1) \in (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \times L^2(\Omega) \quad (3.22)$$

Alors le problème (P) a une solution locale unique

$$\begin{aligned} u \in L^\infty \left((0, T), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \right), \quad u_t \in L^\infty \left((0, T), L^2(\Omega) \right) \cap L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T)), \\ u_{tt} \in L^2 \left((0, T), H^{-1}(\Omega) \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Démonstration. Soit $v \in L^\infty \left((0, T), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \right)$. Alors

$$\|g(v)\|_2^2 = |b|^2 \int_\Omega |v|^{2p(x)-1} dx \leq |b|^2 \left[\int_\Omega |v|^{2(p_2-1)} dx + \int_\Omega |v|^{2(p_1-1)} dx \right] < +\infty$$

puisque

$$2(p_1 - 1) \leq 2(p_2 - 1) \leq \frac{2n}{n-2}$$

Donc, dans ce cas,

$$g(v) \in L^\infty \left((0, T), L^2(\Omega) \right) \subset L^2(\Omega \times (0, T))$$

Par conséquent, pour chaque $v \in L^\infty \left((0, T), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \right)$, il existe un unique

$$u \in L^\infty \left((0, T), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \right), \quad u_t \in L^\infty \left((0, T), L^2(\Omega) \right) \cap L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T))$$

satisfaire le problème non linéaire

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + au_t |u_t(x, t)|^{m(x)-2} = g(v), & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ u(x, t) = 0, \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (L)$$

Nous définissons une application $G : X_T \rightarrow X_T$ par $G(v) = u$, où

$$X_T = \left\{ w \in L^\infty \left((0, T), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \right) / w_t \in L^\infty \left((0, T), L^2(\Omega) \right) \right\}$$

X_T est un espace de Banach par rapport à la norme

$$\|w\|_{X_T} = \|w\|_{L^\infty((0,T),H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))} + \|w_t\|_{L^\infty((0,T),L^2(\Omega))}$$

Multipliez l'équation de (L) par u_t et intégrez sur $\Omega \times (0, t)$, pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + a \int_0^t \int_{\Omega} |u_t|^{m(x)} dx &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_1^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u_0|^2 \\ &+ b \int_0^t \int_{\Omega} |v|^{(x)-2} v u_t dx \end{aligned} \quad (3.24)$$

En utilisant l'inégalité de Young, nous avons

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} v^{p(x)-2} v u_t dx \right| &\leq \frac{\varepsilon}{4} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{4}{\varepsilon} \int_{\Omega} |v|^{2p(x)-2} dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{4}{\varepsilon} \left[\int_{\Omega} |v|^{2p_2-2} dx + \int_{\Omega} |v|^{2p_1-2} dx \right] \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{C_e}{\varepsilon} \left[\|\nabla v\|_2^{2p_1-2} + \|\nabla v\|_2^{2p_2-2} \right] \end{aligned}$$

Donc (3.24) devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx &\leq \lambda_0 + \frac{|b|\varepsilon T}{4} \sup_{(0,t)} \int_{\Omega} u_t^2 dt \\ &+ \frac{|b|c_e}{\varepsilon} \left[\int_0^T \|\nabla v\|_2^{2p_2-2} dt + \int_0^T \|\nabla v\|_2^{2p_1-2} dt \right] \end{aligned}$$

d'où nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sup_{(0,T)} \int_{\Omega} u_t^2 + \frac{1}{2} \sup_{(0,T)} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 &\leq 2\lambda_0 \\ &+ \frac{|b|\varepsilon T}{2} \sup_{(0,T)} \int_{\Omega} u_t^2 + Tc_e \left[\|v\|_{X_T}^{2p_2-2} + \|v\|_{X_T}^{2p_1-2} \right] \end{aligned}$$

où $\lambda_0 = \frac{1}{2} \|u_1\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u_0\|_2^2$ et c_e est la constante d'injection.

En choisissant ε tel que $\frac{|b|\varepsilon}{2} = \frac{1}{4}$, on obtient

$$\|u\|_{X_T}^2 \leq \lambda + T\beta \left[\|v\|_{X_T}^{2p_2-2} + \|v\|_{X_T}^{2p_1-2} \right]$$

Supposons que $\|v\|_{X_T} \leq M$, pour certains M large. Alors

$$\|u\|_{X_T}^2 \leq \lambda + T\beta M^{2p_2-2} \leq M^2$$

si $M^2 > \lambda$ et $T \leq T_0 < \frac{M^2 - \lambda}{\beta M^{2p_2 - 2}}$. Nous concluons que $G : B \rightarrow B$, où

$$B = \left\{ w \in L^\infty \left((0, T), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \right), w_t \in L^\infty \left((0, T), L^2(\Omega) \right) \text{ tel que } \|w\|_{X_{T_0}} \leq M \right\}$$

Ensuite, nous montrons cela, pour T_0 (encore plus petit). G est une contraction.

Pour cela, soit $u_1 = G(v_1)$ et $u_2 = G(v_2)$ et posons $u = u_1 - u_2$ alors u satisfait

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + a \left[|u_{1t}|^{m(\cdot)-2} u_{1t} - |u_{2t}|^{m(\cdot)-2} u_{2t} \right] \\ \quad = b \left[|v_1|^{p(x)-2} v_1 - |v_2|^{p(x)-2} v_2 \right], \text{ dans } \Omega \times (0, T) \\ u(x, t) = 0, \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), \text{ dans } \Omega \end{cases} \quad (3.25)$$

La multiplication par u_t et l'intégration sur $\Omega \times (0, t)$ donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + a \int_0^t \int_{\Omega} \left[|u_{1t}|^{m(x)-2} u_{1t} - |u_{2t}|^{m(x)-2} u_{2t} \right] (u_{1t} - u_{2t}) dx ds \\ = b \int_0^t \int_{\Omega} (g(v_1) - g(v_2)) u_t dx ds \end{aligned}$$

d'où nous avons

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \leq b \int_0^t \int_{\Omega} (g(v_1) - g(v_2)) u_t dx ds \quad (3.26)$$

Maintenant, nous évaluons

$$I = \int_{\Omega} |g(v_1) - g(v_2)| |u_t| = \int_{\Omega} |g'(\xi)| |v| |u_t|$$

où

$$v = v_1 - v_2 \text{ et } \xi = \alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2, 0 \leq \alpha \leq 1$$

L'inégalité de Young implique

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} u_t^2 + \frac{2}{\delta} \int_{\Omega} |g'(\xi)|^2 |v|^2 \\ &\leq \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} u_t^2 + \frac{2a^2(p_2 - 1)^2}{\delta} \int_{\Omega} |\alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2|^{2(p(x)-2)} |v|^2 \\ &\leq \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} u_t^2 + c_{\delta} \left(\int_{\Omega} |v|^{\frac{2n}{n-2}} \right)^{\frac{n-2}{n}} \left[\left(\int_{\Omega} |\alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2|^{n(p_2-2)} \right)^{\frac{2}{n}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{\Omega} |\alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2|^{n(p_1-2)} \right)^{\frac{2}{n}} \right] \end{aligned}$$

En rappelant (3.21), on arrive à

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} u_t^2 de \\ &+ c_{\delta} c_e \|\Delta v\|_2^2 \left[\|\Delta v_1\|_2^{2(p_2-2)} + \|\Delta v_1\|_2^{2(p_1-2)} + \|\Delta v_2\|_2^{2(p_2-2)} + \|\Delta v_2\|_2^{2(p_1-2)} \right] \\ &\leq \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} u_t^2 + 4c_{\delta} c_e M^{2(p_2-2)} \|\Delta v\|_2^2 \end{aligned}$$

Par conséquent, (3.26) prend la forme

$$\frac{1}{2} \|u\|_{X_T}^2 \leq \frac{\delta}{2} T_0 b \|u\|_{X_T}^2 + C_\delta M^{2(p_2-2)} T_0 b \|v\|_{X_T}^2$$

En choisissant δ assez petit, on arrive à

$$\|u\|_{X_T}^2 \leq 4C_\delta M^{2(p_2-2)} T_0 b \|v\|_{X_T}^2 = \gamma T_0 \|v\|_{X_T}^2$$

En prenant T_0 assez petit, nous obtenons $\|u\|_{X_T}^2 \leq d \|v\|_{X_T}^2$, for $0 < d < 1$

Donc G est une contraction. Le théorème point fixe de Banach implique l'existence d'un unique $u \in B$ satisfaisant $G(u) = u$. Ainsi, u est une solution locale de (P).

Unicité. Supposons que nous ayons deux solutions u et v . Alors $w = u - v$ satisfait

$$w_{tt} + \Delta^2 w + a [u_t |u_t|^{m(\cdot)-2} - v_t |v_t|^{m(\cdot)-2}] = b [|u|^{p(x)-2} u - |v|^{p(x)-2} v],$$

Multiplier par w_t et intégrer sur $\Omega \times (0, t)$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta w|^2 dx + a \int_0^t \int_{\Omega} (u_t |u_t|^{m(x)-2} - v_t |v_t|^{m(x)-2}) (u_t - v_t) dx \\ = b \int_0^t \int_{\Omega} (u |u|^{p(x)-2} - v |v|^{p(x)-2}) w_t dx ds \end{aligned}$$

Cela implique

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} w_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta w|^2 dx \leq b \int_0^t \int_{\Omega} (u |u|^{p(x)-2} - v |v|^{p(x)-2}) w_t dx$$

En répétant les mêmes estimations que ci-dessus, nous arrivons à

$$\int_{\Omega} (w_t^2 + |\Delta w|^2) dx \leq c \int_0^t \int_{\Omega} (w_t^2(x, s) + |\Delta w(x, s)|^2) dx ds$$

L'inégalité de Gronwall donne

$$\int_{\Omega} (w_t^2 + |\Delta w|^2) dx = 0$$

Donc, $w \equiv 0$. Cela montre l'unicité. La preuve du théorème 3.2 est terminée. \square

3.3 Explosion en temp fini(Blow-up)

Dans cette section, nous montrons que la solution (3.23) explose en temps fini si

$$2 \leq m_1 \leq m(x) \leq m_2 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 \leq \frac{2n}{n-2} \quad (3.27)$$

détient et $E(0) < 0$, où

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dx - b \int_{\Omega} \frac{|u|^{p(x)}}{p(x)} dx \quad (3.28)$$

Nous écrivons aussi $\varrho(u)$ au lieu de $\varrho_{p(\cdot)}(u)$ pour simplifier.

Lemme 3.7. *Supposons que les conditions du Lemme 3.1 soient satisfaites. Alors il existe un $C > 1$ positif, dépendant uniquement de Ω tel que*

$$\varrho^{\frac{s}{p_1}}(u) \leq C \left(\|\nabla u\|_2^2 + \varrho(u) \right) \quad (3.29)$$

pour toute $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ et $2 \leq s \leq p_1$.

Démonstration. Preuve. Si $\varrho(u) > 1$, alors $e^{\frac{s}{p_1}}(u) \leq \varrho(u) \leq C [\|\nabla u\|_2^2 + \varrho(u)]$, où $C > 1$.

Si $\varrho(u) \leq 1$ alors, d'après le lemme 3.4, $\|u\|_{p(\cdot)} \leq 1$. Alors, les lemmes 3.1 et 3.5 impliquent

$$\varrho^{\frac{s}{p_1}}(u) \leq \varrho^{\frac{2}{p_1}}(u) \leq \max \left(\|u\|_{p(\cdot)}^{p_1}, \|u\|_{p(\cdot)}^{p_2} \right)^{\frac{2}{p_1}} = \|u\|_{p(\cdot)}^2 \leq C \|\nabla u\|_2^2$$

Par conséquent (3.29) suit. \square

Comme cas particulier, nous avons

Corollaire 3.3. *Soit les hypothèses du Lemme 3.7 tenir. Ensuite nous avoir*

$$\|u\|_{p_1}^s \leq C \left(\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_{p(\cdot)}^{p_1} \right) \quad (3.30)$$

pour toute $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ et $2 \leq s \leq p_1$.

Nous fixons

$$H(t) = -E(t)$$

et l'utilisation, tout au long de ce document C pour désigner une constante positive générique en fonction de Ω uniquement. Comme un conséquence de (3.28) et (3.29) on a

Corollaire 3.4. *Soit les hypothèses du Lemme 3.7 tenir. Ensuite nous avons*

$$\varrho^{\frac{s}{p_1}}(u) \leq C(H(t) + \|u\|_2^2 + \varrho(u)), \quad (3.31)$$

pour toute $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ et $2 \leq s \leq p_1$.

Comme cas particulier, nous avons

Corollaire 3.5. *Soit les hypothèses du Lemme 3.7 alors nous avons*

$$\|u\|_{p_1}^s \leq C \left(|H(t)| + \|u_t\|_2^2 + \|u\|_{p_1}^{p_1} \right)$$

pour toute $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ et $2 \leq s \leq p_1$.

Lemme 3.8. *Soit les hypothèses du lemme 3.7 et soit u la solution de (P). Puis.*

$$\varrho(u) \geq C \|u\|_{p_1}^{p_1}. \quad (3.32)$$

Démonstration.

$$\varrho(u) = \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx = \int_{\Omega_+} |u|^{p_1} dx + \int_{\Omega_-} |u|^{p_2} dx$$

où

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega / |u(x, t)| \geq 1\} \text{ and } \Omega_- = \{x \in \Omega / |u(x, t)| < 1\}$$

donc on obtient

$$\varrho(u) \geq \int_{\Omega_+} |u|^{p_1} + \int_{\Omega_-} |u|^{p_2} \geq \int_{\Omega_+} |u|^{p_1} + c_1 \left(\int_{\Omega_-} |u|^{p_1} \right)^{\frac{p_2}{p_1}}$$

Cela implique que $c_2(\varrho(u))^{\frac{p_1}{p_2}} \geq \int_{\Omega_-} |u|^{p_1}$ and $\varrho(u) \geq \int_{\Omega_+} |u|^{p_1}$ et donc

$$c_2(\varrho(u))^{\frac{p_1}{p_2}} + \varrho(u) \geq \|u\|_{p_1}^{p_1} \quad (3.33)$$

puisque

$$0 < H(0) \leq H(t) \leq \frac{b}{p_1} \varrho(u)$$

alors (3.33) conduit à

$$\varrho(u) \left[1 + c_2 \left(\frac{p_1}{b} H(0) \right)^{\frac{p_1}{2}-1} \right] \geq \|u\|_{p_1}^{p_1}$$

Ainsi, (3.32) suit. □

Lemme 3.9. *Supposons que (3.27) soit vérifiée et soit u la solution de (P) Alors.*

$$\int_{\Omega} |u|^{m(x)} dx \leq c \left((\varrho(u))^{\frac{m_1}{p_1}} + (\varrho(u))^{\frac{m_2}{p_2}} \right) \quad (3.34)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^{m(x)} dx &\leq \int_{\Omega_-} |u|^{m_1} dx + \int_{\Omega_+} |u|^{m_2} dx \\ &\leq C \left[\left(\int_{\Omega_-} |u|^{p_1} dx \right)^{m_1/p_1} + \left(\int_{\Omega_+} |u|^{p_1} dx \right)^{m_2/p_1} \right] \leq C \left(\|u\|_{p_1}^{m_1} + \|u\|_{p_1}^{m_2} \right) \\ &\leq C \left((\varrho(u))^{\frac{m_1}{p_1}} + (\varrho(u))^{\frac{m_2}{p_2}} \right) \end{aligned}$$

par Lemme 3.8. □

Notre résultat explosé se lit comme suit :

Théorème 3.6. *Soit les conditions du théorème 3.2 remplies. Supposons que (3.27) soit vérifié et*

$$E(0) < 0 \quad (3.35)$$

Alors la solution du problème (P) qui appartenant à la class (3.23) explose en temps fini.

Démonstration. Nous multiplions (P) par u_t , et intégrons sur Ω pour obtenir

$$E'(t) = -a \int_{\Omega} |u_t(x, t)|^{m(x)} dx \quad (3.36)$$

pour presque tout t dans $[0, T)$ puisque $E(t)$ est absolument continue (voir [81]) : d'où $H'(t) \geq 0$ et

$$0 < H(0) \leq H(t) \leq \frac{b}{p_1} \varrho(u) \quad (3.37)$$

for every t in $[0, T)$, by virtue of (3.35). We then define

$$L(t) := H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon \int_{\Omega} uu_t(x, t) dx \quad (3.38)$$

pour ε petit à choisir plus tard et

$$0 < \alpha \leq \min \left\{ \frac{p_1 - 2}{2p_1}, \frac{p_1 - m_2}{p_1(m_2 - 1)} \right\} \quad (3.39)$$

En prenant la dérivée de (3.38) et en utilisant Eq. (P) on obtient

$$L'(t) = (1 - \alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon \int_{\Omega} [u_t^2 - |\Delta u|^2] + \varepsilon b \int_{\Omega} |u|^{p(x)} - a\varepsilon \int_{\Omega} uu_t |u_t|^{m(x)-2} \quad (3.40)$$

Ajoutant $+\varepsilon(1 - \eta)p_1H(t) - \varepsilon(1 - \eta)p_1H(t)$, pour $0 < \eta < 1$, du côté droit de (3.40) pour arriver à

$$\begin{aligned} L'(t) &= (1 - \alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon(1 - \eta)p_1H(t) + \varepsilon b\eta \int_{\Omega} |u|^{p(x)} \\ &+ \varepsilon \left(\frac{(1 - \eta)p_1}{2} + 1 \right) \|u_t\|_2^2 + \varepsilon \left(\frac{(1 - \eta)p_1}{2} - 1 \right) \|\Delta u\|_2^2 - a\varepsilon \int_{\Omega} uu_t |u_t|^{m(x)-2} dx \end{aligned} \quad (3.41)$$

pour η assez petit, on voit que

$$L'(t) \geq (1 - \alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon\beta [H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|\Delta u\|_2^2 + \varrho(u)] - a\varepsilon \int_{\Omega} uu_t |u_t|^{m(x)-2} dx \quad (3.42)$$

où

$$\beta = \min \left\{ (1 - \eta)p_1, b\eta, \frac{(1 - \eta)p_1}{2} + 1, \frac{(1 - \eta)p_1}{2} - 1 \right\} > 0$$

en utilisant l'inégalité de Young nous estimons le dernier terme de (3.42) comme suit

$$\int_{\Omega} |u_t|^{m(x)-1} |u| dx \leq \frac{1}{m_1} \int_{\Omega} \delta^{m(x)} |u|^{m(x)} dx + \frac{m_2 - 1}{m_2} \int_{\Omega} \delta^{-\frac{m(x)}{m_2-1}} |u_t|^{m(x)} dx, \quad \forall \delta > 0 \quad (3.43)$$

Donc en prenant δ pour que

$$\delta^{-\frac{m(x)}{m_2-1}} = kH^{-\alpha}(t)$$

pour une grande constante k à spécifier plus tard, et en remplaçant dans (3.43) on obtient

$$\int_{\Omega} |u_t|^{m(x)-1} |u| dx \leq \frac{1}{m_1} \int_{\Omega} k^{1-m(x)} |u|^{m(x)} H^{\sigma(m(x)-1)}(t) dx + \frac{(m_2 - 1)k}{am_2} H^{-\alpha}(t)H'(t) \quad (3.44)$$

La combinaison de (3.42) et (3.44) donne

$$\begin{aligned} L'(t) \geq & \left[(1 - \alpha) - \varepsilon \left(\frac{m_2 - 1}{m_2} \right) k \right] H^{-\alpha}(t) H'(t) \\ & + \varepsilon \beta \left[H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + \varrho(u) \right] \\ & - \varepsilon \frac{k^{1-m_1 a}}{m_1} H^{\alpha(m_2-1)}(t) \int_{\Omega} |u|^{m(x)} dx \end{aligned} \quad (3.45)$$

En utilisant le lemme 3.9 et (3.37), on a

$$H^{\sigma(m_2-1)}(t) \int_{\Omega} |u|^{m(x)} dx \leq c \left(\varrho(u)^{\frac{m_1}{p_1} + a(m_2-1)} + \varrho(u)^{\frac{m_2}{p_1} + a(m_2-1)} \right) \quad (3.46)$$

On utilise alors le lemme 3.9 et (3.39) pour

$$s = m_2 + \alpha p_1 (m_2 - 1) \leq p_1 \text{ et } s = m_1 + \alpha p_1 (m_2 - 1) \leq p_1$$

pour trouvée de (3.46),

$$H^{\sigma(m_2-1)}(t) \int_{\Omega} |u|^{m(x)} dx \leq c \left(\|\nabla u\|_2^2 + \varrho(u) \right) \quad (3.47)$$

La combinaison de (3.45) et (3.47) donne

$$\begin{aligned} L'(t) \geq & \left[(1 - \alpha) - \varepsilon \left(\frac{m_2 - 1}{m_2} \right) k \right] H^{-\alpha}(t) H'(t) \\ & + \varepsilon \left(\beta - \frac{k^{1-m_1 a}}{m_1} c \right) \left[H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + \varrho(u) \right] \end{aligned} \quad (3.48)$$

À ce point, on choisit k assez grand pour que

$$\gamma = \beta - \frac{a k^{1-m_1}}{m_1} C > 0$$

Une fois k fixé (d'où γ) on choisit ε assez petit pour que

$$(1 - \alpha) - \varepsilon \left(\frac{m_2 - 1}{m_2} \right) k \geq 0 \text{ et } L(0) = H^{1-\alpha}(0) + \varepsilon \int_{\Omega} u_0(x) u_1(x) dx > 0$$

Donc (3.48) prend la forme

$$L'(t) \geq \gamma \varepsilon \left[H(t) + \|u_t\|_2^2 + e^{(u)} \right] \geq \gamma \varepsilon \left[H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|u\|_{p_p}^{p_1} \right] \quad (3.49)$$

en vertu de (3.32), en conséquence nous avons

$$L(t) \geq L(0) > 0, \text{ pour tout } t \geq 0$$

Nous voudrions ensuite montrer que

$$L'(t) \geq \Gamma L^{\frac{1}{1-\alpha}}(t), \text{ pour tout } t \geq 0 \quad (3.50)$$

où Γ est une constante positive dépendant de $\varepsilon\gamma$ et C (la constante du corollaire 3.4). Une fois que (3.50) est établie, on obtient de manière standard l'explosion en temps fini de $L(t)$. Pour prouver (3.50) notons d'abord que

$$\left| \int_{\Omega} uu_t(x, t) dx \right| \leq \|u\|_2 \|u_t\|_2 \leq C \|u\|_{p_1} \|u_t\|_2$$

ce qui implique

$$\left| \int_{\Omega} uu_t(x, t) dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq C \|u\|_{p_1}^{\frac{1}{1-\alpha}} \|u_t\|_2^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Encore une fois, l'inégalité de Young donne

$$\left| \int_{\Omega} uu_t(x, t) dx \right|^{1/(1-\alpha)} \leq C \left[\|u\|_{p_1}^{\mu/(1-\alpha)} + \|u_t\|_2^{\theta(1-\alpha)} \right] \quad (3.51)$$

pour $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta} = 1$. Nous prenons $\theta = 2(1 - \alpha)$, pour obtenir $\mu/(1 - \alpha) = 2/(1 - 2\alpha) \leq p_1$ par (3.39) fonc (3.51) fevient

$$\left| \int_{\Omega} uu_t(x, t) dx \right|^{1/(1-\alpha)} \leq C \left[\|u\|_{p_1}^s + \|u_t\|_2^2 \right]$$

où $s = 2/(1 - 2\alpha) \leq p_1$. En utilisant le Corollaire 3.5 on obtient

$$\left| \int_{\Omega} uu_t(x, t) dx \right|^{1/(1-\alpha)} \leq C \left[H(t) + \|u\|_{p_1}^s + \|u_t\|_2^2 \right], \text{ potout } t \geq 0 \quad (3.52)$$

Enfin, en notant que

$$\begin{aligned} L^{1/1-\alpha}(t) &= \left[H^{(1-\alpha)}(t) + \varepsilon \int_{\Omega} uu_t(x, t) dx \right]^{1/(1-\alpha)} \\ &\leq 2^{1/(1-\alpha)} \left[H(t) + \left| \int_{\Omega} uu_t \right|^{1/(1-\alpha)} \right] \end{aligned}$$

et en le combinant avec (3.49) et (3.52), l'inégalité (3.50) est établie. Une simple intégration de (3.50) sur $(0, t)$ donne alors

$$L^{\alpha/(1-\alpha)}(t) \geq \frac{1}{L^{-\alpha/(1-\alpha)}(0) - \Gamma t \alpha / (1 - \alpha)} \quad (3.53)$$

Par conséquant (3.53) montre que $L(t)$ explose en temps fini

$$T^* \leq \frac{1 - \alpha}{\Gamma \alpha [L(0)]^{\alpha/(1-\alpha)}}$$

où Γ et α sont des constantes positives avec $\alpha < 1$ et L est donné par (3.38) ci-dessus. Ceci achève la preuve. \square

CHAPITRE 4

RÉSULTATS DE NON-EXISTENCE GLOBALE ET D'EXPLOSION POUR UNE ÉQUATION D'ÉVOLUTION QUASI-LINÉAIRE

4.1 Introduction

Soit Ω un domaine borné dans \mathbb{R}^n , $n \geq 1$ de frontière lisse $\Gamma = \partial\Omega$. On considère le problème aux limites initiales suivant :

$$\begin{cases} a(x, t) u_t - \Delta_{m(\cdot)} u = f(u), & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, t) = 0 \text{ on } \Gamma, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

où

$$\Delta_{m(\cdot)} u = \operatorname{div} (|\nabla u|^{m(x)-2} \nabla u)$$

appelé l'opérateur $m(\cdot)$ -Laplacien. Cette opérateur peut être étendu à un opérateur monotone entre l'espace $W_0^{1,m(\cdot)}(\Omega)$ et son dual

$$\begin{cases} -\Delta_{m(\cdot)} u : W_0^{1,m(\cdot)}(\Omega) \rightarrow W^{-1,m'(\cdot)}(\Omega), \\ \langle -\Delta_{m(\cdot)} u, \phi(x) \rangle_{m(\cdot)} = \int_{\Omega} |\nabla u|^{m(x)-2} \nabla u \nabla \phi(x) dx, \\ \text{où } 2 < m_1 \leq m(x) \leq m_2 < \infty. \end{cases}$$

avec $\langle \cdot, \cdot \rangle_{m(\cdot)}$ désigne le produit de dualité entre $W_0^{1,m(\cdot)}(\Omega)$ et $W^{-1,m'(\cdot)}(\Omega)$, $\frac{1}{m(x)} + \frac{1}{m'(x)} = 1$.

$f(u)$ est un terme source général dépend de $p(\cdot)$, les coefficients $a(x, \cdot)$ et les exposants $p(\cdot)$ et $m(\cdot)$ sont donnés des fonctions mesurables sur $\bar{\Omega}$ telles que :

$$2 < m_1 \leq m(x) \leq m_2 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 \leq m_*(x), \quad (4.2)$$

où

$$\psi_2 = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \psi(x), \quad \psi_1 = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} \psi(x).$$

et

$$m_*(x) = \begin{cases} \frac{nm(x)}{(n-m(x))_2} & \text{if } n > m_2 \\ +\infty & \text{if } n \leq m_2 \end{cases}$$

Nous supposons également que $m(\cdot)$ satisfait la condition de continuité locale uniforme de Zhikov-Fan suivante :

$$|m(x) - m(y)| \leq \frac{M}{|\log |x - y||}, \text{ for all } x, y \text{ in } \Omega \text{ with } |x - y| < \frac{1}{2}, M > 0. \quad (4.3)$$

Un effort considérable a été consacré à l'étude du problème (4.1) dans le cas de variable constante lorsque $p(x) = p = \text{constant}$ et $m(x) = m = \text{constant}$. Le problème (4.1) avec l'opérateur m -Laplacien usuel $\Delta_m u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2} \nabla u)$, ($m = \text{constant} \geq 2$); ($m = 2$, $\Delta_m u = \Delta u$), a été largement étudiée concernant l'existence, la non-existence et la dynamique de temps long. Pour les résultats de la nature et dans le cas où $p(x) = p = \text{constant} \geq 2$ et $m(x) = m = \text{constant} > 2$, nous renvoyons le lecteur aux [106, 105, 104] relatifs à l'équation

$$a(x) u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2} \nabla u) = f(u), \quad x \in \Omega, t > 0.$$

Lorsque $m(x) = m = 2$, $a(x, t) = 1$ et $f(u) = u^{p(x)}$, problème (4.1) devient le suivant

$$u_t - \Delta u = u^{p(x)}, \quad x \in \Omega, t > 0. \quad (4.4)$$

Le problème (4.4) découle de nombreux modèles mathématiques importants en ingénierie et en sciences physiques. Par exemple, la science nucléaire, les réactions chimiques, le transfert de chaleur, la dynamique des populations, les sciences biologiques, etc., et ont beaucoup retenu l'attention dans la recherche, voir [66, ?, 70] et les références qui s'y trouvent. Pour le problème (4.4), Hua Wang et al. [103] a établi un résultat d'explosion avec une énergie initiale positive sous certaines hypothèses appropriées sur les paramètres $p(\cdot)$ et u_0 . Dans [70], les auteurs ont prouvé qu'il existe des solutions non négatives avec un éclatement en temps fini si et seulement si $p_2 > 1$. Les auteurs dans [54] ont obtenu la solution du problème (4.1) explose en un temps fini lorsque l'énergie initiale est positive. Dans [53], les auteurs se basant exactement sur l'idée de celle de [55] ont dérivé les bornes inférieures pour le temps d'explosion si les solutions explosent. Ce travail est d'étendre les résultats établis dans les domaines bornés au problème général comme dans (4.1) dans le cas où les exposants $m(\cdot)$ et $p(\cdot)$ sont donnés des fonctions mesurables sur $\bar{\Omega}$ et vérifie (4.2), et $f(u)$ est un terme source plus généralisé. Nous notons que la présence des non-linéarités des exposants variables et du coefficient $a(x, t)$ dans ce problème rend l'analyse de l'article un peu plus difficile que celle des problèmes connexes. Le but du projet en cours est d'étudier le phénomène d'explosion des solutions du problème (4.1) dans le cadre des espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposants variables, nous établirons un résultat d'explosion et donner une estimation précise

de la durée de vie T^* de la solution dans ce cas. La méthode utilisée ici est la méthode de la concavité. Cependant, en raison de la présence des non-linéarités à exposant variable dans notre problème, notre argument est considérablement différent et il est plus abrégé.

4.1.1 Hypothèses mathématiques

Dans cette section, nous établissons l'éclatement pour certaines solutions à énergie positive. Énoncer et prouver notre résultat.

Soit la fonction $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$, avec la primitive

$$F(u) = \int_0^u f(\eta) d\eta. \quad (4.5)$$

satisfait

$$|f(s)| \leq C_0 |s|^{p(x)-1}, \quad p(x)F(s) \leq sf(s), \quad s \in \mathbb{R}, \quad C_0 > 0. \quad (4.6)$$

Un exemple simple et typique de ces fonctions est

$$f(s) = |s|^{p(x)-2} s.$$

Supposons que $a(x, t)$ est une fonction positive qui appartient à l'espace $W^{1,\infty}(0, \infty; L^\infty(\Omega))$ et que $a_t(x, t) \leq 0$ p.p pour $t \geq 0$.

Soient

$$B_1 = \max\left(1, B_0, \left(\frac{1}{C_0}\right)^{\frac{1}{p_1}}\right), \quad \alpha_1 = \left(\frac{1}{B_1^{p_1} C_0}\right)^{\frac{m_2}{p_1 - m_2}}, \quad \alpha_0 = \|\nabla u_0\|_{m(\cdot)}^{m_2}, \quad (4.7)$$

et

$$E_0 = \left(\frac{1}{B_1^{p_1} C_0}\right)^{\frac{m_2}{p_1 - m_2}} \left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{p_1}\right) = \left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{p_1}\right) \alpha_1. \quad (4.8)$$

4.1.2 Existence et Unicité

Dans cette section, nous présentons notre principal résultat d'explosion. Nous partons d'un résultat d'existence locale pour le problème (4.1), qui peut être établi en combinant les arguments de [52, 56], le théorème suivant, qui confirme l'existence de une solution locale est un résultat direct.

Théorème 4.1. *Pour tout $u_0 \in W_0^{1,m(\cdot)}(\Omega)$, il existe un nombre $T_0 \in (0, T]$ tel que le problème (4.1) ayant une solution forte u sur $[0, T_0]$ satisfaisant :*

$$u \in C([0, T_0]; W_0^{1,m(\cdot)}(\Omega)) \cap C([0, T_0]; L^{p(\cdot)}(\Omega)) \cap W^{1,2}(0, T_0; L^2(\Omega)).$$

4.1.2.1 Exploder pour une énergie initiale positive

Cette section présente d'abord notre résultat d'explosion principal pour l'énergie initiale positive et sa preuve pour le problème (4.1).

Pour cela, nous commençons par le lemme suivant définir l'énergie de la solution.

Lemme 4.1. *L'énergie correspondante au problème (4.1) est donnée par*

$$E(t) = \int_{\Omega} \frac{1}{m(x)} |\nabla u(x, t)|^{m(x)} dx - \int_{\Omega} F(u(x, t)) dx \quad (4.9)$$

de plus, par la formule facilement vérifiable

$$\frac{dE(t)}{dt} = - \int_{\Omega} a(x, t) u_t^2(x, t) dx \leq 0 \quad (4.10)$$

l'inégalité $E(t) \leq E(0)$ est obtenue.

Maintenant, nous sommes en mesure d'énoncer nos principaux théorèmes.

Théorème 4.2. *Si les données initiales $u_0 \in W^{1, m(x)}(\Omega)$ sont tels que $u_0 \neq 0$,*

$$E(0) = \int_{\Omega} \frac{1}{m(x)} |\nabla u_0(x)|^{m(x)} dx - \int_{\Omega} F(u_0(x)) dx \leq E_0 \quad (4.11)$$

alors il existe T^* tel que $\limsup_{t \rightarrow T^*} \|u(\cdot, t)\|_2 = +\infty$. De plus, si $E(0) < E_0$, alors le T^* peut être borné ci-dessus comme :

$$T^* \leq \frac{8 \|\sqrt{a_0} u_0\|_{L^2(\Omega)}^2}{(p_1 - 2)^2 (E_0 - E(0))}. \quad (4.12)$$

où $a(x, 0) := a_0$ et $u(x, 0) := u_0$.

Afin de démontrer le théorème principal, rappelons les lemmes suivants.

Lemme 4.2. ([?, Lemme1.1] et [?, Convexité logarithmique m-Ã©thodes]) *Supposons que $\varphi \in C^2([0, T])$ satisfaisant :*

$$\varphi''\varphi - (1 + \alpha)(\varphi')^2 \geq 0, \quad \alpha > 0$$

et

$$\varphi(0) > 0, \quad \varphi'(0) > 0,$$

alors

$$\varphi \rightarrow \infty \text{ quand } t \rightarrow t_1 \leq t_2 = \frac{\varphi(0)}{\alpha\varphi'(0)}.$$

Lemme 4.3. *Supposons que $E(0) < E_0$ et $\alpha_1 < \alpha_0 \leq B_1^{-m_2}$. Alors il existe une constante $\alpha_2 > \alpha_1$ telle que :*

$$\|\nabla u\|_{m(\cdot)}^{m_2} \geq \alpha_2 > \alpha_1 \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Démonstration. Grâce à (2.3) et (2.11), on a pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
E(t) &= \int_{\Omega} \frac{1}{m(x)} |\nabla u(x, t)|^{m(x)} dx - \int_{\Omega} F(u(x, t)) dx \\
&\geq \frac{1}{m_2} \min \left(\|\nabla u\|_{m(\cdot)}^{m_1}, \|\nabla u\|_{m(\cdot)}^{m_2} \right) - \int_{\Omega} \frac{C_0}{p(x)} |u(x, t)|^{p(x)} dx \\
&\geq \frac{1}{m_2} \min \left(\|\nabla u\|_{m(\cdot)}^{m_1}, \|\nabla u\|_{m(\cdot)}^{m_2} \right) - \frac{C_0}{p_1} \max \left(B_1^{p_1} \|\nabla u\|_{m(\cdot)}^{p_1}, B_1^{p_2} \|\nabla u\|_{m(\cdot)}^{p_2} \right) \\
&= \frac{1}{m_2} \min \left(\alpha^{\frac{m_1}{m_2}}, \alpha \right) - \frac{C_0}{p_1} \max \left((\alpha B_1^{m_2})^{\frac{p_1}{m_2}}, (\alpha B_1^{m_2})^{\frac{p_2}{m_2}} \right) := g(\alpha), \quad \forall \alpha \in [0, +\infty[
\end{aligned} \tag{4.13}$$

où $\tilde{\alpha}^1 \alpha = \|\nabla u\|_{m(\cdot)}^{m_2}$. Maintenant si nous considérons

$$h(\alpha) = \frac{1}{m_2} \alpha - \frac{C_0}{p_1} (\alpha B_1^{m_2})^{\frac{p_1}{m_2}}$$

Notez que $h(\alpha) = g(\alpha)$, for $0 < \alpha < B_1^{-m_2}$. Il est facile de vérifier que la fonction $h(\alpha)$ augmente pour $0 < \alpha < \alpha_1$ et diminue pour $\alpha_1 < \alpha \leq +\infty$.

Parce que $E(0) < E_0 = h(\alpha_1)$, il existe une constante positive $\alpha_2 \in (\alpha_1, +\infty)$ tel que $h(\alpha_2) = E(0)$. Alors nous avons $h(\alpha_0) = g(\alpha_0) \leq E(0) = h(\alpha_2)$. Cela implique que $\alpha_0 \geq \alpha_2 > \alpha_1$.

Pour montrer que $\|\nabla u(x, t)\|_{m(\cdot)}^{m_2} \geq \alpha_2$ on raisonne par absurde en supposant que $\|\nabla u(x, t^*)\|_{m(\cdot)}^{m_2} < \alpha_2$ pour quelques t^* . Puis par la continuité de $\|\nabla u(\cdot, t)\|_{m(\cdot)}$ -norm avec par rapport à la variable temporelle, on peut choisir t^* tel que $\alpha_2 > \|\nabla u(x, t^*)\|_{m(\cdot)}^{m_2} > \alpha_1$. La monotonie de $h(\alpha)$, donne $E(t^*) \geq h(\|\nabla u(x, t^*)\|_{m(\cdot)}^{m_2}) > h(\alpha_2) = E(0)$ c'est impossible car $E(0) \geq E(t)$ pour tout $t \geq 0$. Alors, pour toujours $t \geq 0$:

$$\|\nabla u\|_{m(\cdot)}^{m_2} \geq \alpha_2 > \alpha_1. \tag{4.14}$$

□

Preuve du Théorème 4.2. Case 1 : $E(0) < E_0$. Le but est de construire une fonction appropriée qui satisfait les conditions du lemme ???. Suivant le arguments de [?, ?], pour notre propos, nous avons défini les fonction appropriée suivante

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \int_0^t \int_{\Omega} a(x, s) u^2(x, s) dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} (s-t) a_t(x, s) u^2(x, s) dx ds \\
&\quad + (T_0 - t) \int_{\Omega} a_0(x) u_0^2(x) dx + \beta (t + t_0)^2, \quad t < T_0
\end{aligned} \tag{4.15}$$

où $\tilde{\alpha}^1 t_0, T_0$ et β sont des constantes positives à déterminer plus tard. Puis en utilisant l'équation (4.1) et l'intégration par parties, pour obtenir

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \int_{\Omega} a(x, t) u^2(x, t) dx - \int_0^t \int_{\Omega} a_t(x, s) u^2(x, s) dx ds \\
&\quad - \int_{\Omega} a_0(x) u_0^2(x) dx + 2\beta (t + t_0) \\
&= 2 \int_0^t \int_{\Omega} a(x, s) u(x, s) u_t(x, s) dx ds + 2\beta (t + t_0),
\end{aligned} \tag{4.16}$$

et

$$\varphi''(t) = 2 \int_{\Omega} a(x, t) u(x, t) u_t(x, t) dx + 2\beta. \quad (4.17)$$

Alors, grâce à (4.6) et (4.14), on obtient ce qui suit :

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &\geq -2 \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^{m(x)} dx + 2 \int_{\Omega} p(x) F(u) dx + 2\beta \\ &\geq -2 \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^{m(x)} dx + 2p_1 \left(\int_{\Omega} \frac{1}{m(x)} |\nabla u(x, t)|^{m(x)} dx - E(t) \right) + 2\beta \\ &\geq \left(\frac{2p_1}{m_2} - 2 \right) \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^{m(x)} dx - 2p_1 E(t) + 2\beta \\ &\geq \left(\frac{2p_1}{m_2} - 2 \right) \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^{m(x)} dx \\ &\quad + 2p_1 \int_0^t \int_{\Omega} a(x, s) u_t^2(x, s) dx ds - 2p_1 E(0) + 2\beta \\ &\geq \left(\frac{2p_1}{m_2} - 2 \right) \min \left(\|\nabla u\|_{m(\cdot)}^{m_1}, \|\nabla u\|_{m(\cdot)}^{m_2} \right) \\ &\quad + 2p_1 \int_0^t \int_{\Omega} a(x, s) u_t^2(x, s) dx ds - 2p_1 E(0) + 2\beta \\ &\geq \left(\frac{2p_1}{m_2} - 2 \right) \min \left(\alpha_2^{\frac{m_1}{m_2}}, \alpha_2 \right) \\ &\quad + 2p_1 \int_0^t \int_{\Omega} a(x, s) u_t^2(x, s) dx ds - 2p_1 E(0) + 2\beta \\ &\geq 2p_1 \left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{p_1} \right) \min \left(\alpha_1^{\frac{m_1}{m_2}}, \alpha_1 \right) \\ &\quad - 2p_1 E(0) + 2\beta + 2p_1 \int_0^t \int_{\Omega} a(x, s) u_t^2(x, s) dx ds \\ &= 2p_1 \left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{p_1} \right) \alpha_1 - 2p_1 E(0) \quad (\text{by (4.7)}) \\ &\quad + 2\beta + 2p_1 \int_0^t \int_{\Omega} a(x, s) u_t^2(x, s) dx ds \\ &= 2p_1 (E_0 - E(0)) + 2\beta + 2p_1 \int_0^t \int_{\Omega} a(x, s) u_t^2(x, s) dx ds \end{aligned}$$

Maintenant, soit $\beta = 2(E_0 - E(0)) > 0$, et notez que $p_1 > 2$, alors

$$\varphi''(t) \geq (p_1 + 2)\beta + (p_1 + 2) \int_0^t \int_{\Omega} a(x, s) u_t^2(x, s) dx ds \quad (4.18)$$

De (4.15), (4.16), (4.17) et (4.18), nous avons

$$\begin{cases} \varphi(0) = T_0 \int_{\Omega} a_0(x) u_0^2(x) dx + \beta t_0^2 > 0; \\ \varphi'(0) = 2\beta t_0 > 0; \\ \varphi''(t) \geq (p_1 + 2)\beta > 0 \quad \forall t \geq 0. \end{cases}$$

Donc φ et φ' sont tous les deux positifs. Depuis $a_t(x, t) \leq 0$, pour tout $x \in \Omega$ et $t \geq 0$, on a

$$\varphi(t) \geq \int_0^t \int_{\Omega} a(x, s) u^2(x, s) dx ds + \beta (t + t_0)^2, \quad (4.19)$$

Ainsi, À partir de (4.15)-(4.18) et (4.19), on déduit ce qui suit pour tout $(\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} & \varphi(t) \zeta^2 + \varphi'(t) \zeta \eta + \frac{\eta^2}{p_1 + 2} \varphi''(t) \\ & \geq \left(\int_0^t \int_{\Omega} a(x, s) u^2(x, s) dx ds + \beta(t + t_0)^2 \right) \zeta^2 \\ & + 2\zeta \eta \int_0^t \int_{\Omega} a(x, s) u(x, s) u_t(x, s) dx ds + 2\zeta \eta \beta(t + t_0) \\ & + \beta \eta^2 + \eta^2 \int_0^t \int_{\Omega} a(x, s) u_t^2(x, s) dx ds \geq 0 \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\varphi(t) \frac{\varphi''(t)}{p_1 + 2} - \left(\frac{\varphi'(t)}{2} \right)^2 \geq 0,$$

en suite

$$\varphi(t) \varphi''(t) - \frac{p_1 + 2}{4} (\varphi'(t))^2 \geq 0 \quad (4.20)$$

Puis en utilisant le lemme ??, pour déduire $\varphi(t) \rightarrow \infty$ comme $t \rightarrow T^*$, où,

$$T^* \leq \frac{\varphi(0)}{\left(\frac{p_1-2}{4}\right) \varphi'(0)} = \frac{2 \left(T_0 \left\| \sqrt{a_0} u_0 \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta t_0^2 \right)}{(p_1 - 2) \beta t_0}$$

Maintenant, nous allons choisir les t_0 et T_0 appropriés. Soit t_0 quelconque nombre qui ne dépend que de p_1 , $E_0 - E(0)$ et $\|u_0\|_{L^2(\Omega)}$ as

$$t_0 > \frac{\left\| \sqrt{a_0} u_0 \right\|_{L^2(\Omega)}^2}{(p_1 - 2) (E_0 - E(0))}$$

Fixez t_0 , puis T_0 peut être sélectionné comme

$$T_0 = \frac{2 \left(T_0 \left\| \sqrt{a_0} u_0 \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta t_0^2 \right)}{(p_1 - 2) \beta t_0}$$

pour que

$$T_0 = \frac{2 (E_0 - E(0)) t_0^2}{(p_1 - 2) (E_0 - E(0)) t_0 - \left\| \sqrt{a_0} u_0 \right\|_{L^2(\Omega)}^2}$$

Donc la durée de vie de la solution $u(x, t)$ est bornée par

$$\begin{aligned} T^* & \leq \inf_{t \geq t_0} \frac{2 (E_0 - E(0)) t^2}{(p_1 - 2) (E_0 - E(0)) t - \left\| \sqrt{a_0} u_0 \right\|_{L^2(\Omega)}^2} \\ & = \frac{8 \left\| \sqrt{a_0} u_0 \right\|_{L^2(\Omega)}^2}{(p_1 - 2)^2 (E_0 - E(0))}. \end{aligned}$$

Cas 2 : $E(0) = E_0$. Pour ce cas, on considère en fait le réclamation suivante

Claim 4.1. *Il existe $t^* > 0$ tel que $E(t^*) < E_0$.*

Supposons que Claim n'est pas vrai, ce qui signifie que $E(t) = E_0$ pour tout $t \geq 0$. Puis par la continuité de $\|\nabla u(\cdot, t)\|_{m(\cdot)}$ il existe un t_0 assez petit, tel que

$$E(t) = E_0 \text{ et } \|\nabla u(\cdot, t)\|_{m(\cdot)}^{m_2} \geq \alpha_2 > \alpha_1 \text{ por tout } t \in [0, t_0]$$

On considère alors la solution de (4.1) sur $[0, t_0]$,

$$0 = E(t) - E_0 = - \int_0^{t_0} \int_{\Omega} a(x, t) u_t^2(x, t) dx dt$$

qui devient

$$\int_{\Omega} a(x, t) u_t(x, t) u(x, t) dx = 0 \text{ p.p. sur } [0, t_0]$$

Et par conséquent, grâce à l'équation (4.1),

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} a(x, t) u_t(x, t) u(x, t) dx \\ &= - \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^{m(x)} dx + \int_{\Omega} u(x, t) f(u(x, t)) dx = 0 \text{ p.p. sur } (0, t_0]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} E_0 = E(t) &= \int_{\Omega} \frac{1}{m(x)} |\nabla u(x, t)|^{m(x)} dx - \int_{\Omega} F(u(x, t)) dx \\ &\geq \frac{1}{m_2} \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^{m(x)} dx - \frac{1}{p_1} \int_{\Omega} u(x, t) f(u(x, t)) dx \\ &= \left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{p_1} \right) \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^{m(x)} dx \text{ (by (??))} \\ &> \left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{p_1} \right) \min \left(\alpha_1^{\frac{m_1}{m_2}}, \alpha_1 \right) \text{ (by (4.14))} \\ &= \left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{p_1} \right) \alpha_1 = E_0 \text{ (by (4.7) and (4.8))} \end{aligned}$$

qui est une contradiction.

La preuve du Théorème 4.2 est complète puisqu'on peut appliquer la cas précédent (**Cas 1**) après avoir changé l'origine du temps en t^* . \square

4.1.3 Exploder pour une énergie initiale négative

Cette section est consacrée au résultat d'explosion principal et à sa preuve dans le cas où $E(0) \leq 0$.

Supposons que $a(x, t)$ est une fonction positive qui appartient à l'espace $W^{1, \infty}(0, \infty; L^{\infty}(\Omega))$ et que $a_t(x, t) \geq 0$ p.p. pour $t \geq 0$.

Le lemme suivant donne le voulu résultat d'explosion.

Lemme 4.4. Soit $u_0 \in W_0^{1,m(\cdot)}(\Omega)$ tel que $\int_{\Omega} u_0^2 dx > 0$, f satisfait (4.6) et $E(0) \leq 0$. Alors il existe un temps fini $T_{\max} < \infty$ tel que

$$\int_{\Omega} |u(t)|^2 dx \rightarrow \infty \text{ si } t \rightarrow T_{\max}.$$

Preuve du lemme ?? . On définit alors

$$\phi(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x,t) |u(t)|^2 dx$$

En différenciant ϕ par rapport à t , on obtient

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \int_{\Omega} a(x,t) uu_t dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_t(x,t) |u(t)|^2 dx \\ &\geq - \int_{\Omega} (|\nabla u|^{m(x)} - uf(u)) dx \quad (\text{by (4.1)}) \\ &\geq - \int_{\Omega} (|\nabla u|^{m(x)} - p(x)F(u)) dx \quad (\text{by (4.6)}) \\ &\geq - \int_{\Omega} |\nabla u|^{m(x)} dx + p_1 \int_{\Omega} F(u) dx \\ &= - \int_{\Omega} |\nabla u|^{m(x)} dx + p_1 \int_{\Omega} \frac{1}{m(x)} |\nabla u(x,t)|^{m(x)} dx - p_1 E(t) \quad (\text{by (4.9)}) \\ &\geq \left(\frac{p_1}{m_2} - 1\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{m(x)} dx - p_1 E(0) \quad (\text{by (4.10)}) \\ &\geq \left(\frac{p_1}{m_2} - 1\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{m(x)} dx = c_0 \int_{\Omega} |\nabla u|^{m(x)} dx, \quad (c_0 > 0) \end{aligned}$$

On définit les ensembles

$$\Omega_2 = \{x \in \Omega \mid |\nabla u| \geq 1\} \quad \text{et} \quad \Omega_1 = \{x \in \Omega \mid |\nabla u| < 1\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \phi'(t) &\geq c_0 \int_{\Omega_2} |\nabla u|^{m_1} dx + c_0 \int_{\Omega_1} |\nabla u|^{m_2} dx \\ &\geq C_1 \left(\left(\int_{\Omega_2} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{m_1}{2}} + \left(\int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{m_2}{2}} \right), \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\|\nabla u\|_2 \leq C \|\nabla u\|_q$, pour tout $q \geq 2$, à obtenir

$$\begin{cases} (\phi'(t))^{\frac{2}{m_2}} \geq C_2 \int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 dx; \\ (\phi'(t))^{\frac{2}{m_1}} \geq C_3 \int_{\Omega_2} |\nabla u|^2 dx. \end{cases}$$

Par addition, conduit à

$$\begin{aligned} (\phi'(t))^{\frac{2}{m_2}} + (\phi'(t))^{\frac{2}{m_1}} &\geq C_4 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &\geq C_5 \int_{\Omega} |u|^2 dx \geq \frac{C_5}{\sup a(x,t)} \phi(t), \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \tag{4.22}$$

ou alors

$$(\phi'(t))^{\frac{2}{m_1}} \left(1 + (\phi'(t))^{\frac{2}{m_2} - \frac{2}{m_1}}\right) \geq C_6 \phi(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (4.23)$$

Par (4.22) et le fait que $\phi(t) \geq \phi(0) > 0$ ($\phi'(t) \geq 0$), on a, pour chaque $t > 0$, soit

$$\begin{cases} (\phi'(t))^{\frac{2}{m_1}} \geq \frac{C_6}{2} \phi(t) \geq \frac{C_6}{2} \phi(0); \\ \text{or } (\phi'(t))^{\frac{2}{m_2}} \geq \frac{C_6}{2} \phi(t) \geq \frac{C_6}{2} \phi(0) \end{cases}$$

la sorcière donne, à son tour

$$\begin{cases} \phi'(t) \geq C_7 (\phi(0))^{\frac{m_2}{2}}; \\ \text{or } \phi'(t) \geq C_8 (\phi(0))^{\frac{m_1}{2}}, \end{cases}$$

Par conséquent

$$\phi'(t) \geq \alpha = \min \left(C_7 (\phi(0))^{\frac{m_2}{2}}, C_8 (\phi(0))^{\frac{m_1}{2}} \right),$$

puisque $\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} \leq 0$, (4.23) donne

$$(\phi'(t))^{\frac{2}{m_1}} (1 + \alpha)^{\frac{2}{m_2} - \frac{2}{m_1}} \geq C_4 \phi(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Donc

$$\phi'(t) \geq \beta \phi^{\frac{m_1}{2}}(t), \quad \forall t \geq 0.$$

une intégration simple conduit alors à

$$(\phi(t))^{1 - \frac{m_1}{2}} \leq (\phi(0))^{1 - \frac{m_1}{2}} - \frac{m_1 - 2}{2} \beta t, \quad \forall t \geq 0.$$

ce qui implique que

$$\phi(t) \geq \frac{1}{\left((\phi(0))^{1 - \frac{m_1}{2}} - \frac{m_1 - 2}{2} \beta t \right)^{\frac{2}{m_1 - 2}}}$$

Cela montre que ϕ explose en un temps fini T_{\max} donné par l'estimation

$$T_{\max} \leq \frac{2(\phi(0))^{1 - \frac{m_1}{2}}}{(m_1 - 2)\beta}.$$

□

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. A. Clarkson, Uniformly convex spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 40 (1936), 396-414.
- [2] E. Hewitt and K. Stromberg, "Real and Abstract Analysis," Springer-Verlag, New York, 1969.
- [3] W. Rudin, "Real and Complex Analysis," McGraw-Hill, New York, 1966.*
- [4] N. Meyers and J. Serrin, $H = W$, *Proc. Nat. Acad. Sci. US*, 4 51 (I 964), 1055-1056.
- [5] S. L. Sobolev, On a theorem of functional analysis, *Mat. Sb.* 46 (1938), 471-496.
- [6] S. L. Sobolev, On a theorem of functional analysis, *Mat. Sb.* 46 (1938), 471-496.
- [7] C. B. Morrey, Functions of several variables and absolute continuity, *Duke J. Math.* 6 (1940), 187-215.
- [8] J. Deny and J. L. Lions, Les espaces du type de Beppo Levi, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 5 (1955), 305-370.
- [9] J. L. Lions, *Problèmes aux Limites dans les équations aux-Dérivées Partielles*, (Seminar notes), Univ. of Montreal Press, 1965.
- [10] E. Gagliardo, Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili, *Ricerche Mat.* 7(1958), 102-137.
- [11] J. L. Lions, Sur les espaces d'interpolation ; dualité, *Matit. Scaul.* 9 (1961), 147 I 7.
- [12] J. L. Lions, Théorèmes de traces d'interpolation (IV), *Math. Ann.* 151 ([963), 42-56.
- [13] CN. Le and XT. Le, *Global solution and blow-up for a class of p-Laplacian evolution equations with logarithmic nonlinearity*, *Acta Appl. Math.*, 151 (2017), 149–169.
- [14] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, Paris, 1966.
- [15] J.L. Lions and E. Magenes, *Problèmes aux limites nonhomogènes et applications*, Dunod, Paris, 1968.
- [16] H. Chen, P. Luo and G. Liu, *Global solution and blow-up of a semilinear heat equation with logarithmic nonlinearity*, *J. Math. Anal. Appl.* 422 (1) (2015), 84–98.

- [17] J. Ball, *Remarks on blow-up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations*, Q. J. Math. 28 (4) (1977), 473–486.
- [18] H.A. Levine, *Some additional remarks on the nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations*, SIAM J. Math. Anal. 5 (1) (1974), 138–146.
- [19] A. Haraux and E. Zuazua, *Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems*, Arch. Ration. Mech. Anal. 150 (1988), 191–206.
- [20] R. Ikehata, *Some remarks on the wave equations with nonlinear damping and source terms*. Nonlinear Anal, (1995), 27 :1165–1175.
- [21] T. Ha, *Blow-up for semilinear wave equation with boundary damping and source terms*. J Math Anal Appl, (2012), 390 :328–334.
- [22] J. Park and T. Ha, *Existence and asymptotic stability for the semilinear wave equation with boundary damping and source term*. J Math Phys, (2008), 49 :053511.
- [23] J.D. Barrow and P. Parsons, *In stationary models with logarithmic potentials*, Physiol Rev. D 52, (1995), no. 10, 5576-5587.
- [24] K. Enqvist and J. McDonald, *Q-balls and baryogenesis in the MSSM*, Phys. Lett. 425, (1998), no. 3-4, 309-321.
- [25] F. Gazzola and M. Squassina, *Global solutions and finite time blow up for damped semilinear wave equations*. Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire 23, (2006), 185–207.
- [26] K. Li and Z.J. Yang, *Exponential attractors for the strongly damped wave equation*, Appl. Math. Comput. 220 (2013), 155–165.
- [27] H.A. Levine, S.R. Park and J. Serrin, *Global existence and global nonexistence of solutions of the Cauchy problem for a nonlinearly damped wave equation*, J. Math. Anal. Appl. 228 (1) (1998), 181–205.
- [28] G.I. Barenblatt, I.P. Zheltov and I.N. Kochina, *Basic concepts in the theory of seepage of homoeous liquids in fissured rocks*, J. Appl. Math. Mech. 24(5) (1960), 1286–1303.
- [29] P.J. Chen and M.E. Gurtin, *On a theory of heat conduction involving two temperatures*, Z. Angew. Math. Phys. 19(4) (1968), 614–627.
- [30] T.B. Benjamin and J.L. Bona, *Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems*, Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A 272(1220) (1972), 47–78.
- [31] G.I. Barenblatt, V.M. Entov and V.M. Ryzhik, *Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.
- [32] S.M. Hassanizadeh and W.G. Gray, *Thermodynamic basis of capillary pressure in porous media*, Water Resour. Res. 29(10) (1993), 3389–3405.
- [33] A. Mikelić, *A global existence result for the equations describing unsaturated flow in porous media with dynamic capillary pressure*, J. Differential Equations 248(6) (2010), 1561–1577.

- [34] V. Padrón, *Effect of aggregation on population recovery modeled by a forward backward pseudoparabolic equation*, Trans. Amer. Math. Soc. 356(7) (2004), 2739–2756.
- [35] S.L. Sobolev, *On a new problem of mathematical physics*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 18 (1954), 3–50.
- [36] A.B. Al’shin, M.O. Korpusov and A.G. Sveshnikov, *Blow-up in Nonlinear Sobolev Type Equations*, Walter de Gruyter, Berlin, 2011.
- [37] Y. Liu, *Lower bounds for the blow-up time in a non-local reaction diffusion problem under nonlinear boundary conditions*, Math. Comput. Modelling 57 (3–4) (2013), 926–931.
- [38] J.C. Song, *Lower bounds for the blow-up time in a non-local reactiondiffusion problem*, Appl. Math. Lett. 24 (5) (2011), 793–796.
- [39] A. Stanislav and S. Sergey, *Evolution PDEs with nonstandard growth conditions : existence, uniqueness, localization, blow-up*. Atlantis Stud Differential Equations, 4 :1–417, 2015.
- [40] L. Diening, P. Hästö, P. Harjulehto and M. Růžicka, *Lebesgue and sobolev spaces with variable exponents*. Springer-Verlag : Berlin, 2017.
- [41] L. Diening and M. Růžicka, *Calderon Zygmund operators on generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and problems related to fluid dynamics*. Preprint Mathematische Fakultät, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, (2002), **120** : 197–220.
- [42] E. Acerbi and G. Mingione, *Regularity results for electrorheological fluids, the stationary case*, C. R. Acad. Sci. Paris 334 (2002), 817–822.
- [43] T.C. Halsey, *Electrorheological fluids*, Science 258 (1992), 761–766.
- [44] M. Ruzicka, *Electrorheological fluids : modeling and mathematical theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [45] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö and M. Růžicka, *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, in : Springer Lecture Notes, vol. 2017, Springer-Verlag, Berlin, 2011.
- [46] A.M. Kbir, T. Nabil and M. Altanji, *On some new nonlinear diffusion model for the image filtering*, Appl. Anal. 2013.
- [47] A.B. Al’shin, M.O. Korpusov and A.G. Sveshnikov, *Blow-up in nonlinear Sobolev type equations*, in : De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, vol. 15, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2011.
- [48] E.S. Dzektser, *A generalization of equations of motion of underground water with free surface*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 202 (5) (1972), 1031-1033.
- [49] H. Qingying, Z. Hongwei and L. Gongwei, *Asymptotic Behavior for a Class of Logarithmic Wave Equations with Linear Damping*, Appl Math Optim 79, (2019), 131–144.
- [50] P. Amir, *General Stability and Exponential Growth for a Class of Semi-linear Wave Equations with Logarithmic Source and Memory Terms*, Appl Math Optim 81, 545–561 (2020).

- [51] C. Yuxuan and Runzhang, X, *Global well-posedness of solutions for fourth order dispersive wave equation with nonlinear weak damping, linear strong damping and logarithmic nonlinearity*, *Nonlinear Analysis*, 192, (2020), 111664.
- [52] Akagi, G., Ôtani, M., *Evolutions inclusions governed by subdifferentials in reflexive banach spaces*, *J. Evol. Equ.* **4** (2004), 519-541.
- [53] Baghaei, K., Ghaemi, M.B., Hesaaraki, M., *Lower bounds for the blow-up time in a semilinear parabolic problem involving a variable source*, *Applied Mathematics Letters* **27**, (2014), 49-52.
- [54] Xiulan, W., Guo, B., Wenjie, G., *Blow-up of solutions for a semilinear parabolic equation involving variable source and positive initial energy*, *Applied Mathematics Letters* **26** (2013), 539-543.
- [55] Aiguo, B., Xianfa, S., *Bounds for the blowup time of the solutions to quasi-linear parabolic problems*, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, **65**, 2014
- [56] Abita, R., and Benyattou, B., *Quasilinear parabolic equations with $p(x)$ -laplacian diffusion terms and nonlocal boundary conditions*, *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math* **64** (2019), 101-116.
- [57] S. Antontsev. *Wave equation with $p(x, t)$ -Laplacian and damping term : existence and blow-up*. *Differ Equ Appl.* 2011, 3 : 503–525.
- [58] S. Antontsev, V. Zhikov. *Higher integrability for parabolic equations of $p(x, t)$ -Laplacian type*. *Adv Diff Equ.* 2005, 10 :1053–1080.
- [59] S. Antontsev, S. Shmarev. *Elliptic equations with anisotropic nonlinearity and nonstandard growth conditions, handbook of differential equations. stationary partial differential equations*. Vol. 2017, 2011.
- [60] S. Antontsev, S. Shmarev. *Blow-up of solutions to parabolic equations with nonstandard growth conditions*. *J Comput Appl Math.* 2010, 234 :2633–2645.
- [61] C. Yunmei, S. Levine, M. Rao. *Variable exponent, linear growth functionals in image restoration*. *SIAM J Appl Math.* 2006, 66 :1383–1406.
- [62] G. Yunzhu, B. Guo, W. Gao. *Weak solutions for a high-order pseudo-parabolic equation with variable exponents*. *Appl Anal.* 2014, 93 :322–338.
- [63] S. Antontsev. *Wave equation with $p(x, t)$ -Laplacian and damping term : blow-up of solutions*. *CR Mecanique.* 2011 ;339(12) :751-755.
- [64] B. Guo, W. Gao. *Blow-up of solutions to quasilinear hyperbolic equations with $p(x, t)$ -Laplacian and positive initial energy*. *CR Mecanique.* 2014 ;342(9) :513-519.
- [65] L. Sun, Y. Ren, W. Gao. *Lower and upper bounds for the blow-up time for nonlinear wave equation with variable sources*. *Comput Math Appl.* 2016 ;71(1) :267-277.
- [66] E. Acerbi, G. Mingione. *Regularity results for stationary electrorheological fluids*. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2002, **164** :213–259.

- [67] L. Diening, P. Hästö, P. Harjulehto, M. Ruzicka. *Lebesgue and sobolev spaces with variable exponents*. Springer Lecture Notes, vol. 2017, Springer-Verlag, Berlin, 2011.
- [68] L. Diening, M. Ruzicka *Calderon Zygmund operators on generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and problems related to fluid dynamics*. Preprint Mathematische Fakultät, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, 2002, **120** : 197–220.
- [69] X. Fan, J. Shen, D. Zhao. *Sobolev embedding theorems for spaces $W^{k,p(x)}(\Omega)$* . Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, **262** :749–760.
- [70] R.De Pablo A. Ferreira , M. Pérez-LLanos. *Critical exponents for a semilinear parabolic equation with variable reaction*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A, 2012, **142** :1027–1042.
- [71] Y. Fu. *The existence of solutions for elliptic systems with nonuniform growth*. Studia Mathematica, 2002, **151** :227–246.
- [72] Kovřík O, Rákosník J. *On spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{1,p(x)}(\Omega)$* , Czechoslovak Mathematical Journal. 1991, **41** : 592–618.
- [73] A. Rahmoune. *Bounds for below-up time in a nonlinear generalized heat equation*, Applicable Analysis 2020, 1-9.
- [74] A. Rahmoune. *Upper bound estimate for the blow-up time of a class of integrodifferential equation of parabolic type involving variable source*, Comptes Rendus. Mathématique, Tome 358 (2020) no. 1 p. 23-32.4
- [75] Ball, J. *Remarks on blow-up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations*, Q. J. Math. 28 (4) (1977) 473–486.
- [76] H.A. Levine. *Some additional remarks on the nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations*, SIAM J. Math. Anal. 5 (1) (1974) 138–146.
- [77] A. Haraux, E. Zuazua. *Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems*, Arch. Ration. Mech. Anal. 150 (1988) 191–206.
- [78] M. Kopackova. *Remarks on bounded solutions of a semilinear dissipative hyperbolic equation*, Comment. Math. Univ. Carolin. 30 (4) (1989) 713–719.
- [79] E. Vitillaro. *Global nonexistence theorems for a class of evolution equations with dissipation*, Arch. Ration. Mech. Anal. 149 (2) (1999) 155–182.
- [80] S.A. Messaoudi. *Blow up in a nonlinearly damped wave equation*, Math. Nachr. 231 (1) (2001) 1–7.
- [81] V. Georgiev, G. Todorova. *Existence of solutions of the wave equation with nonlinear damping and source terms*, J. Differential Equations 109 (2) (1994) 295–308.
- [82] H.A. Levine, J. Serrin. *Global nonexistence theorems for quasilinear evolution equations with dissipation*, Arch. Ration. Mech. Anal. 137 (4) (1997) 341–361.
- [83] S. Antontsev, S. Shmarev. *Evolution PDEs With Nonstandard Growth Conditions, Existence, Uniqueness, Localization, Blow-U p*, Atlantis Studies in Differential Equations, vol. 4, Atlantis Press, Paris, 2015, p. xviii+409.

- [84] S. Antontsev. *Wave equation with $p(x, t)$ -Laplacian and damping term : Existence and blow-up*, J. Difference Equ. Appl. 3 (4) (2011) 503–525.
- [85] V.A. Galaktionov, S.I. Pohozaev. *Blow-up and critical exponents for nonlinear hyperbolic equations*, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. 53 (3) (2003) 453–466.
- [86] Y. Gao, W. Gao. *Existence of weak solutions for viscoelastic hyperbolic equations with variable exponents*, Bound. Value Probl. 2013 (1) (2013) 1–8.
- [87] G. Samah, H. Ilhem, A. M. Salim. *Global existence and stability of a nonlinear wave equation with variable-exponent nonlinearities*, Applicable Analysis, 2018, 1-12.
- [88] J.L. Lions. *Quelques Methodes De Resolution Des Problemes Aux Limites Nonlineaires*, second ed., Dunod, Paris, 2002.
- [89] P. Harjulehto and V. Latvala. *Fine topology of variable exponent energy superminimizers*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 33 :491–510, 2008.
- [90] P. Hästö. *Counter-examples of regularity in variable exponent Sobolev spaces*. In *The p -harmonic equation and recent advances in analysis*, volume 370 of Contemp. Math., pages 133–143. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [91] P. Hästö. *On the variable exponent Dirichlet energy integral*. Comm. Pure Appl. Anal., 5 :413–420, 2006.
- [92] P. Hästö. *The maximal operator in Lebesgue spaces with variable exponent approaching 1*. Math. Nachr., 280 :74–82, 2007.
- [93] V. Bögelein and A. Zatorska-Goldstein. *Higher integrability of very weak solutions of systems of $p(x)$ -Laplacian type*. J. Math. Anal. Appl., 336 :480–497, 2007.
- [94] M. Eleuteri, P. Harjulehto, and T. Lukkari. *Global regularity and stability of solutions to elliptic equations with nonstandard growth*. Complex Var. Elliptic Equ., to appear.
- [95] L. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [96] P. Halmos. *Measure Theory*. D. Van Nostrand Company, Inc., New York, N. Y., 1950.
- [97] T. Lukkari. *Elliptic equations with nonstandard growth involving measure data*. Hiroshima Math. J., 38 :155–176, 2008.
- [98] L. Diening and M. Růžicka. *Integral operators on the halfspace in generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$* , part II. J. Math. Anal. Appl., 298 :572–588, 2004.
- [99] D. Edmunds, V. Kokilashvili, and A. Meskhi. *One-sided operators in $L^{p(x)}$ spaces*. Math. Nachr., 281(11) :1525–1548, 2008.
- [100] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.

- [101] O. Kováčik and J. Rákosník, *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$* , Czechoslovak Math. J., 41(116) (1991), pp. 592–618.
- [102] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, and M. Růžicka, *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, Springer, Berlin, 2011. Series : Lecture Notes in Mathematics, Vol. 2017, 1st Edition.
- [103] Hua, W., Yijun, H., *On blow-up of solutions for a semilinear parabolic equation involving variable source and positive initial energy*, Applied Mathematics Letters **26** (2013), no. 10, 1008-1012.
- [104] Ni, W.M., Sacks, P.E., Tavantzis, J., *On the asymptotic behavior of solutions of certain quasilinear parabolic equations*, J. Differential Equations **54** (1984), 97-120.
- [105] Fujita, H., *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$* , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. **13** (1966), no. I, 109-124.
- [106] Zhong, T., *The reaction-diffusion equation with lewis function and critical sobolev exponent*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **272** (2002), no. 2, 480-495.