

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Amar Têlidji -Laghouat-
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil



En vue de l'obtention du diplôme de magister

Option: Matériaux composites et calcul de structures

Présenté par :

BOUSSOUAR AISSA

THÈME

**MODÉLISATION NUMÉRIQUE DE L'EFFET DE LA RÉSISTANCE
MÉCANIQUE SUR LE COMPORTEMENT THERMIQUE DES POUTRES
EN BÉTON ARMÉ DE BARRES EN PRFV**

Soutenu publiquement le 20 / 01 / 2016. Devant le jury composé de:

- AMARA SALAH	MCA	UATL	Président
- METICHE SLIMANE	MCB	USTHB	Examineur
- BELLAKEHAL HIZIA	MCB	UATL	Examinatrice
- ZAIDI ALI	Pr	UATL	Encadreur
- MOUATTAH KADDOUR	MCB	UATL	Co-encadreur

Année universitaire 2015-2016

DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail :

A mes parents

A mes frères et mes sœurs

A mes proches familles

A tous mes amis spécialement

KORICHI YUCEF BACHIRI ATTIA BENGHITE AMAR KABOUCHE AISSA RAZOUG SAFIA

A mes professeurs à l'université AMAR Téliidji -Laghouat-

Aux administrateurs de département de génie civil et de faculté de technologie.

Et à vous.

BOUSSOUAR AISSA

REMERCIEMENTS

*J'ai l'honneur d'être dirigé par mon encadreur le **Pr. Zaidi Ali**, professeur à l'université AMAR Téliidji -Laghouat-. Je tiens à lui témoigner toute ma gratitude et mes remerciements. J'ai bénéficié, grâce à lui, meilleurs informations, meilleurs conseils, disponibilité pendant toute la durée de ce mémoire et le temps précieux qu'il m'a apporté pour réaliser ce travail de recherche.*

*Je remercie également mon Co- encadreur de mémoire, **Dr. MOUATTAH Kaddour** maitre de conférences au département de génie civil Université AMAR Téliidji -Laghouat- d'avoir accepté de diriger ce travail de recherche avec disponibilité et ces conseils et qu'il ma encouragée pendant ce travail de recherche.*

*Je tiens à exprimer mes remerciements au président du jury le **Dr. AMARA SALAH** maitre de conférences au département de génie civil université AMAR Téliidji -Laghouat- d'avoir accepté de présider et juger ce travail de recherche et puis également au **Dr. METICHE SLIMANE** maitre de conférences à la faculté de génie civil de l'Université des Sciences et de la Technologie HOUARI BOUMÉDIENNE (USTHB) -Alger- d'avoir accepté d'examiner et juger ce travail de recherche et aussi mes remerciements à l'enseignante M^{elle} **BELLAKEHAL HIZIA** maitre de conférences au département de génie civil Université AMAR Téliidji -Laghouat- d'avoir accepté d'examiner ce travail de recherche.*

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à tous les enseignants du département de GENIE CIVIL.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail de recherche. Merci

BOUSSOUAR AISSA

RESUMÉ:

La corrosion des barres d'acier réduit la durabilité et le bon fonctionnement des structures en béton armé, et menace leur sécurité. En outre, le coût de la réparation de ces structures est exorbitant; en conséquence, il est nécessaire de remplacer l'acier par un matériau ayant une excellente résistance à la corrosion telle que les polymères renforcés de fibres (PRF).

Bien que, les barres de PRF légères se caractérisent par une grande immunité contre la corrosion, de haute résistance à la traction, d'une longue durée de vie et une mise en place aisée, néanmoins, l'incompatibilité thermique transversale entre barres de PRF et le béton peut générer des fissures dans le béton sous haute température et par conséquent la rupture de l'enrobage si l'action du confinement de béton est insuffisante. L'objectif principal de cette étude est d'analyser, par éléments finis en utilisant le logiciel ADINA, les effets de la variation de la résistance du béton sur les contraintes et les déformations thermiques transversales des poutres en béton armé de barres en PRF de verre (PRFV), soumises à des variations de températures ΔT allant jusqu'à 70°C, dont l'action du confinement de béton est asymétrique. Aussi, de déterminer la charge thermique (ΔT_{cr}) produisant les premières fissures à l'interface armature en PRF/ béton et la charge thermique (ΔT_{sp}) produisant la rupture de l'enrobage de béton en fonction de la résistance à la compression du béton (f_c') et le rapport de l'épaisseur de l'enrobage de béton au diamètre de la barre en PRF (c/d_b). Les principaux résultats numériques montrent que les charges thermiques ΔT_{cr} produisant les premières fissures dans le béton à l'interface armature en PRF / béton des poutres, varient de 20 à 35 °C pour des rapports c/d_b variant de 1 à 3,2 respectivement dépendant de la classe de béton allant de 25 à 90MPa. Cependant, les charges thermiques ΔT_{sp} produisant la rupture de l'enrobage de béton des poutres varient de 30 à 50°C, 45 à 60 °C, et de 55 °C à plus de 70 °C pour des rapports de c/d_b de 1; 1,4 et 2 respectivement dépendant de la classe de béton variant de 25 à 90MPa. Il est à noter que ces charges thermiques ΔT_{cr} et ΔT_{sp} augmentent avec l'augmentation de la classe de béton et le rapport c/d_b . En outre, des comparaisons entre les résultats numériques et analytiques en termes de contraintes de traction circonférentielle, de déformations thermiques transversales et des charges thermiques des fissurations, sont présentées.

Mots clés: Béton, barres en PRFV, classe de béton, rapport (c/d_b), variation de température (ΔT), déformations et contraintes transversales, fissuration, rupture de béton, poutres, confinement asymétrique.

ABSTRACT:

The corrosion of steel bars reduces the durability and the serviceability of reinforced concrete structures, and threaten their safety. Furthermore, the repair very cost of these structures; as a consequence, it is necessary to replace steel by a composite material that have an excellent resistance to the corrosion such as Fiber Reinforced Polymer (FRP). Although, the FRP bars having light weight, are characterized by a great immunity against corrosion, high tensile strength, long life and an easy installation. Nevertheless, the transverse thermal incompatibility between FRP bars and concrete can generate splitting cracks in concrete under high temperature and consequently the failure of concrete cover if the confining action of concrete is insufficient. The main objective of this study is to analyze, with Finite Elements using ADINA software, the concrete strength variation effects on transverse thermal stresses and strains of concrete beams reinforced with glass FRP (GFRP), submitted to temperature increase up to 70 °C when the confining action of concrete is asymmetric. Also, to find the thermal loads (ΔT_{cr}) producing the first cracks within concrete at the FRP bar/concrete interface and the thermal loads (ΔT_{sp}) producing the failure of concrete cover as a function of the compressive concrete strength (f_c') and the ratio of concrete cover thickness to FRP bar diameter (c/d_b). The main numerical results show that the first radial cracks appear in concrete at the FRP bar/concrete interface of beams at thermal loads ΔT_{cr} varied from 20 to 35°C depending the ratio c/d_b and the concrete strength f_c' varied from 1 to 3,2 and 25 to 90 MPa, respectively. However, the failure of concrete cover of beams, is produced at thermal loads ΔT_{sp} varied from 30 to 50°C, 45 to 60 °C, and from 55 °C to more than 70 °C corresponding to a ratio c/d_b of 1;1,4 and 2 respectively. It can be noted that the thermal loads ΔT_{cr} and ΔT_{sp} increase with the increase of the concrete strength range and the c/d_b 's ratio. Furthermore, comparisons between analytical and nonlinear numerical results, in terms of circumferential tensile stresses, transverses thermals strains and cracking thermal loadings, are presented.

Keywords: Concrete, GFRP bars, concrete strength range, c/d_b 's ratio, Temperature variation (ΔT), strains and stress, cracking, concrete failure, beams, asymmetric confinement.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE

1. Généralités.....	1
2. Problématique.....	1
3. Objectifs.....	1
4. L'organisation de mémoire.....	2

CHAPITRE I : REVUE DE LITTÉRATURE

I.1. Introduction.....	3
I.2. Matrices et renfort.....	3
I.2.1. Résines (matrices).....	3
I.2.1.1. Thermodurcissable.....	4
A) Les propriétés mécaniques.....	4
B) Avantages des trois types de résines utilisés.....	4
C) Inconvénients des trois types des résines.....	5
I.2.1.2. Thermoplastiques.....	5
I.2.1.3. Polymères spéciaux.....	5
I.2.2. Renforts (fibres).....	5
I.2.2.1. Fibre de verre.....	5
I.2.2.2. Fibre de carbone.....	6
I.2.2.3. Fibre d'aramide.....	7
I.3. Procédés de fabrication.....	8
I.3.1. La pultrusion.....	8
I.3.2. Le tressage.....	9
I.3.3. L'enroulement filamentaire.....	9
I.4. Titres d'exemple de quelques produits de PRF.....	10
I.5. Propriétés physiques des armatures en PRF.....	11
I.6. Propriétés mécaniques des armatures en PRF.....	12
I.8.1. Module d'élasticité longitudinal (E_l).....	12
I.8.2. Module d'élasticité transversal (E_t).....	14
I.8.3. Coefficient de Poisson (ν).....	15
I.7. Comportement mécanique et thermique des éléments en béton armé de barre en PRF selon la littérature.....	15
I.8. Conclusion.....	18

CHAPITRE II : NOTIONS SUR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

II.1. Introduction.....	19
II.2. Historique	19
II.3. Les équations aux dérivées partielles.....	19
II.4. Résolution par la méthode de séparation des variables.....	20
II.5. Conditions aux limites.....	20
II.6. Énergie potentielle.....	21
II.7. Principe générale.....	22
II.8. Triangle de Pascal.....	23
II.9. Étapes de la méthode des éléments finis.....	23
II.9.1. Discrétisation et le maillage.....	23
II.9.2. Fonctions de forme(ou d'interpolation).....	24
II.9.2.1. Élément barre à deux nœuds	25
II.9.3. Matrice de rigidité élémentaire.....	25
II.9.3.1. Matrice rigidité de l'élément barre.....	26
II.9.3.2. Matrice rigidité de l'élément en poutre.....	27
II.9.3.3. Matrice rigidité de l'élément barre dans un repère global.....	29
II.9.4. Formulations des éléments.....	30
II.9.4.1. Élément de référence.....	30
II.9.4.2. Élément iso paramétrique.....	30
II. 9.4.2.A. Triangle à 3 nœuds.....	31
II.9.4.3. Formulation par la méthode des résidus pondérés.....	32
II.9.4.3.1. Collocation par points	33
II.9.4.3.2. Collocation par sous-domaines.....	33
II.9.4.3.3. Formulation par la méthode de Galerkin (variationnelle).....	33
II.9.5. Points de Gauss pour calcul l'intégrale.....	28
II.9.6. Vecteur force.....	33
II.9.7. Assemblage et introduction des conditions aux limites.....	33
II.9.8. Utilisation de la méthode des éléments finis pour trouver la solution approchée d'équations différentielles partielles.....	35
II. 9.8.1. Approximation de l'équation différentielle	35
II. 9.8.2. Dérivées de la fonction d'interpolation	36
II. 9.9. Méthodes de résolutions.....	36
II. 9.9.1. Méthode directe	36
II. 9.9.1.1. Méthode d'élimination de GAUSS.....	36
II. 9.9.2. Méthode indirecte.....	38
II. 9.9.2.1. Méthode de Jacobi.....	38

CHAPITRE III: MODÈLE NUMÉRIQUE

III.1. Introduction	39
III.2. Modèle physique.....	40
III.3. Objectifs	40
III.4. Paramètres d'étude.....	40
III.5. Description des poutres.....	40
III.6. Caractéristiques des matériaux.....	42
III.7. Simulation numérique de l'effet de la résistance du béton sur le comportement thermique des poutres en béton armé de PRF	44
III.7.1. Définition du logiciel « ADINA »	44
III.7.2. Etapes de modélisation des poutres.....	44
a) Géométrie et coordonnées des points de la section de la poutre modélisée.....	44
b) Conditions aux limites.....	46
c) Conditions de chargement.....	47
d) Maillage.....	47
III.8. Analyse des résultats numériques.....	49
III.8.1. Contrainte de traction	53
III.8.2. Contraintes de compression radiale du béton.....	59
III.8.3. Effet du rapport d'enrobage du béton au diamètre des barres (c/d_b).....	63
III.8.4. Déformations thermiques.....	65
III.8.5. Charges thermiques de fissuration.....	71
III.8.5.1. Variation de température ΔT_{cr} produisant la première fissure à l'interface armature en PRF/béton.....	71
III.8.5.2. Variation de température ΔT_{sp} produisant la rupture d'enrobage du béton.....	73
III.9. Conclusion.....	76

CHAPITRE IV : MODÈLE ANALYTIQUE

IV.1. Introduction.....	77
IV.2. Présentation du modèle analytique.....	77
IV.3. Contraintes dans le béton exercées par la pression radiale P.....	78
IV.4. Déformations dans le béton dues à la pression radiale P.....	82
IV.4.1. Le déplacement radial u	82
IV.4.2. La déformation radiale ε_{cp} dans le béton due à la pression radiale P.....	82
IV.4.3. Déformation circonférentielle ε_{ct} dans le béton due à la pression radiale P	83
IV.4.4. Déformations dans le béton dues à la pression radiale P et à la variation de température ΔT	83

IV.4.5. Déformation transversale de la barre en PRF due à l'effet de la pression radiale P et à la variation de température ΔT	88
IV.4.6. Pression radiale P.....	89
IV.5. Variation de température (ΔT_{cr}) produisant la première fissure.....	89
IV.6. Comportement thermique du béton après fissuration.....	91
IV.7. Conclusion.....	97

CHAPITRE V: COMPARAISON DES RÉSULTATS NUMÉRIQUES ET ANALYTIQUES

V.1. Introduction.....	99
V.2. Charges thermiques de fissuration.....	100
V.2.1. Variation de température ΔT_{cr} produisant la première fissure.....	100
V.2.2. Variation de température ΔT_{sp} produisant la rupture complète d'enrobage de béton.....	100
V.3. Déformations thermiques transversales.....	104
V.3.1. Déformations thermiques transversales à l'interface armature PRF/béton.....	104
V.3.2. Déformations thermiques transversales à la surface externe de l'enrobage du béton.....	106
V.4. Contraintes de traction circonférentielle du béton.....	108
V.5. Conclusion.....	111
CONCLUSION GÉNÉRALE ET RECOMMANDATIONS.....	112
BIBLIOGRAPHIES.....	115

ANNEXES

- Annexe A
- Annexe B

LISTE DES FIGURES

Figure I.1. Courbes contrainte/déformation des PRF, des fibres et de la matrice [ISISCANADA.2001].....	3
Figure I.2. Procédé de fabrication des PRF par pultrusion.....	9
Figure I.3. Armature en PRF de nom commercial C-BA.....	10
Figure I.4. Armature en PRF de nom commercial V-ROD.....	10
Figure I.5. Treillis en PRF de nom commercial NEFMAC.....	10
Figure I.6. Armature en PRF de nom commercial ROTAFLEX.....	10
Figure I.7. Courbes contrainte/déformation de différentes armatures en PRF.....	14
Figure II.1. Discrétisation du domaine de travail.....	22
Figure II.2. Triangle de Pascal.....	23
Figure II.3. Barre à deux nœuds	25
Figure II.4. Élément barre dans une base globale.....	29
Figure II.5. Élément parent iso paramétrique triangulaire à trois nœuds.....	31
Figure III.1. Géométrie d'un échantillon de poutres en béton armé de barres en PRFV.....	41
Figure III.2. Barres en PRFV de différents diamètres utilisés.....	42
Figure III.3. Courbe contraintes-déformations du béton utilisée par ADINA.....	43
Figure III.4. Vue de la demi-section modélisée de la poutre considérée dans l'étude numérique.....	45
Figure III.5. Géométrie en surfaces de poutre en béton armé d'une barre en PRF de verre.....	46
Figure III.6. Conditions aux limites.....	46
Figure III.7. Conditions de chargement.....	47
Figure III.8. Éléments de maillage de type triangulaire à 6 nœuds (T6) du maillage.....	48
Figure III.9. Éléments T6 du maillage de la barre en PRF et béton	48
Figure III.10(a) Développement des premières fissures dans le béton à l'interface armature PRF/béton à $\Delta T_{cr} = 20^{\circ}\text{C}$ de la poutre prismatique en béton P.#25.30 ayant $f'_c = 25\text{MPa}$ et $c/d_b = 1,2$	49
Figure III.10(b) Enrobage de béton totalement fissuré à $\Delta T_{sp} = 35^{\circ}\text{C}$ de la poutre prismatique en béton P.#25.30 ayant $f'_c = 90\text{MPa}$ et $c/d_b = 1,2$	49
Figure III.11(a) Développement des premières fissures dans le béton à l'interface armature PRF/béton à $\Delta T_{cr} = 25^{\circ}\text{C}$ de la poutre prismatique en béton P.#25.30 ayant $f'_c = 90\text{MPa}$ et $c/d_b = 1,2$	50
Figure III.11(b) Enrobage de béton entièrement fissuré à $\Delta T_{sp} = 50^{\circ}\text{C}$ de la poutre prismatique en béton P.#25.30 ayant $f'_c = 90\text{MPa}$ et $c/d_b = 1,2$	50
Figure III.12(a) Développement des premières fissures dans le béton à l'interface armature PRF/béton à $\Delta T_{cr} = 20^{\circ}\text{C}$ de la poutre prismatique en béton P.# 16.30 ayant $f'_c = 25\text{MPa}$ et $c/d_b = 1,9$	50
Figure III.12(b) Enrobage de béton totalement fissuré à $\Delta T_{sp} = 50^{\circ}\text{C}$ de la poutre prismatique en béton P.# 16.30 ayant $f'_c = 25\text{MPa}$ et $c/d_b = 1,9$	51

FigureIII.13(a) Développement des premières fissures dans le béton à l'interface armature PRF/béton à $\Delta T_{cr}=30^{\circ}\text{C}$ de la poutre prismatique en béton P.# 16.30 ayant $f'_c=90\text{MPa}$ et $c/d_b=1,9$	51
FigureIII.13(b) Couronne en béton fissurée formée autour de la barre en PRF de la poutre prismatique en béton P.# 16.30 ayant $f'_c=90\text{MPa}$ et $c/d_b=1,9$	52
FigureIII.14. Contrainte de traction transversale du béton de classes 25 et 90MPa en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b=1,2$ et $c/d_b=1,9$ (Comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton pour $\Delta T=70^{\circ}\text{C}$).....	54
FigureIII.15. Contrainte de traction transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b=1$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#25.25).....	55
Figure III.16. Contrainte de traction transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b=1,4$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#25.35).....	55
FigureIII.17. Contrainte de traction transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b=1,6$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#13.20).....	56
Figure III.18. Contrainte de traction transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b=1,9$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#16.30).....	56
FigureIII.19. Contrainte de traction transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b=2,1$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#10.20).....	57
Figure III.20. Contrainte de traction transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b=2,5$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#13.30).....	57
Figure III.21. Contrainte de traction transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b=2,6$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#10.25).....	58
FigureIII.22. Contrainte de traction transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b=3,2$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#10.30).....	58
Figure III.23. Distribution typique des contraintes de compression radiale du béton (stress11) obtenues par ADINA (poutre P.#19.20 ayant $c/d_b=1,0$).....	59
Figure III.24. Contrainte de compression de la poutre ayant radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b=1$ pour différentes classes de béton	

(comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#25.25).....	60
Figure III.25. Contrainte de compression radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b=1,4$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#25.35).....	60
Figure III.26. Contrainte de compression radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b= 1,6$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#13.20).....	61
Figure III.27. Contrainte de compression radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b= 1,9$ (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#16.30)	61
Figure III.28. Contrainte de compression radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b= 2,1$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#10.20).....	62
Figure III.29. Contrainte de compression radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b= 2,5$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#13.30).....	62
Figure III.30. Contrainte de compression radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b= 3,2$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#10.30).....	63
Figure III.31. Contrainte de traction du béton de classes 25 et 90MPa en fonction de la distance ρ (mesurée à partir du cdg de la barre en PRFV) pour des poutres d'enrobage de béton de 20 mm et sous variation de température de 20°C.....	64
Figure III.32. Contrainte de traction du béton de classes 25 et 90MPa en fonction de la distance ρ (mesurée à partir du cdg de la barre en PRFV) pour des poutres d'enrobage de béton de 20 mm et sous variation de température de 40°C.....	65
FigureIII.33. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b= 1$ et $c/d_b= 1,9$ pour des classes de béton f 'c=25MPa et 90MPa (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton).....	66
Figure III.34. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b= 1,0$ pour différentes classes de béton (poutre P.#25.25).....	66
Figure III.35. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,2$ pour différentes classes de béton (poutre P.#25.30).....	67
FigureIII.36. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b= 1,3$ pour différentes classes de béton (poutre P.#16.20).....	67
FigureIII.37. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b= 1,4$ pour différentes classes de béton (poutre P.#25.35).....	68
Figure III.38. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b= 1,6$ pour différentes classes de béton (poutre P.#13.20).....	68

Figure III.39. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,9$ pour différentes classes de béton (poutre P.#16.30).....	69
Figure III.40. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 2,0$ pour différentes classes de béton (poutre P.#13.25).....	69
Figure III.41. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 2,5$ pour différentes classes de béton (poutre P.#13.30).....	70
Figure III.42. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 2,6$ pour différentes classes de béton (poutre P.#10.25).....	70
Figure III.43. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 3,2$ pour différentes classes de béton (poutre P.#10.30).....	71
Figure III.44. Variation de température ΔT_{cr} en fonction de classes de béton (f_c') et le rapport (c/d_b).....	72
Figure III.45. Variation de température $\Delta T_{c\ max}$ en fonction de la classe de béton (f_c') et le rapport (c/d_b).....	75
Figure IV.1. Contraintes dans le béton exerce par la pression radiale P.....	77
Figure IV.2. Contrainte de traction transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1$ (Modèle analytique linéaire de la poutre prismatique en béton P.#25.25).....	81
Figure IV.3. Contrainte de traction transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 2$ (Modèle analytique linéaire de la poutre prismatique en béton P.#13.25).....	81
Figure IV.4. Contrainte de traction transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 3,2$ (Modèle analytique linéaire de la poutre prismatique en béton P.#10.30).....	82
Figure IV.5. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,0$ (Modèle analytique linéaire de la poutre prismatique en béton P.#25.25).....	84
Figure IV.6. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,6$ (Modèle analytique linéaire de la poutre prismatique en béton P.#13.20).....	85
Figure IV.7. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 2$ (Modèle analytique linéaire de la poutre prismatique en béton P.#13.25).....	85
Figure IV.8. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 3,2$ (Modèle analytique linéaire de la poutre prismatique en béton P.#10.30).....	86
Figure IV.9. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à la surface externe de l'enrobage du béton pour $c/d_b = 1,0$ (Modèle analytique linéaire de la poutre prismatique en béton P.#25.25).....	87
Figure IV.10. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à la surface externe de l'enrobage du béton pour $c/d_b = 2,0$ (Modèle analytique linéaire de la poutre prismatique en béton P.#13.25).....	87

Figure IV.11. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à la surface externe de l'enrobage du béton pour $c/d_b = 3,2$ (Modèle analytique linéaire de la poutre prismatique en béton P.#10.30).....	88
Figure IV.12. Première fissure dans le béton due à la pression radiale P produite à $\Delta T = \Delta T_{cr}$ 89	89
Figure IV.13. Poutre prismatique en béton armé de barre en PRFV complètement fissurée à $\Delta T = \Delta T_{sp}$	91
Figure IV.14. Déformation de la couronne en béton fissuré sous la compression radiale à $\Delta T > \Delta T_{cr}$ (ligne discontinue indique la forme après déformation).....	92
Figure V.1. Section de la poutre prismatique en spécifiant la surface externe de l'enrobage du béton et l'interface armature en PRF/béton étudiés.....	99
Figure V.2. Contrainte de traction transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1$ (Modèle analytique linéaire de la poutre prismatique en béton P.#25.25)	105
Figure V.3. Déformation thermique transversale du béton à l'interface armature en PRF/béton des poutres P.#13.25 – comparaison entre les résultats numériques obtenus par ADINA et les résultats analytiques ($c/d_b = 2$).....	105
Figure V.4. Déformation thermique transversale du béton à l'interface armature en PRF/béton des poutres P.#10.30 – comparaison entre les résultats numériques obtenus par ADINA et les résultats analytiques ($c/d_b = 3,2$).....	106
Figure V.5. Déformation thermique transversale du béton (ϵ_{ct}) à la surface externe de l'enrobage du béton de poutre P.#25.25– Comparaison entre les résultats numériques obtenus par ADINA et les résultats analytiques pour classe de béton 25 et 90MPa et le rapport ($c/d_b = 1$).....	107
Figure V.6. Déformation thermique transversale du béton (ϵ_{ct}) à la surface externe de l'enrobage du béton de poutre P.#13.25– Comparaison entre les résultats numériques obtenus par ADINA et les résultats analytiques pour classe de béton 25 et 90MPa et le rapport ($c/d_b = 2$).....	107
Figure V.7. Déformation thermique transversale du béton (ϵ_{ct}) à la surface externe de l'enrobage du béton de poutre P.#10.30– Comparaison entre les résultats numériques obtenus par ADINA et les résultats analytiques pour classe de béton 25 et 90MPa et le rapport ($c/d_b = 3,2$)	108
Figure V.8. Contraintes de traction circonférentielle du béton à l'interface armature en PRF/béton de poutres P.#25.25 – comparaison entre les résultats numériques obtenus par ADINA et les résultats analytiques ($c/d_b = 1$)	109
Figure V.9. Contraintes de traction circonférentielle du béton à l'interface armature en PRF/béton des poutres P.#16.30 – comparaison entre les résultats numériques obtenus par ADINA et ceux du modèle analytiques ($c/d_b = 1,9$).....	109
Figure V.10. Contraintes de traction circonférentielle du béton à l'interface armature en PRF/béton des poutres P.#10.30 – Comparaison entre les résultats numériques obtenus par ADINA et ceux du modèle analytiques ($c/d_b = 3,2$)	110

LISTE DES TABLEAUX

Tableau I.1. Propriétés des résines thermodurcissables(TD). [ISIS CANADA, 2001]	4
Tableau I.2. Propriétés mécaniques et physiques des fibres de verre. [ZAIDI et MASMOUDI, 2013]	6
Tableau I.3. Propriétés mécaniques et physiques des fibres de carbone. [ZAIDI et MASMOUDI, 2013]	7
Tableau I.4. Propriétés mécaniques et physiques des fibres d'aramide. [ZAIDI et MASMOUDI, 2013]	8
Tableau I.5. Densités typiques des barres d'armature en PRF.....	11
Tableau I.6. Coefficients d'expansion thermique typiques des barres d'armature en PRF [ACI 440.1R.01, 2001]	11
Tableau I.7. Comparaison des propriétés mécaniques en traction des barres d'armatures en PRF et acier [ACI, 2003].....	14
 Tableau II.1. Types des éléments finis.....	24
 Tableau III.1. Détails des poutres en béton armé de barres en PRF.....	41
Tableau III.2. Propriétés mécaniques des barres en PRFV.....	42
Tableau III.3. Propriétés du béton.....	44
Tableau III.4. Coordonnées des points de la section de la poutre modélisée P.#10.20.....	45
Tableau III.5. Variation de température pour chaque incrément du temps.....	47
Tableau III.6. Comparaison entre trois types de maillage.....	48
Tableau III.7. Variation de température critique (ΔT_{cr}) en fonction de la résistance à la compression (f_{c28}).....	53
Tableau III.8. Variation de température (ΔT_{cr}) produisant la première fissure radiale à l'interface armature/béton.....	73
Tableau III.9. Variation de température ΔT_{sp} , en fonction variation classe de béton (f_c') et le rapport (c/d_b).....	74
 Tableau IV.1. Variation de température (ΔT_{cr}) qui produit la première fissure dans le béton à l'interface armature/béton.....	90
Tableau IV.2. Variation de température ΔT_{sp} produisant la rupture d'enrobage du béton, Aiello et coll.....	96
Tableau IV.3. Variation de température ΔT_{sp} produisant la rupture d'enrobage du béton, Zaidi et Coll.....	97
 Tableau V.1. Comparaison des valeurs de ΔT_{cr} en fonction de (f_c') et (c/d_b).....	100
Tableau V.2. Comparaison des valeurs de ΔT_{sp} en fonction de (f_c') et (c/d_b).....	101

LISTE DES SYMBOLES

- a : rayon de l'armature en PRF;
- b : distance mesurée à partir de centre de gravité de la barre en PRFV jusqu'à la surface externe d'enrobage;
- c : épaisseur d'enrobage du béton;
- d_b : diamètre de la barre d'armature;
- E_c : module d'élasticité du béton;
- E_l : module d'élasticité de la barre en PRF dans la direction longitudinale;
- E_t : module d'élasticité de la barre en PRF dans la direction transversale;
- f_{c28} : résistance à la compression du béton;
- f_{ct28} : résistance à la traction du béton;
- f_{fu} : résistance à la traction ultime de la barre en PRF;
- L : longueur des échantillons des poutres prismatiques en béton;
- P : Pression radiale exercée par la barre en PRF sur le béton;
- r : rapport du rayon de la distance b au rayon de la barre $r = b/a = 2.c/d_b + 1$;
- T_g : température de transition vitreuse;
- α_c : coefficient d'expansion thermique du béton;
- α_l : coefficient d'expansion thermique longitudinal de la barre en PRF;
- α_t : coefficient d'expansion thermique transversal de la barre en PRF;
- ΔT : variation de température;
- ΔT_{cr} : variation de température produisant la première fissure dans le béton à l'interface armature en PRF/béton;
- ΔT_{sp} : variation de température produisant la rupture de l'enrobage du béton;
- ΔT_{max} : variation de température produisant la fissuration maximale dans l'enrobage du béton;
- ε_{ft} : déformation circonférentielle de la barre en PRF;
- ε_{ct} : déformation circonférentielle dans le béton;
- ν_c : coefficient de Poisson du béton;
- ν_{tt} : coefficient de Poisson de la barre en PRF dans la direction transversale (le premier indice indique la direction transversale de l'application de la contrainte et le deuxième indice indique la direction transversale dans laquelle on détermine la déformation);
- ν_{lt} : coefficient de Poisson de la barre en PRF dans la direction longitudinale.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

INTRODUCTION GÉNÉRALE

1. Généralités

Les structures en béton armé d'acier, tels que les ponts, ont connu des dégradations atroces à cause des problèmes liés principalement à la corrosion des aciers. Les coûts de leur réhabilitation et de leur réparation sont très élevés. La solution la plus efficace à ce problème est de substituer les armatures en aciers par un matériau résistant à la corrosion tel les polymères renforcés de fibres (PRF).

Cependant, l'utilisation des armatures en PRF entraîne un problème lié à la performance structurelle et surtout dans les zones à climat chaud. L'incompatibilité thermique entre les barres en PRF et le béton engendre des contraintes de traction élevées dans le béton sous haute température et éventuellement la rupture de l'enrobage de béton si l'action de confinement du béton est insuffisante. Ce qui conduit à la réduction de la durabilité et la résistance des structures en béton armé de barres en PRF.

2. Problématique

Les fissures de béton dans les structures en béton armé sont diverses et de différentes natures, certaines parmi-elles sont inévitables. Sous variation de température les barres en PRF exercent une pression radiale sur le béton qui les enrobe. Cette pression peut causer des fissures de traction radiales ou circonférentielles dans le béton dépendant de la nature de la variation de température (haute ou basse température). Ces fissures peuvent nuire l'adhérence entre les barres et le béton, et par conséquent diminuer la capacité portante de la structure. Plusieurs recherches expérimentales ont été réalisées sur le comportement des éléments en béton armé de barres en PRF sous les effets des gradients thermiques. Bien que des modèles numériques ont été établis afin de prédire la température de l'apparition de la première fissure dans le béton à l'interface barre/béton et la température conduisant à la rupture complète de l'enrobage de béton sous haute température pour des classes de béton très restreintes et ceci pour des éléments en béton renforcé de barres en PRF de confinement symétrique. Cependant, le problème traité dans ce mémoire portant sur l'étude de l'effet de la variation de la résistance mécanique de béton sur le comportement thermique des poutres en béton armé de barre en PRF de confinement asymétrique, qui n'a pas été analysé suffisamment par les travaux de recherches antérieurs, permet de fournir aux ingénieurs de génie civil des règles utiles pour la conception des enrobages en béton des structures en béton armé de barres en PRF de confinement asymétrique sous haute température pour différentes classes de béton.

3. Objectifs:

L'objectif de ce projet est d'étudier, à l'aide de la méthode des éléments finis, l'effet de la résistance mécanique du béton sur le comportement thermique des enrobages du béton entourant les barres en PRF dans des poutres prismatiques de confinement asymétrique. Éventuellement, de déterminer le rapport de l'épaisseur d'enrobage du béton au diamètre de la barre en PRF (c/d_b) en fonction de la classe du béton et la variation de température afin d'éviter la rupture de l'enrobage du béton.

4. L'organisation de mémoire :

Le manuscrit de ce mémoire comprend cinq chapitres cités ci-dessous en plus de l'introduction générale et les conclusions :

- **Revue de littérature :** Elle résume les principales définitions relatives au matériau de PRF (polymère renforcé de fibre), les caractéristiques de ce produit et son comportement dans les structures en béton. Ainsi, les principaux travaux de recherches réalisés antérieurement sur le comportement thermique des structures en béton armé de barre en PRF clôturée par des conclusions tirés de ces travaux de recherches antérieurs.
- **Notions sur la méthode des éléments finis :** Ce chapitre présente des généralités et quelques notions fondamentales sur la méthode des éléments finis ainsi les principales étapes à suivre pour la résolution des problèmes physiques à l'aide de cette méthode.
- **Modèle numérique :** Ce chapitre analyse les effets de la résistance mécanique de béton et le rapport c/d_b sur le comportement thermique des poutres (prismatiques) en béton armé à barres en PRF de verre (PRFV) en termes de contraintes et déformations en fonction de la variation de température. Ces contraintes et déformations permettent d'évaluer la variation de température (ΔT_{cr}) produisant la première fissure dans le béton à l'interface armature/béton, et la variation de température (ΔT_{sp}) produisant la rupture totale d'enrobage du béton en fonction de la classe de béton et le rapport d'épaisseur d'enrobage de béton au diamètre de la barre en PRF (c/d_b).
- **Modèle analytique :** Ce chapitre décrit le modèle analytique utilisé basé sur la théorie d'élasticité linéaire permettant de prédire les contraintes de traction et de compression ainsi les déformations en fonction de la variation de température, le rapport c/d_b et la classe de béton.
- **Comparaison des résultats numériques et analytiques :** Ce chapitre compare les résultats numériques et analytiques en termes de contraintes thermiques transversales, de variation de température (ΔT_{cr}) produisant la première fissure dans le béton à l'interface armature/béton, et de variation de température (ΔT_{sp}) produisant la rupture totale d'enrobage du béton des poutres en béton armé de barres en PRFV de confinement asymétrique.

CHAPITRE I

REVUE DE LITTÉRATURE

I. REVUE DE LITTÉRATURE

I.1. Introduction:

Les produits en PRF (polymère renforcé de fibre) sont constitués d'une résine appelée matrice et des fibres appelées renforts, comme il est montré à la figure I.1, les fibres sont plus résistantes que la matrice. Dans la mesure où les fibres fournissent la résistance et la rigidité au PRF, le volume des fibres devrait être supérieur à 10 %. Les propriétés mécaniques du produit final en PRF dépendent de :

- La qualité des fibres, leur forme, leur orientation, leur adhésion à la matrice.
- Rapport volumique en fibres,
- Procédé de fabrication.

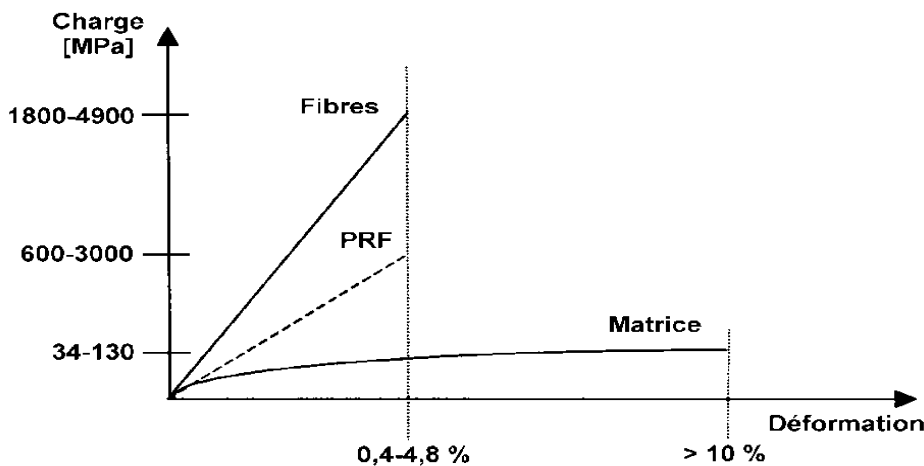


Figure I.1. Courbes contrainte/déformation des PRF, des fibres et de la matrice [ISIS¹ CANADA, 2007].

I.2. Matrices et renforts :

I.2.1. Résines (matrices) :

Trois types des résines (matrices) existent :

- Thermodurcissable.
- Thermoplastiques.
- Polymères spéciaux.

¹ Intelligent Sensing for Innovative Structures.

I.2.1.1. Thermodurcissable :

Ce sont des produits résultant d'une réaction de combinaisons classiques entre des molécules différentes avec élimination des résidus de la réaction; ces réactions exothermiques (et progressives) conduisent à une chaîne linéaire ou à un réseau à plusieurs dimensions.

Les résines thermodurcissables (TD) sont les plus utilisées en génie civil à une masse moléculaire moins élevée et une faible viscosité et sont fabriquées dans un état liquide pour obtenir une bonne imprégnabilité des fibres. Les plus utilisées sont : les polyesters, les vinylesters et les époxydes.

Ces résines ont :

- Bonne stabilité thermique.
- Réaction chimique irréversible.
- Faible déformation à la rupture.
- Faible résistance à l'impact.
- Courte durée de vie.
- Temps de fabrication assez long.
- Bonne résistance chimique ainsi qu'un fluage et une relaxation de contrainte faibles.

A) Propriétés mécaniques :

Quelques résines thermodurcissables sont présentées au Tableau I.1:

Tableau I.1. Propriétés des résines thermodurcissables (TD). [ISIS CANADA, 2007]

Résine	Masse volumique spécifique	Résistance en traction [MPa]	Module en traction [GPa]	Retrait à la cure [%]
Époxyde	1,20 - 1,30	55- 130	2,75 - 4,10	1,00 - 5,00
Polyester	1,10 - 1,40	34,5- 103,5	2,10 - 3,45	5,00 - 12,00
Vinylester	1,12 - 1,32	73 - 81	3,00 - 3,35	5,40 - 10,30

B) Avantages des trois types de résines utilisés:

De la manière suivante [ZAIDI et MASMOUDI, 2006] 'Mémoire de Doctorat²' :

- Pour les résines époxydes :
 - Excellente résistance aux solvants et aux produits chimiques.
 - Faible retrait au moulage et excellente résistance en tension et au fluage.
 - Température de transition vitreuse élevée et bonnes propriétés électriques (isolation).
 - Excellente adhésion à plusieurs substrats et aux matériaux métalliques.
- Pour les résines polyesters :
 - Un coût faible; une polymérisation rapide; une viscosité faible et une stabilité dimensionnelle.
 - Une balance entre leurs résistances mécaniques et chimiques; et facilité de mise en œuvre.

² Comportement thermique d'éléments en béton armé de barres en polymères renforcés de fibres (PRF),

- Pour les résines vinylesters :
 - Excellente résistance en tension et Viscosité faible.
 - Flexion et résistance à la fissuration supérieures aux polyesters.
 - Excellente résistance aux produits chimiques y compris les alcalis.
 - Bonne adhésion aux fibres de verre et polymérisation rapide.
 - Résistance à la chaleur supérieure aux polyesters.

C) Inconvénients des trois types des résines :

- Résines époxydes :
 - Coût élevé par rapport au vinylester et iso-polyester ; réticulation lente.
- Résines polyesters :
 - Grand retrait volumétrique ; sensibilité à certains solvants ; absorption d'humidité.
 - Dégradation à la lumière par les rayons ultra-violets.
- Résines vinylesters :
 - Retrait volumétrique élevé.
 - Adhésion modérée au carbone et l'aramide.
 - Coût élevé par rapport au polyester.

I.2.1.2. Thermoplastiques :

Ce sont des matières plastiques qui se ramollissent lorsqu'on les chauffent au-dessus d'une certaine température.

I.2.1.3. Polymères spéciaux :

Ils sont classés dans les catégories suivantes :
Polymères fluores ; silicones ; caoutchoucs synthétiques ou élastomères de synthèse élastique.

I.2.2. Renforts (fibres) :

Il existe trois types de fibres qui sont les suivantes :

- Fibres de verre.
- Fibres de carbone.
- Fibres d'aramide.

I.2.2.1. Fibres de verre :

Fibres de verre présentent une large gamme de propriétés : leur rapport résistance/coût élevé, leur disponibilité, leur facilité de mise en œuvre et sa haute résistance font que les fibres de verre soient les plus utilisées dans l'industrie.

- Les différents types de fibres de verre:

- Verre E (Electrical) étant un excellent isolant électrique.
- Verre S (Strenght) ayant une haute résistance et rigidité à la traction.
- Verre C (Chemical) ayant une résistance élevée aux produits chimiques.
- Verre AR (Alkali Résistant) ayant une résistance aux alcalis.

Les principales propriétés mécaniques et physiques des fibres de verre sont présentées dans le Tableau I.2.

Tableau I.2. Propriétés mécaniques et physiques des fibres de verre. [ISIS, CANADA, 2007]

Type de verre	Résistance en traction [MPa]	Module d'élasticité [GPa]	Allongement relatif [%]	Coefficient d'expansion thermique [$\times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$]	Coefficient de Poisson
Verre type E	3500 - 3600	72,5 - 75	4,8	5,0	0,2
Verre type S	4600 - 4900	85,5 - 87	5,6	2,9	0,22
Verre AR résistant aux alcalis	1800 - 3500	70 - 76	2,0-3,0	aucune valeur	aucune valeur

I. 2.2.2. Fibres de carbone :

Les fibres de carbone sont caractérisées par leur très haute résistance à la traction, leur haut module d'élasticité, leur rapport rigidité/densité élevé, leur faible coefficient d'expansion thermique longitudinal, leur faible sensibilité aux charges de fatigue et une excellente résistance aux produits chimiques et à l'humidité.

- Fibres de carbone peuvent être classées selon le type de précurseur:
- Fibres isotropiques "PITCH" caractérisées par un module d'Young élevé.
- Fibres polyacrylonitrile "PAN" caractérisées par une résistance ultime et un coût très élevés. Comme elles peuvent être classées selon le module d'élasticité. Les principales propriétés mécaniques et physiques des fibres de carbone sont reportées au Tableau I.3.

Tableau I.3. Propriétés mécaniques et physiques des fibres de carbone. [ISIS, CANADA, 2007]

Type de carbone		Résistance en traction [MPa]	Module d'élasticité [GPa]	Allongement relatif [%]	Coefficient d'expansion thermique [$\times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$]	Coefficient de Poisson
PAN	Haute	3500	200 - 240	1,3 - 1,8	$(\alpha_{fl})^*$ (-1,2) à (-0,1) $(\alpha_{ft})^{**}$ 7 à 12	~ 0,2
	Haute module	2100 - 4000	350 - 650	0,4 - 0,8		
PITCH	Normale	780 - 1000	38 - 40	2,1 - 2,5	(-1,6) à (-0,9) (α_{fl})	aucune valeur
	Haute module	3000 - 3500	400 - 800	0,4 - 1,5		

* (α_{fl}) : Coefficient d'expansion thermique longitudinal.

** (α_{ft}) : Coefficient d'expansion thermique transversal.

I. 2.2.3. Fibres d'Aramide :

Les fibres d'aramide ou polyparaphénylène – téréphtalamide PPD-T sont caractérisées principalement par leur haute résistance (les fibres d'aramide sont cinq fois plus résistantes que l'acier pour un même poids), leur grande résistance à l'usure, leur faible densité et leur haute stabilité thermique. Il est à souligner que les fibres d'aramide se détériorent par l'exposition aux rayons ultra-violets, c'est la raison pour laquelle elles doivent être coulées dans une matrice protectrice.

- Les types de fibres d'aramide :

- Kevlar (Dupont, USA).
- Twaron (Akzo, Hollande).
- Technora (Teijin, Japon).

Les principales propriétés mécaniques et physiques des fibres d'aramide sont présentées dans le Tableau I.4.

Tableau I.4. Propriétés mécaniques et physiques des fibres d'aramide. [ISIS, CANADA, 2007]

Type d'aramide	Résistance en traction [MPa]	Module d'élasticité [GPa]	Allongement relatif [%]	Coefficient d'expansion thermique ($\times 10^{-6}$)	Coefficient de Poisson
Kevlar 29	3620	82,7	4,4	--	0,35
Kevlar 49	2800	130	2,3	-2,0 (α_{fl}), 59(α_{ft})	
Kevlar 129	4210	110	--	--	
Kevlar 149	3450	172 - 179	1,9	--	
Twaron	2800	130	2,3	-2,0 (α_{fl}), 59(α_{ft})	
Technora	3500	74	4,6	--	

I.3. Procédés de fabrication :

Les trois procédés de fabrication des produits en matériaux composites de PRF les plus utilisées sont cités ci-dessous :

I.3.1. La pultrusion :

La pultrusion est une technique commune pour la fabrication des éléments en PRF de grande longueur et de section constante tels que les barres d'armatures, les câbles, les poutres, les tubes, les plaques, etc. Une représentation schématique de ce procédé de fabrication est montrée à la figure I.2. Les brins de matériaux de renfort (fibres) sont tirés des bobines à travers un bassin de résine dans lequel ils sont saturés, puis ils passent à travers une filière constituée d'un certain nombre d'orifices jusqu'à un moule chauffant (four). La vitesse du tirage à travers le moule est prédéterminée par le temps de cure nécessaire. Pour s'assurer d'une bonne adhérence avec le béton, la surface des barres est habituellement tressée, déformée, ou recouverte de sable.

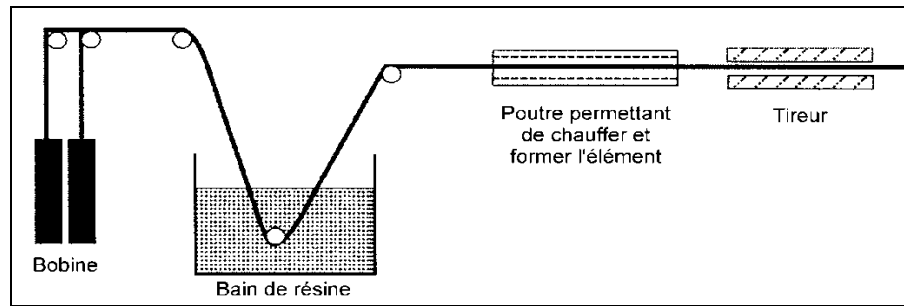


Figure I.2. Procédé de fabrication des PRF par pultrusion

I.3.2. Le tressage :

Le terme utilisé pour l'entrecroisement de deux ou plusieurs fils pour former une structure intégrée.

I.3.3. L'enroulement filamentaire :

L'enroulement filamentaire est un procédé de fabrication par lequel les fibres continues sont imprégnées d'une matrice et enroulées autour d'un substrat (tambour, tube, cylindre, etc.).

Dans ce procédé, l'épaisseur, l'angle et la fraction volumique des fibres sont contrôlés. Le produit final est alors cuit en utilisant un système de chauffage constitué par exemple de lampes chauffantes. Ce procédé de fabrication est principalement employé pour la production de conduits, de tubes et de réservoirs. [ISIS CANADA, 2007].

I.4. Titres d'exemple de quelques produits de PRF :

Une représentation schématique est montrée à la figure I.3 des quelques produits commerciaux de PRF de nom commercial C-BAR, des armatures en PRF à la figure I.4 de nom commercial V-ROD, et des treillis en PRF de nom commercial NEFMAC, et des armatures en PRF de nom commercial ROTAFLEX de figure I.5 et figure I.6 respectivement.



Figure I.3. Armature en PRF de nom commercial C-BAR



Figure I.4. Armature en PRF de nom commercial V-ROD

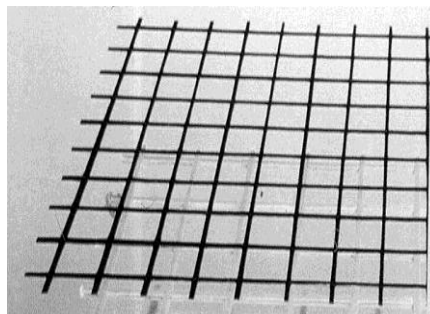


Figure I.5. Treillis en PRF de nom commercial NEFMAC



Figure I.6. Armature en PRF de nom commercial ROTAFLEX

I.5. Propriétés physiques des armatures en PRF:

Les propriétés physiques des armatures en PRF sont : la densité ; la température de transition vitreuse (T_g) ; le coefficient d'expansion thermique (CET). La densité des barres d'armatures de PRF dépend principalement du pourcentage et des types de fibres utilisées, sa valeur varie entre 1,25 et 2,10 g/cm³ ce qui représente une valeur relativement faible par rapport à celle de l'acier qui est de 7,9 g/cm³. Le Tableau I.5 présente quelques valeurs de la densité des barres d'armatures en PRF [ACI, 2003].

Tableau I.5. Densités typiques des barres d'armature en PRF.

Type de barre	PRFV	PRFC	PRFA
Densité [g/cm ³]	1,25 à 2,10	1,50 à 1,60	1,25 à 1,40

Les propriétés thermiques des fibres sont différentes dans la direction longitudinale et transversale. Comme indiqué au Tableau I.6, les barres d'armature fabriquées à partir de ces fibres ont des coefficients d'expansion thermique différents dans les deux directions. Les caractéristiques thermiques du produit en PRF changent selon : le type de matrice ; le type de fibre et de la fraction volumique en fibres. [ISIS CANADA, 2007]

- Les PRF de fibres de carbone (PRFC) ont un coefficient d'expansion thermique dans la direction longitudinale de près de zéro (ERKI et RIZKALLA, 1993).
- les PRF de fibres d'aramide (PRFA) ont un coefficient d'expansion thermique négatif. les PRFA se contractent avec l'augmentation de la température et prennent de l'expansion avec une diminution de température.

Les PRF de fibres de verre (PRFV) ont un coefficient d'expansion longitudinal comparable à celui du béton. Les coefficients d'expansion thermique pour certaines barres d'armature en PRF sont donnés dans le Tableau I.6.

Tableau I.6. Coefficients d'expansion thermique typiques des barres d'armature en PRF [ACI, 2003].

Coefficient d'expansion thermique (x 10 ⁻⁶ /°C)			
Direction	PRFV	PRFC	PRFA
Longitudinale	6 à 10	-1 à 0	- 6 à -2
Transversale	21 à 23	22 à 23	60 à 80

I.6. Propriétés mécaniques des armatures en PRF :

Les propriétés mécaniques des matériaux composites sont beaucoup influencées par la liaison créée entre les fibres et la matrice durant la phase d'élaboration du matériau composite. Ces propriétés dépendent des proportions de fibres et de résines utilisées, du conditionnement du renfort (orientation des fibres) et du processus de fabrication. Le comportement mécanique des matériaux composites unidirectionnels est élastique.

I.6.1. Module d'élasticité longitudinal (E_l) :

Le module d'élasticité, E_l , des barres d'armature en PRF dans le sens des fibres est déterminé selon GAY(1997):

Supposons que la liaison entre les fibres et la matrice est parfaite, la déformation longitudinale du composite, ε_l , peut être considérée identique à celles des fibres, ε_{fl} , et de la matrice, ε_{ml} :

$$\varepsilon_l = \varepsilon_{fl} = \varepsilon_{ml} \quad (I.1)$$

La force axiale F dans le composite est équilibrée par la somme des forces dans les fibres et la résine :

$$F = \sigma_{fl} A_f + \sigma_{ml} A_m \quad (I.2)$$

σ_{fl} : la contrainte dans les fibres ; σ_{ml} : la contrainte dans la matrice ;

A_f : la section des fibres ; A_m : la section de la matrice.

Le matériau étant supposé linéaire élastique, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \varepsilon_l &= \left(\frac{F}{A E_l} \right) \\ \varepsilon_l &= \left(\frac{\sigma_{fl}}{E_{fl}} \right) = \varepsilon_{fl} \\ \varepsilon_l &= \varepsilon_{ml} = \left(\frac{\sigma_{ml}}{E_{ml}} \right) \end{aligned} \quad (I.3)$$

Avec E_{fl} : module d'élasticité longitudinal des fibres; E_m : module d'élasticité de la matrice,

E_l : module d'élasticité longitudinal du composite; A : la section du composite.

La teneur en volume de fibres (V_f) et la teneur en volume de la matrice (V_m) sont données par:

$$V_f = \left(\frac{A_f}{A} \right) \quad \text{et} \quad V_m = \left(\frac{A_m}{A} \right) \quad (\text{I.4})$$

La teneur en volume totale est :

$$V_f + V_m = 1 \quad (\text{I.5})$$

Il est possible de passer de la teneur en volume à la teneur en masse et réciproquement.

ρ_f , ρ_m et ρ_c sont respectivement les masses volumiques des fibres, de matrice et du composite.

V_f , V_m et V_c sont respectivement les volumes des fibres, de matrice et du composite.

M_f , M_m et M_c sont respectivement les masses des fibres, de matrice et du composite; on a :

la teneur en masse des fibres :

$$W_f = \left(\frac{M_f}{M_c} \right) = \frac{\rho_f}{\rho_c} \cdot \frac{V_f}{V_c} \quad (\text{I.6})$$

la teneur en volume des fibres :

$$V_f = \frac{V_f}{V_c} \quad (\text{I.7})$$

de l'équation I.6 et I.7, on obtient :

$$V_f = \left(\frac{W_f \cdot \rho_c}{\rho_f} \right) \quad (\text{I.8})$$

de l'équation I.3 et I.4 dans l'équation I.2, on obtient :

$$E_l = E_{fl} \cdot V_f + E_m \cdot V_m \quad (\text{I.9})$$

L'équation I.9 est appelée la règle de mélange. En pratique, le module d'élasticité de la matrice est négligé devant celui des fibres, et l'équation I.9 devient :

$$E_l = E_{fl} \cdot V_f \quad (\text{I.10})$$

Le tableau I.7 compare les propriétés mécaniques en traction des armatures en PRF et d'acier.

La figure I.7 illustre la résistance et le module d'élasticité de différentes armatures en PRF.

Tableau I.7. Comparaison des propriétés mécaniques en traction des barres d'armatures en PRF et acier [ACI, 2003].

Type de barre	Acier	PRFV	PRFC	PRFA
Résistance ultime (MPa)	483 - 690	483 - 1600	600 - 3690	1720 - 2540
Module d'élasticité (GPa)	200	35 - 51	120 - 580	41 - 125
Déformation à la rupture(%)	6 - 12	1,2 – 3,1	0,5 – 1,7	1,9 – 4,4

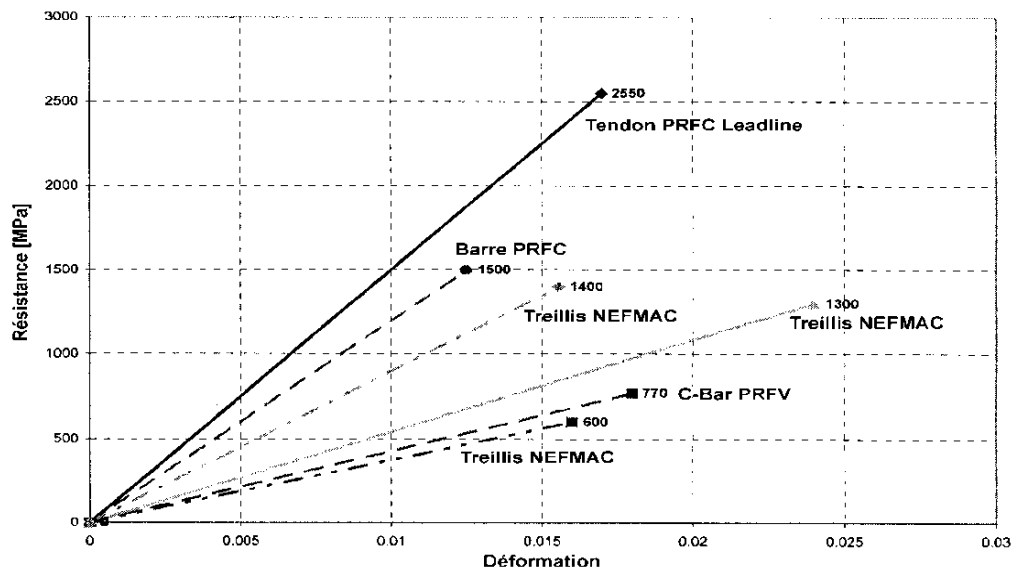


Figure I.7. Courbes contrainte/déformation de différentes armatures en PRF [ISIS CANADA, 2001].

I.6.2. Module d'élasticité transversal (E_t) :

Le module d'élasticité, E_t des barres de PRF dans la direction transversale aux fibres est évalué selon GAY (1997):

ϵ_m et ϵ_{ft} les déformations respectivement de la matrice et des fibres dues à une contrainte σ_t appliquée dans la direction transversale aux fibres.

La déformation transversale du composite ϵ_t est:

$$\epsilon_t = \epsilon_m \cdot V_m + \epsilon_{ft} \cdot V_f \quad (I.11)$$

Implique que :

Utilisant la loi de HOOKE , l'équation I.11 devient :

$$(\sigma_t / E_t) = (\sigma_t / E_m) \cdot V_m + (\sigma_t / E_{ft}) \cdot V_f \quad (I.12)$$

Ce qui donne :

$$E_t = E_m \frac{1}{(1 - V_f) + \frac{E_m V_f}{E_{ft}}} \quad (\text{I.13})$$

E_{ft} : le module d'élasticité des fibres dans la direction transversale aux fibres.

I.8.3. Coefficient de Poisson (ν):

Le coefficient de Poisson longitudinal des PRF, ν_{lt} , caractérise la déformation dans la direction transversale t du composite due à un chargement appliqué dans la direction longitudinale l .

Il peut être évalué à partir des coefficients de Poisson des fibres ν_f et de la matrice ν_m .

Il est donné par :

$$\nu_{lt} = \nu_f \cdot V_f + \nu_m \cdot V_m \quad (\text{I.14})$$

Le coefficient de Poisson transversal des PRF, ν_{tt} , caractérise la déformation dans la direction transversale t du composite due à une force appliquée dans la même direction.

Le coefficient ν_{tt} est beaucoup plus proche de celui de la résine.

I.7. Comportement mécanique et thermique des éléments en béton armé de barre en PRF selon la littérature :

Les résumés des travaux de recherches qui ont été réalisés sur le comportement thermique des éléments en béton armé de barres en PRF sont les suivants :

HAMDI, B (juin 2011) et ZAIDI, MASMOUDI, R.,AMARA,S.,MOUATTAH,K. (November 2012) (2012) ont étudié à l'aide de la méthode des éléments finis le comportement thermique des poutres en béton armé de barres en PRFV sous haute variation de température allant jusqu'à +60°C. Les principaux résultats trouvés montrent que les déformations thermiques transversales, à l'interface armature en PRF/béton, prédites par le modèle numérique sont en bon accord avec les résultats analytiques jusqu'à ΔT , généralement, autour de 35°C. Cependant pour $\Delta T > 35^\circ\text{C}$ les déformations numériques sont importantes à cause de la présence de fissures dans le béton qui n'est pas prise en compte dans le modèle analytique.

La variation de température ΔT_{cr} produisant les premières fissures dans le béton à l'interface barre /béton prédites par les modèles analytiques et numériques sont plus proches de la valeur moyenne de +25 °C pour des rapports d'épaisseur d'enrobage de béton au diamètre de la barre en PRF (c/d_b)

variant entre 1,0 et 2,5. Un rapport supérieur à 1,6 semble être suffisant afin d'éviter la rupture d'enrobage du béton pour des poutres prismatiques en béton armé de barres en PRF de verre sous des variations de température allant jusqu'à 60 °C et de résistance à la traction du béton $f_{ct} = 4,1\text{MPa}$.

ZAIDI, A. et MASMOUDI, R. (2009) ont analysé l'expansion thermique des barres en PRF de verre (PRFV). Cette étude a permis de déterminer les coefficients d'expansion thermique (CTE) des barres en (FRPV) en utilisant la technique des jauges de déformations et celle de TMA (Thermo Mechanical Analysis), ainsi d'évaluer la température de transition vitreuse (T_g) en utilisant les techniques DSC (Differential Scanning Calorimetry) et DMA (Dynamic Mechanical Analysis). Les principaux résultats de cette étude montrent que : le coefficient d'expansion thermique transversale est de $33(\times 10^{-6}\text{mm/mm/}^\circ\text{C})$, cependant le coefficient d'expansion thermique longitudinale est de $8,9(\times 10^{-6}\text{mm/mm/}^\circ\text{C})$. En conséquence, le rapport entre les coefficients d'expansion thermique transversale et longitudinale est égale à 4.

ZAIDI, A. et MASMOUDI, R. (March 2008) ont examiné expérimentalement le comportement des barres en PRF et de l'enrobage du béton en utilisant des échantillons de dalles en béton armé des barres en PRF de verre soumises à une charge thermique variant de -30 à +80 °C. Les résultats expérimentaux montrent que la rupture de l'enrobage de béton est survenue à une température variant entre +50 et +60 °C pour les dalles ayant un rapport d'enrobage de béton au diamètre de la barre en PRF c/d_b inférieur ou égale à 1,4. Un rapport c/d_b supérieur ou égale à 1,6 semble être suffisant pour éviter la rupture de l'enrobage de béton pour les dalles de béton sous haute température, allant jusqu'à +60°C. Les premières fissures apparaissent dans le béton à l'interface barres en PRF/béton à une température d'environ +40 °C.

ZAIDI, A. et MASMOUDI, R. (May 2007) ont étudié le comportement thermique des éléments en béton armé de barres en PRF de verre (PRFV), particulièrement, les déformations thermiques transversales dans l'enrobage du béton et les barres en PRF. Les auteurs ont développé un modèle théorique, validé expérimentalement, capable de prédire la variation de température produisant la rupture d'enrobage du béton. La variation de température produisant la première fissure radiale dans le béton à l'interface armature en PRF/béton en fonction du rapport d'épaisseur d'enrobage du béton au diamètre de la barre en PRF. Les résultats obtenus montrent que la rupture d'enrobage du béton se produit pour un rapport d'épaisseur d'enrobage du béton au diamètre de la barre en PRF $c/d_b \leq 1,4$ pour des poutres en béton armé de barres en PRFV Isorod testées sous température allant de -30 °C à +80 °C.

ABDALLA, H. (May 2006) a effectué des études, théorique et expérimentale afin d'analyser l'effet de l'enrobage du béton sur le comportement des éléments en béton armé de barres en PRF dans un climat chaud. L'étude analytique linéaire a été effectuée sur des cylindres en béton, de 76 mm de diamètre, renforcé de barre en PRF de verre (PRFV) de 12; 16 et 25 mm de diamètre, soumis à des variations de température de 20 à 80 °C. Les résultats montrent que les contraintes de traction maximales dans le béton diminuent de façon significative pour des rapports d'enrobage du béton au diamètre des barres en PRF (c/d_b) supérieurs à 1,5. L'analyse numérique non linéaire utilisant la méthode des éléments finis (programme ABAQUS), a été réalisée sur des éléments en béton, de section rectangulaire, armé de barre en PRFV de 16 mm de diamètre avec des enrobages de 20 et 30 mm d'épaisseur, soumis à des variations de température (ΔT) allant jusqu'à 50°C. L'auteur montre que pour $\Delta T = 50^\circ\text{C}$ et lorsque le rapport $c/d_b = 1,25$; les contraintes de traction maximales dans le béton à l'interface prédites par le modèle numérique sont de 11% plus faibles que celles évaluées par le modèle analytique. Cependant pour $c/d_b = 1,87$; ces contraintes de traction sont plus petites de 14 % que celles obtenues par le modèle analytique.

AIELLO, M.A., FOCACCI, F., et NANNI, A. (Nov.1999) ont analysé à l'aide d'un modèle analytique et numérique l'effet de la variation de température sur la performance structurale des éléments en béton (cylindres et poutres) renforcé des barres en PRF d'aramide et en PRF de verre en variant l'enrobage du béton et la forme de la section. Les résultats obtenus sont comparés à ceux du laboratoire. Les deux modèles analytique et numérique ont été établis sur des suppositions à savoir le comportement élastique des matériaux, l'absence des armatures transversales et l'absence des conditions aux limites de chargement. Les résultats obtenus montrent qu'une fissure longitudinale s'est développée dans l'enrobage du béton; les courbes représentant la variation de température (menant à la rupture du béton) en fonction du rapport c/d_b montrent que les prédictions analytiques et numériques présentent une tendance presque linéaire cependant les résultats expérimentaux se retrouvent entre les deux courbes théoriques (analytique et numérique) pour un rapport de $c/d_b \geq 1,5$.

I.8. Conclusion :

Les travaux de recherches effectués auparavant ont analysé, théoriquement et expérimentalement, l'effet thermique sur le comportement de l'enrobage de béton entourant les barres en PRF pour des classes de béton couramment utilisées tout en variant les paramètres tels l'épaisseur d'enrobage de béton, diamètre de la barre, variation de la température, humidité relative, forme de l'élément de béton etc. Cependant, certains paramètres n'ont pas été suffisamment investigués tels que l'effet de la variation de la résistance mécanique du béton sur le comportement thermique des poutres en béton armé de barres en PRF dont l'action du confinement du béton est asymétrique.

CHAPITRE II

NOTIONS SUR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

II. NOTIONS SUR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

II.1.Introduction:

La méthode des éléments finis, est la méthode de discrétisation la plus utilisée car elle peut traiter des problèmes de géométrie complexe et couvre de nombreux domaines de la physique. La mise en œuvre de l'outil informatique consiste à utiliser une approximation par éléments finis des fonctions inconnues pour discrétiser une forme intégrale. Vu qu'elle nous permet d'avoir des solutions aux équations aux dérivées partielles (EDP), qu'on doit préalablement transformer à des systèmes d'équation algébriques et permet de résoudre un problème dont la solution analytique ne peut éventuellement pas être déterminée et fournit une solution approchée de la solution exacte. Les problèmes rencontrés dans la pratique : problème stationnaire ou non stationnaire, linéaire ou non linéaire, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions. De plus elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes souvent rencontrés dans la pratique.

II.2.Historique :

Les mathématiciens et les ingénieurs ont abordé différemment la discrétisation des problèmes continus. Les premiers ont développé des techniques générales s'appliquant directement aux équations différentielles régissant le problème, telle que les approximations aux différences finies, les différents procédés de résidus pondérés ou les techniques approchées de détermination du point stationnaire de fonctionnelle définies de façon adéquate. De son côté, l'ingénieur a souvent une approche plus intuitive du problème en créant une analogie entre les vrais éléments discrets et des parties finies d'un domaine continu. Les résultats fondamentaux du domaine d'approximation ont été obtenus par chercheurs RITZ et de GALERKINE.

Puis COURANT établit les bases de la M.E.F en montrant que la résolution de certains problèmes de milieux continus est possible en effectuant une discrétisation du domaine en utilisant les méthodes d'approximation variationnelle. Il est important de souligner que l'essor de la méthode des éléments finis a été atteint grâce aux travaux des chercheurs dans le domaine de génie civil (tels que Zienkiewicz).

II.3. Équations aux dérivées partielles :

Les équations aux dérivées partielles apparaissent constamment en mécanique de solides et de liquides, en thermodynamique, en électromagnétisme et dans d'autres domaines de la physique, noté le déplacement (u) comme étant l'inconnu principale. Sous la forme d'équation:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \quad (\text{II.1})$$

Les coefficients a, b, c peuvent dépendre de x et y , et ou la fonction f est linéaire en :

$$u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$$

L'équation est dite de type :

Elliptique si $b^2 - 4ac < 0$ (exemple : équation de la plaque).

Parabolique si $b^2 - 4ac = 0$ (exemple : équation de chaleur).

Hyperbolique si $b^2 - 4ac > 0$ (exemple : équation d'onde).

II.4. Résolution par la méthode de séparation des variables :

C'est la méthode la plus utilisée, son principe consiste à mettre l'inconnue sous forme d'un produit partielles, chacune ne dépend que d'une seule variable.

Si on prend $\Delta V = 0$ en deux dimensions :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{II.2})$$

Avec :

$$V = X(x).Y(y) \quad (\text{II.3})$$

Par l'application de la méthode de séparation des variables, l'équation II.2 devient:

$$Y(y) \cdot \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x) \cdot \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{II.4})$$

Si on met :

$$X'' = \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \quad Y'' = \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}$$

L'équation II.4 devient:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} \quad (\text{II.5})$$

Où λ appelé la constante de séparation :

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda \quad (\text{II.6})$$

II.5. Conditions aux limites :

Soit un problème défini dans un domaine R , limité par la frontière ∂R .

Les conditions aux limites peuvent être de trois natures :

Dirichlet : Dans ce type de conditions, la valeur de la variable dépendante est imposée sur la frontière du domaine de calcul.

$$\phi = f \quad (\text{II.7})$$

Newman : La variable dépendante n'est pas connue sur la frontière mais sa dérivée bien définie.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + k = f \quad (\text{II.8})$$

Mixte : Une combinaison linéaire des deux premières conditions est imposée sur la frontière.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + k\phi = f, k > 0 \quad (\text{II.9})$$

II.6. Énergie potentielle :

La méthode de résolution s'inspire généralement de celle de **Rayleigh – Ritz** qui consiste via une minimisation de l'énergie potentielle, en une recherche des termes d'une fonction approximant le champ inconnu et satisfaisant les conditions aux limites. On définit l'énergie potentielle (E_{np}) comme étant la différence entre l'énergie de déformation (W_{nd}) et le travail (T) des forces de volumes et de surfaces et ponctuelles :

$$E_{np} = W_{nd} - T \quad (\text{II.10})$$

Tels que :

$$W_{nd} = \int_v [\varepsilon]^{Tr} \cdot [\sigma] dv \quad (\text{II.11})$$

Avec, $[\varepsilon]^{Tr}$: matrice de déformation transposé, $[\sigma]$: matrice de contrainte.

$$T = \int_v \{U\}^{Tr} \cdot \{f^v\} dv + \int_s \{U\}^{Tr} \cdot \{f^s\} ds + \{N\}^{Tr} \cdot \{p\} \quad (\text{II.12})$$

Avec : $\{U\}^{Tr}$: vecteur déplacement transposé, $\{N\}^{Tr}$: vecteur d'interpolation transposé,
 $\{f^v\}$: vecteur force de volume, $\{f^s\}$: vecteur force de surface, $\{p\}$: vecteur force ponctuelle.

Tels que la dérivation de l'énergie potentielle par rapport au déplacement :

$$\frac{\partial E_{np}}{\partial u} = 0 \quad (\text{II.13})$$

permet de donner sous la forme d'un système algébrique : $[K]\{U\} = \{F\}$ qui peut être résolue par l'un des méthodes de l'analyse numérique.

II.7. Principe générale :

Le principe générale de la méthode des éléments finis (MEF) qui permet de résoudre de manière discrète (par l'utilisation des éléments finis), une équation différentielle partielle (EDP) dont on cherche une solution approchée « suffisamment » fiable.

Système physique continu $\xrightarrow{\text{EDP}}$ système physique discret algébrique à résoudre.

En générale, cette EDP porte sur une fonction u , définie sur un domaine, elle comporte des conditions aux limites permettant d'assurer: existence et unicité de solution.

On considère donc le problème posé sur la géométrie approchée par un domaine polygonal ou polyédrique par morceaux. Donc choisir un espace d'approximation de la solution du problème. Dans la MEF, cet espace est défini à l'aide du maillage du domaine (ce qui explique aussi pourquoi il est nécessaire d'approcher la géométrie).

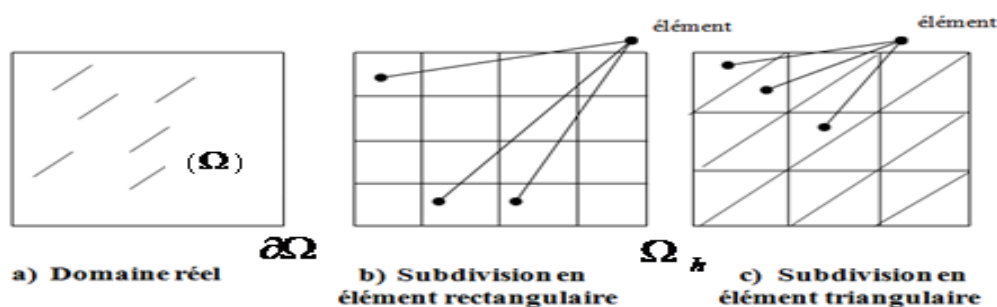
Le maillage du domaine permet de définir un pavage dont les pavés sont les éléments finis.

Un élément fini est la donnée d'une cellule élémentaire et de fonctions de base de l'espace d'approximation dont le support est l'élément, et définies de manière à être interpolant.

Il existe de nombreux logiciels exploitant la méthode des éléments finis et permettant de résoudre des problèmes dans divers domaines. Il est important que l'utilisateur garde un œil critique vis-à-vis de solutions approchées, aucun logiciel ne fera tout pour l'utilisateur. La solution trouvée, il reste cependant à déterminer les caractéristiques de la méthode ainsi développée, notamment :

- l'unicité de l'éventuelle solution, ou encore la stabilité numérique du schéma de résolution.
- Il est essentiel de trouver une estimation juste de l'erreur liée à la discrétisation, et montrer que la méthode ainsi écrite converge, c'est-à-dire que l'erreur tend vers 0, si la finesse du maillage tend elle aussi vers 0.

Avec, h : paramètre lié à la taille de l'élément (longueur, aire ou volume)



Domaine réel (Ω), Frontières($\partial\Omega$), Domaine discrétisé Ω_h

Figure II.1. Discrétisation du domaine de travail

Dans le cas d'une EDP linéaire avec opérateur symétrique, il s'agit finalement de résoudre une équation algébrique linéaire, inversible dans le meilleur des cas.

II.8. Triangle de pascal :

Triangle de pascal utiliser pour le choix d'une base d'approximation pour la fonction de type d'élément fini comme indique la figure II.2.

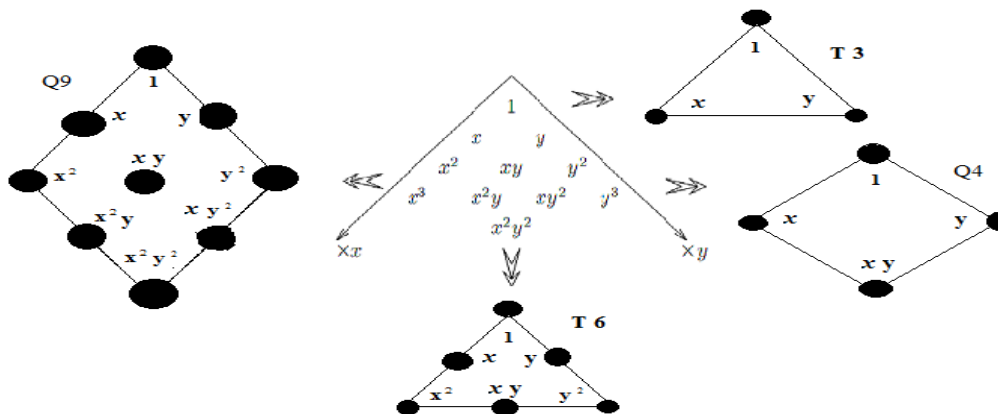


Figure II.2. Triangle de Pascal

II.9. Étapes de la méthode des éléments finis :

1. Discrétisation,
2. Calcul de la matrice de rigidité élémentaire,
3. Calcul de la matrice de rigidité globale (assemblage),
4. Introduction des conditions aux limites,
5. Résolution du système obtenu,
6. Critique des résultats.

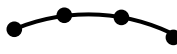
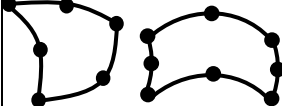
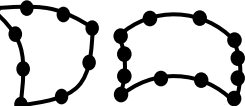
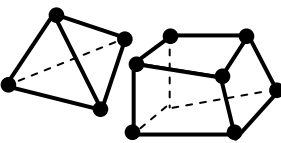
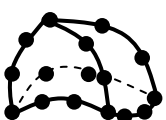
II.9.1. Discrétisation et le maillage :

La méthode des éléments finis propose de découper le système réel en un certain nombre d'éléments à géométries simples. Cette procédure est appelée discrétisation car le milieu continu est remplacé par une série d'éléments discrets. La méthode des éléments finis a développé une série de types d'éléments finis de maillage, qui pour le début, peuvent être classifiés (Tableau II.1) comme suit :

- Éléments finis unidimensionnels (généralement des barres).
- Éléments finis bidimensionnels (plaques et mêmes volumes à épaisseur faible).
- Éléments finis tridimensionnels (blocs massifs).

Le problème peut être totalement résolu, si l'on connaît le champ de déplacement en tout point du milieu.

Tableau II.1. Types des éléments finis.

Éléments	Linéaires	paraboliques (quadratiques)	cubiques
Unidimensionnels			
Bidimensionnels			
Tridimensionnels			
Autres types	 Masse  Ressort  Contact		

II.9.2. Fonctions de forme (ou d'interpolation) :

Le point clé de l'analyse par éléments finis est de définir l'interpolation du champ continu $u(x, y, z)$ à partir des valeurs nodales u_i (i étant le numéro du nœud considéré).

Il est à rappeler que ce champ $u(x, y, z)$ n'est qu'une approximation du champ réel $\hat{u}(x, y, z)$. L'expression générale de l'approximation est ainsi donnée par :

$$u(x, y, z) \approx \sum_{\text{nœuds}} N_i(x, y, z) \bullet u_i \quad (\text{II.14})$$

$N_i(x, y, z)$ est la fonction de forme (ou fonction d'interpolation) associée au nœud, et u_i : la valeur du déplacement au même nœud.

Les fonctions de forme $N_i(x, y, z)$ représentent le poids associé à chacun des nœuds de l'élément. Elles permettent de prédire l'évolution du champ à l'intérieur du domaine d'interpolation.

Cette condition implique qu'une fonction $N_i(x, y, z)$ doit avoir la valeur 1 au nœud i et 0 à tous les autres nœuds :

$$N_i(x_j, y_j, z_j) = \begin{cases} 1 & \text{au nœud } j=i \\ 0 & \text{aux nœuds } j \neq i \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

Dans la MEF, les déplacements sont interpolés à partir des déplacements nodaux, comme ce qui suit :

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (\text{II.16})$$

Donc on a :

$$\{\varepsilon\} = \partial[N] \{U\} = [B] \{U\} \quad (\text{II.17})$$

Avec : $[B]$: matrice de dérivée de la fonction d'interpolation

II.9.2.1. Élément barre à deux nœuds :

La formule de Lagrange et les coordonnées d'élément barre :

$$P(x) = \sum_1^n y_i N_i(x) \quad , \quad N(x) = \frac{\prod_{j=1}^n (x - x_j)}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (x_i - x_j)} \quad (\text{II.18})$$



Figure II.3. Barre à deux nœuds

Le déplacement :

$$U(x) = N_1(x) U_1 + N_2(x) U_2 \quad \text{donc} \quad U(x) = (1 - x/l) U_1 + (x/l) U_2 \quad (\text{II.19})$$

La matrice $[B]$ de barre à deux nœuds (une dimension) :

$$[B] = [-1/L \quad 1/L] \quad (\text{II.20})$$

avec, L : longueur de barre

II.9.3. Matrice de rigidité élémentaire :

Matrice de rigidité élémentaire, en partant de l'expression de l'énergie de déformation spécifique (énergie rapportée à l'élément de volume) pour un matériau élastique :

$$U_0 = \frac{\{\varepsilon\}^T \cdot [H] \cdot \{\varepsilon\}}{2} \quad (\text{II.21})$$

On aura :

$$U = \frac{1}{2} \int_V U_0 dV = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \cdot [H] \cdot \{\varepsilon\} dV = \frac{1}{2} \int_V \{\delta\}^T \cdot [B]^T \cdot [H] \cdot [B] \cdot \{\delta\} dV = \frac{1}{2} \{\delta\}^T \cdot [K] \cdot \{\delta\} \quad (\text{II.22})$$

Donc, l'expression suivante $[K]$ s'appelle matrice de rigidité élémentaire :

$$[K] = \int_V [B]^T \cdot [H] \cdot [B] dV \quad (\text{II.23})$$

Avec, $[H]$: la matrice des propriétés du milieu, $\{\delta\}$: vecteur déplacement en tous points.

La matrice transposée de la matrice de dérivée de la fonction d'interpolation est notée $[B]^t$,

$\{\delta\}^t$: vecteur déplacement transpose

II.9.3.1. Matrice rigidité de l'élément barre :

Peut démontrer par l'énergie de déformation :

$$W_{nd} = \frac{1}{2} E A \int_0^L \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \quad (\text{II.24})$$

En fonction du déplacement. Intervenir la dérivée du déplacement :

$$\frac{du}{dx} = \frac{dN(x)}{dx} \underline{q} = \begin{pmatrix} \frac{d(1-x/L)}{dx} & \frac{d(x/L)}{dx} \end{pmatrix} \underline{q} \quad \text{donc} \quad \frac{du}{dx} = \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} \underline{q} \quad (\text{II.25})$$

$\underline{q}$ et $\underline{q}^{\text{tr}}$: vecteur déplacement en tout point et sa transposé

Donc :

$$W_{nd} = \frac{1}{2} E A \int_0^L \underline{q}^{\text{tr}} [B]^{\text{tr}} [B] \underline{q} dx \quad (\text{II.26})$$

Donc la matrice de rigidité de l'élément barre est donnée par :

$$[K] = \frac{E A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.27})$$

On peut aussi utiliser l'intégrale par partie.

II.9.3.2. Matrice rigidité de l'élément en poutre :

Matrice rigidité de l'élément en poutre, d'après l'hypothèse de Bernoulli : section initialement plane et perpendiculaire à la ligne moyenne reste plane et perpendiculaire à la ligne après déformation, on a la relation :

$$\theta(x) = \frac{dW(x)}{dx} = W'(x) \quad (\text{II.28})$$

Avec : $W(x)$: fonction de déforme (flèche) ; $\theta(x)$: dérivé fonction de déforme; S : désigné la surface.

L'énergie de déformation :

$$W_{nd} = \frac{1}{2} E \int_{x=0}^L \left(\int_S y^2 ds \right) \left(W''(x) \right)^2 dx \quad (\text{II.29})$$

I : désigné l'inertie d'une section :

$$I = \int_S y^2 ds \quad (\text{II.30})$$

Lorsque remplace l'inertie de (II.37) à l'équation (II. 36) obtient:

$$W_{nd} = \frac{1}{2} E I \int_{x=0}^L \left(W''(x) \right)^2 dx \quad (\text{II.31})$$

Il faut choisir une fonction de forme pour la déformé de la poutre : un polynôme de degré 3 tels que (a,b,c,d) constants.

$$W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (\text{II.32})$$

Et leur dérivée :

$$W'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad (\text{II.33})$$

On souhaite d'exprimer : $W(x)$ en fonction déplacements W_1, W_2 , et rotations θ_1, θ_2 .

Les conditions sont :

$$W(0) = W_1 \quad ; \quad W(L) = W_2 \quad ; \quad W'(0) = \theta_1 \quad ; \quad W'(L) = \theta_2 \quad .$$

La fonction de déformé soit :

$$W(x) = N_1(x) W_1 + N_2(x) \theta_1 + N_3(x) W_2 + N_4(x) \theta_2 \quad (\text{II.34})$$

Avec :

$$\begin{aligned} N_1(x) &= 2x^3/L^3 - 3x^2/L^2 + 1 & ; & & N_2(x) &= x^3/L^2 - 2x^2/L + x \\ N_3(x) &= -2x^3/L^3 + 3x^2/L^2 & ; & & N_4(x) &= x^3/L^2 - x^2/L \end{aligned}$$

Donc pour la matrice de rigidité on a de même façon de la barre :

On remarquant que q ne dépend pas de x :

$$W'' = \frac{d^2(N(x)\underline{q})}{dx^2} = \frac{d^2 N(x)}{dx^2} \underline{q} = N''(x) \underline{q} = \underline{q}^t N''(x)^t \quad (\text{II.35})$$

Donc : la dérivée deux fois par rapport à x de la fonction d'interpolation :

$$\begin{aligned} N''_1(x) &= 2/L (-3/L + 6x/L^2) & ; & & N''_2(x) &= 2/L (-2 + 3x/L) \\ N''_3(x) &= 2/L (3/L - 6x/L^2) & ; & & N''_4(x) &= 2/L (-1 + 3x/L) \end{aligned}$$

Et on remplace dans l'intégrale :

$$W_{nd} = \frac{1}{2} EI \int_0^L \underline{q}^t N''(x)^t N''(x) \underline{q} dx = \frac{1}{2} \underline{q}^t EI \underbrace{\int_0^L N''(x)^t N''(x) dx}_{\text{Matrice de rigidité}} \quad (\text{II.36})$$

Donc la matrice de rigidité de l'élément poutre en flexion :

$$[K] = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & 3L & -6 & 3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & L^2 \\ -6 & -3L & 6 & -3L \\ 3L & L^2 & -3L & 2L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.37})$$

II.9.3.3. Matrice rigidité de l'élément barre dans un repère global :

Les barres sont positionnées arbitrairement dans l'espace et font des angles avec le repère global (figure II.5) ci-dessous:

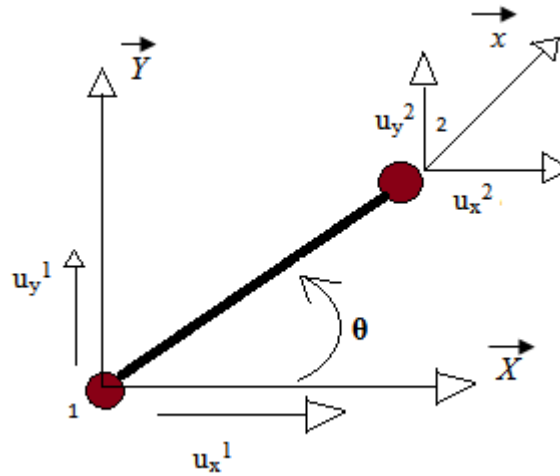


Figure II.4. Élément de barre dans une base globale

On note θ l'angle entre l'axe $\vec{X}$ du repère global et l'axe $\vec{x}$ repère local.

Le vecteur déplacement dans le repère global :

$$\vec{U} = U_x \vec{X} + U_y \vec{Y} \quad (\text{II.38})$$

En projetant sur les axes :

$$U = U_x \cos \theta + U_y \sin \theta \quad (\text{II.39})$$

En notant dans repère global : u_x^1 et u_y^1 déplacement nœud 1 et u_x^2 et u_y^2 déplacement nœud 2 sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}}_{T_r} \underbrace{\begin{Bmatrix} U_x^1 \\ U_y^1 \\ U_x^2 \\ U_y^2 \end{Bmatrix}}_Q \quad (\text{II.40})$$

T_r : matrice transformation, Q : vecteur déplacement de nœuds dans repère global.

En remplaçant dans l'énergie de déformation on trouve :

$$W_{nd} = \frac{1}{2} \underline{q}^t \underline{K} \underline{q} = \{Q\}^t [T_r]^t [K] [T_r] \{Q\} \quad (II.41)$$

Matrice rigidité de l'élément barre dans repère global:

$$[K]_{(G)} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta \sin\theta & -\cos^2\theta & -\cos\theta \sin\theta \\ \cos\theta \sin\theta & \sin^2\theta & -\cos\theta \sin\theta & -\sin^2\theta \\ -\cos^2\theta & -\cos\theta \sin\theta & \cos^2\theta & \cos\theta \sin\theta \\ -\cos\theta \sin\theta & -\sin^2\theta & \cos\theta \sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (II.42)$$

Note que $[K]_{(G)}$: matrice rigidité de repère global, $[K]_{(e)}$: matrice rigidité élémentaire.

Remarque :

Tout principe énoncé le déplacement, à partir ce principe peut dériver la matrice de rigidité.

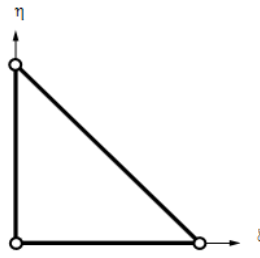
II.9.4. Formulations des éléments :

II.9.4.1. Élément de référence:

Un élément de référence Ω^r est un élément de forme très simple, repéré dans l'espace de référence, qui peut être transformé de chaque élément réel Ω^e par une transformation géométrique bijective τ^e au lieu de travailler sur les coordonnées (x,y,z) on travaille sur (ξ,η,ζ) un autre intérêt réside dans l'utilisation de l'intégration numérique fortement facilitée par les tableaux disponibles.

II.9.4.2. Élément iso paramétrique :

Un élément est dit isoparamétrique si les mêmes fonctions d'interpolations sont prises pour le déplacement et la géométrie. Ceci implique que les nœuds géométriques soient confondus avec les nœuds d'interpolations. La formulation isoparamétrique permet d'avoir par exemple des éléments non rectangulaires, des éléments avec des côtés courbes ou des éléments présentant des singularités utilisés dans la mécanique de la rupture. Un système de coordonnées auxiliaire doit être introduit. Ce système dénommé (ξ,η) s'appelle système naturel de coordonnées. Son origine, le système de coordonnées XY est située au milieu des coordonnées des nœuds définis par $\xi = \pm 1$ et $\eta = \pm 1$. Indifféremment de la forme ou des dimensions physiques de l'élément ou Indépendamment de son orientation dans le système global d'axes de coordonnées XY . Généralement les axes ξ et η ne sont pas orthogonaux et n'ont pas une orientation particulière par rapport au système d'axes XY .

II.9.4.2.A. Triangle à 3 nœuds :**Figure II.5.** Élément parent iso paramétrique triangulaire à trois nœuds

Les fonctions de forme peuvent être calculées en résolvant le système II.24:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1(x,y) \\ N_2(x,y) \\ N_3(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad (\text{II.43})$$

On peut résoudre ce système par la méthode de Cramer, la solution s'écrit sous la forme :

$$N_1(x,y) = \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - y_2 x_3) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]$$

$$N_2(x,y) = \frac{1}{2A} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y]$$

$$N_3(x,y) = \frac{1}{2A} [(x_1 y_2 - y_1 x_2) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]$$

A : désigne l'aire de triangle (constant), les déplacements d'un point quelconque sont interpolés à partir des degrés de liberté nodaux en utilisant les mêmes fonctions de forme:

$$u = \sum N_i u_i \text{ et } w = \sum N_i w_i \quad (\text{II.44})$$

Les déplacements u et w sont parallèles aux axes X et Y, mais pas aux axes ξ et η. Pour l'écriture de la matrice [B] il faut établir la relation entre les gradients dans les deux systèmes de coordonnées. Considérons l'un de ces gradients de déformation:

On ne peut pas écrire immédiatement le résultat parce que u est défini comme la fonction de ξ et η et non pas en fonction de X et Z. Dans ce cas on commence par différentier par rapport à ξ et η en utilisant la règle des chaines:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{[J]} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} \\ \frac{\partial u}{\partial Y} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.45})$$

[J] s'appelle la matrice de Jacobi (le Jacobien).

Les coefficients de la matrice [J] sont obtenus à partir de la relation :

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} X_i, \quad \frac{\partial Y}{\partial \xi} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} Y_i, \quad \frac{\partial X}{\partial \eta} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} X_i, \quad \frac{\partial Y}{\partial \eta} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} Y_i \quad (\text{II.45-a})$$

Les déformations ε_z et γ_{xz} s'obtiennent de la même façon, la matrice [B] élément triangle à 3 nœuds :

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{II.46})$$

Donc on peut déterminer la matrice de rigidité :

$$[k] = \int [B]^T \cdot [H] \cdot [B] dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T \cdot [H] \cdot [B] \cdot t \cdot |J| d\xi d\eta \quad (\text{II.47})$$

t : représente l'épaisseur de l'élément. |J| : le déterminant de J.

II.9.4.3. Formulation par la méthode des résidus pondérés :

La méthode des résidus pondérés consiste à approcher partiellement l'annulation du résidu d'une équation différentielle pour trouver une solution discrète approximative, illustrons le concept par l'exemple qui suit.

Soit l'équation différentielle et la condition initiale suivante:

$$\frac{du}{dx} = -u \quad (\text{II.48})$$

Avec la condition aux limites : $u=1$ à $x=0$

$$u = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{II.49})$$

Supposons que l'on désire connaître la solution dans l'intervalle :

Posons alors une solution approchée. Cette solution approchée doit satisfaire les conditions aux limites : $c_0 = 1$ et c_1 et c_2 restent des coefficients indéterminés.

Afin de les déterminer nous devons émettre un critère qui nous permettra d'ajuster ces coefficients à la vraie solution. Considérons le résidu R_1 :

$$R_1 = \frac{d u}{d x} + u \quad (\text{II.50})$$

Si : u est la solution exacte, $R_1 = 0$. Remplaçons u par la solution approchée :

$$R_1 = 1 + c_1(1+x) + c_2(1+x^2) \quad (\text{II.51})$$

Devons donc essayer de rendre ce résidu nul par un moyen quelconque. Le choix de cette fonction approchée doit satisfaire les conditions aux limites ou initiales. Plusieurs moyens sont disponibles, passons en revues les plus utilisées.

II.9.4.3.A. Collocation par points :

Comme nous avons deux paramètres, il faut alors écrire deux équations.

Imaginons que nous imposons que le résidu s'annule en deux points de l'intervalle :

$$R_1(x_i) = 0 \quad (\text{II.52})$$

II.9.4.3.B. Collocation par sous-domaines :

Choisissons un autre critère : la moyenne du résidu sur deux sous intervalles constituant le domaine, doit s'annuler :

$$\int_D R_1(u) dD = 0 \quad (\text{II.53})$$

II.9.4.3.C. Formulation par la méthode de Galerkin (variationnelle) :

La méthode de Galerkin est une méthode de résidus pondérés consistant à choisir comme pondération, les fonctions de base qui ont servi à construire la fonction d'interpolation.

À partir de la forme générale :

$$\int_D w R_1(u) dD = 0 \quad (\text{II.54})$$

On choisit : $w = \{N\}$

Ceci permet d'écrire la méthode de Galerkin sous forme :

$$W_1 = \int_D \{N\} R_1(u) dD = 0 \quad (\text{II.55})$$

Les fonctions de pondération N sont introduites dans la forme intégrale sous forme d'un vecteur colonne pour respecter les lois du produit matriciel et ainsi obtenir autant d'équations qu'il y a

de fonctions de base. La méthode de Galerkin est souvent présentée dans la littérature sous forme variationnelle, c'est-à-dire en posant :

$$\mathbf{W} = \delta \mathbf{u} \quad (\text{II.56})$$

δu : est la première variation de u .

La variation est ensuite exprimée par interpolation nodale soit :

$$\delta u = [N] \{ \delta u_n \} = [\delta u] \{ N \} \quad (\text{II.57})$$

La forme devient :

$$W_1 = \int_D [\delta u] \{ N \} \cdot R_1(u) dD = 0 \quad (\text{II.58})$$

Enfin puisque les δu ne sont pas fonctions du domaine géométrique D peuvent être extraits de l'intégration, on retrouve la forme :

$$W_1 = \int_D \{ N \} R_1(u) dD = 0 \quad (\text{II.59})$$

L'intégrale qui consiste à formuler l'intégrale d'un tout comme la somme des intégrales des parties, ainsi l'expression précédente devient :

$$W_1 = \sum_e \int_e \{ N \} R_1([N] \{ u \}) dD = 0 \quad (\text{II.60})$$

Les fonctions N sont alors associées spécifiquement à un élément à ses inconnues, mais expriment aussi le fait que les autres inconnues ne participent pas à l'approximation.

Finalement la formule générale :

$$[K] \{ u \} = \{ F \} \quad (\text{II.61})$$

II.9.5. Points de Gauss pour calcul de l'intégrale :

Méthode d'intégration numérique de Gauss est très utilisée, remplaçons l'intégrale d'une fonction polynomiale $y(\xi)$ par une combinaison linéaire de ses valeurs aux points d'intégration ξ_i :

$$\int_{-1}^{+1} y(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^r W_i y(\xi_i) \quad (\text{II.62})$$

D'une façon : W_i : poids ($i=1, \dots, r$: nombres des points, $W_i > 0, -1 < \xi_i < +1$). L'ordre de fonction de Gauss d'ordre $(2r-1)$.

$$\int_{-1}^{+1} y(\xi) d\xi = \frac{2}{\alpha + 1} = \sum_{i=1}^r W_i \xi_i^\alpha \quad \alpha = 0, 2, 4, \dots, 2r-2 \quad (\text{II.63})$$

$$\int_{-1}^{+1} y(\xi) d\xi = 0 = \sum_{i=1}^r W_i \xi_i^\alpha \quad \alpha=1,3,5,\dots, 2r-1 \quad (\text{II.64})$$

II.9.6. Vecteur force :

Les charges dans la MEF sont toujours positionnées dans les nœuds, dans la formule (II.12) le travail (T) des forces de volumes et de surfaces et ponctuelles :

$$T = \int_v \{U\}^{Tr} \cdot \{f^v\} dv + \int_s \{U\}^{Tr} \cdot \{f^s\} ds + \{N\}^{Tr} \cdot \{p\}$$

II.9.7. Assemblage et introduction des conditions aux limites :

L'assemblage consiste à prendre en compte les contributions de tous les systèmes élémentaires pour construire un système linéaire global que l'on devra résoudre. L'assemblage est le tableau d'adressage des degrés de liberté qui permet de passer du système élémentaire local (sur un élément K) au système global (sur tout le domaine) en fonction de la numérotation des degrés de liberté.

L'assemblage est l'opération qui construit la matrice de rigidité globale [K], et la valeur de charge.

$$[K] = \sum_{\text{élément}} [K^e] \quad (\text{II.65})$$

Des sollicitations {F} à partir des matrices élémentaires [K] et des vecteurs élémentaires.

Après assemblage, nous obtenons la forme matricielle suivant :

$$[K]\{U\} = \{F_i\} + \{F_d\} \quad (\text{II.66})$$

[K] : la matrice de rigidité globale, {U} : le vecteur de déplacement.

{F_i} : le vecteur de forces inconnues, {F_d} : le vecteur de forces données.

II.9.8. Utilisation de la méthode des éléments finis pour trouver la solution approchée d'équations différentielles partielles :

II.9.8.1. Approximation de l'équation différentielle :

La possibilité d'approximer sur un domaine restreint une fonction continue par une fonction d'interpolation. Déterminant ainsi un processus de discrétisation, pouvons alors remplacer dans une équation différentielle la fonction inconnue par la fonction d'interpolation. Cependant, ceci conduit à une expression qui est fonction d'un certain nombre de valeurs discrètes de u.

Le nombre d'inconnues étant supérieur au nombre d'équations, il est impossible de trouver une solution unique. Il faut donc écrire un certain nombre de critères pour obtenir suffisamment d'équations et ainsi construire un système à solution unique. Soit l'équation différentielle :

$$L(x) - f = 0 \quad (\text{II.67})$$

Accompagnée de conditions aux limites, soit :

$$B(u) = g \quad (\text{II.68})$$

Remplaçons u par une fonction d'interpolation, il est évident que la fonction d'interpolation doit pouvoir être ajustée aux conditions aux limites. En général, pour les équations différentielles du premier ordre, cela ne pose pas de problèmes puisque les conditions d'ordre 0 peuvent être introduites en termes de valeurs ponctuelles sur les limites.

II.9.8.2. Dérivées de la fonction d'interpolation :

Dans le cas que nous considérons ici, c'est-à-dire l'emploi de fonctions d'interpolation Polynomiales de degré 1, Il est évident que seules les dérivées jusqu'à l'ordre 1 existent.

Ceci est extrêmement important en ce qui concerne le choix du degré d'une fonction d'interpolation en fonction de l'ordre de l'équation différentielle. Par exemple, une fonction d'interpolation linéaire (de degré 1) ne pourra pas être directement utilisée pour approximer une dérivée de seconde puisque sa dérivée d'ordre 2 est nulle.

Les dérivées des fonctions d'interpolation peuvent s'écrire, à une dimension par exemple :

$$u'(x) = [N'_{,x}(x)] \{u\} \quad (\text{II.69})$$

$$u''(x) = [N'_{,xx}(x)] \{u\} \quad (\text{II.70})$$

II.9.9. Méthodes de résolutions :

Pour résoudre un système d'équations algébriques linéaires de la forme :

$$[A] \{x\} = \{b\} \quad (\text{II.71})$$

On a deux méthodes citées ci-après :

II.9.9.1. Méthode directe :

II.9.9.1.1. Méthode d'élimination de GAUSS :

La méthode d'élimination de Gauss a pour but de transformer le système d'équation II.70 à un système équivalent de la forme où $[A]$ transformer à une matrice triangulaire supérieure et $\{b\}$ est un second membre convenablement modifié, (condition ayant la même solution après modification de système). Le système peut être alors résolu par une méthode de substitution rétrograde. Au cours de la transformation, on utilise essentiellement la propriété selon laquelle on ne change pas la

solution du système quand on ajoute une équation donnée une combinaison linéaire des autres équations, considérons une matrice inversible : $A \in R^{n \times n}$

Dont le terme diagonal a_{11} est supposé non nul, on pose :

$A^{(1)} = A$ et $b^{(1)} = b$. On introduit les multiplicateurs :

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \quad i=2,3,\dots,n \quad (\text{II.72})$$

$a_{i1}^{(1)}$: les $a_{ij}^{(1)}$ désignent les éléments de $A^{(1)}$. On peut éliminer l'inconnue x_1 des lignes $i = 2, \dots, n$

en leur retranchant m_{i1} fois la première ligne et en faisant de même pour le membre de droite.

On définit :

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1} a_{1j}^{(1)}, \quad i,j=2,\dots,n, \quad (\text{II.73})$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1} b_1^{(1)}, \quad i=2,\dots,n, \quad (\text{II.74})$$

$b_i^{(1)}$: sont les composantes de $b^{(1)}$ et on obtient un nouveau système de la forme :

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{bmatrix} \quad (\text{II.75})$$

que l'on note $A^{(2)}x = b^{(2)}$ et qui est équivalent au système de départ, on peut à nouveau transformer ce système de façon à éliminer l'inconnue x_2 des lignes 3, ..., n.

En poursuivant ainsi, on obtient une suite finie de systèmes

pour $k \geq 2$, la matrice $A^{(k)}$ est de la forme suivante :

$$A^{(k)}x = b^{(k)}, \dots, 1 \leq k \leq n \quad A^{(K)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & & & & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & 0 & a_{kk}^{(1)} & & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nk}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (\text{II.76})$$

On a supposé $a_{11}^{(1)} \neq 0$ pour $i=1, \dots, k-1$. Il est clair que pour $k = n$

On obtient alors le système triangulaire supérieur $A^{(n)}x = b^{(n)}$ suivant:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ \vdots & a_{22}^{(1)} & & & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix} \quad (\text{II.77})$$

II.9.9.2. Méthode indirecte :

II.9.9.2.1. Méthode de Jacobi :

Pour une donnée initiale arbitraire x^0 , on calcule $x_i^{(k+1)}$ selon la formule :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right], i=1, \dots, n \quad (\text{II.78})$$

CHAPITRE III

MODÈLE NUMÉRIQUE

III. MODÈLE NUMÉRIQUE

III.1. Introduction :

La modélisation numérique a pour objectif de simuler numériquement le comportement de systèmes physiques, en utilisant les outils informatiques, les étapes à suivre dans une telle simulation numériques ont les suivantes:

- La description du système physique étudié et du problème posé (modèle physique).
- La traduction du problème en modèle mathématique (modèle mathématique).
- L'établissement d'un modèle numérique (ou algébrique) qui peut être résolu sur ordinateur et qui fait appel à des méthodes de discrétisation telle que la méthode des éléments finis.
- L'écriture d'un programme qui simule le comportement du système physique (modèle informatique). Diverses erreurs peuvent être produites dans les différents modèles ou lors du passage d'un modèle à l'autre, dont les trois principaux types sont :
 - L'erreur sur le choix du modèle mathématique, qui représente la différence entre la solution exacte du modèle mathématique et le comportement réel du système physique.
 - L'erreur de discrétisation qui représente la différence entre la solution exacte du modèle mathématique et la solution exacte du modèle numérique.
 - L'erreur d'origine informatique due à la précision limitée des calculs effectués par l'ordinateur et éventuellement à des fautes de programmation.

La modélisation consiste à maîtriser ces erreurs d'une manière à s'assurer que la solution fournie par le logiciel est assez proche du comportement réel du système physique étudié.

Le modèle numérique établi dans ce chapitre à l'aide de la méthode des éléments finis, en utilisant le logiciel ADINA, permet d'analyser la distribution des contraintes et les déformations thermiques dans l'enrobage du béton et les barres en PRF sous variation de température (ΔT) variant de 0 à + 70°C en variant le rapport d'enrobage du béton au diamètre de la barre en PRF (c/d_b) et la classe de béton. Aussi, il permet de déterminer la variation de température (ΔT_{cr}) produisant la première fissure dans le béton à l'interface armature/béton ainsi que la variation de température (ΔT_{sp}) au-delà de laquelle l'enrobage du béton est totalement fissuré en fonction du rapport (c/d_b) et la classe de béton (résistance caractéristique du béton à la compression).

III.2. Modèle physique :

La description du système physique inclut :

- La représentation de sa géométrie.
- Les variables inconnues qu' on cherche à évaluer.
- Les lois de la physique qui régissent le comportement.
- Les valeurs des propriétés physiques supposées connues.
- Les sollicitations, les conditions aux limites et éventuellement les conditions initiales pour le problème traité.

III.3. Objectifs :

L'objectif de cette modélisation numérique est d'étudier l'effet de la variation de la résistance du béton sur le comportement thermique des enrobages du béton entourant les barres en PRF dans des poutres prismatiques de confinement asymétrique. Éventuellement, de déterminer le rapport de l'épaisseur d'enrobage du béton au diamètre de la barre en PRF (c/d_b) en fonction de la classe du béton et la variation de température critique afin d'éviter la rupture de l'enrobage du béton.

III.4. Paramètres d'étude :

Les paramètres d'étude dans cette phase d'analyse sont comme suit :

- Diamètre des barres : les barres en PRF de verre (PRFV) N°.10, N°.13, N°.16 , N°.19 et N°.25, ont été utilisées.
- Rapport c/d_b variant de 1 à 3,2.
- Température variant de +20 à +90 °C (puisque la température de référence T° est de +20 °C donc ΔT varie de 0 à +70 °C).
- Résistance du béton à la compression varie de 25 à 90 MPa.

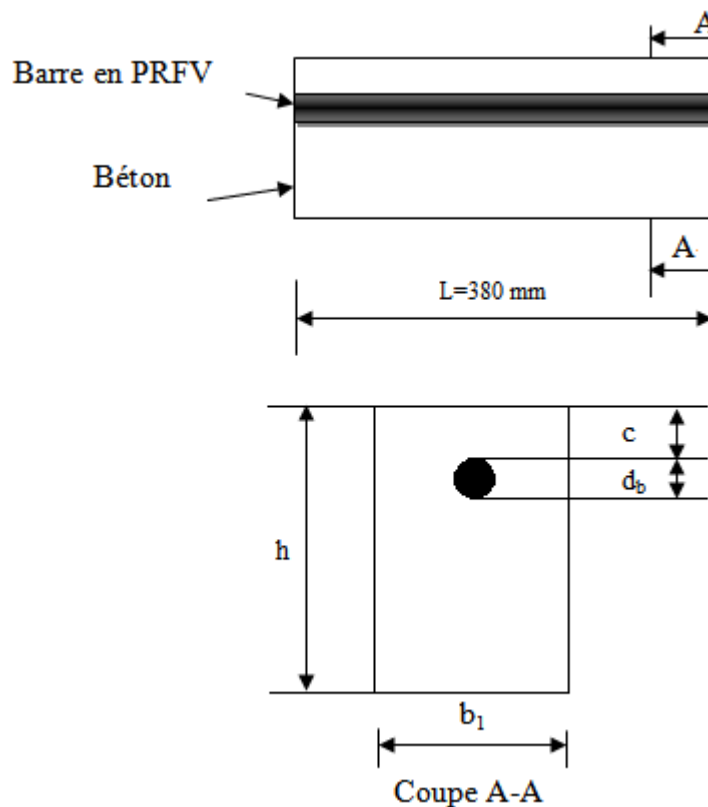
III.5. Description des poutres :

Trois différentes sections rectangulaires ($b_1 \times h$) des poutres en béton ont été utilisées à savoir : 76x100 ; 100x125 et 100 mm x150mm. La longueur des échantillons de poutres a été de 380mm. Les poutres ont été renforcées avec une barre en PRF de verre (PRFV). Les détails des poutres sont présentés dans le tableau III.1 et la figure III.1 ci-dessous. Les enrobages en bétons sélectionnés ont été conçus de façon à obtenir une large gamme de rapport d'épaisseur d'enrobage du béton au diamètre de la barre en PRF c/d_b variant de 1 à 3,2. Comme expliqué au tableau III.1 l'identification des poutres indique la forme (P=Prismatique) suivie par le diamètre de la barre en PRF et l'épaisseur d'enrobage du béton.

Tableau III.1. Détails des poutres en béton armé de barres en PRF.

Échantillons	Largeur d'échantillons b_1 (mm)	Hauteur d'échantillons h (mm)	Diamètre de barre d_b (mm)	Enrobage du béton c (mm)	c/d_b
P.#10.20 ^a	76	100	9,5	20	2,1
P.#10.25	76	100	9,5	25	2,6
P.#10.30	76	100	9,5	30	3,2
P.#13.20	76	100	12,7	20	1,6
P.#13.25	76	100	12,7	25	2,0
P.#13.30	76	100	12,7	30	2,5
P.#16.20	76	100	15,9	20	1,3
P.#16.25	76	100	15,9	25	1,6
P.#16.30	76	100	15,9	30	1,9
P.#19.20	100	125	19,1	20	1,0
P.#19.25	100	125	19,1	25	1,3
P.#19.30	100	125	19,1	30	1,6
P.#25.25	100	150	25,4	25	1,0
P.#25.30	100	150	25,4	30	1,2
P.#25.35	100	150	25,4	35	1,4

^a P : Poutre prismatique en béton ; Ø10 : diamètre nominal de la barre en PRF ;
 $c = 20$ mm : épaisseur d'enrobage du béton.

**Figure III.1.** Géométrie d'un échantillon de poutre en béton armé de barres en PRFV

III.6. Caractéristiques des matériaux :

a) Barres en PRFV:

Cinq diamètres de barres en PRFV ont été utilisés dans cette étude à savoir : 9,5 ; 12,7 ; 15,9 ; 19,1 et 25,4 mm. Une représentation schématique est montrée à la figure III.2 barres en PRFV de différents diamètres utilisés.



Figure III.2. Barres en PRFV de différents diamètres utilisés

Les propriétés mécaniques en traction des barres en PRFV telle la résistance à la traction ultime (f_{tu}), le module d'élasticité longitudinal (E_l), le coefficient de Poisson longitudinal (ν_{lt}) et la déformation ultime sont présentés dans le Tableau III.2. Le module d'élasticité transversal (E_t) et le coefficient de Poisson transversal (ν_{tt}), sont égaux à 7,1 GPa et 0,38 respectivement.

Le coefficient d'expansion thermique transversale (α_t) et celui dans la direction longitudinale (α_l) sont respectivement $33.10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ et $9.10^{-6}/^{\circ}\text{C}$.

Tableau III.2. Propriétés mécaniques des barres en PRFV. [ACI,440.3R-04]

Désignation de barre	Diamètre de barre, d_b [mm]	Résistance ultime à la traction*, f_{tu} [MPa]	Module d'élasticité longitudinal*, E_l [GPa]	Déformation Ultime en traction (%)	Le coefficient de Poisson longitudinal (ν_{lt})
N°.10	9,5	627 ± 22	42 ± 1	$1,8 \pm 0,2$	$0,28 \pm 0,02$
N°.13	12,7	617 ± 16	42 ± 1	$1,5 \pm 0,2$	
N°.16	15,9	535 ± 9	42 ± 1	$1,4 \pm 0,2$	
N°.19	19,1	600 ± 15	40 ± 1	$1,5 \pm 0,2$	
N°.25	25,4	N/a	N/a	N/a	

* Basé sur 5 échantillons identiques.

b) Béton :

Les propriétés du béton telles la résistance en compression (f'_c), la résistance en traction (f_r), le module d'élasticité longitudinal (E_c), sont résumées dans le Tableau III.3.

• Module d'élasticité :

Pour un béton de masse volumique (γ_c) compris entre 1500 et 2500 kg/m³, le module d'élasticité peut être calculé comme suit [ISIS CANADA, 2007]:

$$E_c = (3300\sqrt{f'_c} + 6900)\left(\frac{\gamma_c}{2300}\right)^{1,5} \quad (\text{III.1})$$

• Résistance en traction :

Avant fissuration, le béton est supposé se comporter comme un matériau élastique.

la résistance en traction (f_r) peut être déterminé avec l'équation suivante [ISIS CANADA, 2007] :

$$f_r = 0,6\lambda\sqrt{f'_c} \quad (\text{III.2})$$

λ : coefficient tenant compte de la densité du béton ($\lambda=1$ pour un béton de densité normale).

Le béton est considéré comme un matériau de comportement non linéaire, la figure III.3 montre l'allure de la courbe des contraintes-déformations du béton utilisée dans le programme ADINA

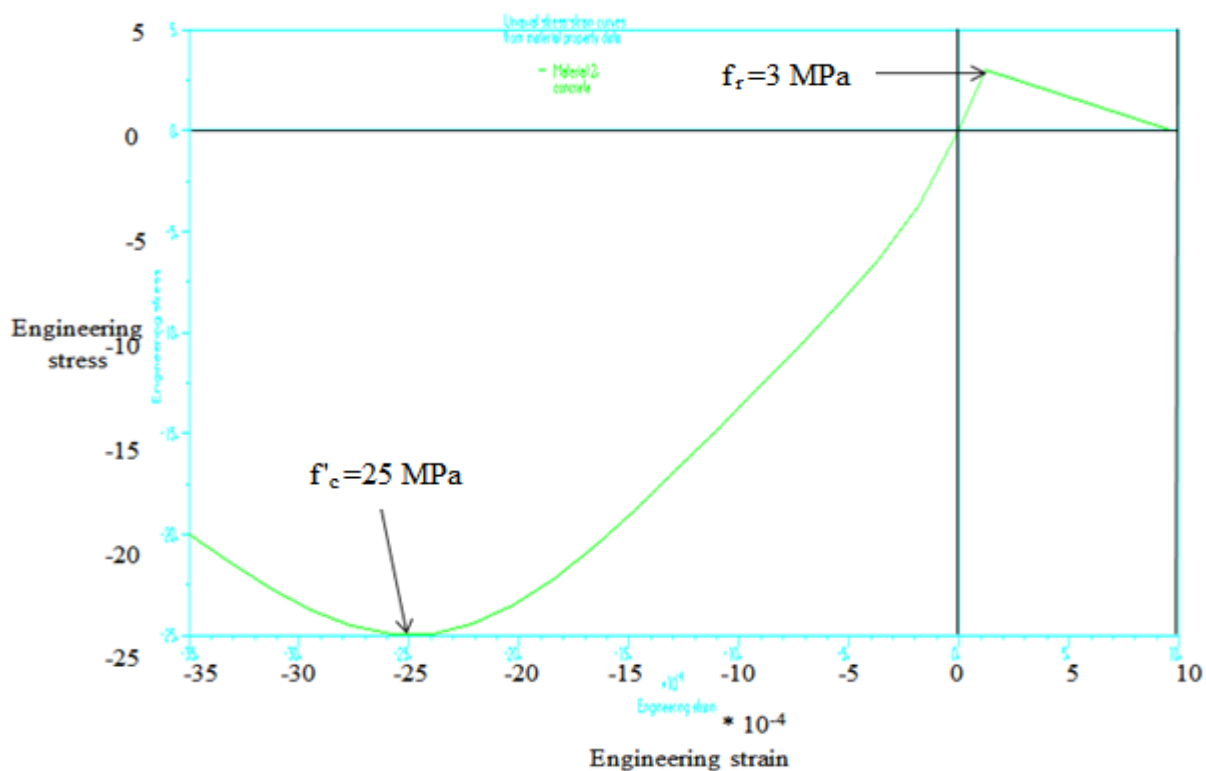


Figure III.3. Courbe contraintes-déformations du béton utilisée par ADINA

• Le coefficient de Poisson ν_c , le coefficient d'expansion thermique α_c et la densité de béton γ_c , sont considérés respectivement de 0,17 ; $11,6 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ et $2,4 \text{ g/cm}^3$.

Tableau III.3. Propriétés du béton.

f_c' [MPa]	f_r [MPa]	E_c [MPa]
25	3	24944,06
30	3,286	26620,68
35	3,549	28164 ,34
40	3,794	29601,14
45	4,024	30950,61
50	4,242	32227,00
55	4,449	33441,00
60	4,647	34600,91
65	4,837	35713,46
70	5,019	36783,97
75	5,196	37816,89
80	5,366	38815,92
85	5,531	39784,18
90	5,692	40724,36

III.7. Simulation numérique de l'effet de la résistance du béton sur le comportement thermique des poutres en béton armé de PRF :

III.7.1. Définition du logiciel :

Le logiciel ADINA est une abréviation composée des lettres significatives ordonnées dont la signification est : (A: Automatic; D: Dynamic; I: Incremental; N : Nonlinear; A : Analysis), ce logiciel est un programme d'éléments finis pour la simulation des phénomènes physiques.

III.7.2. Etapes de modélisation des poutres :

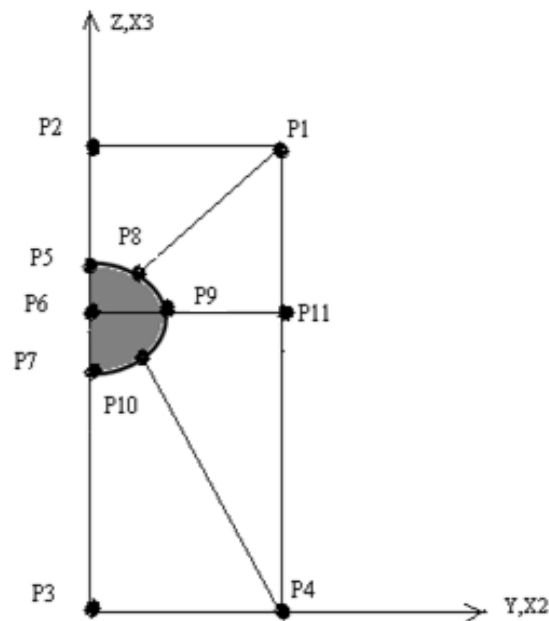
Vue la symétrie de la section de la poutre prismatique par rapport à l'axe oz, l'étude peut être effectuée uniquement pour la moitié de la section comme le montre dans la figure III.4.

a) Géométrie et coordonnées des points de la section de la poutre modélisée :

Le tableau III.4 à titre d'exemple présente les coordonnées des points de la section en béton armé de la poutre modélisée P.#10.20.

Tableau III.4. Coordonnées des points de la section de la poutre modélisée P.#10.20.

Points	$X_2(Y)$	$X_3(Z)$
1	38	100
2	0	100
3	0	0
4	38	0
5	0	80
6	0	75.25
7	0	70.5
8	4.75	75.25
9	4.042	84.042
10	4.042	71.208
11	38	75.25

**Figure III.4.** Vue de la demi-section modélisée de la poutre considérée dans l'étude numérique

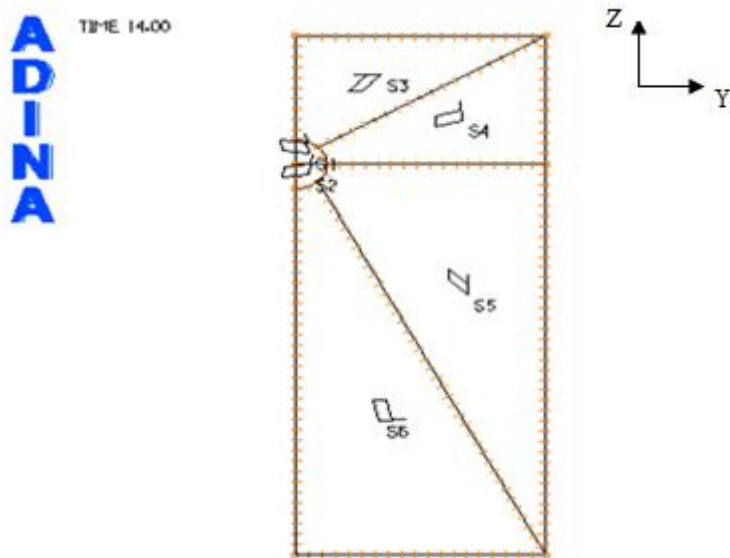


Figure III.5. Géométrie en surfaces de poutre en béton armé d'une barre en PRF de verre

b) Conditions aux limites :

- L'étude du modèle s'effectue en deux dimensions (2D) car les déformations thermiques transversales dues à l'effet de la compatibilité des déformations axiales sont négligeables.

- Le nombre de degrés de liberté à considérer est égal à 2.

- Les déplacements suivants l'axe (oy) et l'axe (oz) à considérés sont comme suit:

$$\diamond z = 0 \quad U_z = 0 \quad \text{et} \quad U_y \neq 0$$

$$\diamond y = 0 \quad U_z \neq 0 \quad \text{et} \quad U_y = 0$$

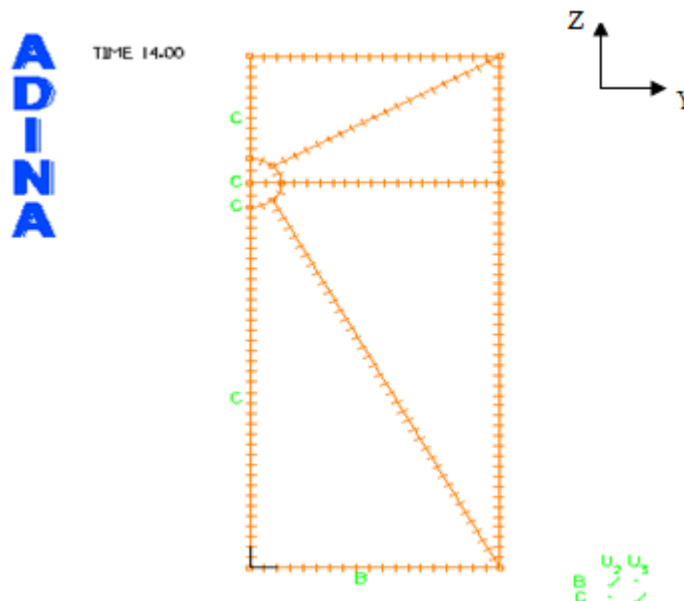


Figure III.6. Conditions aux limites

c) Conditions de chargement :

La variation de température ΔT est appliquée statiquement de façon uniforme et homogène sur toutes les surfaces des deux matériaux, béton et armature en PRFV. La variation de température ΔT augmente par incrément de 5 °C comme l'indique le tableau III.5 et la figure III.7.

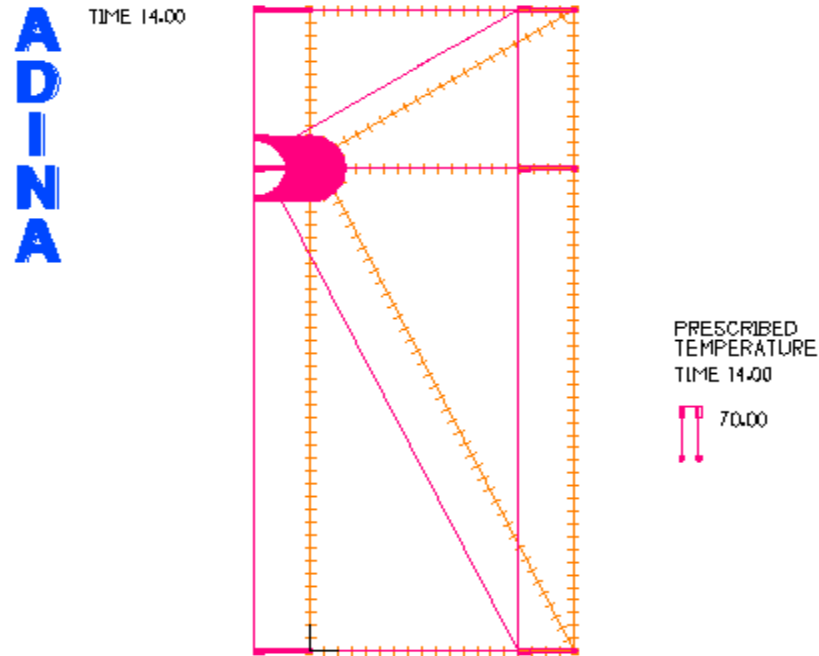


Figure III.7. Conditions de chargement

Tableau III.5. Variation de température pour chaque incrément du temps.

Incréments du Temps	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
ΔT (°C)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70

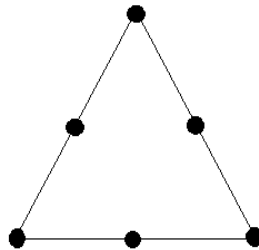
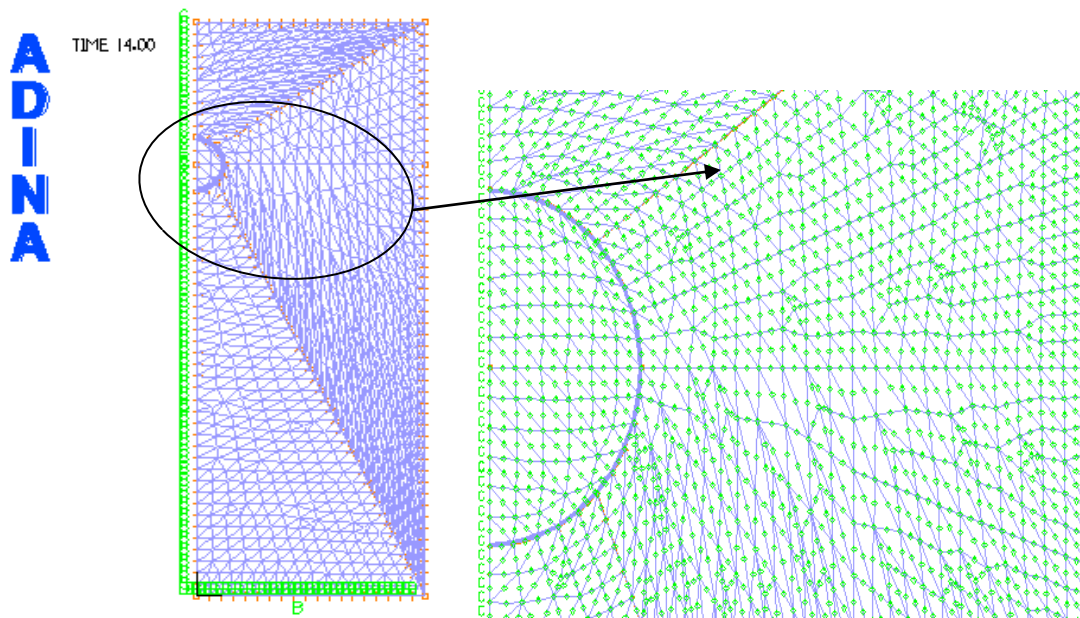
d) Maillage :

Le choix de l'élément triangulaire à 6 nœuds (T6) au logiciel ADINA a pour but de donner plus de précision aux résultats de calcul numérique. Un élément triangulaire à 6 nœuds (figure III.8) est utilisé pour le maillage des deux surfaces des matériaux (PRF et béton) comme le montre la figure III.9. Le Tableau III.6 montre la comparaison entre trois types de maillage; triangulaire à 3 nœuds (T3), triangulaire à 6 nœuds (T6), quadratique à 8 nœuds (Q8) en utilisant logiciel ADINA.

Tableau III.6. Comparaison entre trois types de maillage

Type de maillage	Q8	T6	T3
Nombres d'équations	2090	1274	14640
Nombres d'éléments	348	300	14402
Nombres des nœuds	1077	641	7402
Contrainte circonférentielle (MPa)	3.85469E+0	3.71751E+0	3.58886E+0
Contrainte radiale (MPa)	3.61123E+0	3.56330E+0	3.50635E+0

On remarque que pour un test numérique dans le logiciel ADINA, d'une poutre prismatique à enrobage de 35mm et d'armature en PRF de diamètre 25mm (P#25-35), de classe de béton de 40MPa et de variation de température de 70°C, l'élément de forme triangulaire à 6 nœuds (T6) est le meilleur choix avec un nombre d'éléments égale à 300 moins que les autres types de maillage. Aussi, de nombre d'équations 1274 et de nombres des nœuds égale à 641 comme le montre Tableau III.6 ci-dessus.

**Figure III.8.** Éléments de maillage de type triangulaire à 6 nœuds (T6) du maillage

- Éléments agrandis -

Figure III.9. Éléments T6 du maillage de la barre en PRF et béton

III.8. Analyse des résultats numériques :

Les figures III.10 à III.13 montre le développement des fissures dans le béton à l'interface armature PRF/béton et à travers l'enrobage de béton des poutres en béton armé de PRFV ayant des rapports $c/d_b = 1,2$ et $1,9$ pour des classes de béton de 25MPa et 90MPa.

On remarque que l'enrobage de béton est totalement fissuré pour les poutres de rapport $c/d_b = 1,2$ et de classe de béton de 25MPa et 90MPa, aussi pour les poutres de rapport $c/d_b = 1,9$ et de classe 25MPa comme le montre les figures III.10(b) au III.12(b).

Cependant, la couronne des fissures n'atteint pas la surface extérieure de l'enrobage de béton pour les poutres de rapport $c/d_b = 1,9$ et de classe de béton de 90MPa comme le montre la figure III.13(b).

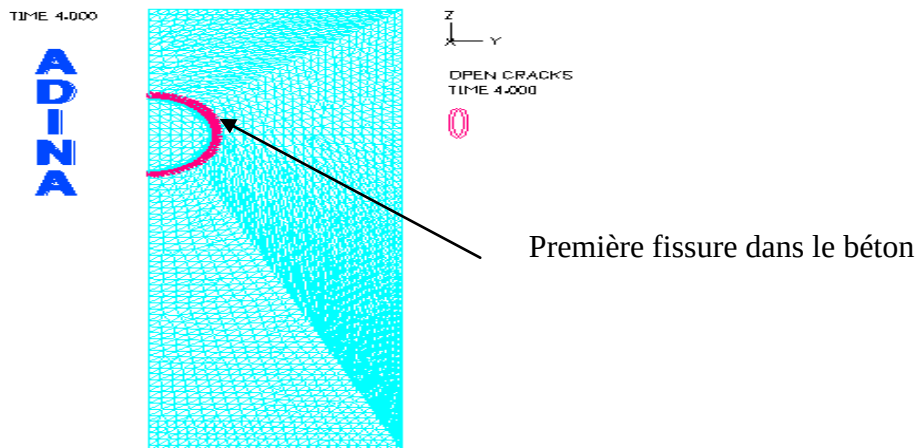


Figure III.10(a) Développement des premières fissures dans le béton à l'interface armature PRF/béton à $\Delta T_{cr} = 20^\circ\text{C}$ de la poutre prismatique en béton P.#25.30 ayant $f_c' = 25\text{MPa}$ et $c/d_b = 1,2$

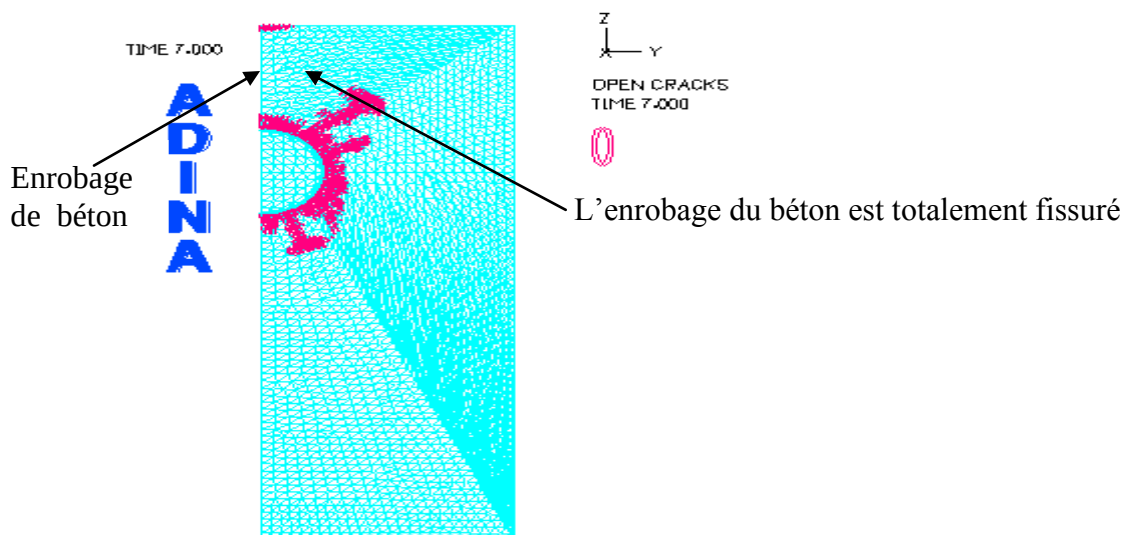


Figure III.10(b) Enrobage de béton totalement fissuré à $\Delta T_{sp} = 35^\circ\text{C}$ de la poutre prismatique en béton P.#25.30 ayant $f_c' = 25\text{MPa}$ et $c/d_b = 1,2$

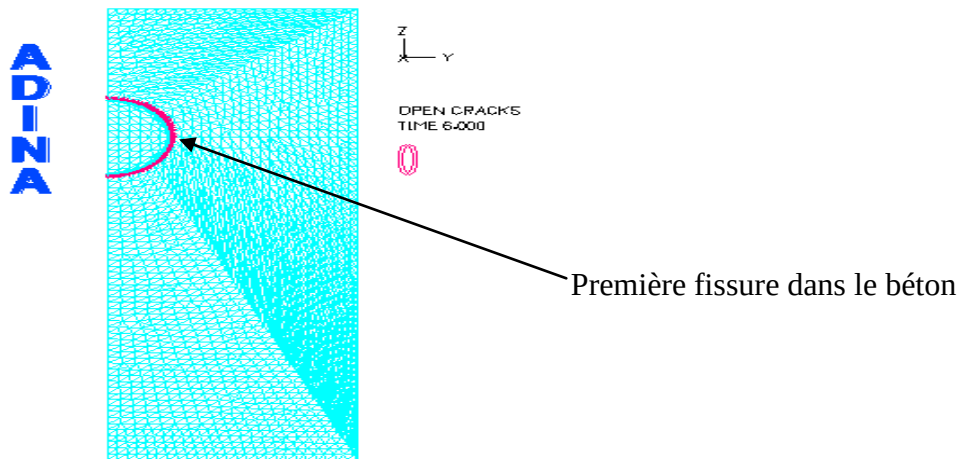


Figure III.11(a) Développement des premières fissures dans le béton à l'interface armature PRF/béton à $\Delta T_{cr} = 30^\circ\text{C}$ de la poutre prismatique en béton P.#25.30 ayant $f'_c = 90\text{MPa}$ et $c/d_b = 1,2$

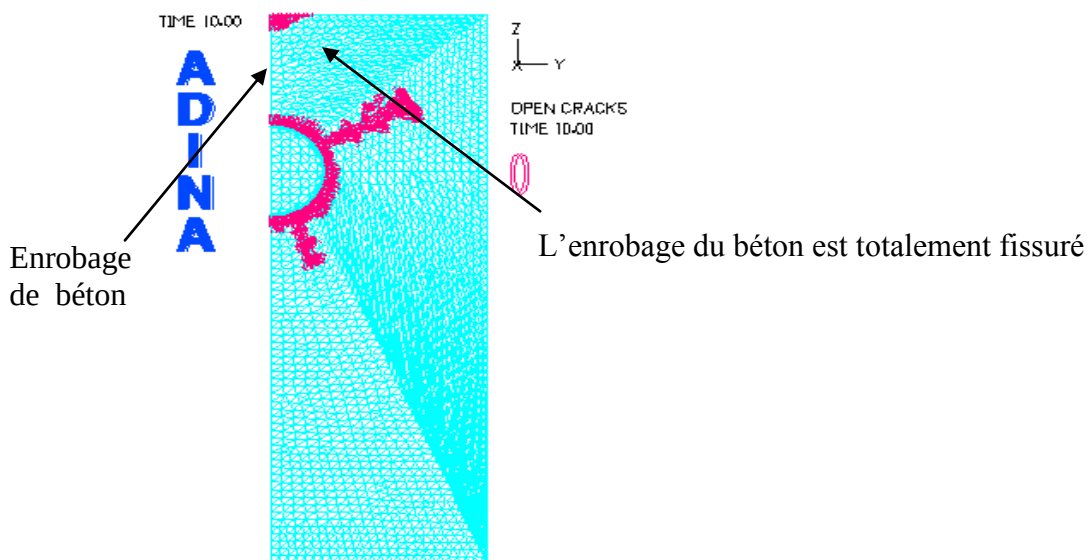


Figure III.11(b) Enrobage de béton entièrement fissuré à $\Delta T_{sp} = 50^\circ\text{C}$ de la poutre prismatique en béton P.#25.30 ayant $f'_c = 90\text{MPa}$ et $c/d_b = 1,2$

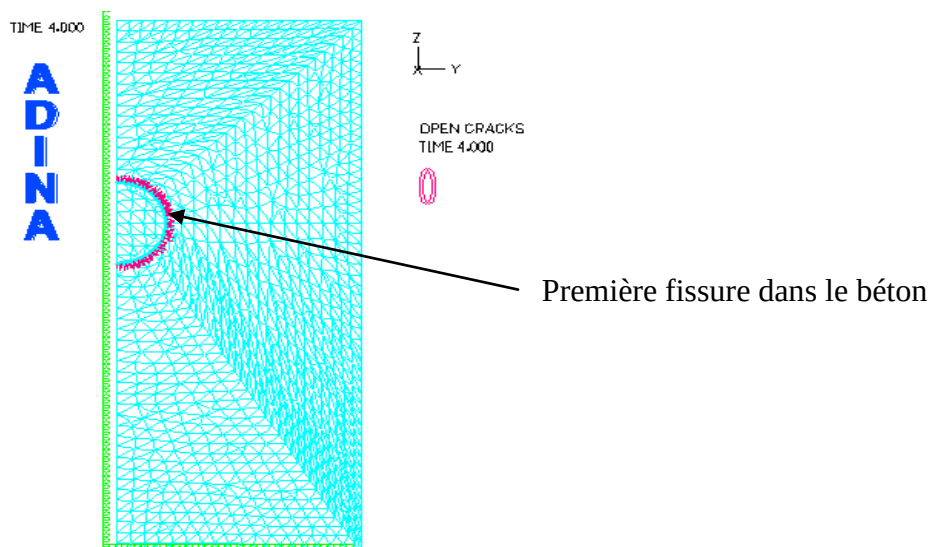


Figure III.12(a) Développement des premières fissures dans le béton à l'interface armature PRF/béton à $\Delta T_{cr} = 20^\circ\text{C}$ de la poutre prismatique en béton P.# 16.30 ayant $f'_c = 25\text{MPa}$ et $c/d_b = 1,9$

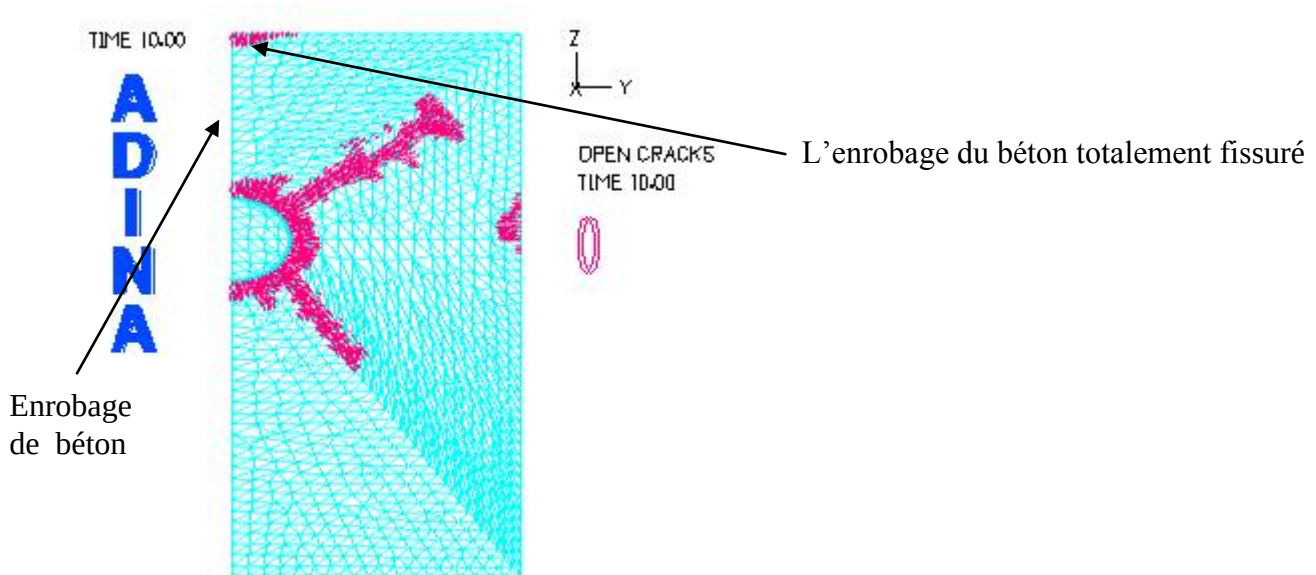


Figure III.12(b) Enrobage de béton totalement fissuré à $\Delta T_{sp} = 50\text{ }^{\circ}\text{C}$ de la poutre prismatique en béton P.# 16.30 ayant $f'_c = 25\text{MPa}$ et $c/d_b = 1,9$

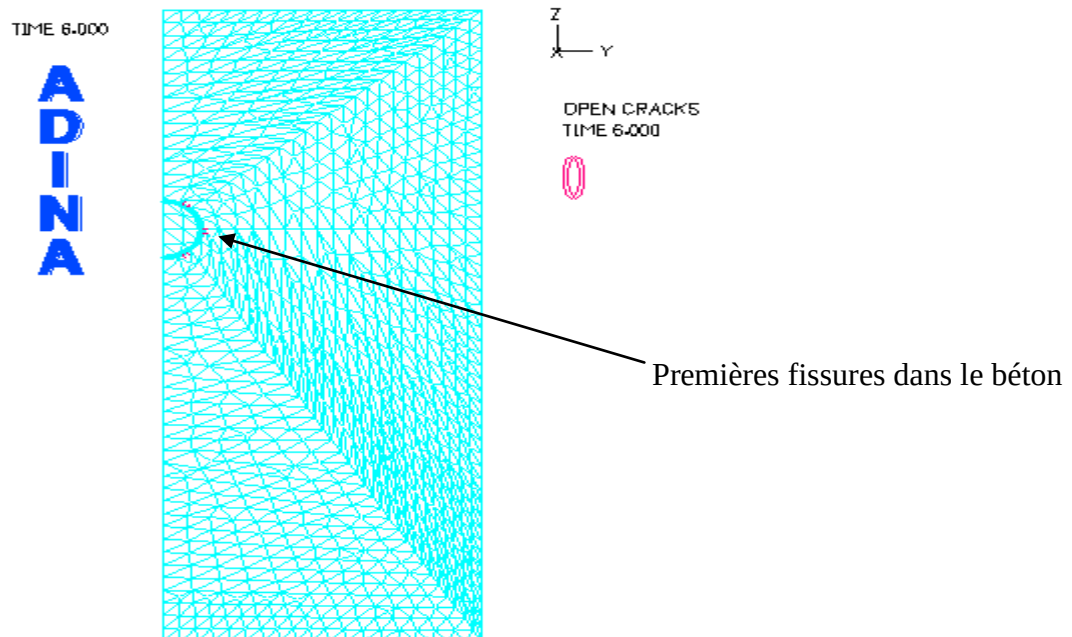


Figure III.13(a) Développement des premières fissures dans le béton à l'interface armature PRF/béton à $\Delta T_{cr} = 30\text{ }^{\circ}\text{C}$ de la poutre prismatique en béton P.# 16.30 ayant $f'_c = 90\text{MPa}$ et $c/d_b = 1,9$

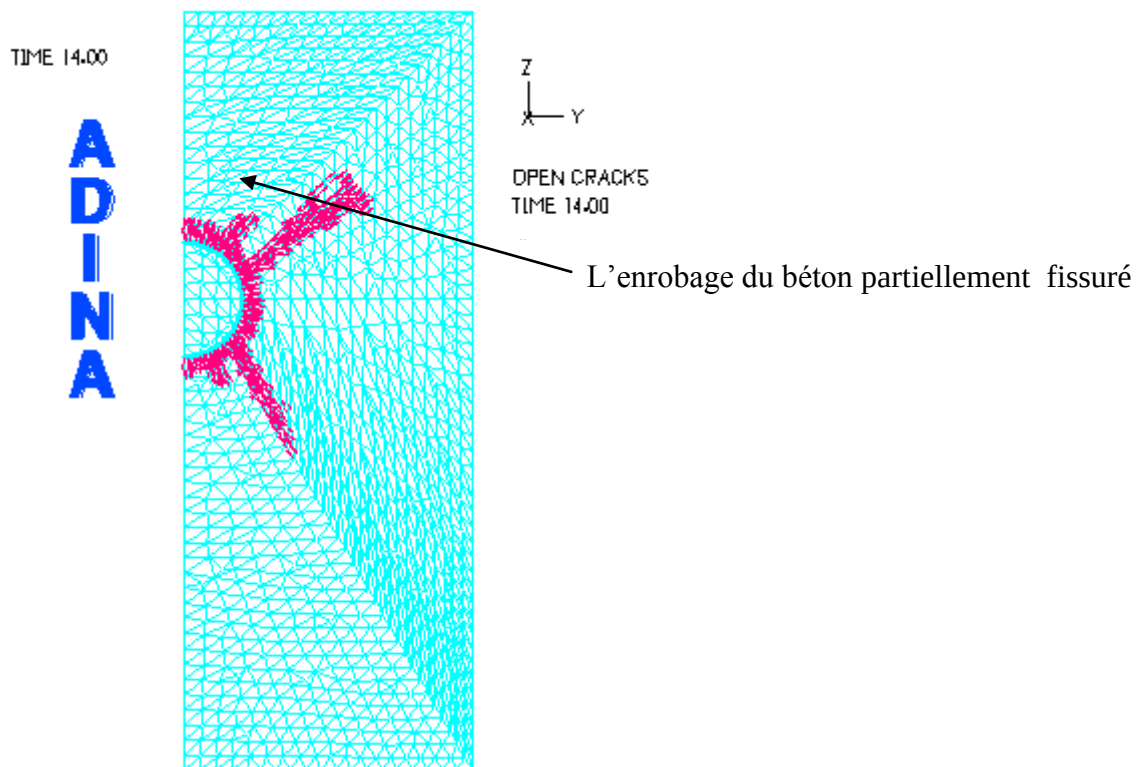


Figure III.13(b) Couronne en béton fissurée formée autour de la barre en PRF de la poutre prismatique en béton P.# 16.30 ayant $f'_c = 90\text{MPa}$ et $c/d_b = 1,9$ ($\Delta T_{sp} > 70^\circ\text{C}$)

III.8.1. Contraintes de traction:

Les figures III.14 et III.15 à III.22 montrent les courbes des contraintes de traction du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature/béton des poutres prismatiques en béton armé de barres en PRFV ayant des rapports de l'épaisseur d'enrobage du béton au diamètre de la barre en PRF (c/d_b) variant entre 1,0 et 3,2 correspondantes respectivement aux valeurs de classe de béton variant de 25 à 90 MPa, sous chargement thermique allant jusqu'à 70°C. On remarque que la première fissure est produite dans le béton à l'interface armature/béton lorsque la contrainte de traction circonférentielle du béton atteint la résistance à la traction du béton (f_{ct}) et ceci pour différentes classes de béton utilisées. De la figure III.15 on remarque que les courbes des contraintes de traction augmentent linéairement jusqu'aux valeurs de variation de températures ΔT_{cr} de 20°C, 25°C et 30°C correspondant respectivement aux valeurs de classes de béton de 25 MPa, (30 à 40MPa), (45 à 60MPa), (65 à 85MPa) et 90MPa pour des poutres de rapport $c/d_b = 1$. À partir de ces valeurs de ΔT_{cr} les contraintes de traction (stress22) dans le béton diminuent à cause de l'apparition des premières fissures dans le béton à l'interface armature/béton, due au dépassement de la résistance à la traction du béton (f_{ct}) pour chaque classe de béton. On remarque aussi que la variation de températures ΔT_{cr} produisant les premières fissures dans le béton augmente avec l'augmentation de la classe de béton (résistance à la compression f_{c28}). De plus, l'enrobage de béton des poutres de rapport $c/d_b = 1$ est totalement fissuré.

Les valeurs de variation de températures (ΔT_{cr}) produisant les premières fissures dans le béton à l'interface armature/béton en fonction de la classe de béton (résistance à la compression) pour un rapport d'épaisseur d'enrobage au diamètre de la barre PRF (c/d_b) égale à 1, sont reportées au Tableau III.7.

Tableau III.7. La variation de température critique (ΔT_{cr}) en fonction de la résistance à la compression (f_{c28})

f_{c28} [MPa]	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
ΔT_{cr} [°C]	20	20	20	20	20	20	20	25	25	25	25	25	30	30

De ce tableau on peut observer que l'augmentation de la classe de béton de 25 jusqu'à 60 MPa, de 60 à 85MPa, améliore la température critique de fissuration de 20%. En outre l'augmentation de la classe de béton de 25 à 90MPa engendre une croissance ΔT_{cr} de 50%.

On peut noter encore que l'évolution de la température de fissuration est faible et quasiment nulle pour les intervalles de classe de béton [25 ; 55MPa], [60 ; 80MPa] et [85 ; 90MPa].

En général, les mêmes remarques peuvent être notées pour des poutres ayant des rapports c/d_b variant de 1,2 à 3,2 (figures III.16 à III.25). Il est à souligner que la charge thermique produisant les premières

fissures dans le béton à l'interface armature/béton augmente en général avec l'augmentation du rapport c/d_b pour des mêmes classes de béton assez élevées comme le montre les figures III.15 à III.22.

À titre indicatif, la figure III.14 prouve qu'un rapport c/d_b passant de 1 à 3,2 la charge thermique ΔT_{cr} augmente de 25 % environ pour la classe de béton de 45 MPa et aussi de 90 MPa.

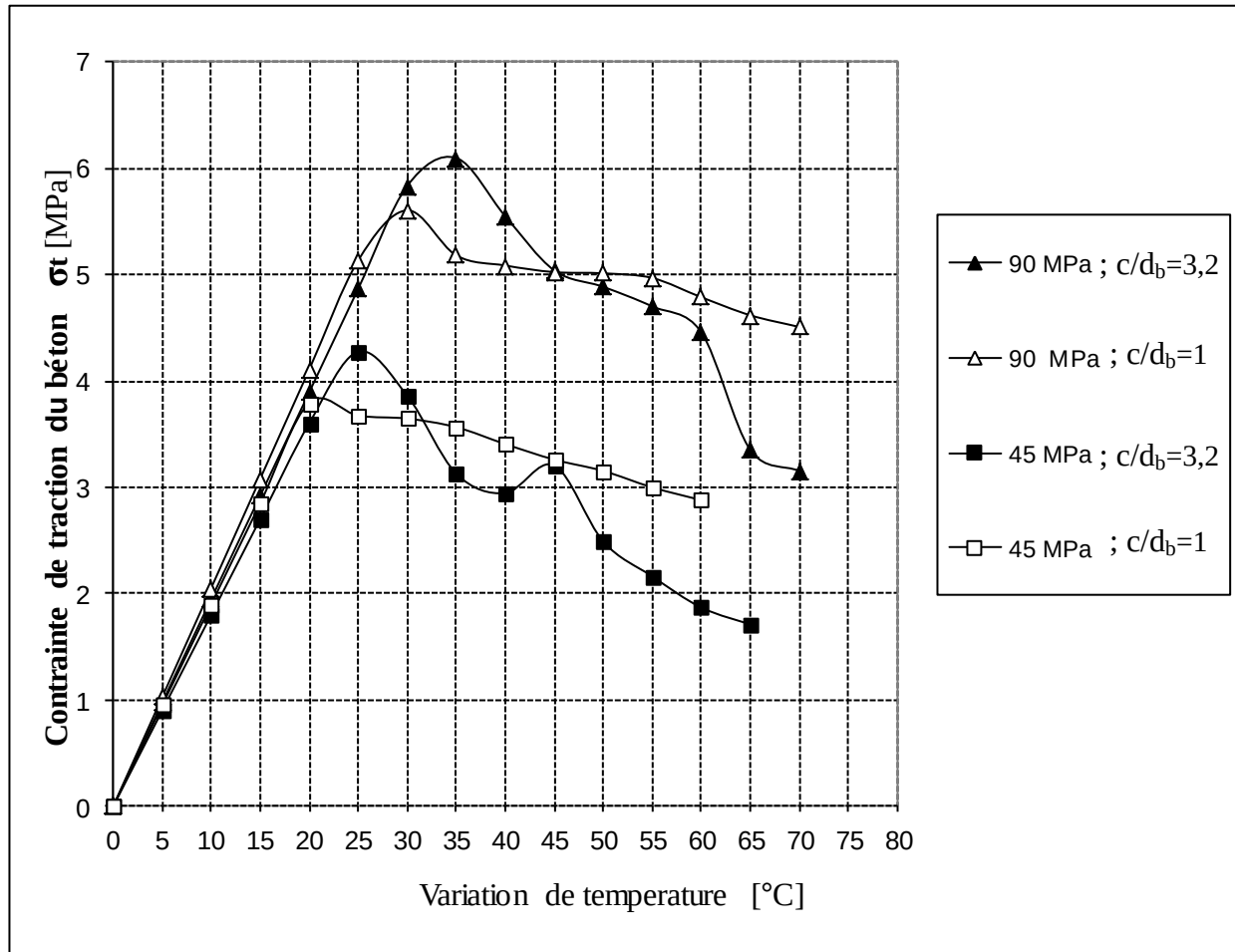


Figure III.14. Contrainte de traction transversale du béton de classes 45 et 90MPa en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b= 1$ et $c/d_b= 3,2$ (Comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton)

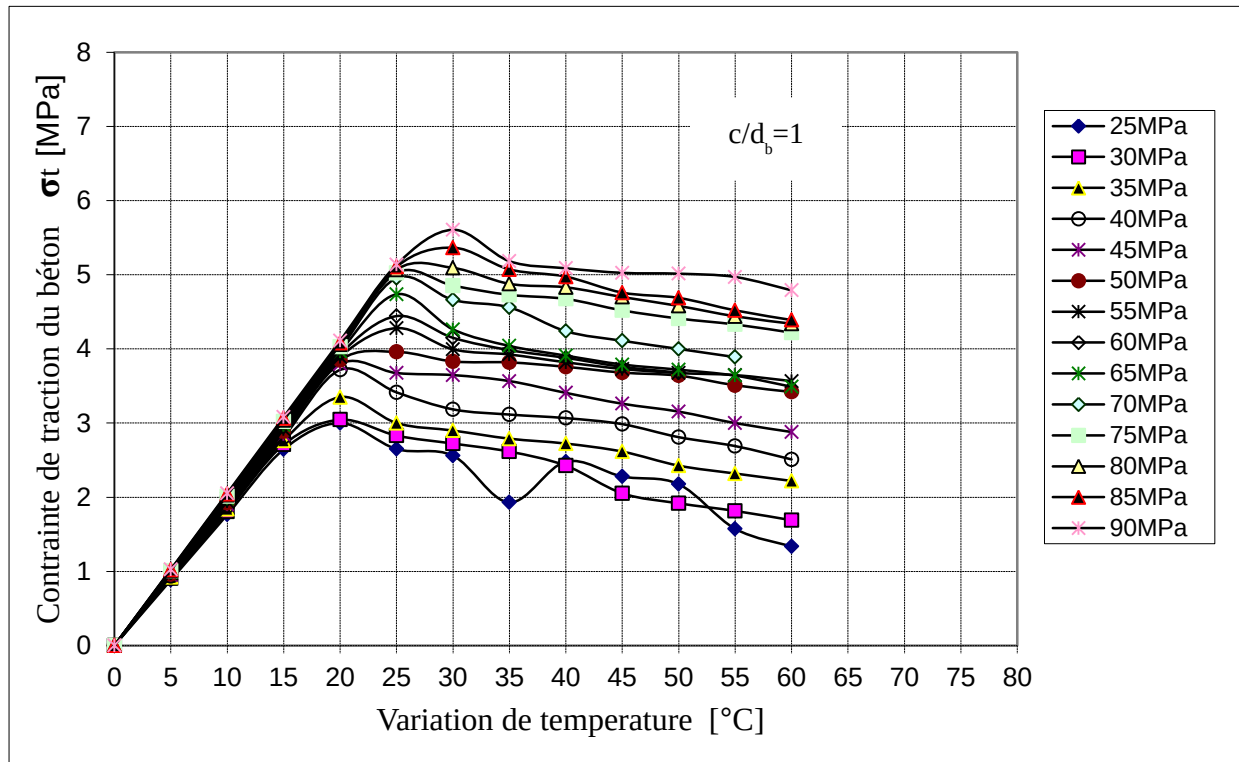


Figure III.15. Contrainte de traction transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b=1$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#25.25)

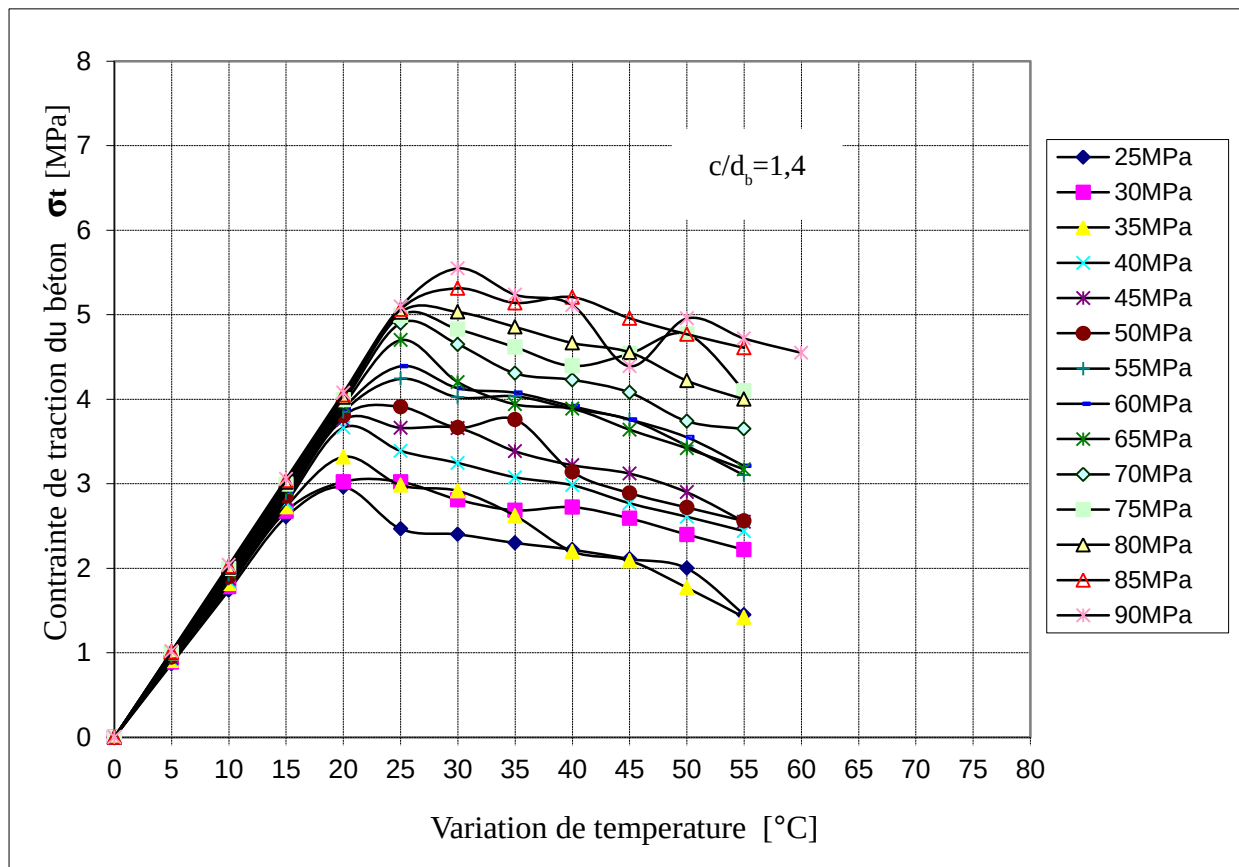


Figure III.16. Contrainte de traction transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b= 1,4$ pour différentes classes de béton (comportement non Linéaire de la poutre prismatique en béton P.#25.35)

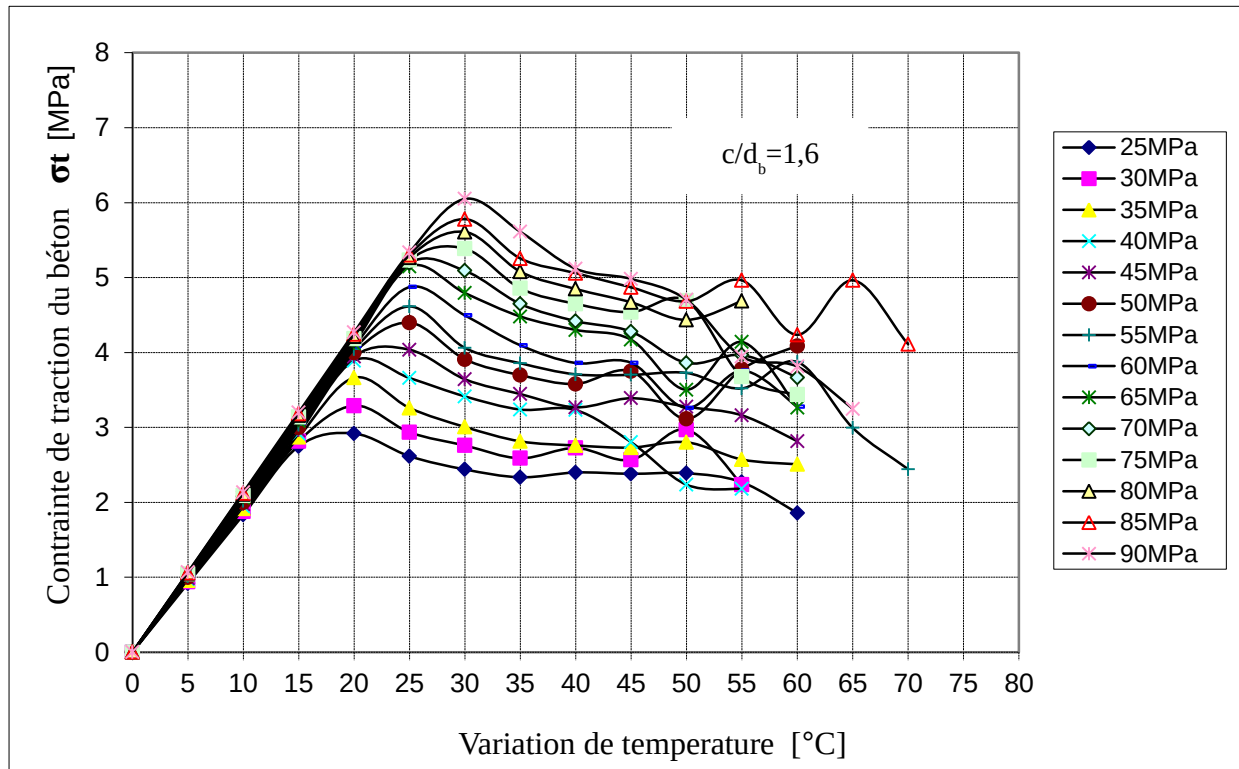


Figure III.17. Contrainte de traction transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b = 1,6$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#13.20)

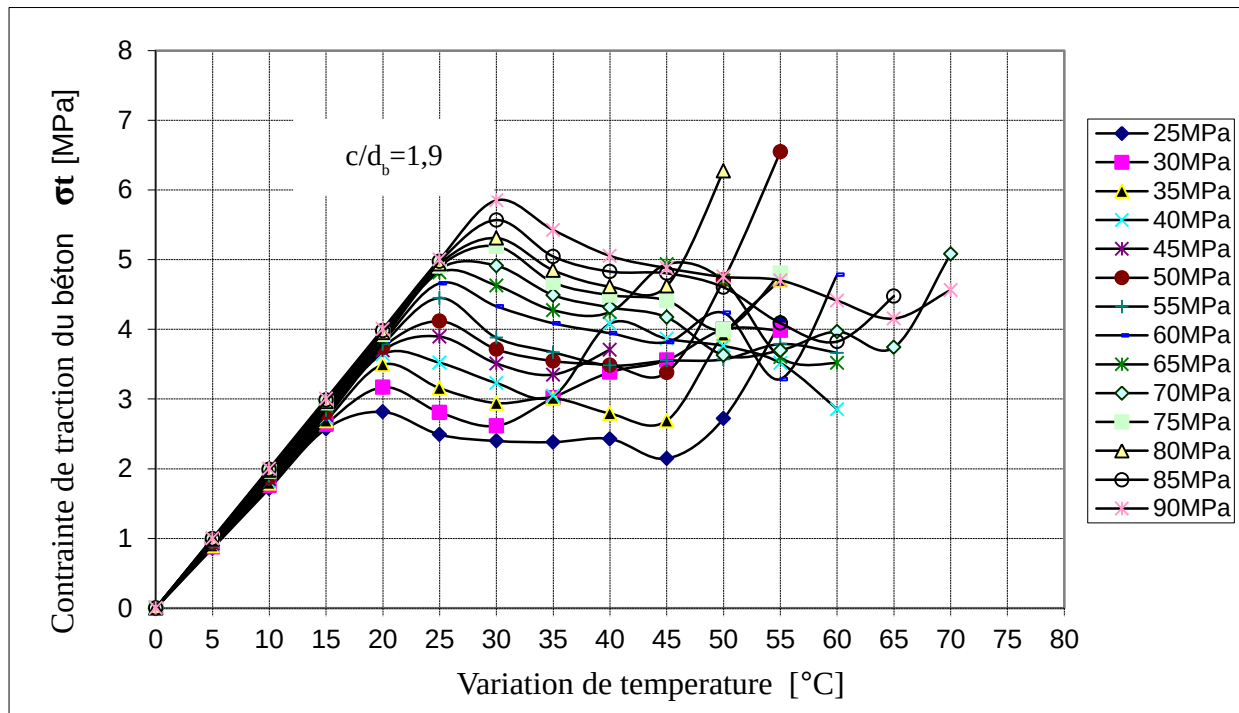


Figure III.18. Contrainte de traction transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b = 1,9$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#16.30)

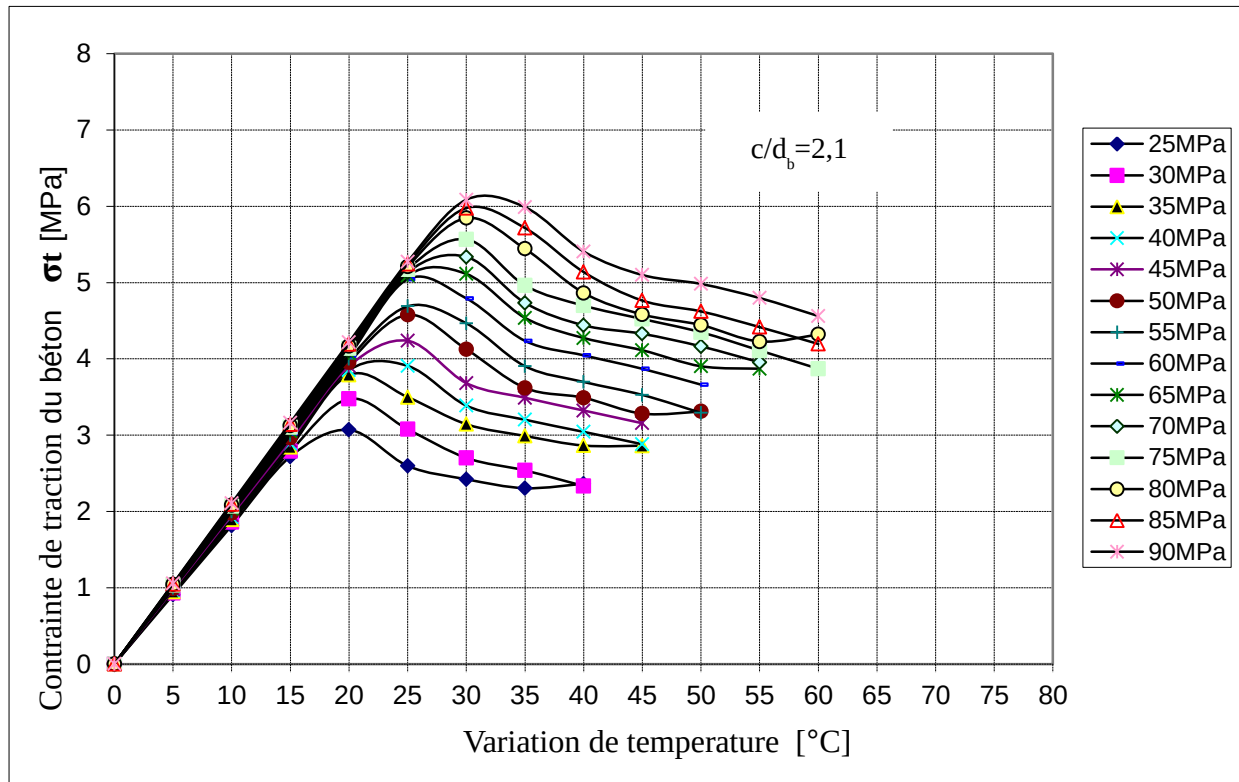


Figure III.19. Contrainte de traction transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b = 2,1$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#10.20)

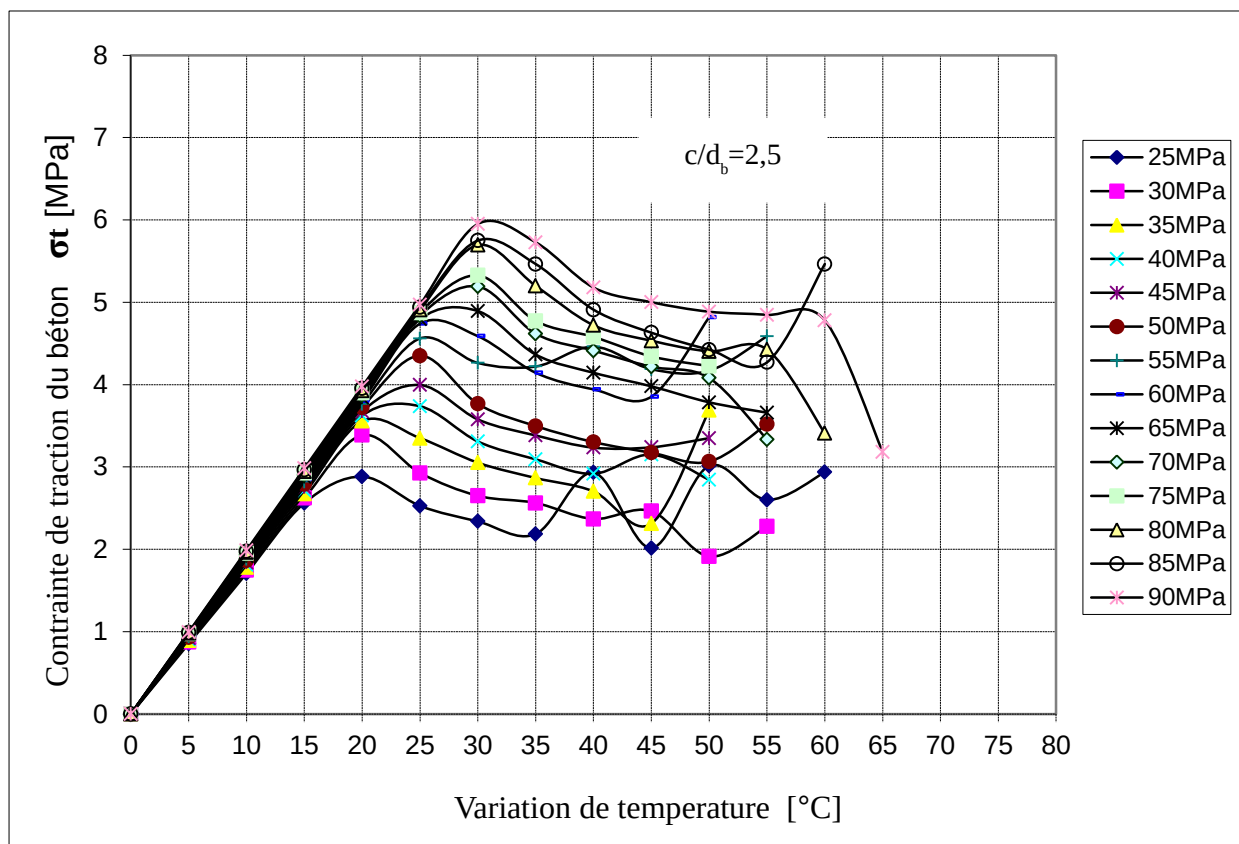


Figure III.20. Contrainte de traction transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b = 2,5$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#13.30)

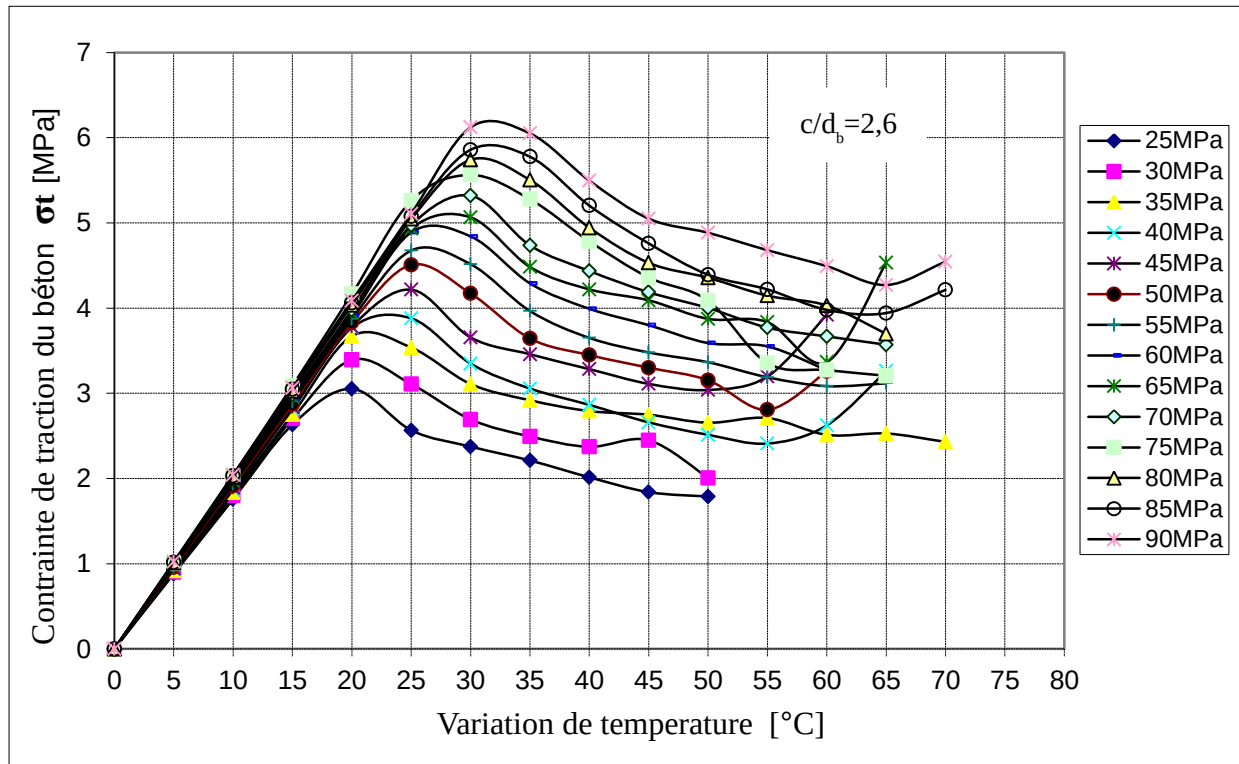


Figure III.21. Contrainte de traction transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b = 2,6$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#10.25)

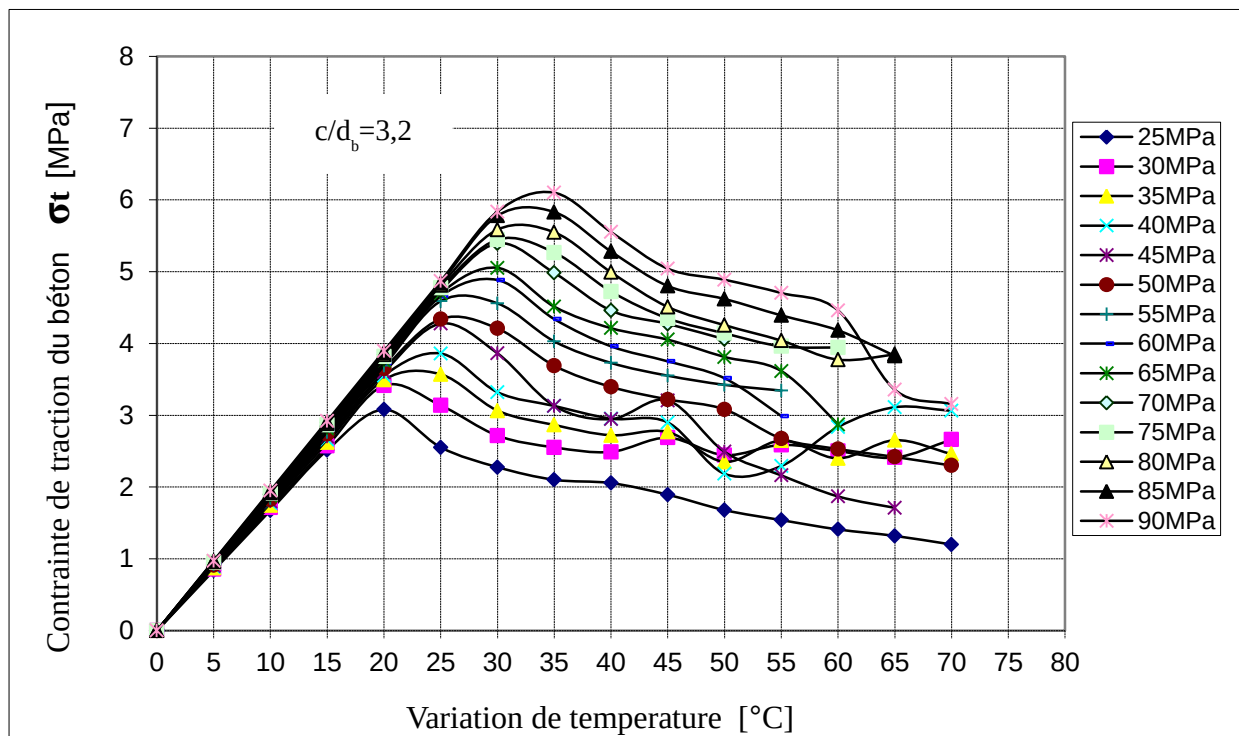


Figure III.22. Contrainte de traction transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b = 3,2$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#10.30)

III.8.2. Contraintes de compression radiale du béton:

Les figures III.24 à III.30 montrent les courbes de variation des contraintes de compression radiale dans le béton en fonction de la variation de température et la classe de béton à l'interface armature/béton des poutres prismatiques en béton armé de barres en PRFV pour des rapports de l'épaisseur d'enrobage du béton au diamètre de la barre en PRF c/d_b variant entre 1,0 à 3,2. On constate que les courbes de contraintes de compression sont linéaires jusqu'aux valeurs de ΔT_{cr} à partir desquelles les courbes changent leurs allures et deviennent non linéaires à cause de la formation des fissures dans le béton à l'interface. De plus, on remarque que la contrainte de compression radiale augmente avec l'augmentation de la classe de béton et le rapport c/d_b , et que la charge thermique ΔT_{cr} produisant les premières fissures à l'interface armature/béton augmente généralement avec l'accroissement de la classe de béton et le rapport c/d_b . À titre indicatif, pour un rapport $c/d_b=1$, les charges thermiques ΔT_{cr} , produisant les premières fissures dans le béton à l'interface armature/béton sont de 20°C et 30°C correspondant respectivement aux classes de béton de 25MPa et 90MPa. Il est à noter que les contraintes de compression sont maximales à l'interface armature/béton et diminuent ensuite à travers l'enrobage du béton jusqu'à leurs valeurs minimales au niveau de la surface externe de la poutre prismatique en béton (figure III.23). Aussi, il est à souligner que lorsque le rapport c/d_b augmente, la valeur de la profondeur critique de la fissuration diminue. Ce qui peut être expliqué par le fait que les contraintes de compression radiale et mêmes de traction circonférentielle dans le béton diminuent lorsque le rapport c/d_b augmente. Même remarque peut être aussi signalée pour l'effet de la résistance mécanique de béton.

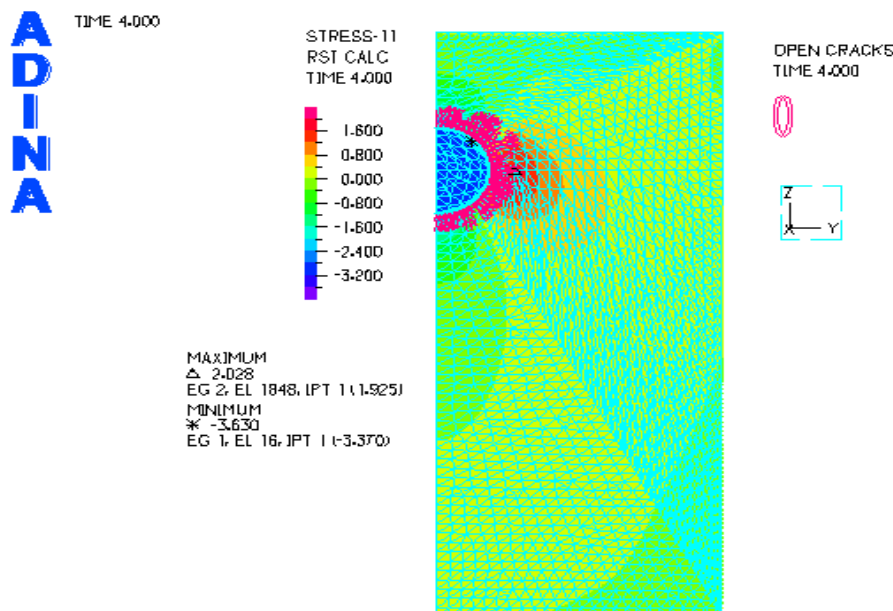


Figure III.23. Distribution typique des contraintes de compression radiale du béton (stress11) obtenues par ADINA (poutre P.#19.20 ayant $c/d_b= 1,0$)

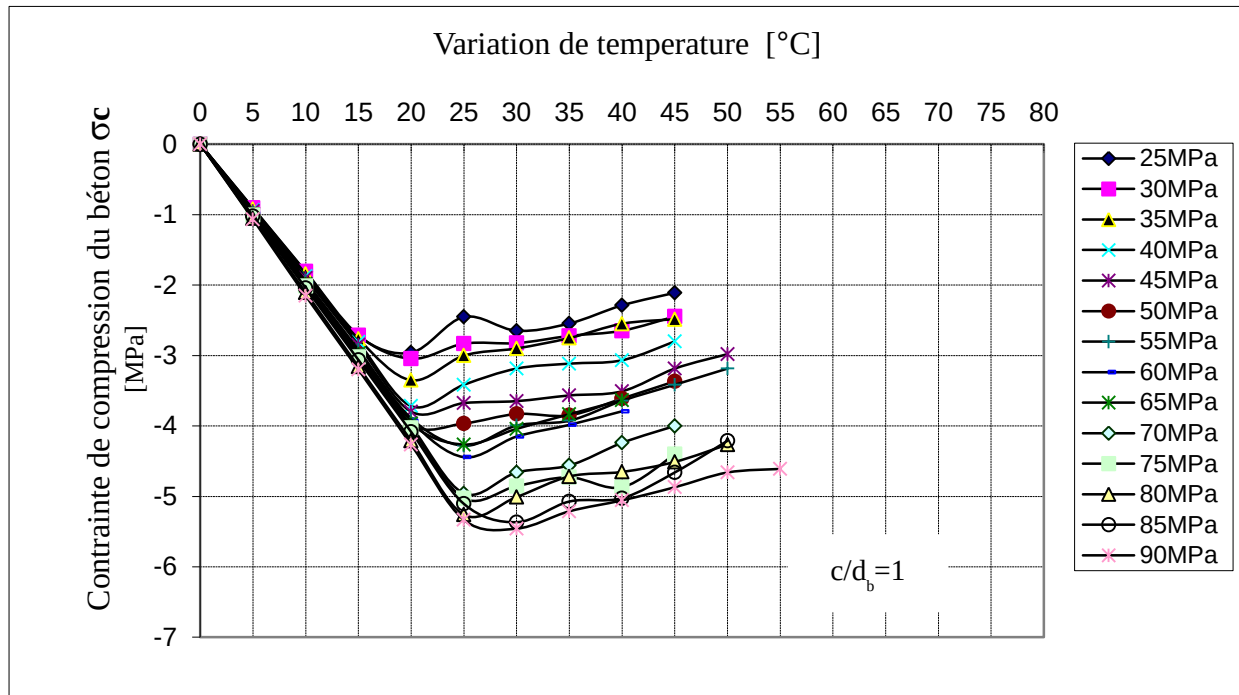


Figure III.24. Contrainte de compression radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b=1$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#25.25)

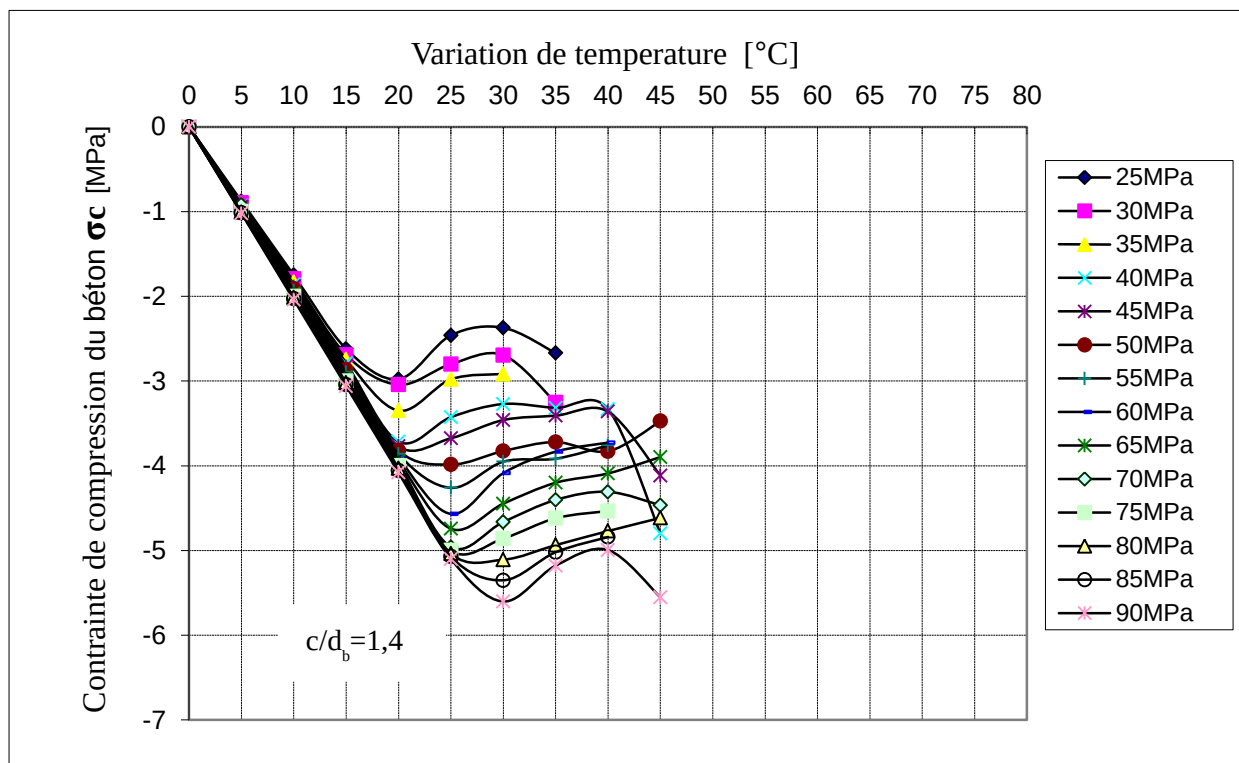


Figure III.25. Contrainte de compression radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b=1,4$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#25.35)

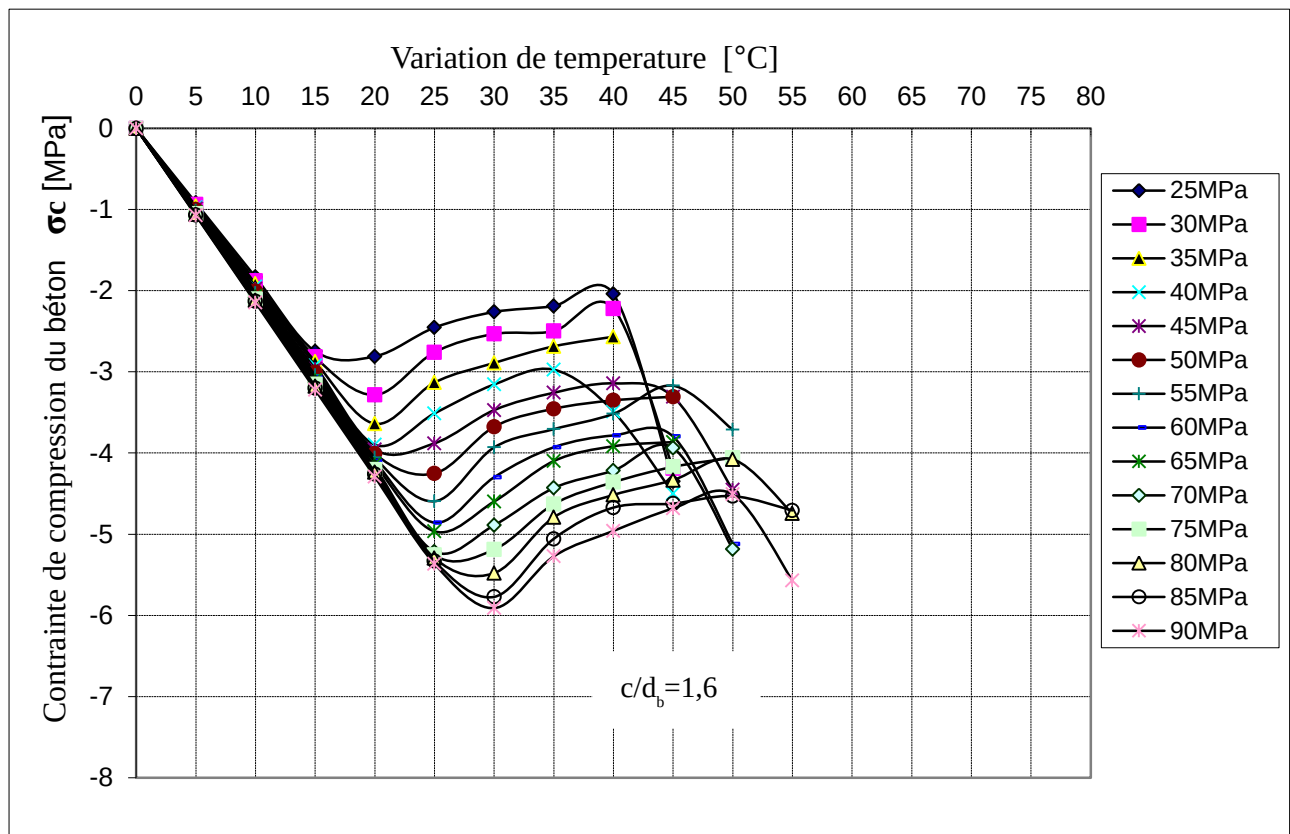


Figure III.26. Contrainte de compression radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b = 1,6$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#13.20)

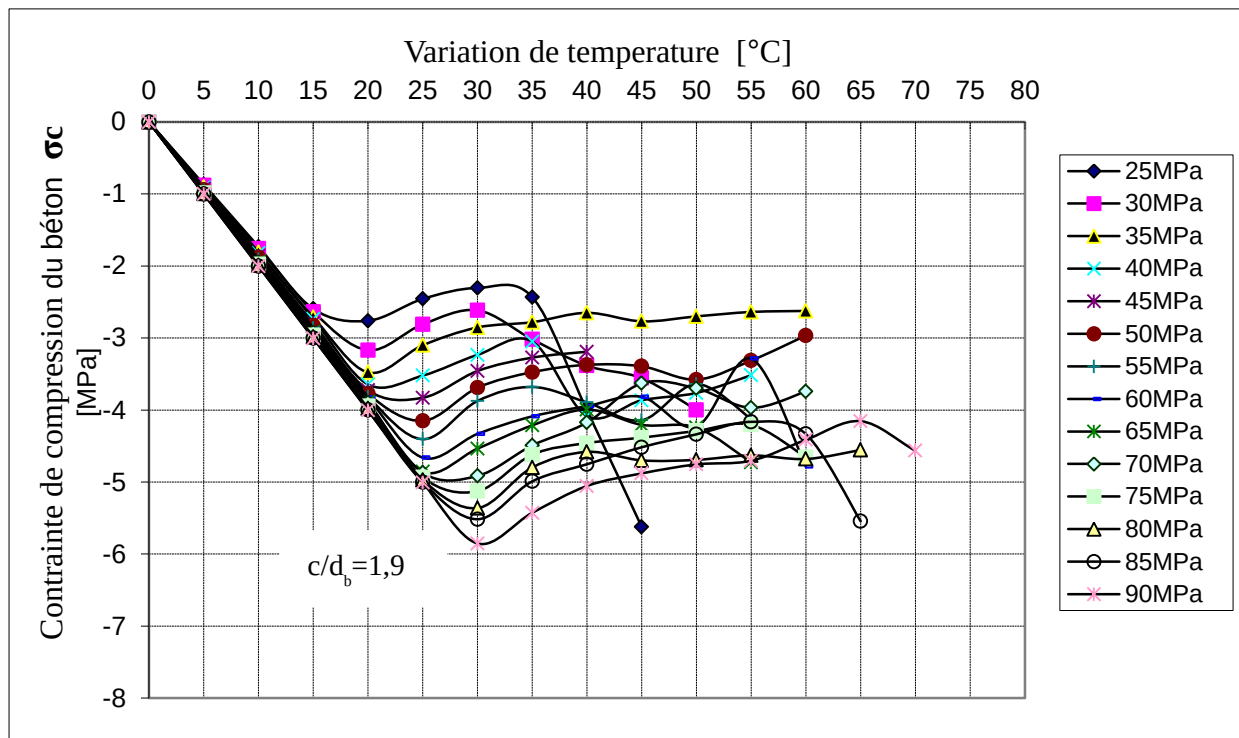


Figure III.27. Contrainte de compression radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b = 1,9$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#16.30)

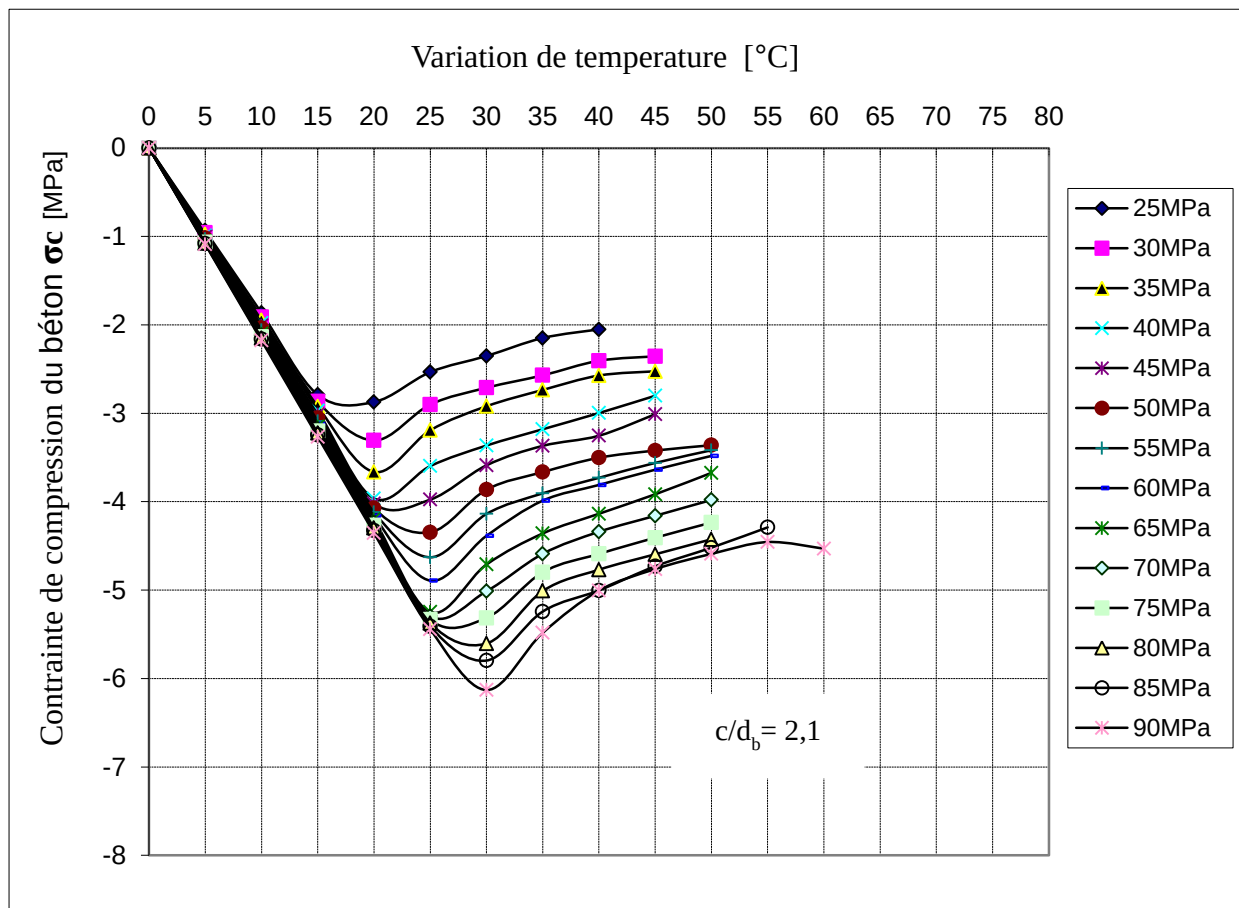


Figure III.28. Contrainte de compression radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b = 2,1$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#10.20)

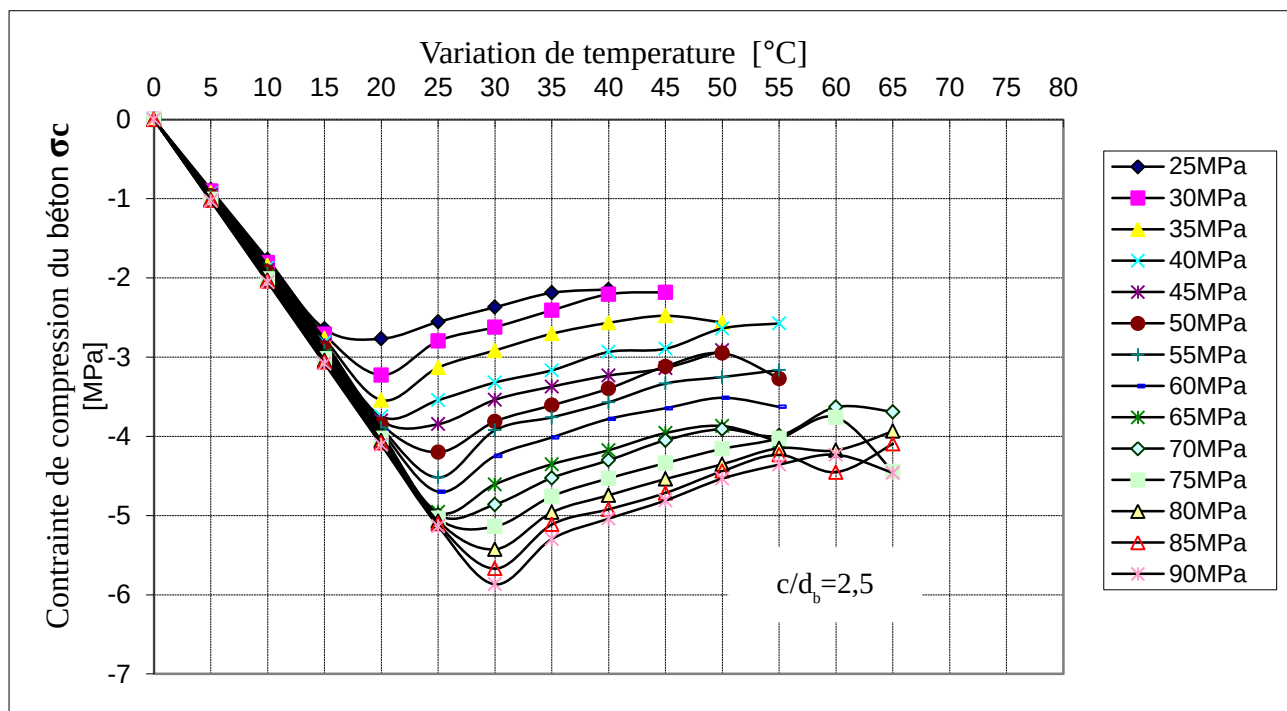


Figure III.29. Contrainte de compression radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b = 2,5$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#13.30)

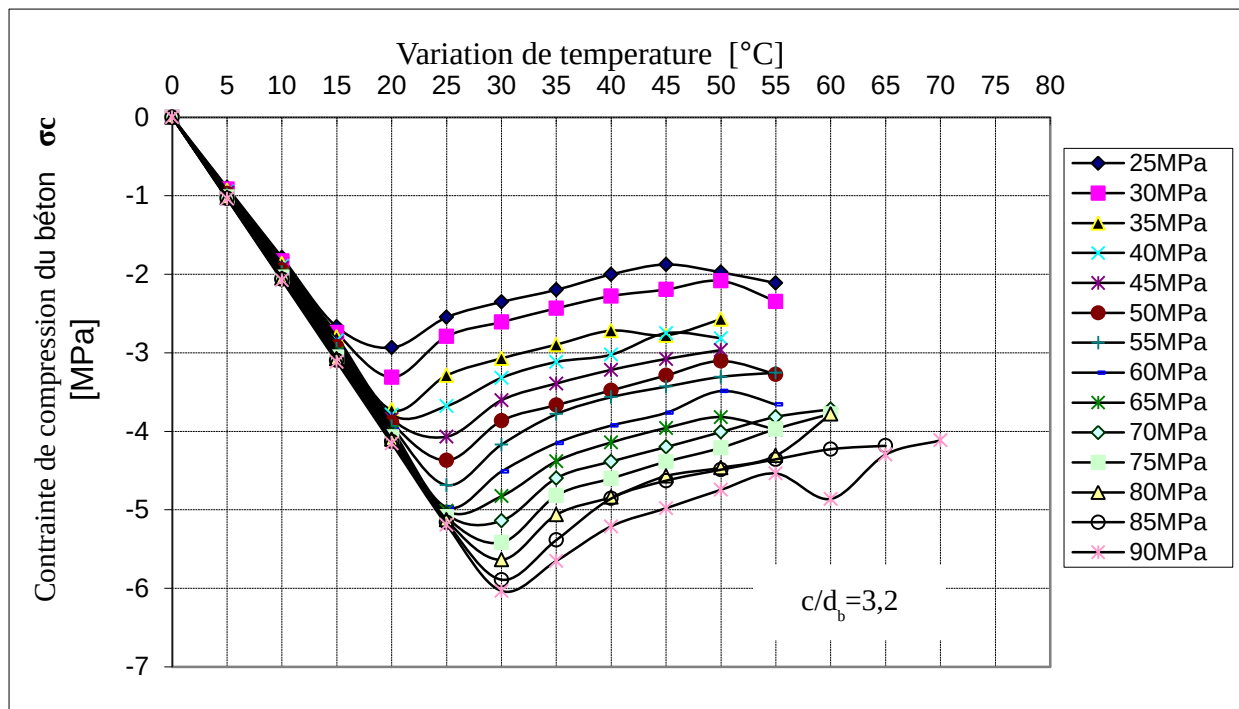


Figure III.30. Contrainte de compression radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b = 3,2$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#10.30)

III.8.3. Effet du rapport d'enrobage du béton au diamètre des barres (c/d_b):

Les figures III.31 et III.32 présentent les contraintes de traction circonférentielle du béton de classes 25 et 90 MPa en fonction de la distance ρ mesurée à partir du centre de gravité de la barre en PRFV jusqu'à la surface externe de l'enrobage de béton, à de variation de température de 20°C et 40°C , respectivement et pour une épaisseur d'enrobage de béton de 20 mm pour différents diamètres de barres en PRFV. On remarque que la contrainte de traction du béton est maximale à l'interface armature/béton puis diminue à travers l'enrobage du béton jusqu'à sa valeur minimale au niveau de la surface externe de la poutre prismatique en béton. On remarque encore que la contrainte de traction du béton diminue avec l'augmentation du rapport de l'épaisseur d'enrobage du béton au diamètre de la barre en PRF (c/d_b), elle est moins importante pour des rapports (c/d_b) supérieurs à 2.

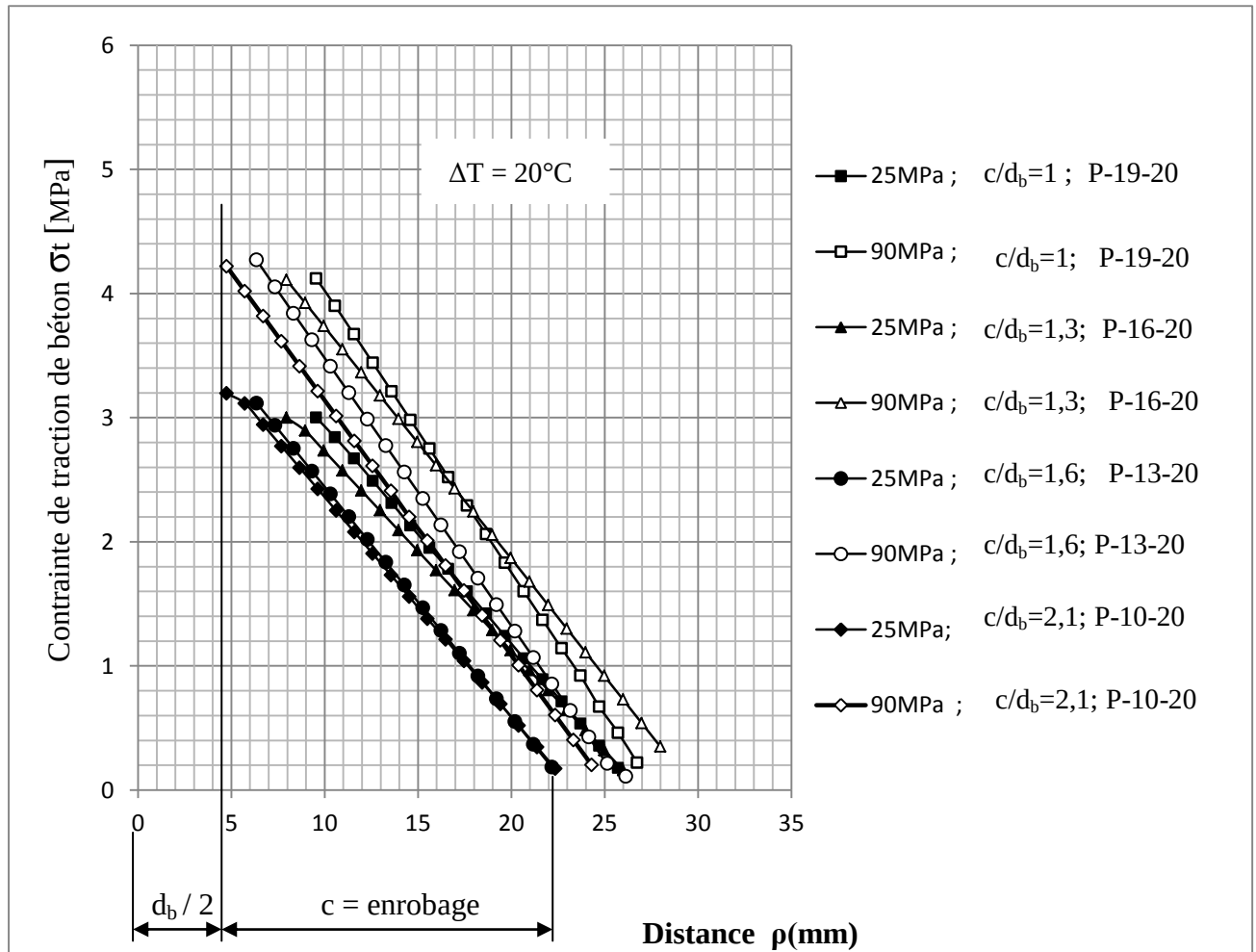


Figure III.31. Contraite de traction du béton de classes 25 et 90MPa en fonction de la distance ρ (mesurée à partir du cdg de la barre en PRFV) pour des poutres d'enrobage de béton de 20 mm et sous variation de température de 20°C .

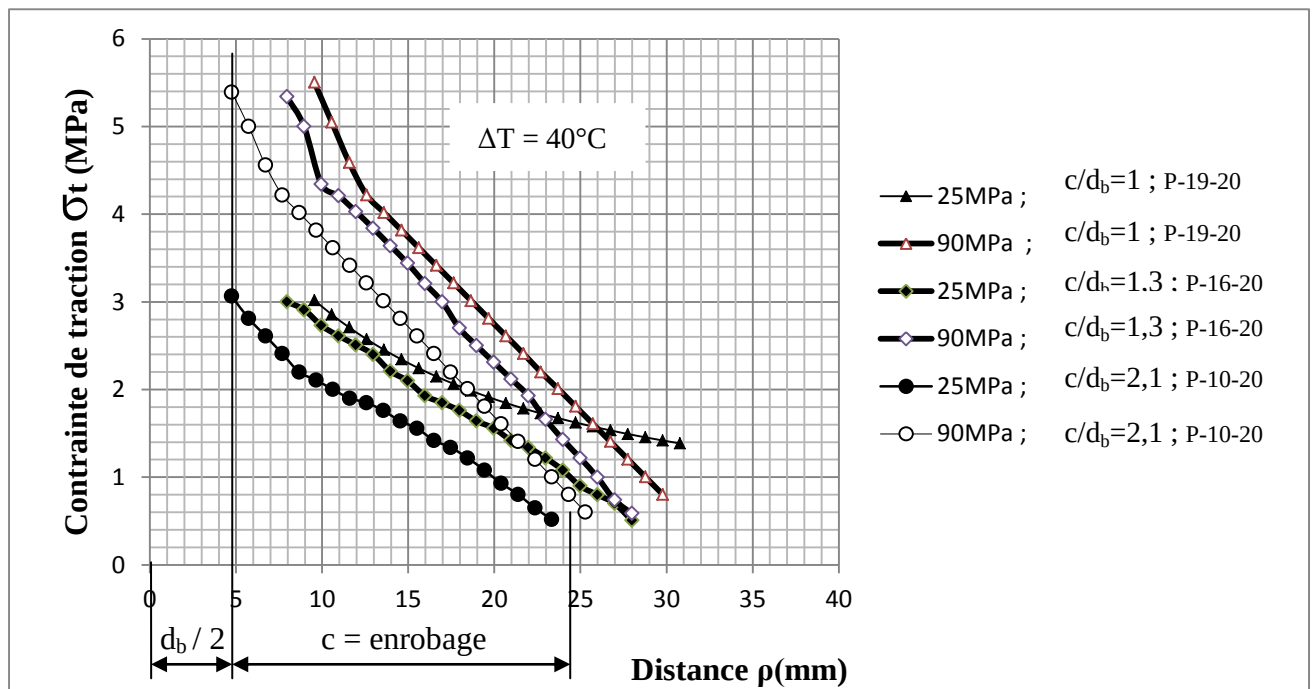


Figure III.32. Contrainte de traction du béton de classes 25 et 90MPa en fonction de la distance ρ (mesurée à partir du cdg de la barre en PRFV) pour des poutres d'enrobage de béton de 20 mm et sous variation de température de 40°C.

III.8.4. Déformations thermiques :

Les figures III.33 à III.43 présentent les courbes de déformations transversales en fonction de la variation de température et la classe de béton, à l'interface de la barre en PRF/béton des poutres en béton armé de barres en PRFV de rapport d'épaisseur d'enrobage de béton au diamètre de barre en PRF (c/d_b) variant de 1,0 à 3,2. Ces figures montrent que les courbes de déformation sont linéaires jusqu'à ce que les charges thermiques (ΔT) atteignent leurs valeurs de fissuration (ΔT_{cr}) à partir desquelles les courbes de déformations deviennent non linéaires et exhibent des valeurs assez importantes à cause de la formation de couronne de fissures dans le béton entourant la barre en PRF. Aussi, on remarque que l'effet de la classe de béton sur les déformations thermique transversale est relativement faible pour des charges thermiques inférieures à ΔT_{cr} comme le montre la Figure III.33. Cependant, pour des charges thermiques supérieures à ΔT_{cr} les déformations transversales diminuent avec l'augmentation de la classe de béton à cause de l'accroissement de la rigidité de la poutre en béton.

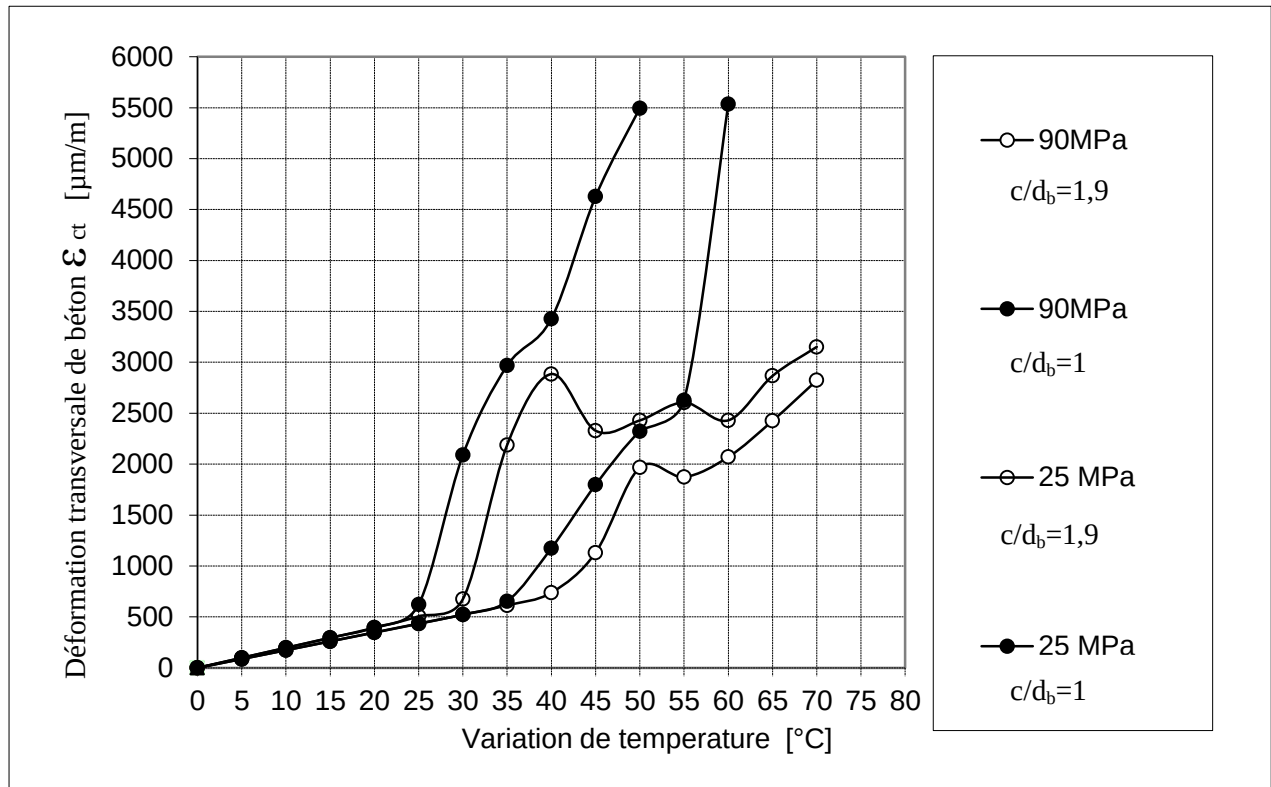


Figure III.33. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton des poutres ayant $c/d_b = 1$ et $c/d_b = 1,9$ pour des classes de béton $f_c' = 25\text{MPa}$ et 90MPa (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton)

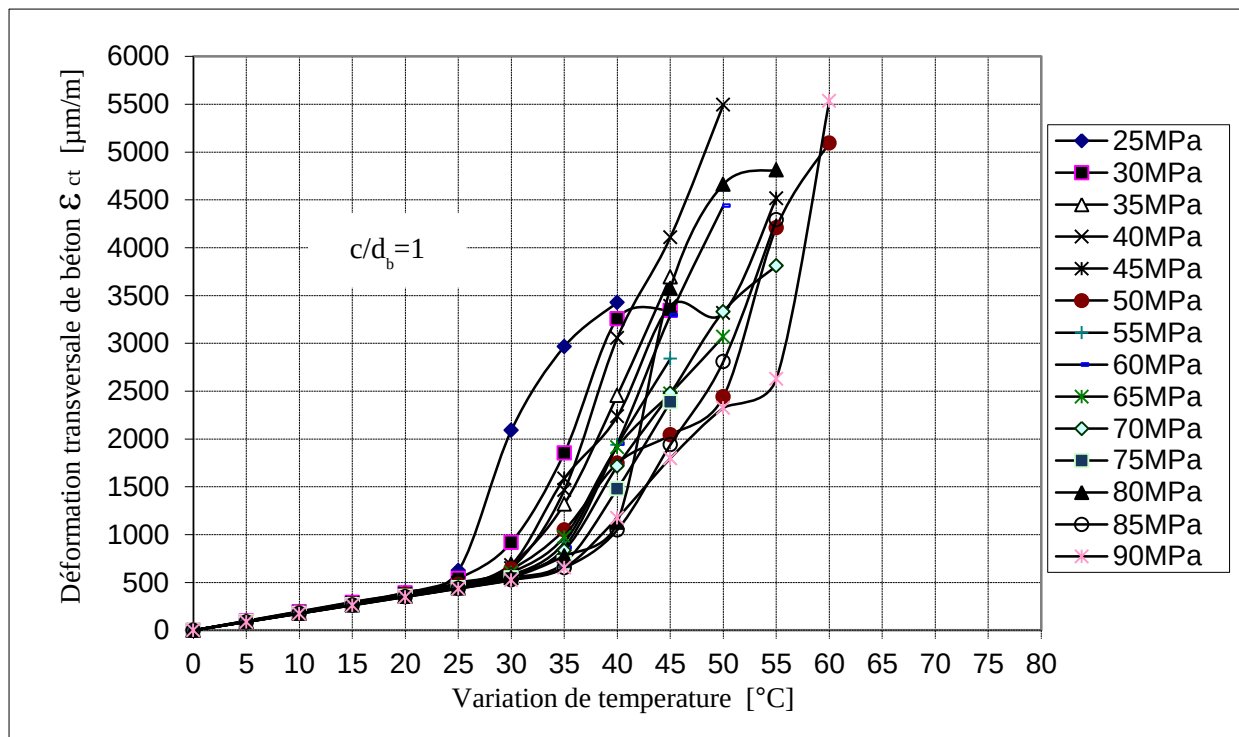


Figure III.34. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton des poutres ayant $c/d_b = 1,0$ pour différentes classes de béton (poutre P.#25.25)

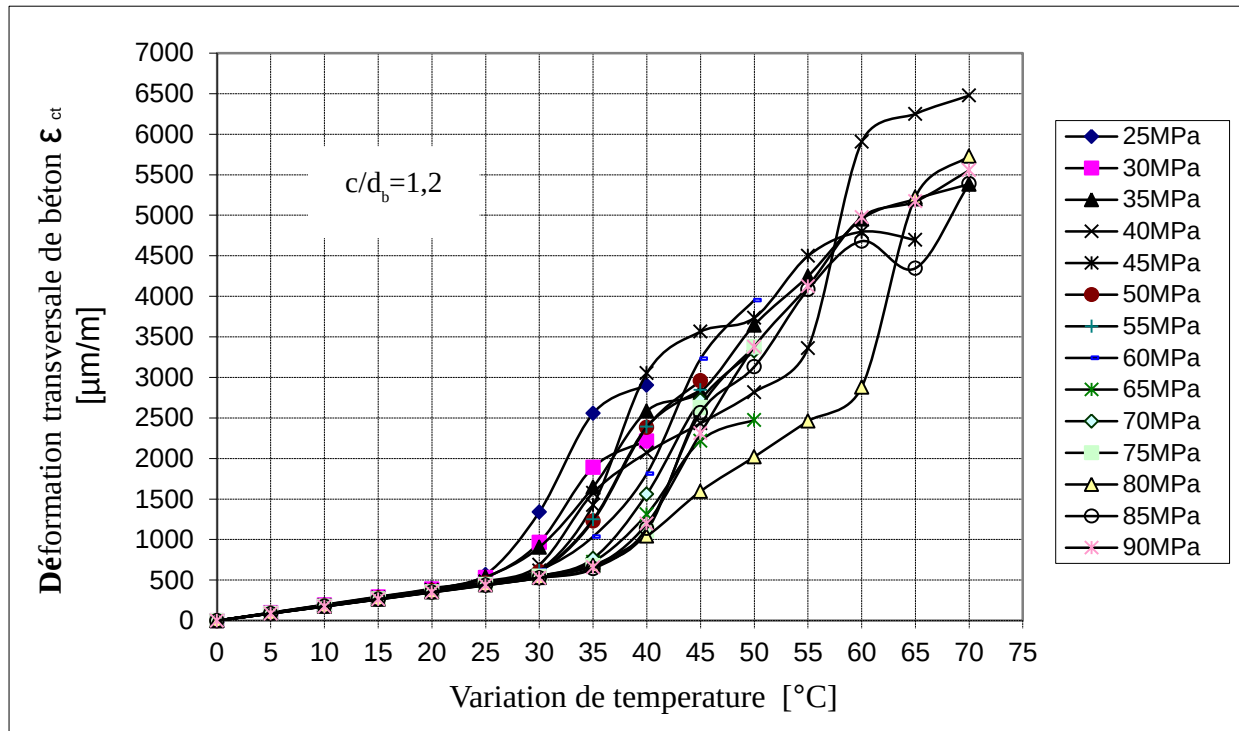


Figure III.35. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton des poutres ayant $c/d_b = 1,2$ pour différentes classes de béton (poutre P.#25.30)

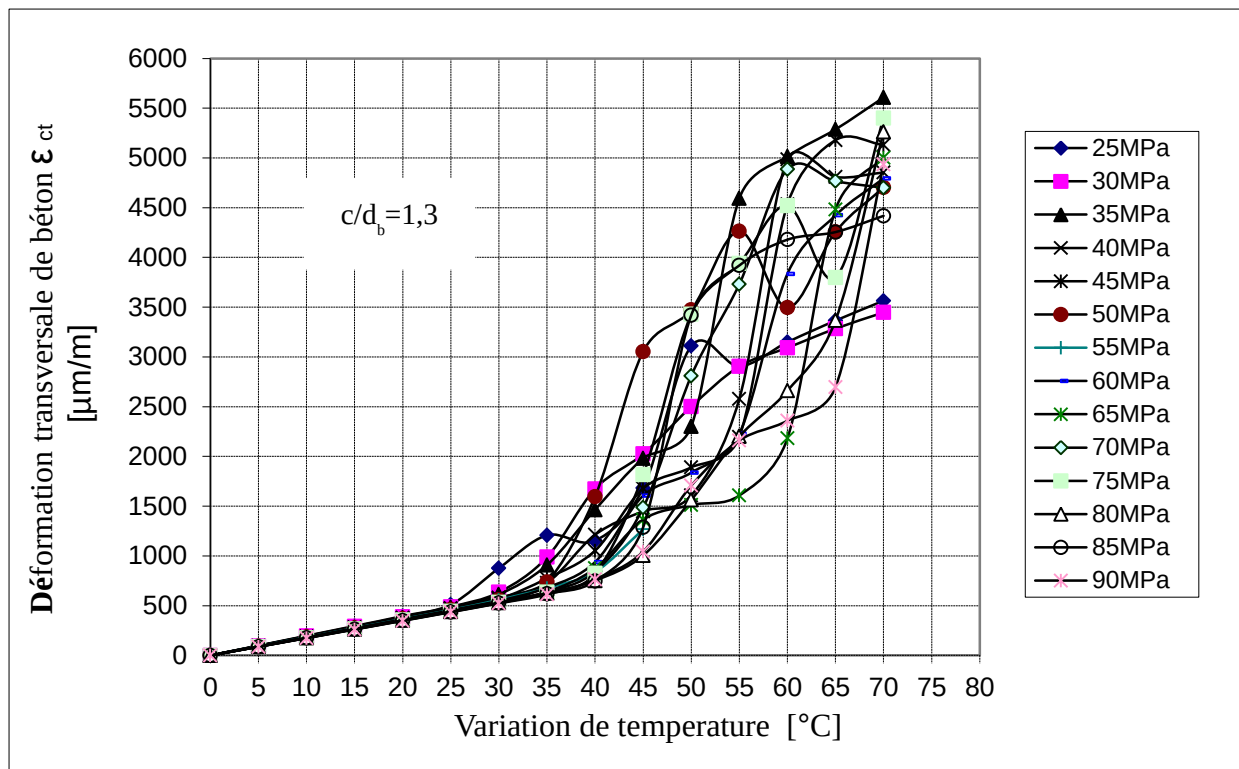


Figure III.36. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton des poutres ayant $c/d_b = 1,3$ pour différentes classes de béton (poutre P.#16.20)

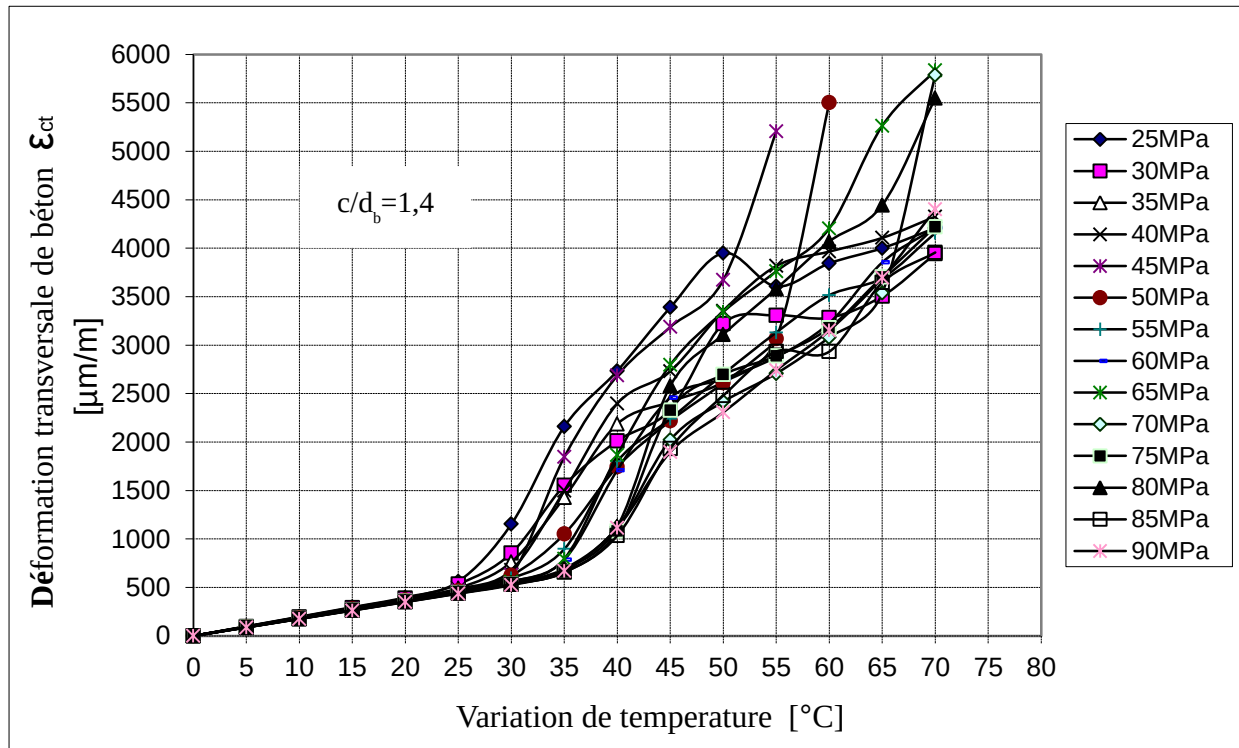


Figure III.37. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton des poutres ayant $c/d_b = 1,4$ pour différentes classes de béton (poutre P.#25.35)

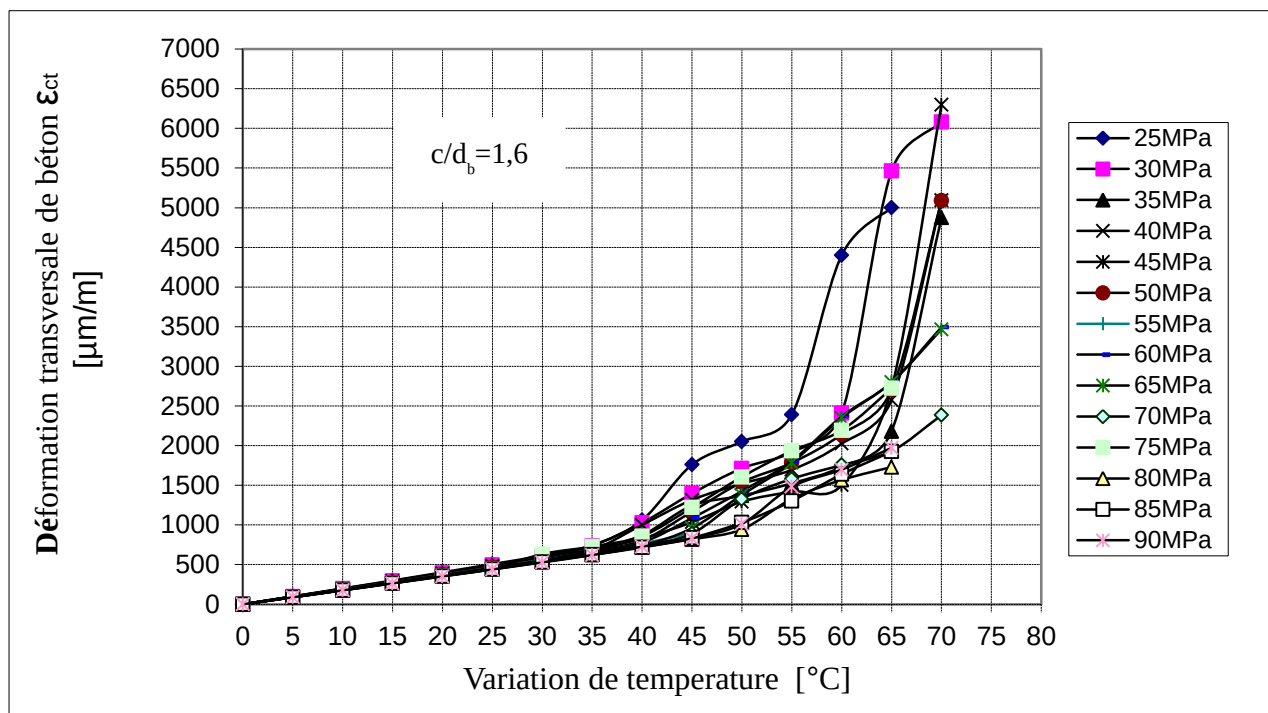


Figure III.38. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton des poutres ayant $c/d_b = 1,6$ pour différentes classes de béton (poutre P.#13.20)

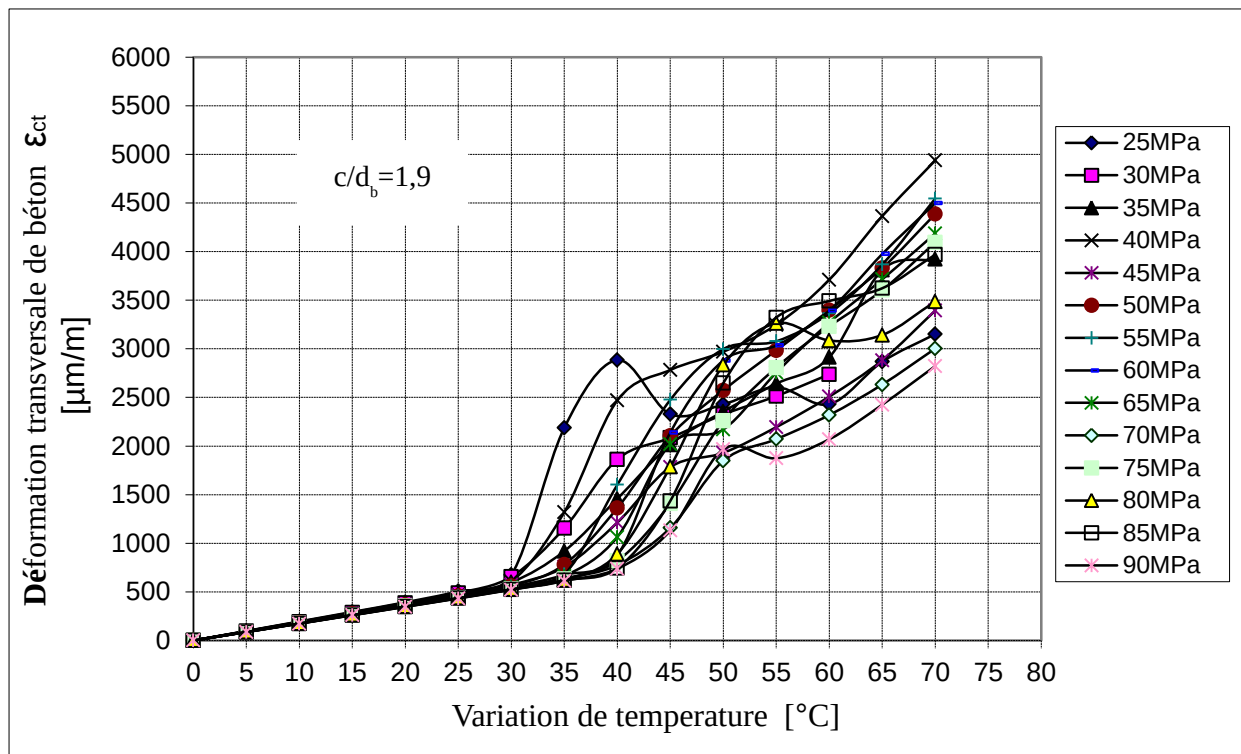


Figure III.39. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton des poutres ayant $c/d_b = 1,9$ pour différentes classes de béton (poutre P.#16.30)

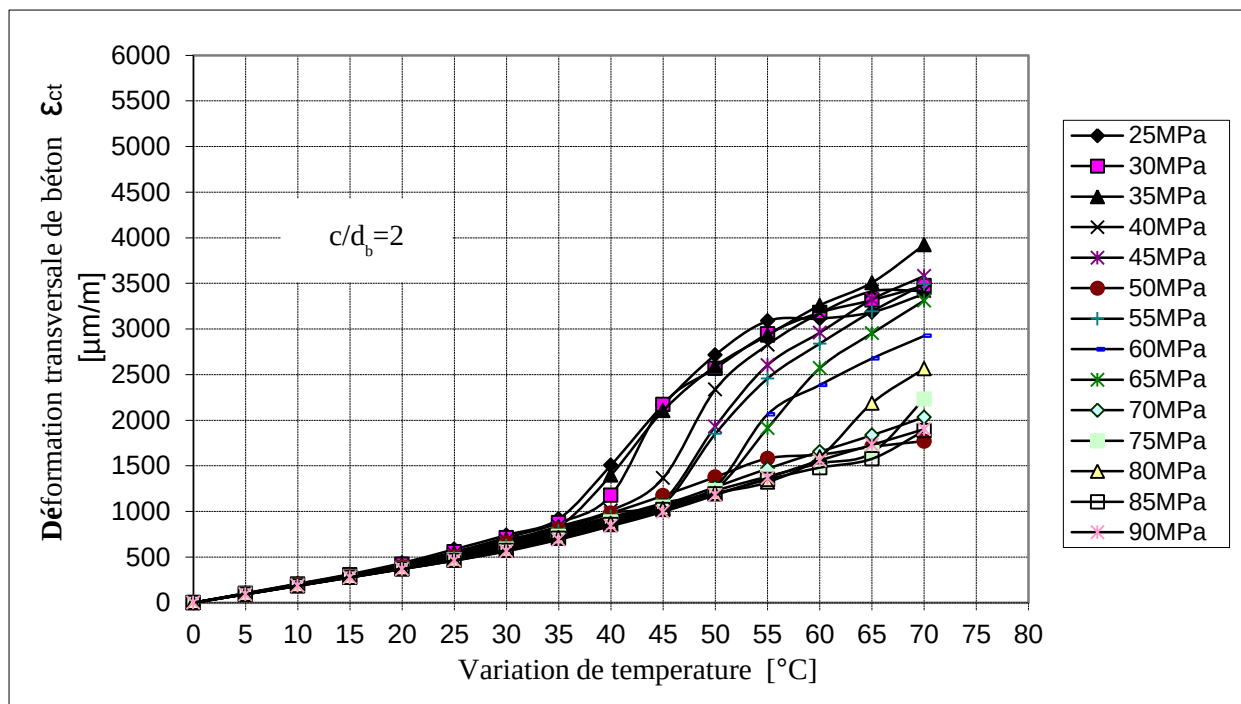


Figure III.40. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton des poutres ayant $c/d_b = 2,0$ pour différentes classes de béton (poutre P.#13.25)

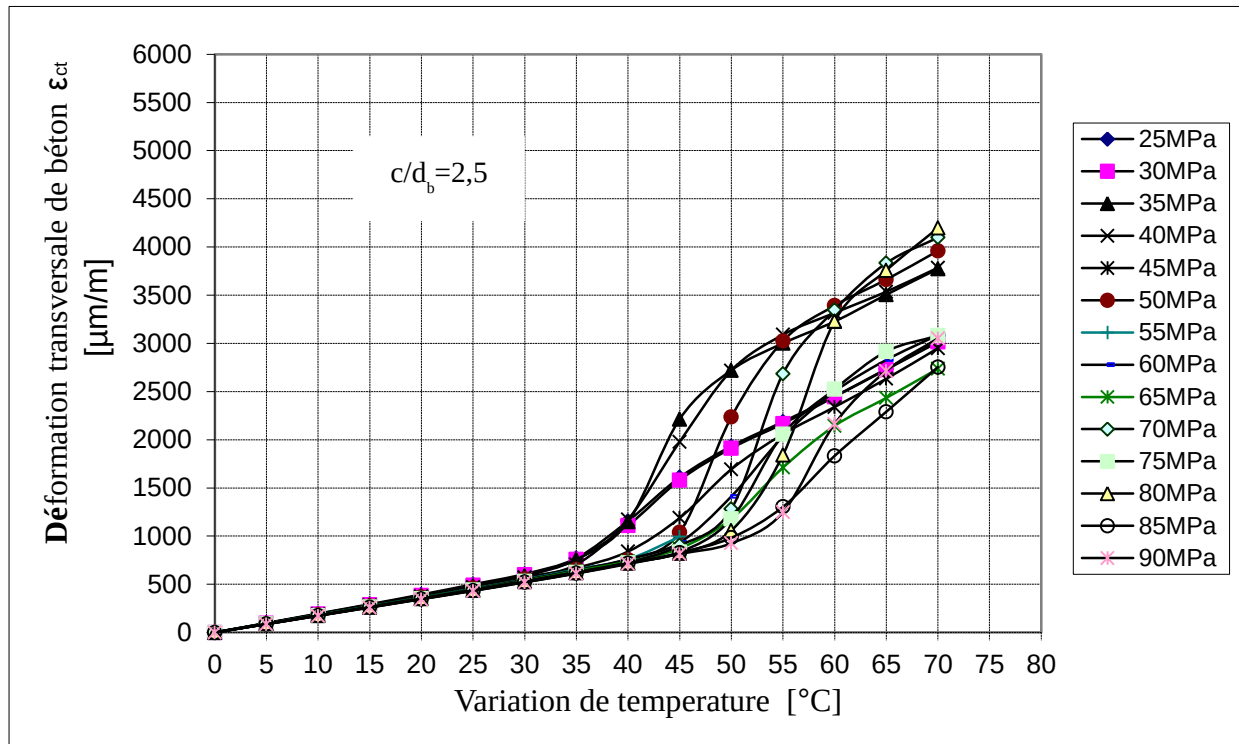


Figure III.41. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton des poutres ayant $c/d_b = 2,5$ pour différentes classes de béton (poutre P.#13.30)

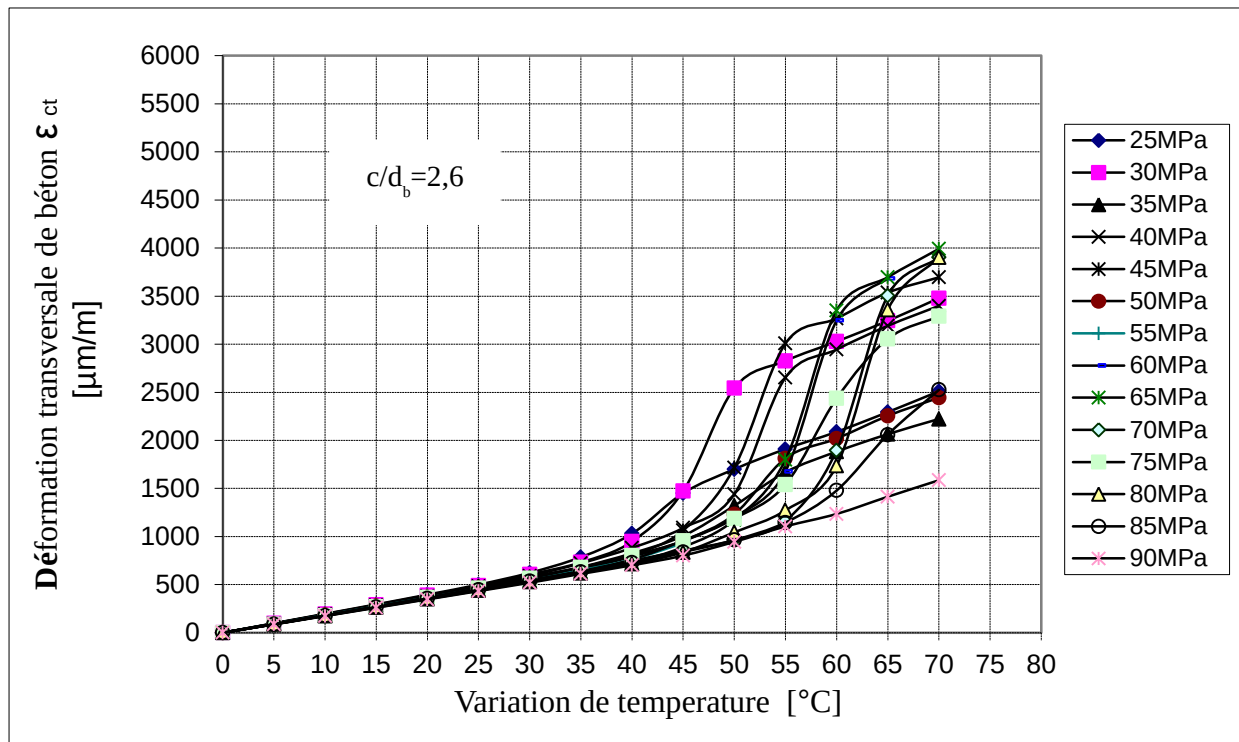


Figure III.42. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton des poutres ayant $c/d_b = 2,6$ pour différentes classes de béton (poutre P.#10.25)

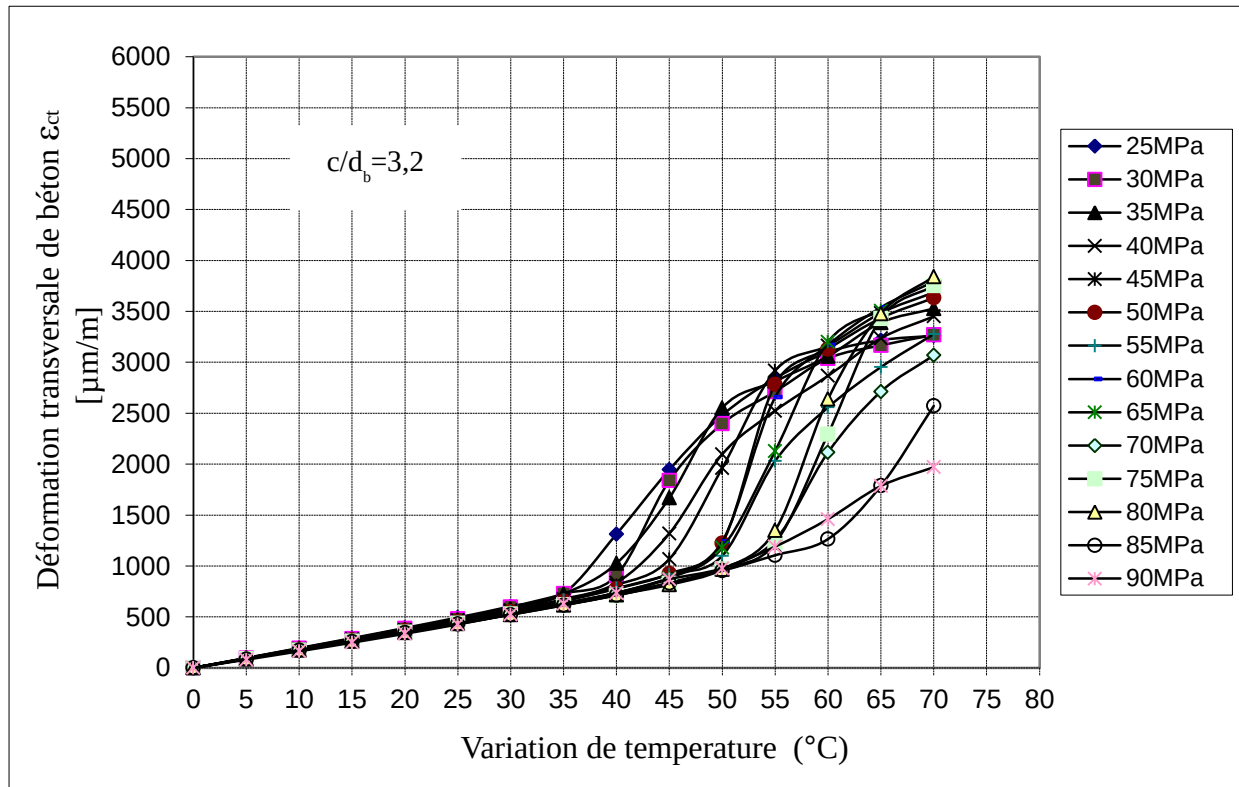


Figure III.43. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton des poutres ayant $c/d_b = 3,2$ pour différentes classes de béton (poutre P.#10.30)

III.8.5. Charges thermiques de fissuration :

III.8.5.1. Variation de température ΔT_{cr} produisant la première fissure à l'interface armature en PRF/béton :

La figure III.44 et le Tableau III.8 montrent la variation de température ΔT_{cr} produisant les premières fissures radiales dans le béton à l'interface armature/béton en fonction du rapport de l'épaisseur d'enrobage du béton au diamètre de la barre en PRF (c/d_b) et la classe de béton des poutres en béton armé de barres en PRFV de confinement asymétrique.

On remarque que les premières fissures se produisent dans le béton à l'interface à ΔT_{cr} variant de 20 à 35 $^{\circ}\text{C}$ respectivement pour des rapports c/d_b variant de 1 à 3 dépendant de la classe de béton allant de 25 à 90MPa.

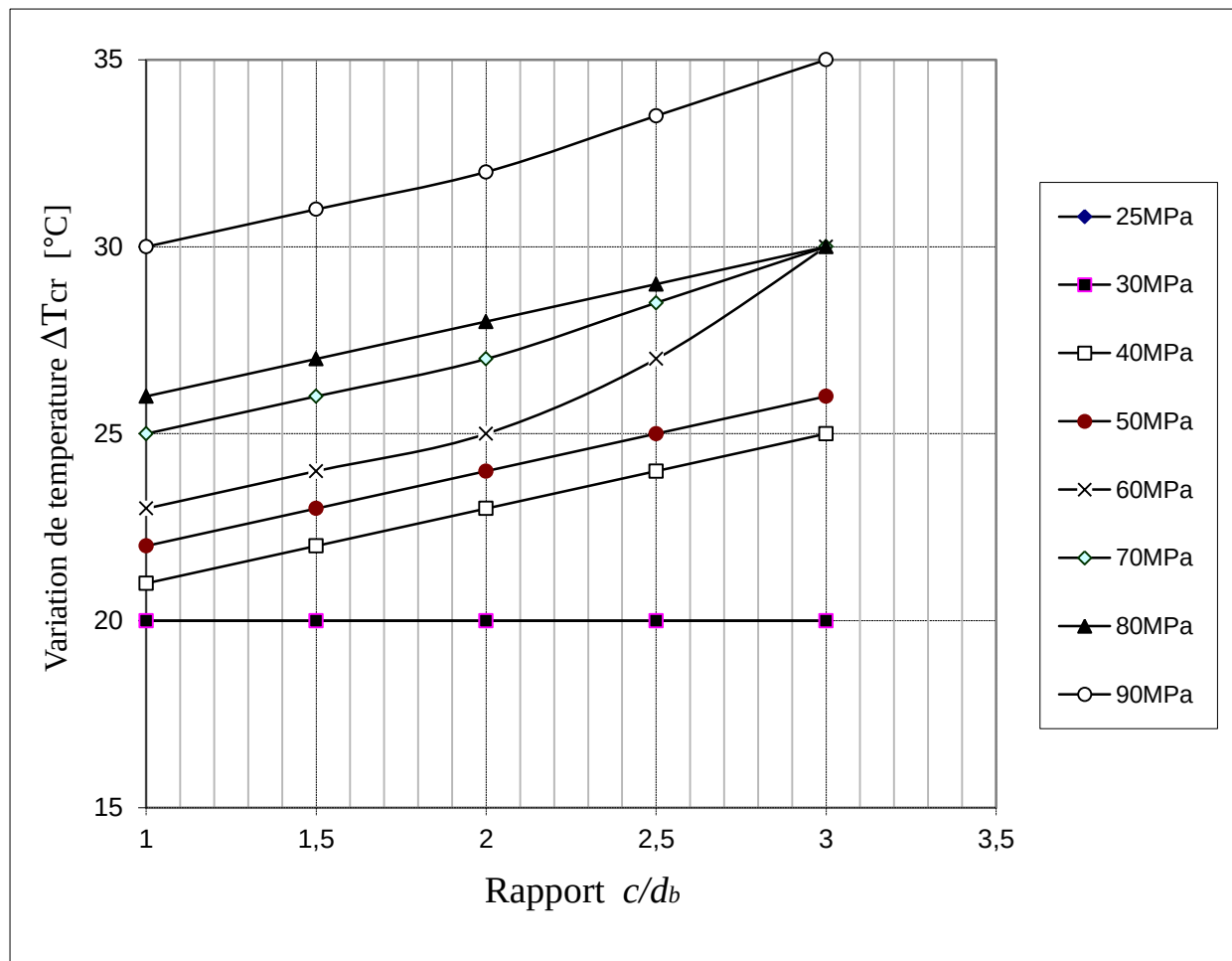


Figure III.44. Variation de température ΔT_{cr} en fonction de classes de béton (f_c') et le rapport (c/d_b)

Ceci montre que la variation de température ΔT_{cr} produisant la première fissure dans le béton à l'interface augmente avec l'augmentation du rapport c/d_b et la classe de béton. Une augmentation de la classe de béton de 25 à 90MPa engendre une augmentation de ΔT_{cr} de 50% et 75% correspondant respectivement au rapport c/d_b égale à 1 et 3,2. L'effet positif de la classe de béton est plus clair pour un rapport $c/d_b \geq 2$. D'après ce graphe on peut conclure que pour les régions de sud de l'Algérie de température climatique au plus égale à 40°C (correspondant à une augmentation de température ΔT de 20°C), par rapport à la température de référence 20°C, la fissuration de béton au niveau de l'interface armature/béton peut être évitée totalement pour les structures en béton armé de PRF de verre (PRFV) ayant un rapport c/d_b supérieur à 2,5 et un béton de résistance à la compression au moins égale à 35MPa.

Tableau III.8. Variation de température (ΔT_{cr}) produisant la première fissure radiale à l'interface armature/béton

Résistance à la compression du béton (f_c') en [MPa]														
	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
c/d_b	ΔT_{cr} (°C)													
1,0	20	20	20	20	20	20	20	25	25	25	25	25	30	30
1,2	20	20	20	20	20	25	25	25	25	25	25	30	30	30
1,3	20	20	20	20	25	25	25	25	25	25	30	30	30	30
1,4	20	20	20	20	25	25	25	25	25	25	30	30	30	30
1,6	20	20	20	25	25	25	25	25	25	30	30	30	30	30
1,9	20	20	20	25	25	25	25	25	25	30	30	30	30	30
2,0	20	20	20	25	25	25	25	25	25	30	30	30	30	30
2,1	20	20	20	25	25	25	25	25	30	30	30	30	30	30
2,5	20	20	20	25	25	25	25	25	30	30	30	30	30	30
2,6	20	20	25	25	25	25	25	30	30	30	30	30	30	30
3,2	20	20	25	25	25	25	25	30	30	30	30	30	35	35

III.8.5.2. Variation de température ΔT_{sp} produisant la rupture d'enrobage du béton :

Le Tableau III.9 présente la variation de température ΔT_{sp} produisant la rupture d'enrobage du béton en fonction du rapport c/d_b et la classe de béton. On remarque que la rupture de l'enrobage du béton se produit à des charges thermiques ΔT_{sp} variant de 30 à 50°C, 45 à 60°C, et de 55 à plus de 70°C pour des rapports c/d_b respectivement 1 ; 1,4 ; 2 dépendant de la classe de béton variant de 25 à 90MPa. Aucune rupture d'enrobage de béton n'a été observée pour des poutres en béton armé de PRFV ayant un rapport $c/d_b = 3,2$ soumises à des charges thermiques allant jusqu'à 70°C pour des différentes classes de béton (25 à 90MPa) utilisées dans cette étude. Aussi, on remarque que les charges thermiques ΔT_{sp} augmentent avec l'augmentation de la classe de béton et le rapport de l'épaisseur de l'enrobage de béton au diamètre de la barre en PRF (c/d_b) à cause de la diminution de l'effet de la pression radiale exercée par la barre en PRF sur l'enrobage de béton. Il est à souligner que pour les régions d'extrême sud Algérien de température au plus égale à 70°C (correspondant à une augmentation de température de 50°C par rapport à la température référence de 20°C) la rupture d'enrobage de béton peut être évitée pour un rapport $c/d_b \geq 2$ et une classe de béton au moins égale à 25MPa.

Tableau III.9. Variation de température ΔT_{sp} , en fonction de la variation classe de béton (f_c') et le rapport (c/d_b)

Résistance à la compression du béton (f_c') en [MPa]														
	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
c/d_b	ΔT_{sp} (°C)													
1,0	30	35	40	40	45	45	50	50	50	50	50	50	50	50
1,2	35	40	40	40	45	45	50	50	50	50	50	50	50	50
1,3	40	40	45	45	50	50	55	55	55	55	55	55	55	55
1,4	45	45	45	45	50	50	60	60	60	60	60	60	60	60
1,6	50	50	50	50	55	60	60	60	60	60	60	60	60	60
1,9	50	50	55	55	60	60	60	60	65	65	>70	>70	>70	>70
2,0	55	55	60	60	65	65	>70	>70	>70	>70	>70	>70	>70	>70
2,1	55	55	60	60	65	65	>70	>70	>70	>70	>70	>70	>70	>70
2,5	55	55	65	>70	>70	>70	>70	>70	>70	>70	>70	>70	>70	>70
2,6	60	60	>70	>70	>70	>70	>70	>70	>70	>70	>70	>70	>70	>70
3,2	>70	>70	>70	>70	>70	>70	>70	>70	>70	>70	>70	>70	>70	>70

D'après la figure III.45 on remarque que la variation de la classe de béton influe énormément sur la charge thermique critique (ΔT_{cmax})¹ au-delà de laquelle se produit la rupture de béton particulièrement pour les faibles rapports (c/d_b). Cependant, l'influence de la variation de la classe de béton sur la charge thermique ΔT_{cmax} diminue pour des poutres en béton armé de PRFV de confinement asymétrique ayant un rapport c/d_b élevée ($c/d_b \geq 2$) soumises à des charges thermiques allant jusqu'à 70°C et aussi pour des classes de béton $f_c' \geq 75$ MPa. Il est à noter que les courbes ΔT_{cmax} (Figure III.45) sont semblables pour des valeurs de classes de béton $f_c' \geq 75$ MPa.

¹ ΔT_{cmax} : variation de température produisant la fissuration maximale dans l'enrobage du béton.

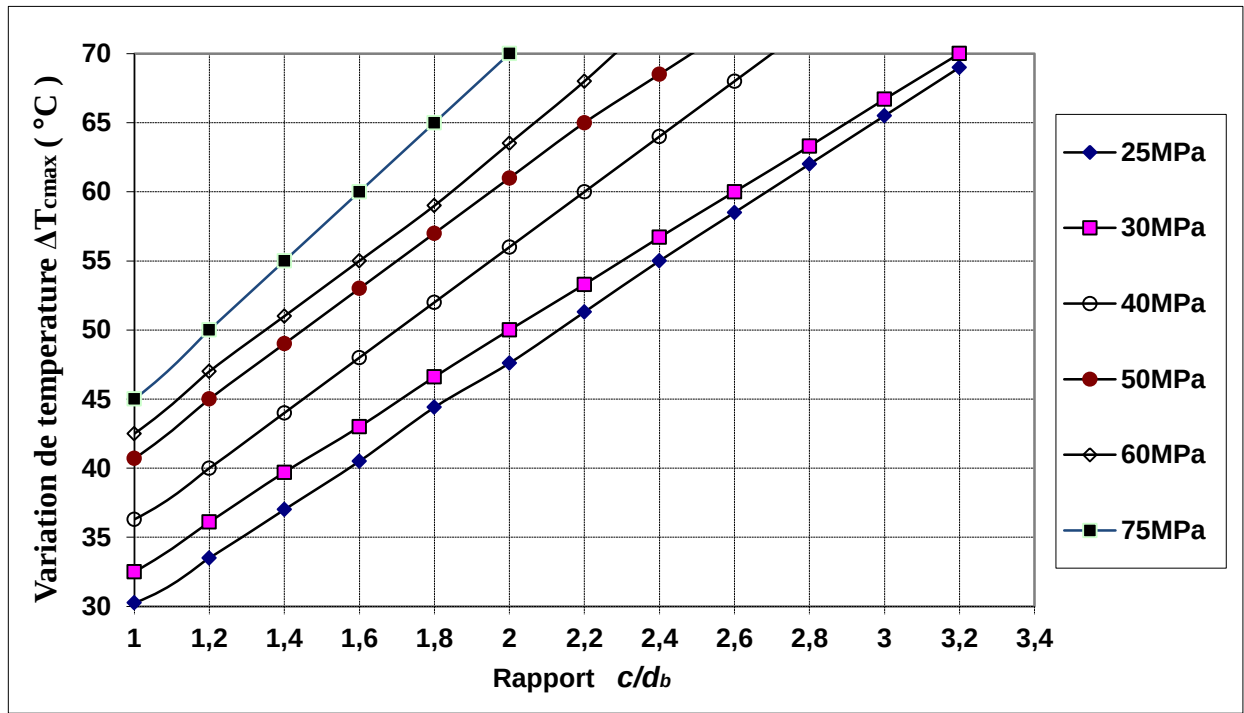


Figure III.45. Variation de température ΔT_{max} en fonction de la classe de béton (f'_c) et le rapport (c/d_b)

III.9. Conclusion :

Les principales conclusions tirées de l'analyse des résultats numériques du présent chapitre, sont les suivantes :

- Les courbes de contraintes de traction thermique transversales dans le béton, prédites par le modèle numérique à l'interface armature en PRF/béton des poutres, sont linéaires jusqu'aux valeurs de ΔT_{cr} variant de 20 à 35°C dépendant de la classe du béton variant de 25 à 90MPa et de rapport de l'épaisseur d'enrobage de béton au diamètre de la barre en PRF (c/d_b). Pour des valeurs de variation de température (ΔT) supérieures à ΔT_{cr} , les contraintes de traction diminuent brusquement à cause de l'apparition des premières fissures dans le béton à l'interface armature PRF/béton.
- Les charges thermiques numériques ΔT_{cr} produisant les premières fissures dans le béton à l'interface de barre en PRF/béton des poutres varient de 20°C à 35°C pour des classes de béton variant de 25 à 90MPa et des rapports de l'épaisseur d'enrobage de béton au diamètre de la barre en PRF (c/d_b) variant de 1 et 3,2.
- Les charges thermiques numériques ΔT_{cr} augmentent avec l'augmentation du rapport c/d_b et la classe de béton. Une augmentation de la classe de béton de 25 à 90MPa produit une augmentation de ΔT_{cr} de 50% et 75% correspondant respectivement au rapport c/d_b de 1 et 3,2.
- Les charges thermiques numériques ΔT_{sp} produisant la rupture de l'enrobage du béton des poutres en béton armé de barres en PRFV de confinement asymétrique, varient de 30 à 50°C, 45 à 60°C, et de 55 à plus de 70°C pour des rapports c/d_b de 1; 1,4 et 2 respectivement dépendant de la classe de béton variant de 25 à 90MPa. Ces charges thermiques des ruptures augmentent avec l'augmentation de la classe de béton et le rapport c/d_b .
- Aucune fissure radiale n'a atteint la surface externe de l'enrobage de béton des poutres en béton armé de barre en PRF sous charge thermique allant jusqu'à 70°C pour des bétons ordinaires de classe 40MPa et de rapport $c/d_b > 2,5$.
- Pour les régions d'extrême sud de l'Algérie de températures climatiques au plus égale à 70°C (correspondant à une charge thermique de 50°C par rapport à la température de référence de 20°C), un rapport $c/d_b \geq 2$ et une classe de béton au moins égale à 25MPa semblent suffisants afin d'éviter la rupture de l'enrobage de béton des poutres en béton armé de barre en PRF de confinement asymétrique.
- Les courbes de déformations thermiques transversales, à l'interface armature PRF/béton des poutres prédites par le modèle numérique sont linéaires jusqu'aux valeurs de ΔT_{cr} à partir desquelles les courbes deviennent non linéaires à cause de la formation de couronne de fissures dans le béton.
- L'effet de la classe de béton sur la déformation thermique transversale numérique à l'interface armature PRF/béton est relativement faible pour des charges thermiques inférieures à ΔT_{cr} . Cependant, pour des charges thermiques ΔT supérieures à ΔT_{cr} , la déformation thermique transversale diminue avec l'augmentation de la classe de béton.

CHAPITRE IV

MODÈLE ANALYTIQUE

IV. MODÈLE ANALYTIQUE

IV.1. Introduction:

L'étude analytique basée sur la théorie d'élasticité linéaire, permet de déterminer les contraintes et les déformations thermiques dans une poutre prismatique en béton armé de barre en PRF

sous une variation de température ΔT . Le modèle étudié est basé sur les hypothèses suivantes :

- Une adhérence parfaite entre le béton et la barre en PRF.
- La barre en PRF et le béton présentent un comportement élastique linéaire.
- La section de la poutre prismatique reste plane après déformations thermiques.
- Absence des armatures transversales afin d'évaluer uniquement la contribution de l'enrobage du béton pour soutenir les contraintes de traction due à la variation de température.

IV.2. Présentation du modèle analytique :

La différence entre les coefficients d'expansion thermique transversale des barres en PRF et du béton dans les structures en béton armé engendre une pression radiale (**P**) à l'interface armature/béton sous chargement thermique comme l'indique la figure IV.1 ci-dessous :

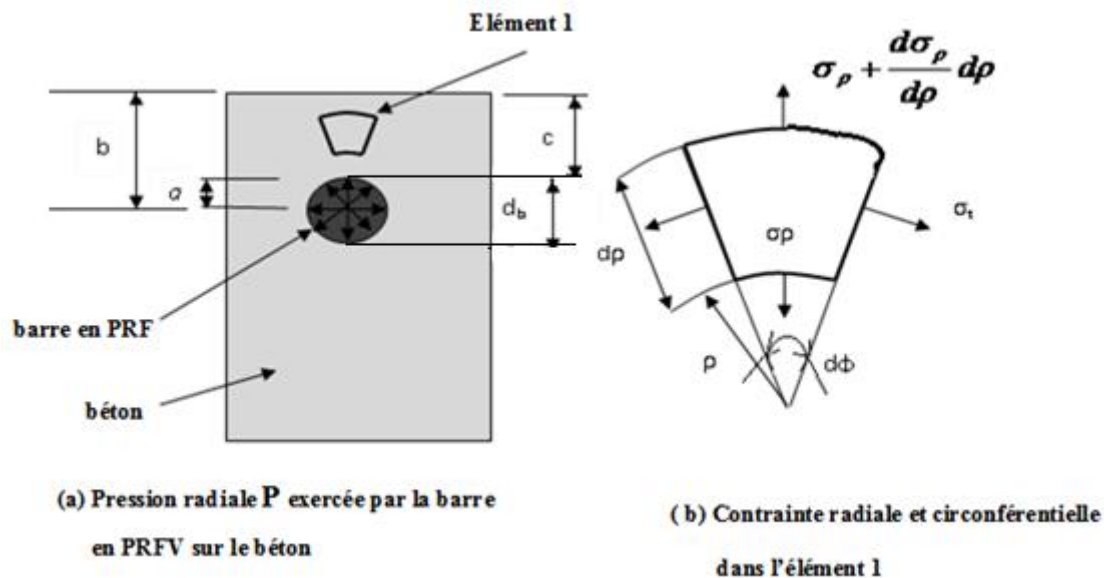


Figure IV.1. Contraintes dans le béton exercées par la pression radiale **P**

- Il est à noter que le modèle analytique présenté dans ce chapitre est inspiré du modèle ZAIDI et MASMOUDI (2006) établi pour un cylindre en béton armé de barre en PRF centrée au milieu sous une variation de température ΔT .

IV.3. Contraintes dans le béton exercées par la pression radiale P :

On note u le déplacement radial de la surface cylindrique de rayon ρ , donc $u + \frac{du}{d\rho} d\rho$ est le déplacement radial de la surface cylindrique de rayon $(\rho + d\rho)$. La déformation radiale (ε_ρ) et la déformation circonférentielle (ε_t) dans un élément du béton situé à un rayon (ρ)

mesuré à partir du centre de gravité de la barre en PRFV ancrée dans le béton, sont :

$$\varepsilon_\rho = \frac{du}{d\rho} \quad (IV.1)$$

$$\varepsilon_t = \frac{u}{\rho} \quad (IV.2)$$

Les expressions de la contrainte radiale (σ_ρ) et de la contrainte circonférentielle (σ_t), en fonction des déformations de l'élément considéré, déterminées par la théorie d'élasticité pour les cylindres creux sous pression hydrostatique interne P en considérant la solution en contraintes planes, sont données par [Zaidi, 2006] :

$$\sigma_\rho = \frac{E_c}{1-\nu_c^2} (\varepsilon_\rho + \nu_c \varepsilon_t) = \frac{E_c}{1-\nu_c^2} \left[\frac{du}{d\rho} + \nu_c \frac{u}{\rho} \right] \quad (IV.3)$$

$$\sigma_t = \frac{E_c}{1-\nu_c^2} (\varepsilon_t + \nu_c \varepsilon_\rho) = \frac{E_c}{1-\nu_c^2} \left[\frac{u}{\rho} + \nu_c \frac{du}{d\rho} \right] \quad (IV.4)$$

Avec :

ν_c : coefficients de Poisson de béton ; E_c : module d'élasticité longitudinal de béton.

L'équation d'équilibre du même élément du cylindre est déterminée en faisant la somme des forces suivant la direction de la bissectrice de l'angle ϕ en négligeant les termes de second ordre; on trouve :

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho + \sigma_t}{\rho} = 0 \quad (IV.5)$$

remplaçant les expressions de σ_ρ et σ_t (équations VI.3 et VI.4) dans l'équation VI.5, on obtient

l'équation d'équilibre en terme de déplacement :

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} - \frac{u}{\rho^2} = 0 \quad (IV.6)$$

La solution générale de cette équation différentielle est de la forme :

$$u = A_1 \rho + \frac{B_1}{\rho} \quad (\text{IV.7})$$

Les constantes A_1 et B_1 sont déterminées par les conditions aux limites interne et externe.

Substituant l'expression de u de l'équation VI.7 dans les équations VI.3 et VI.4, on obtient :

$$\sigma_\rho(\rho) = \frac{E_c}{1-\nu_c^2} \left[A_1(1+\nu_c) - B_1 \frac{1-\nu_c}{\rho^2} \right] \quad (\text{IV.8})$$

$$\sigma_t(\rho) = \frac{E_c}{1-\nu_c^2} \left[A_1(1+\nu_c) + B_1 \frac{1-\nu_c}{\rho^2} \right] \quad (\text{IV.9})$$

Les conditions aux limites de la poutre prismatique au niveau de la surface interne ($\rho = a$) et la surface externe ($\rho = b$), sont comme suit :

$$\sigma_\rho(\rho = a) = -P \quad (\text{IV.10})$$

$$\sigma_\rho(\rho = b) = 0 \quad (\text{IV.11})$$

Les constantes A_1 et B_1 sont obtenues en utilisant les conditions aux limites ci-dessus dans l'équation VI.8, on a donc :

$$A_1 = \frac{1-\nu_c}{E_c} \frac{a^2}{b^2 - a^2} P \quad (\text{IV.12})$$

$$B_1 = \frac{1+\nu_c}{E_c} \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} P \quad (\text{IV.13})$$

Les expressions de la contrainte radiale σ_ρ et de la contrainte circonférentielle σ_t du béton dues à la pression radiale P sont obtenues en substituant les expressions des constantes A_1 et B_1 (équations VI.12 et VI.13) dans les équations VI.8 et VI.9, on a donc :

$$\sigma_\rho = \frac{a^2 P}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{\rho^2} \right) \quad (\text{IV.14})$$

$$\sigma_t = \frac{a^2 P}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{\rho^2} \right) \quad (\text{IV.15})$$

a : le rayon de l'armature en PRF qui est égal à $d_b / 2$; $b=(a+c)$ avec c : l'épaisseur d'enrobage de béton. Posant $r = b/a$, les équations VI.14 et VI.15 deviennent :

$$\sigma_\rho = \frac{P}{r^2 - 1} \left(1 - \frac{b^2}{\rho^2} \right) \quad (IV.16)$$

$$\sigma_t = \frac{P}{r^2 - 1} \left(1 + \frac{b^2}{\rho^2} \right) \quad (IV.17)$$

La contrainte de traction circonférentielle maximale dans le béton due à la pression radiale P , à l'interface armature/béton où $\rho = a$, est donnée par :

$$\sigma_{t \max} = \frac{r^2 + 1}{r^2 - 1} P \quad (IV.18)$$

Les figures IV.2 à IV.4 montrent les courbes des contraintes de traction du béton prédites par le modèle analytique, à l'interface armature en PRF/béton, des poutres prismatiques en béton armé de barre en PRF de verre ayant un rapport d'épaisseur d'enrobage du béton au diamètre de la barre en PRFV (c/d_b) égale à 1 ; 2 et 3,2 tout en variant la charge thermique de 0 à 70°C et la classe de béton de 25 à 90MPa . D'après ces figures on peut remarquer que les courbes analytiques donnent des contraintes de traction du béton à l'interface armature en PRF/béton assez élevées, ces contraintes analytiques dépassent la résistance à la traction de béton. Aussi, les contraintes de traction dans le béton sont linéaires car le modèle analytique est basé sur la théorie d'élasticité qui ignore la présence des fissures dans le béton. En outre, il est à noter que les contraintes de traction transversales dans le béton augmentent avec l'augmentation de la classe de béton et la diminution du rapport (c/d_b).

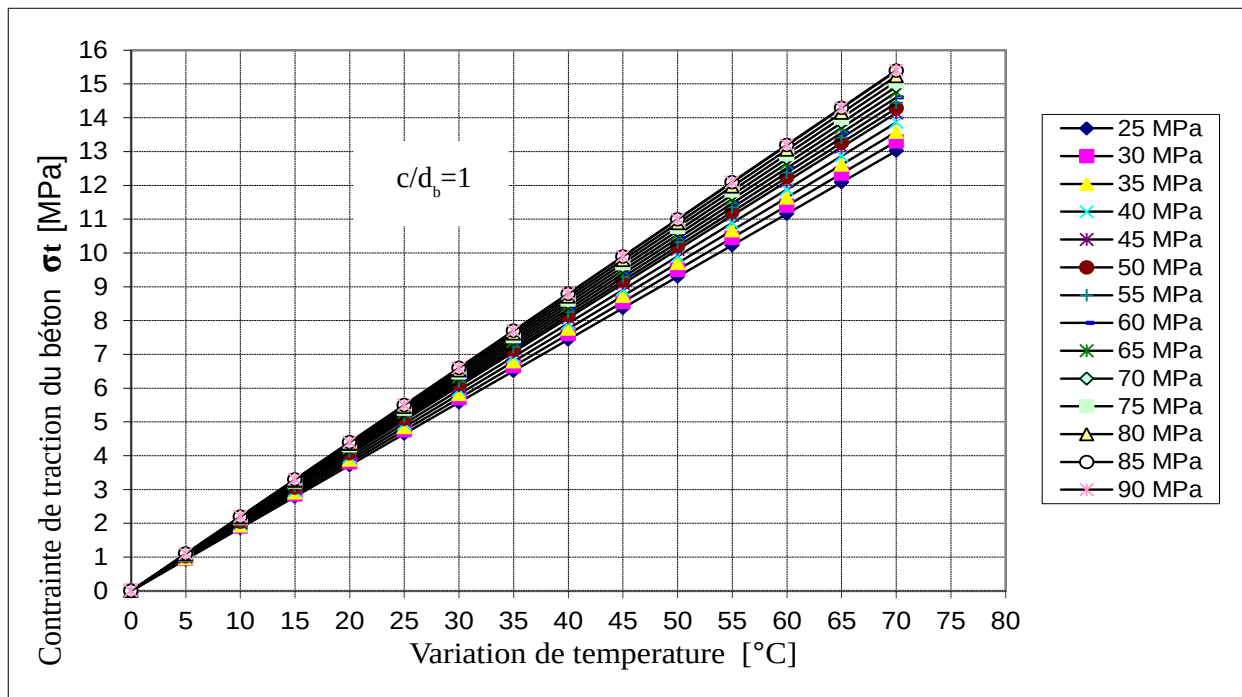


Figure IV.2. Contrainte de traction transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1$ (Modèle analytique linéaire de la poutre prismatique en béton P.#25.25)

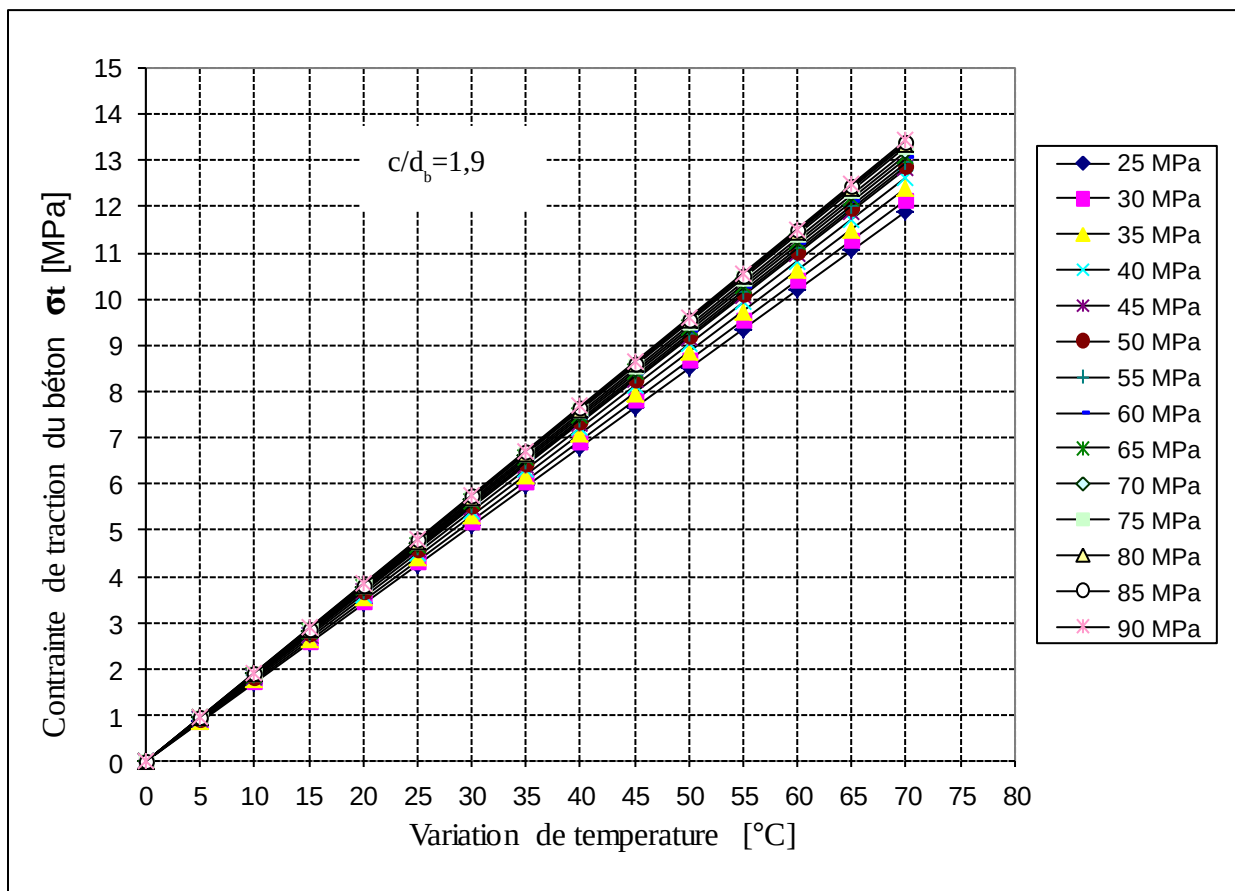


Figure IV.3. Contrainte de traction transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,9$ (Modèle analytique linéaire de la poutre prismatique en béton P.#16.30)

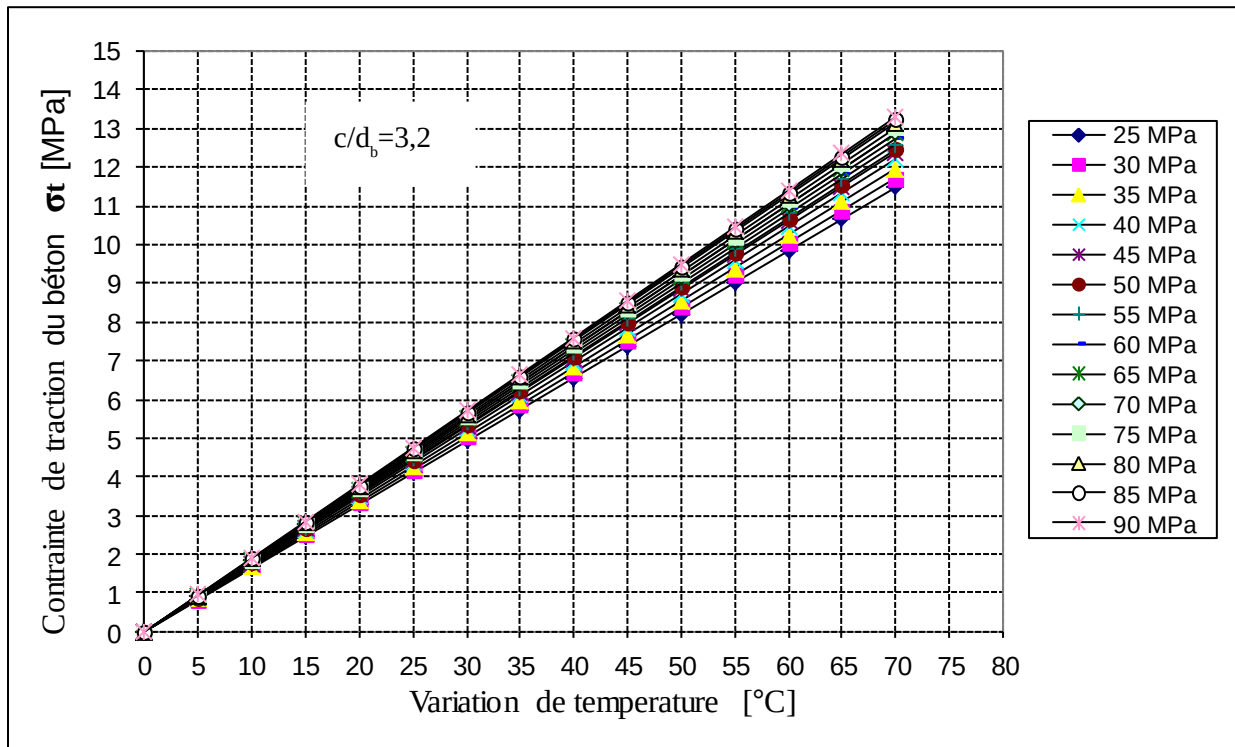


Figure IV.4. Contrainte de traction transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 3,2$ (Modèle analytique linéaire de la poutre prismatique en béton P.#10.30)

IV.4. Déformations dans le béton dues à la pression radiale P :

IV.4.1. Déplacement radial u :

De l'équation IV.7 on obtient le déplacement radiale $u(\rho)$ suivant :

$$u(\rho) = \frac{1-\nu_c}{E_c} \frac{P}{r^2-1} \rho + \frac{1+\nu_c}{E_c} \frac{b^2}{r^2-1} \frac{P}{\rho} \quad (\text{IV.19})$$

IV.4.2. Déformation radiale $\varepsilon_{c\rho}$ dans le béton due à la pression radiale P :

$$\varepsilon_{c\rho}(\rho) = \frac{du}{d\rho} \quad (\text{IV.20})$$

La dérivé de l'équation (IV.19) donne :

$$\varepsilon_{c\rho}(\rho) = \frac{P}{E_c(r^2-1)} \left[\left(1 - \frac{b^2}{\rho^2} \right) - \nu_c \left(1 + \frac{b^2}{\rho^2} \right) \right] \quad (\text{IV.21})$$

Donc :

$$\varepsilon_{c\rho}(\rho) = \frac{1}{E_c} (\sigma_\rho - \nu_c \sigma_t) \quad (\text{IV.22})$$

IV.4.3. Déformation circonférentielle ε_{ct} dans le béton due à la pression radiale P :

$$\varepsilon_{ct}(\rho) = \frac{u(\rho)}{\rho} \quad (IV.23)$$

$$\varepsilon_{ct}(\rho) = \frac{P}{E_c(r^2 - 1)} \left[\left(1 + \frac{b^2}{\rho^2} \right) - \nu_c \left(1 - \frac{b^2}{\rho^2} \right) \right] \quad (IV.24)$$

$$\varepsilon_{ct}(\rho) = \frac{1}{E_c} (\sigma_t - \nu_c \sigma_\rho) \quad (IV.25)$$

IV.4.4. Déformations dans le béton dues à la pression radiale P et à la variation de température ΔT :

La déformation radiale ($\varepsilon_{c\rho}$) dans le béton due à la pression radiale (P) et à la variation de température ΔT est donnée par :

$$\varepsilon_{c\rho}(\rho) = \frac{P}{E_c(r^2 - 1)} \left[\left(1 - \frac{b^2}{\rho^2} \right) - \nu_c \left(1 + \frac{b^2}{\rho^2} \right) \right] + \alpha_c \Delta T \quad (IV.26)$$

Avec α_c : le coefficient d'expansion thermique du béton.

La déformation circonférentielle ε_{ct} dans le béton due à la pression radiale P et à la variation de température ΔT est :

$$\varepsilon_{ct}(\rho) = \frac{P}{E_c(r^2 - 1)} \left[\left(1 + \frac{b^2}{\rho^2} \right) - \nu_c \left(1 - \frac{b^2}{\rho^2} \right) \right] + \alpha_c \Delta T \quad (IV.27)$$

Avec (α_c) : Le coefficient d'expansion thermique de béton.

La déformation circonférentielle (ε_{ct}) dans le béton, à l'interface armature/béton ($\rho = a$), due à la pression radiale P et à la variation de température ΔT , est donnée par :

$$\varepsilon_{ct} = \frac{P}{E_c} \left(\frac{r^2 + 1}{r^2 - 1} + \nu_c \right) + \alpha_c \Delta T \quad (IV.28)$$

La déformation circonférentielle (ε_{ct}) dans le béton, à la surface externe de l'enrobage de béton ($\rho = b$), due à la pression radiale P et à la variation de température ΔT , est donnée par :

$$\varepsilon_{ct} = \left(\frac{2P}{E_c(r^2 - 1)} \right) + \alpha_c \Delta T \quad (IV.29)$$

Les figures IV.5 à IV.8 présentent les courbes des déformations circonférentielles du béton prédites par le modèle analytique à l'interface armature/béton, en fonction de la variation de température ΔT et la classe de béton des poutres en béton renforcé de barre en PRFV pour des rapports de l'épaisseur d'enrobage du béton au diamètre de la barre en PRF (c/d_b) variant entre 1,0 à 3,2. D'après ces figures on remarque les courbes de déformations thermiques transversales augmentent linéairement avec la variation de température. On remarque aussi que les déformations transversales diminuent avec l'augmentation de la classe de béton. De plus on peut observer que l'influence du rapport c/d_b sur les déformations est relativement faible.

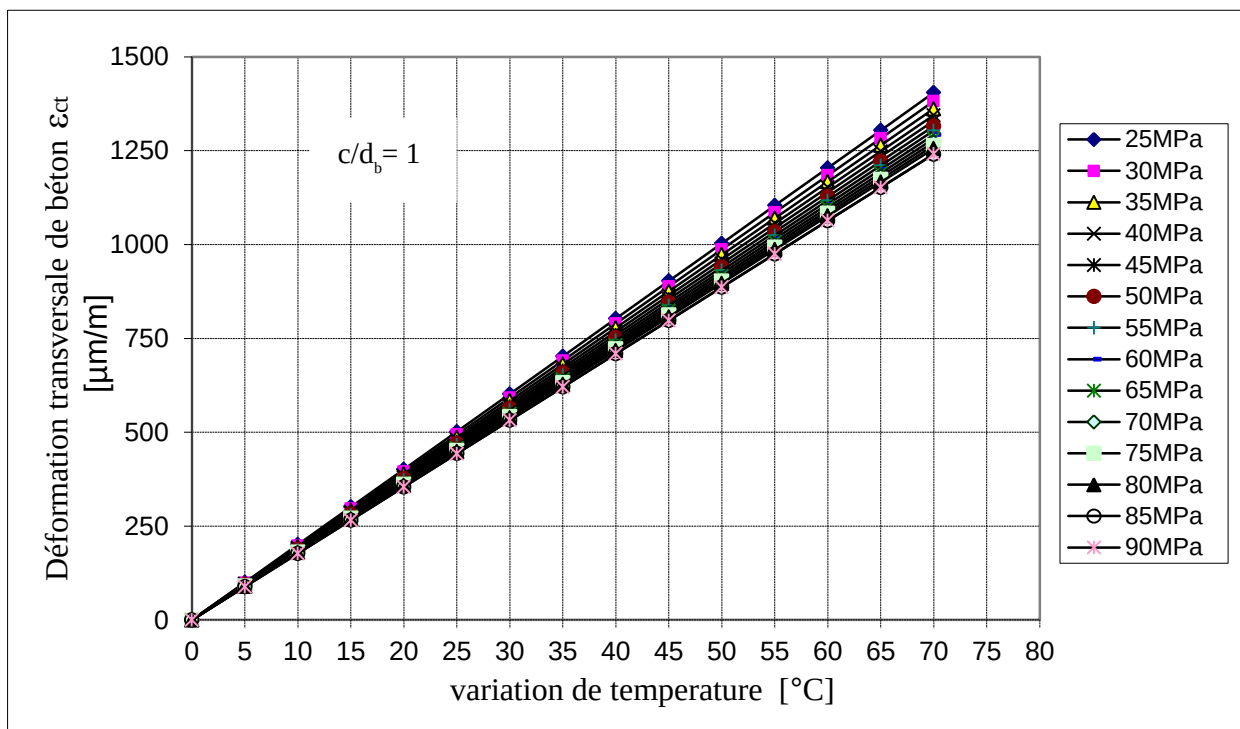


Figure IV.5. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température et la classe de béton à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,0$ (Modèle analytique linéaire de la poutre prismatique en béton P.#25.25)

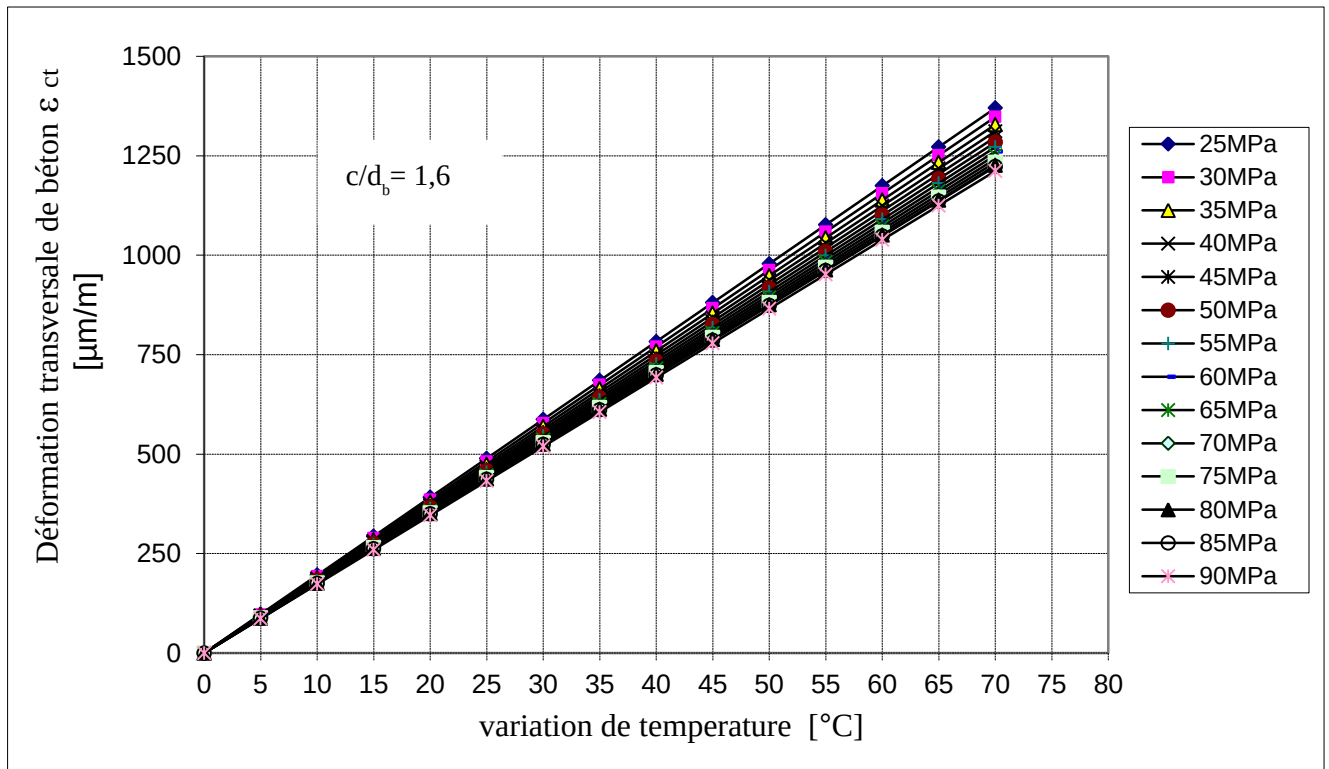


Figure IV.6. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température et la classe de béton à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,6$ (Modèle analytique linéaire de la poutre prismatique en béton P.# 13.20)

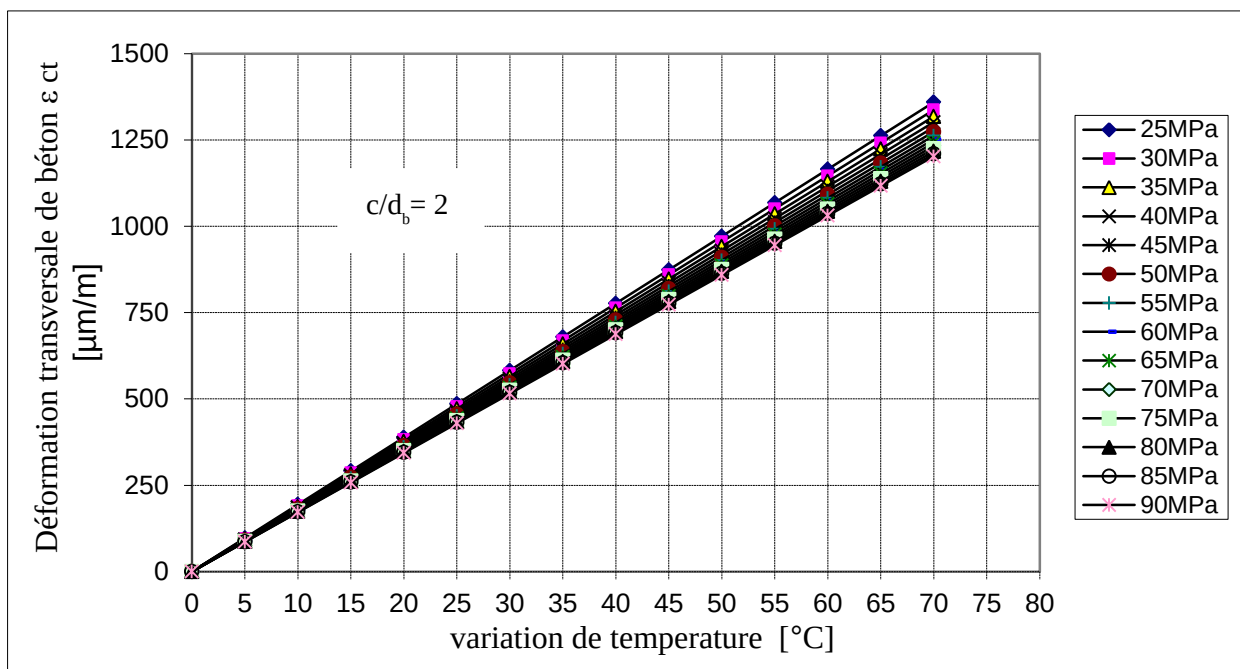


Figure IV.7. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température et la classe de béton à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 2$ (Modèle analytique linéaire de la poutre prismatique en béton P.# 13.25)

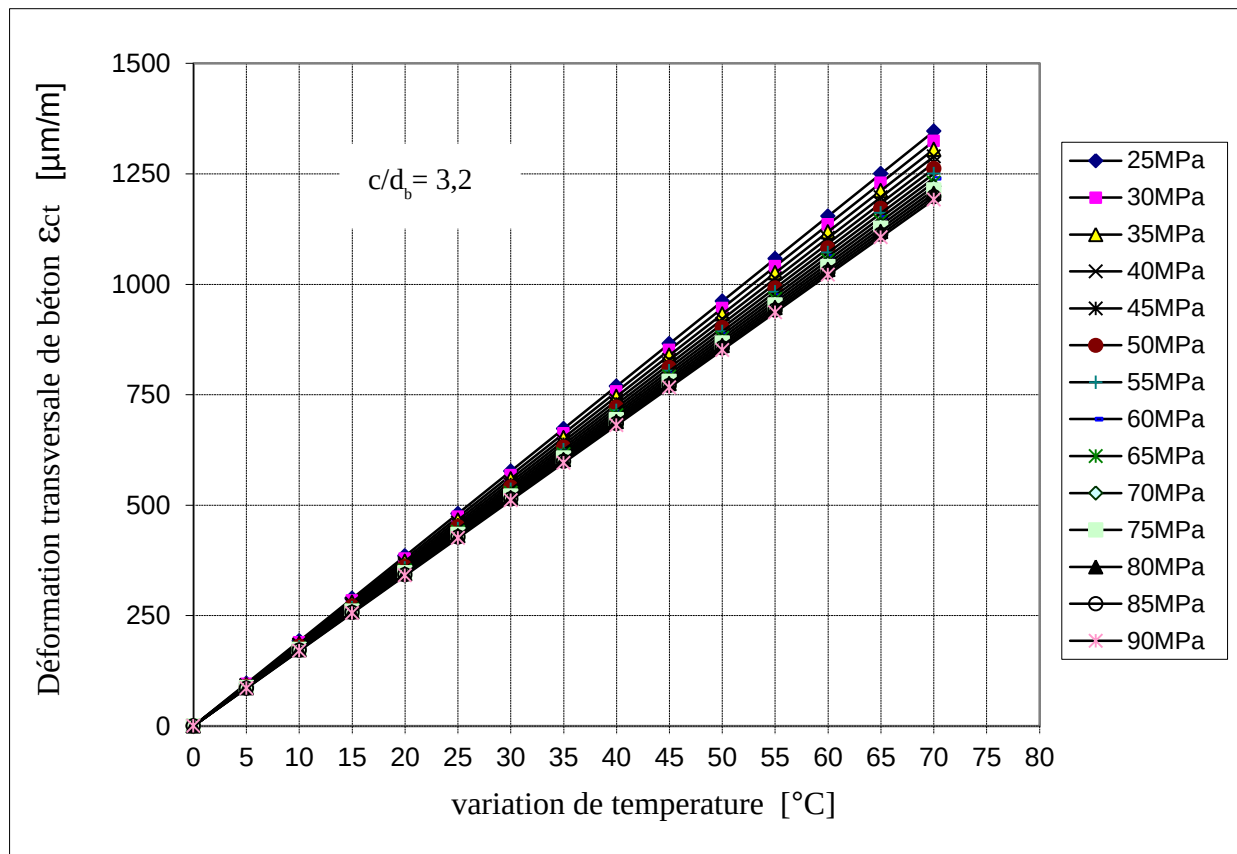


Figure IV.8. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température et la classe de béton à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 3,2$ (Modèle analytique linéaire de la poutre prismatique en béton P.#10.30)

Les figures IV.9 à IV.11 présentent les courbes des déformations du béton en fonction de la variation de température ΔT de modèle analytique à la surface externe de l'enrobage du béton des poutres en béton renforcé par barre en PRFV pour des classes de béton variant de 25 à 90MPa et des rapports de l'épaisseur d'enrobage du béton au diamètre de la barre en PRF (c/d_b) variant entre 1,0 à 3,2. Les principales remarques tirées de ces figures, sont les suivantes :

On remarque que les courbes des déformations du béton en fonction de la variation de température ΔT de modèle analytique à la surface externe de l'enrobage du béton sont linéaires car le modèle analytique utilisé ne prend pas en compte la présence des fissures dans le béton. Aussi, on remarque que les déformations transversales à la surface extérieure diminuent avec l'augmentation de la classe du béton à cause de l'accroissement de la rigidité de la section de béton. En outre, on peut noter que l'influence de la variation de la classe de béton sur les déformations transversales est quasiment faible pour des rapports de c/d_b assez grands (supérieurs à 2).

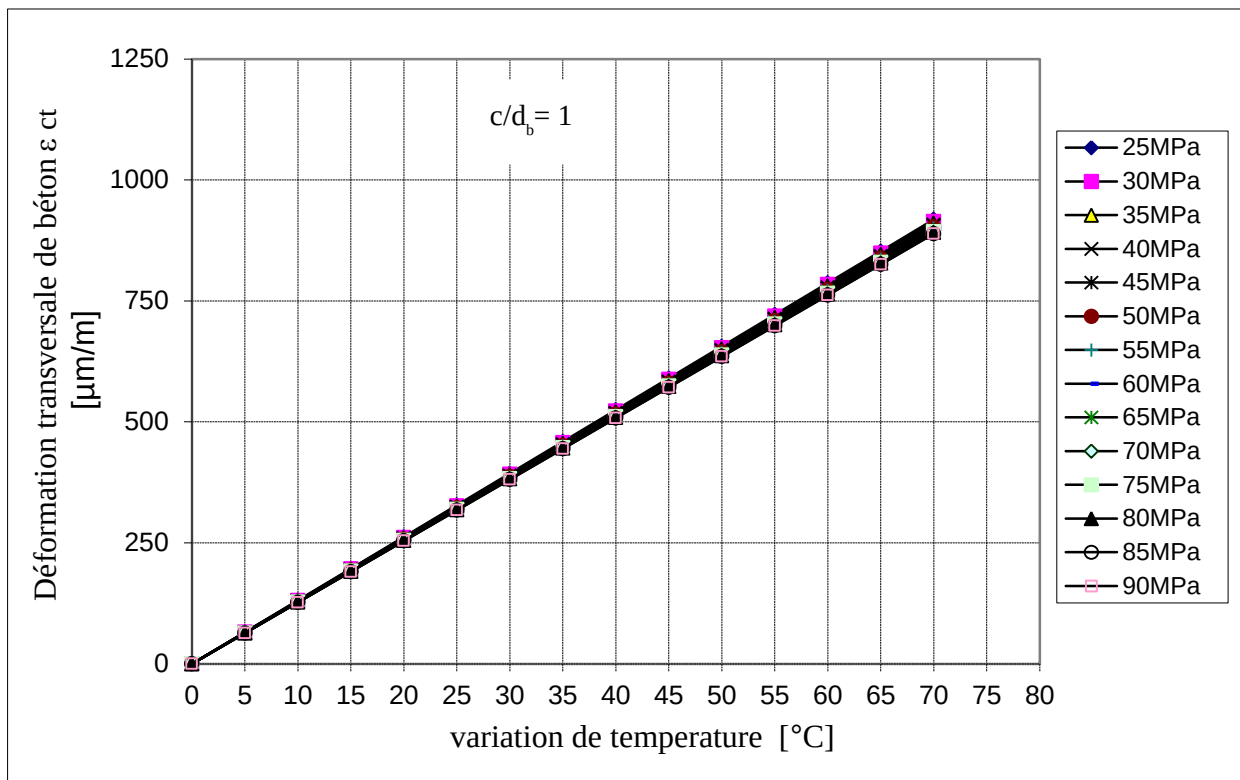


Figure IV.9. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température et la classe de béton à la surface externe de l'enrobage du béton pour $c/d_b = 1,0$ (Modèle analytique linéaire de la poutre prismatique en béton P.#25.25)

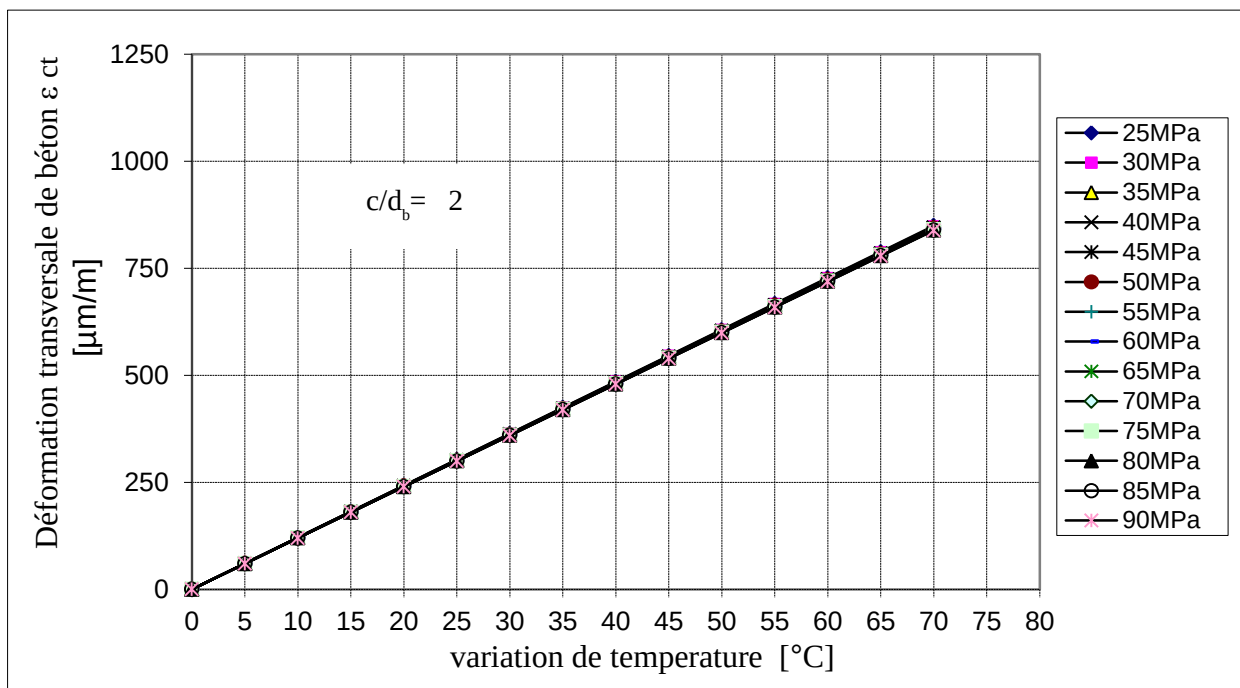


Figure IV.10. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température et la classe de béton à la surface externe de l'enrobage du béton pour $c/d_b = 2,0$ (Modèle analytique linéaire de la poutre prismatique en béton P.#13.25)

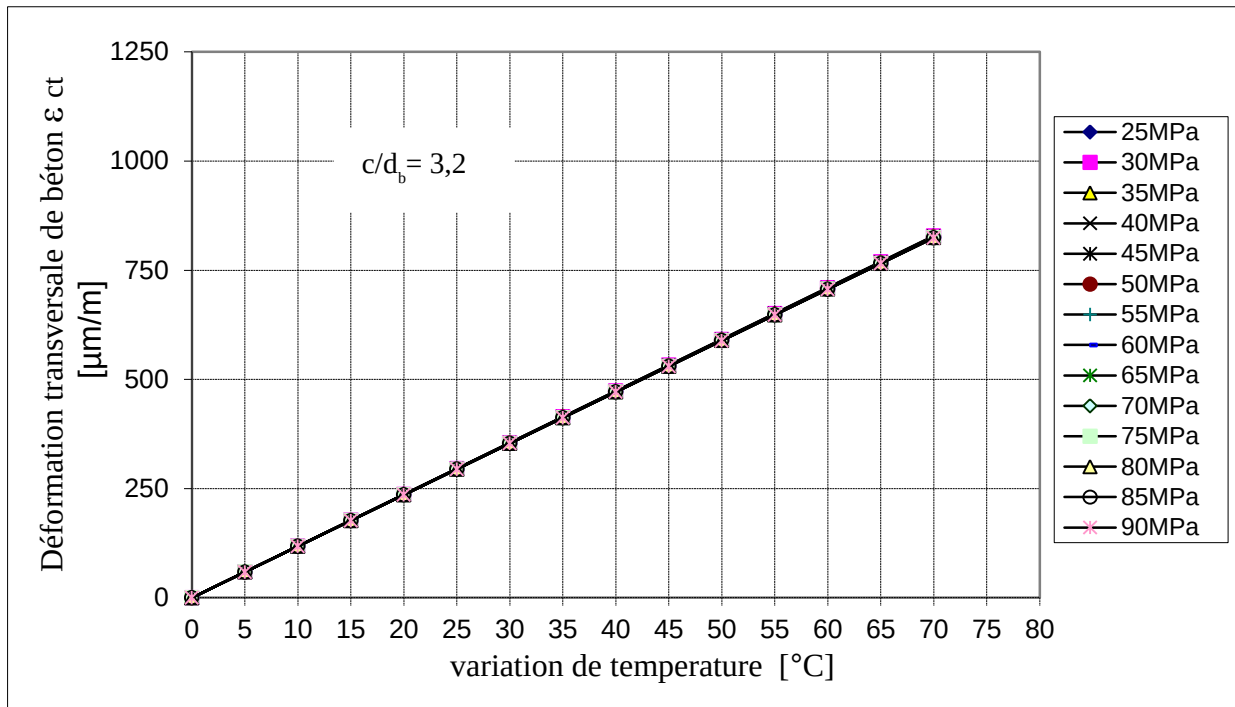


Figure IV.11. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température et la classe de béton à la surface externe de l'enrobage du béton pour $c/d_b = 3,2$ (Modèle analytique linéaire de la poutre prismatique en béton P.#10.30)

IV.4.5. Déformation transversale de la barre en PRF due à l'effet de la pression radiale $\mathbf{P}$ et à la variation de température ΔT :

De la même manière que précédemment, il est possible de déterminer la déformation de la barre en PRF sous pression externe due à la réaction du béton sur la barre en PRF. Le déplacement radial u [Zaidi, 2006] est donnée par:

$$u(\rho) = -\frac{(1-\nu_{tt})P}{E_t} \rho \quad (\text{IV.29})$$

E_t : le module d'élasticité de la barre en PRF dans la direction transversale.

ν_{tt} : est le coefficient de Poisson de la barre en PRF dans la direction transversale (le premier indice indique la direction transversale de l'application de la contrainte et le deuxième indice indique la direction transversale dans laquelle on détermine la déformation).

La déformation circonférentielle ε_{ft} de la barre en PRF due à la pression radiale $\mathbf{P}$ est donnée par :

$$\varepsilon_{ft} = \frac{u(\rho)}{\rho} = -\frac{(1-\nu_{tt})P}{E_t} \quad (\text{IV.30})$$

La déformation circonférentielle de la barre en PRF due à la pression radiale $\mathbf{P}$ et à la variation de température ΔT , est donnée par :

$$\varepsilon_{ft} = \alpha_t \Delta T - \frac{(1 - \nu_{tt})P}{E_t} \quad (IV.31)$$

α_t : le coefficient d'expansion thermique transversale de la barre en PRF.

IV.4.6. Pression radiale **P** :

La pression radiale **P** exercée par la barre en PRF sur le béton due à la variation de température ΔT est déterminée en utilisant l'équation de compatibilité des déformations transversales à l'interface armature/béton. À partir des équations IV.28 et IV.31, on peut écrire [Zaidi,2006] :

$$\alpha_t \Delta T - \frac{(1 - \nu_{tt})}{E_t} P = \frac{P}{E_c} \left(\frac{r^2 + 1}{r^2 - 1} + \nu_c \right) + \alpha_c \Delta T \quad (IV.32)$$

De l'équation ci-dessus, l'expression de la pression radiale **P** est donnée par :

$$P = \frac{(\alpha_t - \alpha_c) \Delta T}{\frac{1}{E_c} \left(\frac{r^2 + 1}{r^2 - 1} + \nu_c \right) + \frac{1}{E_t} (1 - \nu_{tt})} \quad (IV.33)$$

$(\alpha_t - \alpha_c) \Delta T$: la déformation thermique différentielle transversale qui est la principale source de la pression radiale. $r = (2c + d_b) / (d_b)$: constant

Avec, d_b : diamètre de la barre ($d_b = 2a$) ; c : épaisseur d'enrobage du béton.

IV.5. Variation de température (ΔT_{cr}) produisant la première fissure :

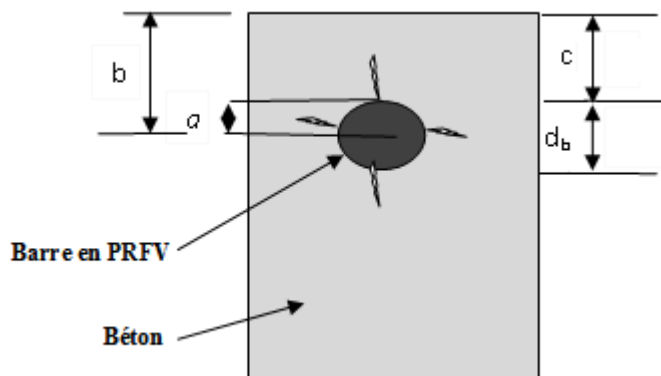


Figure IV.12. Première fissure dans le béton due à la pression radiale **P** produite à $\Delta T = \Delta T_{cr}$

La première fissure radiale apparaît dans le béton à l'interface armature en PRF/béton ($\rho = a$)

lorsque la contrainte circonférentielle maximale (Eq.IV.18) atteint la résistance à la traction du béton (f_{ct}) :

$$\sigma_{t_{\max}} = \frac{r^2 + 1}{r^2 - 1} P = f_{ct} \quad (\text{IV.34})$$

La variation de température (ΔT_{cr}) qui produit la première fissure dans le béton à l'interface armature/béton est obtenue à partir des équations IV.33 et IV.34 on a donc [Zaidi, 2006]:

$$\Delta T_{cr} = \left[\frac{1}{E_c} + \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} \left(\frac{\nu_c}{E_c} + \frac{1 - \nu_{tt}}{E_t} \right) \right] \frac{f_{ct}}{(\alpha_t - \alpha_c)} \quad (\text{IV.35})$$

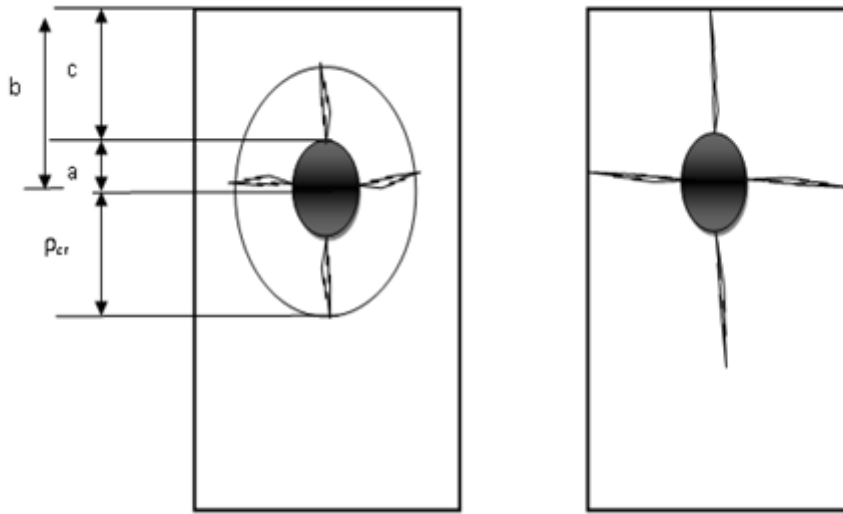
Le tableau IV.1 montre la variation de température (ΔT_{cr}) qui produit la première fissure radiale dans le béton à l'interface armature/béton en fonction du rapport de l'épaisseur d'enrobage du béton au diamètre de la barre en PRF (c/d_b) variant entre 1,0 à 3,2 et la classe de béton variant de 25 à 90MPa. On remarque que la variation de température ΔT_{cr} produisant la première fissure dans le béton à l'interface varie de 16,12 °C à 29,97 °C dépendant du rapport c/d_b et la classe de béton. Pour une augmentation de la classe de béton de 25 à 90MPa, la charge thermique ΔT_{cr} augmente d'une valeur de 60 % environ pour les différents rapports c/d_b . Cependant pour une même classe de béton, ΔT_{cr} augmente environ 11% et 4% correspondant respectivement aux augmentations du rapport c/d_b de 1 à 2 et de 2 à 3,2.

Tableau IV.1. Variation de température (ΔT_{cr}) qui produit la première fissure dans le béton à l'interface armature/béton.

(f _c ') en (MPa)	c/d _b										
	1	1,2	1,3	1,4	1,6	1,9	2	2,1	2,5	2,6	3,2
	ΔT_{cr} (°C)										
25	16,12	16,67	16,84	17,06	17,36	17,70	17,77	17,87	18,03	18,16	18,33
30	17,22	17,81	18	18,25	18,57	18,94	19,02	19,13	19,30	19,44	19,62
35	18,21	18,85	19,05	19,32	19,67	20,07	20,15	20,27	20,45	20,60	20,80
40	19,12	19,80	20,02	20,30	20,67	21,10	21,18	21,31	21,51	21,67	21,88
45	19,97	20,69	20,91	21,21	21,61	22,06	22,15	22,28	22,49	22,66	22,88
50	20,76	21,52	21,75	22,07	22,49	22,96	23,06	23,20	23,42	23,59	23,83
55	21,51	22,30	22,55	22,88	23,32	23,81	23,91	24,06	24,29	24,47	24,72
60	22,22	23,05	23,31	23,65	24,11	24,62	24,73	24,88	25,12	25,31	25,57
65	22,90	23,75	24,02	24,38	24,85	25,39	25,50	25,66	25,90	26,1	26,37
70	23,54	24,43	24,71	25,08	25,57	26,12	26,24	26,41	26,66	26,86	27,15
75	24,17	25,09	25,37	25,76	26,26	26,84	26,95	27,13	27,39	27,60	27,89
80	24,76	25,72	26,01	26,41	26,93	27,52	27,64	27,82	28,09	28,31	28,61
85	25,34	26,32	26,62	27,03	27,57	28,17	28,30	28,48	28,76	28,99	29,30
90	25,91	26,91	27,22	27,64	28,2	28,82	28,95	29,14	29,43	29,66	29,97

On peut conclure que la charge thermique ΔT_{cr} augmente avec d'augmentation de la classe de béton et le rapport c/d_b . Néanmoins, l'effet de rapport c/d_b sur ΔT_{cr} est relativement faible particulièrement pour des rapports $c/d_b \geq 2$.

IV.6. Comportement thermique du béton après fissuration :



(a) Couronne circulaire en béton fissuré formée à $\Delta T > \Delta T_{cr}$ (b) Béton totalement fissuré à $\Delta T > \Delta T_{sp}$

Figure IV.13. Poutre prismatique en béton armé de barre en PRFV complètement fissurée à $\Delta T = \Delta T_{sp}$

Une couronne circulaire en béton fissuré est formée lorsque $\Delta T > \Delta T_{cr}$, le rayon interne et le rayon externe sont respectivement a et ρ_{cr} .

Les conditions aux limites de surfaces de la couronne fissurée sont [Zaidi, 2006] :

$$\sigma_\rho(\rho = a) = -P \quad \sigma_t = 0 \quad \text{pour} \quad \rho \in [a, \rho_{cr}] \quad (\text{IV.36})$$

$\rho \in [a, \rho_{cr}]$ la contrainte radiale est considérée inversement proportionnelle à ρ , on a :

$$\sigma_\rho(\rho) = \frac{C_1}{\rho} \quad (\text{IV.37})$$

Pour $\rho \in [a, \rho_{cr}]$; avec C_1 : constante de proportionnalité.

Les conditions aux limites de surfaces de la couronne fissurée $\sigma_\rho(a) = -P$ sont utilisées dans l'équation de σ_ρ ci-dessus, on obtient $C_1 = -aP$. Remplaçant l'expression de C_1 dans l'équation de la contrainte radiale σ_ρ ci-dessus, on a donc :

$$\sigma_\rho(\rho) = -\frac{a}{\rho} P \quad (\text{IV.38})$$

Pour $\rho \in [a, \rho_{cr}]$

$\rho = \rho_{cr}$, la contrainte radiale :

$$\sigma_{\rho}(\rho_{cr}) = -\frac{a}{\rho_{cr}} P \quad (\text{IV.39})$$

La déformation radiale :

$$\varepsilon_{c\rho}(\rho) = \frac{du}{d\rho} = -\frac{a}{E_c \rho} P \quad (\text{IV.40})$$

La diminution de l'épaisseur du béton fissuré due à la compression radiale :

$$u_1 = \frac{aP}{E_c} \ln\left(\frac{\rho_{cr}}{a}\right) \quad (\text{IV.41})$$

La déformation circonférentielle à l'interface armature/béton est donnée par:

$$\varepsilon_{ct} = u_1 / a \Leftrightarrow \varepsilon_{ct} = \frac{P}{E_c} \ln\left(\frac{\rho_{cr}}{a}\right) \quad (\text{IV.42})$$

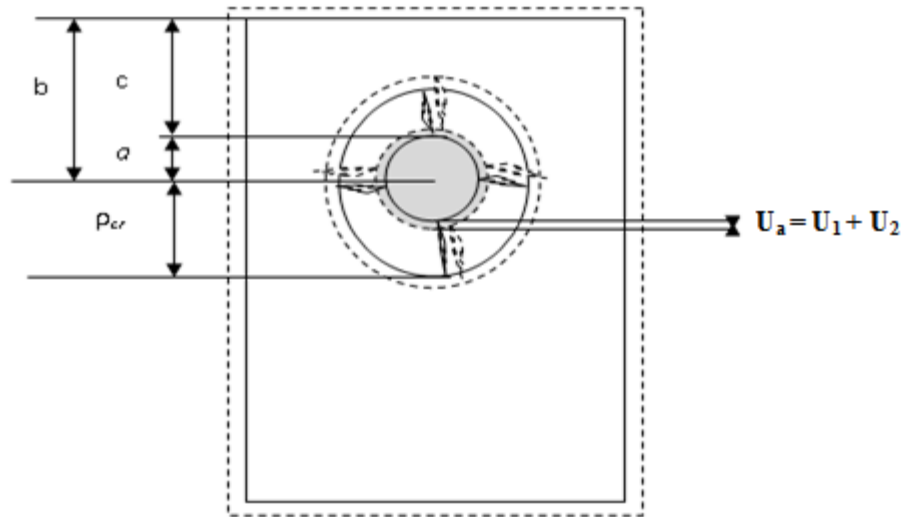


Figure IV.14. Déformation de la couronne en béton fissuré sous la compression radiale à $\Delta T > \Delta T_{cr}$ (ligne discontinue indique la forme après déformation)

Pour le béton non fissuré : $\rho \geq \rho_{cr}$

Pour le béton non fissuré situé entre le rayon interne ρ_{cr} et le rayon externe b , la contrainte radiale (σ_{ρ}) et de la contrainte circonférentielle (σ_t) sont :

$$\sigma_{\rho}(\rho) = \frac{\rho_{cr}^2}{b^2 - \rho_{cr}^2} \left(1 - \frac{b^2}{\rho^2}\right) \frac{a}{\rho_{cr}} P \quad (\text{IV.43})$$

$$\sigma_t(\rho) = \frac{\rho_{cr}^2}{b^2 - \rho_{cr}^2} \left(1 + \frac{b^2}{\rho^2}\right) \frac{a}{\rho_{cr}} P \quad (\text{IV.44})$$

À $\rho = \rho_{cr}$ la contrainte circonférentielle $\sigma_t(\rho_{cr})$ est égale à la résistance à la traction du béton (f_{ct}).

$$\frac{\rho_{cr}^2}{b^2 - \rho_{cr}^2} \left(1 + \frac{b^2}{\rho_{cr}^2} \right) \frac{a}{\rho_{cr}} P = f_{ct} \quad (IV.45)$$

Donc, on obtient l'équation suivante :

$$\left(\frac{\rho_{cr}}{b} \right)^3 + \left(\frac{1}{r} \frac{P}{f_{ct}} \right) \left(\frac{\rho_{cr}}{b} \right)^2 - \left(\frac{\rho_{cr}}{b} \right) + \left(\frac{1}{r} \frac{P}{f_{ct}} \right) = 0 \quad (IV.46)$$

Cette équation permet de déterminer le rayon ρ_{cr} correspondant à la variation de température ΔT_{sp} au-delà de laquelle l'enrobage du béton est totalement fissuré.

L'augmentation du rayon due à la compression radiale hors duquel le béton n'est pas fissuré (la zone non fissurée est considérée comme cylindre creux sous pression interne de $\frac{a}{\rho_{cr}} P$), est donnée par :

$$u_2 = \frac{aP}{E_c} \left(\frac{b^2 + \rho_{cr}^2}{b^2 - \rho_{cr}^2} + \nu_c \right) \quad (IV.47)$$

Il est à noter que l'augmentation u_a du rayon a due à la compression radiale lorsque $\Delta T > \Delta T_{cr}$ est la somme de la diminution de l'épaisseur du béton fissuré (équation IV.41) et l'augmentation du rayon hors duquel le béton n'est pas fissuré (équation IV.47).

$$u_a = \frac{aP}{E_c} \ln\left(\frac{\rho_{cr}}{a}\right) + \frac{aP}{E_c} \left(\frac{b^2 + \rho_{cr}^2}{b^2 - \rho_{cr}^2} + \nu_c \right) \quad (IV.48)$$

En termes de déformation circonférentielle due à la compression radiale et à la variation de température lorsque le béton est fissuré, l'équation IV.48 devient :

$$\varepsilon_{ct} = \frac{P}{E_c} \left[\ln\left(\frac{\rho_{cr}}{a}\right) + \frac{b^2 + \rho_{cr}^2}{b^2 - \rho_{cr}^2} + \nu_c \right] + \alpha_c \Delta T \quad (IV.49)$$

À partir des équations IV.31 et IV.49, l'équation de compatibilité de déformations transversales à l'interface armature/béton lorsque le béton est fissuré, donnée par :

$$\frac{P}{E_c} \left[\ln \left(\frac{\rho_{cr}}{a} \right) + \frac{b^2 + \rho_{cr}^2}{b^2 - \rho_{cr}^2} + \nu_c \right] + \alpha_c \Delta T = \alpha_c \Delta T - \frac{(1 - \nu_{tt})}{E_t} P \quad (IV.50)$$

La solution de l'équation IV.46 dépend de la forme de la section de béton. Des solutions ont été proposées par certains auteurs dont les équations sont :

❖ Equation Aiello et coll. (2001) :

Dans les cas des problèmes réels et pratiques ($1 \leq c/d_b \leq 3$ ou $3 \leq r \leq 7$), l'équation IV.46 :

a une seule solution significative lorsque le rapport $\frac{1}{r} \frac{P}{f_{ct}}$ est situé entre 0,1 et 0,3.

La pression radiale maximale P que le béton peut supporter est donnée par :

$$P = 0,3 f_{ct} r \quad (IV.51)$$

La couronne en béton fissuré au-delà duquel l'enrobage du béton est complètement fissuré :

$$\rho_{cr} = 0,48b \quad (IV.52)$$

La variation de température ΔT_{sp} au-delà de laquelle l'enrobage du béton est totalement fissuré, est déterminée à partir de l'équation IV.50 en substituant P et ρ_{cr} par leurs expressions données respectivement par les équations IV.51 et IV.52:

$$\Delta T_{sp} = \left[\frac{0,3 f_{ct} r}{E_c} [\ln(0,48r) + 1,6 + \nu_c] + \frac{0,3 f_{ct} r}{E_t} (1 - \nu_{tt}) \right] \frac{1}{\alpha_t - \alpha_c} \quad (IV.53)$$

❖ Equation de Zaidi et Coll :

Zaidi et Coll. (2007) proposent un modèle empirique, permettant de prédire la charge thermique (ΔT_{cr}) produisant la rupture d'enrobage du section des poutres en béton armé de barre en PRF. L'équation proposée est obtenue de la manière suivante :

La première fissure apparaît dans le béton à l'interface armature en PRF/béton lorsque la contrainte circonférentielle du béton atteint la résistance à la traction du béton

(équation (IV.34)) :

$$\text{Cette équation devient :} \quad \frac{P}{f_{ct}} = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} \quad (IV.54)$$

La rupture d'enrobage du béton des poutres se produit pour un rapport d'épaisseur d'enrobage du béton au diamètre de la barre en PRF $c/d_b \leq 1,4$ qui est déterminé expérimentalement à partir des poutres en béton armé de barres en PRFV testées sous température de -30°C à + 80°C.

Le rapport maximum de c/d_b qui donne la rupture d'enrobage du béton des poutres est de

1,4 ; ce qui implique que le rapport r est de :

$$r = \frac{2c + d_b}{d_b} = 3,8 \quad (\text{IV.55})$$

Substituant la valeur de r donnée par l'équation 4.53 dans l'équation 4.52, on obtient :

$$\frac{P}{f_{ct}} = 0,87 \quad (\text{IV.56})$$

Le rayon externe ρ_{cr} de la couronne en béton fissuré est obtenu en substituant les rapports P/f_{ct} (équation IV.56) et r (équation IV.55) par leurs valeurs dans l'équation IV.46, on obtient une équation de 3^{ème} degré en ρ_{cr} :

$$\left(\frac{\rho_{cr}}{b}\right)^3 + 0,23\left(\frac{\rho_{cr}}{b}\right)^2 - \left(\frac{\rho_{cr}}{b}\right) + 0,23 = 0 \quad (\text{IV.57})$$

La résolution de cette équation donne trois racines dont deux sont éliminées car elles sont

loin de la réalité pratique et la troisième est donnée par : $\rho_{cr} = 0,72 b$

$$\rho_{cr} = 0,72 b \quad (\text{IV.58})$$

Pour un rapport $r = b/a$, la pression radiale P à partir de laquelle l'enrobage du béton est entièrement fissuré, est déterminée à partir de l'équation IV.46 en substituant le rayon ρ_{cr} par son expression donnée par l'équation IV.58, donc :

$$\Delta T_{sp} = \frac{0,23 f_{ct} r}{(\alpha_t - \alpha_c)} \left[\frac{1}{E_c} [\ln(0,72r) + 3,2 + \nu_c] + \frac{1}{E_t} (1 - \nu_{tt}) \right] \quad (\text{IV.59})$$

Le tableau IV.2 présente les valeurs de la variation de température ΔT_{sp} produisant la rupture d'enrobage du béton prédites par l'équation d' Aiello (IV.53), en fonction de la classe de béton variant de 25 à 90MPa et le rapport d'épaisseur de l'enrobage au diamètre de barre en PRF c/d_b variant de 1,0 à 3,2.

On remarque que la variation de température ΔT_{sp} augmente avec l'augmentation de la classe de béton et aussi le rapport c/d_b .

Comme le montre le tableau IV.2, la charge thermique ΔT_{sp} varie de 21,53 à 33,09°C ; 28,73 à 43,53°C ; 40,04 à 59,87°C ; 47,86 à 71,07°C et de 64,19 à 94,35 correspondant respectivement au rapport c/d_b de 1 ; 1,4 ; 2 ; 2,5 et 3,2 dépendant de la classe de béton variant de 25 à 90MPa.

Pour une augmentation de la classe de béton variant de 25 à 90MPa, la charge thermique ΔT_{sp} augmente avec un taux de 50% environ pour les différents rapports c/d_b . Cette augmentation

est due à l'accroissement de la rigidité de la poutre en béton armé de PRFV. Aussi, on peut observer que pour une même classe de béton, le taux d'augmentation de ΔT_{sp} selon le modèle d'Aiello est de 83% et 60% environ correspondant respectivement aux augmentations de ΔT_{sp} du rapport c/d_b de 1 à 2 et 2 à 3,2.

Tableau IV.2. Variation de température ΔT_{sp} produisant la rupture d'enrobage du béton selon Aiello et coll.

Résistance du béton à la compression (f_c') en (MPa)								
	25	30	40	50	60	70	80	90
c/d_b	$\Delta T_{sp} (^{\circ}C)$							
1	21,53	22,85	25,11	27,05	28,76	30,30	31,72	33,09
1,2	25,09	26,60	29,2	31,41	33,36	35,12	36,74	38,24
1,3	26,50	28,09	30,81	33,13	35,18	37,02	38,72	40,29
1,4	28,73	30,44	33,36	35,85	38,05	40,03	41,85	43,53
1,6	32,44	34,34	37,61	40,37	42,82	45,01	47,03	48,90
1,9	38,44	40,67	44,46	47,68	50,52	53,06	55,40	57,57
2,0	40,04	42,35	46,28	49,62	52,55	55,20	57,62	59,87
2,1	42,73	45,18	49,35	52,89	55,99	58,79	61,35	63,74
2,5	47,86	50,57	55,19	59,10	62,53	65,92	68,45	71,07
2,6	53,31	56,30	61,39	65,7	69,48	72,87	75,98	78,87
3,2	64,19	67,73	73,75	78,84	83,29	87,29	90,96	94,35

Le Tableau IV.3 présente les valeurs de la variation de température ΔT_{sp} produisant la rupture d'enrobage du béton en fonction de la classe de béton variant de 25 à 90MPa et du rapport d'épaisseur d'enrobage au diamètre de barre en PRF c/d_b variant de 1,0 à 3,2 selon l'équation de Zaidi et Coll. (Eq.IV.59). D'après le Tableau IV.3 on remarque que la charge thermique ΔT_{sp} prédite par modèle de Zaidi augmente avec l'augmentation de la classe de béton et aussi le rapport c/d_b car pour une classe de béton variant de 25 à 90MPa, la charge thermique ΔT_{sp} varie de 24,2 à 34,3°C ; 31,8 à 44,7°C ; 43,5 à 60,8°C ; 51,5 à 71,7°C et 68,2 à 94,4°C correspondant respectivement aux rapports c/d_b de 1 ; 1,4 ; 2 ; 2,5 et 3,2. L'augmentation de la classe de béton de 25 à 90 MPa engendre un accroissement de ΔT_{sp} de 40% environ pour des différents rapports c/d_b . Cependant, pour une même classe de béton, la charge thermique ΔT_{sp} s'élève d'un taux de 78% et 56% respectivement pour une augmentation du rapport c/d_b de 1 à 2 et 2 à 3,2. Il est clair que le taux d'augmentation de la charge thermique ΔT_{sp} est moins important pour des rapports c/d_b supérieurs à 2 à cause de la diminution de la pression radiale exercée par la barre en PRFV sur le béton pour des valeurs de c/d_b importantes.

Tableau IV.3. Variation de température ΔT_{sp} produisant la rupture d'enrobage du béton, selon Zaidi et Coll.

Résistance du béton à la compression (f_c') en (MPa)								
	25	30	40	50	60	70	80	90
c/d_b	$\Delta T_{sp} (^{\circ}C)$							
1	24,20	25,41	27,45	29,16	30,64	31,96	33,16	34,27
1,2	27,95	29,34	31,67	33,62	35,31	36,81	38,18	39,44
1,3	29,43	30,89	33,33	35,37	37,15	38,72	40,16	41,48
1,4	31,76	33,33	35,96	38,14	40,04	41,73	43,27	44,69
1,6	35,63	37,37	40,29	42,73	44,84	46,71	48,42	49,99
1,9	41,85	43,88	47,27	50,10	52,55	54,72	56,69	58,52
2,0	43,50	45,60	49,12	52,05	54,58	56,84	58,88	60,77
2,1	46,27	48,50	52,23	55,33	58,01	60,40	62,56	64,56
2,5	51,53	54,00	58,12	61,55	64,51	67,14	69,53	71,74
2,6	57,11	59,83	64,37	68,14	71,40	74,29	76,91	79,33
3,2	68,17	71,40	76,75	81,20	85,04	88,44	91,53	94,37

IV.7.Conclusion :

Ce chapitre décrit les modèles analytiques développés au littérature. L'analyse des résultats analytiques permet de tirer quelques conclusions telles que:

- La variation de température ΔT_{cr} prédites par le modèle analytique produisant la première fissure dans le béton à l'interface armature/béton des poutres en béton armé de PRFV varie de 16 °C à 30°C pour un rapport d'enrobage de béton au diamètre de barre en PRF c/d_b variant de 1,0 à 3,2 et une classe de béton variant de 25 à 90 MPa.
- La charge thermique ΔT_{cr} augmente avec l'augmentation de la classe de béton et le rapport c/d_b . Néanmoins, l'effet de rapport c/d_b sur ΔT_{cr} est relativement faible particulièrement pour les rapports c/d_b supérieurs à 2.
- La charge thermique ΔT_{sp} prédite par le modèle d'Aiello, produisant la rupture d'enrobage de béton des poutres en béton armé de PRFV, varie de 21,5 à 33,1°C ; 28,7 à 43,5°C ; 40 à 59,9°C ; 47,9 à 71,1°C et de 64,2 à 94,3°C correspondant respectivement aux rapports c/d_b de 1 ; 1,4 ; 2 ; 2,5 et 3,2 dépendant de la classe de béton allant de 25 à 90MPa.
- La charge thermique ΔT_{sp} évaluée par le modèle de Zaidi, produisant la rupture d'enrobage de béton des poutres en béton armé de PRFV, en faisant varier la classe de béton de 25 à 90MPa, est de 24,2 à 34,3°C ; 31,8 à 44,7°C ; 43,5 à 60,8°C ; 51,5 à 71,7°C et 68,2 à 94,4°C correspondant respectivement aux rapports c/d_b de 1 ; 1,4 ; 2 ; 2,5 et 3,2.

- Selon les modèles analytiques, l'augmentation de la classe de béton de 25 à 90MPa produit un accroissement de la charge thermique de rupture de l'enrobage de béton ΔT_{sp} de 40% selon le modèle de Zaidi et de 50% selon le modèle d'Aiello et ceci pour des différentes valeurs de rapports c/d_b . Ceci implique que la charge thermique ΔT_{sp} d'un béton de haute performance est de 1,4 à 1,5 fois celle d'un béton ordinaire. En conséquence, les béton de haute performance retardent énormément la rupture d'enrobage du béton armé de PRFV.
- Les courbes de déformations thermiques transversales déterminées par le modèle analytique basé sur la théorie d'élasticité, sont linéaire. Ces déformations diminuent avec l'augmentation de la classe de béton. Néanmoins, l'influence de la variation de la classe de béton sur les déformations thermiques transversales est relativement faible pour des rapports de c/d_b importants à cause de la diminution de la pression radiale exercée par la barre sur le béton pour des valeurs de c/d_b assez grandes ($c/d_b \geq 2$)

CHAPITRE V

COMPARAISON DES RÉSULTATS NUMÉRIQUES ET ANALYTIQUES

V. COMPARAISON DES RÉSULTATS NUMÉRIQUES ET ANALYTIQUES

V.1. Introduction :

Ce chapitre présente la comparaison des résultats prédits par le modèle numérique non-linéaire à ceux obtenus à partir du modèle analytique en termes des déformations thermiques transversales, des contraintes de traction, des charges thermiques ΔT_{cr} produisant la première fissure dans le béton à l'interface armature PRF/béton et les charges thermiques ΔT_{sp} produisant la rupture totale d'enrobage du béton en fonction la classe de béton et le rapport d'épaisseur de l'enrobage de béton au diamètre de la barre en PRF (c/d_b) pour des poutres prismatique en béton armé de barres en PRFV de confinement asymétrique (Figure V.1) soumises à des hautes variations de températures.

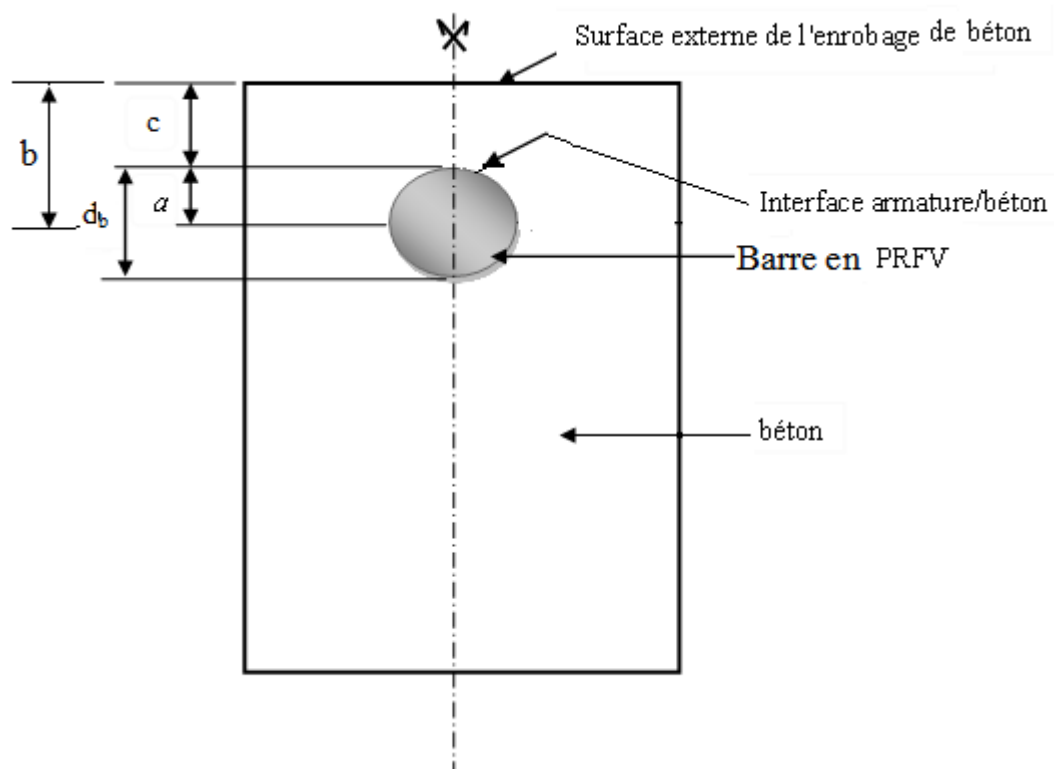


Figure V.1. Section de la poutre prismatique en spécifiant la surface externe de l'enrobage du béton et l'interface armature en PRF/béton étudiés

V.2. Charges thermiques de fissuration :

V.2.1. Variation de température ΔT_{cr} produisant la première fissure :

Le Tableau V.1 présente la comparaison entre les charges thermiques ΔT_{cr} , produisant la première fissure radiale dans le béton à l'interface armature/béton, prédites par le modèle numérique et celles obtenues par le modèle analytique pour des poutres prismatiques en béton armé de barres en PRF tout en faisant varier la résistance à la compression du béton (f_c') de 25 à 90MPa et le rapport de l'épaisseur d'enrobage de béton au diamètre de la barre en PRF (c/d_b) de 1 à 3,2.

On peut remarquer que la variation de température ΔT_{cr} augmente avec l'augmentation de la classe de béton et le rapport (c/d_b). Aussi, on peut remarquer que les valeurs de ΔT_{cr} prédites par le modèle numérique sont relativement proches de celles obtenues par le modèle analytique. L'écart entre les valeurs de ΔT_{cr} des deux modèles ne dépasse en aucun cas la valeur de 5°C pour une même classe béton et même rapport c/d_b . Ceci est dû à l'incrément de la charge thermique ΔT qui est fixé à 5°C pour ADINA (voir Tableau III.5).

Tableau V.1. Comparaison des valeurs de ΔT_{cr} en fonction de (f_c') et (c/d_b).

f _c ' (MPa)	c/d _b									
	1		1,4		1,6		2		3,2	
	ΔT _{cr} (°C)									
	*Anal	*Num	Anal	Num	Anal	Num	Anal	Num	Anal	Num
25	16,1	20	17,0	20	17,3	20	17,7	20	18,3	20
30	17,2	20	18,2	20	18,5	20	19,0	20	19,6	20
35	18,2	20	19,3	20	19,6	20	20,1	20	20,8	25
40	19,1	20	20,3	20	20,6	25	21,1	25	21,8	25
45	19,9	20	21,2	25	21,6	25	22,1	25	22,8	25
50	20,7	20	22,0	25	22,4	25	23,0	25	23,8	25
55	21,5	20	22,8	25	23,3	25	23,9	25	24,7	25
60	22,2	25	23,6	25	24,1	25	24,7	25	25,5	25
65	22,9	25	24,3	25	24,8	25	25,5	25	26,3	30
70	23,5	25	25,0	25	25,5	30	26,2	30	27,1	30
75	24,1	25	25,7	30	26,2	30	26,9	30	27,8	30
80	24,7	25	26,4	30	26,9	30	27,6	30	28,6	30
85	25,3	30	27,0	30	27,5	30	28,3	30	29,3	35
90	25,9	30	27,6	30	28,2	30	28,9	30	29,9	35

f_c' : Résistance du béton à la compression, *Anal : Analytique, *Num : Numérique.

V.2.2. Variation de température ΔT_{sp} produisant la rupture complète d'enrobage de béton :

Le tableau V.2 présente la comparaison entre les variations de température ΔT_{sp} , produisant la rupture d'enrobage du béton, obtenues par le modèle numérique et celles obtenues par les modèles analytiques pour des poutres en béton armé de barres en PRFV de classe de béton variant de 25 à

90MPa et du rapport de l'épaisseur d'enrobage de béton au diamètre de barre en PRF (c/d_b) variant de 1 à 3,2. D'après ce tableau en remarque que les valeurs de ΔT_{sp} prédites par le modèle numérique sont relativement supérieures par rapport à celles obtenues par les équations d'Aiello et Zaidi. Ceci est dû d'une part à l'incrément de l'augmentation de la température ΔT qui est fixé à 5°C au logiciel ADINA (voir Tableau III.5) et d'autre part à la présence des éléments en béton qui ne sont pas totalement fissurés dans la couronne circulaire de béton fissuré entourant la barre en PRFV, et qui emmagasinent encore de l'énergie ce qui a retardé la rupture de béton. On recommande pour des futures études de diminuer l'incrément de l'augmentation de la charge thermique à 2°C au lieu de 5°C.

Tableau V.2. Comparaison des valeurs de ΔT_{sp} en fonction de (f_c') et (c/d_b).

f_c' (MPa)	c/d_b	ΔT_{sp} (°C)		
		Equation Aiello	Equation de Zaidi	Modèle numérique
25	1	21,53	24,20	30
	1,2	25,09	27,95	35
	1,3	26,50	29,43	40
	1,4	28,73	31,76	45
	1,6	32,44	35,63	50
	1,9	38,44	41,85	50
	2	40,04	43,50	55
	2,1	42,73	46,27	55
	2,5	47,86	51,53	55
	2,6	53,31	57,11	60
	3,2	64,19	68,17	70
30	1	22,85	25,41	35
	1,2	26,60	29,34	40
	1,3	28,09	30,89	40
	1,4	30,44	33,33	45
	1,6	34,34	37,37	50
	1,9	40,67	43,88	50
	2	42,35	45,60	55
	2,1	45,18	48,50	55
	2,5	50,57	54,00	55
	2,6	56,30	59,83	60
	3,2	67,73	71,40	>70
35	1	24,03	26,49	40
	1,2	27,96	30,57	40
	1,3	29,51	32,17	45
	1,4	31,97	34,71	45
	1,6	36,05	38,91	50
	1,9	42,65	45,67	55
	2	44,41	47,46	60

	2,1	47,36	50,46	60
	2,5	52,99	56,17	65
	2,6	58,97	62,22	>70
	3,2	70,89	74,22	>70
40	1	25,11	27,45	40
	1,2	29,2	31,67	40
	1,3	30,81	33,33	45
	1,4	33,36	35,96	45
	1,6	37,61	40,29	50
	1,9	44,46	47,27	55
	2	46,28	49,12	60
	2,1	49,35	52,23	60
	2,5	55,19	58,12	>70
	2,6	61,39	64,37	>70
	3,2	73,75	76,75	> 70
45	1	26,11	28,34	45
	1,2	30,34	32,68	45
	1,3	32,01	34,39	50
	1,4	34,65	37,09	50
	1,6	39,03	41,55	55
	1,9	46,12	48,74	60
	2	48,01	50,64	65
	2,1	51,18	53,84	65
	2,5	57,21	59,90	>70
	2,6	63,62	66,32	>70
	3,2	76,38	79,06	> 70
50	1	27,05	29,16	45
	1,2	31,41	33,62	45
	1,3	33,13	35,37	50
	1,4	35,85	38,14	50
	1,6	40,37	42,73	60
	1,9	47,68	50 ,10	60
	2	49,62	52,05	65
	2,1	52,89	55,33	65
	2,5	59,10	61,55	>70
	2,6	65,7	68,14	>70
	3,2	78,84	81,20	> 70
55	1	27,92	29,92	50
	1,2	32,41	34,49	50
	1,3	34,18	36,29	55
	1,4	36,98	39,12	60
	1,6	41,63	43,81	60
	1,9	49,13	51,36	60
	2	51,13	53,35	>70
	2,1	54,48	56,71	>70
	2,5	60,86	63,07	> 70
	2,6	67,64	69,82	>70
	3,2	81,13	83,18	> 70
60	1	28,76	30,64	50

	1,2	33,36	35,31	50
	1,3	35,18	37,15	55
	1,4	38,05	40,04	60
	1,6	42,82	44,84	60
	1,9	50,52	52,55	60
	2	52,55	54,58	>70
	2,1	55,99	58,01	>70
	2,5	62,53	64,51	> 70
	2,6	69,48	71,40	>70
	3,2	83,29	85,04	> 70
65	1	29,54	31,32	50
	1,2	34,26	36,08	50
	1,3	36,12	37,95	55
	1,4	39,06	40,91	60
	1,6	43,94	45,80	60
	1,9	51,82	53,66	65
	2	53,91	55,74	>70
	2,1	57,43	59,24	>70
	2,5	64,11	65,86	> 70
	2,6	71,22	72,88	>70
70	1	30,30	31,96	50
	1,2	35,12	36,81	50
	1,3	37,02	38,72	55
	1,4	40,03	41,73	60
	1,6	45,01	46,71	60
	1,9	53,06	54,72	65
	2	55,20	56,84	>70
	2,1	58,79	60,40	>70
	2,5	65,92	67,14	> 70
	2,6	72,87	74,29	>70
75	1	31,02	32,57	50
	1,2	35,94	37,51	50
	1,3	37,89	39,46	55
	1,4	40,95	42,52	60
	1,6	46,04	47,59	60
	1,9	54,26	55,73	> 70
	2	56,43	57,89	>70
	2,1	60,10	61,51	> 70
	2,5	67,07	68,37	> 70
	2,6	74,47	75,64	>70
80	3,2	89,17	90,03	> 70
	1	31,72	33,16	50
	1,2	36,74	38,18	50
	1,3	38,72	40,16	55
	1,4	41,85	43,27	60
	1,6	47,03	48,42	60
	1,9	55,40	56,69	> 70

	2	57,62	58,88	>70
	2,1	61,35	62,56	> 70
	2,5	68,45	69,53	> 70
	2,6	75,98	76,91	>70
	3,2	90,96	91,53	> 70
85	1	32,38	33,72	50
	1,2	37,49	38,82	50
	1,3	39,51	40,83	55
	1,4	42,70	43,99	60
	1,6	47,98	49,22	60
	1,9	56,50	57,62	> 70
	2	58,76	59,84	>70
	2,1	62,56	63,57	> 70
	2,5	69,78	70,65	> 70
	2,6	77,44	78,14	>70
	3,2	92,68	92,97	> 70
90	1	33,09	34,27	50
	1,2	38,24	39,44	50
	1,3	40,29	41,48	55
	1,4	43,53	44,69	60
	1,6	48,90	49,99	60
	1,9	57,57	58,52	> 70
	2	59,87	60,77	>70
	2,1	63,74	64,56	> 70
	2,5	71,07	71,74	> 70
	2,6	78,87	79,33	>70
	3,2	94,35	94,37	> 70

f_c' : Résistance du béton à la compression.

V.3. Déformations thermiques transversales :

V.3.1. Déformations thermiques transversales à l'interface armature PRF/béton :

Les figures V.2 à V.4 montrent la comparaison entre les courbes analytiques et numériques des déformations thermiques transversales à l'interface armature en PRF/béton en fonction de la variation de température et les classes de béton typique (25 et 90MPa) pour des rapports c/d_b de 1 ; 2 et 3,2 respectivement. D'après ces figures, on remarque que les valeurs de déformation thermique transversale prédites par le modèle numérique, à l'interface armature en PRF/béton, sont en bon accord avec les résultats analytiques jusqu'aux valeurs de ΔT_{cr} variant de 20 à 35°C, dépendant de la classe de béton et du rapport c/d_b , à partir desquelles le modèle numérique non linéaire exhibent des valeurs assez importantes à cause de la présence des fissures dans le béton à l'interface et qui n'a pas été prise en considération dans le modèle analytique basé sur la théorie d'élasticité.

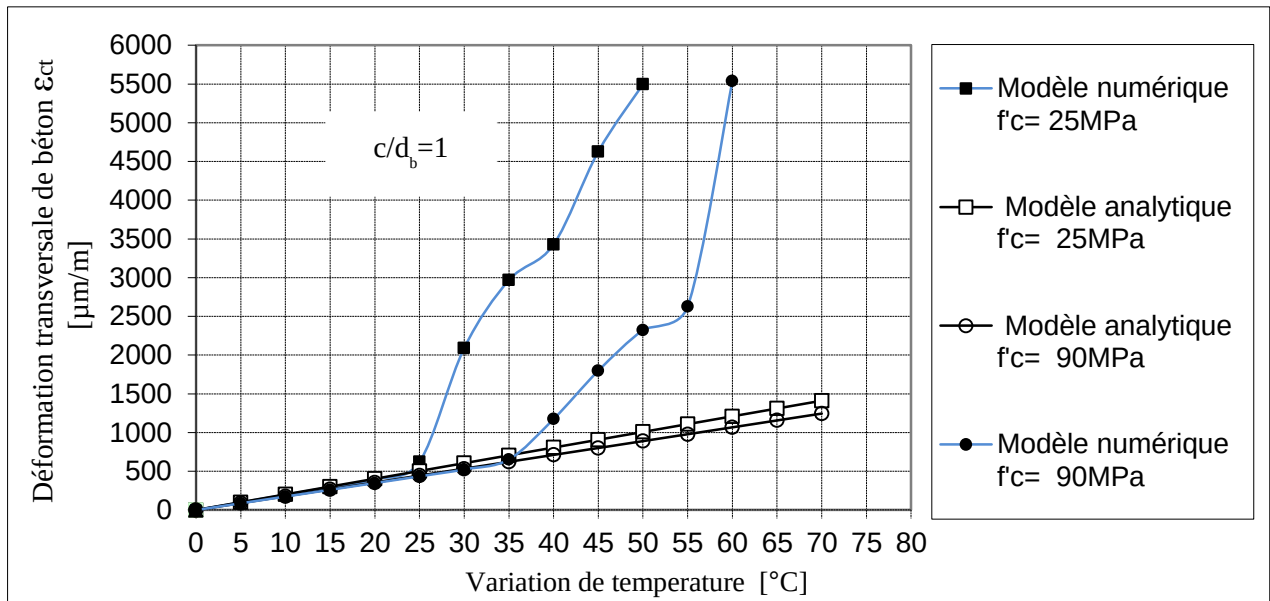


Figure V.2. Déformation thermique transversale du béton à l'interface armature en PRF/béton des poutres P.#25.25 – Comparaison entre les résultats numériques obtenus par ADINA et les résultats analytiques ($c/d_b = 1$)

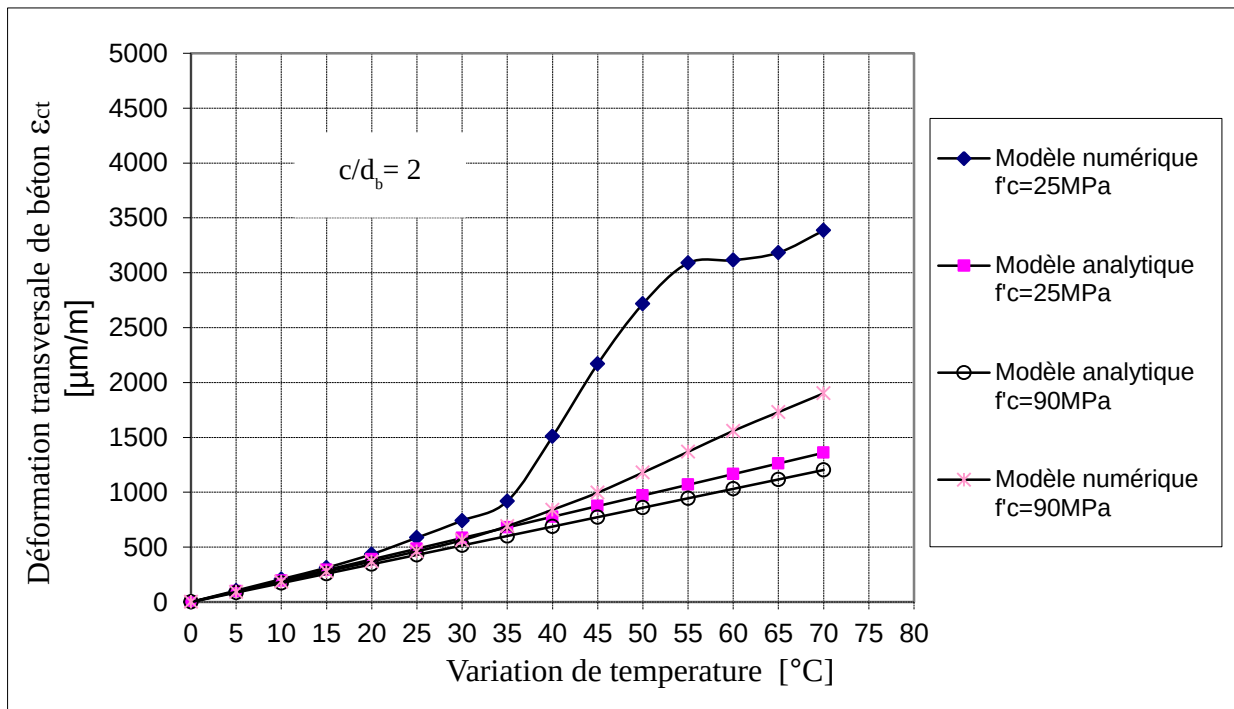


Figure V.3. Déformation thermique transversale du béton à l'interface armature en PRF/béton des poutres P.#13.25 – Comparaison entre les résultats numériques obtenus par ADINA et les résultats analytiques ($c/d_b = 2$)

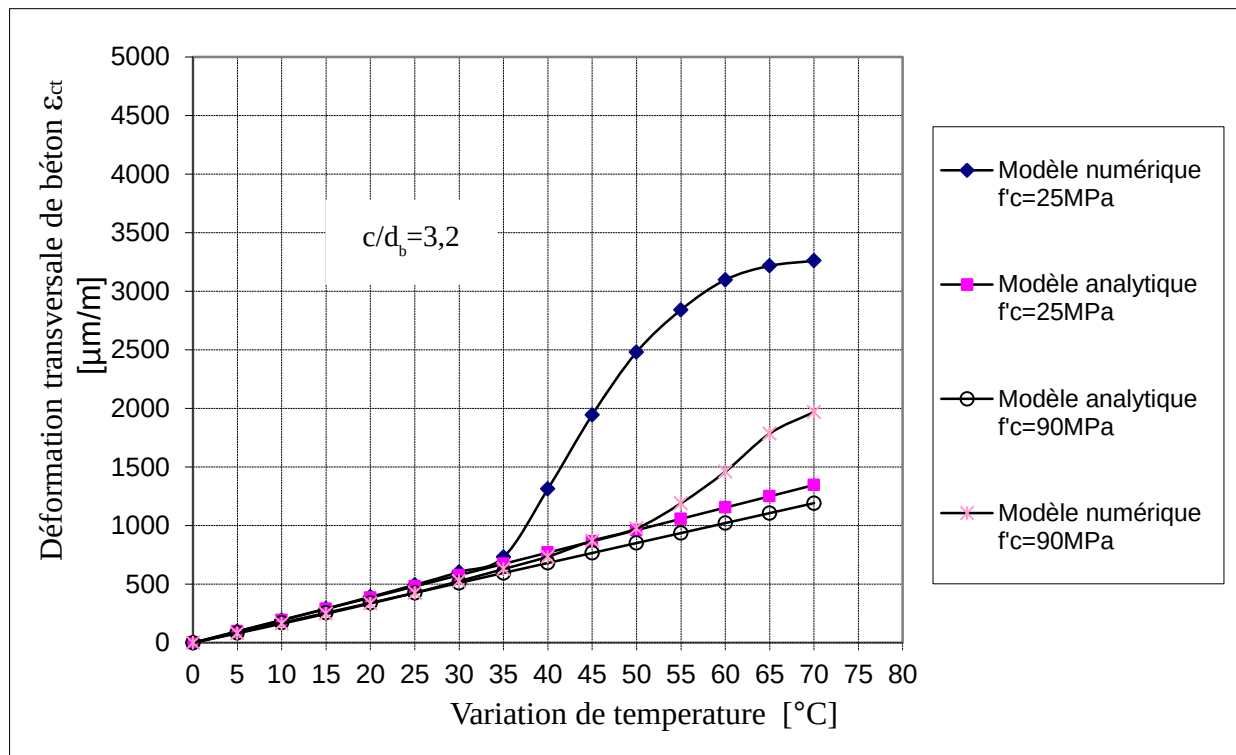


Figure V.4. Déformation thermique transversale du béton à l'interface armature en PRF/béton des poutres P.#10.30 – Comparaison entre les résultats numériques obtenus par ADINA et les résultats analytiques ($c/d_b = 3,2$)

V.3.2. Déformations thermiques transversale à la surface externe de l'enrobage du béton:

Les figures V.5 à V.7 montrent la comparaison entre les courbes analytiques et numériques de déformations thermiques transversales du béton sur la surface externe de l'enrobage des poutres prismatiques en béton armé de barres en PRF de verre. Ces figures typiques montrent que les déformations transversales à la surface externe de l'enrobage de béton obtenues à partir du modèle numérique non-linéaire sont similaires à celles prédites par le modèle analytique linéaire jusqu'aux valeurs de ΔT variant de 30 à 65°C à partir desquelles les déformations numériques sont relativement plus grandes particulièrement pour les faibles rapports c/d_b (≤ 2) et faible classe de béton (25MPa). Cette augmentation de la déformation est due à la fissuration partielle ou totale de l'enrobage de béton qui n'a pas été considérée dans l'établissement du modèle analytique linéaire.

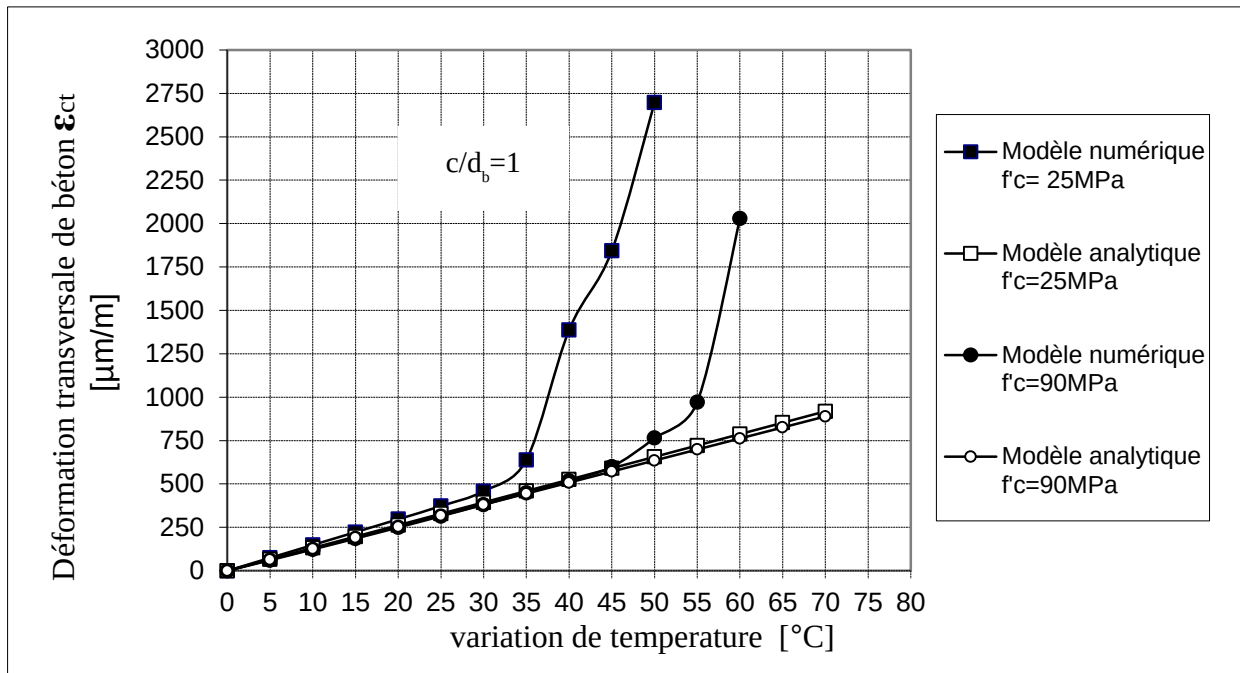


Figure V.5. Déformation thermique transversale du béton (ϵ_{ct}) à la surface externe de l'enrobage du béton de poutre P.#25.25– Comparaison entre les résultats numériques obtenus par ADINA et les résultats analytiques pour des poutres de rapport $c/d_b = 1$ et de classe de béton 25 et 90MPa

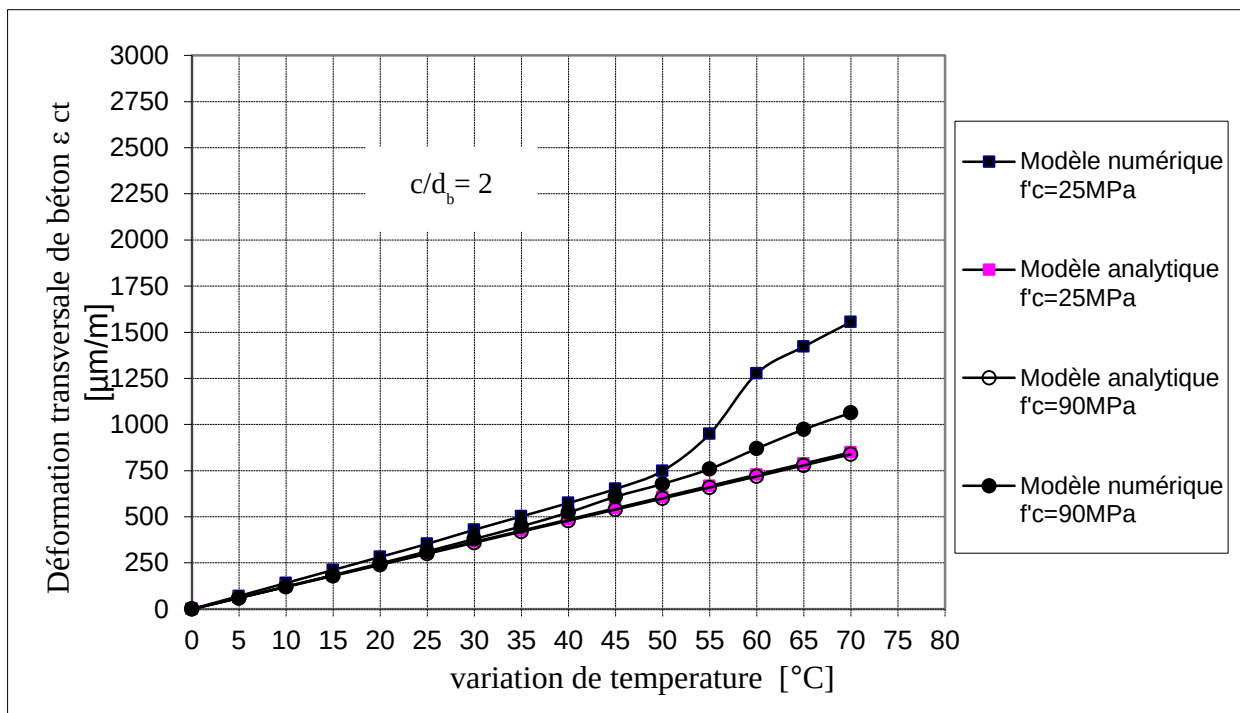


Figure V.6. Déformation thermique transversale du béton (ϵ_{ct}) à la surface externe de l'enrobage du béton de poutre P.#13.25– Comparaison entre les résultats numériques obtenus par ADINA et les résultats analytiques pour des poutres de rapport $c/d_b = 2$ et de classe de béton 25 et 90MPa

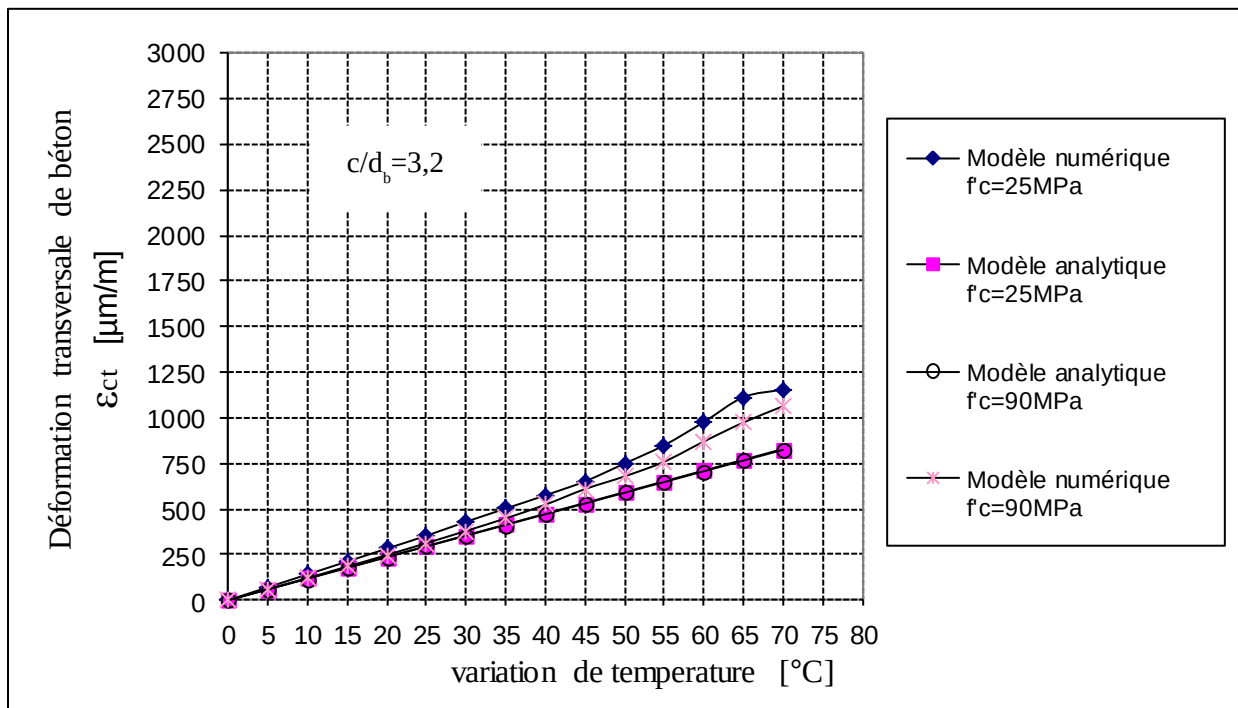


Figure V.7. Déformation thermique transversale du béton (ϵ_{ct}) à la surface externe de l'enrobage du béton de poutre P.#10.30– Comparaison entre les résultats numériques obtenus par ADINA et les résultats analytiques pour des poutres de rapport $c/d_b = 3,2$ et de classe de béton 25 et 90MPa

V.4. Contraintes de traction circonférentielle du béton:

Les figures V.8 à V.10 illustrent la comparaison entre les courbes analytiques prédites par le modèle analytique et les courbes numériques obtenues par ADINA en termes des contraintes de traction circonférentielle du béton, à l'interface armature en PRF/béton, des poutres prismatiques en béton armé de barre en PRF de verre ayant un rapport d'enrobage de béton au diamètre de barre en PRF (c/d_b) de 1 ; 1,9 et 3,2 respectivement, et ceci pour trois classes typiques de béton (25 ; 50 et 90 MPa). À partir de ces figures, on peut noter que les contraintes de traction circonférentielle dans le béton, à l'interface armature en PRF/béton, prédites par le modèle numérique sont en bon accord avec celles évaluées par le modèle analytique jusqu'aux valeurs de ΔT_{cr} , à partir desquelles le modèle numérique donne des valeurs plus faibles à cause des fissures qui n'ont pas été prises en considération dans le modèle analytique linéaire.

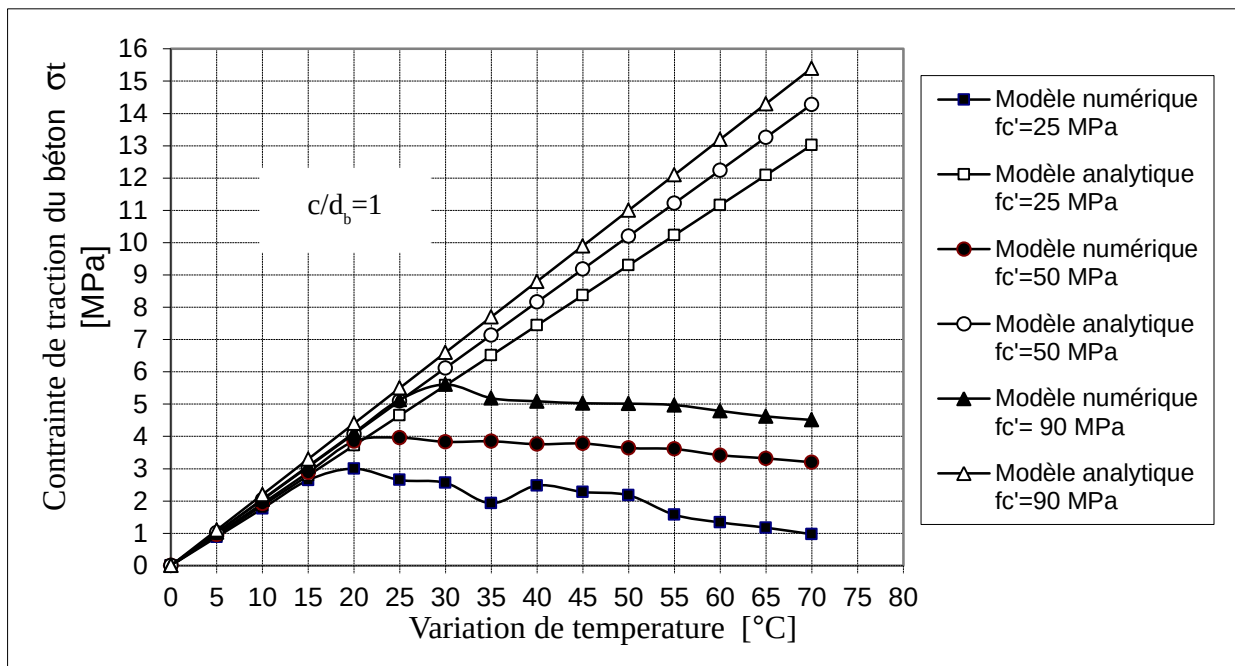


Figure V.8. Contraintes de traction circonférentielle du béton à l'interface armature en PRF/béton de poutres P.#25.25 – Comparaison entre les résultats numériques obtenus par ADINA et les résultats analytiques ($c/d_b = 1$)

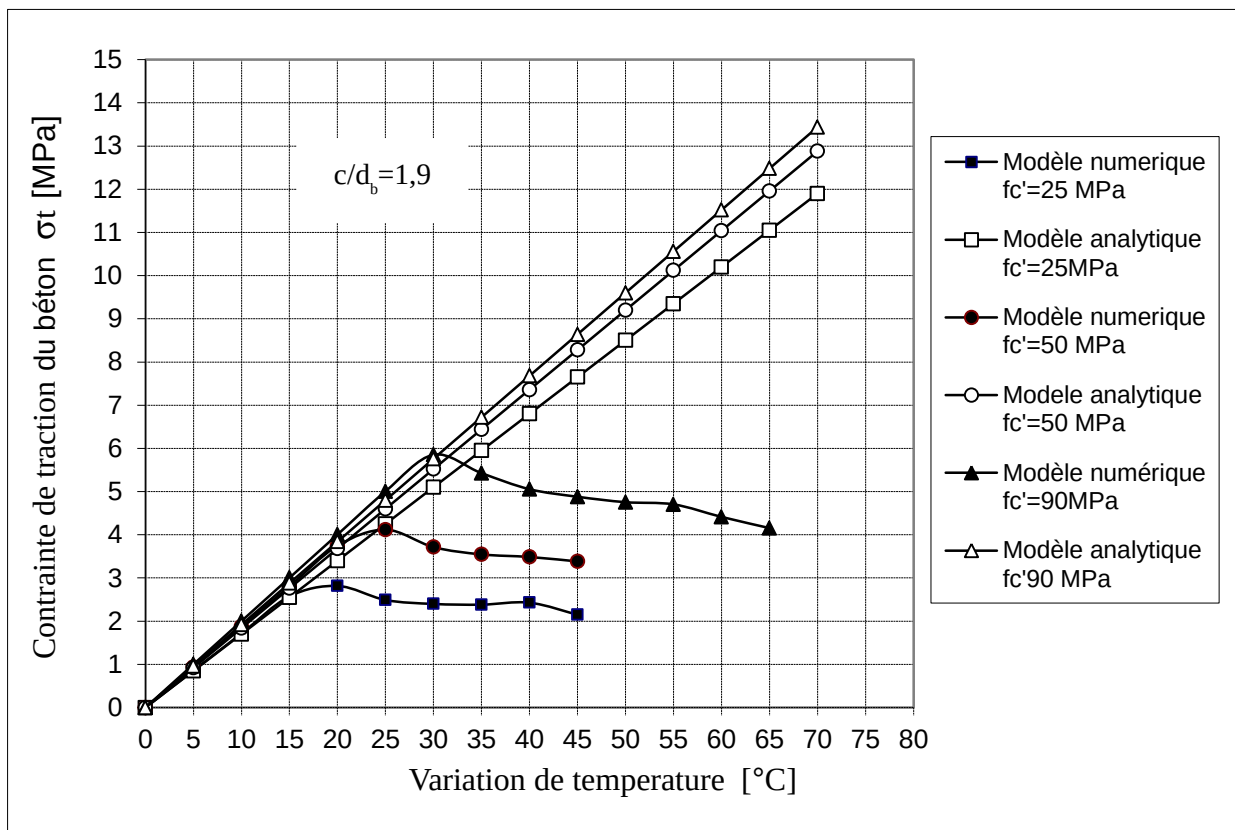


Figure V.9. Contraintes de traction circonférentielle du béton à l'interface armature en PRF/béton des poutres P.#16.30 – Comparaison entre les résultats numériques obtenus par ADINA et ceux du modèle analytiques ($c/d_b = 1,9$)

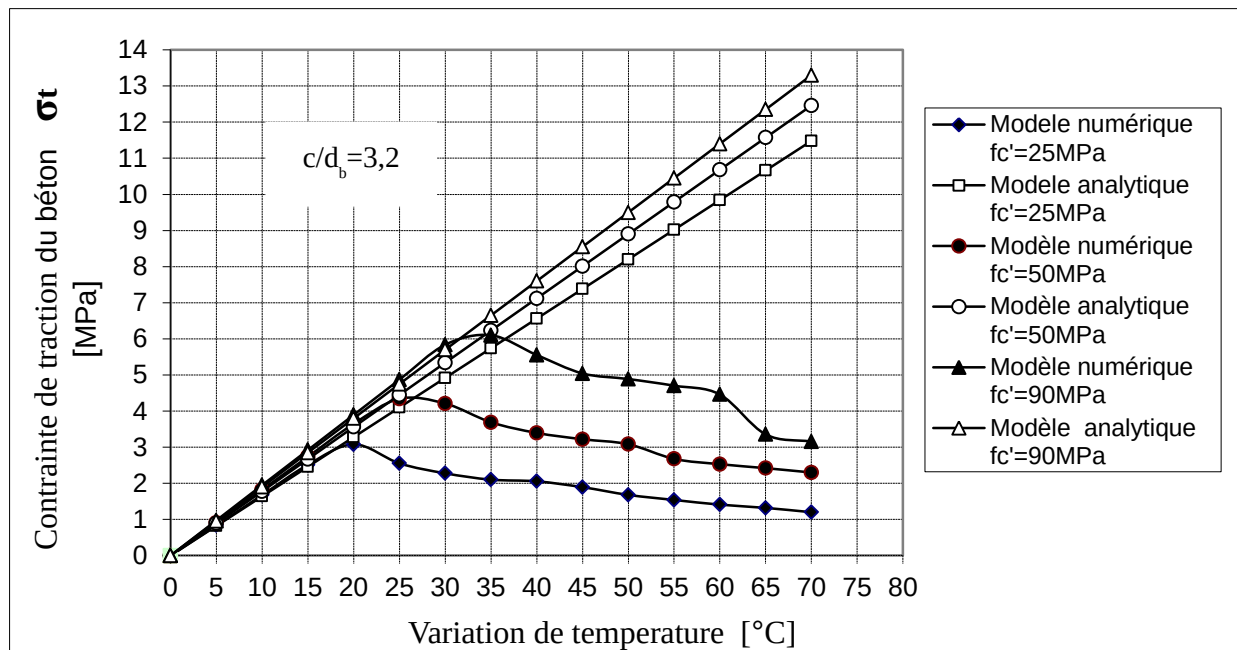


Figure V.10. Contraintes de traction circonférentielle du béton à l'interface armature en PRF/béton des poutres P.#10.30 – Comparaison entre les résultats numériques obtenus par ADINA et ceux du modèle analytiques ($c/d_b = 3,2$)

V.5. Conclusion:

L'analyse comparative des résultats analytique et numériques traitée dans ce chapitre permet de tirer les conclusions les suivantes :

- Les charges thermiques ΔT_{cr} produisant les premières fissures dans le béton à l'interface armature PRF/béton des poutres, prédites par le modèle numérique sont presque similaires à celles obtenues par le modèle analytique.
- Les charges thermiques ΔT_{sp} , produisant la rupture de l'enrobage de béton des poutres, prédites par le modèle numérique sont relativement supérieures à celles évaluées par les modèles analytiques d'Aiello et Zaidi pour certains rapports c/d_b et classes de béton. Ceci est dû d'une part à l'incrément de l'augmentation de température ΔT fixé à 5°C au logiciel ADINA et d'autre part à la présence des éléments en béton qui ne sont pas totalement fissurés dans la couronne en béton fissurée entourant la barre en PRFV, ce qui a retardé la rupture de béton contrairement aux modèles d'Aiello et Zaidi qui négligent la résistance du béton à la traction dans la couronne en béton fissuré.
- Les déformations thermiques transversales obtenues par le modèle numérique, à l'interface armature PRF/béton des poutres, sont en bon accord avec les résultats analytiques jusqu'aux valeurs de ΔT_{cr} variant de 20 à 35 °C, dépendant de la classe de béton et de rapport c/d_b à partir desquelles le modèle numérique donne des valeurs assez importantes à cause de la présence des fissures dans le béton à l'interface et qui n'a pas été considérée dans le modèle analytique linéaire.
- Les déformations thermiques transversales numériques à la surface externe de l'enrobage de béton sont similaires à celles prédites par le modèle analytique jusqu'aux valeurs de ΔT variant de 30 à 65°C à partir desquelles les déformations numériques sont relativement plus grandes particulièrement pour les faibles rapports c/d_b et les faibles classes de béton. Cette augmentation de déformation est due à la fissuration partielle ou totale de l'enrobage de béton qui n'a pas été prise en compte dans le modèle analytique.
- Les résultats numériques en termes de contraintes de traction circonférentielle, à l'interface armature PRF/béton, sont en bon accord avec les résultats analytiques jusqu'aux valeurs de ΔT_{cr} produisant les premières fissures dans le béton à l'interface. Cependant, pour des charges thermiques ΔT supérieures à ΔT_{cr} , les résultats analytiques sont plus grands car le modèle analytique ignore la présence des fissures dans le béton.

CONCLUSION
GÉNÉRALE ET
RECOMMANDATIONS

CONCLUSION GÉNÉRALE ET RECOMMANDATIONS

L'analyse des résultats prédits par le modèle numérique non-linéaire et le modèle analytique en termes de contraintes de traction, de déformations transversales, de charges thermiques ΔT_{cr} produisant la première fissure dans le béton à l'interface armature/béton et les charges thermiques ΔT_{sp} produisant la rupture totale d'enrobage du béton, en fonction la classe de béton et le rapport d'épaisseur de l'enrobage de béton au diamètre de la barre en PRF (c/d_b) pour des poutres prismatiques en béton armé de barres en PRF de verre (PRFV) de confinement asymétrique soumises à des hautes variations de température, permet de dresser les conclusions suivantes :

- 1- Les courbes de contraintes de traction thermique transversales dans le béton, prédites par le modèle numérique à l'interface armature en PRF/béton des poutres, sont linéaires jusqu'aux valeurs de ΔT_{cr} variant de 20 à 35°C dépendant de la classe du béton variant de 25 à 90MPa et de rapport de l'épaisseur d'enrobage de béton au diamètre de la barre en PRF (c/d_b). Pour des valeurs de variation de température (ΔT) supérieures à ΔT_{cr} , les contraintes de traction diminuent brusquement à cause de l'apparition des premières fissures dans le béton à l'interface armature PRF/béton.
- 2- Les charges thermiques numériques ΔT_{cr} produisant les premières fissures dans le béton à l'interface de barre en PRF/béton varient de 20°C à 35°C pour des classes de béton et des rapports c/d_b variant respectivement de 25 à 90 MPa et de 1 à 3,2.
- 3- Les charges thermiques numériques ΔT_{sp} produisant la rupture de l'enrobage du béton des poutres en béton armé de barres en PRFV de confinement asymétrique, varient de 30 à 50°C, 45 à 60°C, et de 55 à plus de 70°C pour des rapports c/d_b de 1; 1,4 et 2 respectivement dépendant de la classe de béton variant de 25 à 90MPa. Ces charges thermiques des ruptures augmentent avec l'augmentation de la classe de béton et le rapport c/d_b .
- 4- Aucune fissure radiale n'a atteint la surface externe de l'enrobage de béton des poutres en béton armé de barre en PRF sous charge thermique allant jusqu'à 70°C pour des bétons ordinaires de classe 40MPa et de rapport $c/d_b > 2,5$.
- 5- Pour les régions d'extrême sud Algérien de température climatique au plus égale à 70°C (correspondant à une charge thermique de 50°C par rapport à la température de référence de 20°C), un rapport $c/d_b \geq 2$ et une classe de béton au moins égale à 25 MPa semblent être suffisants afin d'éviter la rupture de l'enrobage de béton des poutres en béton armé de barre en PRF de confinement asymétrique.
- 6- L'effet de la classe de béton sur la déformation thermique transversale numérique à l'interface armature PRF/béton est relativement faible pour des charges thermiques inférieures à ΔT_{cr} . Cependant, pour des charges thermiques ΔT supérieures à ΔT_{cr} , la déformation thermique transversale diminue avec l'augmentation de la classe de béton.
- 7- Selon les modèles analytiques, l'augmentation de la classe de béton de 25 à 90MPa produit un accroissement de la charge thermique de rupture de l'enrobage de béton ΔT_{sp} de 40% selon le modèle de Zaidi et de 50% selon le modèle d'Aiello et ceci pour des différentes valeurs de rapports c/d_b . Ceci implique que la charge thermique ΔT_{sp} d'un béton de haute performance est

de 1,4 à 1,5 fois celle d'un béton ordinaire. En conséquence, les bétons de haute performance retardent énormément la rupture d'enrobage du béton des structures en béton armé de barres en PRFV.

- 8- Les courbes de déformations thermiques transversales déterminées par le modèle analytique basé sur la théorie d'élasticité, sont linéaires. Ces déformations diminuent avec l'augmentation de la classe de béton. Néanmoins, l'influence de la variation de la classe de béton sur les déformations thermiques transversales est relativement faible pour des rapports de c/d_b importants à cause de la diminution de la pression radiale exercée par la barre sur le béton pour des valeurs de c/d_b assez grandes ($c/d_b > 2$).
- 9- Les charges thermiques ΔT_{cr} produisant les premières fissures dans le béton à l'interface armature PRF/béton des poutres, prédites par le modèle numérique sont presque similaires à celles obtenues par le modèle analytique.
- 10- Les charges thermiques ΔT_{sp} , produisant la rupture de l'enrobage de béton des poutres, prédites par le modèle numérique sont relativement supérieures à celles évaluées par les modèles analytiques d'Aiello et Zaidi pour certains rapports c/d_b et classes de béton. Ceci est dû d'une part à l'incrément de l'augmentation de température ΔT fixé à 5°C au logiciel ADINA. D'autre part à la présence des éléments en béton qui ne sont pas totalement fissurés dans la couronne en béton fissurée entourant la barre en PRFV. Ce qui a retardé la rupture de béton contrairement aux modèles d'Aiello et Zaidi qui négligent la résistance du béton à la traction dans la couronne en béton fissuré.
- 11- Les déformations thermiques transversales obtenues par le modèle numérique, à l'interface armature PRF/béton des poutres, sont en bon accord avec les résultats analytiques jusqu'aux valeurs de ΔT_{cr} variant de 20 à 35 °C, dépendant de la classe de béton et de rapport c/d_b à partir desquelles le modèle numérique donne des valeurs assez importantes à cause de la présence des fissures dans le béton à l'interface et qui n'a pas été considérée dans le modèle analytique linéaire.
- 12- Les déformations thermiques transversales numériques à la surface externe de l'enrobage de béton sont similaires à celles prédites par le modèle analytique jusqu'aux valeurs de ΔT variant de 30 à 65°C à partir desquelles les déformations numériques sont relativement plus grandes particulièrement pour les faibles rapports c/d_b et les faibles classes de béton. Cette augmentation de déformation est due à la fissuration partielle ou totale de l'enrobage de béton qui n'a pas été prise en compte dans le modèle analytique.
- 13- Les résultats numériques en termes de contraintes de traction circonférentielle, à l'interface armature PRF/béton, sont en bon accord avec les résultats analytiques jusqu'aux valeurs de ΔT_{cr} produisant les premières fissures dans le béton à l'interface. Cependant, pour des charges thermiques ΔT supérieures à ΔT_{cr} , les résultats analytiques sont plus grands car le modèle analytique ignore la présence des fissures dans le béton.

Les recommandations que l'on peut tirer de cette étude, sont les suivantes :

- Refaire cette étude pour des poutres en béton armé de barres en PRF de carbone et d'aramide de confinement asymétrique.
- Étudier le comportement des éléments en béton armé de barres en PRF de carbone sous charges combinées mécanique et thermique.
- Refaire cette étude pour des poutres en béton armé de barres en PRF sous basses températures en variant la classe de béton et le rapport d'épaisseur d'enrobage de béton au diamètre de la barre en PRF c/d_b .
- Étudier le comportement thermique des poutres en béton armé de barres en PRF en augmentant la charge thermique ΔT de 0 à 70°C avec un incrément de 2°C au lieu de 5°C étudié dans ce mémoire, on proche aux résultats du modèle analytique.

BIBLIOGRAPHIES

- [1]. ABDALLA, H. (May 2006) *Concrete cover requirements for FRP reinforced members in hot climates*, Composite Structures, vol. 73, n° 1, p. 61-69.
- [2]. AIELLO, M.A. (Feb. 1999) *Concrete cover failure in FRP reinforced beams under thermal loading*, Journal of Composites for Construction, vol. 3, n° 1, p. 46-52.
- [3]. AIELLO, M.A., FOCACCI, F., and NANNI, A. (Nov.1999) *Cracking of Concrete cover in FRP reinforced Concrete elements under thermal loads*, fourth International symposium on FRP for Reinforced Concrete structures(FRPRCS4), Baltimore,MD,p.233-243.
- [4]. AIELLO, M.A., FOCACCI, F., and NANNI, A. (July-August 2001) *Effects of thermal loads on concrete cover of fiber reinforced polymer reinforced elements: Theoretical and experimental analysis*, ACI Materials Journal, vol. 98, n° 4, p. 332-339.
- [5]. ALBADRY,M.M.,ABDALLA,H.,andGHALI,A. (Oct.2000) *Effects of temperature on the behavior of fiber reinforced polymer reinforced concrete members:Experimental studies*, Canadian journal of civil Engineering,vol.27,n°5,p.993-1004.
- [6]. ALVAREZ,A., ZAIDI, A. and MASMOUDI, R. (May 2007)*Bond-slip Behavior of FRP bars under low and high temperature- experimental and Theoretical studies*.3rd International Conference on Durability & Field Applications of Fiber Reinforced polymer(FRP) Composites for Construction, Quebec, Canada.
- [7]. Alla CHATEAUNEUF, 2005, Comprendre les éléments finis : Principes, Formulation et exercices corrigés, Ellipses
- [8]. Alfio Quarteroni, Ricardo Sacco, Fausto Saleri,2007 Méthodes Numériques analyse et applications, Springer .
- [9]. AMERICAN CONCRETE INSTITUTE (2003) *Guide for the Design and Construction of Concrete with FRP Bars*, ACI 440.1R 03, American Concrete Institute, Detroit, 42 p.
- [10]. ACI 440 (1996) *State of the art report on FRP Reinforcements for concrete structures*, ACI 440R-96, approved in 2002, American Concrete Institute, Detroit, Michigan.
- [11]. AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS(2002)
standard test method for compressive strength of cylindrical concrete specimens , Annual Book of ASTM Standards ASTM C39/ C39M-01,vol.04.2,ASTM International,Philadelphia,p.21-25.
- [12]. AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS(2002)
Standard test method for Splitting Tensile strength of cylindrical concrete specimens , Annual Book of ASTM Standards ASTM C496-96, vol.04.2,ASTM International,Philadelphia,p.281-284.

- [13]. AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS(2002)
Standard test method for assignment of the glass transition temperatures by differential Scanning Calorimetry, Annual Book of ASTM Standards ASTM E1356-03, vol.14.02,ASTM International,Philadelphia,p.396-399.
- [14]. AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS(2005)
Standard test method for assignment of the glass transition Temperatures by dynamic Mechanical Analysis, Annual Book of ASTM Standards ASTM E1640-04, vol.14.02,ASTM International,Philadelphia,p.562-566.
- [15]. CANADIAN STANDARDS ASSOCIATION (2006) Canadian Highway Bridge Design Code ,CAN/CSA-S6-06, Canadian Standards Association , Toronto ,Ontario, Canada ,734p.
- [16]. CANADIAN STANDARDS ASSOCIATION (2012) *Design and Construction of building Components with Fibre-Reinforced Polymers*, CAN/CSA-S806-12, Canadian Standards Association , Toronto ,Ontario, Canada ,177p.
- [17]. Dhatt. G ,J.I. Batoz : Modélisation des structures par éléments finis. Hermes science (2005) 11rue LAVOISIER , PARIS.
- [18]. Dhatt. G , Touzot.Git , Lefrancois. E : Méthode des éléments finis. Québec les presses de l'université Laval, 1981
- [19]. ERKI, M.A., and RIZKALLA, S.H. (Jun. 1993) *FRP reinforcement for concrete structures*, Concrete International: Design and Construction, vol. 15, n° 6, p. 48-53.
- [20]. GAY, D. (1997) *Matériaux composites*, 4e édition Hermès, Paris, France, 672 p.
- [21]. GENTRY, T.R., and HUDAK, C.E. (August 1996) *Thermal Compatibility of Plastic Composite Reinforcement and Concrete*, Proceedings of 2nd International Conference on Advanced Composite Materials in Bridges and Structures, ACMBS-II, Montreal, QC, p. 149-156.
- [22].GENTRY, T.R., and HUSAIN,M.,(May 1999) *Thermal Compatibility of Concrete Reinforcements*, Journal of Composites for construction, vol.3,n°2,p.82-86.
- [23]. HAMDI, B., (juin 2011) *Étude Numérique du Comportement Thermique des Poutres en Béton Armé de Barres en Polymères Renforcés de Fibres (PRF)*, Mémoire de Master, Département de génie civil, Université de Laghouat p. 22-25.
- [24]. HANCOX, N.L. (1981) *Fiber composite hybrid materials*, Materials Development Division, Atomic Energy Research Establishment, Harwell, Oxford shire, UK, Applied Science Publishers LTD, London, 290 p.
- [25]. INTELLIGENT SENSING FOR INNOVATION STRUCTURES, (2007) *Reinforcing Concrete structures with FRP*, Design Manuals n°3, ISIS-Canada,Winnipeg, Manitoba, Canada ,81p.

- [26]. MASMOUDI, R., ZAIDI, A., and GERARD,P. (2005) *Transverse Thermal expansion of FRP bars embedded in concrete*, Journal of Composites for Construction, ASCE, vol.9,n°5,p.377-387.
- [27]. MATTHYS,S.,DE SHUTTER ,G., and TAERWE,L. (August 1996) *Influence of Transverse Thermal of FRP Reinforcement on the critical concrete cover* , Proceedings of 2nd International Conference ,on Advanced Composite Materials in Bridges and Structures, ACMBS-II, Montreal, QC, p. 665-672.
- [28]. RAHMAN, H.A., and KINGSLEY, C.Y. (1996) *Fatigue behavior of a fiber reinforced plastic grid as reinforcement for concrete*, Proceedings of 1st International Conference on composites in infrastructure: Fiber composite in infrastructure, Tucson, AZ: ICCI, p. 427-439.
- [29]. RAHMAN, H. A., KINGSLEY, C. Y., and TAYLOR, D. A. (June1995). Thermal stress in FRP reinforced concrete. Proceedings., Annual Conference. of the Canadian Society for Civil Engineering, Ottawa, 605–614.
- [30]. TIMOSHENKO, S.P., and GOODIER, J.N. (1970) *Theory of elasticity*, Mc-Graw-Hill, New York.
- [31]. ZAIDI, A. (Mai 2006) *Comportement Thermique d'Eléments en Béton Armé de Barres en Polymères Renforcés de Fibres (PRF)*, thèse de ph.d, université Sherbrooke, Département de génie civil, (Québec), Canada.
- [32]. ZAIDI, A. and MASMOUDI, R. (May 2006) *Thermal effect on FRP-reinforced concrete Slabs*. Proceedings of the 1st International Structural Specialty Conference CSCE, Calgary,Alberta,Canada,10 p.
- [33]. ZAIDI, A. and MASMOUDI, R. (August 2006) *Effect of low and high temperatures on the transverse thermal expansion of FRP bars embedded in concrete*, 7th International Conference on Short & Medium Span Bridges, Montreal, Quebec, Canada, 11p.
- [34]. ZAIDI, A. and MASMOUDI, R. (May 2007) *Numerical analysis of the transverse thermal behavior of FRP Bars embedded in concrete*. 3rd International Conference on Durability & Field Applications of fiber Reinforced Polymer (FRP) Composites for Constructions, Quebec, Canada.
- [35]. ZAIDI, A. and MASMOUDI, R. (July 2007) *Effect of Concrete Cover Thickness and FRP-Bars Spacing on the Transverse Thermal Expansion of FRP Bars*. 8th International Symposium on Fiber Reinforced Polymer Reinforcement for Concrete Structures, University of Patras, Department of Civil Engineering, Patras, Greece,10p.
- [36]. ZAIDI, A. and MASMOUDI, R. (March 2008) *Thermal effect on fiber reinforced polymer reinforced concrete slabs*. Canadian Journal of Civil Engineering, NRC-Canada, vol . 35, n° 3, p 312-320.
- [37]. ZAIDI, A. and MASMOUDI, R. (2009) Numerical analysis of Thermal Behavior of concrete cover around FRP-Bars in cold Region.11th Arab Structural Engineering Conference (ASEC),King Fahd University of Petroleum & Minerals , Dhahran,Saudi Arabia.
- [38]. ZAIDI, A. and MASMOUDI, R. (November 2011) Combined Effect of Moisture and Temperature on Concrete Cover Surrounding GFRP Bars . Arabian Journal for Science and Engineering , Springer , vol. 36, n° 7, p 1221-1239. (with reviewer committee).

- [39]. ZAIDI, A. and MASMOUDI, R. (January2012) Numerical analysis of Thermal Behavior of concrete cover around FRP-Bars in cold Region. Arabian Journal for Science and Engineering, Springer , vol. 37, n° 2, p .489-504. (with reviewer committee).
- [40]. ZAIDI, A.,HAMDI,B., MASMOUDI, R.,AMARA,S.,MOUATTAH,K. (November 2012) Finite element modeling of prismatic concrete beams reinforced with FRP bars under high temperatures.1st International conference on civil Engineering-ICCE'2012, Laghouat University, Algeria.
- [41]. ZAIDI, A., MASMOUDI, R.,and BOUHICHA,M. (January2013) Numerical analysis of Thermal stress-deformation in concrete Surrounding FRP bars in hot Region. Construction and Building Materials. Elsevier , vol. 38, p .204-213.
- [42]. ZIENCKIEWICZ O.C. *The finite element method*. 4e édition, deux volumes. McGraw Hill, 1989

ANNEXES

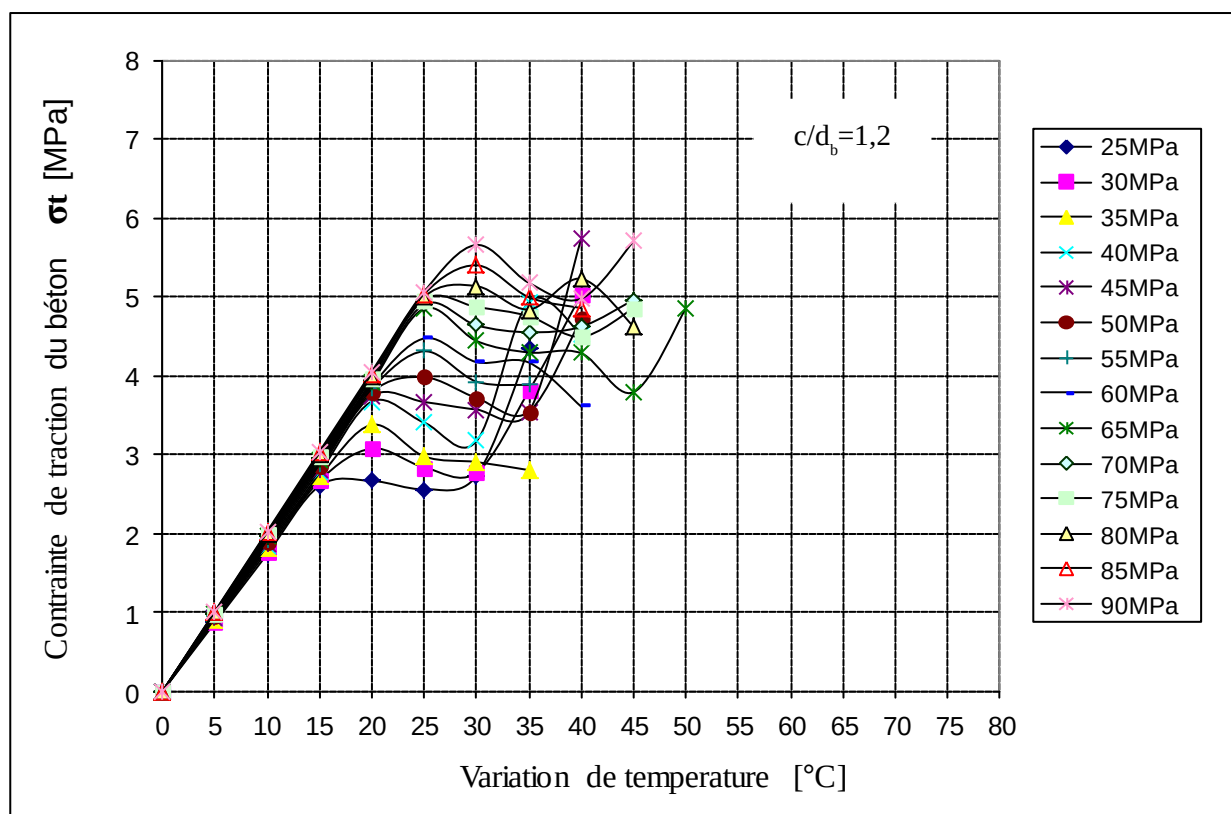
CONTRAINTES DE TRACTION TRANSVERSALE DU BÉTON :

Figure A.1. Contrainte de traction transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,2$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de poutre prismatique en béton P.#25.30)

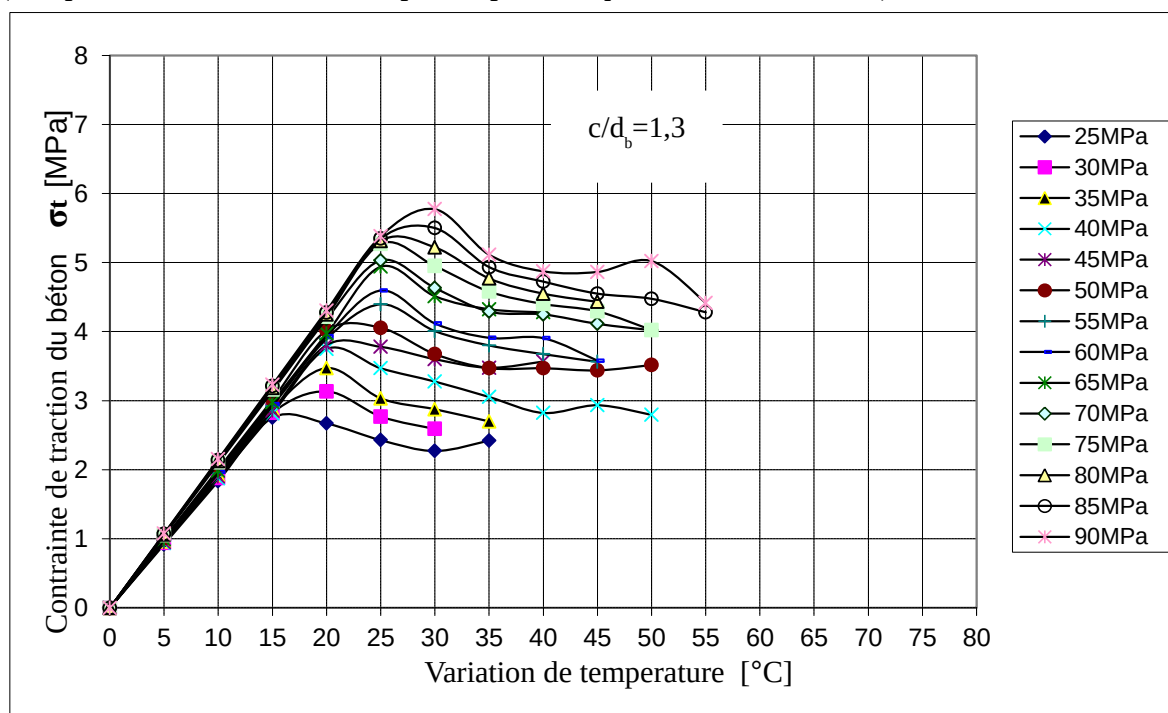


Figure A.2. Contrainte de traction transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,3$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#16.20)

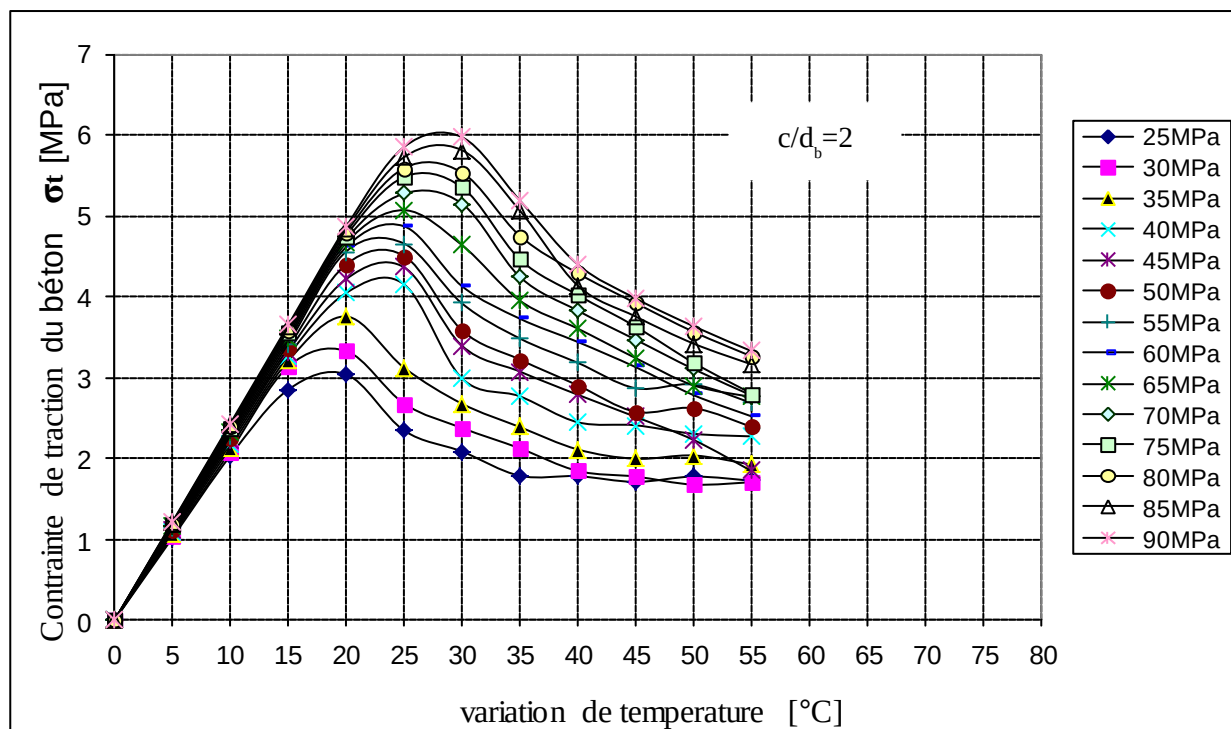


Figure A.3. Contrainte de traction transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 2$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#13.25)

CONTRAINTES DE COMPRESSION RADIALE DU BÉTON :

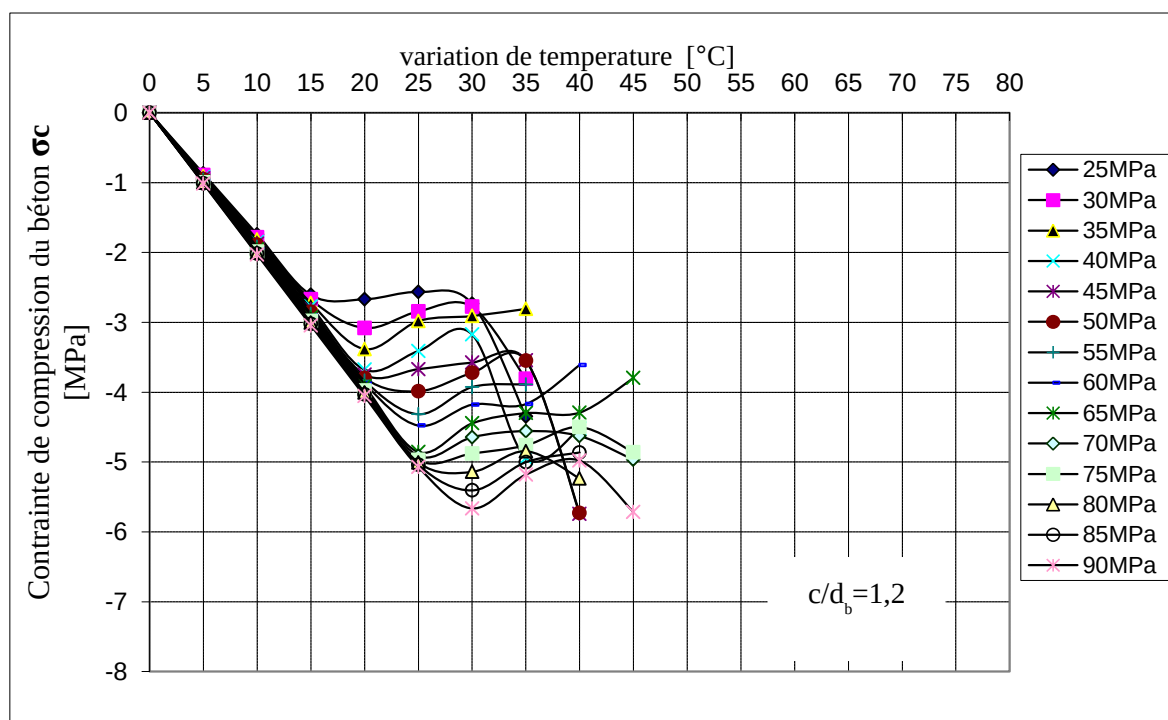


Figure A.4. Contrainte de compression radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,2$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#25.30)

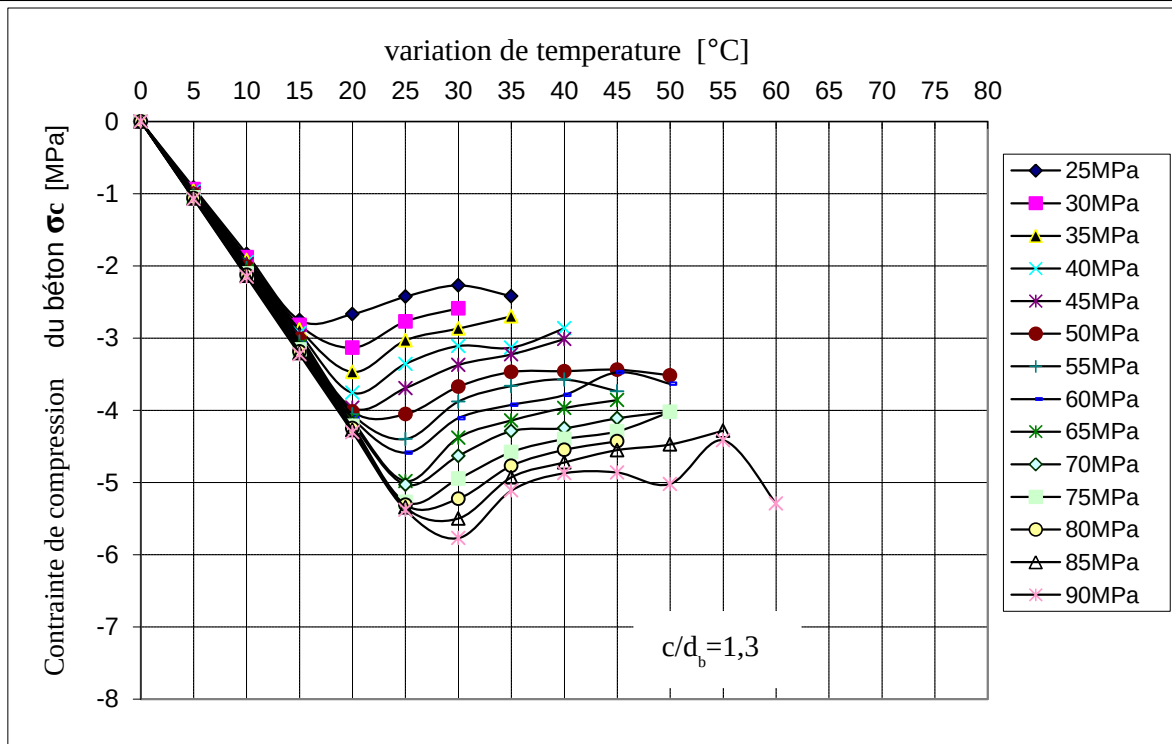


Figure A.5. Contrainte de compression radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,3$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.# 16.20)

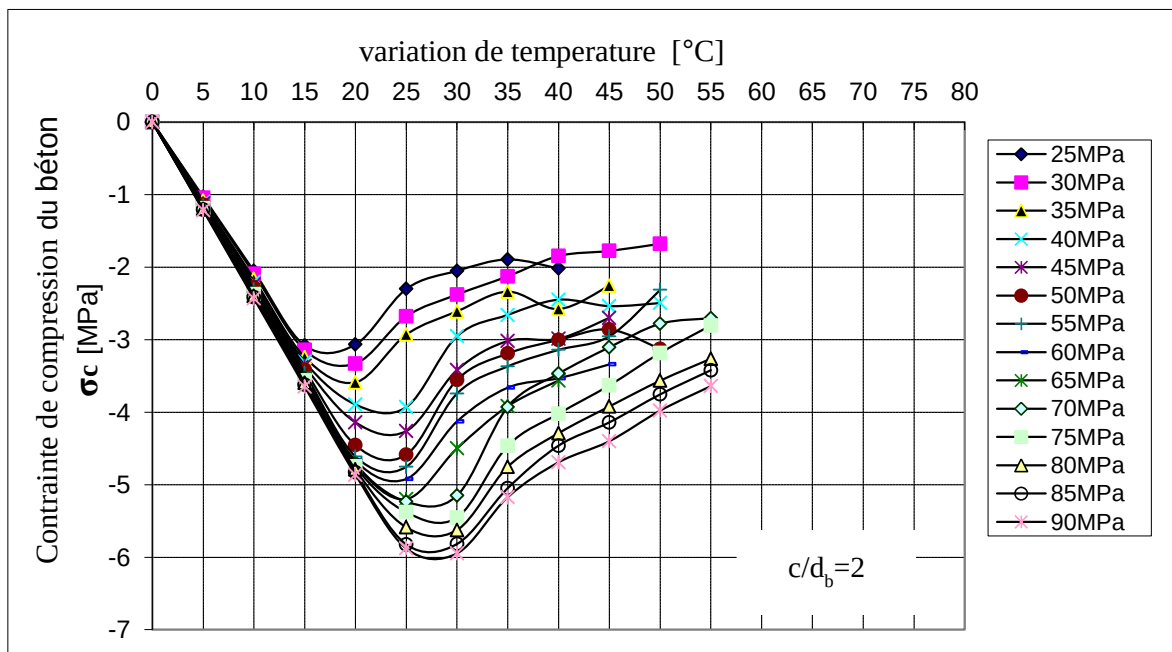


Figure A.6. Contrainte de compression radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 2$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#13.25)

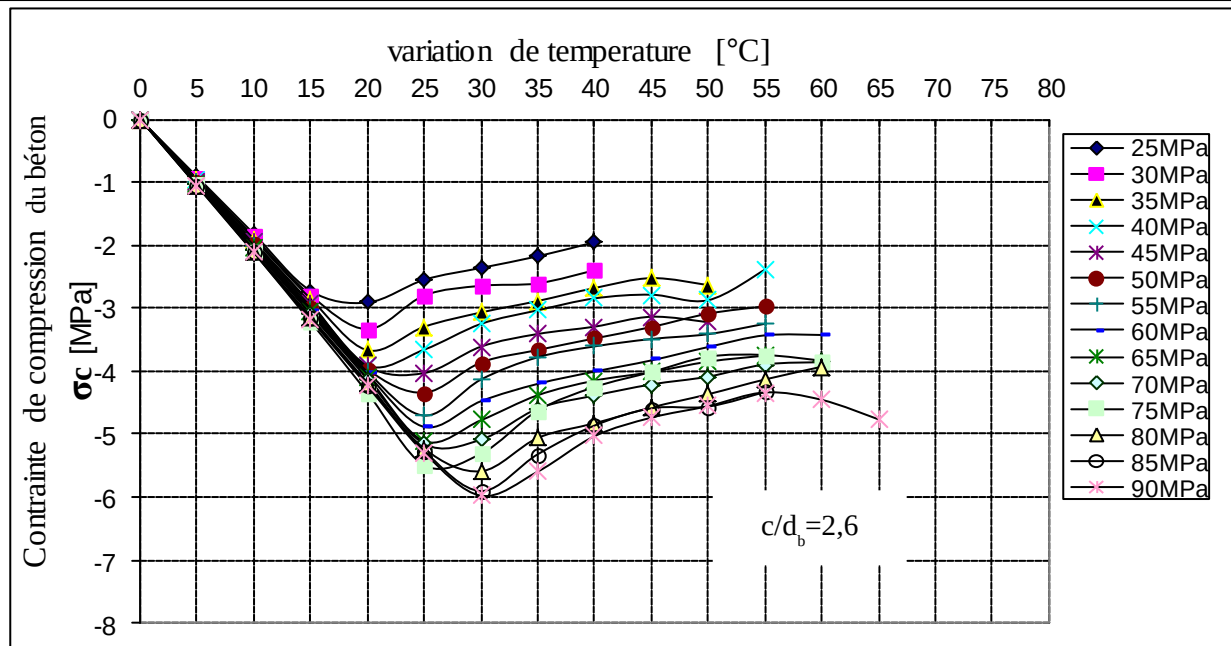


Figure A.7. Contrainte de compression radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 2,6$ pour différentes classes de béton (comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#10.25)

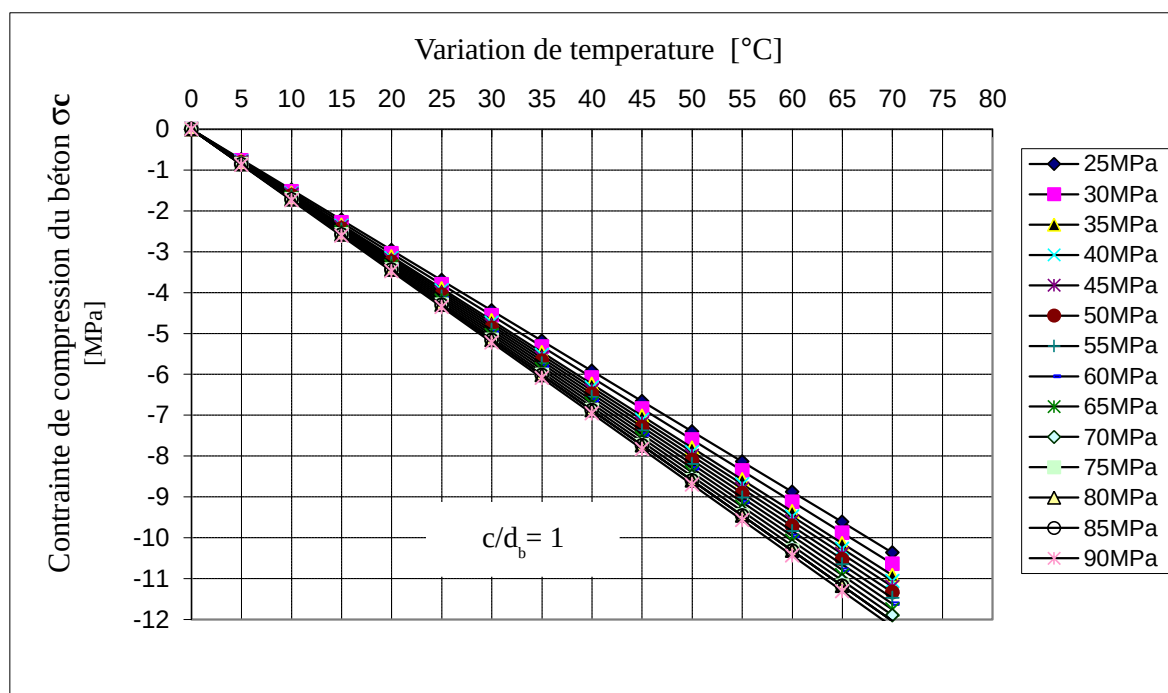


Figure A.8. Contrainte de compression radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b = 1$ pour différentes classes de béton (Modèle analytique linéaire de la poutre prismatique en béton P.#25.25)

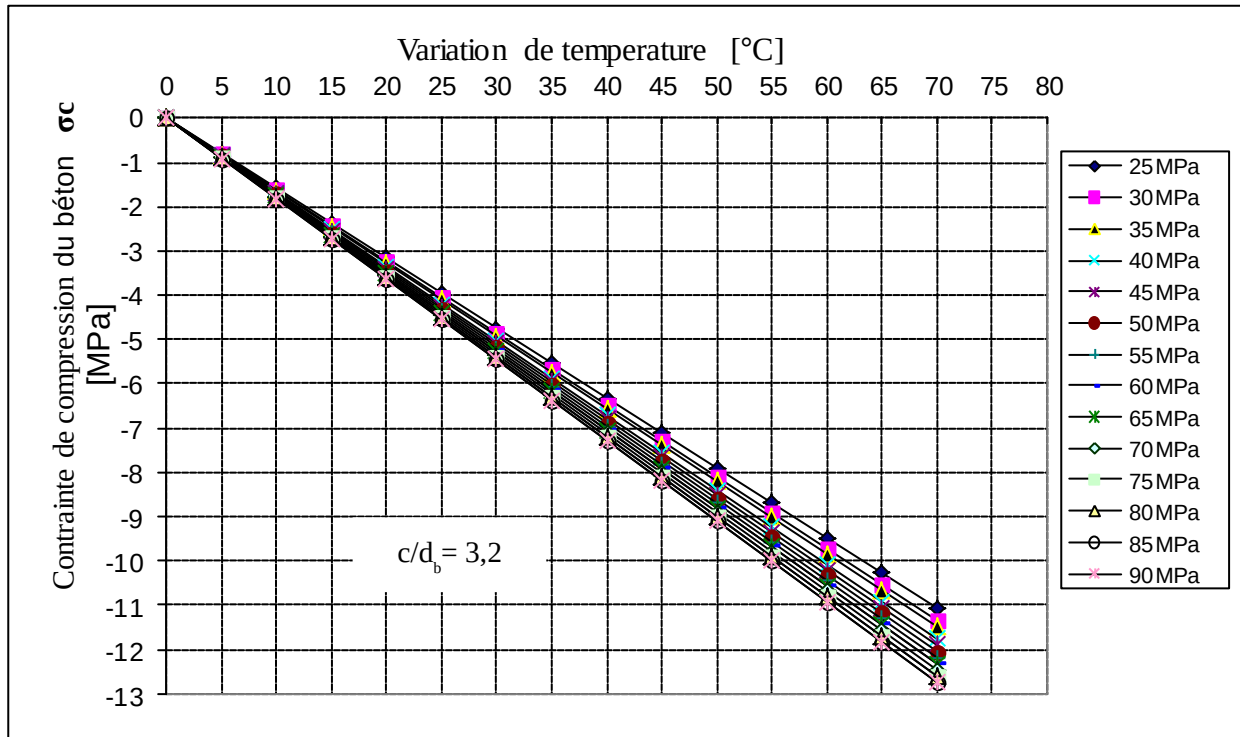


Figure A.9. Contrainte de compression radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la poutre ayant $c/d_b=3,2$ pour différentes classes de béton (Modèle analytique linéaire de la poutre prismatique en béton P.#10.30)

DÉFORMATIONS THERMIQUES TRANSVERSALES DU BÉTON :

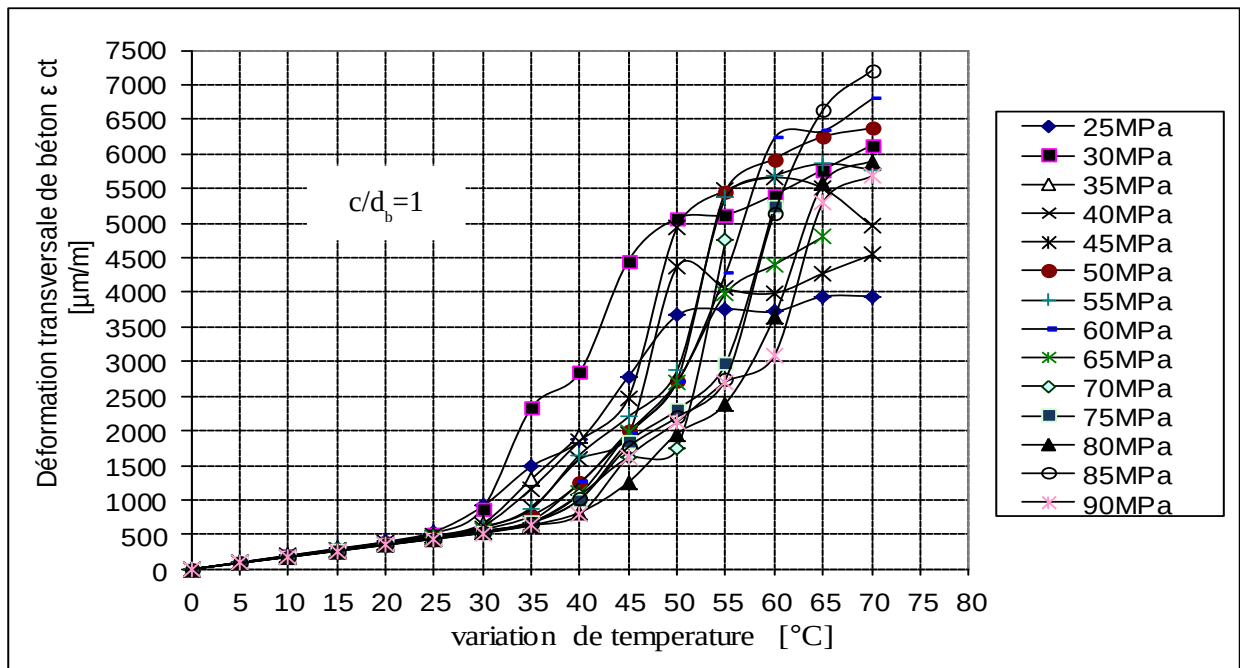


Figure A.10. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b=1,0$ pour différentes classes de béton (poutre P.#19.20)

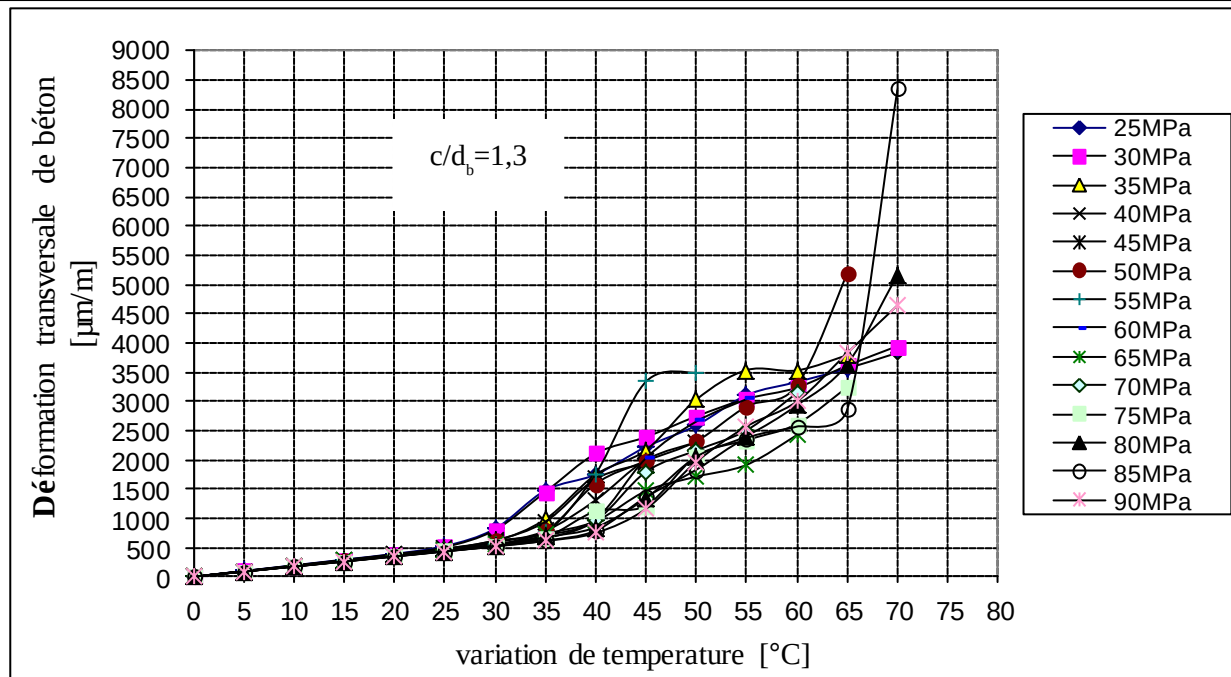


Figure A.11. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,3$ pour différentes classes de béton (poutre P.#19.25)

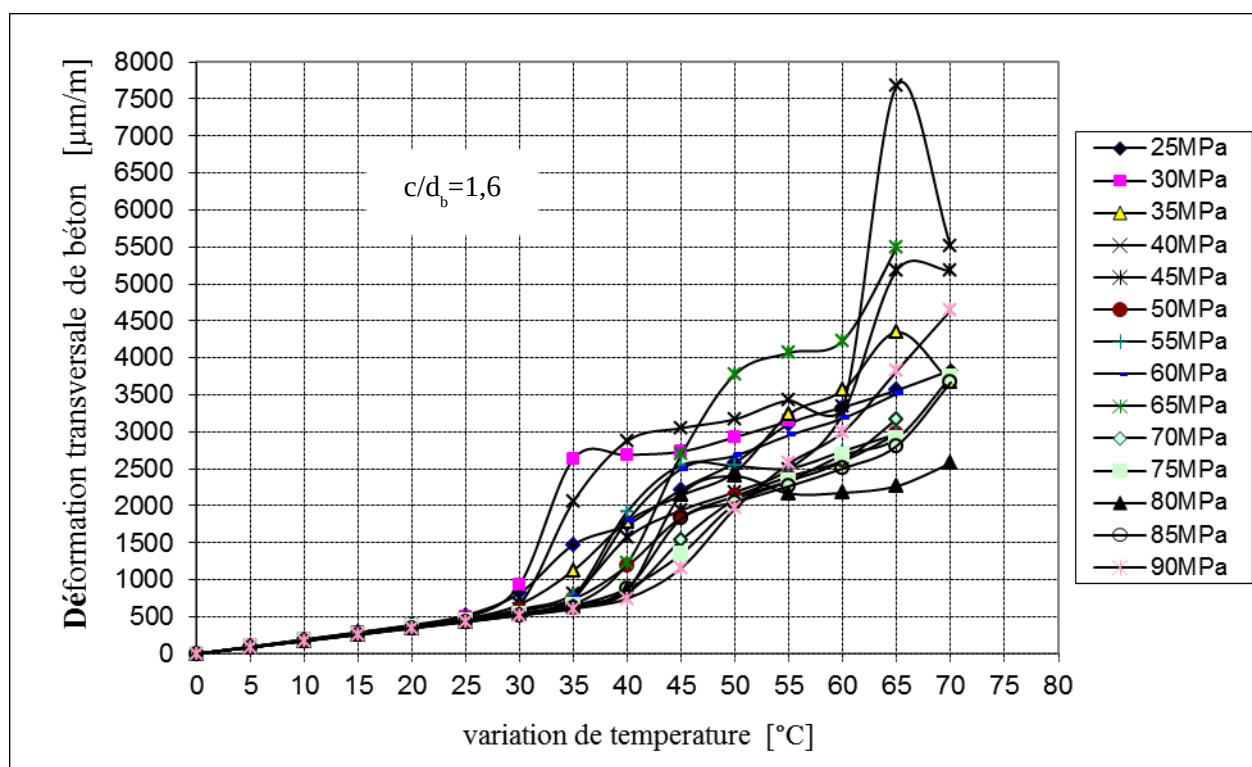


Figure A.12. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,6$ pour différentes classes de béton (poutre P.#19.30)

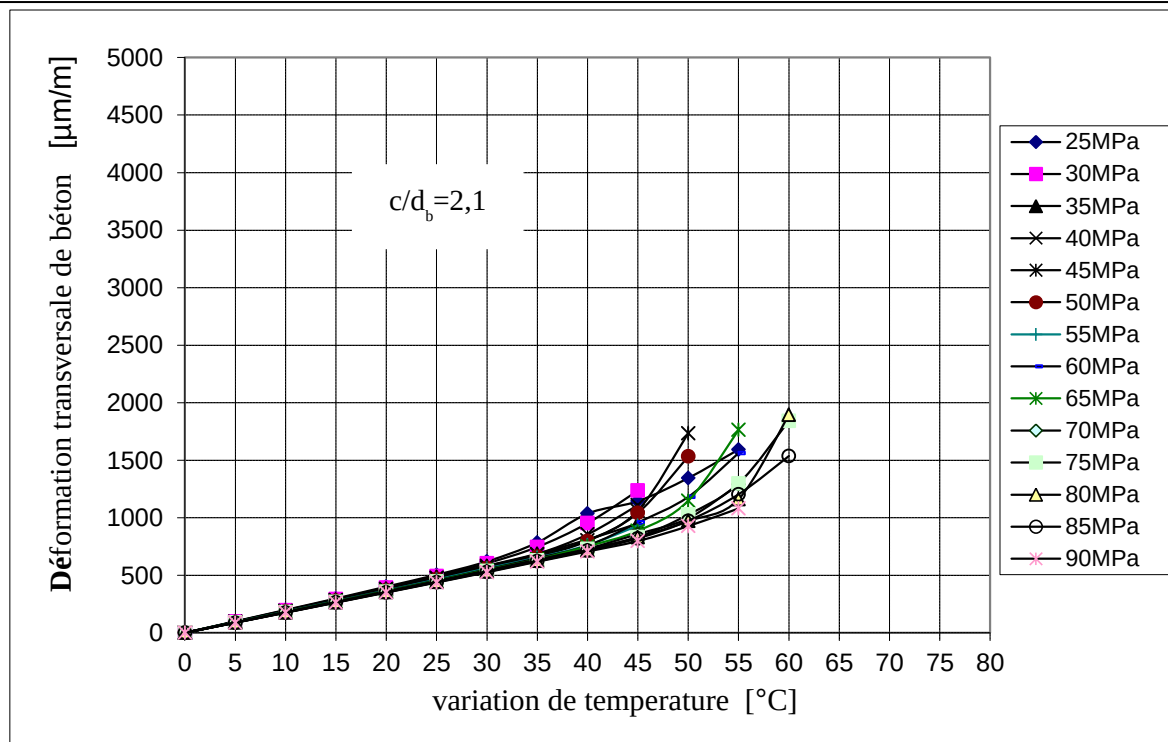


Figure A.13. Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton des poutres ayant $c/d_b = 2,1$ pour différentes classes de béton (poutre P.#10.20)

DÉFORMATIONS THERMIQUES À LA SURFACE EXTERNE DE L'ENROBAGE DE BÉTON :

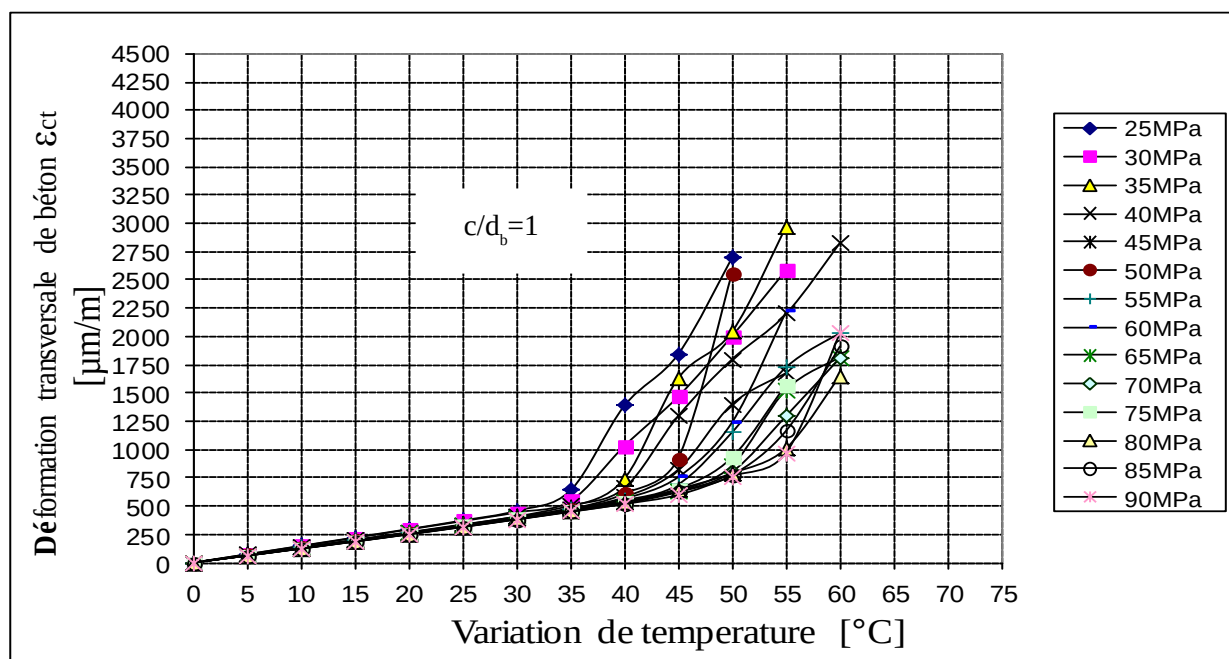


Figure A.14. Déformation thermique transversale du béton (ϵ_{ct}) en fonction de la variation de température à la surface externe de l'enrobage du béton des poutres ayant $c/d_b = 1,0$ pour différentes classes de béton (P.#25.25)

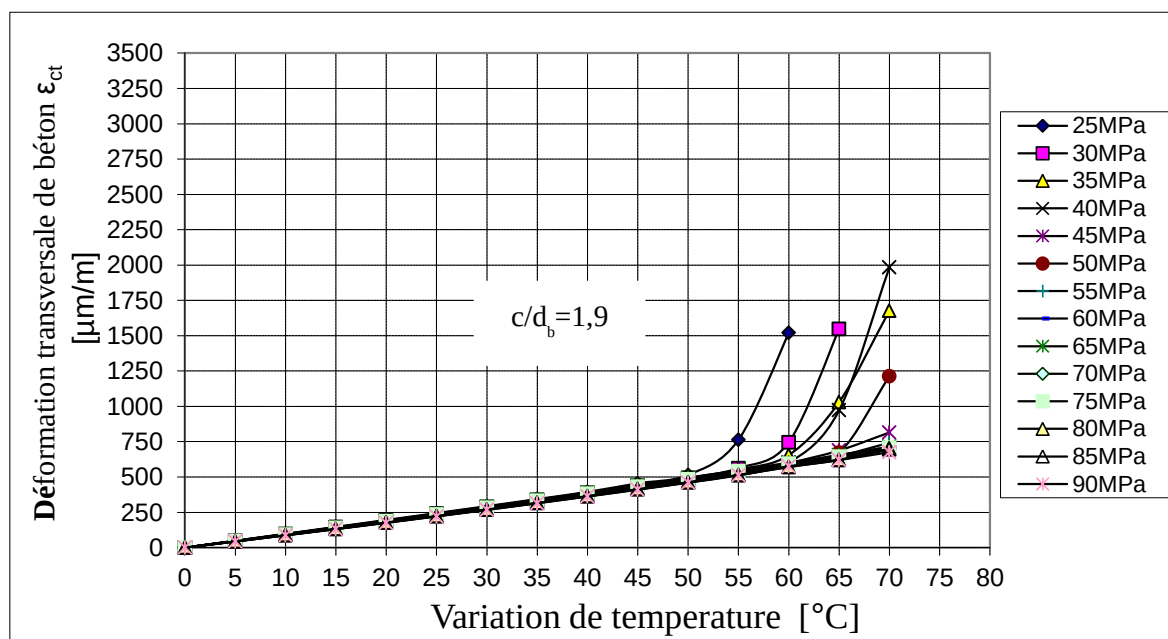


Figure A.15. Déformation thermique transversale du béton (ϵ_{ct}) en fonction de la variation de température à la surface externe de l'enrobage du béton des poutres ayant $c/d_b = 1,9$ pour différentes classes de béton (P.#16.30)

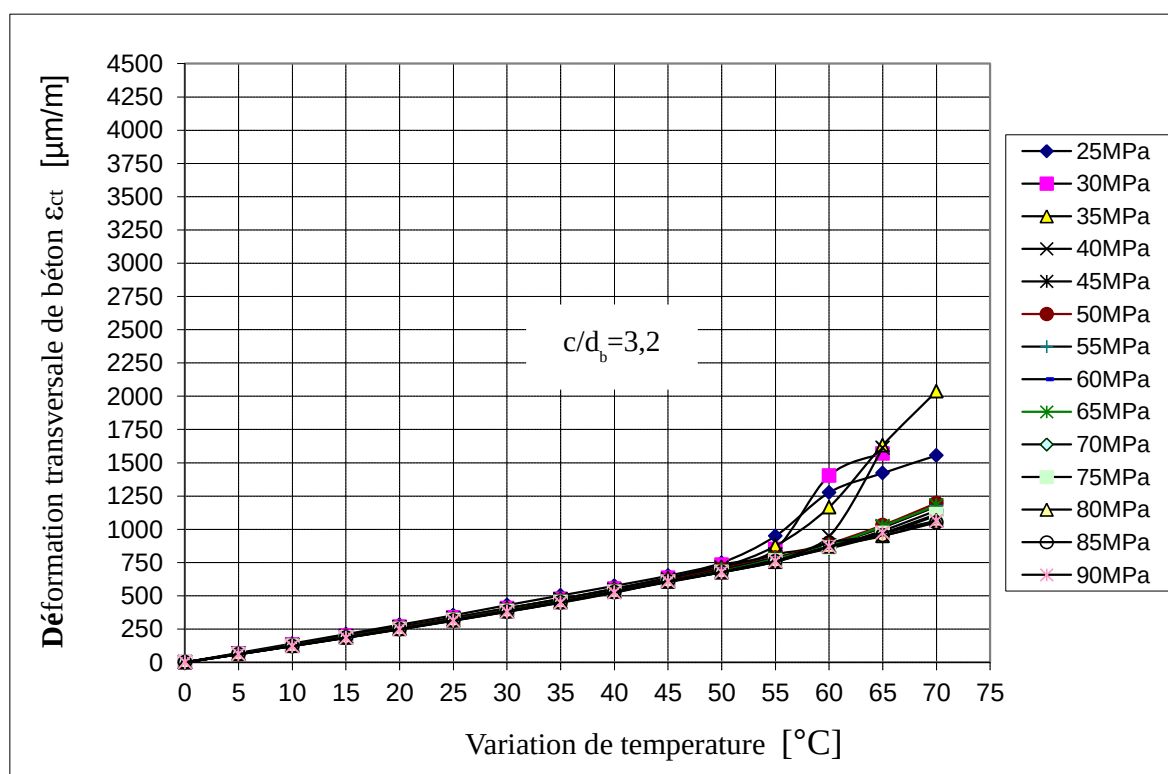


Figure A.16. Déformation thermique transversale du béton (ϵ_{ct}) en fonction de la variation de température à la surface externe de l'enrobage du béton des poutres ayant $c/d_b = 3,2$ pour différentes classes de béton (P.#10.30)

i. **ADINA** : logiciel numérique base sa calcul sur la méthode des éléments finis et traite les problèmes en :1D,2D,3D. Type des problèmes :

ADINA structures , ADINA Thermal , ADINA CFD (fluides).



Figure A.1. Abréviation

ii. **Les étapes du modélisation d'une poutre prismatique :**

ADINA structures, statics, Problème en 2D

1. Les étapes du Modélisation d'une poutre (P #10.20-76-100) par ADINA :

File Edit View Display Control Geometry ADINA-M Model Meshing Solution Help

▪ **Définition des données du modèle :**

Choisir Control→Heading, ADINA affiche la fenêtre suivante (Figure A.2). Écrire un titre du problème « P #10.20-76-100 » puis, cliquer sur “OK”.

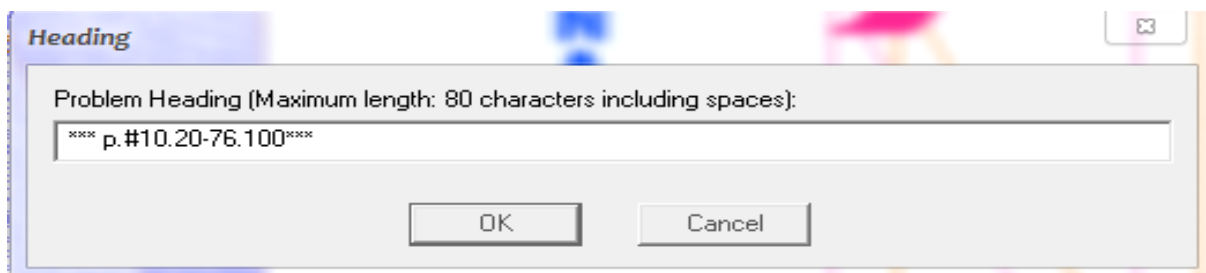


Figure A.2. Choix titre du problème ou modèle

▪ **Choix condition d'appuyé (liberté et fixité) :**

Choisir Control→ Degrees of Freedom, libéré (X-Translation, X-Rotation), (Y-Rotation and Z-Rotation boutons) puis cliquer sur “OK”. Figure A.3.

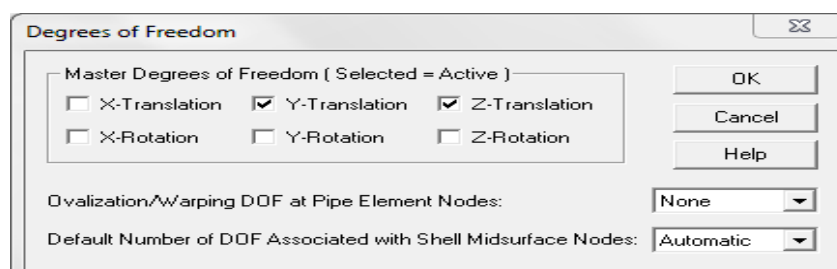


Figure A.3. Choix condition d'appuyé

▪ Choix la fonction de temps :

Choisir Control→ Define time step,number of steps(14),constant (1) puis cliquer sur “OK”.figure A.3.1.

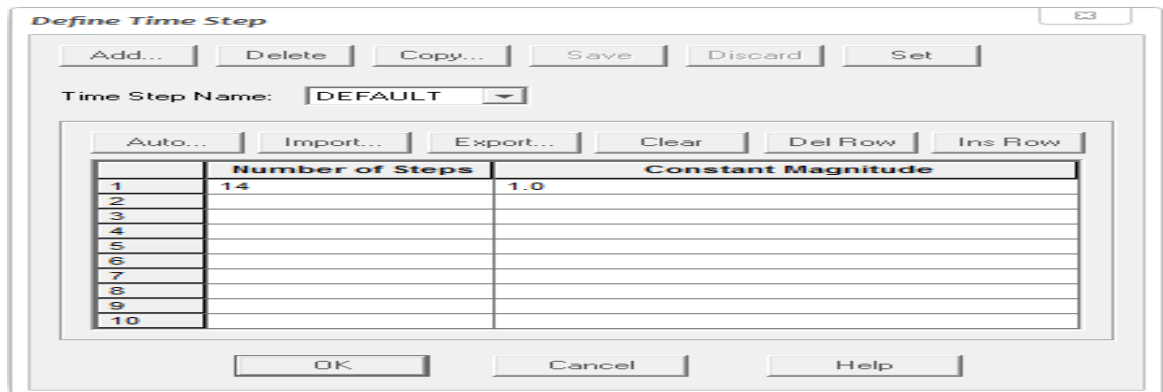


Figure A.3.1.Choix nombre étape de la fonction de temps et le pas

Choisir Control→ Define time function ,number of steps(14),constant (1) puis cliquer sur Graph (vérifier le graph) puis sur “OK”. Figure A.3.2.

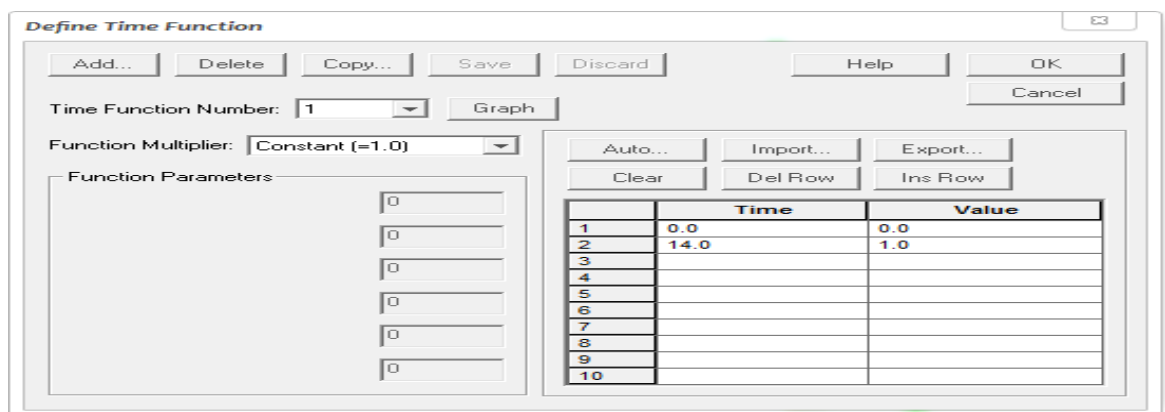


Figure A.3.2.Choix nombre étape de la fonction de temps et le pas

▪ Choix solution :

Choisir Control→ solution process→cliquer sur iteration tolerances.figure A.4.1.

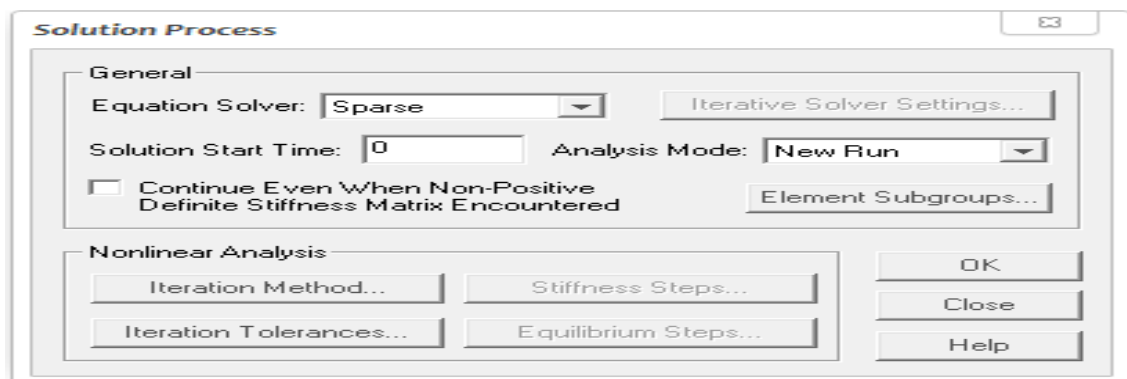


Figure A.4.1. solution process

Puis modifier convergences criteria (Energie) →Energie tolerance(1),upper Bound(1) puis cliquer“OK”. Figure A.4.2.

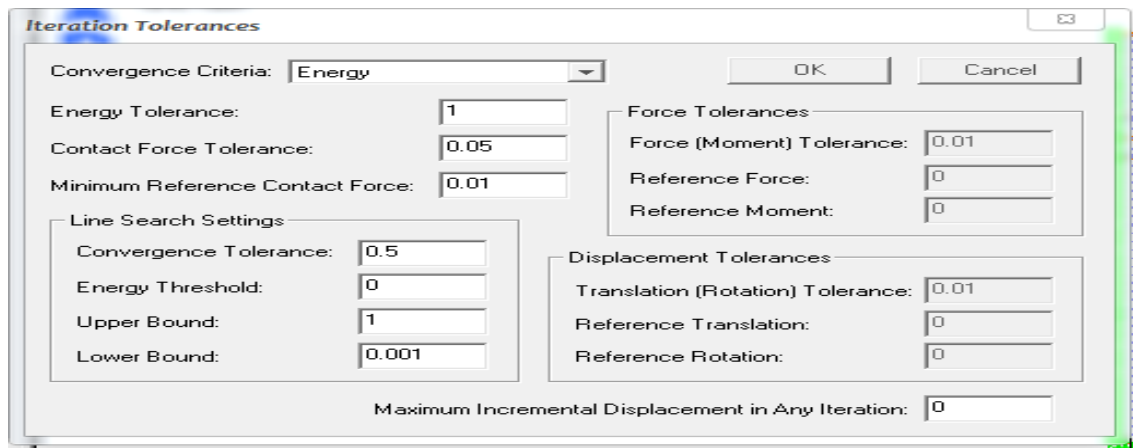


Figure A.4.2. iteration Tolerances

▪ **Géométrie et coordonnées des points :**

Choisir Geometry → Define coordinate système icône  → cylindrique puis cliquer sur “OK”.figure A.4.

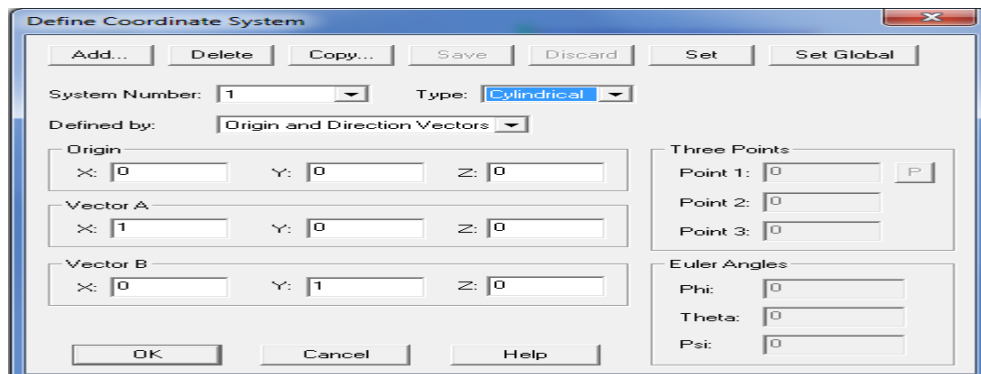


Figure A.4. Définition des coordonnes de système

Choisir Geometry →points cliquer icon  entrer les points→voir Tableau1. puis cliquer sur “OK”. Figure A.4.1.

Vue la symétrie de la section de la poutre prismatique par rapport à l’axe oz,

TABLEAU 1. Points de modèle par symétrie

	X1(X)	X2(Y)	X3(Z)	SYSTEM
1	0.0	38.0	100.0	0
2	0.0	0.0	100.0	0
3	0.0	0.0	0.0	0
4	0.0	38.0	0.0	0
5	0.0	0.0	80.0	0
6	0.0	0.0	75.25	0
7	0.0	0.0	70.5	0
8	0.0	3.3587572	78.608787	0
9	0.0	4.75	75.25	0
10	0.0	3.3587572	71.891243	0
11	0.0	38.0	75.25	0

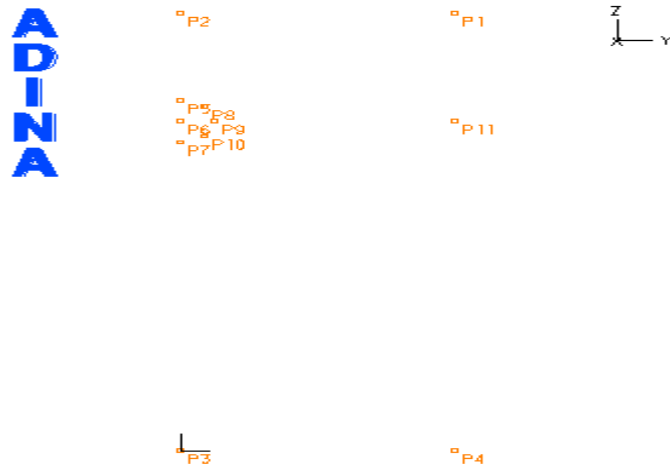


Figure A.4.1.points de modèle

Choisir Geometry →line→ cliquer icon define  entrer les points entre lignes(deux types lignes straight et Arc).puis cliquer sur “OK”.

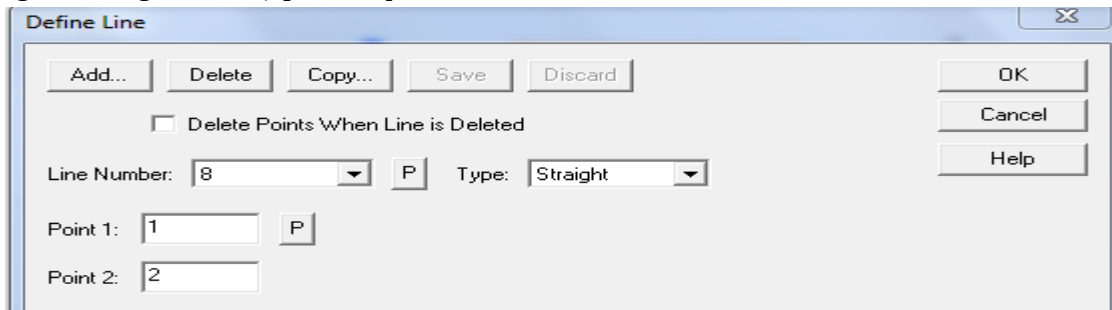


Figure A.4.2.ligne de modèle

Choisir Geometry →surface→ cliquer icon define  entrer les points de surface(4points)de type (Vertex) puis cliquer sur “OK”.

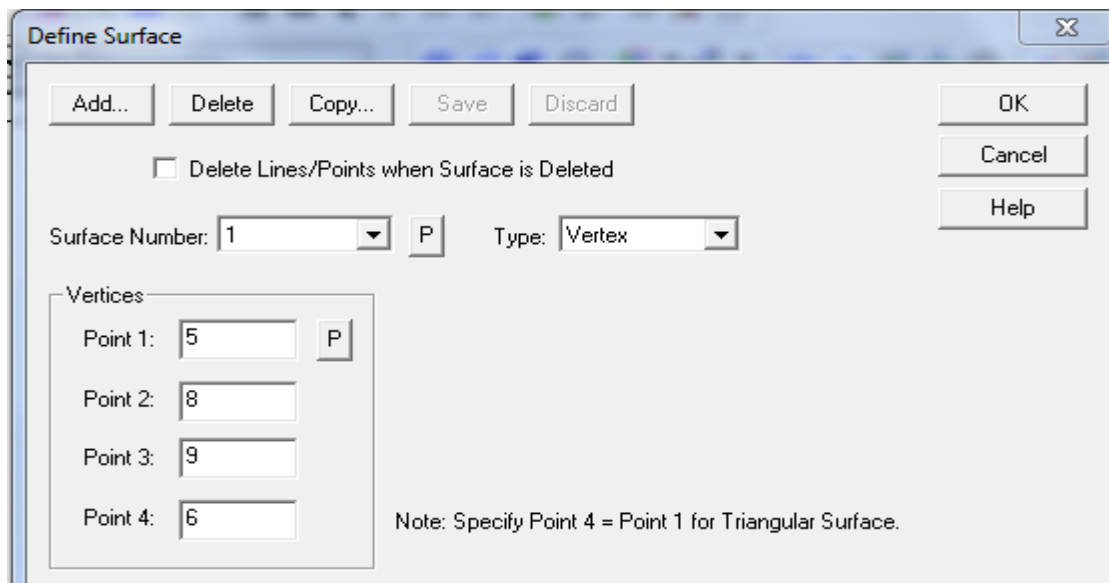


Figure A.4.3.surface de modèle

Icons  define points,lignes,surface par numero. Figure A.4.4

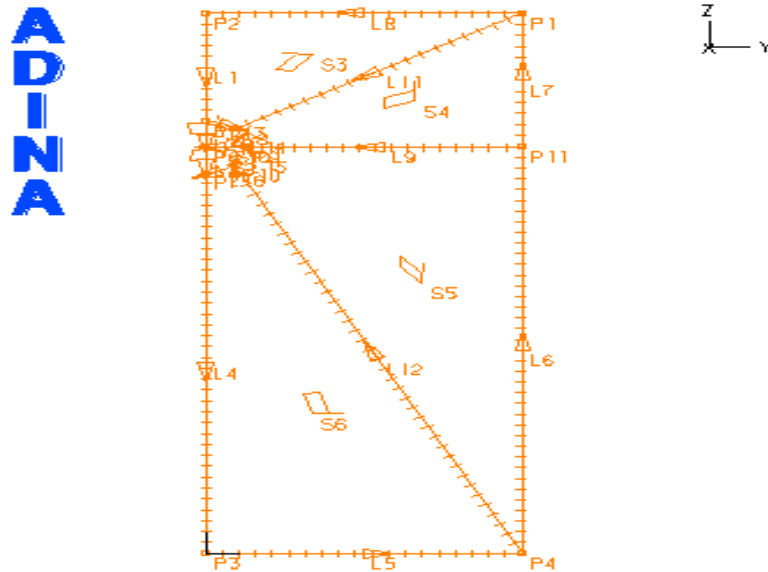


Figure A.4.4. Points, lignes, surfaces de modèle

▪ **Définition et application des conditions aux limites :**

Cliquer sur l'icône  (Apply fixity), ADINA affiche la fenêtre (Figure A.5.1), cliquer sur define (Figure A.5.2) → cliquer sur Add et puis entrer dans new name (YT) (Figure A.5.3), et cliquer apply → et puis (ZT) et cliquer apply → apply fixity → apply to Lines → Figure A.5.4. fixation de sens par lignes. Cliquer sur "OK".

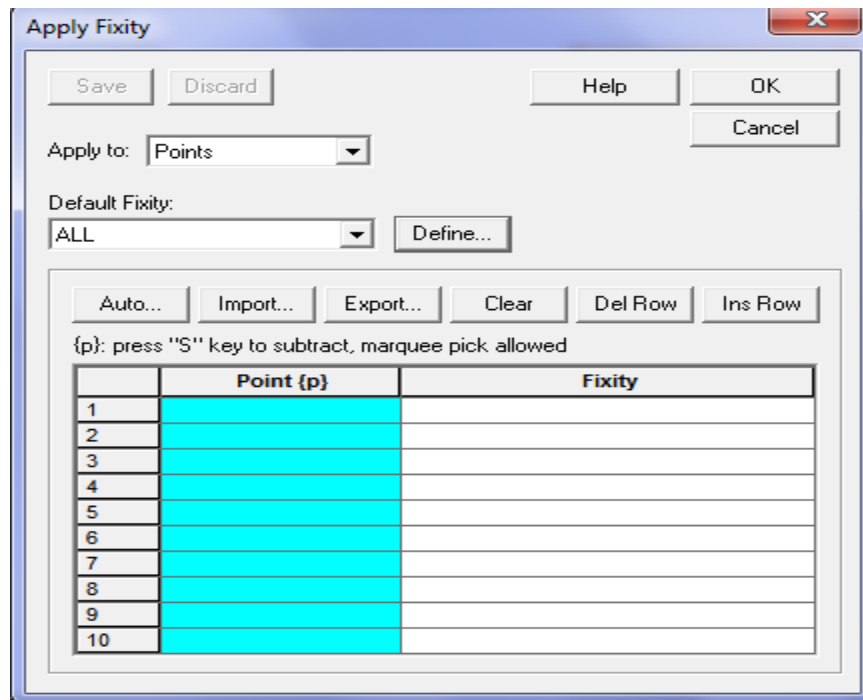


Figure A.5.1. conditions aux limites

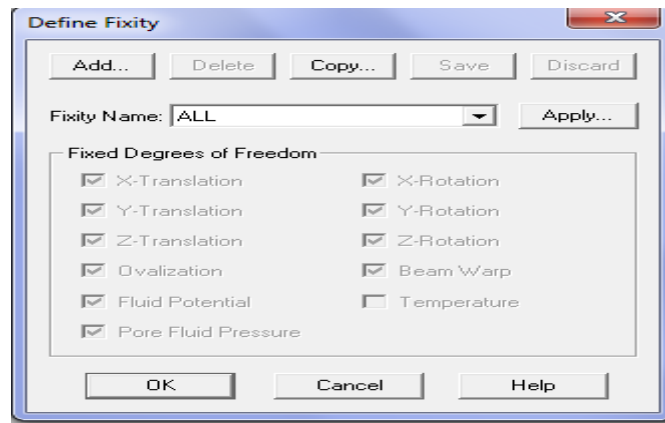


Figure A.5.2. conditions aux limites

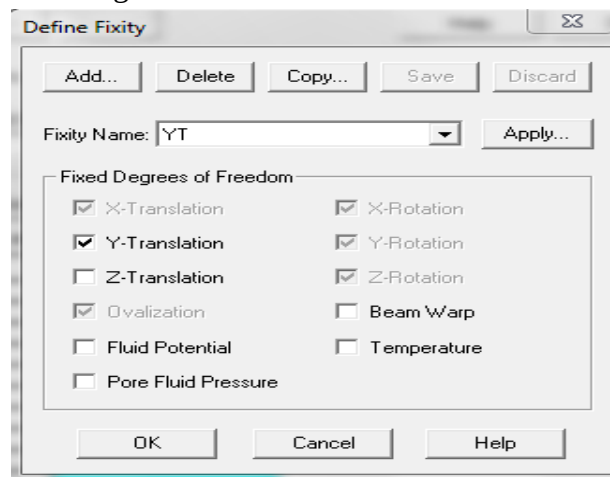


Figure A.5.3. définition sens de fixation

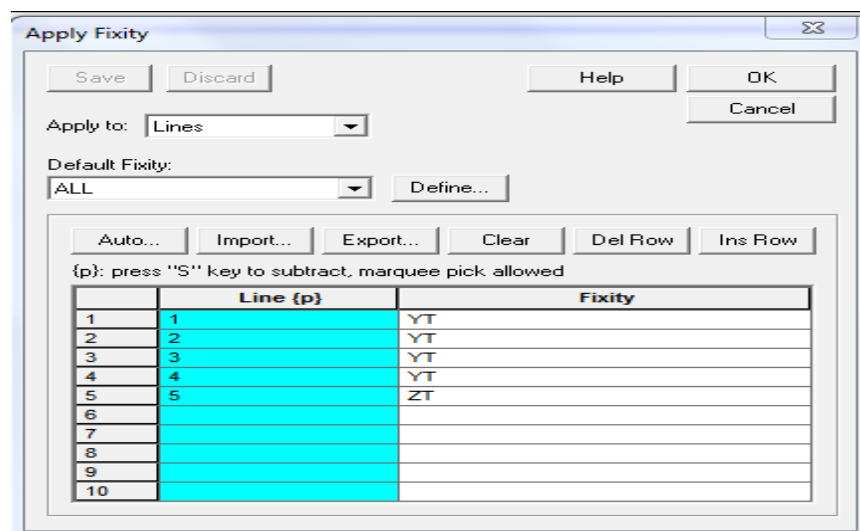


Figure A.5.4. fixation de sens par lines

Cliquer sur 'Plot icon' , la fenêtre de graphique comme dans la Figure A.5.5

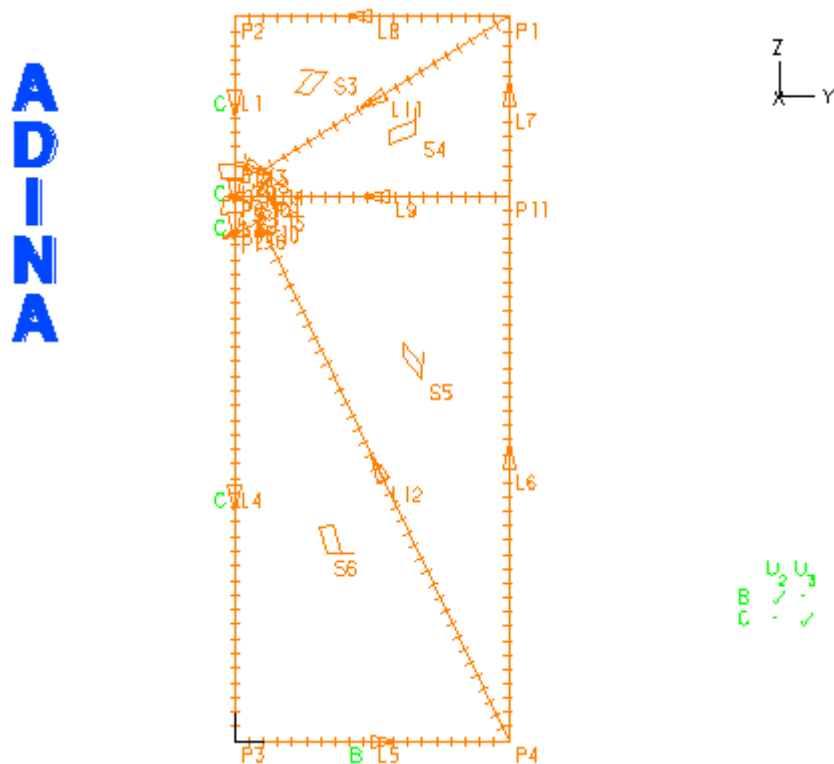


Figure A.5.5.ADINA 'Plot icon'

▪ Définition et application de chargement :

Cliquer sur l'icone  (Apply Load) → load type(Temperature) → apply to (surface) Figure A.6.1→cliquer Define→entrer Magnitude de charge Figure A.6.2. .Cliquer sur“OK”.

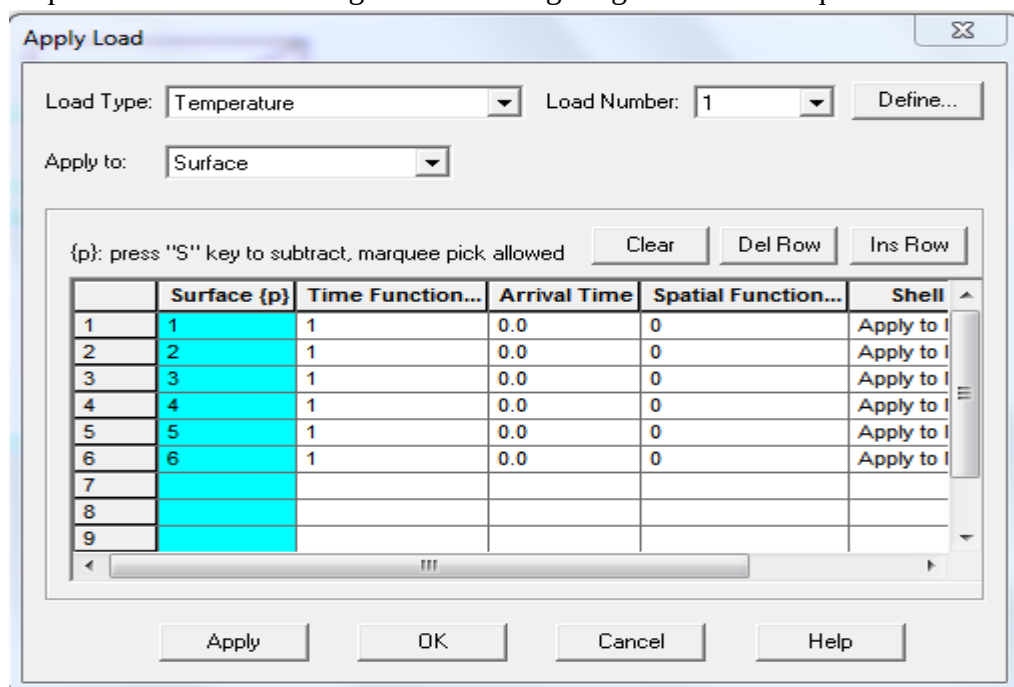


Figure A.6.1.Application de charge thermique

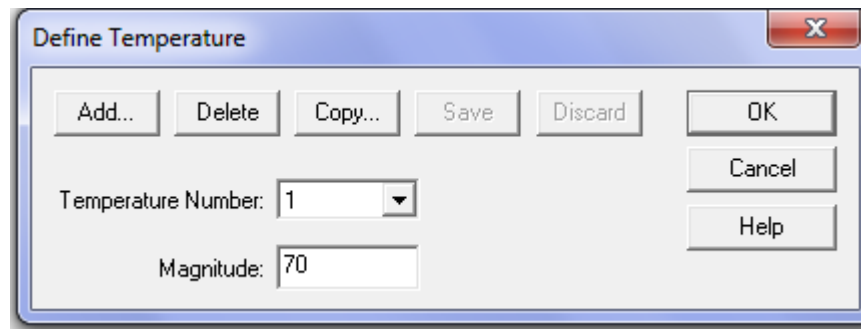


Figure A.6.2. Magnitude de charge

cliquez sur 'Load Plot icon'  Figure A.6.2.

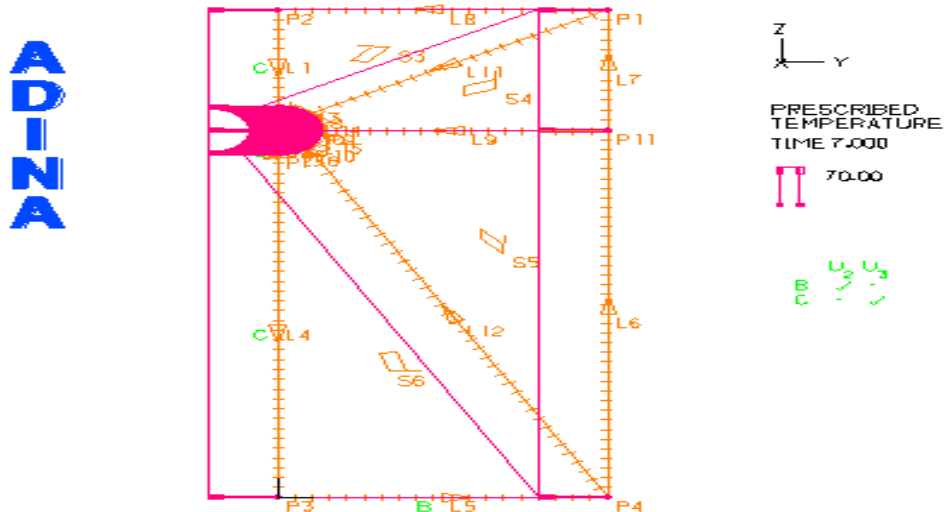


Figure A.6.2. ADINA 'Plot icon' charge thermique

▪ **Définition de deux matériaux (PRF, Béton) :**

Cliquer sur 'Manage Materials icon' , puis sur le bouton 'Elastic Isotropic', Add → Material Number: 1(PRF) Figure A.6.1, écrire les propriétés telques :

Young's Modulus : 7100

Poisson's Ratio : 0,38

Density : 2

Coef.of Thermal Expansion : 3,3E-5

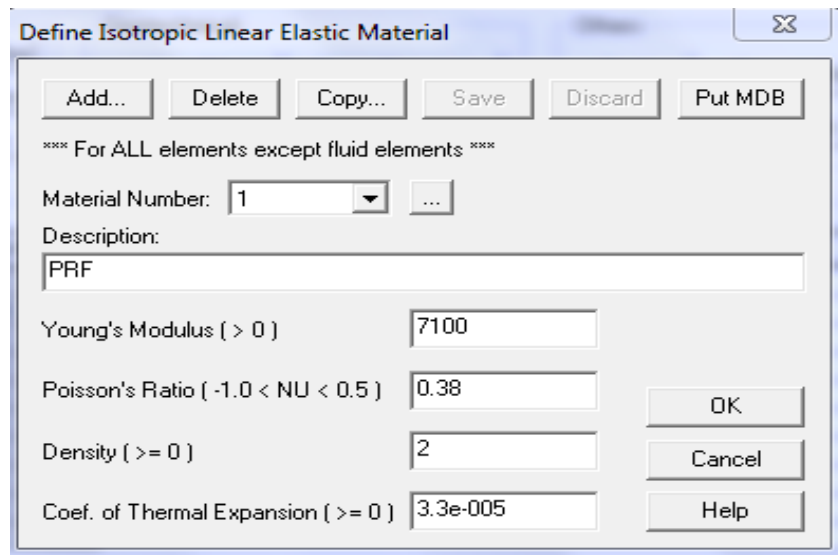


Figure A.6.1. Définition de matériau (Barre PRF)

Model→Materials→others→ Concrete→ Add → Material Number : 2 (Béton) Figure

A.6.2, Basic →cliquer sur OK ;, écrire les propriétés telques :

Initial Value : 0,17 Density : 2,4

Tangent Modulus of Zero Strain : 24944,06

Uniaxial Out of Tensile Stress : 3

Post-Cracking Stress : 3

Uniaxial Maximum Compressive Stress : - 25

Uniaxial Maximum Compressive Strain of Above Stress : - 0,0025

Uniaxial Ultimate Compressive Stress : -20

Uniaxial Ultimate Compressive Strain : -0,0035

Mean Coef.of of Thermal Expansion: 11,6E-6

Define Concrete Material

Add... Delete Copy... Save Discard Put MDB

*** For 2-D solid and 3-D solid elements ***

Material Number: 2 ... Graph

Basic More Failure Temp-Dep

Description: BETON

Poisson's Ratio
☒ Constant
☐ Variable
 Initial Value: 0.17

Density: 2.4

Tangent Modulus at Zero Strain: 24944.06

Uniaxial Cut-Off Tensile Stress: 3

Post-Cracking Tensile Stress: 3

Uniaxial Maximum Compressive Stress (SIGMAC): -25

Uniaxial Compressive Strain at SIGMAC: -0.0025

Uniaxial Ultimate Compressive Stress: -20

Uniaxial Ultimate Compressive Strain: -0.0035

OK Cancel Help

Figure A.6.2.Caractéristique de béton

Cliquer sur MORE :

Mean Coefficient of Thermal Expansion: 11.6E-6

Puis cliquer sur Graph Figure A.6.3.

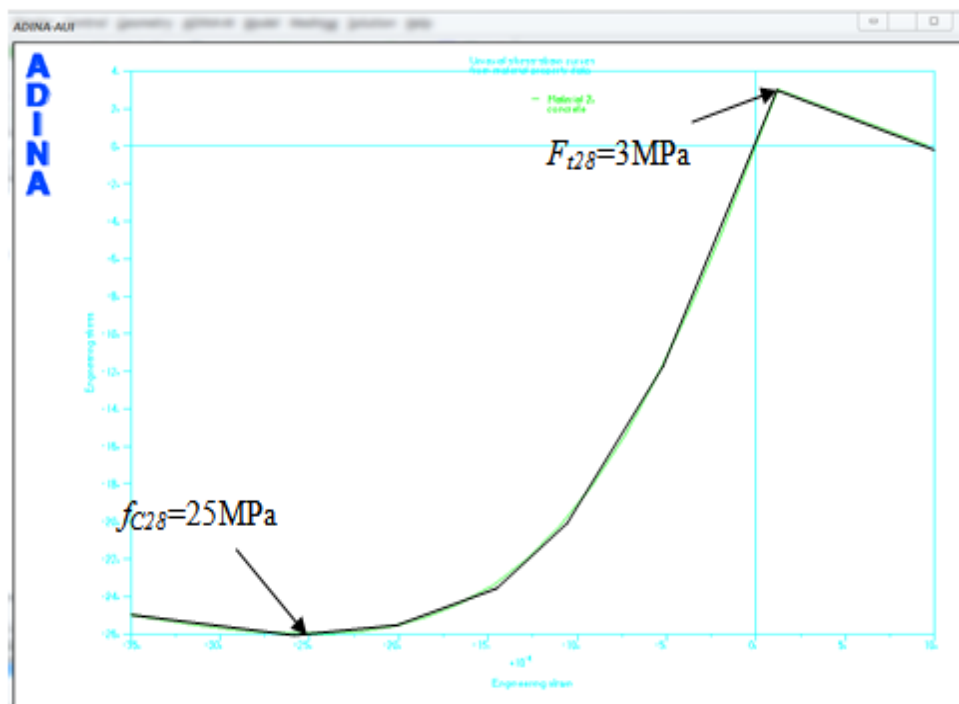


Figure A.6.3.Courbe contrainte- déformation du béton utilisée par ADINA

- **Définition Groupe d'élément :** Cliquer sur 'Define Element Groups icon'  , ajouter 'Group Number': 1. placer le 'Type': 2-D Solid. placer 'Element Sub-Type': Plane Stress.'Default Material': 1 (Figure A.23). puis cliquer sur Add,'Group Number': 2. 'Type': 2-D Solid. 'Element Sub-Type': Plane Stress.'Default Material': 2 et cliquer sur OK. (Figure A.24)

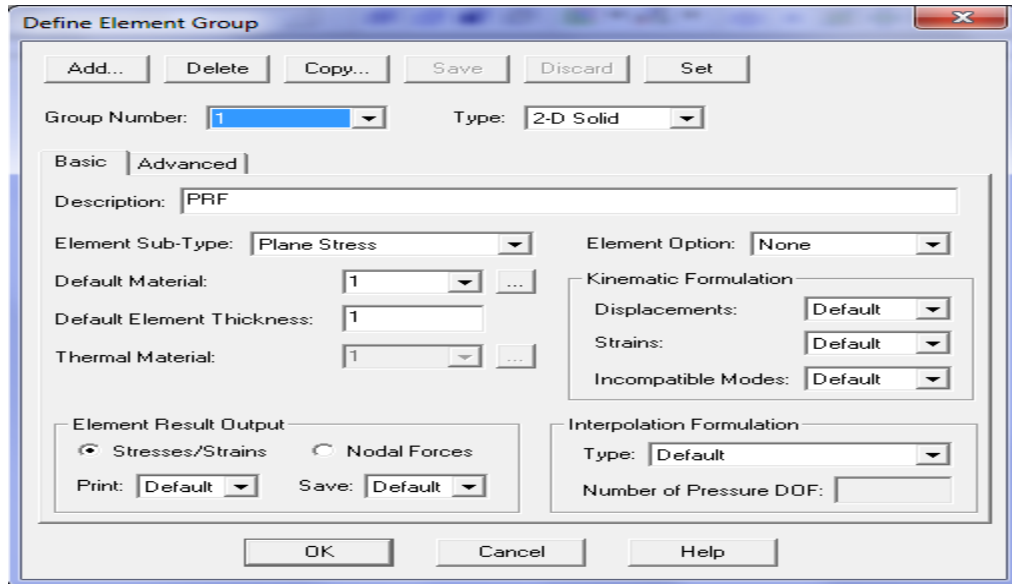


Figure A.7.1. Élément PRF groupe 1

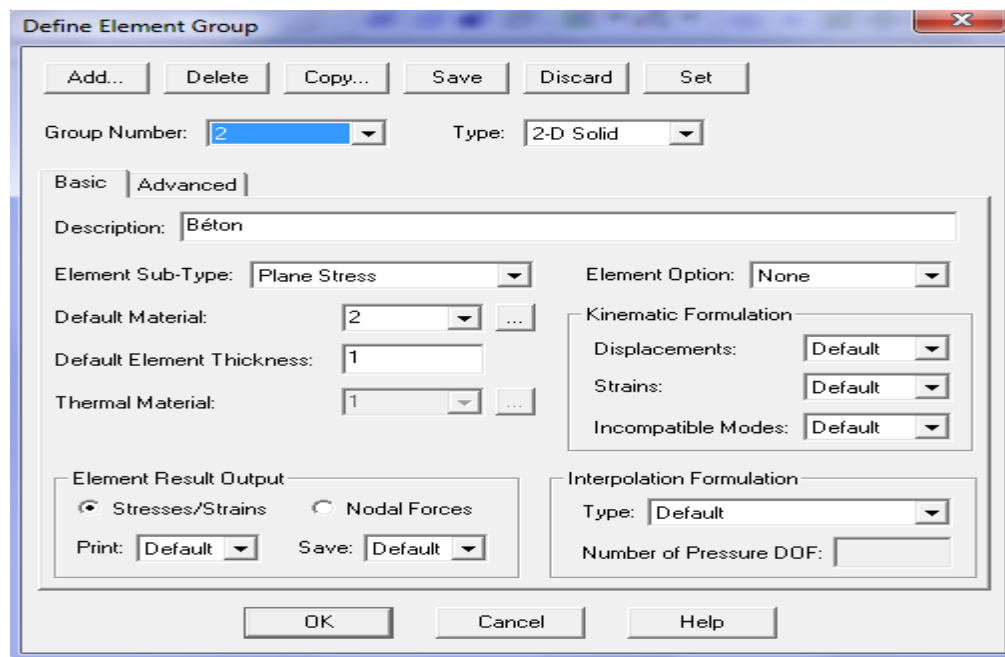


Figure A.7.2. Élément Béton groupe 2

- **Définition les surfaces en contact:** Cliquer sur icon 'Define Contact Groups'  , ajouter 'Group Number': 1. placer le 'Type' : 2-D Solid. Puis cliquer sur OK.

Definir le perimetre de contacte par ligne de chaque surface entre les deux materiaux :

Surface 1(PRF) limiter par ligne 13 et ligne 14 de surface 3 et 4 de surface beton. Figure A.8.1

Surface 2(PRF) limiter par ligne 15 et ligne 14de de surface 5 et 6 de surface beton.

Figure A.8.2

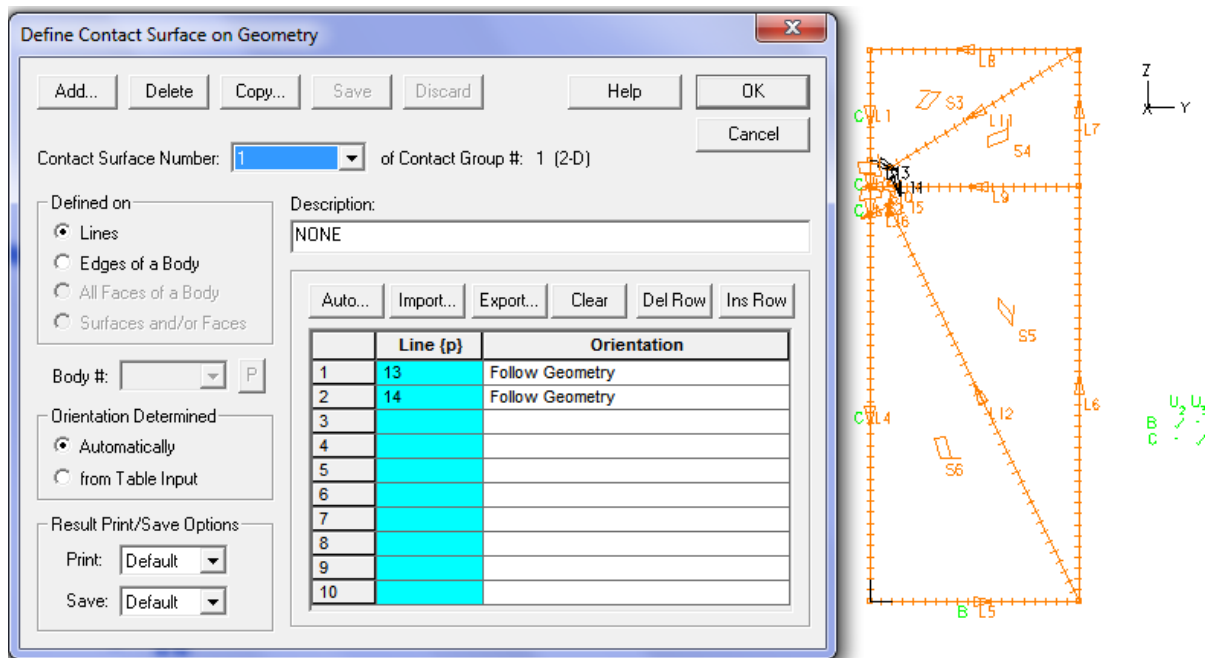


Figure A.8.1. Contacte surface1(PRF) avec le béton(S3,S4) par ligne13 et 14

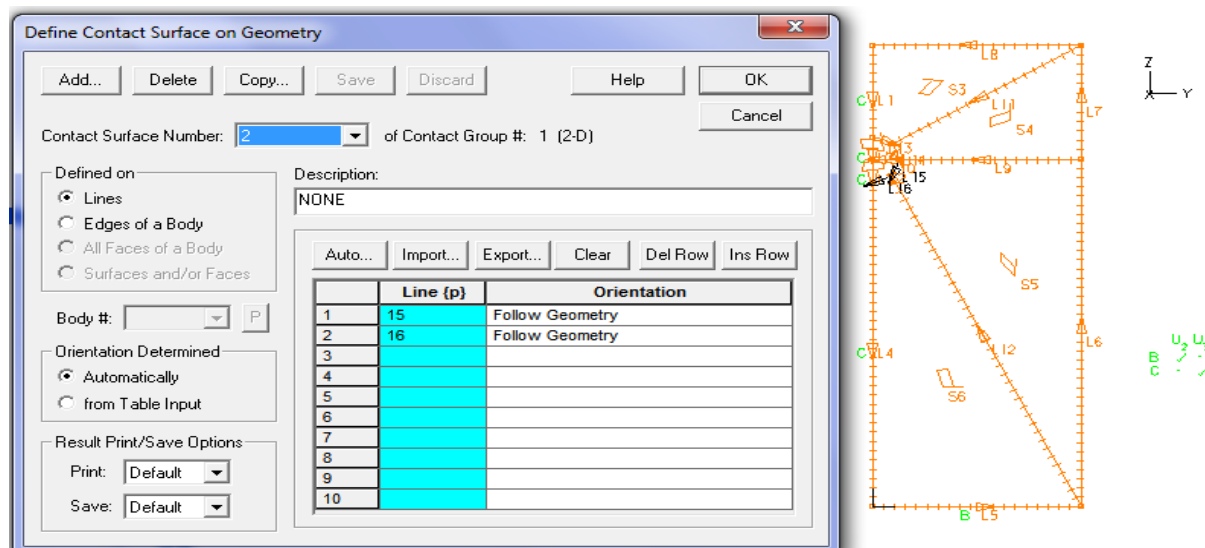


Figure A.8.2. Contacte surface2(PRF) avec le béton(S5,S6) par ligne15 et 16 de même manière pour 3 ; 4 ; 5 ; 6 et cliquer sur OK.

Cliquer sur le bouton 'Define Contact Pairs'  → Add → Contact Pair Number : 1 → Target Surface : 1 → Contactor Surface : 3 Figure A.8.3., Add → Contact Pair Number : 2 → Target Surface : 1 → Contactor Surface : 4 et de même manière pour 3 ; 4 → OK.

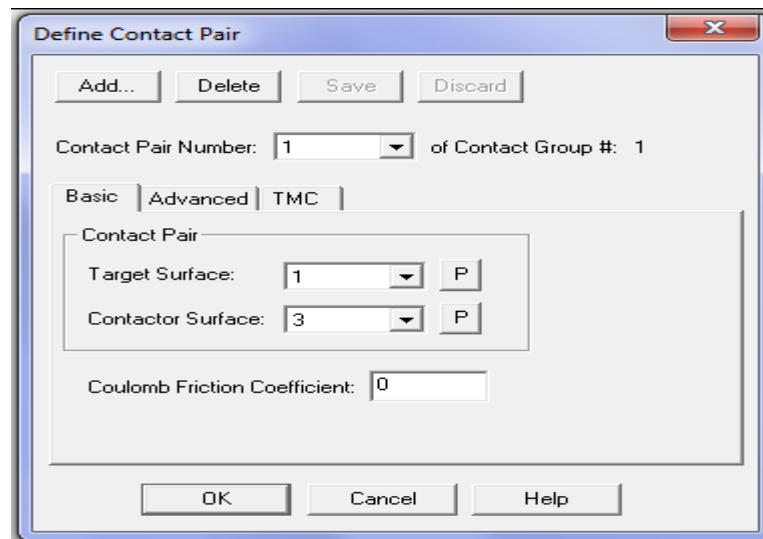


Figure A.8.3.Définition contacte pair

▪ Maillage :

Choisir Meshing → Mesh Density → surface → surface 1 (nombre division u= 2,v=2) save

Choisir Meshing → Mesh Density → surface → surface 2 (nombre division u= 2,v=2) save

Surface 1 et 2(PRF).maillage aux choix. Figure A.9.1. de même pour 3,4,5,6puis cliquer save

Figure A.9.2.

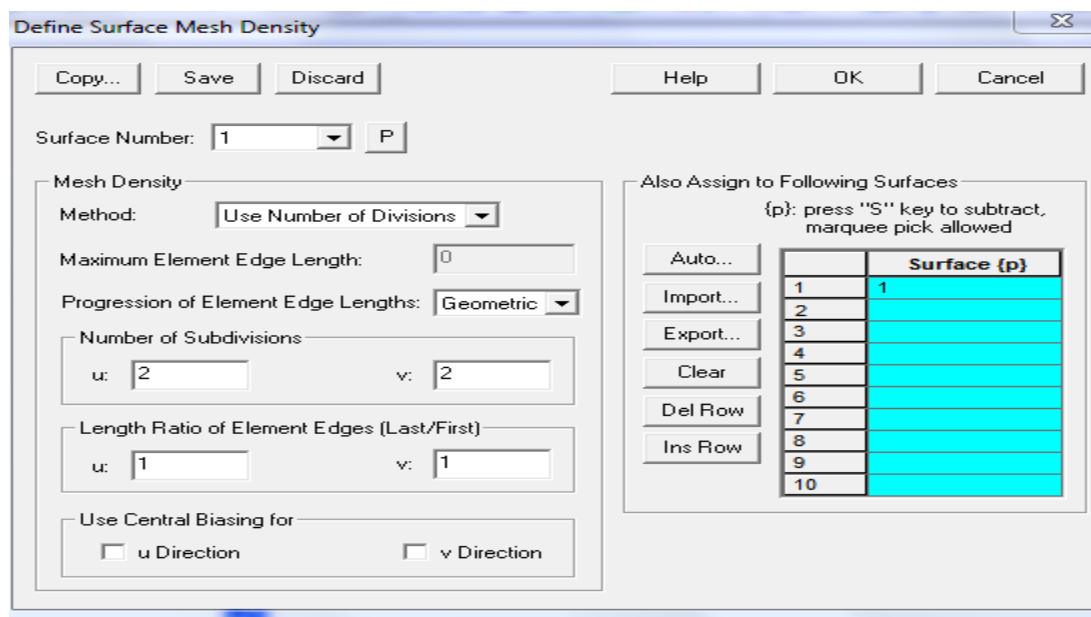


Figure A.9.1.Maillage surface1 de PRF

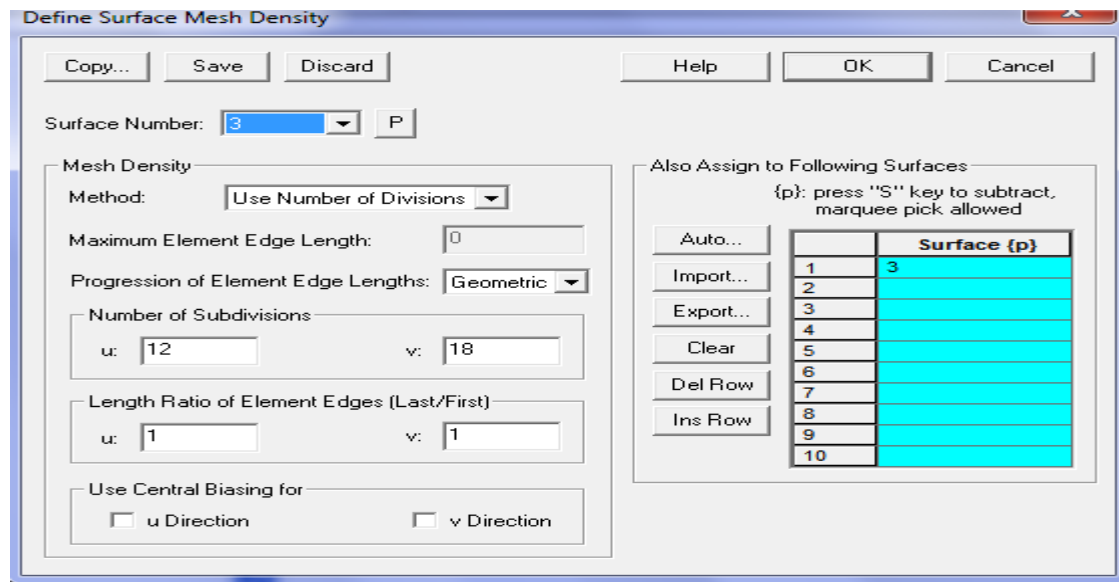


Figure A.9.2. Maillage surface3 de béton

Cliquer sur (Mesh surface icon)  → Element group 1 → surface 1 et 2 → Node per element 6 → Triangular (triangle à 6 nœuds T6) → apply.

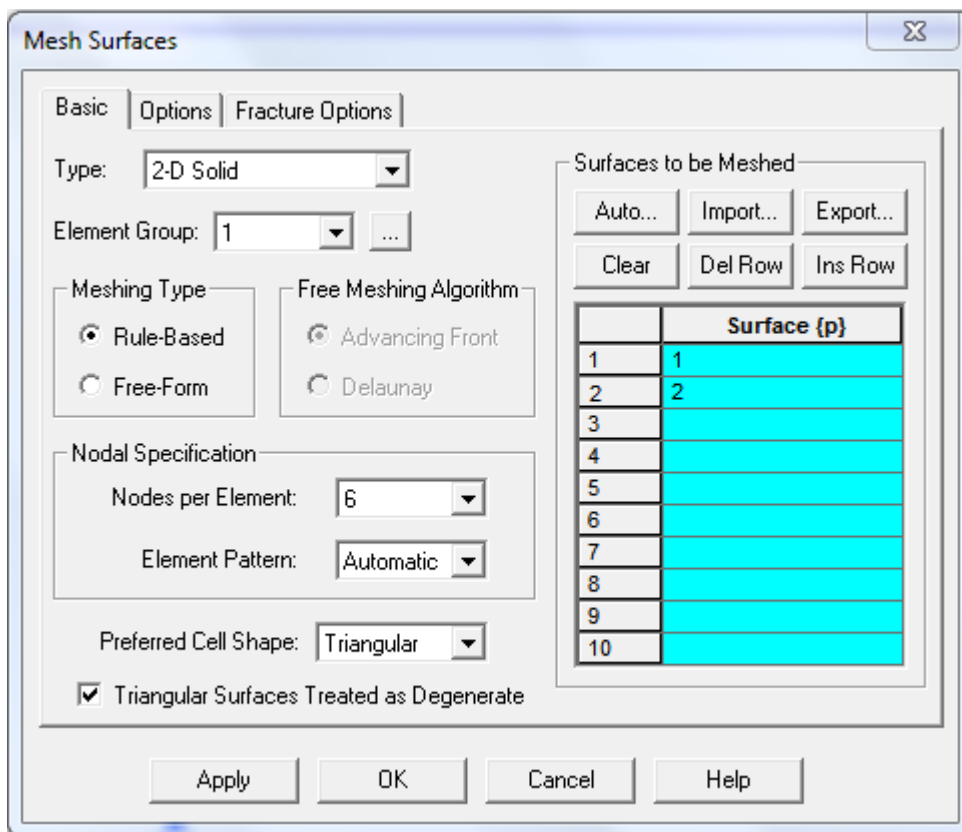


Figure A.9.3. choix élément de maillage (T6)

Et même pour élément groupe 2(béton) des surfaces 3,4,5,6.

Et finalement le modèle d'une poutre (P #10.20-76-100) complet 'Save icon'  → vérifier que Type : 'ADINA-IN Database Files (*.ldb)', Nom du fichier : P #10.20-76-100 → Enregistrer.

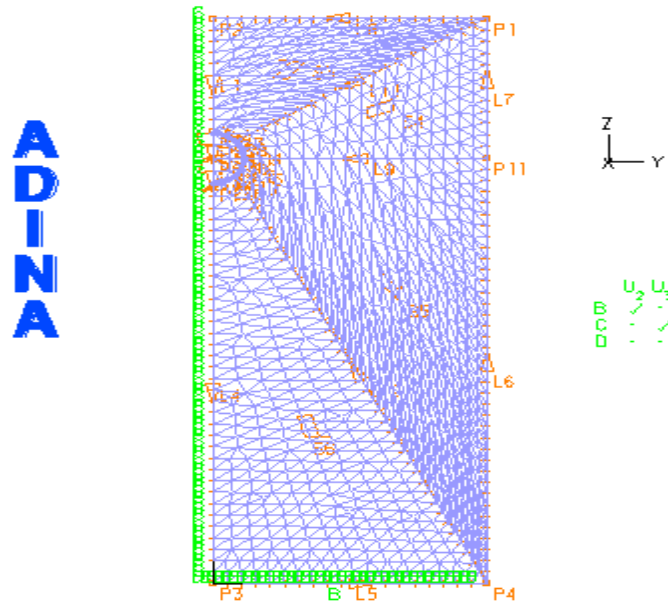


Figure A.10. Modèle d'une poutre (P #10.20-76-100)

iii.2. Exécution et analyse :

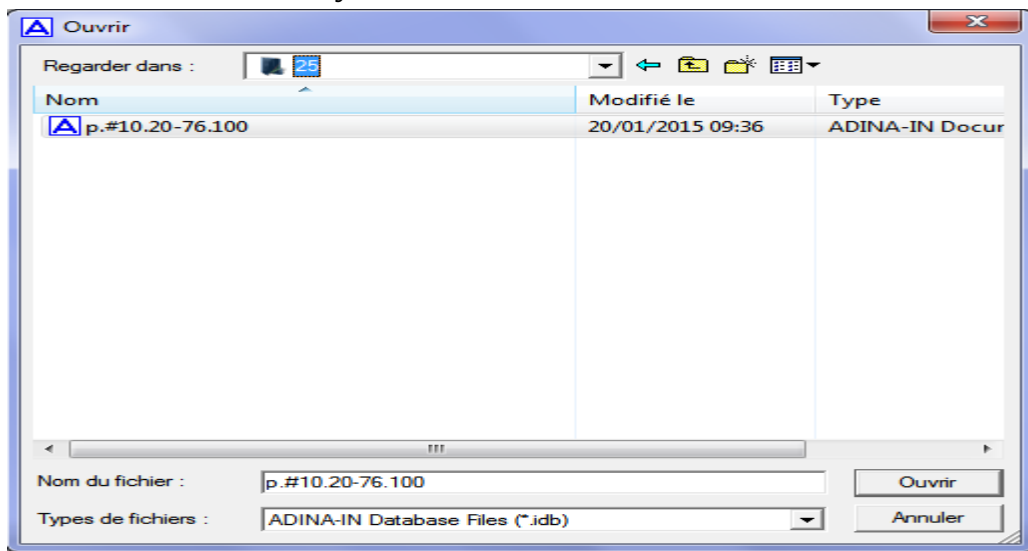


Figure A.11. Enregistrer le modèle

Ouvrir le modèle puis cliquer sur l'icône (Data File/Solution)  pour faire le calcul et vérifier si le Type : ADINA-IN Database Files (*.dat).

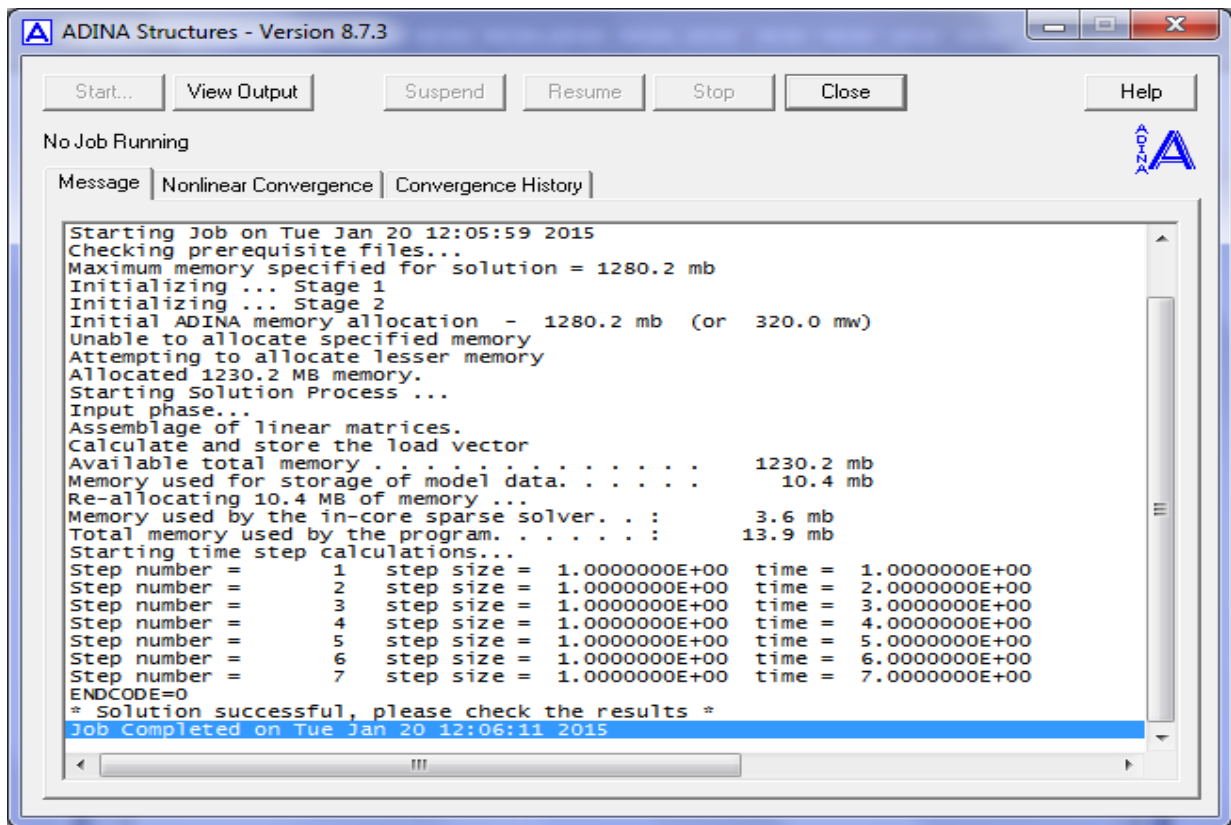


Figure A.12. Analyse de modèle

ADINA affiche la fenêtre suivante et faire le calcul, quand il est terminé affiche le message que le travail est terminé, puis fermé les fenêtres de graphique.

Choisir “Post-Processing”, ouvrir le fichier open file  → ‘Porthole P #10.20 (*.Por*)’

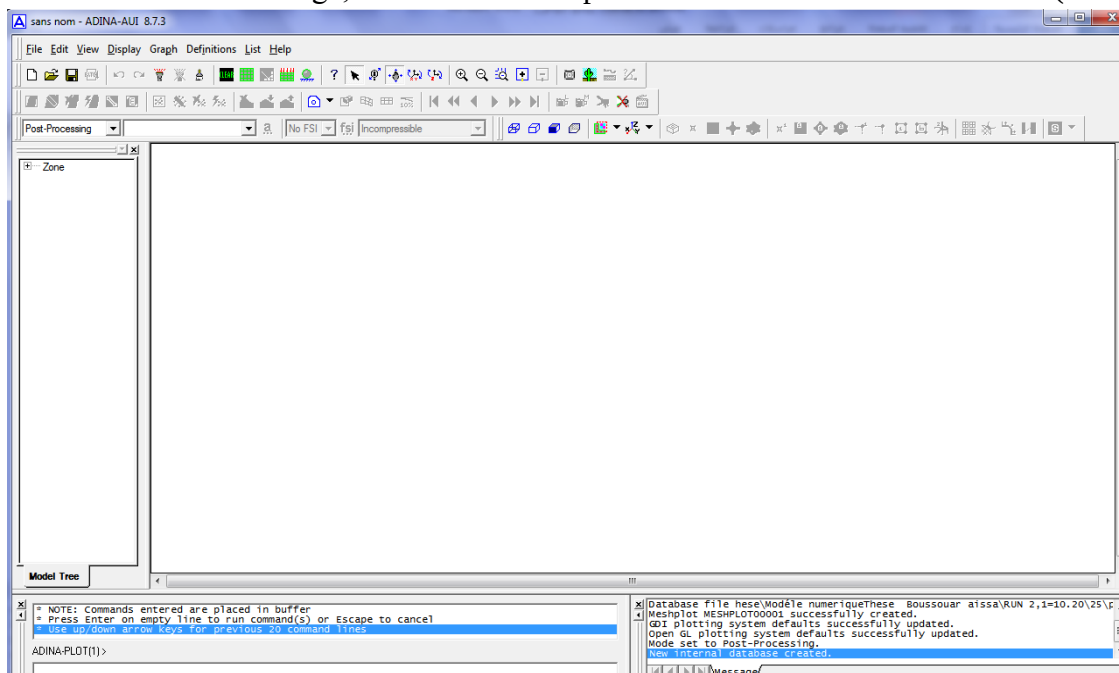


Figure A.13. Analyse de modèle

Barre de guide :  File Edit View Display Graph Definitions List Help

Choisir List → Extreme values → Zone → Figure A.14.

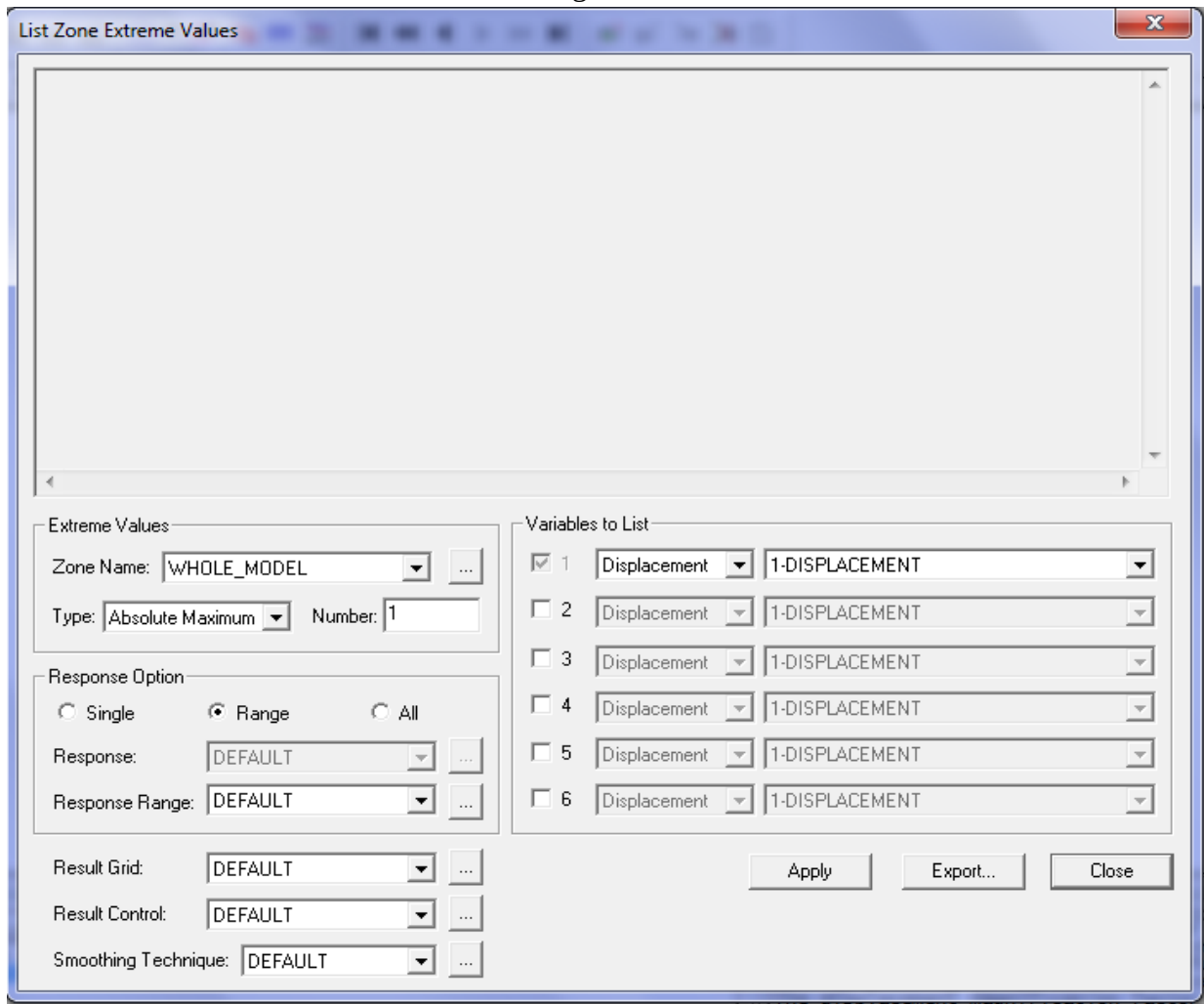


Figure A.14. Affiche les résultats de modèle

les résultats de modèle sont :

Déplacement ,contrainte(stress),déformation (strain).....ect, à titre d'exemple :contrainte thermique radiale (stress22) :

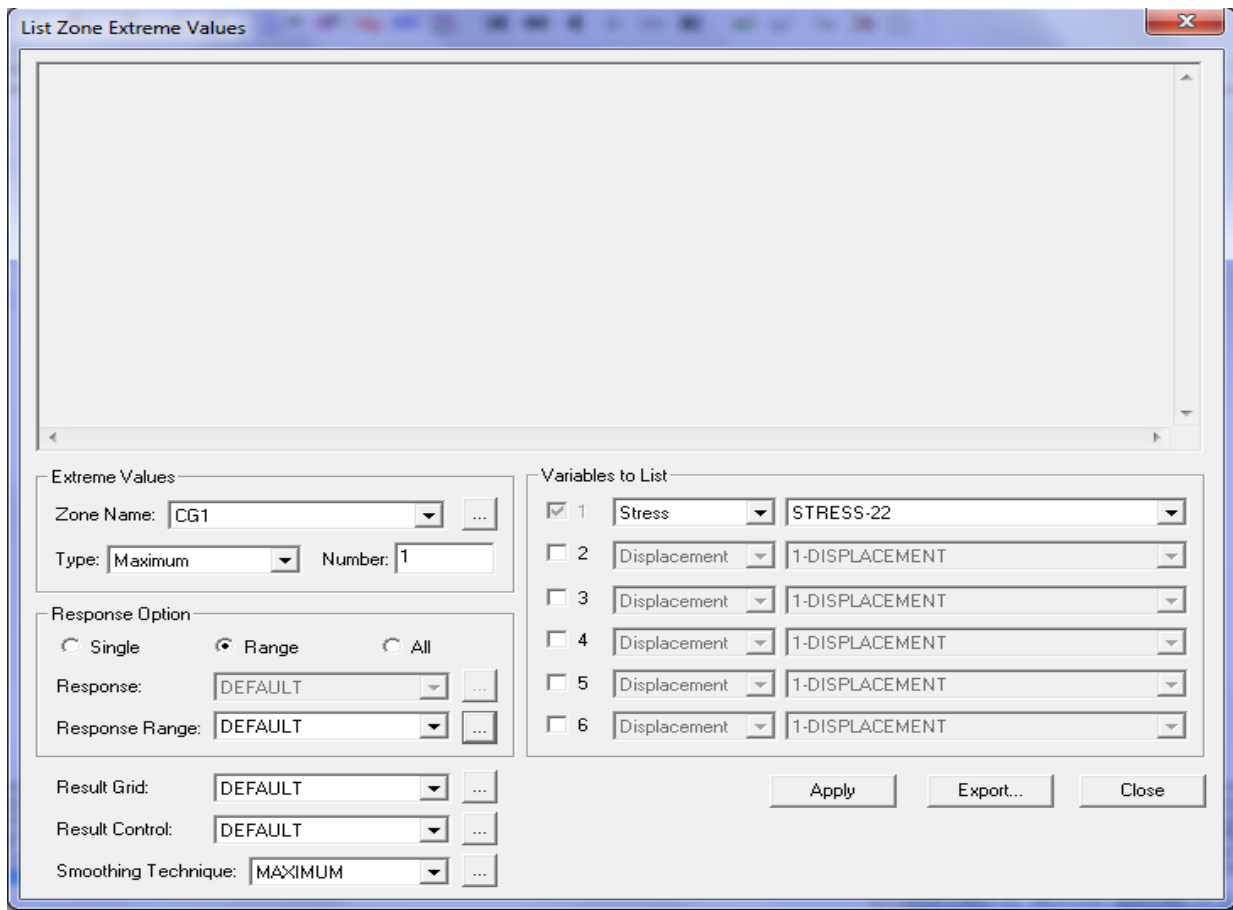


Figure A.15.1. Affiche résultat de contrainte 22

Cliquer sur **RESULT CONTROL** pour déclarer coordonner de système cylindrique (1) Figure A.15.2.

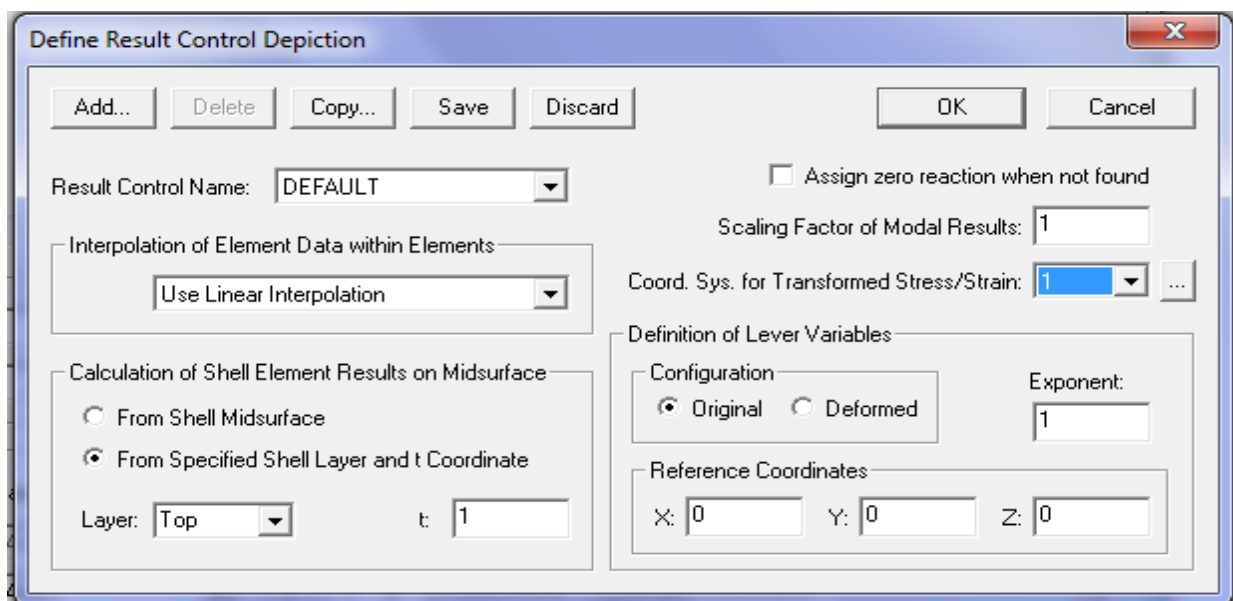


Figure A.15.2. Coordonner cylindrique

Déclare le pas par : cliquer sur **Response range** start time (1) et End time(1) puis cliquer OK.

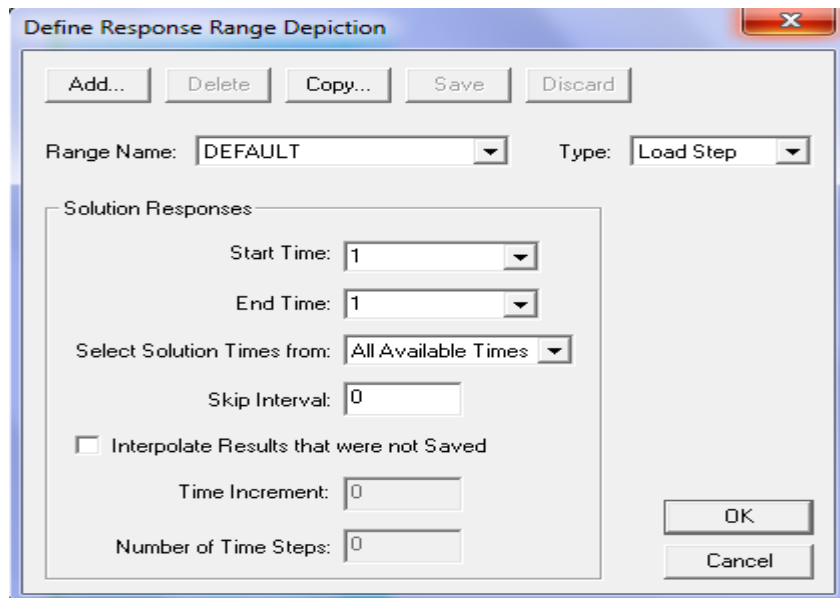


Figure A.15.3.le pas de temps

Puis cliquer sur apply pour afficher le résultat. Figure A.15.4.

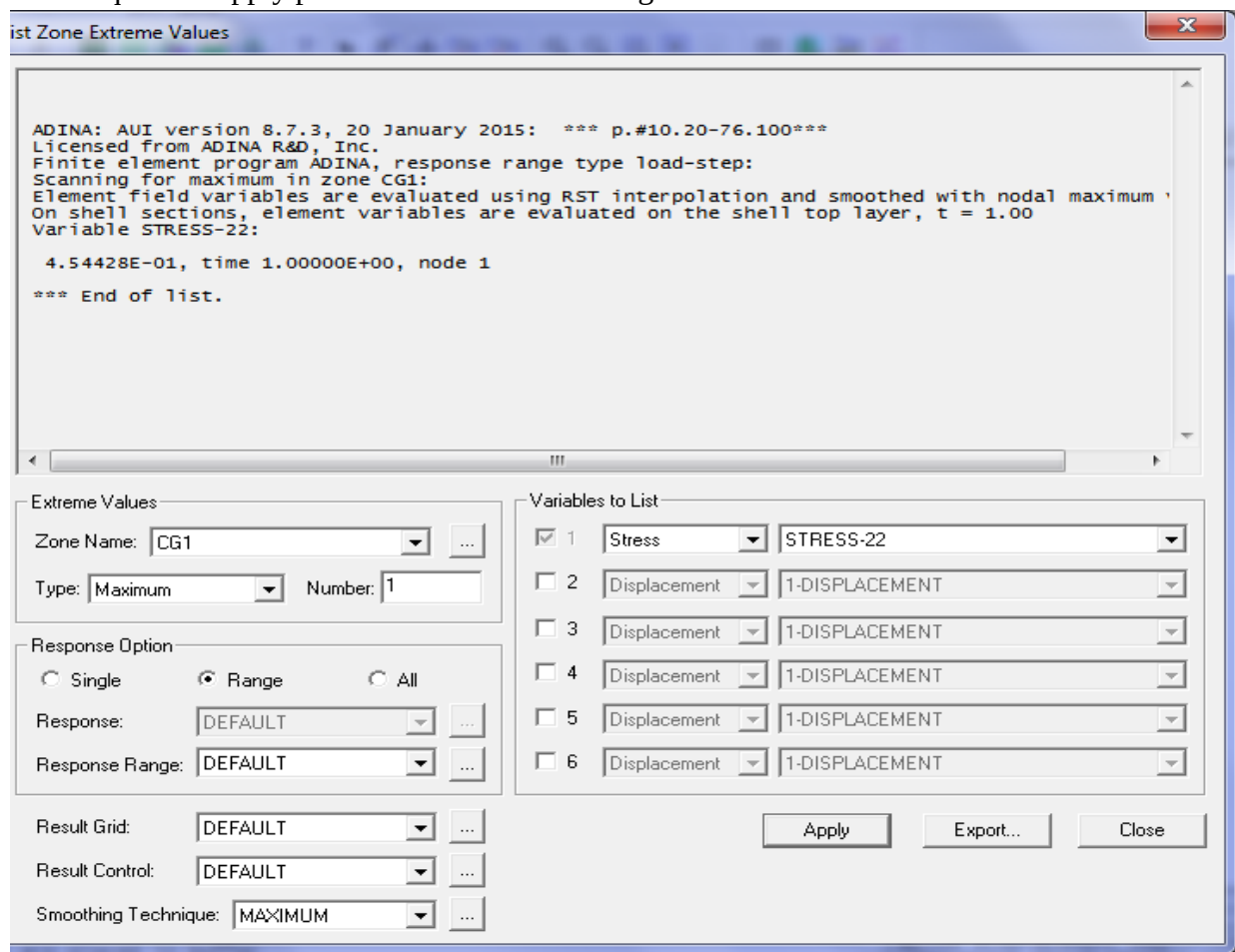


Figure A.15.4.resultat afficher

Cliquer  Icon create vector plot Figure A.16. dessiner fissure première dans le modele

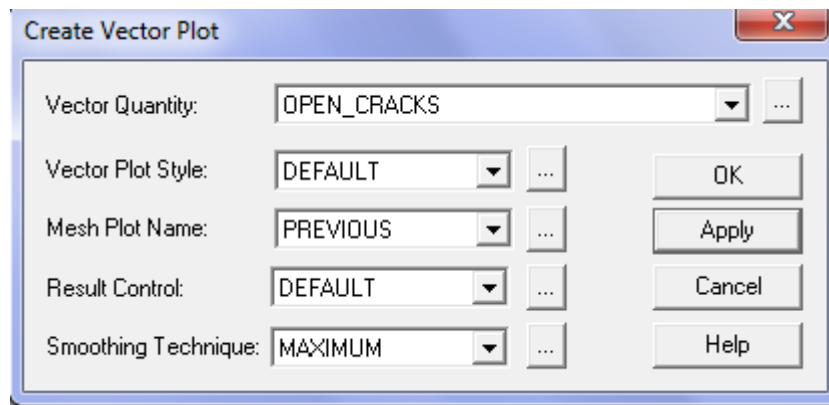


Figure A.16.vecteur plot

Cliquer Icon create band plot  tracer les contraintes de modèle avec barre valeurs.

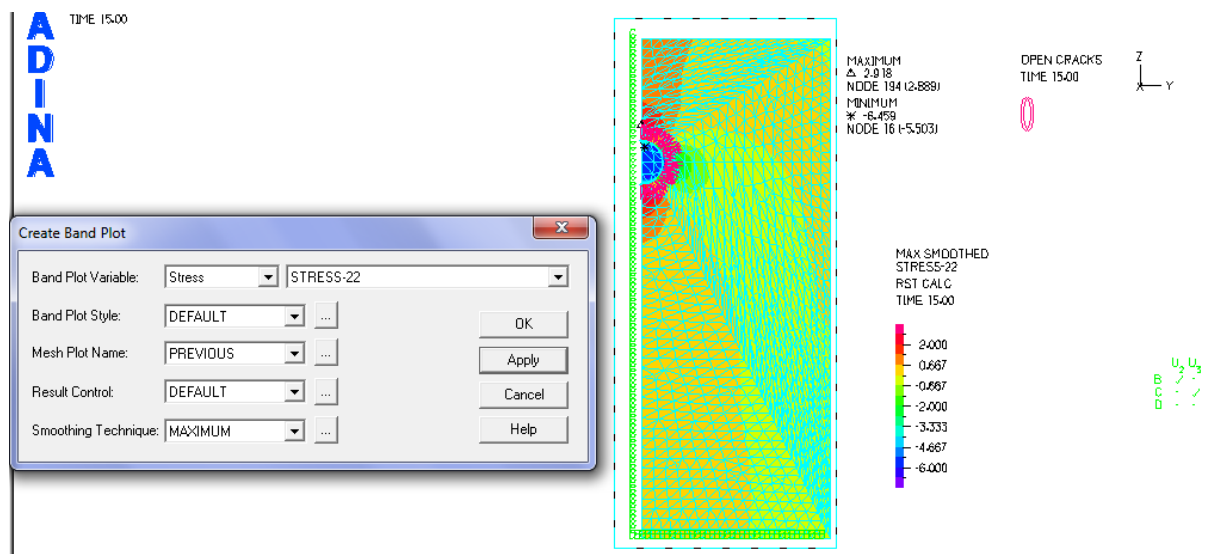


Figure A.17.vecteur create band plot.

Fin.