

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITÉ AMAR TÉLÉDJI DE LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES
قسم الرياضيات
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Présenté par :

TIAIBA ASSIA.

THEME

Équations différentielles fractionnaires linéaires et non linéaires .

Soutenance publique devant le jury composé de :

Dr. BOUKEHILA AHCENE.	M.C.A	Président
Dr. ABDESSELAM NAWEL.	M.C.B	Promotrice
Dr. BOUGOUTAIA AMAR.	M.C.A	Examineur

Année Universitaire 2022/2023

Remerciement

Merci avant tout au bon Dieu **ALLAH**, le clément, le miséricordieux, le plus puissant .

En premier lieu nos remerciements s'adressent à nos encadrant **Nawel Abdesselam**. Merci à tous nos professeurs de Université Amar Têlédji, Laghouat.

Nous remercions également les membres du jury d'avoir accepté d'examiner et de juger notre travail.

Que tous ceux qui, de près ou de loin ont contribué, par leurs conseils, leurs encouragements ou leur amitié à l'aboutissement de ce travail, trouvent ici l'expression de notre profonde reconnaissance.

Pour leur encouragement, leur soutien moral et la patience qu'ils nous ont manifestée durant toute l'année, nous remercions fortement tous les membres de nos familles.

Enfin remercier nos parents serait se répéter, parfois pour exprimer plus que ce qu'on a envie de dire on a recours au silence.

Dédicace

Je dédie ce projet :

A mon cher père, Tiaiba Teyab.

A ma chère mère, Tiaiba Aouli.

Qui n'ont jamais cessé, de formuler des prières à mon égard, de me soutenir
et de m'épauler pour que je puisse atteindre mes objectifs.

Pour leurs indéfectibles soutiens et leurs patiences infinies.

A mes frères , Mohammed Aiman, Inas, Maram, Lina, Hadil Rihab.

Pour leurs prières et leur soutien moral.

A ma grand-mère,

Que dieu la repose et la mette au paradis .

A mes chères ami(e)s, pour leurs aides et supports dans les moments difficiles.

A toute ma famille, a tous mes autres ami(e)s,
a tous ceux que j'aime et ceux qui m'aiment.

Résumé :

Les équations différentielles fractionnaires sont la généralisation des équations différentielles classiques.

Dans ce mémoire, nous étudions l'existence de la solution de certains problèmes de Cauchy fractionnaires. Nous avons traité le cas linéaire par la transformée de Laplace des dérivées fractionnaires, aussi le problème de Cauchy, et le cas non linéaires avec le théorème de point fixe de Banach.

Mots clés : Calcul fractionnaire, Problème fractionnel linéaire , Dérivée et intégrale fractionnaire, Existence et unicité.

ملخص

المعادلات التفاضلية الكسرية هي تعميم للمعادلات التفاضلية العادية. في هذه المذكرة، قمنا بدراسة وجود الحل لبعض مشاكل كوشي الكسري عاجنا الحالة الخطية بواسطة تحويل لابلاس للمشتقات الكسرية وكذا مسألة كوشي، والحالة الغير خطية بواسطة نظرية النقطة الصامدة لبناخ.

الكلمات المفتاحية : الحساب الكسري، مشكلة الكسرية الخطية، المشتقات والتكاملات الكسرية، الوجود والوحدانية.

Abstract :

Fractional differential equations are generalization of classical differential equations. In this memory, we study the existence results of the solution of some fractional Cauchy problems. We have treated linear cases by Laplace transform of fractional derivatives and also Cauchy problem, and nonlinear cases with Banach's fixed point theorem.

Key words : Fractional calculus, Linear fractional problem, Derivative and fractional integral, Existence and uniqueness.

Table des matières

1	Préliminaire.	4
1.1	Fonctions mathématiques utiles.	4
1.1.1	Fonction Gamma	4
1.1.2	Fonction Bêta	8
1.1.3	Fonction Mittag-Leffler	9
1.2	Dérivées et intégrales fractionnaires.	11
1.2.1	Dérivée et intégrale fractionnaire de Grünwald-Letnikov	11
1.2.2	Dérivées et intégrales fractionnaire de Riemann- Liouville	15
1.2.3	Dérivées fractionnaire au sens de Caputo	26
2	Équation différentielle fractionnaire linéaire.	30
2.1	Transformées de Laplace des dérivées fractionnaires.	30
2.1.1	Outils de base de la transformée de Laplace :	30
2.1.2	Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville :	31
2.1.3	Transformée de Laplace de la dérivée de Caputo :	32
2.1.4	Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov :	33
2.2	Existence de la solution d'un problème fractionnel linéaire :	34
3	Équation différentielle fractionnaire non-linéaire.	36
3.1	Théorème du point fixe du type Banach.	36
3.2	Résultat d'existence et d'unicité.	37
3.2.1	Résultat d'équivalence entre le problème de Cauchy et l'équation in- tégrale de Volterra	38
3.3	Résultat d'existence et d'unicité de la solution.	39

Notations

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes :

Γ	Fonction Gamma.
β	Fonction bêta .
E_α	Fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre.
$E_{\alpha,\beta}$	Fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres.
${}_a D_t^\alpha$	Dérivée fractionnaire de Riemann- Liouville($\alpha \in C(\Re(\alpha) \leq 0)$).
${}^G D_t^\alpha$	Dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov ($\alpha \in C(\Re(\alpha) \leq 0)$).
${}_a^R D_t^\alpha$	Dérivées fractionnaire au sens de Caputo ($\alpha \in C(\Re(\alpha) \leq 0)$) .
(I_a)	Intégrales fractionnaire de Riemann- Liouville.
$F(s) = L \{f(t); s\}$	Transformée de Laplace.
$L \{f(t) \star g(t); s\}$	Transformée de Laplace de la convolution.
$L \{ {}_0 D_t^{-p} \}$	Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.
$L \{ {}_0^C D_t^p \}$	Transformée de Laplace de la dérivée de Caputo.
$L \{ {}_0 D_t^p \}$	Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov .

Introduction générale.

Les dernières décennies, le calcul fractionnaire est devenu une importante branche de mathématiques grâce à son immense application dans différents domaines des sciences qui ont été développés, tels que la physique, la chimie, la finance, ...ect. Le calcul fractionnaire est une théorie des intégrales et des dérivées d'ordre arbitraire réel ou même complexe. La théorie du calcul fractionnaire est un sujet presque aussi vieux que le calcul différentiel et remonte aux temps où Leibniz, Gauss, Newton ont développé les fondamentales de ce type de calcul. Le calcul fractionnaire est une généralisation du calcul différentiel. Son histoire remonte à l'hôpital (1693) qui se pose la question d'interpréter la dérivée d'ordre $1/2$. C'est l'acroix (1879) qui montre que pour $f(x) = x^a$ et $a > 0$,

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\frac{1}{2})} x^{a-\frac{1}{2}}.$$

Ensuite, Fourier, Liouville, Riemann, Weyl, Riesz, Marchaud et Caputo, entre autres, ont contribué au développement du calcul fractionnaire dans lequel on définit les dérivées et intégrales non entières. Les équations différentielles fractionnaires apparaissent naturellement dans différents domaines scientifiques comme la physique, la médecine, l'électro-chimie, la théorie du contrôle, etc. L'efficacité de ces équations dans la modélisation de plusieurs phénomènes du monde réel a motivé beaucoup de chercheurs à étudier leurs aspects quantitatifs et qualitatifs.

Ce mémoire se décompose de trois chapitres partagés de la manière suivante :

Dans Le premier chapitre, on a présente quelques notions utiles à travers ce travail. On a commence par certaines fonctions de base utiles comme la fonction Gamma, la fonction Bêta et la fonction de Mittag-Leffler, ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie de calcul fractionnaire. Dans la deuxième section, on a donne quelques définitions des dérivées et intégrales fractionnaires au sens de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville et Caputo.

Dans Le deuxième chapitre, on a deux section la première présente les transformées de Laplace des dérivées fractionnaires, et la deuxième section comporte l'existence de la solution d'un problème fractionnel linéaire.

Dans Le troisième chapitre, on a trois section la première présente le théorème du point fixe du type Banach, et la deuxième section comporte la résultat d'existence et d'unicité, et la troisième section présente la résultat d'existence et d'unicité de la solution.

Chapitre 1

Préliminaire.

Dans ce chapitre, on rappelle quelques notions nécessaires et utilisables à travers de ce travail, il est partagé en deux sections. La première section comporte certaines fonctions de base utiles comme la fonction Gamma, la fonction Bêta et la fonction de Mittag-Leffler, ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie de calcul fractionnaire. Dans la deuxième section, on va donner quelques définitions des dérivées des intégrales fractionnaires au sens de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville et Caputo.

1.1 Fonctions mathématiques utiles.

1.1.1 Fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(\alpha)$.

Définition 1.1.1. [3] : La fonction Gamma $\Gamma(\alpha)$ est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt. \quad (1.1)$$

avec $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0_+) = +\infty$, $\Gamma(\alpha)$ est une fonction strictement décroissante pour $0 < \alpha \leq 1$.

Dans la proposition suivante on va donner une relation importante .

Proposition 1.1.1. [3] : la fonction Gamma $\Gamma(\alpha)$ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha). \quad (1.2)$$

Preuve.

qu'on peut la démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha+1-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha} dt = \left[-t^{\alpha} e^{-t} \right]_{t=0}^{t=+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt = \alpha \Gamma(\alpha).$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n + 1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$ en effet

$\Gamma(1) = 1$, et en utilisant (1.2) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1\Gamma(1) &&= 1!. \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) &&= 2.1! = 2!. \\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) &&= 3.2! = 3!. \\ \Gamma(n + 1) &= n\Gamma(n) &&= n(n - 1)! = n!. \end{aligned}$$

Nous montrons maintenant que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ De la définition (1.1) nous avons :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt.$$

Si nous posons $t = y^2$ alors $dt = 2ydy$, et nous obtenons maintenant

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy. \tag{1.4}$$

De façon analogue, on peut écrire :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx. \tag{1.5}$$

Si nous multiplions ensemble (1.4) et (1.5) nous obtenons :

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 = 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy. \tag{1.6}$$

L'équation (1.6) est un intégrale double, qui peut être évaluée en coordonnées polaires pour obtenir

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} dr d\theta = \pi. \tag{1.7}$$

Ainsi, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

L'équation fonctionnelle (1.2) entraîne pour les entiers relatifs positifs n ,

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{1.3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}, \\ \Gamma\left(n + \frac{1}{3}\right) &= \frac{1.4.7 \dots (3n-2)}{3^n} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right), \\ \Gamma\left(n + \frac{1}{4}\right) &= \frac{1.5.9 \dots (4n-3)}{4^n} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right),\end{aligned}$$

et pour les valeurs négatives,

$$\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{1.3.5 \dots (2n-1)} \sqrt{\pi}.$$

Où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et sa dimension est celle du système, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ sortie du système, $u(t) \in \mathbb{R}^r$ dite entrée du système.

Représentation de la fonction Gamma sous forme d'une limite

La fonction Gamma peut être représentée aussi par la limite

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n)}. \quad (1.8)$$

Où nous supposons que $\text{Re}(\alpha) > 0$.

pour prouver (1.8), nous introduisons la fonction auxiliaire suivante :

$$f_n(\alpha) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{\alpha-1} dt. \quad (1.9)$$

Effectuant maintenant la substitution $\tau = \frac{t}{n}$, puis en répétant l'intégration par partie, nous obtenons :

$$\begin{aligned}f_n(\alpha) &= n^\alpha \int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{\alpha-1} d\tau, \\ &= \frac{n^\alpha}{\alpha} n \int_0^1 (1-\tau)^{n-1} \tau^\alpha d\tau, \\ &= \frac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)} \int_0^1 \tau^{\alpha+n-1} d\tau, \\ &= \frac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)(\alpha+n)}.\end{aligned} \quad (1.10)$$

En exploitant la limite connue :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}. \quad (1.11)$$

nous arrivons à :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{\alpha-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt. \quad (1.12)$$

Ce qui termine la preuve de la présentation(1.8)de la fonction Gamma, si la relation(1.12) est justifiée. Pour ce faire, nous estimons la différence

$$\begin{aligned}\Delta &= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt - f_n(\alpha), \\ &= \int_0^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{\alpha-1}dt + \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt.\end{aligned}\tag{1.13}$$

Prenons un $\varepsilon > 0$ arbitraire. En raison de la convergence de l'intégrale(1.1), il existe un N tel que pour $n \geq N$, on a

$$\left| \int_n^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt \right| \leq \int_n^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt < \frac{\varepsilon}{3} \quad (x = \operatorname{Re}(\alpha)).\tag{1.14}$$

Fixons maintenant N et considérons $n > N$, nous pouvons écrire Δ comme une somme de trois intégrales :

$$\Delta = \left(\int_0^N + \int_N^n \right) \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{\alpha-1}dt + \int_n^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt.\tag{1.15}$$

Le dernier terme est inférieur à $\frac{\varepsilon}{3}$ pour le seconde intégrale, nous avons :

$$\left| \int_N^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{\alpha-1}dt \right| \leq \int_N^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{\alpha-1}dt < \int_N^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt < \frac{\varepsilon}{3}.\tag{1.16}$$

où comme ci dessus, ($x = \operatorname{Re}(\alpha)$) Pour l'estimation de la première intégrale dans(1.15) nous besoin de l'inégalité auxiliaire suivante :

$$0 < e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n < \frac{t^2}{2n}, \quad (0 < t < n).\tag{1.17}$$

qui découle, des relations :

$$1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \int_0^t e^\tau \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^n \frac{\tau}{n}d\tau,\tag{1.18}$$

et

$$0 < \int_0^t e^\tau \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^n \frac{\tau}{n}d\tau < \int_0^t e^\tau \frac{\tau}{n}d\tau = e^t \frac{t^2}{2n}.$$

(La relation(1.18) peut être vérifiée en différenciant les deux cotés).

En utilisant l'intégrale auxiliaire(1.17), nous obtenons pour n assez grand et N fixé :

$$\left| \int_0^N \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{\alpha-1}dt \right| < \frac{1}{2n} \int_0^N t^{x+1}dt < \frac{\varepsilon}{3}.\tag{1.20}$$

En tenant compte des inégalités(1.14), (1.16) et (1.20) et que ε arbitraire, nous concluons que(1.12) est justifiée.

Ceci termine certainement la preuve de la formule (1.18) pour $\text{Re}(\alpha) > 0$. À l'aide de (1.2), la condition $\text{Re}(\alpha) > 0$. Peut être affaiblie pour $\alpha \neq 0, -1, -2 \dots$ de la manière suivante :

Si $-m < \text{Re}(\alpha) < -m + 1$, où m est nombre entier positif, alors :

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= \frac{\Gamma(\alpha + m)}{\alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + m - 1)}, \\ &= \frac{1}{\alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + m - 1)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\alpha+m} n!}{(\alpha + m) \dots (\alpha + m + n)}, \\ &= \frac{1}{\alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + m - 1)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n - m)^{\alpha+m} (n - m)!}{(\alpha + m)(\alpha + m + 1)(\alpha + n)}, \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\alpha} n!}{\alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + n)}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Par conséquent, la représentation est vraie pour tout α , $\alpha \neq 0, -1, -2 \dots$

1.1.2 Fonction Bêta

C'est l'une des fonctions de base dont nous avons besoin dans un calcul fractionnaire.

Définition 1.1.2. [3] : La fonction Bêta définie par :

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt, \quad (\text{Re}(\alpha) > 0, \text{Re}(\beta) > 0). \tag{1.22}$$

Propriétés 1.1.1. la fonction Bêta symétrique c'est-à-dire que $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$.

La fonction Bêta est reliée au fonction Gamma par la relation suivante : $\forall \alpha, \beta > 0$,

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

Preuve. On montre la première propriété :

on a :

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt; \quad \forall \alpha, \beta > 0,$$

on fait le changement de variable : $u = 1 - t$ donc $dt = -du$,

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 (u-1)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du = B(\beta, \alpha); \quad \forall \alpha, \beta > 0,$$

On montre la deuxième propriété : soit $\alpha, \beta > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} t_1^{\alpha-1} t_2^{\beta-1} e^{-t_1} e^{-t_2}, \\ &= \int_0^{+\infty} t_1^{\alpha-1} dt_1 \int_0^{+\infty} t_2^{\beta-1} e^{-(t_1+t_2)} dt_2, \end{aligned}$$

on fait le changement de variable suivant $t'_2 = t_1 + t_2$ alors :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \int_0^{+\infty} t_1^{\alpha-1} dt_1 \int_0^{+\infty} (t'_2 - t_1)^{\beta-1} e^{-t'_2} dt'_2, \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} dt'_2 \int_0^{t'_2} (t'_2 - t_1)^{\beta-1} t_1^{\alpha-1} dt_1,\end{aligned}$$

on pose : $t'_1 = \frac{t_1}{t'_2}$ donc :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} dt'_2 \int_0^1 (t'_1 t'_2)^{\alpha-1} (t'_2 - t'_1 t'_2)^{\beta-1} t'_2 dt'_1, \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} dt'_2 \int_0^1 (t'_2)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta), \\ &= \Gamma(\alpha + \beta) B(\alpha, \beta).\end{aligned}$$

Donc

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

Proposition 1.1.2. [3]

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha).$$

$$\alpha B(\alpha, \beta + 1) = B(\alpha + 1, \beta).$$

Si $\alpha = m$ et $\beta = n$, on obtient :

$$B(m, n) = \frac{(m-1)(n-1)!}{(m+n-1)!}, \quad \text{sin } > 1.$$

$$B(\alpha, 1) = \frac{1}{\alpha}.$$

1.1.3 Fonction Mittag-Leffler

Cette fonction joue un rôle important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier.

Définition 1.1.3. [4] : La fonction exponentielle $\exp(\alpha)$, joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre qui généralise la fonction exponentielle a été introduite par Mittag-Leffler en 1903 et désignée par la fonction suivante :

$$E_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}. \quad (1.24)$$

La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres, joue un rôle très important dans la théorie de calcul fractionnaire. Cette fonction a été introduite par Agarwal et Erdelyi en 1953-1954 et elle est définie par un développement en série suivante :

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \quad (1.25)$$

A partir de la relation (1.24), on trouve les relations suivantes :

$$E_{\alpha,1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha}(t),$$

$$E_{1,1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t,$$

$$E_{1,2}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+1)!} = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^t - 1}{t},$$

$$E_{1,3}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+2)!} = \frac{1}{t^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^t - 1 - t}{t^2},$$

et en général

$$E_{1,p}(t) = \frac{1}{t^{p-1}} \left\{ e^t - \sum_{k=0}^{p-2} \frac{t^k}{k!} \right\}. \quad (1.30)$$

Les cosinus et les sinus hyperboliques sont aussi des cas particuliers de la fonction Mittag-Leffler (1.24)

$$E_{2,1}(t^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \cosh(t).$$

$$E_{2,2}(t^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(t)}{t}.$$

Pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire, la fonction de Mittag-Leffler joue le même rôle que la fonction exponentielle.

1.2 Dérivées et intégrales fractionnaires.

1.2.1 Dérivée et intégrale fractionnaire de Grünwald-Letnikov

L'idée de cette dérivée est de généraliser la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraires.

Soit f la fonction continue sur $[a, b]$, la dérivée première de la fonction f au point t est définie par :

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}. \quad (1.33)$$

Par dérivation successive de la fonction f , on obtient une généralisation de la formule(1.33) à l'ordre n (n est un entier positif ou nul) de la forme :

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh), \quad (1.34)$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

La formule(1.34) représente la dérivée d'ordre entier n , si n est positif et l'intégrale répétée n fois si n est négatif.

Grâce à la propriété fondamentale $\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$, on peut arriver à une expression plus générale dans le cas où n est négatif ou nul.

$$(-1)^k \binom{n}{k} = \frac{-n(1-n)\dots(k-n-1)}{k!} = \frac{\Gamma(k-n)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n)}.$$

On définit donc la dérivée d'ordre non entier α par :

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^\alpha f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)} f(t - kh), \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Et

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^{-\alpha} f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{-\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)} f(t - kh), \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Les formules(1.35) et(1.36) définissent respectivement les dérivées fractionnaires d'ordre α et d'ordre $(-\alpha)$ au sens de Grünwald-Letnikov de la fonction f , où f est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, t]$.

Si f est de classe C^m , des intégrations par parties(1.35) et(1.36) nous permet d'écrire :

$${}_a^G D_t^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau. \quad (1.37)$$

Et

$${}_a^G D_t^{-\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m+\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m+\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau. \quad (1.38)$$

La formule (1.37) est obtenue sous l'hypothèse que les dérivées $f^{(k)}(t)$, ($k = 1, 2, \dots, m$) sont continues sur l'intervalle fermé $[a, t]$ et que m est un entier vérifiant la condition $m > \alpha$. La plus petite valeur possible de m est déterminée par l'inégalité suivante , $m - 1 < \alpha < m$.

Dérivée fractionnaire de $(t-a)^\alpha$

Calculons la dérivée fractionnaire ${}_a^G D_t^p f(t)$ au sens de Grünwald-Letnikov de la fonction polynômiale

$$f(t) = (t-a)^\alpha.$$

où α est un nombre réel.

On va commencer par considérer des valeurs négatives de p , c'est-à-dire qu'on va commencer par évaluer l'intégrale fractionnaire d'ordre $(-p)$.

Utilisons la formule (1.35) :

$${}_a^G D_t^p (t-a)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} (\tau-a)^\alpha d\tau. \quad (1.39)$$

et supposons $\alpha > -1$ pour la convergence de l'intégrale. En effectuant dans (1.39), le changement de variables $\tau = a + \xi(t-a)$ et en utilisant la définition (1.22) de la fonction Bêta on obtient :

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^p (t-a)^\alpha &= \frac{1}{\Gamma(-p)} (t-a)^{\alpha-p} \int_a^t \xi^\alpha (1-\xi)^{-p-1} d\xi, \\ &= \frac{1}{\Gamma(-p)} B(-p, \alpha+1) (t-a)^{\alpha-p}, \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p}, (p < 0, \alpha > -1). \end{aligned} \quad (1.40)$$

Considérons maintenant le cas : $0 \leq m \leq p < m+1$. Pour appliquer la formule (1.37) on a besoin d'imposer $\alpha > m$ pour la convergence de l'intégrale dans (1.37). Alors on a :

$${}_a^G D_t^p (t-a)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} \frac{d^{m+1}(\tau-a)^\alpha}{d\tau^{m+1}} d\tau. \quad (1.41)$$

En tenant compte de

$$\frac{d^{m+1}(\tau - a)^\alpha}{d\tau^{m+1}} = \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - m)(\tau - a)^{\alpha - m + 1} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha - m} (\tau - a)^{\alpha - m + 1}.$$

et en effectuant le changement de variables $\tau = a + \xi(t - a)$, on arrive à :

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^p (t - a)^\alpha &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(-m)\Gamma(-p + m + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{m-p} (\tau - a)^{\alpha - m - 1} d\tau, \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)B(-p + m + 1, \alpha - m)}{\Gamma(\alpha - m)\Gamma(-p + m + 1)} (t - a)^{\alpha - p}, \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(-p + \alpha + 1)} (t - a)^{\alpha - p}. \end{aligned} \tag{1.42}$$

Notons que l'expression(1.42) est formellement identique à l'expression(1.40), on peut donc conclure que la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov de la fonction polynômiale $f(t) = (t - a)^\alpha$ est donnée par la formule :

$${}_a^G D_t^p (t - a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(-p + \alpha + 1)} (t - a)^{\alpha - p}, \tag{1.43}$$

avec $(p < 0, \alpha > -1)$ ou bien $(0 \leq m \leq p < m + 1, \alpha > m)$.

1. Dérivée fractionnaire d'une constante.

La dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov d'une fonction constante est en général ni nulle ni constante, en effet :

Si $f(t) = C$ et α non entier, on a $f^k(t) = 0$ pour $k = 1, 2, \dots, m$ et donc,

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^\alpha f(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t - a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k - \alpha + 1)} + \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau, \\ &= \frac{C}{\Gamma(1 - \alpha)} (t - a)^{-\alpha} + \underbrace{\sum_{k=1}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t - a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k - \alpha + 1)}}_0, \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau}_0, \\ &= \frac{C}{\Gamma(1 - \alpha)} (t - a)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

2. Composition avec les dérivées d'ordre entier.

Propriétés 1.2.1. [4]

Soient m un entier strictement positif et p non entier. Alors :

$$\frac{d^m}{dt^m} ({}^G D_t^p f(t)) = {}^G D_t^{m+p} f(t). \quad (1.44)$$

et

$${}^G D_t^p \left(\frac{d^m}{dt^m} f(t) \right) = {}^G D_t^{m+p} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-m}}{\Gamma(k-p-m+1)}. \quad (1.45)$$

Preuve.

Pour $n-1 < p < n$, on a d'une part :

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dt^m} ({}^G D_t^p f(t)) &= \sum_{k=0}^{n+m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-(p+m)}}{\Gamma(k-(p+m)+1)}, \\ &+ \frac{1}{\Gamma(n+m-(p+m))} \int_a^t (t-\tau)^{n+m-(p+m)-1} f^{(n+m)}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

autrement dit

$$\frac{d^m}{dt^m} ({}^G D_t^p f(t)) = {}^G D_t^{m+p} f(t).$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} {}^G D_t^p \left(\frac{d^m}{dt^m} f(t) \right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(m+k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n+m)}(\tau) d\tau, \\ &= \sum_{k=0}^{n+m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-(p+m)}}{\Gamma(k-(p+m)+1)}, \\ &+ \frac{1}{\Gamma(n+m-(p+m))} \int_a^t (t-\tau)^{n+m-(p+m)-1} f^{(n+m)}(\tau) d\tau, \\ &- \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-m}}{\Gamma(k-p-m+1)}, \end{aligned}$$

alors,

$${}^G D_t^p \left(\frac{d^m}{dt^m} f(t) \right) = {}^G D_t^{m+p} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-m}}{\Gamma(k-p-m+1)}.$$

Ce qui veut dire que, la dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle ne commutent que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$.

Composition avec les dérivées fractionnaire.

On introduit la dérivation fractionnaire un propriétés :

Propriétés 1.2.2. [4] : Trois cas sont à distinguer :

1) Pour $q < 0$ et $p \in \mathbb{R}$, on a :

$${}_a^G D_t^p ({}_a^G D_t^q (f(t))) = {}_a^G D_t^{p+q} f(t).$$

2) Si $0 \leq m < q < m + 1, p < 0$ et la fonction $f(t)$ vérifie les conditions

$$f^{(k)}(a) = 0, \text{ pour tout } k = 0, 1, 2, \dots, m - 1,$$

alors

$${}_a^G D_t^p ({}_a^G D_t^q (f(t))) = {}_a^G D_t^{p+q} f(t).$$

3) Si $0 \leq m < q < m + 1, 0 \leq n < p < n + 1$ et la fonction $f(t)$ vérifie les conditions

$$f^{(k)}(a) = 0, \text{ pour tout } k = 0, 1, 2, \dots, r - 1, \text{ où } r = \max(m, n)$$

alors,

$${}_a^G D_t^p ({}_a^G D_t^q (f(t))) = {}_a^G D_t^q ({}_a^G D_t^p (f(t))) = {}_a^G D_t^{p+q} f(t).$$

1.2.2 Dérivées et intégrales fractionnaire de Riemann- Liouville

Dans cette partie, nous citons quelques définitions et résultats du calcul fractionnaire au sens de Riemann-Liouville. Nous allons commencer par la définition de l'intégrale de Riemann-Liouville.

1. Intégrale d'ordre arbitraire.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (ou à valeurs vectorielles) une fonction continue. b pouvant être fini ou infini. Une primitive de f est donnée par l'expression

$$(I_a^1 f)(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau.$$

Pour une primitive seconde on aura

$$(I_a^2 f)(t) = \int_a^t \left(\int_a^s f(t) dt \right) ds.$$

En utilisant le théorème de Fubini ,on peut écrire

$$(I_a^2 f)(t) = \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

en itérant, on arrive à :

$$(I_a^n f)(t) = \int_a^t \frac{(t - \tau)^{n-1}}{(n - 1)!} f(\tau) d\tau.$$

Définition 1.2.1. [1] :

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On appelle *intégrale de Riemann-Liouville* de f l'intégrale définie par la formule suivante :

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (1.46)$$

où α est un nombre réel ou complexe.

Remarque 1.2.1. La formule (1.46) est une généralisation de la $(n - i)^{me}$ primitive avec un ordre de privatisation α non entier.

2. Intégrales fractionnaires de quelques fonctions usuelles.

Soit la fonction $f(t) = (t - a)^\beta$ où $\beta > -1$,

$$I_a^\alpha (t - a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} (\tau - a)^\beta d\tau.$$

Pour évaluer cette intégrale on effectue le changement de variables $\tau = a + (t - a)s$,

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (t - a)^\beta &= \frac{(t - a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - s)^{\alpha-1} t^\beta dt, \\ &= \frac{(t - a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta + 1), \\ &= \frac{(t - a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + \alpha)}, \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + \alpha)} (t - a)^{\beta+\alpha}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

La relation (1.47) montre que l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α d'une constante est donnée par :

$${}_a^R D_t^{-\alpha} C = I_a^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha + 1)} (t - a)^\alpha$$

Et en particulier, si $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^{-\frac{1}{2}} x^0 &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}, \\ {}_a^R D_t^{-\frac{1}{2}} x^1 &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}}, \\ {}_a^R D_t^{-\frac{1}{2}} x^2 &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{7}{2})} x^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{15}\sqrt{\frac{x^5}{\pi}}. \end{aligned}$$

Proposition 1.2.1. [1] :

Soient α et β deux nombres complexes et $f \in C^0([a, b])$

$$i) I_a^\alpha (I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f, \quad (\operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Re}(\beta) > 0).$$

$$ii) \frac{d}{dt} (I_a^\alpha f) (t) = (I_a^{\alpha-1} f) (t), \quad (\operatorname{Re}(\alpha) > 1).$$

$$iii) \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_a^\alpha f) (t) = f(t), \quad (\operatorname{Re}(\alpha) > 0).$$

Preuve.

i) Pour la démonstration on utilise la fonction Bêta d'Euler. En effet :

$$\begin{aligned} [I_a^\alpha (I_a^\beta f)] (t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (I_a^\beta f) (s) ds, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^s (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau ds. \end{aligned}$$

en utilisant expliqi de Fubini, on pourra permuter l'ordre d'intégration et on obtient :

$$[I_a^\alpha (I_a^\beta f)] (t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau) \left[\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} ds \right] d\tau.$$

Le changement de variable $s = \tau + (t-\tau)\mu$, nous donnons,

$$\begin{aligned} \int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} ds &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-\mu)^{\alpha-1} \mu^{\beta-1} d\mu, \\ &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

D'où

$$[I_a^\alpha (I_a^\beta f)] (t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t f(\tau) (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau = (I_a^{\alpha+\beta} f) (t).$$

ii) Pour justifier la deuxième identité on utilise les théorèmes classiques de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre et la relation fondamentale de la fonction Gamma d'Euler : $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$.

iii) Pour la dernière identité, on considère la fonction $f \in C^0([a, b])$, on a

$$(I_a^\alpha f) (t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau,$$

De l'exemple (1.47) on peut écrire

$$(I_a^\alpha 1) (t) = \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \longrightarrow 1, \alpha \rightarrow 0^+.$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \left| (I_a^\alpha f)(t) - \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t) \right| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(t) d\tau \right|, \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau, \\
 &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau. \quad (1.48)
 \end{aligned}$$

D'une part, on a f est continue sur $[a, b)$ qui nous permet d'écrire

$$\forall t, \tau \in [a, b), \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |\tau - t| < \delta \Rightarrow |f(\tau) - f(t)| < \varepsilon.$$

Ce qui entraîne

$$\int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau \leq \varepsilon \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau = \frac{\varepsilon \delta^\alpha}{\alpha}. \quad (1.49)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} (|f(\tau)| + |f(t)|) d\tau, \\
 &\leq 2 \sup_{\xi \in [a, t]} |f(\xi)| \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \quad \forall t \in [a, b), \\
 &= 2M \left(\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha} - \frac{\delta^\alpha}{\alpha} \right),
 \end{aligned}$$

$$\text{où} \quad M = \sup_{\xi \in [a, t]} |f(\xi)|. \quad (1.50)$$

Une combinaison de (1.51), (1.52) et (1.53) donne :

$$\begin{aligned}
 \left| (I_a^\alpha f)(t) - \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t) \right| &\leq \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} [\varepsilon \delta^\alpha + 2M ((t-a)^\alpha - \delta^\alpha)], \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} [\varepsilon \delta^\alpha + 2M ((t-a)^\alpha - \delta^\alpha)].
 \end{aligned}$$

en faisant tendre α vers 0^+ , on obtient :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left| (I_a^\alpha f)(t) - \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t) \right| \leq \varepsilon,$$

autrement dit :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} |(I_a^\alpha f)(t) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

C'est-à-dire que :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} |(I_a^\alpha f)(t) = f(t).$$

3. Dérivées d'ordre arbitraire.

Soit $\alpha \in [m - 1, m]$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. On appelle dérivée d'ordre α au sens de Riemann-Liouville la fonction définie par :

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt} \right)^m [(I_a^{m-\alpha} f)(t)], \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.51)$$

4. Dérivées fractionnaires de quelques fonctions usuelles.

Calculons la dérivée de Riemann-Liouville de la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$. Par la formule(1.47) on peut écrire :

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^\alpha (t-a)^\beta &= \left(\frac{d}{dt} \right)^m \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)} (t-a)^{\beta+m-\alpha} \right], \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^m (t-a)^{\beta+m-\alpha}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

On sait que :

$$\left(\frac{d}{dt} \right)^m (t-a)^{\beta+m-\alpha} = (\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1) \dots (\beta-\alpha+1) (t-a)^{\beta-1}. \quad (1.53)$$

Par substitution de(1.56)dans(1.2.2) on obtient :

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1) \dots (\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha-1)} (t-a)^{\beta-\alpha}, \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1) \dots (\beta-\alpha+1)}{(\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1) \dots (\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha-1)}, \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Remarque 1.2.2.

i) Pour $\alpha = 1$, la formule de dérivation (1.57) se réduit à

$${}_a^R D_t^1 (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)} (t-a)^{\beta-1} = \beta (t-a)^{\beta-1} = \frac{d}{dt} (t-a)^\beta. \quad (1.55)$$

ii) Si on prend $\beta = 0$ dans l'exemple précédent, on arrive au résultat suivant :

$${}_a^R D_t^\alpha 1 = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

C'est-à-dire que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas ni nulle ni constante ! mais on a :

$${}_a^R D_t^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.$$

Définition 1.2.2. (*Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche*)

$$\forall t > a, {}_a^R D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Définition 1.2.3. (*Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche*)

$$\forall t > a, {}_a^R D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d^m}{dt^m} \right) \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Les deux définitions précédentes utilisent le passé de f c'est-à-dire les valeurs de $f(\tau)$ pour $a < \tau < t$. Nous pouvons définir des opérateurs similaires, qui utilisent le futur f , c'est-à-dire les valeurs de $f(\tau)$ pour $t < \tau < b$. On définit ensuite les deux opérateurs suivants :

Définition 1.2.4. (*Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite*)

$$\forall t < b, {}_a^R D_t^{-\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_b^t (\tau-t)^{\beta-1} f(\tau) d\tau.$$

Définition 1.2.5. (*Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite*)

$$\forall t < b, {}_a^R D_t^\beta f(t) = \left(-\frac{d^m}{dt^m} \right) \int_b^t (\tau-t)^{m-\beta-1} f(\tau) d\tau.$$

Notons bien que f est une fonction telle que ${}_a^R D_t^\alpha f(t)$ ${}_a^R D_t^\beta f(t)$ sont définies.

Compositions

Proposition 1.2.2. [1]

1. (*Composition avec les intégrales fractionnaires*)

Pour $p > 0$ et $t > 0$,

$${}_a^R D_t^p ({}_a^R D_t^{-p} f(t)) = {}_a^R D_t^p (I_a^p f)(t) = f(t). \quad (1.56)$$

qui signifie que l'opérateur de dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville est inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville du même ordre.

Pour $p = m \geq 1$, on a :

$${}^R D_t^m ({}^R D_t^{-m} f(t)) = \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} f(\tau) d\tau = \frac{d}{dt} \int_a^t f(\tau) d\tau = f(t).$$

Supposons maintenant que $m-1 \leq p < m$ et utilisons le règle de composition des intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville, on a donc :

$${}^R D_t^m ({}^R D_t^{-m} f(t)) = {}^R D_t^{-(m-p)} ({}^R D_t^{-p} f(t)),$$

d'où

$$\begin{aligned} {}^R D_t^m ({}^R D_t^{-m} f(t)) &= \frac{d^m}{dt^m} \left\{ {}^R D_t^{-(m-p)} ({}^R D_t^{-p} f(t)) \right\}, \\ &= \frac{d^m}{dt^m} \left\{ {}^R D_t^{-m} f(t) \right\} = f(t). \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve de (1.60). Et en général on a :

$${}^R D_t^p ({}^R D_t^{-q} f(t)) = {}^R D_t^{p-q} f(t). \quad (1.57)$$

2. Si la dérivée fractionnaire ${}^R D_t^m f(t)$, ($m-1 < p < m$), d'une fonction $f(t)$ est intégrable, alors

$${}^R D_t^{-p} ({}^R D_t^p f(t)) = f(t) - \sum_{i=1}^m [{}^R D_t^{p-i} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-i}}{\Gamma(p-i-1)}. \quad (1.58)$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned} {}^R D_t^{-p} ({}^R D_t^p f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} {}^R D_\tau^p f(\tau) d\tau, \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p {}^R D_\tau^p f(\tau) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (1.59)$$

D'autre part, en effectuant des intégrations par parties répétées et en exploitant (1.48), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p {}^R D_t^p f(\tau) d\tau &= \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p \frac{d^m}{dt^m} \left\{ {}^R D_t^{-(m-p)} f(\tau) \right\} d\tau, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p-m} \text{left} \left\{ {}^R D_t^{-(m-p)} f(\tau) \right\} d\tau, \\
 &\quad - \sum_{i=1}^m \left[\frac{d^{m-i}}{dt^{m-i}} \left({}^R D_t^{-(m-p)} f(t) \right) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-i+1}}{\Gamma(2+p-i)}, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(p-m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p-m} \left\{ {}^R D_t^{-(m-p)} f(\tau) \right\} d\tau, \\
 &\quad - \sum_{i=1}^m \left[{}^R D_t^{(p-i)} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-i+1}}{\Gamma(2+p-i)} \\
 &= {}^R D_t^{-(p-m-1)} \left({}^R D_{-(p-m)} f(t) \right), \\
 &\quad - \sum_{i=1}^m \left[{}^R D_t^{(p-i)} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-i+1}}{\Gamma(2+p-i)} \\
 &= {}^R D_t^{-1} f(t) - \sum_{i=1}^m \left[{}^R D_t^{(p-i)} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-i+1}}{\Gamma(2+p-i)}. \tag{1.60}
 \end{aligned}$$

Par substitution de (1.63) dans (1.62) on arrive à la relation (1.61).

3. Si $0 \leq m-1 \leq q \leq m$, on a :

$${}^R D_{-p} \left({}^R D_t^q f(t) \right) = {}^R D_t^{q-p} - \sum_{i=1}^m \left[{}^R D_t^{(q-i)} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-i}}{\Gamma(p-i+1)}. \tag{1.61}$$

Pour prouver la relation (1.61), nous exploitons les relations (1.49), (1.61) et (1.62) et nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 {}^R D_{-p} \left({}^R D_t^q f(t) \right) &= {}^R D_t^{q-p} \left\{ {}^R D_t^{-p} \left({}^R D_t^q f(t) \right) \right\}, \\
 &= {}^R D_t^{q-p} \left\{ f(t) - \sum_{i=1}^m \left[{}^R D_t^{(q-i)} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{q-i}}{\Gamma(q-i+1)} \right\}, \\
 &= {}^R D_t^{q-p} f(t) - \sum_{i=1}^m \left[{}^R D_t^{(q-i)} f(t) \right]_{t=a} {}^R D_t^{q-p} \left\{ \frac{(t-a)^{q-i}}{\Gamma(q-i+1)} \right\}, \\
 &= {}^R D_t^{q-p} f(t) - \sum_{i=1}^m \left[{}^R D_t^{(q-i)} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-i}}{\Gamma(p-i+1)}.
 \end{aligned}$$

Comme la dérivation et l'intégration d'ordre entier, la dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas en général.

4. (Composition avec les dérivées d'ordre entier)

La composition de la dérivée au sens de Riemann-Liouville avec des dérivées d'ordre entier apparaît dans plusieurs problèmes appliqués. En utilisant la définition de (1.54) de la dérivée de Riemann-Liouville, on obtiens :

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} ({}_a^R D_t^\alpha f(t)) &= \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right), \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \\ &= \frac{1}{\Gamma((n+m)-(n+\alpha))} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Maintenant, nous considérons l'ordre inverse des opérateurs. En tenant compte du fait que

$$({}_a^R D_t^{-n} f^{(-n)})(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \quad (1.63)$$

Et que

$${}_a^R D_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^{\alpha+n} ({}_a^R D_t^{-n} f(t)). \quad (1.64)$$

Une combinaison de (1.66), (1.67) et (1.57) nous donne :

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^\alpha \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) &= {}_a^R D_t^{\alpha+n} ({}_a^R D_t^{-n} f^{(n)}(t)), \\ &= {}_a^R D_t^{\alpha+n} \left\{ f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)(t-a)^i}{\Gamma(i+1)} \right\}, \\ &= {}_a^R D_t^{\alpha+n} f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)(t-a)^{i-\alpha-n}}{\Gamma(i+1-\alpha-n)}. \end{aligned} \quad (1.65)$$

On déduit alors que la dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville et la dérivation d'ordre entier ne commutent que si $f^{(i)}(a) = 0$, pour tout $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

5. (Composition avec les dérivées fractionnaires.)

Soient $n-1 \leq p < n$ et $m-1 \leq q < m$. En utilisant la définition (1.54) de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, les formules (1.61) et (1.65), on aura :

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^p ({}_a^R D_t^q f(t)) &= \frac{d^m}{dt^m} \left\{ {}_a^R D_t^{-(m-p)} ({}_a^R D_t^q f(t)) \right\}, \\ &= \frac{d^m}{dt^m} \left\{ {}_a^R D_t^{p+q-m} f(t) - \sum_{i=1}^n [{}_a^R D_t^{q-i} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{m-p-i}}{\Gamma(1+m-p-i)} \right\}, \\ &= {}_a^R D_t^{p+q} f(t) - \sum_{i=1}^n [{}_a^R D_t^{q-i} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-i}}{\Gamma(1-p-i)}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

En permutant p et q , la relation (1.69) donne

$${}^R D_t^q ({}^R D_t^p f(t)) = {}^R D_t^{p+q} f(t) - \sum_{i=0}^m [{}^R D_t^{p-i} f(t)]_{a=t} \frac{(t-a)^{-q-i}}{\Gamma(1-q-i)}. \quad (1.67)$$

Une comparaison des relations (1.69) et (1.70), montre que les deux opérateurs des dérivations fractionnaire ${}^R D_t^p$ et ${}^R D_t^q$ ne commutent que si $p = q$ ou si les conditions suivantes sont vérifiées simultanément

$$[{}^R D_t^{p-i} f(t)]_{t=a} = 0, \quad \text{pour tout } i = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (1.68)$$

$$[{}^R D_t^{q-i} f(t)]_{t=a} = 0, \quad \text{pour tout } i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (1.69)$$

Proposition 1.2.3. Soit α, β tels que $n - 1 < \alpha \leq n$, $m - 1 < \beta \leq m$ tel que $n, m \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour $f \in L_1([0, T])$, $T > 0$, l'égalité :

$${}^R D_t^\alpha (I^\alpha f(t)) = f(t).$$

est vraie pour tout sur $t \in [0, T]$.

2. Si $\alpha > \beta > 0$, alors pour $f \in L_1([0, T])$, $T > 0$, la relation :

$${}^R D_t^\beta (I^\alpha f(t)) = I^{\alpha-\beta} f(t).$$

est vraie presque partout sur $t \in [0, T]$.

En particulier, lorsque $\beta = k \in \mathbb{N}$ et $\alpha > k$, alors :

$${}^R D_t^k (I^\alpha f(t)) = I^{\alpha-k} f(t).$$

3. Si $\beta \log \alpha > 0$ et la dérivée fractionnaire ${}^R D_t^{\beta-\alpha} f$ existe, alors on a :

$${}^R D_t^\beta (I^\alpha f(t)) = {}^R D_t^{\beta-\alpha} f(t).$$

4. Pour $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$. Si les dérivées fractionnaires ${}^R D_t^\beta f$ et ${}^R D_t^{\alpha+k} f$ existent, alors :

$${}^R D_t^\alpha ({}^R D_t^\alpha f(t)) = {}^R D_t^{k+\alpha} f(t).$$

Remarque 1.2.3. Si f est de classe C^m , alors en faisant des intégrations par parties et des dérivations répétées on obtient :

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^p f(t) &= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^{(i)}(a)(t-a)^{i-p}}{\Gamma(i-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f^{(m)}(\tau) d\tau, \\ &= {}_a D_t^{p-i} f(t). \end{aligned}$$

Dans ce cas l'approche de Grünwald-Letnikov et l'approche de Riemann-Liouville sont équivalentes.

1.2.3 Dérivées fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.2.6. La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction $f(t)$ donnée sur l'intervalle $[a, b]$ est définie par la relation suivante :

$${}_a^R D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{m-\alpha-1} f^m(\tau) d\tau. \quad (1.70)$$

Avec $m \in \mathbb{N}$ et $m = [\alpha] + 1$ où $[\alpha]$ désigne la partie entière de α .

Remarque 1.2.4. L'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo des équations différentielles fractionnaires prennent la même forme que dans le cas des équations différentielles d'ordre entier.

Définition 1.2.7. (Dérivées fractionnaire de Caputo à gauche)

$$\forall t > 0, {}_a^R D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{m-\alpha-1} f^m(\tau) d\tau.$$

Définition 1.2.8. (Dérivée fractionnaire de Caputo à droite)

$$\forall t < b, {}_a^R D_t^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \beta)} (-1)^m \int_b^t (t - \tau)^{m-\beta-1} f^m(\tau) d\tau.$$

Notons bien que f est une fonction telle que ${}_a^R D_t^\alpha f(t)$ et ${}_a^R D_t^\beta f(t)$ sont définies. Les opérateurs dont l'intégrale porte sur $[a, t]$ (respectivement $[t, b]$) seront qualifiés d'opérateurs passés (respectivement opérateurs futurs).

Relation avec la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.

1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $m = [\alpha] + 1$, Si ${}_a^C D_t^p f(t)$ ${}_a^R D_t^p f(t)$ existent alors :

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^\alpha f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^i(a)(t-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)}, \quad (1.71)$$

on déduit que si $f^i(a) = 0$ pour tout $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$, on aura

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^\alpha f(t).$$

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^\alpha \left(f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^i(a)}{i!} (t-a)^i \right). \quad (1.72)$$

2. Si $0 < \alpha < 1$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et celle de Caputo sont définies respectivement par :

$${}^R D_t^\alpha = \frac{d}{dt} \left({}^R D_t^{-(1-\alpha)} f(t) \right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau. \quad (1.73)$$

$${}^C D_t^\alpha f(t) = {}^R D_t^{-(1-\alpha)} \left(\frac{df(t)}{dt} \right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau. \quad (1.74)$$

Et on a les propriétés suivantes :

Propriétés 1.2.3. [1]

$$\begin{aligned} 1. \quad {}^R D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(a)}{(t-a)^\alpha} + \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau \right), \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{f(a)}{(t-a)^\alpha} + {}^C D_t^\alpha f(t). \end{aligned} \quad (1.75)$$

$$2. \quad {}^C D_t^\alpha f(t) = {}^R D_t^\alpha (f(t) - f(a)). \quad (1.76)$$

3. Si f est continue sur $[a, b]$, alors

$${}^C D_t^\alpha I_a^\alpha f(t) = f(t). \quad (1.77)$$

4. Si $f \in C^m[a, b]$, alors

$$I_a^\alpha D_t^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (t-a)^i. \quad (1.78)$$

Alors, l'opérateur de dérivation fractionnaire de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire de Caputo du même ordre, mais il n'est pas un inverse droit.

Propriétés des dérivées fractionnaires.

Dans cette partie, nous intéressons aux propriétés de dérivation et d'intégration fractionnaire, qui sont utilisées à la suite de ce mémoire.

1. Linéarité :

La dérivation fractionnaire est un opérateur linéaire :

$$D_t^p (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda D_t^p f(x) + \mu D_t^p g(x). \quad (1.79)$$

Où D^p désigne n'importe quelle approche de dérivation fractionnaire considérée dans ce mémoire. La linéarité de la dérivation fractionnaire découle de la définition correspondante. Par exemple, pour les dérivées fractionnaires de Grünwald-Letnikov

définies par la formule (1.35), on a :

$${}_a D_t^p (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lim_{h \rightarrow -p} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} (\lambda f(t - rh) + \mu g(t - rh)). \quad (1.80)$$

$$= \lambda \lim_{h \rightarrow -p} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh). \quad (1.81)$$

$$+ \mu \lim_{h \rightarrow -p} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} g(t - rh). \quad (1.82)$$

$$= \lambda_a D_t^p f(t) + \mu_a D_t^p g(t). \quad (1.83)$$

Et pour les dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $p(k-1, p < k)$ définies par la formule (1.54), on a

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^p (\lambda f(x) + \mu g(x)) &= \frac{1}{\Gamma(m-p)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} (\lambda f(\tau) + \mu g(\tau)) d\tau, \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(m-p)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau) d\tau, \\ &+ \frac{\mu}{\Gamma(m-p)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} g(\tau) d\tau, \\ &= \lambda_a^R D_t^p f(t) + \mu_a^R D_t^p g(t). \end{aligned}$$

2. Règle de Leibniz :

En partant de la règle connue de Leibniz pour calculer la dérivée n -ième du produit de deux fonctions $f(t), g(t)$ on a pour tout entier n :

$$\frac{d^n}{dt^n} (f(x).g(x)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k(t) g^{(n-k)}(t). \quad (1.84)$$

Cette formule se généralise en remplaçant l'entier n par un paramètre réel p . Dans le membre à droite de (1.87) à la formule :

$$D^p (f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} f^k(t) D^{p-k} g(t) - R_n^p(t), n \log p + 1. \quad (1.85)$$

Où

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n!} \Gamma(-p) \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} g(\tau) d\tau \int_a^t f^{n+1}(\xi) (t-\xi) d\xi. \quad (1.86)$$

Avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n^p(t) = 0.$$

Si f et g avec toutes ses dérivées sont continues sur $[a, t]$, la règle de Leibniz pour la dérivation fractionnaire s'écrit sous la forme.

$$D^p (f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} f^k(t) D^{p-k} g(t). \quad (1.87)$$

D^p désigne la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov ou au sens de Riemann-Liouville.

Chapitre 2

Équation différentielle fractionnaire linéaire.

2.1 Transformées de Laplace des dérivées fractionnaires.

2.1.1 Outils de base de la transformée de Laplace :

Rappelons quelques outils de base de la transformée de Laplace. La fonction $F(s)$ de la variable complexe s définie par

$$F(s) = L\{f(t); s\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (2.1)$$

Est appelée la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$, laquelle est appelée l'originale. Pour l'existence de l'intégrale (2.1) la fonction $f(t)$ doit être d'ordre exponentiel α , ce qui veut dire qu'il existe deux constantes positives M et T telles que

$$e^{-\alpha t} |f(t)| \leq M.$$

Pour tout $t > T$.

En d'autres termes, la fonction $f(t)$ ne doit "croître ou décroître" plus vite qu'une certaine fonction exponentielle quand $t \rightarrow +\infty$.

On notera les transformées de Laplace par des lettres majuscules et les originales par des lettres minuscules.

La transformée de Laplace de la convolution

$$f(t) \star g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau. \quad (2.2)$$

De deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$, qui sont égales à zéro pour $t < 0$, est égale au produit de leurs transformées de Laplace :

$$L\{f(t) \star g(t); s\} = F(s)G(s). \quad (2.3)$$

Sous l'hypothèse que $F(s)$ et $G(s)$ existent. On utilisera la propriété (2.3) :

$$\begin{aligned} L\{f^n(t); s\} &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0), \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0), \end{aligned} \quad (2.4)$$

qui peut être obtenue de la définition (2.1), par intégration par parties sous l'hypothèse que les intégrales correspondantes existent.

Dans les sections qui suivent sur les transformées de Laplace des dérivées fractionnaires, nous supposerons que la borne inférieure $a = 0$.

2.1.2 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville :

Nous commencerons par la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire d'ordre $p > 0$ de Riemann-Liouville et de Grünwald-Letnikov définie par (1.51), laquelle peut s'écrire comme une convolution de deux fonctions $g(t) = t^{p-1}$ et $f(t)$:

$${}^R D_t^{-p} f(t) = {}^R D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau = t^{p-1} \star f(t). \quad (2.5)$$

La transformée de Laplace de la fonction t^{p-1} est

$$G(s) = L\{t^{p-1}; s\} = \Gamma(p)s^{-p}. \quad (2.6)$$

Et donc, en utilisant la transformée de Laplace de la convolution (2.3), nous obtenons la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et de Grünwald-Letnikov :

$$L\{{}^R D_t^{-p} f(t); s\} = L\{{}^R D_t^{-p} f(t); s\} = s^{-p} F(s). \quad (2.7)$$

Nous intéressons maintenant au calcul de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, qui pour cela nous l'écrivons sous la forme,

$${}^R D_t^p f(t) = g^{(n)}(t). \quad (2.8)$$

$$g(t) = {}^R D_t^{-(n-p)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \int_0^t (t - \tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau. \quad (n-1 \leq p < n). \quad (2.9)$$

L'utilisation de la formule (2.4) de la transformée de Laplace d'une dérivée d'ordre entier donne :

$$L\{ {}_0^R D_t^p f(t); s \} = s^n G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0). \quad (2.10)$$

La transformée de Laplace de la fonction $g(t)$ est déterminée par (2.7) :

$$G(s) = s^{-(n-p)} F(s). \quad (2.11)$$

En résumé, de la définition de la dérivée fractionnaire de Riemann- Liouville, il vient

$$g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{(n-k-1)}}{dt^{(n-k-1)}} {}_0^R D_t^{-(n-p)} f(t) = {}_0^R D_t^{p-k-t} f(t). \quad (2.12)$$

En substituant (2.11) et (2.12) dans (2.10), nous obtenons l'expression le suivante pour la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $p > 0$:

$$L\{ {}_0^R D_t^p f(t); s \} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}_0^R D_t^{p-k-t} f(t) \right]_{t=0}. \quad (n-1 \leq p < n). \quad (2.13)$$

Cette transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann- Liouville est bien connue . Cependant, son application pratique est limitée par l'absence de l'interprétation physique des valeurs limites des dérivées fractionnaires en la borne inférieure $t = 0$. A notre connaissance, une telle interprétation n'est pas connue.

2.1.3 Transformée de Laplace de la dérivée de Caputo :

En d'établir la formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo, écrivons la dérivée de Caputo sous la forme

$${}_0^C D_t^p f(t) = {}_0^C D_t^{-(n-p)} g(t), \quad g(t) = f^{(n)}(t). \quad (n-1 < p \leq n). \quad (2.14)$$

En utilisant la formule (2.7) de la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville, on aura

$$L\{ {}_0^C D_t^p f(t); s \} = s^{-(n-p)} G(s). \quad (2.15)$$

Où, grâce à (2.4),

$$G(s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0). \quad (2.16)$$

En introduisant (2.16) dans (2.15), on arrive à la formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo :

$$L\{ {}_0^C D_t^p f(t); s \} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{p-k-1} f^{(k)}(0), \quad (n-1 < p \leq n). \quad (2.17)$$

Comme cette formule de la transformée de Laplace de la dérivée de Caputo induit les valeurs de la fonction $f(t)$ et ses dérivées en la borne inférieure $t = 0$, pour laquelle une certaine interprétation physique existe (par exemple, $f(0)$ est la position initiale, $f'(0)$ est la vitesse initiale, $f''(0)$ est l'accélération initiale), on peut espérer qu'il pourrait être utile pour la résolution des problèmes appliqués conduisant aux équations différentielles fractionnaires à coefficients constants accompagnées de conditions initiales dans leur forme traditionnelle.

2.1.4 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov :

Tout d'abord, considérons le cas $0 \leq p < 1$, quand la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov avec la borne inférieure $a = 0$ de la fonction $f(t)$, qui est bornée en $t = 0$, peut s'écrire sous la forme suivante :

$${}_0^G D_t^p f(t) = \frac{f(0)t^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t (t-\tau)^{-p} f'(\tau) d\tau. \quad (2.18)$$

En utilisant la transformée de Laplace de la fonction polynôme (2.6) de la transformée de Laplace de la convolution (2.3) et de la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre entier (2.4) on obtient :

$$L\{ {}_0^G D_t^p f(t); s \} = \frac{f(0)}{s^{1-p}} + \frac{1}{s^{1-p}} (sF(s) - f(0)) = s^p F(s). \quad (2.19)$$

Un exemple d'application de la formule (2.19) est donné dans la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov d'ordre $p > 1$, n'existe pas dans le sens classique, car dans un tel cas on a des fonctions non-intégrables dans la somme de la formule (2.1.1). Les transformées de Laplace de telles fonctions sont données par des intégrales divergentes. Cependant, la transformée de Laplace de la fonction polynôme (2.6) exige une continuation analytique par rapport au paramètre p . Cette approche est équivalente à l'approche de fonctions généralisées (distributions). Les intégrales divergentes dans un certain sens sont appelées des "intégrales à partie finies". Dans ce sens, en supposant que $m < p < m + 1$, en utilisant la transformée de Laplace de la fonction polynôme (2.6), la formule de la

transformée de Laplace de la convolution (2.3) et celle de la dérivée entière (2.4), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 L\{ {}_0^G D_t^p f(t); s \} &= \sum_{k=0}^m f^{(k)}(0) L \left\{ \frac{t^{-p+k}}{\Gamma(-p+m+1)}; s \right\}, \\
 &+ L \left\{ \frac{t^{m-p}}{\Gamma(-p+m+1)} \star f^{(m+1)}(t); s \right\}, \\
 &= \sum_{k=0}^m f^{(k)}(0) s^{p-k-1}, \\
 &+ s^{p-m-1} \left(s^{m+1} F(s) - \sum_{k=0}^m f^{(k)}(0) s^{m-k} \right), \\
 &= s^p F(s).
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

On est arrivé à la même formule que (2.19).

Dans les applications, il est nécessaire de garder en tête que la formule (2.20) a lieu au sens classique seulement pour $0 < p < 1$, pour $p > 1$ elle a lieu au sens des fonctions généralisées (distributions) et donc, la formulation d'un problème appliqué doit être faite aussi en langage de fonctions généralisées, aussi bien que les interprétations des résultats obtenus dans ce sens.

2.2 Existence de la solution d'un problème fractionnel linéaire :

Nous avons besoin du théorème fondamental suivant :

$$\begin{cases}
 {}_0^C D_t^\alpha x_k(t) &= ax_k(t) + bu_k(t), t \in [0, T], \alpha \in (1, 2). \\
 \dot{x}(0) &= 0. \\
 y_k(t) &= cx_k(t) + d \int_0^t u_k(s) ds.
 \end{cases} \tag{2.21}$$

Où k est le nombre des itérations, le symbole ${}_0^C D_t^\alpha x_k(t)$ est la dérivée de caputo d'ordre α de la fonction x_k au point t avec $(x_k, y_k, u_k) \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $(b, c, d) \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.2.1. [6] : La solution du problème (2.21) est donnée par :

$$\begin{aligned}
 x_k(t) &= E_\alpha(at^\alpha)x_k(0) + tE_{\alpha,2}(at^\alpha)\dot{x}(0) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(a(t-s)\alpha) bu_k(s) ds, \\
 &= E_\alpha(at^\alpha)x_k(0) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(a(t-s)\alpha) bu_k(s) ds.
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Où $E_\alpha(z)$ et $E_{\alpha,\beta}(z)$ sont les fonctions de Mittag-Leffler.

Preuve.

En appliquant la transformation de Laplace sur la première équation de système (2.21), on obtient :

$$L \{D_t^\alpha x_k(t); s\} = L \{ax_k(t) + bu_k; s\},$$

c-à-d

$$s^\alpha L \{x_k(t); s\} - \sum_{i=0}^1 s^{\alpha-i-1} x^i(0) = aL \{x_k(t); s\} + bL \{u_k(t); s\},$$

$$s^\alpha L \{x_k(t); s\} - s^{\alpha-1} x(0) - s^{\alpha-2} \dot{x}(0) = aL \{x_k(t); s\} + bL \{u_k(t); s\}.$$

Après des calculs simples on obtient :

$$(s^\alpha - a)L \{x_k(t); s\} = s^{\alpha-1} x_k(0) + bL \{u_k(t); s\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} L \{x_k(t); s\} &= \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - a} x_k(0) + \frac{b}{s^\alpha - a} L \{u_k(t); s\}, \\ &= L \{E_\alpha(at^\alpha)x_k(0); s\} + L \{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha); s\} L \{u_k(t); s\}, \\ &= L \left\{ E_\alpha(at^\alpha)x_k(0) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(a(a-t)^\alpha) bu_k(s) ds; s \right\}. \end{aligned}$$

En utilisation la transformation de Laplace inverse, on obtient :

$$x_k(t) = E_\alpha(at^\alpha)x_k(0) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(a(a-t)^\alpha) bu_k(s) ds.$$

Chapitre 3

Équation différentielle fractionnaire non-linéaire.

Quelques types du point fixe.

Le but de ce chapitre est l'étude de quelques théorèmes du point fixe. On commence par le plus connu d'entre eux : le théorème du point fixe de Banach pour les applications contractantes. On verra ensuite le théorème du point fixe.

3.1 Théorème du point fixe du type Banach.

Ce théorème est dit principe de l'application contractante, il est la base de la théorie du point fixe. Ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même.

Théorème 3.1.1. (*Théorème du point fixe de Banach(1922)*) [9] :

Soit (M, d) un espace métrique complet et soit $T : M \rightarrow M$ une application contractante avec la constante de contraction k alors T a un unique point fixe $x \in M$. De plus nous avons la propriété suivante qui est importante :

Si $x_0 \in M$ et $x_n = Tx_{n-1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, et $d(x_n, x) \leq k^n(1 - k)^{-1}d(x_1, x_0)$, $n \geq 1$ (x étant le point fixe de T).

Preuve.

L'existence :

Soit $y \in M$ un point arbitraire dans M . Considérons la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ donnée par :

$$\begin{cases} x_0 = y \\ x_n = T(x_{n-1}), n \geq 1. \end{cases}$$

On doit prouver que (x_n) est une suite de Cauchy dans M . Pour $m < n$, on utilise l'inégalité triangulaire : $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + d(x_n, x_{n-1})$.

Puisque T est une contraction, on a : $d(x_p, x_{p+1}) = d(Tx_{p-1}, Tx_p)$, pour $p \geq 1$.

En répétant cette inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq (k^m + k^{m+1} + \dots + k^{n-1})d(x_0, x_1), \\ &\leq k^m(1 + k + \dots + k^{n-m-1})d(x_0, x_1), \\ &\leq k^m(1 - k)^{-1}d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

On déduit que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans M qui est complet, donc $(x_n)_n$ converge vers x dans M . Par ailleurs puisque T est continue, on a :

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_{n-1}) = T(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}) = Tx.$$

Donc x est un point fixe de T (i.e. $Tx = x$).

L'unicité :

supposons $x = Tx$ et $y = Ty$ alors :

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq kd(x, y),$$

ce qui implique que $d(x, y) = 0$ i.e. $x = y$ (puisque $k < 1$).

3.2 Résultat d'existence et d'unicité.

Dans cette section, on s'intéresse par la question d'existence et d'unicité de la solution pour un problème de Cauchy d'une équation différentielle non-linéaire avec dérivée fractionnaire au sens de Caputo suivant :

$${}^C D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), t \in \Omega = [0, T], n - 1 < \alpha \leq n. \quad (3.3)$$

Avec les conditions initiales

$$y^k(0) = b_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, \dots, n - 1, n = [\alpha] + 1. \quad (3.4)$$

Où ${}^C D^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Caputo, $f(., y) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonction continue par rapport à $t \in \Omega$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $[\alpha]$ est la partie entière de α .

3.2.1 Résultat d'équivalence entre le problème de Cauchy et l'équation intégrale de Volterra

Dans cette section, nous prouvons que le problème de Cauchy et l'équation intégrale non linéaire de Volterra sont équivalents.

Théorème 3.2.1. [9] :

Soit $0 < \alpha < 1$. G un ensemble ouvert de \mathbb{R} ; soit $f :]a, b] \times G \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(t, y) \in L(]a, b])$ pour tout $y \in G$. Si $y(t) \in L(]a, b])$, alors y satisfait les relations (3.3) et (3.4) si et seulement si y satisfait l'équation suivante :

$$y(t) = \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)}(t - a)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (a - t)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds, \quad t > a. \quad (3.5)$$

Preuve.

D'abord nous allons démontrer la nécessité. Soit $y \in L(]a, b])$ satisfait les équations (3.3) et (3.4). Comme $f(t; y) \in L(]a, b])$ pour tout $y \in G$ D'après l'équation (3.3) signifie qu'il existe la dérivée fractionnaire $D_a^\alpha y \in L(]a, b])$ on a $I^{1-\alpha} y \in AC([a, b])$.

En utilisant (1.78) avec $f(x) = y(t)$ on obtient :

$$I_a^\alpha D_a^\alpha y(t) = y(t) - \frac{(I^{1-\alpha} y)(a)}{\Gamma(\alpha)} (t - a)^{\alpha-1}.$$

Utilisons (3.4) alors on a

$$I_a^\alpha D_a^\alpha y(t) = y(t) - \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)} (t - a)^{\alpha-1}. \quad (3.6)$$

Par l'équation l'intégrale $I_a^\alpha f \in L(]a, b])$ existe.

Appliquons l'opérateur I_a^α sur les deux membres de (3.3) et utilisons (3.6) et (1.46), on obtient (3.5), ce qui montre la nécessité. Maintenant, nous démontrons la suffisance.

Soit $y \in L(]a, b])$ satisfait l'équation (3.5). En dérivant (3.5), on obtient :

$$(D_a^\alpha y)(t) = \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)} (D_a^\alpha (a - t)^{\alpha-1})(t) + (D_a^\alpha I_a^\alpha f [s, y(s)])(t). \quad (3.7)$$

Par simplification, on obtient (3.3).

D'autre part on démontre que la condition initiale (3.4) est satisfaite. Pour ceci on applique l'opérateur $D_a^{\alpha-1}$ a (3.5) on obtiens

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha-1}y(t) &= \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)}(D_a^{\alpha-1}(a-t)^{\alpha-1})(t) + (D_a^{\alpha-1}I_a^\alpha f[s, y(s)])(t), \\ &= b_1 + (I_a^1 f[s, y(s)])(x). \end{aligned}$$

$$D_a^{\alpha-1}y(t) = b_1 + (I_a^1 f[s, y(s)])(x). \quad (3.8)$$

Par le passage à la limite $x \rightarrow a$ à la dernière équation, on obtient la condition initiale (3.4) ce qui montre la suffisance.

3.3 Résultat d'existence et d'unicité de la solution.

Maintenant, on va montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy (3.1), (3.2) dans l'espace des fonctions $C^{n-1,\alpha}(\Omega)$ défini par :

$$C^{n-1,\alpha}(\Omega) = \{u \in C^{n-1}, {}^C D^\alpha y \in C(\Omega), n = [\alpha] + 1\}.$$

établir l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy (3.1),(3.2), nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.3.1. [8]

Si $\alpha > 0$ avec $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $n = [\alpha] + 1$, alors l'opérateur d'intégration fractionnaire

$$I^\alpha : C(\Omega) \longrightarrow C^{n-1}(\Omega)$$

au sens de Riemann-Liouville est borné c'est-à-dire :

$$\|I^\alpha g\|_{C^{n-1}(\Omega)} \leq M \|g\|_{C(\Omega)}, \quad M = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha - k + 1)}. \quad (3.9)$$

Preuve.

Soit $g \in C(\Omega)$. En utilisant la proposition (1.5), on obtient : $D^k I^\alpha g(t) = I^{\alpha-k} g(t)$, pour tout

$k = 0, 1, \dots, n-1$, pour tout $t \in \Omega$, nous avons :

$$\begin{aligned} \|I^\alpha g\|_{C^{n-1}(\Omega)} &= \sum_{k=0}^{n-1} \|D^k I g\|_{C(\Omega)} = \sum_{k=0}^{n-1} \|I^{\alpha-k} g\|_{C(\Omega)}, \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\|g\|_{C(\Omega)}}{\Gamma(\alpha-k)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-k-1} d\tau, \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\|g\|_{C(\Omega)}}{(\alpha-k)\Gamma(\alpha-k)} t^{\alpha-k}, \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \|g\|_{C(\Omega)}, \\ \text{on pose :} \quad M &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}, \end{aligned}$$

on obtient :

$$\|I^\alpha g\|_{C^{n-1}(\Omega)} \leq M \|g\|_{C(\Omega)}.$$

Ce qui démontre le Lemme .

Théorème 3.3.1. [8] :

Si $\alpha > 0$ avec $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $n = [\alpha] + 1$ et G un ouvert de \mathbb{R} . On suppose que $f : \Omega \times G \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que :

1) pour tout $y \in G$ fixé, $f(\cdot, y) \in C(\Omega)$.

2) la fonction $f : \Omega \times G \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie la condition de Lipschitz par rapport à y , c'est-à-dire il existe $L > 0$ tel que :

$$|f(\cdot, y_1) - f(\cdot, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

pour tout $t \in \Omega$, $(y_1, y_2) \in G$.

Si

$$L \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} < 1. \quad (3.10)$$

Alors, le problème de Cauchy (3.1), (3.2) admet une unique solution $y \in C^{n-1, \alpha}(\Omega)$.

Preuve.

On commence par montrer l'existence d'une solution unique $y \in C^{n-1}(\Omega)$ du problème (3.1),(3.2). Selon le Théorème 3.2.1, il suffit de prouver l'existence d'une solution unique $y \in C^{n-1}(\Omega)$ de l'équation intégrale de Volterra (3.3).

Pour cela on utilise le Théorème 3.1.1 du point fixe de Banach dans l'espace $C^{n-1}(\Omega)$ avec

la norme suivante :

$$\|y_1 - y_2\|_{C^{n-1}(\Omega)} = \sum_{k=0}^{n-1} \|y_1^k - y_2^k\|_{C(\Omega)}. \quad (3.11)$$

On réécrit l'équation intégrale (3.3) sous la forme suivante :

$$y(t) = (Ty)(t).$$

Où

$$(Ty)(t) = y_0(t) + \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau, \quad (3.12)$$

avec

$$y_0(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!} t^j.$$

Pour appliquer le théorème de Banach, il faut montrer :

- 1) Si $y \in C^{n-1}(\Omega)$ alors $Ty \in C^{n-1}(\Omega)$.
- 2) Pour chaque $(y_1, y_2) \in C^{n-1}(\Omega)$.

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_{C^{n-1}(\Omega)} \leq \omega \|y_1 - y_2\|_{C(\Omega)}, \text{ avec } 0 < \omega < 1, \quad (3.13)$$

Soit $y \in C^{n-1}(\Omega)$.

En dérivant (3.6) k fois ($k = 1, \dots, n-1$), et en utilisant la proposition (1.5), nous obtenons pour tout $k = 0, 1, \dots, n-1$,

$$(Ty)^{(k)}(t) = y_0^{(k)}(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha - k)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-k-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau, \quad (3.14)$$

avec

$$y_0^k(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{(j-k)!} t^{j-k}.$$

Pour tout $k = 0, 1, \dots, n-1$, le premier terme à droit de (3.7) est une fonction continue sur $[0, T]$, et par le lemme (3.1.1), le deuxième terme est continu sur $[0, T]$. Donc, nous avons :

$$\left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha - k)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-k-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \right\|_{C^{n-1}(\Omega)} \leq \frac{T^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha - k + 1)} \|f(\tau, y(\tau))\|_{C(\Omega)}, \quad (3.15)$$

pour tout $k = 0, 1, \dots, n-1$. Par conséquent $Ty \in C^{n-1}(\Omega)$.

En utilisant (3.11), (3.14), (3.15) et la condition de Lipschitz, nous avons :

$$\begin{aligned} \|Ty_1 - Ty_2\|_{C^{n-1}(\Omega)} &= \sum_{k=0}^{n-1} \|Ty_1^k - Ty_2^k\|_{C(\Omega)}, \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha-k)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-k-1} [f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau))] d\tau \right\|_{C(\Omega)}, \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \|f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau))\|_{C(\Omega)}, \\ &\leq L \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_{C(\Omega)}. \end{aligned}$$

À l'aide du (3.10), on obtient (3.10), avec

$$\omega = L \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \frac{T^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \right\|.$$

Par conséquent, d'après le théorème du point fixe de Banach 3.1.1, il existe une unique solution $y^* \in C^{n-1}(\Omega)$ de l'équation intégrale de Volterra (3.3) sur l'intervalle $[0, T]$. Par le Théorème de Banach 3.1.1, la solution $y^*(t)$ est une limite de la suite convergente $(T^n y_0^*)(t)$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n y_0^* - y^*\|_{C^{n-1}(\Omega)} = 0. \quad (3.16)$$

On prend,

$$y_0^* = y_0.$$

Avec $y_0(t)$ définie par $y_0(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{j!} t^j$. D'après (3.6), la suite $(T^n y_0^*)(t)$ est définie par la formule de récurrence :

$$(T^n y_0^*)(t) = y_0(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, (T^{n-1} y_0^*)(\tau)) d\tau, n = 1, 2, \dots$$

En notant, $y_n(t) = (T^n y_0^*)(t)$ alors la relation précédente prend la forme suivante :

$$y_n(t) = y_0(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, (y_{n-1}^*)(\tau)) d\tau, n \in \mathbb{N},$$

et (3.9) devient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y_0\|_{C^{n-1}(\Omega)} = 0. \quad (3.17)$$

En utilisant ensuite (3.1) et la condition Lipschitz, on a :

$$\|{}^C D^\alpha y_n - {}^C D^\alpha y\|_{C(\Omega)} = \|f(t, y_n) - f(t, y(t))\|_{C(\Omega)} \leq L \|y_n - y\|_{C(\Omega)}.$$

D'après (3.11), nous obtenons :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|{}^C D^\alpha y_n - {}^C D^\alpha y\|_{C(\Omega)} = 0.$$

Alors ${}^C D^\alpha y \in C(\Omega)$, et $y \in C^{n-1, \alpha}(\Omega)$. Ceci complète la preuve du théorème.

Conclusion

Dans ce travail, on a présenté l'existence de la solution d'un problème fractionnel linéaire et nonlinéaire, et on a établi la théorie du point fixe de Banach, pour les fonctions fractionnaire de Riemann- Liouville avec conditions initiales.

Bibliographie

- [1] S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, *Fund. Math.*, 3(1922) ; 133-181.
- [2] M.Bekkari, Quelques équations différentielles d'ordre fractionnaire, (2019).
- [3] M.Djaballah, Approximation des équations différentielles d'ordre fractionnaires, 2019, Université Mohamed Boudiaf-m'sila.
- [4] G. Doetsch, *Guide to the applications of the laplace and z-transforms.* 1971.
- [5] J. C. Jaeger, *An introduction to the laplace transformation.* 1946.
- [6] K.Haouam, Existence et non-existence de solutions des équations différentielles fractionnaires, l'université de Constantine, 2007.
- [7] A.Khalouta, Résolution des équations aux dérivées partielles linéaires et non-linéaires moyennant des approches analytiques : extension aux cas d'EDP d'ordre fractionnaire, 2019
- [8] N. Mclachlan, *Laplace transforms and their applications to differential equations.* 2014.
- [9] S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993.