République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l 'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ AMAR TELIDJI-LAGHOUAT-

Faculté des Sciences

Laboratoire Mathématiques Pures et Appliquées

THÈSE

Présentée par

Nafissa SAOULI

pour l 'obtention du diplôme de Doctorat LMD en Mathématiques

THÈME

Dilatations des opérateurs de Toeplitz tronqués.

Soutenu devant le jury composé de :

PR. Abdelkader MOKHTARI	Université de Laghouat	Président
PR. Salah Edine ALLAOUI	Université de Laghouat	Examinateur
Dr. Mouloud AISSANI	Université de Tiart	Examinateur
Dr. Rabeh HERAIZ	Université de M'sila	Examinateur
Dr. Zohra BENDAOUD	Université de Laghouat	Encadreur.

Année Universitaire : 2019-2020

Remerciement

Dans ces lignes où il m'est donné l'occasion de remercier les personnes qui m'ont aidé d'une façon ou d'une autre dans l'élaboration de mon travail de thèse, je voudrais commencer par exprimer toute ma gratitude envers Mme Zohra Bendaoud. Après m'avoir proposé ce beau sujet et accepté de diriger ma thèse, je lui en suis infiniment reconnaissante.

Je remercie également le chef et l'équipe de laboratoire de Mathématiques pure et appliquée LMPA université Amar Telidji Laghouat, pour avoir toujours été prêt m'indiquer des références ainsi que pour leurs conseils et encouragements. Tous mes remerciements vont également à monsieur Abdelkader MOKHTARI, Professeur à l'université Amar Telidji Laghouat, pour avoir accepté de présider le jury de cette thèse. Je tiens aussi à remercier les membres du jury : monsieur Salah Edine ALLAOUI Professeur à l'université Amar Telidji Laghouat, monsieur Mouloud AISSANI Maître de Conférence à l'université de Tiart, monsieur Rabeh HERAIZ Maître de Conférence à l'université de M'sila.

Il me tient à cœur d'exprimer ma gratitude envers mes parents qui m'ont sans cesse soutenu dans mes efforts et m'ont appris à toujours essayer de faire du mieux possible. Nul doute que tout cela a contribué à mon engagement continu dans des études toujours plus longues que la présente thèse clôt finalement. Je remercie mes sœurs et mes frères et tous mes amis matheux et mes amis non matheux, qui m'ont aidé chacun à leur manière, dans un cadre mathématique ou non, qui m'ont soutenu de près ou de loin, il est certain que leur amitié a été déterminante pendant ces années de thèse. Merci !

Résumé

Cette thèse porte sur l'étude d'un opérateur appelé dilatation d'opérateur de Toeplitz tronqué ou opérateur intégral singulier tronqué sur L^2. Cette classe d'opérateurs a été crée en 2015 par Ko et Lee dans [8]. Ce travail s'articule autour de deux parties chacune d'elles comportes deux chapitres. La première est consacré à l'étude de tous les thèmes nécessaires à la compréhension de l'enjeu. Dans la seconde partie nous nous intéressons aux dilatations des opérateurs de Toeplitz tronqués sur l'espace L^2, plus particulièrement à la stabilité du produit.

Mots-clés : Espace modèle ; Opérateur de Toeplitz tronqués ; Opérateur de Hankel tronqués ; Dilatation d'opérateur de Toeplitz tronqué.

Table des matières

Introduction

Dans ce travail, nous étudierons les propriétés algébriques d'un opérateur appelé dilatation d'opérateurs de Toeplitz tronqués ou opérateur intégral singulier tronqué sur L^2. Cette classe d'opérateurs a été crée en 2015 par Ko et Lee dans [8]. Certaines propriétés caractéristiques de ces opérateurs ont été étudiées dans [8] par Ko et Lee et [7] par Gu et Kang en 2018 et [9] par Ko, Lee et Nakazi en 2019.

Nous commençons par résumer les informations importantes dont nous avons besoin plus tard.

On note par $\mathbb{D}$ le disque unité, $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ le cercle unité du plan complexe $\mathbb{C}$, $dm := \dfrac{dt}{2\pi}$ la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$ et $L^2 = L^2(\mathbb{T}; dm)$ l'espace de Lebesgue usuel sur $\mathbb{T}$.

L'espace $H^2(\mathbb{D})$ admet de nombreuses définitions équivalentes. La « bonne » définition, est une définition à l'aide d'intégrales que nous allons présenter maintenant.

On définit l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ par l'espace des fonctions analytiques

$f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ sur le disque unité telle que la norme

$$\|f\|_{H^2}^2 = \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^2 |d\zeta|$$

soit finie.

$H^2(\mathbb{D})$ peut être identifié au sous espace fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T}, dm)$ défini par :

$$H^2 = H^2(\mathbb{T}) = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \widehat{f}(n) = 0, n < 0\}$$

muni de la norme de $L^2(\mathbb{T})$.

L'opérateur de multiplication par φ, noté M_φ, sur L^2 est l'opérateur défini par

$$M_\varphi f = \varphi f.$$

Un opérateur de Toeplitz avec le symbole $\varphi \in L^\infty$ est un opérateur $T_\varphi : H^2 \longrightarrow H^2$ défini par

$$T_\varphi f = P(\varphi f), f \in H^2.$$

Brown et Halmos [2] ont étudié les propriétés algébriques des opérateurs de Toeplitz qui sont la compression des opérateurs de multiplication sur L^2. En particulier, ils ont prouvé que T_φ est normal si et seulement si $\varphi = \alpha + \beta\xi$ où α et β sont des nombres complexes et ξ est une fonction à valeur réelle dans L^∞.

L'une des classes d'opérateurs les plus importantes sur les espaces de fonctions analytiques est la classe d'opérateurs de Hankel. Un opérateur de Hankel avec le symbole $\varphi \in L^\infty$ est un opérateur $H_\varphi : H^2 \longrightarrow (H^2)^\perp$ défini par

$$H_\varphi f = Q(\varphi f), f \in H^2.$$

où Q est la projection orthogonale de L^2 sur $(H^2)^\perp$. Bien que les opérateurs de Hankel et Toeplitz aient des propriétés assez différentes, les opérateurs Hankel jouent un rôle important dans l'étude des opérateurs Toeplitz, et vice versa.

Pour $\alpha, \beta \in L^\infty$,un opérateur intégral singulier de Cauchy $S_{\alpha,\beta} : L^2 \longrightarrow L^2$ est défini par

$$S_{\alpha,\beta}(f) = \alpha Pf + \beta Qf, f \in L^2.$$

Ces opérateurs sont des extensions naturelles des opérateurs de multiplication, des opérateurs de Toeplitz et des opérateurs de Hankel. En 2014, l'une des principales observations de Nakazi et Yamamoto [13] est que, selon la décomposition orthogonale $L^2 = H^2 \oplus (H^2)^\perp$,

$$S_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} T_\alpha & \widetilde{H_\beta} \\ H_\alpha & \widetilde{T_\beta} \end{pmatrix}.$$

Pour cette raison, un opérateur intégral singulier de Cauchy $S_{\alpha,\beta}$ est aussi appelé dilatation d'opérateur de Toeplitz.

Les espaces modèles sont des espaces de Hilbert de la forme $(uH^2)^\perp$, où u est une fonction intérieure, H^2 est l'espace de Hardy classique sur le disque d'unité ouvert $\mathbb{D}$, et $\perp$ désigne le complément orthogonal dans H^2. Au niveau de l'analyse fonctionnelle, les espaces modèles sont les compléments orthogonaux des sous-espaces invariants non triviaux par l'opérateur de décalage $Sf = zf$ sur H^2. Ces sous-espaces ont été caractérisés comme uH^2 par Beurling dans son article en 1949. En tant que tels, les espaces $(uH^2)^\perp$ sont les sous-espaces invariants par l'adjoint de l'opérateur de décalage $S^*f = (f - f(0))/z$ sur H^2. Cependant, contrairement aux espaces uH^2 qui sont simples à comprendre (c'est-à-dire tous les multiples H^2 de la fonction intérieure u), les espaces modèles $(uH^2)^\perp$ sont beaucoup plus gênants.

En 2007, Sarason dans [18] a introduit une nouvelle classe d'opérateurs appelés opérateurs de Toeplitz tronqués. L'opérateur de Toeplitz tronqué A^u_φ de symbole $\varphi \in L^2$ sur $K^2_u \cap H^\infty$ (ci-après désigné par K^∞_u) est défini par :

$$A^u_\varphi(f) = P_u(\varphi f)$$

où P_u est la projection orthogonale de L^2 sur K^2_u. Un opérateur de Toeplitz tronqué est évidemment borné s'il a un symbole dans L^∞. Le symbole φ n'est pas unique. C'est à dire,$A^u_{\varphi_1} = A^u_{\varphi_2}$ n'implique pas $\varphi_1 = \varphi_2$. D'après le théorème de Sarason [18], deux symboles correspondent au même opérateur si et seulement si leur différence est dans $uH^2 + \overline{uH^2}$.

Le dual de l'opérateur de Toeplitz tronqués $\widetilde{A^u_\varphi}$ est défini sur l'espace $(K^2_u)^\perp$ par

$$\widetilde{A^u_\varphi} = Q_u(\varphi f), f \in (K^2_u)^\perp.$$

Où Q_u est la projection orthogonale de L^2 sur $(K^2_u)^\perp$. En 2017, Les auteurs dans [3] ont répondu à plusieurs questions concernant le dual de l'opérateur de Toeplitz tronqués $\widetilde{A^u_\varphi}$. Par exemple, une condition nécessaire et suffisante est trouvée pour que le produit de deux duaux d'opérateurs de Toeplitz tronqués soit dual d'opérateur Toeplitz tronqué.

L'opérateur de Hankel tronqués $\Gamma^u_\varphi : K^2_u \to (K^2_u)^\perp$ est l'opérateur sur K^2_u par

$$\Gamma^u_\varphi f = Q_u(\varphi f), f \in K^2_u.$$

L'opérateur $\widetilde{\Gamma^u_\varphi} : (K^2_u)^\perp \longrightarrow K^2_u$ est défini par sur $(K^2_u)^\perp$ par

$$\widetilde{\Gamma^u_\varphi} f = P_u(\varphi f), f \in (K^2_u)^\perp.$$

Récemment, en 2015, Ko et Lee [8] ont introduit un nouvel opérateur $S^u_{\varphi,\psi}$ défini sur L^2 comme suit :

$$S^u_{\varphi,\psi}(f) = \varphi P_u(f) + \psi Q_u(f), f \in L^2$$

pour $\varphi, \psi \in L^\infty$. $S^u_{\varphi,\psi}$ est appelé opérateur intégral singulier tronqué comme on l'appelle dilatation d'opérateurs de Toeplitz tronqués car il représente comme suit

$$S^u_{\varphi,\psi} = \begin{pmatrix} A^u_\varphi & \widetilde{\Gamma^u_\psi} \\ \Gamma^u_\varphi & \widetilde{A^u_\psi} \end{pmatrix}.$$

En 1963, dans un article célèbre sur les propriétés algébriques des opérateurs de Toeplitz [2], Brown et Halmos ont étudié lorsque le produit de deux opérateurs de Toeplitz devient lui-même un opérateur de Toeplitz. Le même problème concernant les opérateurs Toeplitz tronqués a été résolu par Sedlock en 2010 [19]. En 2015, Gu in [6] a prouvé que le produit $S_{\varphi_1,\psi_1}S_{\varphi_2,\psi_2}$ sur L^2 est un opérateur intégral singulier si et seulement si $\varphi_2 \in H^\infty, \psi_2 \in \overline{H^\infty}$. Dans ce travail on s'intéresse au produit de deux dilatations d'opérateurs de Toeplitz tronqués sur L^2.

Nous décrivons notre plan. Le chapitre 1 est consacré à la présentation de l'espace de Hardy du cercle et à la construction des espaces modèles qui sont les sous-espaces stables par l'adjoint de la multiplication par z, cette construction nous sera utile dans les chapitres suivants. Nous présentons les définitions des opérateurs de Toeplitz T_φ et les opérateurs de Hankel H_φ sur l'espace de Hardy et nous décrivons leurs propriétés classiques. Par la suite, nous définissons les opérateurs de Toeplitz tronqués A^u_φ et les opérateurs de Hankel tronqués Γ^u_φ sur l'espace modèle et le complement orthogonal de l'espace modèle respectivement.

Le deuxième chapitre 2 présente les résultats concernant l'opérateur $S_{\alpha,\beta}$. Nous commençons par définir l'opérateur $S_{\alpha,\beta}$ sur l'espace L^2, puis nous rappelons les outils de base nécessaires pour s'initier à notre sujet. Nous nous appuierons sur deux articles le premier est [11] de Nakazi et

Yamamoto et le deuxième est [6] de Gu.

Le chapitre 3 est entièrement consacré aux dilatations des opérateurs de Toeplitz tronqués sur l'espace L^2. Dans ce chapitre, on y expose certaines propriétés qui nous seront utiles pour le chapitre suivant. En particulier, on y fournie des conditions nécessaires et suffisantes pour que la dilatation des opérateurs de Toeplitz tronqués soit un opérateur positif et auto-adjoint, isométrique, co-isométrique. Enfin, nous étudions les symboles φ et ψ lorsque la dilatation des opérateurs Toeplitz tronqués,$S^u_{\varphi,\psi}$ est normal.

Le dernier chapitre 4 est divisé en deux sections importantes. Dans la première section nous caractérisons lorsque le produit de deux dilatations des opérateurs de Toeplitz sur l'espace L^2 est un opérateur de dilatation des opérateurs de Toeplitz. Dans la deuxième section, nous ferons de même pour le produit de deux dilatations des opérateurs de Toeplitz tronqués.

Mon résultat principal s'énonce sous la forme suivante.

Proposition. 0.1. *Soit u une fonction intérieure, $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2 \in L^\infty$. Soit $S^u_{\varphi_1,\psi_1}$, $S^u_{\varphi_2,\psi_2} \in D_u$, les assertions suivantes sont satisfaites*

1. *$S^u_{\varphi_1,\psi_1} S^u_{\varphi_2,\psi_2} \in D_u$ si et seulement si $M_{\varphi_1-\psi_1} S^u_{1,0} S^u_{\varphi_2,\psi_2} \in D_u$.*
2. *Si $\varphi_1 - \psi_1$ est inversible dans L^∞ alors $S^u_{\varphi_1,\psi_1} S^u_{\varphi_2,\psi_2} \in D_u$ si et seulement si $S^u_{1,0} S^u_{\varphi_2,\psi_2} \in D_u$.*

Où D_u désigne l'ensemble des dilatations des des opérateurs de Toeplitz tronqués sur l'espace L^2.

Théorème 0.1. *Soit $\varphi, \psi \in L^\infty$ et soit u une fonction intérieure non constante alors $S^u_{1,0} S^u_{\varphi,\psi} \in D_u$ si et seulement si $\varphi \in K^\infty_u + uH^\infty + \overline{uH^\infty}$, $\psi \in \overline{K^\infty_u}$. Dans ce cas,*

$$S^u_{1,0}S^u_{\varphi,\psi} = S^u_{P_u\varphi,0}$$

Corollaire 0.2. *Soient* $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in L^\infty$ *telle que* $\varphi_1 - \psi_1$ *est une fonction inversible dans* L^∞*. soient* $S^u_{\varphi_1,\psi_1}, S^u_{\varphi_2,\psi_2} \in D_u$ *alors* $S^u_{\varphi_1,\psi_1}S^u_{\varphi_2,\psi_2} \in D_u$ *si et seulement si* $\varphi_2 \in K^\infty_u + uH^\infty + \overline{uH^\infty}$ *et* $\psi_2 \in \overline{K^\infty_u}$*. Dans ce cas*

$$S^u_{\varphi_1,\psi_1}S^u_{\varphi_2,\psi_2} = S^u_{S^u_{\varphi_1,\psi_1}\varphi_2,\psi_1\psi_2}.$$

Sachant que les ensembles K_1, K_2 sont défini comme suit

$$K_1 = \{S^u_{\varphi,\psi} \in D_u, \varphi \in K^\infty_u, \psi \in \overline{K^\infty_u}\}$$

$$K_2 = \{S^u_{\varphi,\psi} \in D_u, \varphi \in uH^\infty + \overline{uH^\infty}, \psi \in \overline{K^\infty_u}\}$$

nous avons la proposition suivante

Proposition. 0.3. *soit* $\varphi_1, \psi_1 \in L^\infty$ *telle que* $\varphi_1 - \psi_1$ *est inversible dans* L^∞*. Pour tout* $S^u_{\varphi_1,\psi_1} \in D_u$*, nous avons les cas suivants*

(a) Si $S^u_{\varphi_2,\psi_2} \in K_1$ *alors*

$$S^u_{\varphi_1,\psi_1}S^u_{\varphi_2,\psi_2} = S^u_{\varphi_1\varphi_2,\psi_1\psi_2}$$

(b) Si $S^u_{\varphi_2,\psi_2} \in K_2$ *alors*

$$S^u_{\varphi_1,\psi_1}S^u_{\varphi_2,\psi_2} = S^u_{\psi_1\varphi_2,\psi_1\psi_2}$$

Corollaire 0.4. *Supposons que l'opérateur* $S^u_{\varphi,\psi}$ *n'est pas un opérateur de multiplication. Si* $S^u_{\varphi,\psi} \in K_1$ *et* $\varphi, \overline{\psi}$ *sont inversibles dans* K^∞_u *alors* $S^u_{\varphi,\psi}$ *est un opérateur inversible. Dans ce cas*

$$(S^u_{\varphi,\psi})^{-1} = S^u_{\varphi^{-1},\psi^{-1}}.$$

Chapitre 1

Espaces et opérateurs

L'objectif de ce chapitre est de donner les bases nécessaires pour appréhender les notions que nous manipulerons tout au long de ce manuscrit. Nous en présenterons les définitions ainsi que les propriétés utiles pour la suite. Ainsi, nous commencerons par définir l'espace de Hardy H^2 sur le cercle unité ; les opérateur de Toeplitz et de Hankel ; l'espace modèle ; les opérateurs de Toeplitz tronqués et les opérateurs de Hankel tronqués.

1.1 Espace de Hardy

Notre objectif sera d'étudier des opérateurs sur des espaces de fonctions analytiques classiques tel que l'espace de Hardy.

Soient $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ le disque unité du plan complexe $\mathbb{C}$, $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ le cercle unité, $dm := dm(\theta) = \frac{d\theta}{2\pi}$ la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle unité, $dA(z) = dxdy/\pi = rdrd\theta/\pi$, avec $z = x + iy = re^{i\theta}$, la mesure planaire de Lebesgue normalisé sur le disque unité $\mathbb{D}$ et par $L^2 = L^2(\mathbb{T}) := L^2(\mathbb{T}, dm)$ l'espace de Lebesgue usuel, il est bien connu que L^2 est muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} f\overline{g}dm.$$

On désigne par $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ l'ensemble de toutes les fonctions holomorphes dans $\mathbb{D}$.

L'espace de Hardy H^2 est l'ensemble des fonctions $f \in L^2$ tel les coefficient de Fourier négatives sont nulle.

$$H^2 = \{f \in L^2, \widehat{f}(n) = 0, n < 0\}.$$

et

$$H^\infty = \{f \in L^\infty(\mathbb{T}), \widehat{f}(n) = 0, n < 0\},$$

où,

$$\widehat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}\frac{d\theta}{2\pi}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

On peut identifier $H^2(\mathbb{T})$ à l'espace $H^2(\mathbb{D})$, l'espace des fonctions holomorphes $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ tel que

$$\|f\|^2_{H^2(\mathbb{D})} = \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^2|d\zeta| < +\infty,$$

car l'application

$$\begin{array}{rccc} \chi : & H^2(\mathbb{D}) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{T}) \\ & f & \longrightarrow & f^* \end{array}$$

est un isomorphisme isométrique, où f^* est la limite radiale de f.

D'aprés le théoèrme de Fatou, la limite radiale de toute fonction $f \in H^2(\mathbb{D})$, qui est une fonction définie sur $\mathbb{T}$ par :

$$f^*(\zeta) := \lim_{r \longrightarrow 1^-} f(r\zeta) \qquad \zeta \in \mathbb{T},$$

existe presque partout sur $\mathbb{T}$.

Puisque $H^2(\mathbb{T})$ est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$, il est aussi un espace de Hilbert muni du produit scalaire induit par celui de

$L^2(\mathbb{T})$ défini par :

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\overline{g(\zeta)}|d\zeta|,$$

et muni de la norme

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{T}} |f^*(\zeta)|^2 dm(\zeta).$$

1.1.1 Noyau reproduisant de l'espace de Hardy

Soit E un ensemble arbitraire non vide et H un espace de Hilbert de fonctions à valeurs complexes sur E. On dit que H est un espace de Hilbert à noyau reproduisant si pour tout $x \in E$, la fonction d'évaluation

$$L_x : f \in H \longmapsto f(x) \in \mathbb{C}$$

est une forme linéaire continue. D'après le théorème de représentation de Riesz, la continuité de la forme linéaire $L_x(x \in E)$ entraîne qu'il existe un unique élément $k_x \in H$ tel que

$$L_x(f) = \langle f, k_x\rangle.$$

La fonction k_x est appelée le noyau reproduisant au point x.

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et toute $f \in H^2$, nous avons

$$\begin{aligned} |f(\lambda)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||\lambda|^n \\ &\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\|f\|}{\sqrt{1-|\lambda|^2}}. \end{aligned}$$

L'inégalité précédente montre que pour $\lambda \in \mathbb{D}$ fixé, la fonction d'évaluation $f \longmapsto f(\lambda)$ est une forme linéaire continue sur H^2 et d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe dans H^2 une unique fonction, notée k_λ telle que :

$$f(\lambda) = \langle f, k_\lambda \rangle, \qquad f \in H^2.$$

Cette relation n'est autre que la formule intégrale de Cauchy de la fonction $f \in H^2$, c'est-à-dire

$$f(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f^*(\zeta)}{1 - \overline{\zeta} z} dm(\zeta)$$

pour toute fonction $f \in H^2$ et $z \in \mathbb{D}$. Sans oublier que la limite radiale f^* de $f \in H^2$ existe presque partout et est un élément de L^2, ce qui nous assure que l'intégrale ci-dessus est bien définie.

La fonction k_λ ainsi définie est appelée le noyau de Cauchy ou le noyau de Cauchy-Szegö. Le noyau de Cauchy est un noyau reproduisant pour l'espace de Hilbert H^2 et on peut vérifier que k_λ est donnée par la formule :

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{1 - \overline{\lambda} z}$$

pour tout $z \in \mathbb{D}$.

Donc la projection orthogonale P de L^2 sur H^2 est donnée par :

$$Pf = \langle f, k_\lambda \rangle, \qquad f \in H^2, \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

L'opérateur P est donné par l'intégrale de Cauchy :

$$(Pf)(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{1 - \overline{\zeta} z} dm(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}, \quad f \in L^2(\mathbb{T}).$$

Clairement, $\|Pf\| \leq \|f\|$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$.

Proposition. 1.1. *[17] La famille $\{k_\lambda : \lambda \in \mathbb{D}\}$ est linéairement indépendant.*

Démonstration. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ n points distincts de $\mathbb{D}$ tels que $\sum_{j=1}^{n} a_j k_{\lambda_j} = 0$. Montrons que $a_j = 0$ pour $j = 1, 2, \cdots, n$. Pour tout $f \in H^2$ on a

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{n} a_j k_{\lambda_j} \\ &= \langle a_1 k_{\lambda_1}, f\rangle + \langle a_2 k_{\lambda_2}, f\rangle + \cdots \langle a_n k_{\lambda_n}, f\rangle \\ &= a_1\langle k_{\lambda_1}, f\rangle + a_2\langle k_{\lambda_2}, f\rangle + \cdots + a_n\langle k_{\lambda_n}, f\rangle \\ &= \overline{a_1} f(\lambda_1) + \overline{a_2} f(\lambda_2) + \cdots + \overline{a_n} f(\lambda_n). \end{aligned}$$

Maintenant il suffit de trouver un polynôme f tel que $f(\lambda_j) = a_j$ pour $j = 1, 2, \cdots, n$. Le théorème d'interpolation de Lagrange assure l'existence d'un tel polynôme et la relation ci-dessus devient

$$|a_1|^2 + |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2 = 0.$$

Donc $a_j = 0$ pour $j = 1, 2, \cdots, n$. □

1.2 Opérateurs de multiplication.

La théorie des opérateurs de Toeplitz est étroitement liée avec celle des opérateurs de multiplication (qui sont aussi appelés opérateurs de Laurent) sur L^2. Nous allons donc commencer par voir brièvement la définition et quelques propriétés de l'opérateur de multiplication sur L^2.

Définition 1.1. *Pour $\varphi \in L^\infty$, l'opérateur de multiplication par φ, noté M_φ, sur L^2 est l'opérateur défini par*

$$M_\varphi f = \varphi f$$

pour tout $f \in L^2$. La fonction φ est appelée le symbole de l'opérateur.

Nous pouvons aussi définir densément l'opérateur de multiplication M_φ où $\varphi \in L^2$. En effet, notons $D(M_\varphi)$ le sous ensemble de L^2 défini par

$D(M_\varphi) = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \varphi f \in L^2(\mathbb{T})\}$. Il est montré que $D(M_\varphi)$ contient l'ensemble des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{T}$ qui est dense dans L^2 donc $D(M_\varphi)$ est lui aussi dense dans L^2 et l'opérateur de multiplication M_φ est défini sur $D(M_\varphi)$ par $M_\varphi f = \varphi f$.

Théorème 1.1. *[2] Soit M_φ un opérateur de multiplication. Alors*

(1) *Les assertions suivantes sont équivalentes*

  (a) $\varphi \in L^\infty$

  (c) *M_φ est borné sur L^2, et $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$.*

(2) $M_\varphi^* = M_{\overline{\varphi}}$.

(3) *M_φ est normal (c.à.d $MM^* = M^*M$).*

Basé sur le Théorème 1.1, on trouve les propriétés élémentaires

$$\alpha M_\varphi + \beta M_\psi = M_{\alpha\varphi+\beta\psi}, \quad M_\varphi M_\psi = M_\psi M_\varphi = M_{\varphi\psi}$$

et, l'application

$$\begin{array}{ccc} L^\infty & \longrightarrow & \mathcal{L}(L^2) \\ \varphi & \longmapsto & M_\varphi \end{array}$$

est un *-homomorphism isométrique d'algèbres de Banach.

Théorème 1.2. *[4] Soit $\varphi \in L^\infty$. Alors l'opérateur de multiplication M_φ est inversible sur $\mathcal{L}(L^2)$ si et seulement si φ est inversible sur L^∞. De plus,*

$$M_\varphi^{-1} = M_{\varphi^{-1}}.$$

1.3 Opérateurs de Toeplitz et opérateurs de Hankel sur l'espace de Hardy

Trouver la distance entre un point et un sous-ensemble dans un espace métrique est un problème essentiel dans la théorie de l'espace métrique. Dans l'espace métrique L^∞, trouver la distance entre une fonction $f \in L^\infty$ et le sous-espace H^∞ est appelé problème de Nehari et conduit naturellement aux opérateurs de Hankel.

Les opérateurs de Toeplitz et les opérateurs de Hankel forment deux types importants d'opérateurs concrets vu leur importance dans les mathématiques pures. Ils sont associés a ce que nous appellerons des symboles et ils peuvent agir sur différents espaces de fonctions analytiques. Pour chaque opérateur, l'objectif principal est de découvrir la connexion entre les propriétés du symbole et les propriétés théoriques de l'opérateur considéré.

Dans cette section nous rappelons quelques propriétés de base de l'opérateur de Toeplitz et l'opérateur de Hankel.

Définition 1.2. *Soit $\varphi \in L^\infty$, l'opérateur de Toeplitz avec le symbole φ est l'opérateur T_φ défini par*

$$\begin{aligned} T_\varphi : H^2 &\longrightarrow H^2 \\ f &\longmapsto T_\varphi f = P(\varphi f), \end{aligned}$$

où P est la projection orthogonale de L^2 sur H^2.

Pour $\varphi \in L^\infty$, l'opérateur $\widetilde{T_\varphi}$ est défini sur $(H^2)^\perp$ par

$$\widetilde{T_\varphi} f = Q(\varphi f), f \in (H^2)^\perp.$$

Où Q est la projection orthogonale de L^2 sur $(H^2)^\perp$.

Quelques propriétés des opérateurs de Toeplitz qui nous seront utiles sont regroupées dans la proposition suivante :

Proposition. 1.2. *Soient φ et ψ deux fonctions bornées sur $\mathbb{T}$. Alors,*

1. *Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a : $T_{\alpha\varphi+\beta\psi} = \alpha T_\varphi + \beta T_\psi$.*
2. *$T_\varphi = 0$ si et seulement si $\varphi = 0$.*
3. *L'opérateur identité I de $H^2(\mathbb{T})$ est l'opérateur de Toeplitz de symbole $\varphi = 1$, et l'opérateur nul est l'opérateur de Toeplitz de symbole 0.*
4. *$T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$.*
5. *Pour tous $f, g \in H^2(\mathbb{T})$, on a : $\langle M_\varphi f, g\rangle = \langle T_\varphi f, g\rangle$.*
6. *T_φ est positif si et seulement si M_φ est positif.*
7. *T_φ est auto-adjoint si et seulement si son symbole est à valeur réelle presque partout sur $\mathbb{T}$.*

Maintenant, nous définissons les opérateurs Hankel. Les opérateurs de Hankel peuvent être définis de différentes manières (Voir par exemple [15]). L'une des définitions les plus importantes est les opérateurs de Hankel H_φ sur l'espace H^2.

Définition 1.3. *Soit $\varphi \in L^\infty$, l'opérateur de Hankel avec le symbole φ est l'opérateur H_φ défini par*

$$\begin{aligned} H_\varphi : H^2 &\longrightarrow (H^2)^\perp = L^2 \ominus H^2 \\ f &\longmapsto H_\varphi f = Q(\varphi f), \end{aligned}$$

où Q est la projection orthogonale de L^2 sur $(H^2)^\perp$, il est clair que $Q = I - P$. L'opérateur H_φ est borné si et seulement s'il a un symbole borné ($\varphi \in L^\infty$).

Pour $\varphi \in L^{\infty}$, soit l'opérateur $\widetilde{H_{\varphi}} : (H^2)^{\perp} \longrightarrow H^2$ défini par

$$\widetilde{H_{\varphi}} f = P(\varphi f), f \in (H^2)^{\perp}.$$

Définition 1.4. *Soit $\mathcal{H}$ un sous espace fermé d'un espace de Hilbert $\mathcal{M}$, et soient $R : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ et $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ deux opérateurs bornés et P c'est la projection orthogonale de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{H}$. On dit que R est une dilatation de T ou bien T est une compression de R si $Tf = PRf$ pour tout $f \in \mathcal{H}$.*

Selon $\mathcal{M} = \mathcal{H} \oplus (\mathcal{H})^{\perp}$, l'opérateur R est une dilatation de T si et seulement si l'opérateur R a la représentation matricielle suivante

$$R = \begin{pmatrix} T & X \\ Y & Z \end{pmatrix}.$$

En prenant, $\mathcal{M} = L^2, \mathcal{H} = H^2$, $R = M_{\varphi}$, l'opérateur de multiplication par φ, $T = T_{\varphi}$, l'opérateur de Toeplitz de symbole φ et P la projection de Riesz dans la Définition 1.4 précédente, on a le lien entre l'opérateur de Toeplitz et de Hankel et l'opérateur de multiplication M_{φ} suivante :

Proposition. 1.3. *Soit $\varphi \in L_{\infty}$. Alors*

- *L'opérateur de Toeplitz T_{φ} est une compression de l'opérateur de multiplication M_{φ} sur l'espace H^2.*
- *L'opérateur de Hankel H_{φ} est une compression de l'opérateur de multiplication M_{φ} sur l'espace $(H^2)^{\perp}$.*

1.3.1 Produit tensoriel

Définition 1.5. *Soient H un espace de Hilbert et $f, g \in H$. Le produit tensoriel, noté $f \otimes g$, est l'opérateur de rang 1 défini sur H par :*

$$f \otimes g : h \in H \longrightarrow \langle h, g \rangle f \in H$$

Proposition. 1.4. *On a les propriétés suivantes : pour tout $f, f_1, g, g_1 \in H$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{L}(H)$,*

1. $A(f \otimes g) = (Af \otimes g)$ *et* $(f \otimes g)A = (f \otimes A^*g)$.
2. $(f \otimes g)(f_1 \otimes g_1) = \langle f_1, g\rangle(f \otimes g_1)$.
3. $(\alpha f + \beta f_1) \otimes g = \alpha(f \otimes g) + \beta(f_1 \otimes g)$ *et* $f \otimes (\alpha g + \beta g_1) = \overline{\alpha}(f \otimes g) + \overline{\beta}(f \otimes g_1)$.
4. $Ker(f \otimes g) = (\mathbb{C}g)^{\perp}$ *et* $Im(f \otimes g) = \mathbb{C}f$.
5. $(f \otimes g)^* = (g \otimes f)$.
6. $(f \otimes g) = (f_1 \otimes g_1)$ *avec* f, f_1, g, g_1 *tous non nuls, si et seulement si il existe* $\gamma, \lambda \in \mathbb{C}$ *tels que* $f = \gamma f_1, g = \lambda g_1$ *et* $\overline{\lambda}\gamma = 1$.

1.4 Espace Modèle

Beurling a utilisé des outils analytiques pour montrer que les sous-espaces fermés de H^2 qui sont invariants par le shift S sont précisément de la forme uH^2, où u est une fonction intérieure. Par conséquent, le complément orthogonal du sous-espace de Beurling uH^2, les soi-disant sous-espaces modèles K_u^2, sont les sous-espaces invariants fermés de H^2 qui sont invariants par l'opérateur de décalage S^*.

Le mot « modèle » utilisé ci-dessus pour décrire K_u^2 fait référence à leur application pour reconnaître les contractions de l'espace de Hilbert. L'idée principale est d'identifier (via un opérateur unitaire) une contraction comme adjoint de multiplication par z sur un certain espace de fonctions analytiques sur le disque unitaire.

Dans cette section nous rappelons la définition et les propriétés de l'espace modèle K_u^2.

Les opérateurs de décalage (shift en Anglais) sont d'une importance suprême dans le monde de la théorie des fonctions liées aux opérateurs. Le plus important est l'opérateur de shift unilatéral $S : H^2 \longrightarrow H^2$ défini par :

$$Sf(z) = zf(z), \qquad f \in H^2,$$

ou, en termes de coefficients de Taylor, par

$$S(a_0, a_1, \ldots) = (0, a_0, a_1, \ldots).$$

Autrement dit, Le shift unilatéral S est une isométrie non surjective son image est l'ensemble des suites de $l^2(\mathbb{N})$ de premier terme nul.

Son adjoint $S^* : H^2 \to H^2$ est défini par :

$$S^* f(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}, \qquad f \in H^2,$$

ou, en termes de coefficients de Taylor, par

$$S^*(a_0, a_1, \ldots) = (a_1, a_2, \ldots).$$

Soit $M \subset H^2$, M est dit un sous-espace invariant par S, lorsque M est fermé et $SM \subset M$, et il dit que M est non trivial lorsque $\{0\} \subsetneq M \subsetneq H^2$.

Définition 1.6. *Une fonction intérieure u est une fonction analytique bornée sur $\mathbb{D}$ telle que $|u(\xi)| = 1$ p.p pour $\xi \in \mathbb{T}$. En d'autre termes, une fonction $u \in H^\infty$ est dite intérieure lorsque $|u^*| = 1$ sur $\mathbb{T}$.*

Exemple 1.1. *L'exemple non trivial le plus simple d'une fonction intérieure est une transformation Möbius de la forme*

$$e^{i\theta} \frac{w - z}{1 - \overline{w}z},$$

où $|w| < 1$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$, qui est un automorphisme de $\mathbb{D}$ associe $\mathbb{T}$ à $\mathbb{T}$.

Le théorème classique de Beurling (voir [1]) donne une caractérisation complète des sous-espaces non triviaux invariants par l'adjoint du shift, sont tous de la forme uH^2, où u est une fonction intérieure .

On utilise ce théorème de Beurling pour décrire les sous-espaces invariants par le shift S, et l'adjoint de shift S^*.

Théorème 1.3. *1. Un sous-espace fermé E de H^2 tels que $E \subsetneqq H^2$ est invariant par le shift S si et seulement si E est de la forme :*

$$E := uH^2 = \{uf, f \in H^2\}.$$

où u est une fonction intérieure.

2. Les sous-espaces fermés Y de H^2 tels que $Y \subsetneqq H^2$ invariants par S^* sont de la forme

$$Y = (uH^2)^\perp = H^2 \ominus uH^2 = \{f \in H^2, \langle f, ug \rangle, \forall g \in H^2\} \tag{1.1}$$

où u est une fonction intérieure. Réciproquement tous les espaces de la forme (1.1) sont S^*-invariants.

Dans la suite de cette thèse on désignera par K_u^2 le sous espace modèle $H^2 \ominus uH^2$.

Proposition. 1.5. *Pour chaque fonction intérieure u, l'espace modèle K_u^2 correspondant est l'ensemble des fonctions $f \in H^2$ telles que $f = u\overline{zg}$ presque partout sur $\mathbb{T}$ où $g \in H^2$. Autrement dit, on a :*

$$K_u^2 = H^2 \cap u\overline{zH^2}. \tag{1.2}$$

où le côté droit est considéré comme un ensemble de fonctions sur $\mathbb{T}$.

1.4.1 Noyau reproduisant de K_u^2.

Rappelons que les noyaux $k_\lambda = (1-\overline{\lambda}z)^{-1}$ sont les noyaux reproduisant de l'espace de Hardy.

On sait que, si E un sous espace de H^2 et k_λ est le noyau reproduisant de H^2, alors la projection orthogonale $P^E k_\lambda$ de k_λ sur E est le noyau reproduisant de E, donc

$$k_\lambda - P^E k_\lambda$$

est le noyau reproduisant de $E^\perp$, c'est-à-dire le noyau reproduisant de K_u^2 est la projection orthogonale de k_λ sur K_u^2, il est donné par :

$$k_\lambda^u(z) = \frac{1-\overline{u(\lambda)}u(z)}{1-\overline{\lambda}z}, \qquad (\lambda, z) \in \mathbb{D} \times \mathbb{T}.$$

En effet, si $f = uh \in uH^2$, alors

$$\begin{aligned} f(\lambda) = u(\lambda)h(\lambda) &= u(\lambda)\langle h, k_\lambda\rangle \\ &= u(\lambda)\langle \overline{u}f, k_\lambda\rangle \\ &= \langle f, \overline{u(\lambda)}uk_\lambda\rangle, \end{aligned}$$

donc le noyau reproduisant de uH^2 est $\overline{u(\lambda)}u(z)k_\lambda$.

Si $f \in K_u^2$ alors

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \langle f, k_\lambda\rangle \\ &= \langle f, k_\lambda\rangle - u(\lambda)\langle f, uk_\lambda\rangle \\ &= \langle f, (1-\overline{u(\lambda)}u)k_\lambda\rangle. \end{aligned}$$

De plus $(1-\overline{u(\lambda)}u)k_\lambda \in K_u^2$ car, pour tout $h \in H^2$,

$$\begin{aligned} \langle uh, (1-\overline{u(\lambda)}u)k_\lambda\rangle &= u(\lambda)h(\lambda) - u(\lambda)\langle uh, uk_\lambda\rangle \\ &= u(\lambda)h(\lambda) - u(\lambda)\langle h, k_\lambda\rangle \\ &= u(\lambda)h(\lambda) - u(\lambda)h(\lambda) = 0. \end{aligned}$$

On déduit que :

$$f(\lambda) = \langle f, k_\lambda^u \rangle, \quad f \in K_u^2.$$

Proposition. 1.6. *Soit $f \in L^2$, alors*

$$P_u f(\lambda) = \langle f, k_\lambda^u \rangle, \quad \lambda \in \mathbb{D}. \tag{1.3}$$

Démonstration. Nous avons P_u est un auto-adjoint, alors

$$\langle f, k_\lambda^u \rangle = \langle f, P_u k_\lambda^u \rangle = \langle P_u f, k_\lambda^u \rangle = P_u f(\lambda).$$

□

D'après l'égalité (1.3), l'opérateur P_u est donné par l'intégrale

$$(P_u f)(\lambda) = \int_{\mathbb{T}} f(\zeta) \frac{1 - u(\lambda)\overline{u(\zeta)}}{1 - \overline{\zeta}\lambda} dm(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}, \quad f \in L^2(\mathbb{T}),$$

Soient M_u et $M_{\overline{u}}$ les opérateurs de multiplication par u et $\overline{u}$ respectivement, la projection orthogonale de L^2 sur K_u^2, P_u donné par

$$P_u = P - M_u P M_{\overline{u}}. \tag{1.4}$$

1.4.2 Opérateurs complexes symétriques

Définition 1.7. *On dit qu'un opérateur C sur un espace de Hilbert H est un opérateur de conjugaison (ou simplement une conjugaison) si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *C est opérateur antilinéaire, c'est-à-dire*

$$C(\alpha f + \beta g) = \overline{\alpha} C f + \overline{\beta} C g$$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $f, g \in H$.

2. *$\langle Cf, Cg \rangle = \langle g, f \rangle$, pour tout $f, g \in H$.*

3. $C^2 = Id$.

Définition 1.8. *Soit C un opérateur de conjugaison sur H.*

1. *On dit qu'un opérateur linéaire A sur H est C-symétrique (resp. C-antisymétrique) si $A = CA^*C$ (resp. $-A = CA^*C$).*
2. *On dit qu'un opérateur linéaire A sur H est complexe-symétrique s'il existe une conjugaison C sur H telle que A est C-symétrique.*

Chaque espace modèle K_u^2 admet un opérateur de conjugaison

$$C : K_u^2 \longrightarrow K_u^2$$

défini par

$$Cf(z) = u(z)\overline{zf(z)}, \quad f \in K_u^2, \quad z \in \mathbb{T}. \tag{1.5}$$

On note par $\widetilde{f}$ le conjugué de f sur K_u^2, c'est-à-dire $\widetilde{f} = Cf$.

Lemme 1.7. *1. Pour chaque $\lambda \in \mathbb{D}$ et $z \in \mathbb{T}$, on a*

$$\widetilde{k_\lambda^u}(z) = \frac{u(z) - u(\lambda)}{z - \lambda}.$$

En particulier,

$$\widetilde{k_0^u}(z) = \frac{u(z) - u(0)}{z} = S^*u.$$

2. $\widetilde{f}(\lambda) = \langle \widetilde{k_\lambda^u}, f\rangle, \quad f \in K_u^2.$

Démonstration.

1. Puisque $|u| = 1$ p.p sur $\mathbb{T}$, pour tout $z \in \mathbb{T}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\widetilde{k_\lambda^u}(z) &= u(z)\overline{zk_\lambda^u(z)} \\
&= u(z)\overline{z}\frac{1 - u(\lambda)\overline{u(z)}}{1 - \lambda\overline{z}} \\
&= \overline{z}\frac{u(z) - u(\lambda)}{1 - \overline{z}\lambda} \\
&= \frac{u(z) - u(\lambda)}{z - \lambda}.
\end{aligned}$$

2. Nous avons les égalités suivantes :

$$\langle \widetilde{k_\lambda^u}, f\rangle = \langle Ck_\lambda^u, f\rangle = \langle Ck_\lambda^u, C^2 f\rangle = \langle Cf, k_\lambda^u\rangle = \langle \tilde{f}, k_\lambda^u\rangle = \tilde{f}(\lambda).$$

□

1.5 Opérateurs de Toeplitz tronqués et opérateurs de Hankel tronqués

Dans cette section on étudiera les propriétés algébriques des opérateurs de Toeplitz tronqués qui sont des compressions des opérateurs de multiplication sur l'espace modèle K_u^2. Ils ont été formellement introduits par Sarason dans [18]. Dans toute la suite, u désignera une fonction intérieure non constante. les compressions de S et S^* sur K_u^2 sont notées respectivement par S_u et S_u^* c'est-à-dire.

$$S_u = S/K_u, \quad S_u^* = S^*/K_u.$$

Comme chaque noyau reproduisant de (??) est analytique borné et $span\{k_\lambda^u, \lambda \in \mathbb{D}\}$ (le sous-espace vectoriel fermé engendré par k_λ^u) est dense dans K_u^2, il s'ensuit que $K_u^2 \cap H^\infty := K_u^\infty$ est dense dans K_u^2.

Définition 1.9. *L'opérateur de Toeplitz tronqué de symbole $\varphi \in L^2(T)$ sur K_u^∞ est défini par :*

$$\begin{aligned} A_\varphi^u : K_u^\infty &\longrightarrow K_u^\infty \\ f &\longmapsto A_\varphi^u(f) = P_u(\varphi f), \end{aligned}$$

avec P_u est la projection orthogonale de L^2 sur K_u^2.

Pour $\varphi \in L^2$ et $f \in K_u^2$, on définit par densité l'expression $A_\varphi^u f = P_u(\varphi f)$ sur K_u^2, c'est-à-dire si $f \in K_u^2$, on peut trouver $(f_n)_n \subset K_u^\infty$ tel que $f_n \to f$ quand n tend vers l'infini et $P_u(\varphi f) = \lim_{n\to\infty} P_u(\varphi f_n)$.

Exemple 1.2. *Les opérateurs S_u et S_u^* sont des opérateurs de Toeplitz tronqués de symbole respectif z et $\overline{z}$. c'est-à-dire,*

$$S_u = A_z^u \quad et \qquad S_u^* = A_{\overline{z}}^u.$$

Lemme 1.8. *[5] Les opérateurs de Toeplitz tronqués sont C-symétriques.*

Démonstration. Soient $\varphi \in L^2$ et A_φ^u un opérateur de Toeplitz tronqués borné. Pour $f \in K_u^\infty$ et $g \in K_u^2$ on a

$$\begin{aligned}
\langle CA_\varphi^u Cf, g\rangle &= \langle Cg, A_\varphi^u Cf\rangle \\
&= \int_{\mathbb{T}} u(\zeta)\overline{\zeta g(\zeta)\varphi(\zeta)u(\zeta)}\zeta f(\zeta)dm(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{T}} \overline{\varphi(\zeta)} f(\zeta)\overline{g(\zeta)}dm(\zeta) \\
&= \langle A_{\overline{\varphi}}^u f, g\rangle \\
&= \langle (A_\varphi^u)^* f, g\rangle.
\end{aligned}$$

□

Lemme 1.9. *[18] Si $\lambda \in \mathbb{D}$, alors*

$$S_u^* k_\lambda^u = \overline{\lambda} k_\lambda^u - \overline{u(\lambda)}\widetilde{k_0^u}, \quad S_u \widetilde{k_\lambda^u} = \lambda \widetilde{k_\lambda^u} - u(\lambda) k_0^u.$$

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{D}$. Pour la première égalité, nous avons

$$S^* k_\lambda(z) = \frac{k_\lambda(z) - k_\lambda(0)}{z} = \overline{\lambda} k_\lambda(z),$$

et

$$S^*(1 - \overline{u(\lambda)}u(z)) = \frac{1 - \overline{u(\lambda)}u(z) - 1 + \overline{u(\lambda)}u(0)}{z} = -\overline{u(\lambda)}S^* u(z),$$

Donc,

$$\begin{aligned} S_u^* k_\lambda^u &= S^* k_\lambda^u = S^*(1-\overline{u(\lambda)}u)k_\lambda \\ &= (1-\overline{u(\lambda)}u)S^* k_\lambda + k_\lambda(0)S^*(1-\overline{u(\lambda)}u) \\ &= \overline{\lambda}(1-\overline{u(\lambda)}u)k_\lambda(z) - \overline{u(\lambda)}S^* u \\ &= \overline{\lambda}k_\lambda^u(z) - \overline{u(\lambda)}\widetilde{k_0^u}. \end{aligned}$$

L'opérateur S_u est un opérateur de Toeplitz tronqué C-symétrique, donc nous obtenons la deuxième égalité en appliquant l'opérateur C à la première égalité :

$$\begin{aligned} S_u \widetilde{k_\lambda^u} &= CS_u^* CC k_\lambda^u \\ &= CS_u^* k_\lambda^u \\ &= \lambda \widetilde{k_\lambda^u} - u(\lambda)k_0^u. \end{aligned}$$

□

Lemme 1.10. *[18] Soit $u \in H^2$ une fonction intérieure. Alors*

a) $I - S_u S_u^* = k_0^u \otimes k_0^u$,

b) $I - S_u^* S_u = \widetilde{k_0^u} \otimes \widetilde{k_0^u}$.

Démonstration. Pour la première égalité, soit $f \in K_u \cap (k_0^u)^\perp$, c'est-à-dire $\langle f, k_0^u\rangle = f(0) = 0$, nous avons $S_u^* = S^*/K_u$, donc

$$(I - S_u S_u^*)f = f - S_u(\frac{f}{z}) = 0,$$

d'où $I - S_u S_u^*$ est un opérateur de rang 1, et comme $I - S_u S_u^*$ est un opérateur auto-adjoint alors $I - S_u S_u^* = c(k_0^u \otimes k_0^u)$. Pour déterminer le scalaire, on va appliquer le lemme 1.9 (avec $\lambda = 0$) :

$$\begin{aligned}
(I - S_u S_u^*)k_0^u &= k_0^u + \overline{u(0)} S_u \widetilde{k_0^u} \\
&= (1 - |u(0)|^2)k_0^u \\
&= \|k_0^u\|^2 k_0^u \\
&= \langle k_0^u, k_0^u \rangle k_0^u \\
&= (k_0^u \otimes k_0^u)k_0^u.
\end{aligned}$$

D'où le scalaire est 1.

Nous obtenons la deuxième égalité en appliquant l'opérateur C à la première égalité :

$$\begin{aligned}
C(I - S_u S_u^*)C = k_0^u \otimes k_0^u &\Leftrightarrow C^2 - CS_u S_u^* C = Ck_0^u \otimes C^* k_0^u \\
&\Leftrightarrow I - CS_u CCS_u^* C = \widetilde{k_0^u} \otimes \widetilde{k_0^u} \\
&\Leftrightarrow I - S_u^* S_u = \widetilde{k_0^u} \otimes \widetilde{k_0^u}.
\end{aligned}$$

□

On a le théorème de Sarason suivant :

Théorème 1.4. *[18] Soit $\varphi \in L^2$. Alors*

$$A_\varphi^u = 0 \quad \textit{si et seulement si} \quad \varphi \in uH^2 + \overline{uH^2}.$$

Démonstration.

Soit $\varphi \in L^2$.

On suppose que $\varphi \in uH^2 + \overline{uH^2}$, alors il existe $\psi, \chi \in H^2$ telles que :

$$\varphi = u\psi + \overline{u\chi}.$$

Pour tout $f \in K_u^\infty$ on a :

$$\varphi f = u\psi f + \overline{u\chi} f$$

qui est orthogonale à K_u^2 car $uK_u^\infty \subset uH^\infty$ et $\overline{uK_u^\infty} \subset \overline{uH^\infty}$.
Donc $A_\varphi^u = 0$ pour tout $f \in K_u^\infty$ et ainsi $A_\varphi^u = 0$ (car K_u^∞ est dense dans K_u^2).

Réciproquement, on suppose que $A_\varphi^u = 0$, et $\varphi = \psi + \overline{\chi}$ avec $\psi, \chi \in H^2$. Donc

$$A_\psi^u = -A_{\overline{\chi}}^u.$$

Les opérateurs $A_{\overline{\chi}}^u$ et S_u^* commutent, ainsi que les opérateurs A_ψ^u et S_u, alors les opérateurs A_ψ^u et $A_{\overline{\chi}}^u$ commutent avec S_u et S_u^*. Donc

$$A_\psi^u(I - S_uS_u^*) = (I - S_uS_u^*)A_\psi^u,$$

et

$$A_\psi^u(I - S_uS_u^*)k_0^u = (I - S_uS_u^*)A_\psi^u k_0^u. \tag{1.6}$$

En appliquant le lemme 1.10 on obtient :

$$\begin{aligned} A_\psi^u(I - S_uS_u^*)k_0^u &= A_\psi^u(k_0^u \otimes k_0^u)k_0^u \\ &= \left[(A_\psi^u k_0^u) \otimes k_0^u\right] k_0^u \\ &= \langle k_0^u, k_0^u\rangle A_\psi^u k_0^u \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} (I - S_uS_u^*)A_\psi^u k_0^u &= (k_0^u \otimes k_0^u)A_\psi^u k_0^u \\ &= \langle A_\psi^u k_0^u, k_0^u\rangle k_0^u. \end{aligned}$$

Donc l'équation 1.6 devient :

$$\langle k_0^u, k_0^u\rangle A_\psi^u k_0^u = \langle A_\psi^u k_0^u, k_0^u\rangle k_0^u.$$

D'òu $A_\psi^u k_0^u$ est un multiple de k_0^u, c'est-à-dire il existe un scalaire $c \in \mathbb{C}$ tel que :

$$A_\psi^u k_0^u = c k_0^u.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} 0 = (A^u_\psi - cI)k^u_0 &= P_u\left[(\psi - c)(1 - \overline{u(0)}u)\right] \\ &= P_u(\psi - c), \end{aligned}$$

(car $(\psi - c)(-\overline{u(0)}u) \in uH^2$, donc

$$P_u\left[(\psi - c)(-\overline{u(0)}u)\right] = 0.$$

Ce qui implique que

$$\psi - c \in uH^2$$

alors

$$A_{\psi - c} = 0,$$

et de plus on a :

$$A^u_\psi = cI.$$

Comme $A^u_\psi = -A^u_{\overline{\chi}}$ alors

$$A^u_{\overline{\chi}} = -cI.$$

En répétant le même raisonnement ci-dessus, on trouve que $\chi + \overline{c} \in uH^2$ donc

$$\overline{\chi} + c \in \overline{u}\overline{H^2}.$$

D'où

$$\varphi = \psi - c + \overline{\chi} + c \in uH^2 + \overline{u}\overline{H^2}.$$

$\square$

Les opérateurs de Toeplitz tronqués vérifient les propriétés suivantes.

Proposition. 1.11. *Soient $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{T})$ telles que A^u_φ, A^u_ψ sont deux opérateurs de Toeplitz tronqués. Alors*

1. *Pour tous nombres complexes a et b, $A^u_{a\varphi + b\psi} = aA^u_\varphi + bA^u_\psi$.*

2. $(A_\varphi^u)^* = A_{\overline{\varphi}}^u$.

1.5.1 Dual d'opérateur de Toeplitz tronqué

Dans cette section nous utilisons la densité de l'espace K_u^∞ dans K_u^2 pour définir des différents opérateurs.

Définition 1.10. *Soient $\varphi \in L^\infty$ et u une fonction intérieure. Le dual de l'opérateur de Toeplitz tronqués, noté $\widetilde{A_\varphi^u}$, est l'opérateur défini par densité sur l'espace $(K_u^2)^\perp$ par*

$$\widetilde{A_\varphi^u} = Q_u(\varphi f), f \in (K_u^2)^\perp$$

Proposition. 1.12. *Les assertions suivantes sont vraies.*

1. *Soit $\varphi \in L^2$, alors $\widetilde{A_\varphi^u}$ est borné sur $(K_u^2)^\perp$ si et seulement si $\varphi \in L^\infty$.*
2. *Si $\widetilde{A_\varphi^u}$ est borné, alors $\|\widetilde{A_\varphi^u}\| = \|\varphi\|$.*
3. *Pour $\varphi \in L^\infty$, $\widetilde{A_\varphi^u} = 0$ si et seulement si $\varphi = 0$.*

Démonstration. Puisque $\varphi \in L^2$, pour un polynôme $f \in H^2$, $uf \in uH^2 \subseteq (K_u^2)^\perp$ et $\widetilde{A_\varphi^u}(uf) \in (K_u^2)^\perp$. Il est clair que $Q_u = M_u P M_{\overline{u}} + (I - P)$, alors

$$\|\widetilde{A_\varphi^u}(uf)\|^2 = \|M_u P M_{\overline{u}}(\varphi uf)\|^2 + \|(I-P)(\varphi uf)\|^2.$$

Donc

$$\|T_\varphi f\|^2 = \|M_u P M_{\overline{u}}(\varphi uf)\|^2 \leq \|\widetilde{A_\varphi^u}(uf)\|^2.$$

Si $\widetilde{A_\varphi^u}$ est borné alors T_φ est aussi borné, alors $\varphi \in L^\infty$ et $\|\varphi\|_\infty = \|T_\varphi\| \leq \|\widetilde{A_\varphi^u}\|$. D'autre part, Si $\varphi \in L^\infty$ alors

$$\|\widetilde{A_\varphi^u} f\| = \|Q_u \varphi f\| \leq \|\varphi f\| \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|,$$

pour tout $f \in (K_u^2)^\perp$. Donc $\|\widetilde{A_\varphi^u}\| \leq \|\varphi\|_\infty$. $\square$

1.5.2 Opérateur de Hankel tronqué

Définition 1.11. *Soit $\varphi \in L^\infty$, u une fonction intérieure. L'opérateur de Hankel tronqués $\Gamma_\varphi^u : K_u^2 \to (K_u^2)^\perp$ est l'opérateur défini par densité sur l'espace K_u^2 par*

$$\Gamma_\varphi^u f = Q_u(\varphi f), f \in K_u^2.$$

L'opérateur $\widetilde{\Gamma_\varphi^u} : (K_u^2)^\perp \longrightarrow K_u^2$ est défini par densité sur l'espace $(K_u^2)^\perp$ par

$$\widetilde{\Gamma_\varphi^u} f = P_u(\varphi f), f \in (K_u^2)^\perp.$$

Proposition. 1.13. *1. $\Gamma_\varphi^u = 0$ si et seulement si $\varphi \in K_u^\infty$*

2. $\widetilde{\Gamma_\varphi^u} = (\Gamma_{\overline{\varphi}}^u)^*$.

Lemme 1.14. *[9] Si $\varphi \in L^\infty \setminus zH^\infty$ et $T_\varphi(uH^2) \subset uH^2$ pour une fonction intérieure non constante u, alors $\varphi \in \mathbb{C}$.*

Démonstration. Si $T_\varphi(uH^2) \subset uH^2$, alors

$$\varphi(uH^2) = P(\varphi(uH^2)) + (I - P)(\varphi(uH^2)) \subset uH^2 + \overline{zH^2}$$

où P désigne la projection orthogonale de L^2 sur H^2, d'où

$$\varphi(uH^2) = N_1 + N_2$$

où $N_1 \subset uH^2$ et $N_2 \subset \overline{zH^2}$. Donc

$$H^\infty \varphi(uH^2) = \varphi(uH^2) = H^\infty N_1 + H^\infty N_2.$$

Comme $H^\infty N_1 \subset uH^2$ et $T_\varphi(uH^2) \subset uH^2$, nous obtenons que $P(H^\infty N_2) \perp K_u^2$. Donc $H^\infty N_2 \perp K_u^2$ et $\overline{N_2} K_u^2 \perp H^\infty$. Donc $\overline{N_2} K_u^2 \subset \overline{zH^1} \cap H^1 = 0$. Puisque $K_u^2 \neq 0, N_2 = 0$ et ainsi $\varphi(uH^2) \subset uH^2$. Ceci montre $\varphi \in \mathbb{C}$. $\square$

Lemme 1.15. *[9] Soit $\varphi \in L^\infty$ et soit u une fonction intérieure non constante. Alors les propriétés suivantes sont valides.*

1. *Si $\varphi K_u^2 \subset K_u^2$, alors $\varphi \in \mathbb{C}$.*
2. *If $\varphi (K_u^2)^\perp \subset (K_u^2)^\perp$, alors $\varphi \in \mathbb{C}$.*

Démonstration. 1. Soit $\varphi \in H^\infty$. Si $\varphi K_u^2 \subset K_u^2$, alors $T_\varphi K_u^2 \subset K_u^2$ où T_φ est un opérateur de Toeplitz. Donc

$$T_\varphi(uH^2) \subset uH^2.$$

Par le lemme 1.14, nous avons $\overline{\varphi} \in \mathbb{C}$. Donc, il suffit de montrer que si $\varphi K_u^2 \subset K_u^2$, alors $\varphi \in H^\infty$. Si f est une fonction non nulle sur K_u^2, alors $f = gh$ où g est une fonction intérieure et h est une fonction extérieure. Puisque $gh \perp uH^2$, il s'ensuit que $gh \perp ugH^2$ et donc $h \perp uH^2$. Alors $h \in K_u^2$. Si $\varphi K_u^2 \subset K_u^2$, alors $\varphi h \in K_u^2$ et $\varphi h = k$ pour certain $k \in K_u^2$. Donc $\varphi = \frac{k}{h} \in H^\infty$ (voir [9]).

2. Si $\varphi(uH^2 + \overline{zH^2}) \subset uH^2 + \overline{zH^2}$, alors

$$\varphi(uH^2) \subset uH^2 + \overline{zH^2}$$

et

$$\varphi(\overline{zH^2}) \subset uH^2 + \overline{zH^2}.$$

La première inclusion signifie que $T_\varphi(uH^2) \subset uH^2$. De plus, la deuxième inclusion montre que $T_{\overline{\varphi}}(uH^2) \subset uH^2$. Puisque $\overline{\varphi}(zH^2) \subset \overline{uH^2} + zH^2$, multipliant les deux côtés par $u\overline{z}$, nous avons $\overline{\varphi}(uH^2) \subset uH^2 + \overline{zH^2}$. D'où $T_{\overline{\varphi}}(uH^2) \subset uH^2$. D'après le lemme 1.14 nous avons $\varphi \in \mathbb{C}$.

□

Lemme 1.16. *[9] Soit $\varphi \in L^\infty$ et soit u une fonction intérieure non constante. Alors les assertions suivantes sont valables.*

1. *$\Gamma_\varphi^u = 0$ si et seulement si $\varphi \in \mathbb{C}$.*
2. *$\widetilde{\Gamma_\varphi^u} = 0$ si et seulement si $\varphi \in \mathbb{C}$.*

Démonstration.

1. Pour $\varphi \in L^\infty$, $\Gamma_\varphi^u = 0$ si et seulement si $\varphi K_u^2 \subset K_u^2$ et par le lemme 1.15, $\Gamma_\varphi^u = 0$ si et seulement si $\varphi \in \mathbb{C}$.
2. Pour $\varphi \in L^\infty$, $\widetilde{\Gamma_\varphi^u} = 0$ si et seulement si $\varphi(K_u^2)^\perp \subset (K_u^2)^\perp$. Donc par lemme 1.15, $\widetilde{\Gamma_\varphi^u} = 0$ si et seulement si $\varphi \in \mathbb{C}$.

□

Nous considérons dans la proposition suivante le cas où l'opérateur de Hankel tronqué Γ_φ^u est de rang un.

Proposition. 1.17. *[9] Supposons que $\dim K_u^2 \geq 1$. Soit Γ_φ^u de rang fini un. Alors les propriétés suivantes sont correctes.*

1. *Il existe $F_0 \in K_u^2$ et $f_0 \in (K_u^2)^\perp$ telles que*
$$\Gamma_\varphi^u = f_0 \otimes F_0 \qquad \ker \Gamma_\varphi^u \oplus < F_0 >= K_u^2$$
où $< F_0 >:= \{aF_0, a \in \mathbb{C}\}$.
2. *Si $\dim K_u^2 \geq 2$, alors il existe $h \in \ker \Gamma_\varphi^u$ et $k \in K_u^2$ tel que*
$$\varphi = \frac{k}{h} = g_1 g_2 l$$
où g_1 et g_2 sont deux fonctions intérieures et l est une fonction extérieure dans H^∞.
3. *Il existe $s \in K_u^2$ tel que $f_0 = \varphi F_0 - s$.*
4. *Si $\varphi \in H^\infty$, alors $f_0 \in uH^2$.*

5. Soit $u(0) = 0$*. Si* $\varphi \in \overline{zH^\infty}$*, alors* $f_0 \in \overline{zH^\infty}$*.*

6. $(\Gamma_\varphi^u)^* \Gamma_\varphi^u = \langle f_0, f_0 \rangle (F_0 \otimes F_0)$*.*

Démonstration. Les propriétés (1), (3) et (4) sont clairs par définition.

2. Soit $\varphi h \in K_u^2$ pour une fonction non nulle $h \in \ker \Gamma_\varphi^u$, alors $\varphi = \frac{k}{h}$ pour une fonction $k \in K_u^2$. Soit $h = g_1 k_1$ et $k = g_2 k_2$ où g_1 et g_2 sont des fonctions intérieures et k_1 et k_2 sont extérieurs. Alors $\varphi = \overline{g_1} g_2 l$ où g_1 et g_2 sont des fonctions intérieures et $l = \frac{k_2}{k_1}$ est une fonction extérieur sur H^∞.

5. Soit $u(0) = 0$ et $\varphi \in \overline{zH^\infty}$. Puisque $\varphi \in L^\infty$ et $1 \in K_u^2$, il s'ensuit que $\varphi 1 = cf_0 + t$ pour $c \in \mathbb{C}$, $f_0 \in (K_u^2)^\perp$ et $t \in K_u^2$, $\Gamma_\varphi^u K_u^2 =< f_0 >$. Donc

$$\varphi - cf_0 = t \in K_u^2 \cap (K_u^2)^\perp = \emptyset.$$

5. Si $\Gamma_\varphi^u = f_0 \otimes F_0$, alors $(\Gamma_\varphi^u)^* = F_0 \otimes f_0$ et ainsi

$$\ker \Gamma_\varphi^u \oplus < F_0 >= K_u^2 \qquad \textit{and} \qquad \varphi K_u^2 \subseteq K_u^2 \oplus < f_0 > .$$

Donc $(\Gamma_\varphi^u)^* \Gamma_\varphi^u = \langle f_0, f_0 \rangle (F_0 \otimes F_0)$.

□

Chapitre 2

Dilatation d'opérateur de Toeplitz

Dans ce chapitre, nous définissons un opérateur , noté $S_{\alpha,\beta}$, appelé opérateur intégrale singulier ou dilatation d'opérateur de Toeplitz. L'une des observations clés de Nakazi et Yamamoto [13] est que $S_{\alpha,\beta}$ a un lien avec les opérateurs de Toeplitz et Hankel. Nous allons nous intéressés à l'étude de quelques propriétés des ces opérateurs sur l'espace L^2.

2.1 Caractérisation

Définition 2.1. *Soient $\alpha, \beta \in L^\infty$, un opérateur intégral singulier de Cauchy $S_{\alpha,\beta} : L^2 \longrightarrow L^2$ est défini par*

$$S_{\alpha,\beta}(f) = \alpha Pf + \beta Qf, f \in L^2.$$

Où P et $Q = I - P$ désignent les projections orthogonales de L^2 sur H^2 et $(H^2)^\perp = L^2 \ominus H^2$ respectivement.

Alors $S_{1,1} = I$, $S_{1,-1} = S_0$, $S_{1,0} = P$ and $S_{0,1} = Q$.

Remarque 2.1. *Sachant que $\|P\| = \|Q\| = 1$, alors pour tout fonction $f \in L^2$, nous avons*

$$\| S_{\alpha,\beta}(f) \| \leq \| \alpha Pf \| + \| \beta Qf \| \leq \| \alpha \|_\infty \| Pf \| + \| \beta \|_\infty \| Qf \|$$
$$\leq \| (\| \alpha \|_\infty + \| \beta \|_\infty) \| f \|,$$

Par conséquent, l'opérateur $S_{\alpha,\beta}$ est un opérateur borné sur L^2.

Récemment Nakazi et Yamamoto dans (nakazi2013) montrent que l'opérateur $S_{\alpha,\beta}$ a une connexion étroite avec les opérateurs Toeplitz et Hankel par une représentation matricielle dans $L^2 = H^2 \oplus (H^2)^\perp$.

Lemme 2.1. *[13] Soit $\alpha, \beta \in L^\infty$. Alors les opérateurs $S_{\alpha,\beta}$ et $S^*_{\alpha,\beta}$ ont les représentations matricielles suivantes*

$$S_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} T_\alpha & \widetilde{H_\beta} \\ H_\alpha & \widetilde{T_\beta} \end{pmatrix}, S^*_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} T_{\bar{\alpha}} & \widetilde{H_{\bar{\alpha}}} \\ H_{\bar{\beta}} & \widetilde{T_{\bar{\beta}}} \end{pmatrix}$$

dans

$$L^2 = H^2 \oplus \left(H^2\right)^\perp.$$

Démonstration. Toute fonction f de L^2 peut être exprimée de manière unique par $f = g + h$ où $g \in H^2$, $h \in (H^2)^\perp$. Alors

$$\begin{aligned} S_{\alpha,\beta} f &= \alpha g + \beta h \\ &= (P\alpha g + P\beta h) + (Q\alpha g + Q\beta h) \\ &= (T_\alpha g + \widetilde{H_\beta} h) + (H_\alpha g + \widetilde{T_\beta} h) \\ &= \begin{pmatrix} T_\alpha & \widetilde{H_\beta} \\ H_\alpha & \widetilde{T_\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice de $S^*_{\alpha,\beta}$ découle immédiatement de la matrice de $S_{\alpha,\beta}$. □

Pour cette raison, l'opérateur $S_{\alpha,\beta}$ est appelé dilatation d'opérateur de Toeplitz T_α.

Soit $B(L^2)$ l'algèbre de tous les opérateurs linéaires bornés sur L^2. Soit S l'ensemble de tous les opérateurs intégraux singuliers

$$S = \{S_{\alpha,\beta} \in B(L^2), \alpha, \beta \in L^\infty\}.$$

Notez que $S_{\alpha,\alpha} = M_\alpha$ et $S_{\alpha,\beta} = M_\beta + S_{\alpha-\beta,0}$.

Soit $e_n = z^n$ et $e_{-n} = z^{-n} = \overline{z}^n$ pour $n \geq 0$ ou $z = e^{i\theta}$. pour $f \in L^2$, la série de Fourier de f est

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\theta}.$$

Ainsi f_{-1} désigne le coefficient de Fourier correspondant au terme e_{-1}.

Pour deux opérateurs $C, D \in B(L^2)$, soit $[C, D] = CD - DC$ le commutateur de C et D.

L'ensemble des opérateurs de multiplication sur L^2 est l'ensemble de tous les opérateurs de L^2 qui commutent avec l'opérateur M_z

$$\begin{aligned} M &= \{M_\alpha \in B(L^2), \alpha \in L^\infty\} \\ &= \{A \in B(L^2), M_z A = A M_z\}. \end{aligned}$$

Dans la proposition suivante, C.Gu dans [6] utilise une approche plus directe en caractérisant la classe d'opérateurs $S_{\alpha,\beta}$ comme les solutions d'une équation d'opérateurs. Cette approche donne un aperçu de la façon dont cette classe d'opérateurs est liée aux opérateurs de multiplication.

Proposition. 2.2. *Soit $A \in B(L^2)$. Alors $A \in S$ si et seulement si il existe une $\psi \in L^\infty$ tel que*

$$[A, M_z] = \psi \otimes e_{-1}. \tag{2.1}$$

Dans ce cas $A = S_{\psi+\beta,\beta}$ pour certains $\beta \in L^\infty$.

Démonstration.

Soit $A = S_{\alpha,\beta}$ pour deux fonction $\alpha, \beta \in L^\infty$. Soit $f \in L^\infty$, $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^n$, alors nous avons

$$\begin{aligned} S_{\alpha,\beta} M_z(f) &= \alpha P[zf] + \beta Q[zf] \\ &= \alpha[zPf + f_{-1}] + \beta[zQf - f_{-1}] \\ &= z\alpha Pf + z\beta Qf + (\alpha - \beta) f_{-1} \\ &= M_z S_{\alpha,\beta}(f) + [(\alpha - \beta) \otimes e_{-1}](f). \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons démontré l'égalité (2.1) avec $\psi = (\alpha - \beta) \in L^\infty$.

Maintenant supposons que $A \in B(L^2)$ et l'égalité (2.1) soit atteinte. Alors

$$S_{\psi,0} M_z - M_z S_{\psi,0} = \psi \otimes e_{-1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} (A - S_{\psi,0}) M_z - M_z (A - S_{\psi,0}) &= (AM_z - AM_z) - (S_{\psi,0} M_z - S_{\psi,0} M_z) \\ &= \psi \otimes e_{-1} - \psi \otimes e_{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$(A - S_{\psi,0}) M_z = M_z (A - S_{\psi,0}).$$

les deux opérateurs $A - S_{\psi,0}$ et M_z commutent. Alors l'opérateur $A - S_{\psi,0}$ est un opérateur de multiplication. De plus, $A - S_{\psi,0} = M_\beta = S_{\beta,\beta}$ pour certaine $\beta \in L^\infty$. Alors

$$A = S_{\psi,0} + S_{\beta,\beta} = S_{\psi+\beta,\beta}.$$

$\square$

L'adjoint $S^*_{\alpha,\beta}$ n'est pas toujours dans S. Mais, la proposition suivante nous donne les conditions nécessaires et suffisantes pour lesquelles l'opérateur $S^*_{\alpha,\beta}$ appartient à S.

Proposition. 2.3. *[6] L'opérateur $S^*_{\alpha,\beta} \in S$ si et seulement si $(\alpha - \beta) = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{C}$. Dans ce cas*

$$S^*_{\alpha,\beta} = S_{\overline{\alpha},\overline{\beta}}.$$

Démonstration.

En utilisant la proposition (2.2), $S^*_{\alpha,\beta} \in S$ si et seulement si

$$S^*_{\alpha,\beta} M_z - M_z S^*_{\alpha,\beta} = \psi \otimes e_{-1}$$

pour une certaine fonction $\psi \in L^\infty$. Mais $M_z^* M_z = M_z M_z^* = I$ et

$$\begin{aligned} S^*_{\alpha,\beta} M_z - M_z S^*_{\alpha,\beta} &= M_z (M_z^* S^*_{\alpha,\beta} - S^*_{\alpha,\beta} M_z^*) M_z \\ &= M_z [S_{\alpha,\beta}, M_z]^* M_z \\ &= M_z [e_1 \otimes (\alpha - \beta)] M_z \\ &= e_0 \otimes \overline{z}(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Donc

$$\psi \otimes e_{-1} = e_0 \otimes \overline{z}(\alpha - \beta)$$

et $(\alpha - \beta)\overline{z} = \lambda e_{-1}$ et $\psi = \overline{\lambda} e_0$ avec λ est un nombre complexe. Dans ce cas

$$S^*_{\alpha,\beta} = (M_z + S_{\alpha-\beta,0})^* = M_{\overline{\beta}} + S_{\overline{\lambda},0} = S_{\overline{\alpha},\overline{\beta}}.$$

□

Il est bien connu que T_φ est auto-adjoint si et seulement si φ est une fonction réelle. La même chose pour l'opérateur M_φ, M_φ est auto-adjoint si et seulement si φ est une fonction réelle. Dans le corollaire suivant, C.Gu dans [6] a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'opérateur $S_{\alpha,\beta}$ soit auto-adjoint.

Corollaire 2.4. *$S_{\alpha,\beta}$ est auto-adjoint si et seulement si α et β sont des fonctions réelles et $(\alpha-\beta)$ est une constante réelle.*

Démonstration.

If $S^*_{\alpha,\beta}=S_{\alpha,\beta}\in S$, d'après la proposition 2.3, $(\alpha-\beta)$ est une constante, de plus

$$S^*_{\alpha,\beta}=S_{\overline{\alpha},\overline{\beta}}=S_{\alpha,\beta}$$

ce qui implique que $\alpha=\overline{\alpha}$ et $\beta=\overline{\beta}$. $\square$

Le lemme suivant dérive des équations d'opérateur pour les produits d'opérateurs $S_{\alpha,\beta}$ ou $S^*_{\alpha,\beta}$.

Lemme 2.5. *[6] Soient $S_{\alpha_1,\beta_1}, S_{\alpha_2,\beta_2}\in S$. Alors*

1. $[S_{\alpha_1,\beta_1}S_{\alpha_2,\beta_2},M_z]=(\alpha_1-\beta_1)\otimes S^*_{\alpha_2,\beta_2}e_{-1}+S_{\alpha_1,\beta_1}(\alpha_2-\beta_2)\otimes e_{-1}$
2. $[S_{\alpha_1,\beta_1}S^*_{\alpha_2,\beta_2},M_z]=\alpha_1\otimes\overline{z}\alpha_2-\beta_1\otimes\overline{z}\beta_2$
3. $[S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1},M_z]=e_0\otimes S^*_{\alpha_1,\beta_1}\overline{z}(\alpha_2-\beta_2)+S^*_{\alpha_2,\beta_2}(\alpha_1-\beta_1)\otimes e_{-1}$.

Démonstration.

Par des calculs simples :

$$\begin{aligned}[S_{\alpha_1,\beta_1}S_{\alpha_2,\beta_2},M_z] &= [S_{\alpha_1,\beta_1},M_z]S_{\alpha_2,\beta_2}+S_{\alpha_1,\beta_1}[S_{\alpha_2,\beta_2},M_z]\\ &= [(\alpha_1-\beta_1)\otimes e_{-1}]S_{\alpha_2,\beta_2}+S_{\alpha_1,\beta_1}[(\alpha_2-\beta_2)\otimes e_{-1}]\\ &= (\alpha_1-\beta_1)\otimes S^*_{\alpha_2,\beta_2}e_{-1}+S_{\alpha_1,\beta_1}(\alpha_2-\beta_2)\otimes e_{-1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[S_{\alpha_1,\beta_1}S^*_{\alpha_2,\beta_2}, M_z] &= [S_{\alpha_1,\beta_1}, M_z]S^*_{\alpha_2,\beta_2} + S_{\alpha_1,\beta_1}[S^*_{\alpha_2,\beta_2}, M_z] \\
&= [S_{\alpha_1,\beta_1}, M_z]S^*_{\alpha_2,\beta_2} + S_{\alpha_1,\beta_1}M_z[S_{\alpha_2,\beta_2}, M_z]^*M_z \\
&= (\alpha_1 - \beta_1) \otimes \overline{z}\beta_2 + \alpha_1 \otimes \overline{z}(\alpha_2 - \beta_2) \\
&= \alpha_1 \otimes \overline{z}\alpha_2 - \beta_1 \otimes \overline{z}\beta_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1}, M_z] &= [S^*_{\alpha_2,\beta_2}, M_z]S_{\alpha_1,\beta_1} + S^*_{\alpha_2,\beta_2}[S_{\alpha_1,\beta_1}, M_z] \\
&= M_z[S_{\alpha_2,\beta_2}, M_z]^*M_zS_{\alpha_1,\beta_1} + S^*_{\alpha_2,\beta_2}[S_{\alpha_1,\beta_1}, M_z] \\
&= e_0 \otimes S^*_{\alpha_1,\beta_1}\overline{z}(\alpha_2 - \beta_2) + S^*_{\alpha_2,\beta_2}(\alpha_1 - \beta_1) \otimes e_{-1}.
\end{aligned}$$

□

Théorème 2.1. *[6] Supposons que l'une des α et β n'est pas une fonction constante et $\alpha - \beta \neq 0$. Alors $S_{\alpha,\beta}$ est un opérateur normal si et seulement si $\alpha = \lambda\beta + \delta$ pour certains constants λ et δ avec $|\lambda| = 1$ et $(\lambda - 1)|\beta^2| + \delta\bar{\beta} - \bar{\delta}\lambda\beta$ est une constante.*

Démonstration. Si $S_{\alpha,\beta}$ est normal, alors

$$[S_{\alpha,\beta}S^*_{\alpha,\beta}, M_z] = [S^*_{\alpha,\beta}S_{\alpha,\beta}, M_z].$$

Par lemme 2.5, nous avons

$$\alpha \otimes \bar{z}\alpha - \beta \otimes \bar{z}\beta = e_0 \otimes S^*_{\alpha,\beta}\bar{z}(\alpha - \beta) + S^*_{\alpha,\beta}(\alpha - \beta) \otimes e_{-1}. \tag{2.2}$$

Nous divisons la preuve en trois cas.

1. Les deux côtés de l'équation 2.2 sont des opérateurs de rang 0. Alors

$$\alpha = \lambda\beta$$

pour une constante $\lambda \neq 1$. D'après l'équation 2.2, nous avons

$$(|\lambda|^2 - 1)\beta \otimes \bar{z}\beta = 0,$$

donc $|\lambda|^2 = 1$. En outre

$$e_0 \otimes S^*_{\alpha,\beta}\bar{z}(\alpha - \beta) + S^*_{\alpha,\beta}(\alpha - \beta) \otimes e_{-1} = 0$$

implique que

$$S^*_{\alpha,\beta}(\alpha - \beta) = \xi$$

et

$$S^*_{\alpha,\beta}\bar{z}(\alpha - \beta) = -\bar{\xi}e_{-1}.$$

Par conséquent

$$P(\bar{\alpha}(\lambda - 1)\beta) + Q(\bar{\beta}(\lambda - 1)\beta) = \xi$$

$$P(\bar{\alpha}\bar{z}(\lambda - 1)\beta) + Q(\bar{\beta}\bar{z}(\lambda - 1)\beta) = -\bar{\xi}\bar{z}.$$

Donc $\bar{\lambda}(\lambda - 1)|\beta|^2 \in \overline{H^\infty}, (\lambda - 1)|\beta|^2 \in H^\infty$ et $|\beta|^2 = \sigma$ pour une constante σ. Dans ce cas

$$S_{\alpha,\beta}S^*_{\alpha,\beta} = S^*_{\alpha,\beta}S_{\alpha,\beta} = S_{\alpha\bar{\alpha},\beta\bar{\beta}} = \sigma I$$

c'est à dire, $S_{\alpha,\beta}$ est un multiple d'un opérateur unitaire.

2. Les deux côtés de l'équation 2.2 sont des opérateurs de rang 1. Alors

$$\alpha = \lambda\beta, S^*_{\alpha,\beta}(\alpha - \beta) = \xi$$

pour certaines constantes λ et ξ. Remplaçons ces relations dans l'équation 2.2, nous trouvons

$$(|\lambda|^2 - 1)\beta \otimes \bar{z}\beta = e_0 \otimes (S^*_{\alpha,\beta}\bar{z}(\alpha - \beta) + \bar{\xi}e_{-1}).$$

Par conséquent, β est une constante et $\alpha = \lambda\beta$ est également une constante. Ceci est impossible par l'hypothèse.

3. Les deux côtés de l'équation 2.2 sont des opérateurs de rang 2. De l'équation 2.2, e_0 est une combinaison linéaire de α et β. Alors

$$\alpha = \lambda\beta + \delta$$

pour deux constantes λ et $\delta \neq 0$. Nous considérons deux cas

(a) $\lambda = 1$ et $\alpha = \beta + \delta$, alors selon l'équation 2.2, nous avons

$$(\beta + \delta) \otimes \bar{z}\delta + \delta \otimes \bar{z}\beta = e_0 \otimes S^*_{\alpha,\beta}\bar{z}\delta + S^*_{\alpha,\beta}\delta \otimes e_{-1}.$$

Donc

$$e_0 \otimes (S^*_{\alpha,\beta}\bar{z}\delta - \bar{z}\bar{\delta}\beta) + (S^*_{\alpha,\beta}\delta - \bar{\delta}(\beta + \delta)) \otimes e_{-1} = 0,$$

$$P(\overline{\alpha z}\delta - \bar{z}\bar{\delta}\beta) + P(\bar{\beta}\bar{z}\delta - \bar{z}\bar{\delta}\beta) = \xi,$$

$$P(\overline{\alpha}\delta - \bar{\delta}(\beta + \delta)) + P(\overline{\beta}\delta - \bar{\delta}(\beta + \delta)) = -\xi.$$

Par conséquent $\overline{\beta}\delta - \bar{\delta}\beta \in \overline{H^\infty}, \overline{\beta}\delta - \bar{\delta}\beta \in H^\infty$ et $\overline{\beta}\delta - \bar{\delta}\beta$ est une constante. Dans ce cas

$$S_{\alpha,\beta} = M_\beta + S_{\delta,0}$$

est normal.

(b) $\lambda \neq 1$. Soient

$$\sigma = \frac{\delta}{\lambda - 1}, \alpha_1 = \alpha + \sigma, \beta_1 = \beta + \sigma.$$

Alors

$$\begin{aligned} \lambda\beta_1 &= \lambda\beta + \lambda\sigma = \alpha - \delta + \lambda\sigma \\ &= \alpha_1 - \sigma - \delta + \lambda\sigma = \alpha_1. \end{aligned}$$

Puisque $S_{\alpha_1,\beta_1} = S_{\alpha,\beta} + \sigma I$, $S_{\alpha,\beta}$ est normal si et seulement si S_{α_1,β_1} est normal, cela se réduit au cas (1) et S_{α_1,β_1} est un multiple d'un opérateur unitaire. Donc $|\lambda| = 1$ et

$$|\beta_1|^2 = |\beta + \sigma|^2 = \frac{1}{(\lambda - 1)}\left[(\lambda - 1)|\beta|^2 + \delta\bar{\beta} - \bar{\delta}\lambda\beta\right] + |\sigma|^2$$

est un constant.

□

2.2 Norme d'un opérateur $S_{\alpha,\beta}$

Si $\alpha, \beta \in L^\infty$, alors la norme de l'opérateur $S_{\alpha,\beta}$ est définie par

$$\|S_{\alpha,\beta}\| = \sup_{f \in L^2, \|f\|_2 = 1} \|S_{\alpha,\beta} f\|_2.$$

Nous avons l'inégalité suivante

$$\max\{\|\alpha\|_\infty, \|\beta\|_\infty\} \leq \|S_{\alpha,\beta}\| \leq \left\|\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}\right\|_\infty. \tag{2.3}$$

En effet, pour tout $f \in L^2$ nous avons

$$\begin{aligned} \|S_{\alpha,\beta}\| &= \sup_{f \in L^2, \|f\|_2 = 1} \|S_{\alpha,\beta} f\| \\ &\geq \sup_{f \in H^2, \|f\| = 1} \|\alpha f\| \\ &\geq \sup_{f \in H^2, \|f\| = 1} \|P(\alpha f)\| \\ &= \sup_{f \in H^2, \|f\| = 1} \|T_\alpha f\| = \|T_\alpha\| \end{aligned}$$

Mais nous savons que $\|T_\alpha\| = \|\alpha\|_\infty$. Par conséquent, $\|S_{\alpha,\beta}\| \geq \|\alpha\|_\infty$. De la même manière, en utilisant le fait que $\|\tilde{T}_\beta\| = \|\beta\|_\infty$, nous pouvons prouver que $\|S_{\alpha,\beta}\| \geq \|\beta\|_\infty$. Donc, $\|S_{\alpha,\beta}\| \geq \max\{\|\alpha\|_\infty, \|\beta\|_\infty\}$. D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}\|S_{\alpha,\beta}f\| &\leq \|\alpha\|_\infty\|Pf\| + \|\alpha\|_\infty\|Qf\| \\ &\leq (\|\alpha\|_\infty^2 + \|\beta\|_\infty^2)^{\frac{1}{2}}(\|Pf\| + \|Qf\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{\|\alpha\|_\infty^2 + \|\beta\|_\infty^2}\|f\|.\end{aligned}$$

D'après le papier [11] de Nakazi et Yamamoto, Nous devons mentionner que

$$\max\{\|\alpha\|_\infty, \|\beta\|_\infty\} = \left\| \frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{2} + \sqrt{0 + \left(\frac{|\alpha|^2-|\beta|^2}{2}\right)^2} \right\|_\infty^{\frac{1}{2}},$$

et

$$\left\|\sqrt{|\alpha|^2+|\beta|^2}\right\|_\infty = \left\| \frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{2} + \sqrt{|\alpha\bar{\beta} - 0|^2 + \left(\frac{|\alpha|^2-|\beta|^2}{2}\right)^2} \right\|_\infty^{\frac{1}{2}}.$$

Alors

$$\|S_{\alpha,\beta}\|^2 \leq \left\| \frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{2} + \sqrt{|\alpha\bar{\beta} - k|^2 + \left(\frac{|\alpha|^2-|\beta|^2}{2}\right)^2} \right\|_\infty,$$

pour tout $k \in H^\infty$. Le théorème suivant donne la formule pour le calcul de la norme de l'opérateur $S_{\alpha,\beta}$.

Théorème 2.2. *[11] Soient $\alpha, \beta \in L^\infty$. Alors*

$$\|S_{\alpha,\beta}\|^2 = \inf_{k\in H^\infty} \left\| \frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{2} + \sqrt{|\alpha\bar{\beta} - k|^2 + \left(\frac{|\alpha|^2-|\beta|^2}{2}\right)^2} \right\|_\infty$$

Démonstration. Pour toute $k \in H^\infty$, nous définissons la quantité M_k suivante

$$M_k = \left\| \frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{2} + \sqrt{|\alpha\bar{\beta} - k|^2 + \left(\frac{|\alpha|^2-|\beta|^2}{2}\right)^2} \right\|_\infty.$$

Nous prouvons que $\|S_{\alpha,\beta}\|^2 \geq \inf\{M_k, k \in H^\infty\}$. Soit $\gamma = \|S_{\alpha,\beta}\|$. Then

$$\|S_{\alpha,\beta}\|_2 \leq \gamma\|f\|_2, (f \in L^2).$$

Soient $W_1 = \gamma^2 - |\alpha|^2, W_2 = \gamma^2 - |\beta|^2$ and $W_3 = \gamma^2 - \alpha\bar{\beta}$. Alors

$$\langle W_1 f_1, f_1\rangle + \langle W_2 f_2, f_2\rangle + 2Re\langle W_3 f_1, f_2\rangle \geq 0, (f_1 \in H^2, f_2 \in (H^2)^\perp).$$

Selon le théorème Cotlar-Sadosky lifting [(1) yamamoto 1], $W_1 \geq 0, W_2 \geq 0$ et il existe $g \in H^\infty$ tel que

$$|W_3 - g|^2 \leq W_1 W_2.$$

Par conséquent, $\gamma \geq \max\{|\alpha|, |\beta|\}$ et

$$|\gamma^2 - \alpha\bar{\beta} - g|^2 \leq (\gamma^2 - |\alpha|^2)(\gamma^2 - |\beta|^2).$$

Soit $k_0 = \gamma^2 - g$. Alors $k_0 \in H^\infty$ et $|\gamma^2 - \alpha\bar{\beta} - g| = |\alpha\bar{\beta} - k_0|$. Donc,

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\gamma^2 - |\alpha|^2)(\gamma^2 - |\beta|^2) - |\alpha\bar{\beta} - k_0|^2 \\ &= \gamma^4 - (|\alpha|^2 + |\beta|^2)\gamma^2 + |\alpha\beta|^2 - |\alpha\bar{\beta} - k_0|^2. \end{aligned}$$

Supposons que

$$\gamma^2 \leq \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2} - \sqrt{|\alpha\bar{\beta} - k_0|^2 + \left(\frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{2}\right)^2}$$

dans un sous ensemble mesurable E de $\mathbb{T}$. Puisque

$$\gamma^2 \geq \max\{|\alpha|^2, |\beta|^2\} = \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2} + \left|\frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{2}\right|$$

sur $\mathbb{T}$, nous avons

$$\left|\frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{2}\right| + \sqrt{|\alpha\bar{\beta} - k_0|^2 + \left(\frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{2}\right)^2} \leq 0$$

sur E. Ceci implique que $|\alpha| - |\beta| = |\alpha\bar{\beta} - k_0| = 0$ sur E. Alors,

$$\gamma^2 \geq \max\{|\alpha|^2, |\beta|^2\} = \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2} + \sqrt{|\alpha\bar{\beta} - k_0|^2 + \left(\frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{2}\right)^2}$$

sur E. Alors,

$$\gamma^2 \geq \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2} + \sqrt{|\alpha\bar{\beta} - k_0|^2 + \left(\frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{2}\right)^2}$$

sur $\mathbb{T}$. Donc $M_{K_0} \leq \gamma^2$. Puisque $\gamma = \|S_{\alpha,\beta}\|$, nous avons

$$\inf_{k \in H^\infty} M_k \leq \|S_{\alpha,\beta}\|^2.$$

Nous prouvons que $\|S_{\alpha,\beta}\|^2 \leq \inf\{M_k, k \in H^\infty\}$. Pour tout $k \in H^\infty$, nous avons

$$\langle kf_1, f_2\rangle = 0, (f_1 \in H^2, f_2 \in (H^2)^\perp).$$

Puisque

$$\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2} + \sqrt{|\alpha\bar{\beta} - k_0|^2 + \left(\frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{2}\right)^2} \leq M_k,$$

nous avons

$$(M_k - |\alpha|^2)(M_k - |\beta|^2) \geq \left(\sqrt{|\alpha\bar{\beta} - k|^2 + \left(\frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{2}\right)^2} - \frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{2}\right)$$

$$\times \left(\sqrt{|\alpha\bar{\beta} - k|^2 + \left(\frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{2}\right)^2} + \frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{2}\right) = |\alpha\bar{\beta} - k|^2.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
M_k\|f_1 + f_2\|_2^2 - \|f_1 + f_2\|_2^2 \\
&= \left\|\sqrt{M_k - |\alpha|^2} f_1\right\|_2^2 + \left\|\sqrt{M_k - |\beta|^2} f_2\right\|_2^2 - 2Re\langle\alpha\bar{\beta} f_1, f_2\rangle \\
&\geq 2\left\|\sqrt{M_k - |\alpha|^2} f_1\right\|_2 \left\|\sqrt{M_k - |\beta|^2} f_2\right\|_2 - 2Re\langle(\alpha\bar{\beta} - k) f \\
&\geq \int_{\mathbb{T}} \left(\sqrt{M_k - |\alpha|^2}\sqrt{M_k - |\beta|^2} - |\alpha\bar{\beta} - k|\right) |f_1 f_2| dm \geq 0
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $k \in H^\infty$,

$$\|S_{\alpha,\beta} f\|_2^2 \leq M_k \|f\|_2^2, (f \in L^2).$$

Donc,

$$M_{k_0} \leq \|S_{\alpha,\beta}\|^2 \leq \inf_{k \in H^\infty} M_k.$$

La borne inférieure est atteint par $k = k_0$. Ceci complète la preuve. □

Remarque 2.2. *[11] Soient $\alpha, \beta \in L^\infty, \varphi = \alpha\bar{\beta}$ et $\psi = \frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{2}$. Alors*

$$\|S_{\alpha,\beta}\|^2 = \inf_{k \in H^\infty} \left\| \sqrt{|\varphi|^2 + \psi^2} + \sqrt{|\varphi - k|^2 + \psi^2} \right\|_\infty .$$

Si $|\alpha| = |\beta|$, alors

$$\|S_{\alpha,\beta}\|^2 = \inf_{k \in H^\infty} \| |\varphi| + |\varphi - k| \|_\infty .$$

Corollaire 2.6. *Si $|\alpha|$ et $|\beta|$ sont des fonctions constantes, alors*

$$\|S_{\alpha,\beta}\|^2 = \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2} + \sqrt{\|H_{\alpha\bar{\beta}}\|^2 + \left(\frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{2} \right)^2}.$$

Démonstration. Il résulte du théorème 2.2 que

$$\begin{aligned} \|S_{\alpha,\beta}\|^2 &= \inf_{k \in H^\infty} \left\| \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2} + \sqrt{|\alpha\bar{\beta} - k|^2 + \left(\frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{2} \right)^2} \right\|_\infty \\ &= \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2} + \sqrt{\left(\inf_{k \in H^\infty} \left\| \alpha\bar{\beta} - k \right\|_\infty \right)^2 + \left(\frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{2} \right)^2}. \end{aligned}$$

Par le théorème de Nehari [14], cela prouve le corollaire. □

Corollaire 2.7. *Soit $\alpha, \beta \in L^\infty$. Alors*

$$\|S_{\alpha,\beta}\|^2 \leq \max\{\|\alpha\|_\infty^2, \|\beta\|_\infty^2\} + \|H_{\alpha\bar{\beta}}\|.$$

Démonstration. Il découle du théorème 2.2 que

$$\begin{aligned}
\|S_{\alpha,\beta}\|^2 &\leq \inf_{k\in H^\infty}\left\|\frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{2}+\sqrt{|\alpha\bar{\beta}-k|^2+\left(\frac{|\alpha|^2-|\beta|^2}{2}\right)^2}\right\|_\infty \\
&\leq \inf_{k\in H^\infty}\left\|\frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{2}+|\alpha\bar{\beta}-k|+\left|\frac{|\alpha|^2-|\beta|^2}{2}\right|\right\|_\infty \\
&= \inf_{k\in H^\infty}\left\|\max\{|\alpha|^2,|\beta|^2\}+|\alpha\bar{\beta}-k|\right\|_\infty \\
&\leq \max\{\|\alpha\|_\infty^2,\|\beta\|_\infty^2\}+\inf_{k\in H^\infty}\left\|\alpha\bar{\beta}-k\right\|_\infty .
\end{aligned}$$

Par le théorème de Nehari [14], cela prouve le corollaire. □

2.3 Compacité de l'opérateur $S_{\alpha,\beta}$

Dans la section présente, nous avons montré que les opérateurs compacts ne peuvent même pas se rapprocher de $S_{\alpha,\beta}$.

Théorème 2.3. *[20] Soient $\alpha,\beta\in L^\infty$ et K un opérateur compact sur L^2. Alors*

$$\|S_{\alpha,\beta}-K\|\geq\frac{1}{\sqrt{2}}\|S_{\alpha,\beta}\|$$

Démonstration. Soit n un entier non négatif. Puisque l'opérateur $S_{z^n,\bar{z}^n}$ envoie z^k à z^{k+n} et z^{k+1} à z^{k+n+1} pour $k\geq 0$, il s'ensuit que $S_{z^n,\bar{z}^n}$ est une isométrie de sorte que $\|S_{z^n,\bar{z}^n}\|=\|S^*_{z^n,\bar{z}^n}\|=1$. Alors

$$\begin{aligned}
\|S_{\alpha,\beta}-K\| &= \|S^*_{\alpha,\beta}-K^*\| \\
&\geq \|S^*_{z^n,\bar{z}^n}(S^*_{\alpha,\beta}-K^*)\| \\
&= \|(S_{\alpha,\beta}S_{z^n,\bar{z}^n})^*-S^*_{z^n,\bar{z}^n}K^*\| \\
&= \|S^*_{\alpha z^n,\beta\bar{z}^n}-S^*_{z^n,\bar{z}^n}K^*\| \\
&\geq \|S^*_{\alpha z^n,\beta\bar{z}^n}\|-\|S^*_{z^n,\bar{z}^n}K^*\| \\
&= \|S_{\alpha z^n,\beta\bar{z}^n}\|-\|S^*_{z^n,\bar{z}^n}K^*\|.
\end{aligned}$$

Maintenant par l'équation 2.3,

$$\|S_{\alpha z^n,\beta \bar{z}^n}\| \geq \max\{\|\alpha\|_\infty, \|\beta\|_\infty\} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\|\alpha\|_\infty^2 + \|\beta\|_\infty^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\|S_{\alpha,\beta}\|.$$

Pour tout $f \in L^2$, $S^*_{z^n,\bar{z}^n}f = P(\bar{z}^n f) + Q(z^n f)$ passe à 0 quand $n \to \infty$. Mais K étant compact, K^* l'est aussi. Donc, $\|S^*_{z^n,\bar{z}^n}K^*\| \to 0$. $\square$

Chapitre 3

Dilatation des opérateurs de Toeplitz tronqués

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les propriétés des opérateurs intégraux singuliers– ceux qui pouvaient être vus comme dilatation d'opérateurs de toeplitz – étaient étroitement liées au opérateurs de multiplication. C'est-à-dire, un opérateur intégral singulier -ou dilatation d'opérateur de Toeplitz- pouvait être caractérisé par l'équation d'opérateurs suivante

$$[S_{\alpha,\beta}, M_z] = (\alpha - \beta) \otimes e_{-1}.$$

Selon la décomposition orthogonale $L^2 = H^2 \oplus (H^2)^{\perp}$, il a également une représentation sous la forme

$$S_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} T_\alpha & \widetilde{H_\beta} \\ H_\alpha & \widetilde{T_\beta} \end{pmatrix}.$$

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à une nouvelle classe d'opérateurs S_u appelée dilatations d'opérateurs de Toeplitz tronqués $S^u_{\varphi,\psi}$. Cette classe a été introduite en 2015 par Ko et Lee dans [8]. Il a été observé que, selon la décomposition orthogonale $L^2 = K_u^2 \oplus (K_u^2)^\perp$,

$$S_{\varphi,\psi}^u = \begin{pmatrix} A_\varphi^u & \widetilde{\Gamma_\psi^u} \\ \Gamma_\varphi^u & \widetilde{A_\psi^u} \end{pmatrix}.$$

Récemment, Gu et Kang donnent dans [7] une caractérisation complète lorsque $S_{\varphi,\psi}^u$ est un opérateur auto-adjoint, isométrique, coisométrique et normal, en utilisant leur observation clé qui est $S_{\varphi,\psi}^u$ satisfait l'équation suivante

$$S_{\varphi,\psi}^u - M_z S_{\varphi,\psi}^u M_z^* = (\varphi - \psi) \otimes e_0 - (\varphi - \psi) u \otimes u e_0.$$

Tout le long de ce chapitre, tantôt nous utilisons l'idée de Ko et Lee dans [8], tantôt nous utilisons l'idée de Gu et Kang dans [7].

Définition 3.1. *[8] Pour $\varphi, \psi \in L^\infty$ et u une fonction intérieure, la dilatation d'opérateur de Toeplitz tronqué $S_{\varphi,\psi}^u : L^2 \to L^2$ est définie par*

$$S_{\varphi,\psi}^u(f) = \varphi P_u(f) + \psi Q_u(f), f \in L^2.$$

Où $P_u = P - M_u P M_{\overline{u}}$ désigne la projection orthogonale de L^2 sur K_u^2 et $Q_u = I - P_u$ désigne la projection orthogonale de L^2 sur $(K_u^2)^\perp = L^2 \ominus K_u^2 = \overline{zH^2} \oplus uH^2$.

Il est facile de voir que

$$S_{\varphi,\psi}^u = M_\psi + S_{\varphi-\psi,0}^u$$

et

$$S_{\varphi,\varphi}^u = M_\varphi.$$

Remarque 3.1. *Évidemment, l'opérator $S_{\varphi,\psi}^u$ est un opérateur borné si et seulement si $\varphi, \psi \in L^\infty$, tel que*

$$\begin{aligned}\|S^u_{\varphi,\psi}(f)\| &\leq \|\varphi P_u(f)\| + \|\psi Q_u(f)\| \\ &\leq (\|\varphi\|_\infty + \|\psi\|_\infty)\|f\|, (f \in L^2).\end{aligned}$$

Pour tout $f \in L^2$, nous avons

$$\begin{aligned}S^u_{\varphi,\psi} f &= \varphi P_u f + \psi Q_u f \\ &= \varphi P_u f + \psi[f - P_u f] \\ &= (\varphi - \psi) P_u f + \psi f.\end{aligned}$$

Remarque 3.2. *Soit $\varphi, \psi \in L^\infty$. Alors pour tout $f, g \in L^2$ nous avons,*

$$\begin{aligned}\langle S^u_{\varphi,\psi} f, g\rangle &= \langle \varphi P_u(f) + \psi Q_u(f), g\rangle \\ &= \langle f, P_u(\overline{\varphi} g)\rangle + \langle f, Q_u(\overline{\psi} g)\rangle.\end{aligned}$$

Donc

$$(S^u_{\varphi,\psi})^* f = P_u(\overline{\varphi} f) + Q_u(\overline{\psi} f), f \in L^2.$$

Lemme 3.1. *[7] Soit $A \in B(L^2)$. Alors $A = 0$ si et seulement si*

$$[A, M_z] = 0 \qquad \textit{and} \qquad Ae_0 = 0.$$

Démonstration. Si $[A, M_z] = 0$ alors $A = M_\varphi$ pour certaine $\varphi \in L\infty$, et $Ae_0 = 0$ signifie que $\varphi = 0$. Alors $A = 0$. □

Lemme 3.2. *[7] Soient φ et ψ deux fonctions de L^∞ et u une fonction intérieure non constante, nous avons*

1. $[S^u_{\varphi,0}, M_z] = \varphi \otimes e_{-1} - \varphi u \otimes u e_{-1}$
2. $[S^u_{\varphi,\psi}, M_z] = (\varphi - \psi) \otimes e_{-1} - (\varphi - \psi) u \otimes u e_{-1}$
3. $[(S^u_{\varphi,\psi})^*, M_z] = e_0 \otimes (\varphi - \psi) e_{-1} - u \otimes (\varphi - \psi) u e_{-1}$

Démonstration. 1. Soit $f = \sum_{-\infty}^{\infty} f_n z^n \in L^2$, alors

$$\begin{aligned}
S^u_{\varphi,0} M_z f &= \varphi(Pzf - uP\overline{u}zf)) \\
&= \varphi(zPf + f_{-1}) - \varphi u\,[zP\overline{u}f + (\overline{u}f)_{-1}] \\
&= z\varphi Pf - z\varphi uP\overline{u}f + \varphi f_{-1} - \varphi u(\overline{u}f)_{-1} \\
&= M_z S_{\varphi,0} f + [\varphi \otimes e_{-1}]f - [\varphi u \otimes ue_{-1}]f
\end{aligned}$$

2. La deuxième formule découle du fait que $S_{\varphi,\psi} = \varphi P_u + \psi(I - P_u)$ et $[M_\psi, M_z] = 0$

3. Pour la troisième formule, notez que

$$\begin{aligned}
[(S^u_{\varphi,\psi})^*, M_z] &= (S^u_{\varphi,\psi})^* M_z - M_z (S^u_{\varphi,\psi})^* \\
&= M_z (M_z^* (S^u_{\varphi,\psi})^* - (S^u_{\varphi,\psi})^* M_z^*) M_z \\
&= M_z [S^u_{\varphi,\psi}, M_z]^* M_z \\
&= M_z [e_{-1} \otimes (\varphi - \psi) - ue_{-1} \otimes (\varphi - \psi)u] M_z \\
&= e_0 \otimes (\varphi - \psi)e_{-1} - u \otimes (\varphi - \psi)ue_{-1}.
\end{aligned}$$

□

3.1 Auto adjoint, positif

Dans cette section nous étudions les conditions sous les quelles la dilatation d'opérateur de Toeplitz tronqué soit un opérateur auto- adjoint et positif.

Théorème 3.1. *[7] L'opérateur $S^u_{\varphi,\psi}$ est auto adjoint si et seulement si φ et ψ sont des fonctions à valeur réel et*

$$(\varphi - \psi) = \lambda, (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Démonstration. D'après le lemme 3.1 et le lemme 3.2, $S^u_{\varphi,\psi}$ est auto adjoint si et seulement si

$$\begin{aligned}(\varphi-\psi)\otimes e_{-1}-(\varphi-\psi)u\otimes ue_{-1} &= e_0\otimes(\varphi-\psi)e_{-1}-u\otimes(\varphi-\psi)ue_{-1}\\ &= ((S^u_{\varphi,\psi})^*-S^u_{\varphi,\psi})e_0.\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\begin{bmatrix}(\varphi-\psi)\\ -(\varphi-\psi)u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_0\\ -u\end{bmatrix}$$

pour certain $a,b,c,d\in\mathbb{C}$. Donc

$$-(ae_0-bu)u=ce_0-du$$

$$b=c=0, d=a.$$

Donc

$$ae_0\otimes e_{-1}-au\otimes ue_{-1}=\overline{a}e_0\otimes e_{-1}-\overline{a}u\otimes ue_{-1}.$$

Nous avons

$$(a-\overline{a})e_0\otimes e_{-1}=(a-\overline{a})u\otimes ue_{-1}.$$

Cette équation donne $(a-\overline{a})=0$ et $(\varphi-\psi)$. D'autre part, notez que

$$S^u_{\varphi,\psi}e_0=(S^u_{a,0}+M_\psi)e_0=aP_ue_0+\psi$$

et

$$(S^u_{\varphi,\psi})^*e_0=\left(P_u(\overline{\varphi}-\overline{\psi})e_0+M_{\overline{\psi}}\right)e_0=aP_ue_0+\overline{\psi}.$$

Donc, $\psi-\overline{\psi}=0$ et ψ est une fonction à valeur réel. $\square$

Ensuite, nous donnons quelques conditions nécessaires ou suffisantes pour que $S^u_{\varphi,\psi}$ soit un opérateur positif.

Lemme 3.3. *Soit $f \in L^2$. Si*

$$\int_{\mathbb{T}} f(z)|h(z)|^2 dm(z) \geq 0$$

pour tout $h \in H^2$, alors $f(z) \geq 0$ dans $\mathbb{T}$.

Théorème 3.2. *[7] les assertions suivantes sont satisfaites*

1. *Si $S^u_{\varphi,\psi} \geq 0$, alors $\psi(e^{i\theta}) \geq 0$ dans $\mathbb{T}$ et $\varphi = \lambda + \psi$ où λ est un nombre réel.*
2. *Si $\varphi = \lambda + \psi$ pour un certain nombre réel λ et si $\varphi(e^{i\theta}) \geq 0$ et $\psi(e^{i\theta}) \geq 0$, alors $S^u_{\varphi,\psi} \geq 0$.*

Démonstration. Supposons que $S^u_{\varphi,\psi} \geq 0$, l'opérateur $S^u_{\varphi,\psi}$ est auto adjoint si et seulement si $\varphi = \lambda + \psi$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $g = uh \in ImQ_u, h \in H^2$, alors nous avons

$$< S^u_{\varphi,\psi} g, g >=< \psi g, g >=< \psi h, h >\geq 0.$$

$\psi(e^{i\theta}) \geq 0$ dans $\mathbb{T}$ d'après le lemme **??**.

Supposons que $\varphi(e^{i\theta}) \geq 0$ et $\psi(e^{i\theta}) \geq 0$ et $\varphi = \lambda + \psi$ pour un certain nombre réel λ. Soit $f \in L^2$, si $\lambda \geq 0$ alors

$$\begin{aligned} < S^u_{\varphi,\psi} f, f > &= < \lambda P_u f + \psi f, f > \\ &= \lambda < P_u f, P_u f > + < \psi f, f > \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

si $\lambda < 0$, puisque $< P_u f, P_u f >\leq 1$, alors

$$\begin{aligned} < S^u_{\varphi,\psi} f, f > &= \lambda < P_u f, P_u f > + < \psi f, f > \\ &\geq \lambda < f, f > + < \psi f, f > \\ &= < \varphi f, f > \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

□

3.2 Isométrique, unitaire

Dans cette section, nous caractérisons la dilatations d'opérateur de Toeplitz tronqué isométrique, co-isométrique et unitaire. Pour discuter de ce problème, nous décrirons $[(S^u_{\varphi,\psi})^* S^u_{\varphi,\psi}, M_z]$ et $[S^u_{\varphi,\psi}(S^u_{\varphi,\psi})^*, M_z]$ comme des opérateurs de rang fini (voir [7]).

$$\begin{aligned}
[(S^u_{\varphi,\psi})^* S^u_{\varphi,\psi}, M_z] &= [(S^u_{\varphi,\psi})^*, M_z] S^u_{\varphi,\psi} + (S^u_{\varphi,\psi})^*[S^u_{\varphi,\psi}, M_z] \\
&= e_0 \otimes (S^u_{\varphi,\psi})^*[(\varphi-\psi)e_{-1}] - u \otimes (S^u_{\varphi,\psi})^*[(\varphi-\psi)ue_{-1}] \\
&\quad +(S^u_{\varphi,\psi})^*(\varphi-\psi) \otimes e_{-1} - (S^u_{\varphi,\psi})^*(\varphi-\psi)u \otimes ue_{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[S^u_{\varphi,\psi}(S^u_{\varphi,\psi})^*, M_z] &= [S^u_{\varphi,\psi}, M_z](S^u_{\varphi,\psi})^* + S^u_{\varphi,\psi}[(S^u_{\varphi,\psi})^*, M_z] \\
&= (\varphi-\psi) \otimes S^u_{\varphi,\psi} e_{-1} - [(\varphi-\psi)u] \otimes S^u_{\varphi,\psi}(ue_{-1}) \\
&\quad +S^u_{\varphi,\psi} e_0 \otimes [(\varphi-\psi)e_{-1}] - S^u_{\varphi,\psi} u \otimes [(\varphi-\psi)ue_{-1}]
\end{aligned}$$

$$P_u e_0 = e_0 - \overline{u(0)}u = k^u_0$$

$$Q_u e_0 = e_0 - k^u_0 = \overline{u(0)}u$$

$$S^u_{\varphi,\psi} e_0 = \varphi k^u_0 + \psi\overline{u(0)}u = \varphi + (\psi-\varphi)\overline{u(0)}u$$

$$S^u_{\varphi,\psi} e_{-1} = \psi e_{-1}, S^u_{\varphi,\psi} u = \psi u$$

$$\begin{aligned}
S^u_{\varphi,\psi}(ue_{-1}) &= \varphi P_u(ue_{-1}) + \psi Q_u(ue_{-1}) \\
&= \varphi(u-u(0))e_{-1} + \psi u(0)e_{-1} \\
&= \varphi ue_{-1} + (\psi-\varphi)u(0)e_{-1}
\end{aligned}$$

Alors

$$[S^u_{\varphi,\psi}(S^u_{\varphi,\psi})^*, M_z] = \varphi \otimes \varphi e_{-1} - \psi \otimes \psi e_{-1} + \psi u \otimes \psi u e_{-1} - \varphi u \otimes \varphi u e_{-1} \quad (3.1)$$

Théorème 3.3. *[7] L'opérateur $S^u_{\varphi,\psi}$ est un co-isométrique si et seulement si $|\varphi| = |\psi| = 1$ et $\psi = \lambda\varphi$ pour un certain constant $|\lambda| = 1$.*

Démonstration. Posons $T = S^u_{\varphi,\psi}(S^u_{\varphi,\psi})^*$. Il est clair que T est un opérateur de multiplication sur L^2 si et seulement si T commute avec M_z. L'opérateur d'identité I sur H^2 est un opérateur de multiplication par la fonction constante 1. Donc, l'opérateur T est un opérateur d'identité si et seulement s'il commute avec l'opérateur M_z de plus $Te_0 = e_0$. Donc, en utilisant l'équation 3.1, $S^u_{\varphi,\psi}$ est un co-isométrique si et seulement si

$$\varphi \otimes \varphi e_{-1} - \psi \otimes \psi e_{-1} + \psi u \otimes \psi u e_{-1} - \varphi u \otimes \varphi u e_{-1} = 0 \qquad (3.2)$$

et

$$S^u_{\varphi,\psi}(S^u_{\varphi,\psi})^* e_0 = e_0.$$

Nous avons

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \varphi u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \psi u \end{bmatrix}$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, c'est à dire

$$\varphi = (a + bu)\psi, \varphi u = (c + du)\psi.$$

Alors

$$\psi u(a + bu) = \psi(c + du).$$

Si $\psi = 0$ alors $\varphi = 0$ et $\varphi = \psi$. Si $\psi(z) \neq 0$, alors nous avons

$$u(a + bu) = (c + du)$$

ce qui implique que $b = c = 0$ et $a = d$. Donc $\varphi = a\psi$. À partir de l'équation 3.2 nous avons

$$|a|^2(\psi \otimes \psi e_{-1} + \psi u \otimes \psi u e_{-1}) = (\psi \otimes \psi e_{-1} + \psi u \otimes \psi u e_{-1}).$$

Donc $|a| = 1$. En utilisant $\varphi = a\psi$ et $|a| = 1$,

$$\begin{aligned} S^u_{\varphi,\psi}(S^u_{\varphi,\psi})^* e_0 &= S^u_{\varphi,\psi}[P_u\overline{\varphi} + Q_u a\overline{\varphi}] \\ &= \varphi P_u\overline{\varphi} + \psi Q_u a\overline{\varphi} = \varphi P_u\overline{\varphi} + \varphi Q_u\overline{\varphi} \\ &= \varphi[P_u\overline{\varphi} + Q_u\overline{\varphi}] = |\varphi|^2 \\ &= e_0. \end{aligned}$$

□

Théorème 3.4. *[7] L'opérateur $S^u_{\varphi,\psi}$ est un co-isométrique si et seulement s'il est un opérateur unitaire.*

Démonstration. Si $S^u_{\varphi,\psi}$ est un co-isométrique, il suffit de vérifier que $(S^u_{\varphi,\psi})^* S^u_{\varphi,\psi} = I$. Soit $f \in L^2$. D'après le théorème précédent, $|\varphi| = |\psi| = 1$ et $\psi = \lambda\varphi$ pour un certain constant $|\lambda| = 1$. Alors

$$\begin{aligned} (S^u_{\varphi,\psi})^* S^u_{\varphi,\psi} f &= (S^u_{\varphi,\psi})^*(\varphi P_u f + \lambda\varphi Q_u f) \\ &= P_u[\overline{\varphi}(\varphi P_u f + \lambda\varphi Q_u f)] + Q_u[\overline{\lambda\varphi}(\varphi P_u f + \lambda\varphi Q_u f)] \\ &= P_u f + |\lambda|^2 Q_u f \\ &= f. \end{aligned}$$

□

Lemme 3.4. *[7]*

1. *Soit $g \in L^2$ une fonction à valeur réel. Si $Q_u g = 0$, alors g est une constante. Si $Q_u g e_{-1} = 0$, alors $g = 0$.*

2. *Soit $g \in L^2$. Si $Q_u g = 0$, alors $g \in K_u^2$ et $P_u \overline{g} = \lambda k_0^u$ pour un certain constant λ.*

Démonstration. 1. Pour $h \in H^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, supposons que

$$g = zh(z) + \overline{zh(z)} + \lambda$$

$$ge_{-1} = h(z) + \overline{z^2 h(z)} + \lambda \overline{z}.$$

Il est clair que

$$Q_u g = \overline{zh(z)} + Q_u(zh(z) + \lambda) = 0$$

implique que $\overline{zh(z)} = 0$ et g est une constante. De la même manière,

$$Q_u g e_{-1} = \overline{z^2 h(z)} + \lambda \overline{z} + Q_u(h(z)) = 0$$

implique que $\overline{z^2 h(z)} + \lambda \overline{z} = 0$ et $g = 0$.

2. Il est clair que si $Q_u g = 0$ alors $g \in K_u^2$.

posons $g = g(0) + zg_1$ où $g_1 \in H^2$, alors

$$P_u \overline{g} = P_u P(\overline{g(0) + zg_1}) = \lambda k_0^u$$

où $\lambda = \overline{g(0)}$.

□

Théorème 3.5. *[7] L'opérateur $S_{\varphi,\psi}^u$ est une isométrie si et seulement s'il est un opérateur unitaire.*

3.3 Normal

Lemme 3.5. *[8] L'opérateur $S_{\varphi,\psi}^u$ et son adjoint $(S_{\varphi,\psi}^u)^*$ ont les représentations matricielles suivantes*

$$S_{\varphi,\psi}^u = \begin{pmatrix} A_\varphi^u & \widetilde{\Gamma_\psi^u} \\ \Gamma_\varphi^u & \widetilde{A_\psi^u} \end{pmatrix}, (S_{\varphi,\psi}^u)^* = \begin{pmatrix} A_{\overline{\varphi}}^u & \widetilde{\Gamma_{\overline{\varphi}}^u} \\ \Gamma_{\overline{\psi}}^u & \widetilde{A_{\overline{\psi}}^u} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

dans $L^2 = K_u^2 \oplus (K_u^2)^\perp$ *où* $A_\varphi^u, \widetilde{A_\psi^u}, \Gamma_\varphi^u$ *et* $\widetilde{\Gamma_\psi^u}$ *sont définis au chapitre 1.*

Démonstration. Comme tout $f \in L^2$ peut s'écrire uniquement comme $f = g + h$, où $g \in K_u^2$ et $h \in (K_u^2)^\perp$, il assure que pour tout $\varphi, \psi \in L^\infty$,

$$\begin{aligned}
S_{\varphi,\psi}^u f &= \varphi P_u f + \psi Q_u f = \varphi g + \psi h \\
&= P_u \varphi g + Q_u \varphi g + P_u \psi h + Q_u \psi h \\
&= (P_u \varphi g + P_u \psi h) + (Q_u \varphi g + Q_u \psi h) \\
&= (A_\varphi^u g + \widetilde{\Gamma_\psi^u} h) + (\Gamma_\varphi^u g + \widetilde{A_\psi^u} h) \\
&= \begin{pmatrix} A_\varphi^u & \widetilde{\Gamma_\psi^u} \\ \Gamma_\varphi^u & \widetilde{A_\psi^u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

D'autre part, puisque $(\widetilde{\Gamma_{\overline{\psi}}^u})^* = \Gamma_\psi^u$, alors $\widetilde{\Gamma_\psi^u} = (\Gamma_{\overline{\psi}}^u)^*$ et $(\Gamma_\psi^u)^* = \widetilde{\Gamma_{\overline{\psi}}^u}$. Puisque $(A_\varphi^u)^* = A_{\overline{\varphi}}^u$ et $(\widetilde{A_\psi^u})^* = \widetilde{A_{\overline{\psi}}^u}$, nous obtenons la forme de la matrice de $(S_{\varphi,\psi}^u)^*$. □

Lemme 3.6. *[9] Soit $\varphi, \psi \in L^\infty$. Alors l'opérateur $S_{\varphi,\psi}^u$ est normal si et seulement si*

$$\widetilde{\Gamma_\varphi^u} \Gamma_{\overline{\varphi}}^u = \widetilde{\Gamma_\psi^u} \Gamma_{\overline{\psi}}^u, \Gamma_\psi^u \widetilde{\Gamma_{\overline{\psi}}^u} = \Gamma_\varphi^u \widetilde{\Gamma_{\overline{\varphi}}^u}$$

et

$$\widetilde{A_{\varphi-\psi}^u} \Gamma_{\overline{\psi}}^u = \Gamma_\varphi^u A_{\overline{\varphi-\psi}}^u.$$

Théorème 3.6. *[9] Soient $\varphi \in L^\infty$ et $\psi \in L^\infty$ et $\varphi - \lambda\psi \in \mathbb{C}$ où $|\lambda| = 1$. Alors l'opérateur $S_{\varphi,\psi}^u$ est normal si et seulement si $\Gamma_\Phi^u = 0$ où $\Phi = (\lambda - 1)|\varphi|^2 + c\overline{\varphi} - \overline{c}\lambda\varphi$.*

Démonstration. Supposons que $\varphi - \lambda\psi = c$ où $|\lambda| = 1$ et $c \in \mathbb{C}$. Puisque $\Gamma_c^u = \widetilde{\Gamma_c^u} = 0$ et $|\lambda| = 1$, il s'ensuit que

$$\widetilde{\Gamma_\varphi^u} \Gamma_{\overline{\varphi}}^u = |\lambda|^2 \widetilde{\Gamma_\psi^u} \Gamma_{\overline{\psi}}^u = \widetilde{\Gamma_\psi^u} \Gamma_{\overline{\psi}}^u$$

et

$$\Gamma^u_\psi \widetilde{\Gamma^u_{\overline{\psi}}} = \Gamma^u_\varphi \widetilde{\Gamma^u_{\overline{\varphi}}}.$$

En outre, puisque $P_u + Q_u = I$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\widetilde{A^u_{\varphi-\psi}}\Gamma^u_{\overline{\psi}} - \Gamma^u_\varphi A^u_{\overline{\varphi-\psi}} \\
&\qquad = Q_u(\varphi-\psi)Q_u\overline{\psi}P_u - Q_u\varphi P_u(\overline{\varphi}-\overline{\psi})P_u \\
&\qquad = Q_u(\lambda\psi+c-\psi)Q_u\overline{\psi}P_u - Q_u\lambda\psi P_u(\overline{\lambda\psi+c}-\overline{\psi})P_u \\
&\qquad = Q_u((\lambda-1)\psi+c)Q_u\overline{\psi}P_u + Q_u\lambda\psi P_u((1-\overline{\lambda})\overline{\psi}-\overline{c}) \\
&\qquad = (\lambda-1)Q_u\psi Q_u\overline{\psi}P_u + cQ_u\overline{\psi}P_u + (\lambda-1)Q_u\psi P_u\overline{\psi}P_u \\
&\qquad\quad -\lambda\overline{c}Q_u\psi P_u.
\end{aligned}$$

Alors

$$\widetilde{A^u_{\varphi-\psi}}\Gamma^u_{\overline{\psi}} - \Gamma^u_\varphi A^u_{\overline{\varphi-\psi}} = Q_u[(\lambda-1)|\psi|^2 + c\overline{\psi} - \overline{c}\lambda\psi]P_u. \tag{3.4}$$

Puisque $\varphi = \lambda\psi + c$, nous avons

$$(\lambda-1)|\psi|^2 + c\overline{\psi} - \overline{c}\lambda\psi = (\lambda-1)|\varphi|^2 + c\overline{\varphi} - \overline{c}\lambda\varphi + |c|^2. \tag{3.5}$$

Par conséquent, de (3.4) et (3.5) nous obtenons que

$$\begin{aligned}
\left(\widetilde{A^u_{\varphi-\psi}}\Gamma^u_{\overline{\psi}} - \Gamma^u_\varphi A^u_{\overline{\varphi-\psi}}\right)P_u &= Q_u\left[(\lambda-1)|\psi|^2 + c\overline{\psi} - \overline{c}\lambda\psi\right]P_u \\
&= Q_u\left[(\lambda-1)|\varphi|^2 + c\overline{\varphi} - \overline{c}\lambda\varphi + |c|^2\right]P_u \\
&= Q_u\left[\Phi + |c|^2\right]P_u \\
&= \Gamma^u_\Phi P_u + |c|^2 Q_u P_u \\
&= \Gamma^u_\Phi P_u
\end{aligned}$$

où $\Phi = (\lambda-1)|\varphi|^2 + c\overline{\varphi} - \overline{c}\lambda\varphi + |c|^2$. Donc

$$\widetilde{A^u_{\varphi-\psi}}\Gamma^u_{\overline{\psi}} - \Gamma^u_\varphi A^u_{\overline{\varphi-\psi}} = \Gamma^u_\Phi.$$

Si $\Gamma^u_{\overline{\Phi}} = 0$, d'après le lemme 3.6, $S^u_{\varphi,\psi}$ est normal si et seulement si $\Gamma^u_{\overline{\Phi}} = 0$. $\square$

Théorème 3.7. *[9] Soit $\varphi \in L^\infty$ tel que $\varphi K^2_u \subset K^2_u$ et $\psi \in L^\infty$. Alors $S^u_{\varphi,\psi}$ est normal si et seulement si A^u_φ et $\widetilde{A^u_\psi}$ sont des opérateurs normaux, et*

$$S^u_{\varphi,\psi} = A^u_\varphi \oplus \widetilde{A^u_\psi}.$$

Démonstration. Soit $\varphi \in L^\infty$ tel que $\varphi K^2_u \subset K^2_u$. Alors $\Gamma^u_\varphi = 0$ d'après les lemmes 1.15 et 1.15. Donc l'opérateur $S^u_{\varphi,\psi}$ a la forme suivante :

$$S^u_{\varphi,\psi} = \begin{pmatrix} A^u_\varphi & \widetilde{\Gamma^u_\psi} \\ 0 & \widetilde{A^u_\psi} \end{pmatrix}.$$

Si $S^u_{\varphi,\psi}$ est normal, alors

$$A^u_{\overline{\varphi}} A^u_\varphi - A^u_\varphi A^u_{\overline{\varphi}} = \widetilde{\Gamma^u_\psi}\Gamma^u_{\overline{\psi}}, A^u_{\overline{\varphi}}\widetilde{\Gamma^u_\psi} = \widetilde{\Gamma^u_\psi}\widetilde{A^u_{\overline{\psi}}}, \qquad and \qquad \Gamma^u_{\overline{\psi}}\widetilde{\Gamma^u_\psi} + \widetilde{A^u_{\overline{\psi}}}\widetilde{A^u_\psi} = \widetilde{A^u_\psi}\widetilde{A^u_{\overline{\psi}}} \tag{3.6}$$

Si $\Gamma^u_{\overline{\psi}} \neq 0$, alors par l'équation (3.6) l'opérateur A^u_φ n'est pas normal. Puisque $S^u_{\varphi,\psi}$ est normal, il en résulte que A^u_φ est sous-normal. Sachant que A^u_φ est un opérateur de Toeplitz tronqué qui est un opérateur complexe symétrique, alors A^u_φ est normal. C'est une contradiction. Donc $\Gamma^u_{\overline{\psi}} = 0$. Par conséquent, à partir de (3.6),

$$A^u_{\overline{\varphi}} A^u_\varphi = A^u_\varphi A^u_{\overline{\varphi}} \qquad and \qquad \widetilde{A^u_{\overline{\psi}}}\widetilde{A^u_\psi} = \widetilde{A^u_\psi}\widetilde{A^u_{\overline{\psi}}}.$$

D'où, les opérateur $A^u_\varphi, \widetilde{A^u_\psi}$ sont normaux, et

$$S^u_{\varphi,\psi} = A^u_\varphi \oplus \widetilde{A^u_\psi}.$$

L'implication inverse est triviale. $\square$

Corollaire 3.7. *[9] Soit $\varphi, \overline{\psi} \in L^\infty$ tels que $\varphi K_u^2 \subset K_u^2$ et $\overline{\psi} K_u^2 \subset K_u^2$. Alors*

$$S_{\varphi,\psi}^u = A_\varphi^u \oplus \widetilde{A_\psi^u}.$$

Démonstration. Si $\varphi, \overline{\psi} \in L^\infty$ tels que $\varphi K_u^2 \subset K_u^2$ et $\overline{\psi} K_u^2 \subset K_u^2$. Alors, à partir du theorem 3.7, $\Gamma_\varphi^u = 0$ et $(\widetilde{\Gamma_\psi^u})^* = \Gamma_{\overline{\psi}}^u = 0$. Donc

$$S_{\varphi,\psi}^u = A_\varphi^u \oplus \widetilde{A_\psi^u}.$$

□

Il est difficile de décrire les symboles φ et ψ lorsque $S_{\varphi,\psi}^u$ est normal. Ainsi, les auteurs, dans [9], ont d'abord étudié le problème dans un cas particulier, c'est-à-dire lorsque Γ_φ^u est de rang fini n pour $n \geq 0$.

Lemme 3.8. *[9] Soit $\Gamma_{\overline{\varphi}}^u = f_0 \otimes F_0$ et $\Gamma_\varphi^u = f_1 \otimes F_1$ où $F_0, F_1 \in K_u^2$ et $f_0, f_1 \in (K_u^2)^\perp$. Alors $S_{\varphi,\psi}^u$ est normal si et seulement si*

$$\Gamma_{\overline{\psi}}^u = \overline{\alpha_0} g_0 \otimes F_0, \Gamma_\psi^u = \alpha_1 f_1 \otimes G_1,$$

$$|\alpha_0|^2 \langle f_0, f_0 \rangle = \langle g_0, g_0 \rangle, |\alpha_1|^2 \langle F_1, F_1 \rangle = \langle G_1, G_1 \rangle,$$

$$\widetilde{A_v^u} g_0 = \zeta_0 f_1$$

et

$$A_v^u F_1 = \zeta_1 G_0$$

où $v = \varphi - \psi, \alpha_0, \alpha_0, \zeta_0, \zeta_1 \in \mathbb{C}$ et $g_0, g_1 \in (K_u^2)^\perp$.

Démonstration. Supposons que $S_{\varphi,\psi}^u$ est normal. Comme les opérateurs $\Gamma_{\overline{\psi}}^u$ et Γ_ψ^u sont de rang 1. La proposition 1.17 s'assure que $\Gamma_{\overline{\psi}}^u = g_0 \otimes G_0, \Gamma_\psi^u =$

$g_1 \otimes G_1$ où $G_0, G_1 \in K_u^2$ et $g_0, g_1 \in (K_u^2)^\perp$. Par le lemme 3.6, on obtient

$$\langle g_0, g_0 \rangle G_0 \otimes G_0 = \langle f_0, f_0 \rangle F_0 \otimes F_0,$$

$$\langle G_1, G_1 \rangle g_1 \otimes g_1 = \langle F_1, F_1 \rangle f_1 \otimes f_1,$$

et

$$\widetilde{A_v^u} g_0 \otimes G_0 = f_1 \otimes A_v^u F_1.$$

Donc

$$G_0 = \alpha_0 F_0, g_0 = \alpha_1 f_1$$

pour deux nombres complexes $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{C}$, et

$$\langle f_0, f_0 \rangle = |\alpha_0|^2 \langle g_0, g_0 \rangle, \langle F_1, F_1 \rangle = |\alpha_1|^2 \langle G_1, G_1 \rangle$$

et

$$\widetilde{A_v^u} g_0 = \zeta_0 f_1, A_v^u F_1 = \zeta_1 G_1,$$

où $v = \varphi - \psi, \alpha_0, \alpha_1, \zeta_0, \zeta_1 \in \mathbb{C}$ et $g_0, g_1 \in (K_u^2)^\perp$. L'implication inverse est évidente. □

Théorème 3.8. *[9] Soit $\varphi, \psi \in L^\infty$. Alors les assertions suivantes sont correctes.*

1. *Si $\Gamma_\varphi^u = 0$, alors $S_{\varphi,\psi}^u$ est normal si et seulement si $\varphi \in \mathbb{C}$ et $\psi \in \mathbb{C}$.*
2. *Supposons que $\dim K_u^2 = 1$. Alors $S_{\varphi,\psi}^u$ est normal si et seulement s'il existe une fonction non constante $F \in L^\infty$ et $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $|F| = 1, a \neq 0, \varphi = \lambda a F + b$ et $\psi = aF + b$ où $|\lambda| = 1, \lambda \neq 1$.*

Démonstration. 1. La preuve est claire par le lemme 1.16.

2. Supposons que $\dim K_u^2 = 1$, c'est à dire $K_u^2 =< \dfrac{1}{1-\overline{a}z} >$ où $|a| < 1$. Si $S_{\varphi,\psi}^u$ est normal, alors par le lemme 3.6 nous avons

$$\Gamma_\psi^u \widetilde{\Gamma_{\overline{\psi}}^u} f = \Gamma_\varphi^u \widetilde{\Gamma_{\overline{\varphi}}^u} f$$

pour tout $f \in zH^2 + \overline{zH^2}$. Donc

$$Q_u(\psi P_u \overline{\psi}) f = Q_u(\varphi P_u \overline{\varphi}) f, f \in zH^2 + \overline{zH^2}.$$

Donc

$$\psi P_u \overline{\psi} f - \varphi P_u \overline{\varphi} f = \frac{c(f)}{1-\overline{a}z}.$$

Nous mettons $P_u \overline{\psi} f = \dfrac{a(f)}{1-\overline{a}z}$ et $P_u \overline{\varphi} f = \dfrac{b(f)}{1-\overline{a}z}$. Alors

$$\frac{a(f)}{1-\overline{a}z}\psi - \frac{b(f)}{1-\overline{a}z}\varphi = \frac{c(f)}{1-\overline{a}z}, f \in zH^2 + \overline{zH^2}.$$

Si $a(f) = 0$ et $b(f) \neq 0$, alors $\varphi \in \mathbb{C}$ et ainsi $\psi \in \mathbb{C}$ par le lemme 3.6. Si $a(f) \neq 0$ et $b(f) = 0$, alors $\psi \in \mathbb{C}$ et ainsi $\varphi \in \mathbb{C}$ par le lemme 3.6. Si $a(f) \neq 0$ et $b(f) \neq 0$, alors $\varphi - \frac{a(f)}{b(f)}\psi \in \mathbb{C}$. Par le lemme 3.6,

$$\widetilde{\Gamma_{\overline{\psi}}^u} \Gamma_\psi^u = \left|\frac{a(f)}{b(f)}\right|^2 \Gamma_\psi^u \widetilde{\Gamma_{\overline{\psi}}^u} = \Gamma_\varphi^u \widetilde{\Gamma_{\overline{\varphi}}^u}.$$

Si $a(f) = 0$ et $b(f) = 0$ pour tout $f \in zH^2 + \overline{zH^2}$, alors $\widetilde{A_{\overline{\psi}}^u} = \widetilde{A_{\overline{\varphi}}^u} = 0$. Par la proposition 1.12, $\varphi = \psi = 0$. Donc il existent une fonction non constante $F \in L^\infty$ et $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $|F| = 1, a \neq 0, \varphi = \lambda a F + b$ et $\psi = aF + b$ où $|\lambda| = 1, \lambda \neq 1$.

□

Chapitre 4

Produits

4.1 Produit de deux dilatations d'opérateurs de Toeplitz

Théorème 4.1. *[6] Soit $S_{\alpha_1,\beta_1}, S_{\alpha_2,\beta_2} \in S$. Supposons que S_{α_1,β_1} n'est pas dans M. Alors $S_{\alpha_1,\beta_1}S_{\alpha_2,\beta_2} \in S$ si et seulement si $\alpha_2 \in \overline{H^\infty}$, dans ce cas*

$$S_{\alpha_1,\beta_1}S_{\alpha_2,\beta_2} = S_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2}.$$

Démonstration.

D'après proposition 2.2 $S_{\alpha_1,\beta_1}, S_{\alpha_2,\beta_2} \in S$ si et seulement si

$$[S_{\alpha_1,\beta_1}S_{\alpha_2,\beta_2}, M_z] = \psi \otimes e_{-1}. \tag{4.1}$$

Pour un certains $\psi \in L^\infty$, d'après le lemme 2.5

$$[S_{\alpha_1,\beta_1}S_{\alpha_2,\beta_2}, M_z] = (\alpha_1 - \beta_1) \otimes S^*_{\alpha_2,\beta_2}e_{-1} + S_{\alpha_1,\beta_1}(\alpha_2 - \beta_2) \otimes e_{-1} = \psi \otimes e_{-1}.$$

Par hypothèse $\alpha_1 - \beta_1 \neq 0$, alors il existe un nombre complexe λ telle que

$$S^*_{\alpha_2,\beta_2}e_{-1} = \overline{\lambda}e_{-1} \tag{4.2}$$

$$S_{\alpha_1,\beta_1}(\alpha_2 - \beta_2) = -\lambda(\alpha_1 - \beta_1) + \psi. \tag{4.3}$$

Remarquons que $S^*_{\alpha_2,\beta_2}(f) = P[\overline{\alpha_2}f] + Q[\overline{\beta_2}f]$ on a de 4.2

$$(P[\overline{\alpha_2}e_{-1}] + Q[\overline{\beta_2}e_{-1}] = \overline{\lambda}\overline{z}$$

ce qui implique que $\alpha_2 \in H^\infty$ et $\beta_2 = \lambda + \sum_{-\infty}^{-1} \beta_{2n} z^n \in \overline{H^\infty}$. Pour 4.3, on a

$$\begin{aligned}
\alpha_1 P[\alpha_2 - \beta_2 + \beta_1 Q[\alpha_2 - \beta_2] &= -\lambda(\alpha_1 - \beta_1) + \psi, \\
\alpha_1(\alpha_2 - \lambda) + \beta_1(-\beta_2 + \lambda) &= -\lambda(\alpha_1 - \beta_1) + \psi
\end{aligned}$$

donc

$$\alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2 + \psi. \tag{4.4}$$

Puisque $\alpha_2 \in H^\infty$ et $\beta_2 \in \overline{H^\infty}$

$$\begin{aligned}
S_{\alpha_1,\beta_1} S_{\alpha_2,\beta_2} f &= S_{\alpha_1,\beta_1}(\alpha_2 Pf + \beta_2 Qf) \\
&= \alpha_1 P[\alpha_2 Pf + \beta_2 Qf] + \beta_1 Q[\alpha_2 Pf + \beta_2 Qf] \\
&= \alpha_1\alpha_2 Pf + \beta_1\beta_2 Qf \\
&= S_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2} f \\
&= S_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_1\alpha_2-\psi} f \\
&= S_{\beta_1\beta_2+\psi,\beta_1\beta_2} f.
\end{aligned}$$

□

Remarque 4.1. *(a) Si $S_{\alpha_1,\beta_1} = M_{\alpha_1}$, alors $S_{\alpha_1,\beta_1}S_{\alpha_2,\beta_2} \in S$ pour tout S_{α_2,β_2} et*

$$S_{\alpha_1,\beta_1}S_{\alpha_2,\beta_2} = M_{\alpha_1}S_{\alpha_2,\beta_2} = S_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2}.$$

(b) Supposons que $S_{\alpha_1,\beta_1} \notin M$ et $S_{\alpha_2,\beta_2} = M_{\alpha_2}$. Si $S_{\alpha_1,\beta_1}S_{\alpha_2,\beta_2} \in S$, alors d'après théorème 4.1, α_2 est constante,

$$S_{\alpha_2,\beta_2} = \alpha_2 I, S_{\alpha_1,\beta_1}S_{\alpha_2,\beta_2} = S_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2}.$$

(c) Si $\alpha_2 \in H^\infty, \beta_2 \in \overline{H^\infty}$, *alors*

$$S_{\alpha_1,\beta_1}S_{\alpha_2,\beta_2} = S_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2}$$

Corollaire 4.1. *[6] Soit* $S_{\alpha,\beta} \in S$ *pour un certains* $\alpha, \beta \in L^\infty$. *Supposons que* $S_{\alpha,\beta} \notin M$. *Alors* $S_{\alpha,\beta}$ *est inversible et* $S^{-1}_{\alpha,\beta} \in S$ *si et seulement si* $\alpha, \overline{\beta} \in H^\infty$ *et* $\alpha, \overline{\beta}$ *sont inversibles dans* H^∞*.Dans ce cas*

$$S^{-1}_{\alpha,\beta} = S_{\alpha^{-1},\beta^{-1}}.$$

Démonstration.

Si S_{α_1,β_1} est l'inverse de $S_{\alpha,\beta}$ alors

$$S_{\alpha_1,\beta_1}S_{\alpha,\beta} = S_{\alpha_1\alpha,\beta_1\beta} = I \in S$$

comme $S_{\alpha_1,\beta_1} \notin M$(sinon $S_{\alpha,\beta} \in M$), d'après théorème 4.1 $\alpha, \overline{\beta} \in H^\infty$ et $\alpha_1\alpha = \beta_1\beta = 1$. □

Corollaire 4.2. *[6] Soient* $S_{\alpha_1,\beta_1}S_{\alpha_2,\beta_2} \in S$. *Supposons que* $S_{\alpha_1,\beta_1} \notin M$. *Alors* $S_{\alpha_1,\beta_1}S_{\alpha_2,\beta_2} \in M$ *si et seulement si* $\alpha_2 \in H^\infty, \beta \in \overline{H^\infty}$ *et* $\alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2$. *Dans ce cas*

$$S_{\alpha_1,\beta_1}S_{\alpha_2,\beta_2} = M_{\beta_1\beta_2}.$$

Le résultat suivant caractérise quand $S_{\alpha_1,\beta_1}S_{\alpha_2,\beta_2} = 0$.

Corollaire 4.3. *[6] Soient* $S_{\alpha_1,\beta_1}, S_{\alpha_2,\beta_2} \in S$. *Supposons que* $S_{\alpha_1,\beta_1} \notin M$ *et* $S_{\alpha_2,\beta_2} \neq 0$, *alors* $S_{\alpha_1,\beta_1}S_{\alpha_2,\beta_2} = 0$ *si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite*

(i) $\alpha_1 \neq 0, \beta_1 \neq 0, \alpha_2 = 0$ *et* $\beta_2 \in \overline{H^\infty}$.

(ii) $\beta_1 \neq 0, \alpha_1 = 0, \beta_2 = 0$ *et* $\alpha_2 \in H^\infty$.

Nous identifions maintenant quelques sous-algèbres de S qui apparentés aux sous-algèbres de H^∞.

Corollaire 4.4. *[6] Le plus grand sous-algèbre K de S n'est contenue dans M est :*

$$K = \{S_{\alpha,\beta}, \alpha \in H^{\infty}, \beta \in \overline{H^{\infty}}.\}$$

Démonstration.

Soit K un sous algèbre de S qui n'est pas dans M. Soit $S_{\alpha,\beta} \in S$ mais $S_{\alpha,\beta} \notin M$. d'âpres théorème 4.1, $S^*_{\alpha,\beta} \in K \subset S$ implique que $\alpha \in H^{\infty}, \beta \in \overline{H^{\infty}}$. Soit S_{α_1,β_1} un élément arbitraire de K, alors $S_{\alpha,\beta}S_{\alpha_1,\beta_1} \in K \subset S$ implique que $\alpha \in H^{\infty}, \beta_1 \in \overline{H^{\infty}}$. □

Si $S_{\alpha,\beta} \in K$, alors $S^*_{\alpha,\beta} \notin S$ sauf si α, β sont constants. Tour deux fonctions intérieures fixés θ_1, θ_2. l'ensemble suivante de K_{θ_1,θ_2} est un sous-algèbre de S.

$$K_{\theta_1,\theta_2} = \{S_{\theta_1\alpha,\overline{\theta_2}\beta}, \alpha \in H^{\infty}, \beta \in \overline{H^{\infty}}\} = S_{\theta_1,\overline{\theta_2}}K.$$

Maintenant, nous montrons quand $S^*_{\alpha_1,\beta_1}S_{\alpha_2,\beta_2}$ appartient à S.

Proposition. 4.5. *[6] Soient $S_{\alpha_1,\beta_1}, S_{\alpha_2,\beta_2} \in S$. Alors $S^*_{\alpha_1,\beta_1}S_{\alpha_2,\beta_2} \in S$ si et seulement si $\alpha_1(\overline{\alpha_2} - \overline{\beta_2}), \overline{\beta_1}(\alpha_2 - \beta_2) \in H^{\infty}$.Dans ce cas*

$$S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1} = S_{\overline{\alpha_2}\alpha_1,\overline{\beta_2}\beta_1}.$$

Démonstration.

D'après proposition 2.2 $S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1} \in S$ si et seulement si

$$[S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1}, M_z] = \psi \otimes e_{-1}.$$

Pour un certains $\psi \in L^{\infty}$. D'après le lemme 2.5

$$\begin{aligned}[S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1}, M_z] &= e_0 \otimes S^*_{\alpha_1,\beta_1}\overline{z}(\alpha_2 - \beta_2) + S^*_{\alpha_2,\beta_2}(\alpha_1 - \beta_1) \otimes e_{-1} \\ &= \psi \otimes e_{-1}.\end{aligned}$$

Alors il existe un nombre complex λ telle que

$$\begin{aligned} S^*_{\alpha_1,\beta_1}\overline{z}(\alpha_2-\beta_2) &= \overline{\lambda}e_{-1} \\ \lambda e_0 + S^*_{\alpha_2,\beta_2}(\alpha_1-\beta_1) &= \psi. \end{aligned}$$

En outre,

$$\begin{aligned} P[\overline{\alpha_1}\overline{z}(\alpha_2-\beta_2)] + Q[\overline{\beta_1}\overline{z}(\alpha_2-\beta_2) &= \overline{\lambda}\overline{z} \\ \lambda + P[\overline{\alpha_2}(\alpha_1-\beta_1)] + Q[\overline{\beta_2}(\alpha_1-\beta_1)] &= \psi. \end{aligned}$$

Alors $\overline{\alpha_1}(\alpha_2-\beta_2) = \overline{h_1}$ *et* $\overline{\beta_1}(\alpha_2-\beta_2) = \overline{\lambda} + zh_2$ pour deux fonctions $h_1, h_2 \in H^\infty$. Maintenant

$$\begin{aligned} S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1}f &= P[\overline{\alpha_2}\alpha_1 Pf + \overline{\alpha_2}\beta_1 Qf] + Q[\overline{\beta_2}\alpha_1 Pf + \overline{\beta_2}\beta_1 Qf] \\ &= P[\alpha_1(\overline{\alpha_2}-\overline{\beta_2})Pf + \beta_1(\overline{\alpha_2}-\overline{\beta_2})Qf] + \overline{\beta_2}\alpha_1 Pf + \overline{\beta_2}\beta_1 Qf \\ &= \alpha_1(\overline{\alpha_2}-\overline{\beta_2})Pf + \overline{\beta_2}\alpha_1 Pf + \overline{\beta_2}\beta_1 Qf \\ &= \overline{\alpha_2}\alpha_1 Pf + \overline{\beta_2}\beta_1 Qf \\ &= S_{\overline{\alpha_2}\alpha_1,\overline{\beta_2}\beta_1}f. \end{aligned}$$

□

Corollaire 4.6. *[6] Soient $S_{\alpha_1,\beta_1}, S_{\alpha_2,\beta_2} \in S$. Alors*

(1) $S^*_{\alpha_2,\beta_2}, S_{\alpha_1,\beta_1} \in M$ si et seulement si

$$\alpha_1(\overline{\alpha_2}-\overline{\beta_2}), \overline{\beta_2}(\alpha_2\beta_2) \in H^\infty$$

et

$$\overline{\alpha_2}\alpha_1 = \overline{\beta_2}\beta_1,$$

dans ce cas

$$S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1} = M_{\overline{\alpha_2}\alpha_1}$$

(2) Si $S_{\alpha_1,\beta_1} \neq 0$ et $S_{\alpha_2,\beta_2} \neq 0$, alors $S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1} = 0$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite

(a) $\alpha_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0, \beta_1 = 0, \alpha_2 = 0$ et $\alpha_1\overline{\beta_2} \in H^\infty$.

(b) $\alpha_2 \neq 0, \beta_1 \neq 0, \alpha_1 = 0, \beta_2 = 0$ et $\overline{\beta_1}\alpha_2 \in H^\infty$.

Démonstration.

L'assertion (1) découle de la preuve du proposition 4.5.Nous prouvons maintenant (2). Si $S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1} = 0$, alors $\overline{\alpha_2}\alpha_1 = \overline{\beta_2}\beta_1 = 0$.Puisque $\alpha_1\overline{\beta_2} \in H^\infty$, alors ou bien $\alpha_1\overline{\beta_2} = 0$ ou bien $\alpha_1\overline{\beta_2} \neq 0$ presque partout sur $\mathbb{T}$. Donc si les deux α_1, β_2 sont pas des fonctions nulles, alors

$$\overline{\alpha_2}\alpha_1 = \overline{\beta_2}\beta_1 = 0$$

implique que α_1, β_2 sont des fonctions nulles. ce qui prouve (a). La preuve de (b) est similaire. □

Corollaire 4.7. *[13] L'opérateur $S_{\alpha,\beta}$ est une isométrie si et seulement si $|\alpha| = |\beta| = 1$ et $\alpha = \theta\beta$ pour une fonction intérieure θ.*
L'opérateur $S_{\alpha,\beta}$ est un opérateur unitaire si et seulement si $|\alpha| = |\beta| = 1$ et $\alpha = \lambda\beta$ pour une constante λ.

Démonstration.

L'opérateur $S_{\alpha,\beta}$ est un isométrique si et seulement si

$$S^*_{\alpha,\beta}S_{\alpha,\beta} = I.$$

Par corollaire 4.6 $\overline{\alpha}\alpha = \overline{\beta}\beta = 0$. La fonction $\alpha(\overline{\alpha} - \overline{\beta}) = 1 - \alpha\overline{\beta} \in H^\infty$ implique que $\alpha\overline{\beta} \in H^\infty$. Mais $|\alpha\overline{\beta}| = 1$, alors $\alpha\overline{\beta} = \beta \in H^\infty$ est une fonction intérieure. Donc $\alpha = \alpha\overline{\beta}\beta = \theta\beta$.

Si $S_{\alpha,\beta} = S_{\theta f,\beta}$ est un opérateur unitaire, alors

$$\begin{aligned}\beta &= S_{\theta f,\beta} S^*_{\theta\beta,\beta}\\ &= S_{\theta\beta,\beta}[P(\overline{\theta\beta}\beta) + Q(\overline{\beta}\beta)]\\ &= S_{\theta\beta,\beta} P(\overline{\beta})\\ &= \theta\beta P(\overline{\beta}.\end{aligned}$$

Donc $\theta P(\overline{\theta}) = 1$ puisque $|\beta| = 1$. Donc θ est une constante de module un. □

Proposition. 4.8. *[13] Soit $S_{\alpha_1,\beta_1}, S_{\alpha_2,\beta_2} \in S$. Supposons que $S_{\alpha_1,\beta_1} \neq 0$. Alors $S_{\alpha_1,\beta_1} S^*_{\alpha_2,\beta_2} \in S$ si et seulement si l'une des quatre conditions suivantes est vérifiée.*

1) $\alpha_1 = 0$ et β_2 est une constante.

2) $\beta_1 = 0$ et α_2 est une constante.

3) α_2 et β_2 sont des constantes.

4) $\beta_1 = \overline{\lambda}\alpha_1, \alpha_2 = \lambda\beta_2 + \mu$ pour deux constantes λ et μ.

Dans tous les cas,

$$S_{\alpha_1,\beta_1} S^*_{\alpha_2,\beta_2} = S_{\alpha_1\overline{\alpha_2},\beta_1\overline{\beta_2}}.$$

Démonstration.

Par la proposition **??**, $S_{\alpha_1,\beta_1}, S^*_{\alpha_2,\beta_2} \in S$ si et seulement si

$$[S_{\alpha_1,\beta_1} S^*_{\alpha_2,\beta_2}, M_z] = \psi \otimes e_{-1}$$

pour une fonction $\psi \in L^\infty$. Par la proposition 4.8

$$[S_{\alpha_1,\beta_1} S^*_{\alpha_2,\beta_2}, M_z] = \alpha_1 \otimes \overline{z}\alpha_2 - \beta_1 \otimes \overline{z}\beta_2 \tag{4.5}$$

$$= \psi \otimes e_{-1}. \tag{4.6}$$

Il y a deux cas. α_2 et β_2 sont linéairement dépendants ou α_1 et β_1 sont linéairement dépendant.

Supposons que α_2 et β_2 sont linéairement dépendants. Si $\beta_2 = 0$ et $\psi = 0$, alors $\alpha_1 = 0$ (supposons que $\alpha_2 = 0$). Pour 1) avec $\beta_2 = 0$. Si $\beta_2 = 0$ et $\psi \neq 0$, alors par 4.5 , α_2 est une constante. Pour 3) avec $\beta_2 = 0$. Si $\beta_2 = 0$, alors

$$\alpha_2 = \lambda\beta_2 \tag{4.7}$$

pour une constante λ. Maintenant l'équation 4.5 devient

$$(\overline{\lambda}\alpha_1 - \beta_1) \otimes \overline{z}\beta_2 = \psi \otimes e_{-1}.$$

Si $\psi = 0$, alors $\overline{\lambda}\alpha_1 - \beta_1 = 0$. Cela conduit à la déclaration (iv) avec $\mu = 0$. Si $\psi = 0$, $\overline{z}\beta_2 = \mu e_{-1}$ pour une constante μ, donc β_2 est une constante. Donc, on a la condition 2).

Supposons maintenant que α_1 et β_1 dépendent linéairement, mais que α_2 et β_2 sont linéairement indépendants. Si $\beta_1 = 0$, alors 4.5 implique que α_2 est une constante (en supposant que $\alpha_1 = 0$). donc, on a la condition 2). Si $\beta_1 = 0$, alors

$$\alpha_1 = \lambda\beta_1. \tag{4.8}$$

Maintenant l'équation 4.5 devient

$$\beta_1 \otimes \overline{z}(\overline{\lambda}\alpha_2 - \beta_2) = \psi \otimes e_{-1}.$$

Si $\psi = 0$, alors $\overline{\lambda}\alpha_2 - \beta_2 = 0$, ce qui est impossible. Si $\psi \neq 0$, il existe une constante $\mu = 0$ tel que

$$(\overline{\lambda}\alpha_2 - \beta_2) = -\mu, \overline{\mu}\beta_1 = \psi. \tag{4.9}$$

Si $\lambda = 0$, alors par 4.8 et 4.9, $\alpha_1 = 0$ et β_2 est une constante. Donc, on a la condition 1). Si $\lambda \neq 0$, cela conduit à la déclaration 4). Dans ce cas, par

4.4 et 4.9,

$$\begin{aligned}
S_{\alpha_1,\beta_1}S^*_{\alpha_2,\beta_2}f &= S_{\alpha_1,\beta_1}[P[\overline{\alpha_2}f]+Q[\overline{\beta_2}f]] \\
&= \alpha_1 P[\overline{\alpha_2}f]+\beta_1 Q[\overline{\beta_2}f] \\
&= \lambda\beta_1 P[\overline{\alpha_2}f]+\beta_1 Q[(\lambda\overline{\alpha_2}+\overline{\mu})f] \\
&= \lambda\beta_1\overline{\alpha_2}f+\beta_1\overline{\mu}Q[f] \\
&= S_{\lambda\beta_1\overline{\alpha_2},\lambda\beta_1\overline{\alpha_2}+\overline{\mu}\beta_1} \\
&= S_{\alpha_1\overline{\alpha_2},\beta_1\overline{\beta_2}}.
\end{aligned}$$

□

Le corollaire précédent donne les conditions pour que l'opérateur $S_{\beta,\beta}$ soit un isométrique mais pas un opérateur unitaire.

Corollaire 4.9. *L'opérateur $S_{\alpha,\beta}$ est un co-isométrique si et seulement si $S_{\alpha,\beta}$ est un opérateur unitaire.*

Démonstration.
L'opérateur $S_{\alpha,\beta}$ est un co-isométrique si et seulement si

$$S_{\alpha,\beta}S^*_{\alpha,\beta} = I.$$

Selon la proposition 4.8,

$$S_{\alpha,\beta}S^*_{\alpha,\beta} = S_{\alpha\overline{\alpha},\beta\overline{\beta}} = I,$$

donc $|\alpha| = |\beta| = 1$. Si la condition 3) de la proposition 4.8 est vérifiée, alors $S_{\alpha,\beta}$ est un multiple de l'identité, donc $S_{\alpha,\beta}$ est un opérateur unitaire. Si la condition 4) de la proposition 4.8 est vérifiée, alors $\alpha = \lambda\beta$ pour une constante γ et $S_{\alpha,\beta}$ est un opérateur unitaire. □

4.2 Produit de deux dilatations des opérateurs de Toeplitz tronqués

Lemme 4.10. *Soit $\varphi \in L^\infty$. Alors*

1. $A^u_\varphi = 0$ *si et seulement si* $\varphi \in uH^\infty + \overline{uH^\infty}$.
2. $\widetilde{A^u_\varphi} = 0$ *si et seulement si* $\varphi = 0$.
3. $\Gamma^u_\varphi = 0$ *si et seulement si* $\varphi \in K^\infty_u$.
4. $\widetilde{\Gamma^u_\varphi} = 0$ *si et seulement si* $\varphi \in \overline{K^\infty_u}$.

Proposition. 4.11. *Soit u une fonction intérieure, $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2 \in L^\infty$. Soit $S^u_{\varphi_1,\psi_1}$, $S^u_{\varphi_2,\psi_2} \in D_u$, les assertions suivantes sont satisfaites*

1. $S^u_{\varphi_1,\psi_1} S^u_{\varphi_2,\psi_2} \in D_u$ *si et seulement si* $M_{\varphi_1-\psi_1} S^u_{1,0} S^u_{\varphi_2,\psi_2} \in D_u$.
2. *Si $\varphi_1 - \psi_1$ est inversible dans L^∞ alors $S^u_{\varphi_1,\psi_1} S^u_{\varphi_2,\psi_2} \in D_u$ si et seulement si $S^u_{1,0} S^u_{\varphi_2,\psi_2} \in D_u$.*

Démonstration. 1. Il est clair que

$$\begin{aligned} S^u_{\varphi_1,\psi_1} &= M_{\psi_1} + S^u_{\varphi_1-\psi_1,0} \\ &= M_{\psi_1} + M_{\varphi_1-\psi_1} S^u_{1,0}. \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} S^u_{\varphi_1,\psi_1} S^u_{\varphi_2,\psi_2} &= \left(M_{\psi_1} + M_{\varphi_1-\psi_1} S^u_{1,0}\right) S^u_{\varphi_2,\psi_2} \\ &= S^u_{\varphi_2\psi_1,\psi_2\psi_1} + M_{\varphi_1-\psi_1} S^u_{1,0} S^u_{\varphi_2,\psi_2}. \end{aligned}$$

nous concluons que $S^u_{\varphi_1,\psi_1} S^u_{\varphi_2,\psi_2} \in D_u$ si et seulement si $M_{\varphi_1-\psi_1} S^u_{1,0} S^u_{\varphi_2,\psi_2} \in D_u$.

2. De ce qui précède, nous obtenons

$$M_{\varphi_1-\psi_1}S^u_{1,0}S^u_{\varphi_2,\psi_2} = S^u_{\varphi_1,\psi_1}S^u_{\varphi_2,\psi_2} - S^u_{\varphi_2\psi_1,\psi_2\psi_1}$$

Si $\varphi_1 - \psi_1$ est inversible, Alors

$$S^u_{1,0}S^u_{\varphi_2,\psi_2} = M_{(\varphi_1-\psi_1)^{-1}}(S^u_{\varphi_1,\psi_1}S^u_{\varphi_2,\psi_2} - S^u_{\varphi_2\psi_1,\psi_2\psi_1})$$

Donc, nous en déduisons que $S^u_{\varphi_1,\psi_1}S^u_{\varphi_2,\psi_2} \in D_u$ si et seulement si $S^u_{1,0}S^u_{\varphi_2,\psi_2} \in D_u$.

□

Théorème 4.2. *Soit $\varphi, \psi \in L^\infty$ et soit u une fonction intérieure non constante alors $S^u_{1,0}S^u_{\varphi,\psi} \in D_u$ si et seulement si $\varphi \in K^\infty_u + uH^\infty + \overline{uH^\infty}$, $\psi \in \overline{K^\infty_u}$. Dans ce cas,*

$$S^u_{1,0}S^u_{\varphi,\psi} = S^u_{P_u\varphi,0}$$

Démonstration. Par la représentation

$$S^u_{\varphi,\psi} = \begin{pmatrix} A^u_\varphi & \widetilde{\Gamma^u_\psi} \\ \Gamma^u_\varphi & \widetilde{A^u_\psi} \end{pmatrix}$$

et

$$S^u_{1,0} = \begin{pmatrix} A^u_1 & \widetilde{\Gamma^u_0} \\ \Gamma^u_1 & \widetilde{A^u_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cela signifie que

$$S^u_{1,0}S^u_{\varphi,\psi} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^u_\varphi & \widetilde{\Gamma^u_\psi} \\ \Gamma^u_\varphi & \widetilde{A^u_\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^u_\varphi & \widetilde{\Gamma^u_\psi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour toutes $\Phi, \Psi \in L^\infty$, Nous mettons

$$S_{1,0}^{u} S_{\varphi,\psi}^{u} = S_{\Phi,\Psi}^{u} = \begin{pmatrix} A_{\Phi}^{u} & \widetilde{\Gamma_{\Psi}^{u}} \\ \Gamma_{\Phi}^{u} & \widetilde{A_{\Psi}^{u}} \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{pmatrix} A_{\Phi-\varphi}^{u} & \widetilde{\Gamma_{\Psi-\psi}^{u}} \\ \Gamma_{\Phi}^{u} & \widetilde{A_{\Psi}^{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$A_{\Phi-\varphi}^{u} = 0, \widetilde{A_{\Psi}^{u}} = 0, \Gamma_{\Phi}^{u} = 0, \widetilde{\Gamma_{\Psi-\psi}^{u}} = 0.$$

Puisque $A_{\Phi-\varphi}^{u} = 0$ et $\tilde{A}_{\Psi}^{u} = 0$, il découle du Lemme 4.10 que $\Phi - \varphi \in uH^\infty + \overline{uH^\infty}$ et $\Psi = 0$. De la même manière, puisque $\Gamma_{\Phi}^{u} = 0$ et $\widetilde{\Gamma_{\Psi-\psi}^{u}} = 0$ et étant donné que

$$0 = \widetilde{\Gamma_{\Psi-\psi}^{u}} = (\Gamma_{\overline{\Psi-\psi}}^{u})^*$$

est equivalente à $\Gamma_{\overline{\Psi-\psi}}^{u} = 0$, il résulte du Lemme 4.10 que $\Phi \in K_u^\infty$ et $\overline{\Psi - \psi} \in K_u^\infty$. De ce qui précède, nous concluons que

$$\varphi = \Phi + \varphi_1$$

pour $\Phi \in K_u^\infty$ et $\varphi_1 \in uH^\infty + \overline{uH^\infty}$, et

$$\psi \in \overline{K_u^\infty}.$$

En conclusion, on a

$$\varphi \in K_u^\infty + uH^\infty + \overline{uH^\infty}$$

et

$$\psi \in \overline{K_u^\infty}.$$

Notez que $\Phi = P_u\varphi$ et $\Psi = Q_u(\overline{\psi})$. Dans cette vue,

$$\begin{aligned} S_{1,0}^u S_{\varphi,\psi}^u &= S_{\Phi,\Psi}^u \\ &= S_{P_u\varphi, Q_u(\overline{\psi})}^u \\ &= S_{P_u\varphi,0}^u. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve du théorème. □

Corollaire 4.12. *Soient $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in L^\infty$ telle que $\varphi_1 - \psi_1$ est une fonction inversible dans L^∞. soient $S_{\varphi_1,\psi_1}^u, S_{\varphi_2,\psi_2}^u \in D_u$ alors $S_{\varphi_1,\psi_1}^u S_{\varphi_2,\psi_2}^u \in D_u$ si et seulement si $\varphi_2 \in K_u^\infty + uH^\infty + \overline{uH^\infty}$ et $\psi_2 \in \overline{K_u^\infty}$. Dans ce cas*

$$S_{\varphi_1,\psi_1}^u S_{\varphi_2,\psi_2}^u = S_{S_{\varphi_1,\psi_1}^u \varphi_2, \psi_1\psi_2}^u$$

Démonstration. Le résultat découle facilement de Proposition 4.11 et Théorème 4.2. Et nous avons aussi

$$\begin{aligned} & S_{\varphi_1,\psi_1}^u S_{\varphi_2,\psi_2}^u \\ &= S_{\varphi_2\psi_1,\psi_2\psi_1}^u + M_{\varphi_1-\psi_1} S_{1,0}^u S_{\varphi_2,\psi_2}^u \\ &= S_{\varphi_2\psi_1+(\varphi_1-\psi_1)P_u(\varphi_2), \psi_2\psi_1+(\varphi_1-\psi_1)Q_u(\overline{\psi_2})}^u \\ &= S_{\varphi_1 P_u\varphi_2+\psi_1 Q_u\varphi_2, \psi_2\psi_1}^u \\ &= S_{\varphi_1 P_u\varphi_2+\psi_1 Q_u\varphi_2, \psi_2\psi_1}^u. \end{aligned}$$

□

Remarque 4.2. *1) Si S_{φ_1,ψ_1}^u est un opérateur de multiplication $S_{\varphi_1,\psi_1}^u = M_{\varphi_1}$, alors $S_{\varphi_1,\psi_1}^u S_{\varphi_2,\psi_2}^u \in D_u$ pour tout S_{φ_2,ψ_2}^u et $S_{\varphi_1,\psi_1}^u S_{\varphi_2,\psi_2}^u = S_{\varphi_1\varphi_2,\varphi_1\psi_2}^u$.*

2) *Soit $\varphi_1, \psi_1 \in L^\infty$ telle que $\varphi_1 - \psi_1$ est une fonction inversible dans L^∞. Si $S^u_{\varphi_1,\psi_1}$ n'est pas un opérateur de multiplication et $S^u_{\varphi_2,\psi_2} = M_{\varphi_2}$. Si $S^u_{\varphi_1,\psi_1} S^u_{\varphi_2,\psi_2} \in D_u$ alors, par Théorème 4.2, nous avons les deux cas suivants*

   (a) *Si $u(0) = 0$, alors $\lambda \in K^\infty_u \cap \overline{K^\infty_u}$ pour un certain nombre complexe λ. Donc, $\varphi_2 = \lambda$ et $S^u_{\varphi_1,\psi_1} M_{\varphi_2} = S^u_{\lambda\varphi_1,\lambda\psi_1}$.*

   (b) *Si $u(0) \neq 0$, alors $\lambda \notin K^\infty_u$ et $\lambda \notin \overline{K^\infty_u}$ pour un certain nombre complexe λ. Donc $\varphi_2 = 0$.*

Pour étudier des cas particuliers du produit de dilatation des opérateurs de Toeplitz tronqués, nous devons construire les sous-ensembles K_1 et K_2 décrit ci-dessous

$$K_1 = \{S^u_{\varphi,\psi} \in D_u, \varphi \in K^\infty_u, \psi \in \overline{K^\infty_u}\}$$

$$K_2 = \{S^u_{\varphi,\psi} \in D_u, \varphi \in uH^\infty + \overline{uH^\infty}, \psi \in \overline{K^\infty_u}\}$$

Proposition. 4.13. *soit $\varphi_1, \psi_1 \in L^\infty$ telle que $\varphi_1 - \psi_1$ est inversible dans L^∞. Pour tout $S^u_{\varphi_1,\psi_1} \in D_u$, nous avons les cas suivants*

(a) *Si $S^u_{\varphi_2,\psi_2} \in K_1$ alors*

$$S^u_{\varphi_1,\psi_1} S^u_{\varphi_2,\psi_2} = S^u_{\varphi_1\varphi_2,\psi_1\psi_2}$$

(b) *Si $S^u_{\varphi_2,\psi_2} \in K_2$ alors*

$$S^u_{\varphi_1,\psi_1} S^u_{\varphi_2,\psi_2} = S^u_{\psi_1\varphi_2,\psi_1\psi_2}$$

Démonstration. (a) Si $\varphi_2 \in K^\infty_u$ et $\psi_2 \in \overline{K^\infty_u}$ par le Théorème 4.2 nous avons,

$$\begin{aligned} S^u_{1,0} S^u_{\varphi_2,\psi_2} &= S^u_{P_u\varphi_2,0} \\ &= S^u_{\varphi_2,0}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} S^u_{\varphi_1,\psi_1} S^u_{\varphi_2,\psi_2} &= S_{\psi_1\varphi_2+(\varphi_1-\psi_1)\varphi_2,\psi_1\psi_2} \\ &= S^u_{\varphi_1\varphi_2,\psi_1\psi_2}. \end{aligned}$$

□

Nous sommes maintenant en mesure de donner une condition suffisante dans laquelle l'opérateur $S^u_{\varphi,\psi} \in D_u$ devient inversible et dont l'inverse est également en D_u.

Dans tous les résultats suivants, nous supposerons que la fonction $\varphi_1 - \psi_1$ est inversible dans L^∞.

Corollaire 4.14. *Supposons que l'opérateur $S^u_{\varphi,\psi}$ n'est pas un opérateur de multiplication. Si $S^u_{\varphi,\psi} \in K_1$ et $\varphi, \overline{\psi}$ sont inversibles dans K^∞_u alors $S^u_{\varphi,\psi}$ est un opérateur inversible. Dans ce cas*

$$(S^u_{\varphi,\psi})^{-1} = S^u_{\varphi^{-1},\psi^{-1}}$$

Démonstration. Soit $S^u_{\varphi_1,\psi_1} \in D_u$ l'inverse de l'opérateur $S^u_{\varphi,\psi}$. Alors $S^u_{\varphi_1,\psi_1} S^u_{\varphi,\psi} = S^u_{1,1}$. Supposons que $\varphi, \overline{\psi} \in K^\infty_u$ sont des fonctions inversibles, alors par la proposition 4.13 nous avons,

$$S^u_{\varphi_1,\psi_1} S^u_{\varphi,\psi} = S^u_{\varphi_1\varphi,\psi_1\psi} = S^u_{1,1}.$$

Donc $\varphi_1 = \varphi^{-1}$ et $\psi_1 = \psi^{-1}$. □

Selon la proposition 4.13, nous obtenons les résultats suivants.

Corollaire 4.15. *Supposons que* $S^u_{\varphi_1,\psi_1} \in D_u$ *n'est pas un opérateur de multiplication, alors nous avons les deux cas suivants*

1) Si $S^u_{\varphi_2,\psi_2} \in K_1$ *alors l'opérateur* $S^u_{\varphi_1,\psi_1}S^u_{\varphi_2,\psi_2}$ *est un opérateur de multiplication si et seulement si* $\varphi_1\varphi_2 = \psi_1\psi_2$. *Dans ce cas,*

$$S^u_{\varphi_1,\psi_1}S^u_{\varphi_2,\psi_2} = M_{\varphi_1\varphi_2} = M_{\psi_1\psi_2}.$$

2) Si $S^u_{\varphi_2,\psi_2} \in K_2$ *alors l'opérateur* $S^u_{\varphi_1,\psi_1}S^u_{\varphi_2,\psi_2}$ *est un opérateur de multiplication si et seulement si* $\psi_1\varphi_2 = \psi_1\psi_2$. *Dans ce cas,*

$$S^u_{\varphi_1,\psi_1}S^u_{\varphi_2,\psi_2} = M_{\psi_1\varphi_2} = M_{\psi_1\psi_2}.$$

Le corollaire suivant nous dit quand $S^u_{\varphi_1,\psi_1}S^u_{\varphi_2,\psi_2} = 0$.

Corollaire 4.16. *Supposons que* $S^u_{\varphi_1,\psi_1} \in D_u$ *n'est pas un opérateur de multiplication alors nous avons*

1) Si $S^u_{\varphi_2,\psi_2} \in K_1$ *et* $S^u_{\varphi_2,\psi_2} \neq 0$ *alors*

$$S^u_{\varphi_1,\psi_1}S^u_{\varphi_2,\psi_2} = 0$$

si et seulement si l'une des deux assertions suivantes est vérifiée.

(a) $\varphi_1 \neq 0, \psi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \psi_2 \in \overline{K^\infty_u}$.

(b) $\psi_1 \neq 0, \varphi_1 = 0, \psi_2 = 0, \varphi_2 \in K^\infty_u$.

2) Si $S^u_{\varphi_2,\psi_2} \in K_2$ *et* $S^u_{\varphi_2,\psi_2} \neq 0$ *alors*

$$S^u_{\varphi_1,\psi_1}S^u_{\varphi_2,\psi_2} = 0$$

si et seulement si l'une des deux assertions suivantes est valable.

(a) $\psi_1 = 0, \varphi_2 \neq 0, \psi_2 \neq 0$.

(b) $\psi_1 \neq 0, \varphi_2 = 0, \psi_2 = 0$.

Démonstration. 1) Puisque $S^u_{\varphi_2,\psi_2} \in K_1$, il découle de la proposition 4.13 que, $\varphi_2 \in K^\infty_u$ et $\psi_2 \in \overline{K^\infty_u}$ et l'équation $S^u_{\varphi_1,\psi_1}S^u_{\varphi_2,\psi_2} = 0$ est équivalente à $\varphi_1\varphi_2 = \psi_1\psi_2 = 0$.

2) Encore une fois en utilisant la proposition 4.13, on obtient que l'équation $S^u_{\varphi_1,\psi_1}S^u_{\varphi_2,\psi_2} = 0$ est équivalente à $\psi_1\varphi_2 = \psi_1\psi_2 = 0$.

□

Le corollaire suivant montre quand l'opérateur $S^u_{\varphi_1,\psi_1}$ commute avec $S^u_{\varphi_2,\psi_2}$.

Corollaire 4.17. *Les assertions suivantes sont valables.*

1) Soient $S^u_{\varphi_1,\psi_1}, S^u_{\varphi_2,\psi_2} \in K_1$ *alors* $S^u_{\varphi_1,\psi_1}S^u_{\varphi_2,\psi_2} = S^u_{\varphi_2,\psi_2}S^u_{\varphi_1,\psi_1}$.

2) Soient $S^u_{\varphi_1,\psi_1}, S^u_{\varphi_2,\psi_2} \in K_2$ *alors* $S^u_{\varphi_1,\psi_1}S^u_{\varphi_2,\psi_2} = S^u_{\varphi_2,\psi_2}S^u_{\varphi_1,\psi_1}$ *si et seulement* $\psi_1\varphi_2 = \varphi_1\psi_2$.

Bibliographie

[1] Beurling A. On two problems concerning linear transformations in Hilbert space. Acta Math., 81(17) :239-255, 1948.

[2] Brown A, Halmos P. Algebraic properties of Toeplitz operators. J. Reine Angew 1963 ; Math.213 : 89-102.

[3] Ding X, Sang Y. Dual Truncated Toeplitz Operators. Journal of Mathematical Analysis and Applications 2018 ; 461 (1) :929-946. doi : 10.1016/j.jmaa.2017.12.032

[4] Fricain E and Mashreghi J. The Theory of H(b) Spaces, volume 1,new mathematical monographs, Cambridge, 2016.

[5] Garcia SR, Putinar M. Complex symmetric operators and applications, Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006), no. 3, 1285-1315.

[6] Gu C. Algebraic Properties of Cauchy Singular Integral Operators on the Unit Circle. Taiwanese Journal of Mathematics 2016 ; 20(1) : 161–189. doi : 10.11650/tjm.19.2015.6188

[7] Gu C, Kang DO. A Commutator Approach to Truncated Singular Integral Operators. Integral Equations and Operator Theory 2018 ; doi : 10.1007/s00020-018-2429-7

[8] Ko E, Lee JE. On the Dilation of truncated Toeplitz operators. Complex Analysis and Operator Theory 2016 ; 10(4) : 815–833.

[9] Ko E, Lee JE, Nakazi T. On the Dilation of truncated Toeplitz operators II. Complex Analysis and Operator Theory 2019 ; 13 : 3549–3568.

[10] Nagy B.SZ, C. Foias, Harmonic analysis of operators on Hilbert space (North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London, 1970).

[11] Nakazi T, Yamamoto T. NORMS OF SOME SINGULAR INTEGRAL OPERATORS AND THEIR INVERSE OPERATORS. Operator Theory 1998 ; 40 : 185–207.

[12] Nakazi T, Yamamoto T. Norms and Essential Norms of the Singular Integral Operator with Cauchy Kernel on Weighted Lebesgue Spaces. Integral Equations and Operator Theory 2010 ; 68 : 101–113.

[13] Nakazi T, Yamamoto T. Normal singular integral operators with Cauchy kernel on L2. Integral Equations and Operator Theory 2014 ; 78 (2) : 233–248.

[14] Nehari Z. On bounded bilinear forms, Ann. of Math. 65(1957), 153–162.

[15] Peller V. - Hankel Operators and Their Applications

[16] Randriamahaleo FR. Opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman harmonique et opérateurs de Teoplitz tronqués de rang fini. IMB - Institut de Mathématiques de Bordeaux, 2015.

[17] Ross WT, Garcia SR. Model Spaces : A Survey. Computer Science Faculty Publications 2013 ; 123 : 1-55.

[18] Sarason D. Algebraic properties of truncated Toeplitz operators. Operators and Matrices 2007 ; 1(4) : 491–526.

[19] Sedlock NA. Algebras of truncated Toeplitz operators. Operators and Matrices 2011 ; 5 (2) : 309–326.

[20] Samanta A et Sarkar S. Properties of singular integral operators $S_{\alpha,\beta}$. Proc Math Sci 128, 12 (2018).