الجمـــهوريـــة الجــزائريـــة الديـمقراطيـــــة الشــعبيــــــة
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعـلـيــم الـعـالـــي و الـبـحـث الـعـلـمـي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جـامـعــة عمّـــار ثـلـيـــجـــي بالأغـــواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كـلـيــــة الـعـلـــــوم
**FACULTE DES SCIENCES**
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

# *Mémoire de MASTER*

**Domaine :** Mathématiques et Informatique
**Filière :** Mathématiques
**Option :** Analyse Mathématique

**Par**:
ARABA Dalila

**THEME**

# *Théorème de décomposition de Lebesgue d'une mesure*

*Soutenu publiquement devant le jury composé de:*

| | | |
|---|---|---|
| *Mr Ismail .I* | *M.A.A* | *Président* |
| M Korrichi .F.Z | *M.C.B* | *Examinateur* |
| *Mr Chetih .A* | *M.A.A* | *Examinateur* |
| *Mr Belabbaci .Y* | *M.C.A* | *Encadreur* |

***Année Universitaire 2016/2017***

# *Remerciement*

Je tiens à présenter mes reconnaissances et mes remerciements à mon encadrant : Mr Belabbaci Youcef pour les moyens qu'il nous a procuré afin d'élaborer ce mémoire.

Un remerciement à toutes les personnes qui ont participé de prés ou de loin pour atteindre ce objectif.

# *Dédicace*

Je dédie ce simple travail a mon père et ma mère pour leurs soutien et encouragements

Mes sœurs

Mes frères

Tout Ma famille

Et tout ce que j'aime

Et toute personne qui m'a encouragé de loin et de prés.

# ***Résumé***

Dans ce travail, on étudie les théorèmes de décomposition d'une mesure (Hahn,Jordan ,et Lebesgue).
Comme application on étudie la mesure de Lebesgue-Stieltjes, et l'intégrale par rapport à cette mesure.

`Mots clés:` $\sigma$algèbre, $\sigma$additive, mesure, mesure absolument continue, mesure singulière, décomposition d'une mesure ,l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes .

# Abstract

In this work,we study the theorems of decomposition of a measure (Hahn,Jordan ,et Lebesgue).
As application we study the measure of Lebesgue-Stieltjes, and the integral with respect this measure.

`Keywords :` $\sigma$-algebras, $\sigma$-additivities, measure, absolutely continouos measure, singular measure, decomposition of measure, the Lebesgue-Stieltjes integral.

# Table des matières

# *Introduction*

Ce mémoire est consacré à l'étude des théorèmes de décomposition d'une mesure .

Notre travail à est organisé selon le plan suivant :

Le premier chapitre porte sur des rappels et compléments de la théorie de la mesure .

Le deuxième chapitre est consacré aux décompositions de Hahn, de Jordan et de Lebesgue.

Comme application du théorème de décomposition de Lebesgue on étudie au troisième chapitre,la mesure de Lebesgue-Stieltjes,et l'intégration pour cette dernière mesure.

# Chapitre 1

# Rappels et compléments

## 1.1 Algèbres

**Définition 1.1.** Soit X un ensemble arbitraire. Rappelons qu'une famille $\mathcal{A}$ de sous-ensembles de X est une algèbre sur X si
$-$ X $\in \mathcal{A}$ ,
$-$ $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$ ,où $A^c$ désigne le complémentaire de A.
$-$ pour tout suite finie $A_1, A_2, ....., A_n$ $(n \in N)$ d'ensembles de $\mathcal{A}$ , on a $\cup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$ .

**Définition 1.2.** Soit X un ensemble arbitraire. Une famille $\mathcal{A}$ de sous-ensembles de X est une $\sigma$-algèbre (ou tribu) sur X si
$-$ X $\in \mathcal{A}$ ,
$-$ si $A \in \mathcal{A}$ , alors $A^c \in \mathcal{A}$ ,
$-$ si $(A_k)_k$ est une suite d'ensembles de $\mathcal{A}$ , alors $\cup_k A_k \in \mathcal{A}$.
Autrement dit une $\sigma$-algèbre est un algèbre stable par réunion quelconque dénombrable.

si $\mathcal{A}$ est une tribu sur X,on dit que (X,$\mathcal{A}$) est un espace mesurable.

**Conséquence 1.1.** *1-Une algèbre est stable par intersection :*
*Soit A,B $\in \mathcal{A}$ alors $A^c, B^c \in \mathcal{A}$ ,et donc $A^c \cup B^c \in \mathcal{A}$ par conséquent*

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}.$$

*2- Une algèbre est stable par différence symétrique*

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

*3- Une $\sigma$-algèbre est stable par intersection dénombrable :*
*Soit $A_k \in \mathcal{A}$ alors $A_k^c \in \mathcal{A}$ donc*

$$\bigcup_k A_k^c \in \mathcal{A}.$$

*D'où*

$$(\bigcup_k A_k^c)^c \in \mathcal{A}.$$

*c'est-à-dire*

$$\bigcap_k A_k \in \mathcal{A}.$$

## 1.2 Limites d'ensembles

**Définition 1.3.** (Suite monotone d'ensembles)
Une suite $(E_i)_{i\geq 1}$ est dite croissante si, pour tout $i \geq 1$, on a $E_i \subset E_{i+1}$. On note alors

$$\lim_i E_i = \bigcup_{i\geq 1} E_i.$$

Une suite $(E_i)_{i\geq 1}$ est dite décroissante si, pour tout $i \geq 1$, on a $E_i \supset E_{i+1}$. On note alors

$$\lim_i E_i = \bigcap_{i\geq 1} E_i.$$

**Définition 1.4.** (Limites inférieure et supérieure)
Étant donnée une suite d'ensembles $(E_i)_{i\geq 1}$ ,on définit
la limite supérieure

$$\lim_{i\to+\infty} \sup E_i = \bigcap_{i\geq 1} \bigcup_{j>i} E_j,$$

et la limite inférieure

$$\lim_{i\to+\infty} \inf E_i = \bigcup_{i\geq 1} \bigcap_{j>i} E_j.$$

Notons que

$$\lim_{i\to+\infty} \inf E_i \subset \lim_{i\to+\infty} \sup E_i.$$

En effet
$\bigcap_{k>n} E_k \subset E_q$, pour tout q > n. On a donc $\bigcap_{k>n} E_k \subset \bigcup_{q>p} E_q$, pour tout p et tout n. On a alors pour tout n :

$$\bigcap_{k>n} E_k \subset \bigcap_{p\geq 1} \bigcup_{q>p} E_q = \lim_{n\to+\infty} \sup E_n.$$

Finalement

$$\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k>n} E_k \subset \lim_{n\to+\infty} \sup E_n.$$

## 1.3 Mesures

**Définition 1.5.** Soient X un ensemble quelconque et $\mathcal{A}$ une $\sigma$-algèbre sur X.
Une application $\mu$ définie sur $\mathcal{A}$ et à valeurs sur la demi-droite élargie $[0;+\infty]$,

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0;+\infty] \quad A \longmapsto \mu(A)$$

est une mesure sur $\mathcal{A}$ si
– $\mu(\emptyset) = 0$,
– Si $(A_k)_k$ est une suite d'ensembles de $\mathcal{A}$ disjoints deux à deux, alors

$$\mu(\cup_k A_k) = \sum_k \mu(A_k) \qquad (\sigma - additive)$$

## 1.4 Mesure de Lebesgue

**Définition 1.6.** Il existe une unique mesure $\lambda$ sur (R ; B(R)) telle que pour tout intervalle [a ; b] borné, on a

$$\lambda([a;b]) = \lambda(]a;b[) = b - a.$$

## 1.5 Propriétés des mesures

**Croissance :**
Une mesure $\mu$ est une application croissante :
Si $A, B \in \mathcal{A}$ avec $A \subset B$ alors

$$\mu(A) \leqslant \mu(B)$$

En effet $B = A \cup (B \setminus A)$, comme l'union est disjointe, par additivité, on a

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A), et$$

comme

$$\mu(B \setminus A) \geq 0,$$

alors

$$\mu(A) \leqslant \mu(B)$$

**Additivité :**
Si $A, B \in \mathcal{A}$ avec $A \cap B = \emptyset$ alors

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

**Différence :**
Si $A, B \in \mathcal{A}$ , $A \subset B$ et $\mu(A) \leq +\infty$ alors

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

En effet, cela vient de la décomposition

$$B = A \cup (B \setminus A),$$

union disjointe.
**Croissance séquentielle :**
Si $A_n \in \mathcal{A}$ et $A_n \subset A_{n+1}$ pour $n \geq 1$ alors

$$\mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

**Décroissance séquentielle :**
Si $A_n \in \mathcal{A}$ et $A_n \supset A_{n+1}$ pour $n \geq 1$ et $\mu(A_1) \leq +\infty$ alors

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

## 1.6 Mesures réelles

**Définition 1.7.** On appelle mesure réelle toute fonction d'ensembles $\mu$ sur un espace mesurable (X,$\mathcal{A}$) à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ ou $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ telle que

$$\mu(\emptyset) = 0 \quad et \quad \mu \quad est \quad (\sigma - additive).$$

**Définition 1.8.** Une mesure réelle ne peut pas prendre à la fois la valeur $-\infty$ et la valeur $+\infty$ .
Une mesure réelle est dite finie sur une famille $\mathcal{E}$ si

$$\mid \mu(E) \mid < +\infty \qquad pour \;\; tout \quad E \in \mathcal{E}$$

Une mesure $\mu$ est dite $\sigma$-finie sur $\mathcal{E}$ Si pour tout $E \in \mathcal{E}$ il existe une suite $(E_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{E}$ telle que

$$|\mu(E_n)| < +\infty \quad et \quad E \subset \bigcup_{n\geq 1} E_n.$$

**Proposition 1.1.** Soit $\mu$ une mesure réelle sur (X,$\mathcal{A}$).Alors
i) si $A, B \in \mathcal{A}$ et $A \subset B$, alors

$$|\mu(B)| < +\infty \Longrightarrow |\mu(A)| < +\infty.$$

ii)Si $A, B \in \mathcal{A}$ et $A \subset B$, alors

$$|\mu(B)| < +\infty \Longrightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

**Démonstration**
Soit $A, B \in \mathcal{A}$ avec $A \subset B$ alors
$B = A \cup (B \setminus A)$ union de deux ensemble disjoints de $\mathcal{A}$ pour laquelle l'additivité de $\mu$ donne

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A).$$

On en déduit i) puisque si $\mu(B)$ est finie alors $\mu(A)$ et $\mu(B \setminus A)$ aussi sont finies.
Dans ce cas, on peut retrancher $\mu(A)$ et en déduire ii).

**Définition 1.9.** Si $\mu_1$,$\mu_2$ sont deux mesures sur $\mathcal{A}$ alors leur somme définie par

$$(\mu_1 + \mu_2)(A) = \mu_1(A) + \mu_2(A), \quad A \in \mathcal{A},$$

est aussi une mesure sur $\mathcal{A}$.
Cependant la différence $\mu_1 - \mu_2$ définie par

$$(\mu_1 - \mu_2)(A) = \mu_1(A) - \mu_2(A), \quad A \in \mathcal{A},$$

ne l'est pas forcément (la positivité n'est pas garantie),mais il s'agit d'une mesure réelle .

**Définition 1.10.** Soit $\mu$ est une mesure réelle sur (X,$\mathcal{A}$),
Un ensemble $A \in \mathcal{A}$ est dit positif si $\mu(B) \geq 0$ pour tout $B \subset A$.
Un ensemble $A \in \mathcal{A}$ est dit négatif si $\mu(B) \leq 0$ pour tout $B \subset A$.
Un ensemble $A \in \mathcal{A}$ est dit nul si $\mu(B) = 0$ pour tout $B \subset A$
Notons que les sous-ensemble mesurables d'ensembles positifs sont aussi positifs.
De même l'union d'ensemble $A_n$,$n \geq 1$ positifs est aussi positive.
En effet,

$$si \quad B \subset A \quad et \quad B \subset \bigcup_{n\geq 1} A_n \quad alors \quad B = \bigcup_{n\geq 1} (B \cap A_n)$$

On peut même écrire $B = \bigcup_{n\geq 1} B_n$ avec $B_n = B \cap A_n$ et $B_n \in \mathcal{A}$.
Ainsi,

$$\mu(B_n) \geq 0 \quad et \quad \mu(B) = \sum_{n\geq 1} \mu(B_n) \geq 0 \qquad (\sigma - additive).$$

De même pour les ensembles négatifs.

## 1.7 Mesure absolument continue . Mesure singulière

**Définition 1.11.** Soient $\mu$ et $\nu$ deux mesures sur X.
On dit que $\nu$ est absolument continue par rapport à $\mu$ et on note

$$\nu \ll \mu, si \quad \forall A \in \mathcal{A} \qquad \Big[\mu(A) = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0\Big],$$

Si $\mu$ est réelle , on dit que $\nu \ll \mu$ si $\nu \ll \mid \mu \mid$
On dit que $\mu$ et $\nu$ sont équivalentes ,et on note $\mu \sim \nu$, si elles sont mutuellement absolument continues,i.e

$$\nu \ll \mu \quad et \quad \mu \ll \nu$$

On dit que $\mu$ et $\nu$ sont singulières, et on note $\nu \perp \mu$ , s'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que

$$\mu(A) = 0 \quad et \quad \nu(A^c) = 0$$

**Proposition 1.2.** Soient $\mu$,$\nu$ deux mesures telle que

$$\nu \ll \mu \quad et \quad \nu \perp \mu, alors \quad \nu = 0$$

**Démonstration**
Comme $\mu$ ,$\nu$ sont singulières alors
Il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que

$$\mu(A) = 0 \qquad et \qquad \nu(A^c) = 0.$$

Soit $E \in \mathcal{A}$ quelconque.On a

$$E = (E \cap A) + (E \cap A^c)$$

Donc

$$\nu(E) = \nu(E \cap A) + \nu(E \cap A^c)$$

Comme $E \cap A \subset A$ alors

$$\mu(E \cap A) = 0$$

Et donc

$$\nu((E \cap A)^c) = 0$$

Puisque $\nu$ est absolument continue par rapport a $\mu$ .On a

$$\mu(A) = 0 \quad et \quad \nu(A) = 0.$$

Par suite $E \cap A^c \subset A^c$ et $E \cap A \subset A$ alors

$$\nu(E \cap A^c) = 0$$

Et

$$\nu(E \cap A) = 0$$

Par conséquence

$$\nu(E) = 0$$

**Proposition 1.3.** Soient $\mu$,$\nu$ des mesures, on a $\nu \ll \mu$ ssi $\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$
tel que

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \Big[\mu(A) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \nu(A) < \epsilon\Big].$$

**Démonstration**

La condition est suffisante car si $\mu(A) = 0$, elle donne $\nu(A) < \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$ qu'on peut faire tendre vers 0,ce qui donne

$$\nu(A) = 0 \quad et \quad \nu \ll \mu.$$

La condition est nécessaire.
Sinon ,il existe $\epsilon > 0$ et pour chaque $n \geq 1$,$A_n \in \mathcal{A}$ tel que

$$\mu(A_n) \leq \frac{1}{n^2} \quad et \quad \nu(A_n) > \epsilon.$$

On considère alors

$$A = \limsup_n A_n = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} A_n \quad pour \quad tout \quad m \geq 1$$

On a

$$\mu(A) \leq \sum_{n \geq m} (\frac{1}{n^2})$$

Et donc

$$\mu(A) = 0$$

Alors que

$$\nu(A) = \lim_{m\to+\infty} \nu(\bigcup_{n\geq m} A_n) > \epsilon$$

Puisque

$$\bigcup_{n\geq m} A_n \supset A_m$$

Avec

$$\nu(A_m) > \epsilon$$

alors contradiction avec la définition de $\nu \ll \mu$.

## 1.8 Fonctions mesurables

**Définition 1.12.** Soient X et Y deux ensembles quelconques et soient $\mathcal{A}_X$ et $\mathcal{A}_Y$ deux tribu de parties de X et Y respectivement.
La fonction $y = f(x)$, définie sur X et à valeurs dans Y, s'appelle $(\mathcal{A}_X, \mathcal{A}_Y)-$ *mesurable*, si $A \in \mathcal{A}_Y$ entraîne $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_X$.

**Définition 1.13.** Soit X un ensemble dans lequel est donnée une mesure $\sigma$-additive $\mu$, définie sur une $\sigma$-algèbre $\mathcal{A}_\mu$.
Une fonction réelle $f$ sur X est dite $\mu - mesurable$, si pour tout ensemble borélien A de la droite numérique on a

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_\mu.$$

### 1.8.1 Opérations sur les fonctions mesurables

**Théorème 1.1.** *La somme, la différence et le produit de deux fonctions mesurables sont des fonctions mesurables.*

**Démonstration**
Démontrons ce théorème par étapes.
1) Si la fonction $f$ est mesurable, il est évident que les fonctions $kf$ et $a+f$ sont aussi mesurables, quelles que soient les constantes $k$ et $a$.
2)Si les fonctions $f$ et $g$ sont mesurables, alors l'ensemble

$$\{x : f(x) > g(x)\}$$

est aussi mesurable.
En effet,

$$\{x : f(x) > g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big(\{x : f(x) > r_k\} \cap \{x : g(x) < r_k\}\Big),$$

où $r_k$ parcourt l'ensemble des nombres rationnels, numérotés dans n'importe quel ordre.
On en déduit que l'ensemble

$$\{x : f(x) > a - g(x)\} = \{x : f(x) + g(x) > a\}$$

est mesurable, ce qui signifie que la somme de deux fonctions mesurables est mesurable.
3) De 1) et 2) il résulte que la différence $f - g$ est aussi mesurables.
4) L e produit de deux fonctions mesurables est mesurable.
En effet, utilisons l'identité

$$fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2].$$

Le second membre est une fonction mesurable. Selon lequel le carré d'une fonction mesurable est une fonction mesurable. 5)Si la fonction $f$ est mesurable et $f(x) \neq 0$, alors la fonction $\frac{1}{f(x)}$ est aussi mesurable. En effet, si $c > 0$, alors

$$\Big\{x : \frac{1}{f(x)} < c\Big\} = \Big\{x : f(x) > \frac{1}{c}\Big\} \cup \Big\{x : f(x) < 0\Big\},$$

si $c < 0$, alors

$$\Big\{x : \frac{1}{f(x)} < c\Big\} = \Big\{x : 0 > f(x) > \frac{1}{c}\Big\},$$

et si $c = 0$, alors

$$\Big\{x : \frac{1}{f(x)} < c\Big\} = \Big\{x : f(x) < c\Big\}.$$

Chaque fois on obtient au second membre un ensemble mesurable.
De 4) et 5) on déduit la mesurabilité du $\frac{f(x)}{g(x)}$ ( à condition que $g(x) \neq 0$).

### 1.8.2 Équivalence

**Définition 1.14.** Deux fonctions $f$ et $g$, données sur le même ensemble mesurable E, sont dites
*équivalentes* (notation : $f \sim g$)

$$\mu\{x : f(x) \neq g(x)\} = 0$$

**Théorème 1.2.** *Une fonction $f(x)$, définie sur un ensemble mesurable $E$ et équivalente sur $E$ à une fonction mesurable $g(x)$, est aussi mesurable.*

**Démonstration**
De la définition de l'équivalence il résulte que les ensembles

$$\{x : f(x) < a\} \quad et \quad \{x : g(x) < a\}$$

ne différent l'un de l'autre que d'un ensemble de mesure nulle, donc si le deuxième est mesurable , le premier est aussi mesurable.

### 1.8.3 Convergence presque partout

**Définition 1.15.** On dit qu'une suite $\{f_n\}$ de fonctions définies sur un espace mesuré X converge presque partout vers une fonction $f(x)$, si

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

presque pour tout $x \in X$.

**Théorème 1.3.** *Si une suite de fonctions mesurables $f_n(x)$ converge vers une fonction $f(x)$ presque partout sur X, alors la fonction $f(x)$ est aussi mesurable.*

**Démonstration**
Soit A l'ensemble sur lequel

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Par hypothèse,

$$\mu(X \setminus A) = 0.$$

La fonction $f$ est mesurable sur A et comme sur un ensemble de mesure nulle toute fonction est évidemment mesurable, elle est mesurable aussi sur $X \setminus A$, par conséquent , la fonction $f(x)$ est mesurable sur X.

# Chapitre 2

# Décomposition de mesures

## 2.1 Théorème de décomposition de Hahn

**Théorème 2.1.** *Soit $\mu$ une mesure définie sur $(X,\mathcal{A})$, alors il existe deux ensembles mesurables disjoints $P$ et $N$ de $X$ avec $X = P \cup N, P \cap N = \emptyset$ tel que :*
*$P$ est ensemble positif pour $\mu$ ,i.e $\mu(E \cap P) \geq 0$ pour tout $E \in \mathcal{A}$, et*
*$N$ est ensemble négatif pour $\mu$ ,i.e $\mu(E \cap N) \leq 0$ pour tout $E \in \mathcal{A}$*

**Démonstration**
Posons

$$a = \inf \mu(A)$$

où la borne inférieurs est étendue à tous les ensembles négatifs A
Soit $A_n$ une suite d'ensembles négatifs telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = a$$

Alors il est aisé de voir que $N = \cup_n A_n$ est un ensemble négatif tel que :

$$\mu(N) = a$$

Montrons que N est l'ensemble cherché,c-à-d

$$P = X \setminus N$$

est un ensemble positif, supposons que P contienne un sous-ensemble mesurable $C_0$ tel que

$$\mu(C_0) < 0$$

L'ensemble $C_0$ ne peut pas être négatif, car en l'ajoutant à N,alors on obtiendrait un ensemble négatif $\tilde{A}$ pour lequel

$$\mu(\tilde{A}) < a$$

ce qui est impossible.
Par conséquent ,il existe un entier minimal $k_1$ pour lequel dans $C_0$ on peut trouver un sous-ensemble $C_1$ vérifiant la condition

$$\mu(C_1) \geqslant \frac{1}{k_1}$$

Bien entendu,$C_1 \neq C_0$.
Pour l'ensemble $C_0 \setminus C_1$ on peut reprendre le raisonnement fait pour $C_0$.
On obtiendra alors un ensemble $C_2$ vérifiant la condition

$$\mu(C_2) \geq \frac{1}{k_2} \quad (k_2 \geq k_1)$$

et ainsi de suite .
Posons

$$F_0 = C_0 \setminus \cup_{i=1}^{\infty} C_i$$

l'ensemble $F_0$ n'est pas vide, car

$$\mu(C_0) < 0 \quad et \quad \mu(C_i) > 0 \quad pour \quad i \geq 1.$$

D'après la construction faite, l'ensemble $F_0$ est négatif.
Donc,en l'ajoutant à N, on obtenir une contradiction avec la définition de a.
Par conséquent, pour tous les ensembles mesurables $E \subset X \setminus N$ on a

$$\mu(E) \geq 0$$

ce qui signifie que $X \setminus N$ est positif.
La décomposition de l'ensemble X en une partie négative N et une partie positive P s'appelle *décomposition de Hahn*

**Lemme 2.1.** *Soit $P_1$,$N_1$ et $P_2$,$N_2$ deux décomposition de Hahn, alors pour tout $E \in \mathcal{A}$*
*on a*

$$\mu(E \cap N_1) = \mu(E \cap N_2)$$
$$\mu(E \cap P_1) = \mu(E \cap P_2)$$

*La décomposition de Hahn n'est pas en général unique .*

**Démonstration**
La décomposition de Hahn n'est pas en général unique,cependant si

$$X = N_1 \cup P_1 \quad et \quad X = N_2 \cup P_2$$

En effet,

$$E \cap (N_1 \setminus N_2) \subset E \cap N_1$$

d'où l'on déduit que

$$\mu(E \cap (N_1 \setminus N_2)) \leq 0$$

D'autre part,

$$E \cap (N_1 \setminus N_2) \subset E \cap P_2$$

D'où

$$\mu(E \cap (N_1 \setminus N_2)) \geq 0$$

Par conséquent

$$\mu(E \cap (N_1 \setminus N_2)) = 0$$

De la même façon on montre que

$$\mu(E \cap (N_2 \setminus N_1)) = 0$$

De ces deux dernières égalités on déduit que

$$\begin{aligned}\mu(E \cap N_1) &= \mu(E \cap (N_1 \setminus N_2) + \mu(E \cap (N_1 \cap N_2) \\ &= \mu(E \cap (N_2 \setminus N_1)) + \mu(E \cap (N_1 \cap N_2) = \mu(E \cap N_2)\end{aligned}$$

La deuxième des égalités se démontre exactement de la même façon.

**Théorème 2.2.** *Soit $\mu$ une mesure réels ,et soit (P,N) une décomposition de Hahn de X par rapport à $\mu$.*
*Alors les mesures finies*

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap P), \mu^-(E) = -\mu(E \cap N), \quad E \in \mathcal{A}$$

*sont les seules mesures sur $(X,\mathcal{A})$ qui vérifient*

$$\mu = \mu_+ - \mu_-, \mu_+ \perp \mu_-.$$

**Démonstration**
Soit $\eta_+$,$\eta_-$ deux autres mesures réelles telle que

$$\mu = \eta_+ - \eta_-$$

Soient $P_1, N_1 \in \mathcal{A}$ disjoints tel que

$$P_1 \cup N_1 = X, \eta_+(P_1) = \eta_-(N_1) = 0$$

Alors $(P_1, N_1)$ est autre une décomposition de Hahn de X par rapport $\eta$, est donc pour tout $E \in \mathcal{A}$ ,

$$\eta_+(E) = \eta_-(E \cap P_1) = \mu(E \cap P_1) = \mu(E \cap P) = \mu_+(E \cap P) = \mu_+(E)$$

Donc

$$\eta_+ = \mu_+.$$

De même,on montre que $\eta_- = \mu_-$.

**Définition 2.1.** La mesure $\mu$ définit sur $\mathcal{A}$ pour tout $E \in \mathcal{A}$ de façon unique deux fonctions d'ensemble non négatives :

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap P)$$

et

$$\mu^-(E) = -\mu(E \cap N)$$

appelées respectivement *variation supérieure* et *variation inférieure* de la mesure $\mu$ . La variation totale de $\mu$ est le mesure $\mid \mu \mid$ définie par

$$\mid \mu \mid (E) = \mu_+(E) + \mu_-(E)$$

**Proposition 2.1.** Soient $\mu$, $\nu$ deux mesures réelles sur (X,$\mathcal{A}$),
Les propriétés suivants sont équivalentes :
i)$\nu \ll \mu$
ii)$\nu_+ \ll \mu$ et $\nu_- \ll \mu$
iii)$\mid \nu \mid \ll \mid \mu \mid$

**Démonstration**
Pour voir que i) implique ii),
On considère $E \in \mathcal{A}$ avec

$$\mid \mu \mid (E) = 0 \quad et \quad X = P \cup N$$

Une décomposition de Hahn de X par rapport à $\nu$.
Alors comme $\mid \mu \mid$est une mesure

$$\mid \mu \mid (E) = 0 \Longrightarrow \mid \mu \mid (E \cap P) = \mid \mu \mid (E \cap N) = 0$$

Comme $\nu \ll \mu$, on a

$$\nu(E \cap P) = \nu(E \cap N) = 0$$

Donc

$$\nu_+(E) = \nu_-(E) = 0$$

On a déduit que

$$\nu_+ \ll \mu \quad et \quad \nu_- \ll \mu \quad et \quad \mid \nu \mid \ll \mu$$

ii) implique iii) puisque

$$\mid \nu \mid (E) = \nu_+(E) + \nu_-(E) = 0$$

Lorsque

$$\mid \mu \mid (E) = 0.$$

Finalement,lorsque iii) est vrai, soit $E \in \mathcal{A}$ tel que

$$\mid \mu \mid (E) = 0.$$

iii) implique

$$\mid \nu \mid (E) = \nu_+(E) + \nu_-(E) = 0$$

Donc

$$\mid \nu(E) \mid \leq \mid \nu \mid (E) = 0,$$

C'est à dire i).

**Remarque .1.** *D'après la proposition on a*

$$\nu \ll \mu \quad ssi \quad \mid \nu \mid \ll \mid \mu \mid .$$

*On a aussi*

$$\nu \sim \mu \quad ssi \quad \mid \nu \mid \sim \mid \mu \mid .$$

## 2.2 Théorème de décomposition de Jordan

**Théorème 2.3.** *Soit $\mu$ une mesure définie sur $(X,\mathcal{A})$,$(N,P)$ une décomposition de Hahn par rapport à $\mu$.*
*Alors on définit des mesures $\mu^+(E)$,$\mu^-(E)$ sur $\mathcal{A}$ par :*

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap P), \quad \mu^-(E) = -\mu(E \cap N), \qquad \forall E \in \mathcal{A}$$

*dont l'une au moins est finie et $\mu = \mu^+ - \mu^-$.*
*Les mesures $\mu^+$, $\mu^-$ ne dépendent pas de la décomposition de Hahn .*

**Démonstration**
comme $P \cap E \subset P$ et $N \cap E \subset N$ ,les fonction d'ensembles $\mu^+$, $\mu^-$ sont positives.
Comme $\mu$ prend au plus une des deux valeurs $\pm\infty$ ,une au moins des deux mesures et finie , puis pour tout $E \in \mathcal{A}$

$$\mu(E) = \mu(E \cap P) + \mu(E \cap N) = \mu^+(E) - \mu^-(E)$$

et donc $\mu = \mu^+ - \mu^-$.
Il reste à montrer que $\mu^\pm$ ne dépend pas de la décomposition de Hahn.
On considère deux décomposition de Hahn $X = P_1 \cup N_1 = P_2 \cup N_2$ par rapport à $\mu$ et on montre que

$$\mu(E \cap P_1) = \mu(E \cap P_2), \mu(E \cap N_1) = \mu(E \cap N_1)$$

Notons que l'ensemble $E \cap (P_1 \setminus P_2)$ est un sous-ensemble de $P_1$ positif et donc

$$\mu(E \cap (P_1 \setminus P_2)) \geq 0$$

mais est aussi un sous-ensemble de $N_2$ négatif et donc

$$\mu(E \cap (P_1 \setminus P_2)) \leq 0$$

Ainsi

$$\mu(E \cap (P_1 \setminus P_2)) = 0, \quad pour \quad tout \quad E \in \mathcal{A}$$

De même,

$$\mu(E \cap (P_2 \setminus P_1)) = 0, \quad pour \quad tout \quad E \in \mathcal{A}$$

Il vient alors

$$\mu(E \cap P_1) = \mu(E \cap P_1 \cap P_2) = \mu(E \cap P_2)$$

De même on a

$$\mu(E \cap N_1) = \mu(E \cap N_2)$$

**Définition 2.2.** Soient (X,$\mathcal{A}$ ) un espace mesurable et $\mu$ une mesure réelle sur (X,$\mathcal{A}$ ). Dans la décomposition de la mesure réelle $\mu$ en deux mesures $\mu^+$ et $\mu^-$.
La mesure $\mu^+$ est appelée la variation positive de $\mu$ et $\mu^-$ la variation négative de $\mu$.
La fonction

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^-$$

est appelée variation totale de la mesure $\mu$
La représentation de $\mu$ comme différence de sa variation positive et sa variation négative

$$\mu = \mu^+ - \mu^-$$

est appelée *la décomposition de Jordan* de la mesure réelle $\mu$.

**Proposition 2.2.** soit $\mu$ une mesure sur un espace mesurable (X,$\mathcal{A}$).Alors il existe $B \in \mathcal{A}$ ( non unique en général) tel que :

$$\forall A \in \mathcal{A} \qquad \mu(A \cap B^c) \geqslant 0 \qquad et \qquad \mu(A \cap B) \leq 0$$

$\mu^+$ et $\mu^-$ définies sur $\mathcal{A}$ par

$$\mu^+(A) = \mu(A \cap B^c) \qquad et \qquad \mu^-(A) = -\mu(A \cap B)$$

Sont deux mesures positives vérifiant $\mu = \mu^+ - \mu^-$ .
De plus $\mu^-$ bornée et le couple $(\mu^+, \mu^-)$ est indépendant de B.

**Définition 2.3.** Le triplet $(B, \mu^+, \mu^-)$ est appelé *décomposition de Jordan-Hahn* de $\mu$.

**Corollaire 2.1.** *Pour que $\mu$ soit bornée, il faut et il suffit que*

$$\mu(X) < +\infty$$

**Démonstration**

Si $\mu$ est bornée, on a évidemment

$$\mu(X) < +\infty.$$

Inversement, si $\mu(X) < +\infty$ , on a

$$\mu^+(X) = \mu(X) + \mu^-(X) < +\infty$$

Et donc $\mu^+$ est bornée.
Comme $\mu^-$ est bornée et que $\mu = \mu^+ - \mu^-$, on a conclut que $\mu$ est bornée.

**Remarque .2.** *Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a*

$$-\infty < -\mu^-(X) \leq -\mu^-(A) \leq \mu(A) \leq \mu^+(X) = \mu(X) + \mu^-(X).$$

## 2.3 Théorème de décomposition de Lebesgue

**Lemme 2.2.** *Soient $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré fini et $\nu$ une mesure finie sur $\mathcal{A}$,*
*Alors, il existe deux mesures finies uniquement déterminées $\nu_1$ et $\nu_2$ sur $\mathcal{A}$ telles que*

$$\nu = \nu_1 + \nu_2, \qquad \nu_1 \ll \mu, \qquad \nu_2 \perp \mu$$

**Démonstration**
*Unicité*
Soient $(\nu_1, \nu_2)$ et $(\nu_3, \nu_4)$deux couples réalisant la décomposition de l'énoncé.
si $\nu_1 + \nu_2 = \nu_3 + \nu_4$ alors $\nu_1 - \nu_3 = \nu_4 - \nu_2$ ,
Puisque

$$\nu_1 - \nu_3 \ll \mu \quad et \quad \nu_4 - \nu_2 \perp \mu$$

on a

$$\nu_1 - \nu_3 = \nu_4 - \nu_2 = 0$$

On a donc

$$\nu_1 = \nu_3, \quad \nu_4 = \nu_2.$$

**Définition 2.4.** Soient $(X; A; \mu)$ un espace mesuré et $\nu$ une mesure réelles $\sigma$-finie, La décomposition de $\nu$ fournie par le théorème de décomposition de Lebesgue est appelée la décomposition de Lebesgue de $\nu$ par rapport à $\mu$. Les mesures réelles $\nu_a$ et $\nu_s$ décomposant $\nu$ sont appelées la partie absolument continue de $\nu$ et la partie singulière de $\nu$ respectivement.

**Théorème 2.4.** *(Décomposition de Lebesgue)*
*Soient $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et $\nu$ une mesure réelles $\sigma$ - finie sur $\mathcal{A}$.*

*Il existe un couple unique de mesures réelles $\sigma$ -finies $(\nu_a, \nu_s)$ sur$\mathcal{A}$ tel que*

$$\nu = \nu_a + \nu_s, \quad avec \quad \nu_a \ll \mu \quad et \quad \nu_s \perp \mu.$$

*La décomposition $\nu = \nu_a + \nu_s$ s'appelle la décomposition de Lebesgue de $\nu$ par rapport à $\mu$.*

**Démonstration**

On montre d'abord l'existence de $\nu_a$ et $\nu_s$ lorsque $\mu$ et $\nu$ sont toutes les deux de mesures $\sigma$-finies.
Pour cela on écrit $X = \cup_{n\geq 1} X_n$ avec $X_n \in \mathcal{A}$ disjoints et

$$0 \leq \mu(X_n) < +\infty \quad et \quad 0 \leq \nu(X_n) < +\infty$$

Pour chaque $n \geq 1$, on pose :

$$\mu^{(n)} = \mu(A \cap X_n), \quad \nu^{(n)} = \nu(A \cap X_n), \quad A \in \mathcal{A}$$

Comme $\mu^{(n)}$,$\nu^{(n)}$ sont finies, le Lemme 2.2. s'applique et donnes les décomposition

$$\nu^{(n)} = \nu_a^{(n)} + \nu_s^{(n)} \quad avec \quad \nu_a^{(n)} \ll \mu^{(n)}, \nu_s^{(n)} \perp \mu^{(n)}$$

On définit maintenant les fonctions d'ensembles $\nu_a$,$\nu_s$ par

$$\nu_a(A) = \sum_{n\geq 1} \nu_a^{(n)}(A), \quad \nu_s(A) = \sum_{n\geq 1} \nu_s^{(n)}(A), \quad A \in \mathcal{A}$$

On a $\nu = \nu_a + \nu_s$ car

$$\nu(A) = \sum_{n\geq 1} \nu^{(n)}(A) = \sum_{n\geq 1} (\nu_a^{(n)}(A) + \nu_s^{(n)}(A)) = \sum_{n\geq 1} \nu_a^{(n)}(A) + \sum_{n\geq 1} \nu_s^{(n)}(A) = \nu_a(A) + \nu_s(A).$$

On voit maintenant que $\nu_a$ et $\nu_s$ sont des mesures $\sigma$-finies :pour la $\sigma$-additivité,
si $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$ est une union disjointe alors

$$\nu_a(A) = \sum_{n\geq 1} \nu_a^{(n)}(A) = \sum_{n\geq 1} \sum_{k\geq 1} \nu_a^{(n)}(A_k) = \sum_{k\geq 1} \sum_{n\geq 1} \nu_a^{(n)}(A_k) = \sum_{k\geq 1} \nu_a(A_k)$$

en échangeant des sommations de termes positifs,pour la $\sigma$-finitude :
comme $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$, on a

$$\nu_a(X_n) = \sum_{m\geq 1} \nu_a^{(m)}(X_n) \leq \sum_{m\geq 1} \nu^{(m)}(X_n) = \nu(X_n) < +\infty$$

De même pour $\nu_s$
Pour montrer que $\nu \ll \mu$, on fixe $A \in \mathcal{A}$ avec $\mu(A) = 0$.
Alors

$$\mu^{(n)}(A) = \mu(A \cap X_n) = 0 \quad et \ \ comme \quad \nu_a^{(n)} \ll \mu^{(n)}, \quad on \ \ a \quad \nu_a^{(n)}(A) = 0.$$

Il vient alors
$$\nu_a(A) = \sum_{n\geq 1} \nu^{(n)}(A) = 0, \quad soit \ \ \nu_a \ll \mu.$$
On termine la preuve ,lorsque $\nu$ est positive en montrant que $\nu_s \perp \mu$.
Pour cela , comme pour $n \geq 1$,on a $\nu_s^{(n)} \perp \mu^{(n)}$,il existe $E_n \in \mathcal{A}$tel que
$$\mu^{(n)}(E_n) = 0 \quad et \quad \nu^{(n)}(E_n^c) = 0.$$
Soient alors
$$F_n = E_n \cap X_n \quad et \quad F = \bigcup_{n\geq 1} F_n.$$
Les ensemble $F_n$ sont disjoints et
$$\mu(F) = \sum_{n\geq 1} \mu(F_n) = \sum_{n\geq 1} \mu^{(n)}(E_n) = 0,$$
Tandis que $\nu^{(n)}(X_n^c) = \nu(X_n \cap X_n^c) = 0$ et donc $\nu_s^{(n)}(X_n^c) = 0$.
Comme
$$F_n^c = E_n^c \cup X_n^c, \quad il \quad vient \quad \nu_s^{(n)}(F_n^c) = 0.$$
Finalement,
$$\nu_s(F^c) = \sum_{n\geq 1} \nu_s^{(n)}(F^c) \leq \sum_{n\geq 1} \nu_s^{(n)}(F_n^c) = 0$$
puisque $F^c \subset F_n^c$.
Ainsi $\mu(F) = 0 = \nu_s(F^c)$,soit $\nu_s \perp \mu$.
Il reste à traiter le cas de $\nu$ mesure réelles.
La décomposition de Jordan s'écrit $\nu = \nu_+ - \nu_-$ où au moins une des deux mesures $\nu_+$,$\nu_-$ est finie et l'autre $\sigma$-finie.
D'après la partie du théorème déjà prouvée dans le cas de mesures $\sigma$-finies,on peut écrire
$$\nu_+ = \nu_{+,a} + \nu_{+,s} \quad avec \quad \nu_{+,a} \ll \mu, \quad \nu_{+,s} \perp \mu.$$
$$\nu_- = \nu_{-,a} + \nu_{-,s} \quad avec \quad \nu_{-,a} \ll \mu, \quad \nu_{-,s} \perp \mu.$$
Par exemple se $\nu_-$ est finie alors $\nu_{-,a}$ et $\nu_{-,s}$ le sont aussi et
$$\nu = (\nu_{+,a} - \nu_{-,a}) + (\nu_{+,s} - \nu_{-,s}) = \nu_a + \nu_s$$
Avec
$$\nu_a = \nu_{+,a} - \nu_{-,a} \ll \mu \quad et \quad \nu_s = \nu_{+,s} - \nu_{-,s} \perp \mu$$
La décomposition de Lebesgue en découle donc lorsque $\nu$ est $\sigma$-finie signée.
Enfin,
Pour voir l'unicité, on suppose d'abord $\nu$ mesure $\sigma$-finie et
$$\nu = \nu_{a1} + \nu_{s1} = \nu_{a2} + \nu_{s2} \quad ou \quad \nu_{a1}, \nu_{a2} \ll \mu \quad et \quad \nu_{s1}, \nu_{s2} \perp \mu.$$

Comme $\mu$ et $\nu$ sont des mesures $\sigma$-finies,on peut écrire $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ avec les $X_n$ disjoints mesurables des mesures $\mu(X_n), \nu(X_n)$ finies.
Pour chaque $n \geq 1$,on définit alors $\mu^{(n)}$ et $\nu_{a1}^{(n)}$ et$\nu_{a1}^{(n)}$ et $\nu_{a2}^{(n)}$ et $\nu_{s1}^{(n)}$,$\nu_{s2}^{(n)}$ par

$$\mu^{(n)}(A) = \mu(A \cap X_n), \quad A \in \mathcal{A}$$

$$\nu_{a1}^{(n)}(A) = \nu_{a1}(A \cap X_n), \quad A \in \mathcal{A}$$
$$\nu_{a2}^{(n)}(A) = \nu_{a2}(A \cap X_n), \quad A \in \mathcal{A}$$
$$\nu_{s1}^{(n)}(A) = \nu_{s1}(A \cap X_n), \quad A \in \mathcal{A}$$
$$\nu_{s2}^{(n)}(A) = \nu_{s2}(A \cap X_n), \quad A \in \mathcal{A}$$

On a alors

$$\nu_{a1}^{(n)} + \nu_{s1}^{(n)} = \nu_{a2}^{(n)} + \nu_{s2}^{(n)}, \quad \nu_{a1}^{(n)}, \nu_{a2}^{(n)} \ll \mu^{(n)}, \quad \nu_{s1}^{(n)}, \nu_{s2}^{(n)} \perp \mu^{(n)}.$$

L'unicité du Lemme assure alors

$$\nu_{a1}^{(n)} = \nu_{a2}^{(n)} \quad et \quad \nu_{s1}^{(n)} = \nu_{s2}^{(n)} \quad pour \quad chaque \quad n \geq 1.$$

Il vient alors

$$\nu_{a1} = \sum_{n\geq 1} \nu_{a1}^{(n)} = \sum_{n\geq 1} \nu_{a2}^{(n)} = \nu_{a2}$$

De même pour $\nu_{s1} = \nu_{s2}$.
On a obtenu l'unicité lorsque $\nu$ est une mesure $\sigma$-finie.

# Chapitre 3

# Applications

## 3.1 Intégrale de Lebesgue

### 3.1.1 Fonctions simples

**Définition 3.1.** Une fonction $f(x)$, définie sur un espace mesuré X, s'appelle fonction `simple`, si elle est mesurable et prend des valeurs en nombre fini ou infini-dénombrable

### 3.1.2 Intégrale de Lebesgue pour les fonctions simples

**Définition 3.2.** Soit $f$ une fonction simple prenant les valeurs

$$y_1, y_2, ......, y_n, ....; y_i \neq y_j \quad pour \quad i \neq j,$$

et soit A un sous-ensemble mesurable quelconque de X.
L'intégrale de la fonction $f$ définie sur l'ensemble A par l'égalité

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_n y_n \mu(A_n), \tag{1}$$

où

$$A_n = \{x : x \in A, f(x) = y_n\},$$

lorsque la série du second membre de (1) converge.

**Définition 3.3.** Une fonction simple $f$ est dite intégrable ou sommable sur l'ensemble A (par rapport à la mesure $\mu$ ), si la série (1) est absolument convergente.
Si la fonction $f$ est intégrable, la somme de la série (1) s'appelle `intégrale` de $f$ sur ensemble A.

**Lemme 3.1.** *Soit $A = \cup_k B_k$, $B_i \cap B_j = \emptyset$,pour $i \neq j$ ,et soit $f$ une fonction qui prend sur chacun des ensembles $B_k$ une seule valeur $c_k$ ; alors*

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_k c_k \mu(B_k), \tag{2}$$

*la fonction $f$ est intégrable sur $A$ si et seulement si la série* (2) *est absolument convergente.*

**Démonstration**
Il est aisé de voir que chaque ensemble

$$A_n = \{x : x \in A, f(x) = y_n\},$$

est la réunion des $B_k$ pour lesquels $c_k = y_k$.
C'est pourquoi

$$\sum_n y_n \mu(A_n) = \sum_n y_n \sum_{c_k = y_k} \mu(B_n) = \sum_k c_k \mu(B_k).$$

Comme la mesure est non négative,on a

$$\sum_n \mid y_n \mid \mu(A_n) = \sum_n \mid y_n \mid \sum_{c_k = y_k} \mu(B_n) = \sum_k \mid c_k \mid \mu(B_k),$$

ce qui signifie que les séries

$$\sum_n y_n \mu(A_n) \quad et \quad \sum_k c_k \mu(B_k),$$

sont à la fois absolument convergentes ou divergentes.

### 3.1.3 Définition générale de l'intégrale de Lebesgue sur un ensemble de mesure finie

**Définition 3.4.** Une fonction $f$ est dite intégrable (sommable) sur un ensemble A, s'il existe une suite $\{f_n\}$ de fonctions simples, intégrables sur A, convergeant uniformément vers $f$.
La limite

$$I = \lim_{n \to \infty} \int_A f_n(x) d\mu,$$

s'appelle intégrale de la fonction $f$ sur l'ensemble A et se note

$$\int_A f(x) d\mu.$$

## 3.2 Mesures de Lebesgue-Stieltjes

Soit $F$ une fonction monotone croissante, donnée sur un segment [a,b], que nous supposerons continue à gauche.
Définissons la mesure de tous les intervalles fermés,ouverts et semi-ouverts contenus dans le segment donné [a,b] à l'aide des égalités

$$\begin{aligned} m(\alpha,\beta) &= F(\beta) - F(\alpha+0), \\ m[\alpha,\beta] &= F(\beta+0) - F(\alpha), \\ m(\alpha,\beta] &= F(\beta+0) - F(\alpha+0), \\ m[\alpha,\beta) &= F(\beta) - F(\alpha), \end{aligned}$$

On procède en suite au prolongement de Lebesgue, à la $\sigma$-algèbre $\mu_F$ contenant tous les sous-ensembles ouvert et fermés du segment [a,b] .
Soit $\mu_F$ cette mesure.
On l'appelle *mesure de Lebesgue-Stieltjes* engendrée par la fonction $F$.

On sait que $F = \varphi + S$
où $\varphi$ une fonction continue croissante et S une fonction de sauts continue à gauche.
On a alors

$$\mu_F = \mu_\varphi + \mu_S$$

La fonction monotone (et continue) $\varphi$ est presque partout dérivable.
Posons

$$\psi(x) = \int_a^x \varphi'(t)dt$$

Cette fonction est bien définie car $\varphi'(x)$ est sommable.
Par suite $\psi(x)$ est absolument continue. La fonction

$$\chi(x) = \varphi(x) - \psi(x)$$

est continue,
De plus

$$\chi'(x) = \varphi'(x) - \psi'(x) = 0 \qquad \textit{presque partout}$$

$\chi(x)$ est dite singulière (continue)
Par suite

$$\varphi = \psi + \chi$$

On peut maintenant énoncer la décomposition d'une fonction monotone en somme de trois fonctions

$$F = S + \psi + \chi$$

Où S est une fonction des sauts, $\psi$ est absolument continue et $\chi$ est singulière.
Donc

$$\mu_F = \mu_S + \mu_\psi + \mu_\chi.$$

Considérons quelque cas particuliers de mesure de Lebesgue-Stieltjes

1)Soient $S$ une fonction des sauts $\{x_1, x_2, ......\}$ l'ensemble de ses points de discontinuité et $h_1, h_2, ....$ les valeurs de ses sauts en ces points.
Alors la mesure $\mu_S$ engendrée par cette fonction est

$$\mu_S(A) = \sum_{x_i \in A} h_i,$$

pour tout partie A de [a,b].
La mesure $\mu_S$, obtenue à partir d'une fonction des sauts, s'appelle *mesure discrète.*

2)Soit $\psi$ une fonction absolument continue croissante sur [a,b] et soit $f = \psi'$ sa dérivée.
Alors la mesure correspondante $\mu_\psi$ est manifestement définie pour tous les sous-ensemble du segment [a,b] mesurables au sens de Lebesgue et pour tout ensemble A de ce type on a

$$\mu_\psi(A) = \int_A f(x)dx.$$

La mesure $\mu_\psi$ associée à une fonction absolument continue $\psi$ s'appelle *mesure absolument continue*

3)Si $\chi$ est une fonction continue singulière, la mesure correspondante $\mu_\chi$ est concentrée entièrement sur l'ensemble de mesure de Lebesgue nulle ou $\chi'$ est différente de zéro ou n'existe pas.

Dans ce cas la mesure $\mu_\chi$ est dite *singulière.*

Par conséquent, du fait que toute fonction monotone est somme d'une fonction des sauts, d'une fonction absolument continue et d'une fonction singulière, il résulte que toute *mesure de Lebesgue-Stieltjes* peut être représentée sous la forme d'une somme de trois composantes, dont l'une est *discrète*, la seconde *absolument continue* et la troisième *singulière.*
On en déduit la représentation de toute mesure de Lebesgue-Stieltjes comme

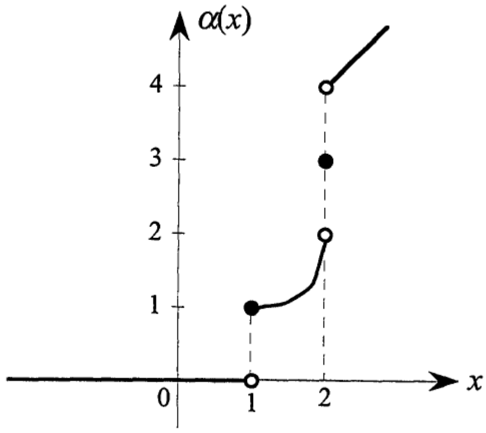
somme d'une mesure discrète,d'une mesure absolument continue et d'une mesure singulière.

**Exemple 3.1.** Soit $\alpha : R \longrightarrow R$

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0, & si\ x < 1, \\ x^2 - 2x + 2, & si\ 1 \leq x < 2, \\ 3, & si\ x = 2, \\ x + 2, & si\ x > 2, \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} \mu_\alpha[1,2] &= F(2+0) - F(1) = 4 - 0 = 4, \\ \mu_\alpha(1,2] &= F(2+0) - F(1+0) = 4 - 1 = 3, \\ \mu_\alpha[1,2) &= F(2) - F(1) = 2 - 0 = 2, \end{aligned}$$



;

## 3.3 Intégrale de Lebesgue-Stieltjes

Soit $\mu_F$ une mesure de Lebesgue-Stieltjes sur le segment[a,b], engendrée par une fonction monotone $F$.
Pour cette mesure on définit comme d'habitude la classe des fonctions sommables et la notion d'intégrale de Lebesgue

$$\int_a^b f(x) d\mu_F.$$

Une telle intégrale, prise par rapport à la mesure $\mu_F$ engendrée par la fonction $F$, s'appelle intégrale de Lebesgue-Stieltjes et se note

$$\int_a^b f(x) d\mu_F.$$

Considérons quelques cas particuliers.
1.Si $F$ est une fonction des sauts (c-à-d si $\mu_F$ est une mesure discrète),l'intégrale

$$\int_a^b f(x) d\mu_F.$$

se réduit,évidemment,à la somme

$$\sum_i f(x_i) h_i,$$

où $x_i$ sont les points de discontinuité de la fonction $F$ et $h_i$ sont les sauts de $F$ en ces points.
2.Si $F$ est une fonction absolument continue,l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes

$$\int_a^b f(x) d\mu_F,$$

est égale à

$$\int_a^b f(x) F'(x) dx,$$

c'est-à-dire l'intégrale de $f(x)F'(x)$,prise par rapport à la mesure habituelle de Lebesgue.
En effet,si $f(x) = C$ sur un ensemble A $\subset$[a,b] et $f(x) = 0$ en dehors de A,l'égalité

$$\int_a^b f(x) dF(x) = \int_a^b f(x) F'(x) dx$$

et vérifiée
Soit $\{f_n(x)\}$ une suite de fonctions simples, convergeant vers $f$.

On peut supposer que la suite $\{f_n\}$ est croissante .
Alors $\{f_n(x)\}$ est une suite croissante, presque partout convergeant vers $f(x)$,
et

$$\int_a^b f_n(x)dF(x) = \int_a^b f_n(x)F'(x)dx$$

on peut passer à la limite pour $n \to \infty$.

D'après ce qui précède, il est clair que si $F$ est somme d'une fonction des sauts et d'une fonction absolument continue, l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes pour la mesure $\mu_F$ se réduit à une série (ou somme finie) et une intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue.

# Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié les théorèmes de décomposition d'une mesure et plus particulièrement la décomposition de Lebesgue. Comme application nous avons étudié la mesure de Lebesgue-Stieltjes et l'intégrale par rapport à cette mesure.

# Bibliographie


[1] Adiaan Cornelis Zaanen. *Intégration.* University of Leiden, Netherlands, deuxième édition, 1967.

[2] Ahmed Bouziad,Jean Calbrix. *Théorie de la mesure et de l'integration* . Publication de l'université de Rouen, 1993.

[3] A.Kolmogorov,S.Fomine. *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle.* deuxième édition,Mir-moscou, 1973.

[4] M.Carter,Van.Brunt. *The Lebesgue-Stieltjes integral.* Springer-verlag, New york,2000.

[5] Michel Simonnet. *Measures and probabilities.* Springer-verlag, New york, 1996.