REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE LENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématiques

par :

Achour Saadi

Thème

Formulation variationnelle d'un problème aux limites de Dirichlet sous un problème d'optimisation quadratique

Soutenu publiquement devant le jury composé de :

Mr M. Bentobache	M.C.A, Université de Laghouat	**Président**
Mr A. Benomhani	M.C.B, Université de Laghouat	**Examinateur**
Mr A. Bougataia	M.A.A, Université de Laghouat	**Examinateur**
Mr A. Mokhtari	Pr, Université de Laghouat	**Encadreur**

Année universitaire 2016/2017

بسم الله الرحمن الرحيم

Remerciements

Mes remerciements vont tout d'abord à ALLAH pour tout ce qu'IL m'a donné.
Mes remerciements vont aussi à tous ceux qui m'ont aidé et soutenu dans ce travail, en particulier mon superviseur, Pr. Mokhtari Abdelkader, pour toute sa gentillesse, pour ses précieux conseils et pour sa patience, et vont aussi aux membres de jury : Mr. M.Bentobache comme président, Mr. A.Benomhani et Mr. A.Bougataia comme examinateurs.

Et toutes mes reconnaissances sont adressées à mes parents, ma famille, mes amis pour leurs sacrifices et leur soutien, durant ces années d'études.

الملخص

تتجلى فائدة الرياضيات عموما في معالجة المشاكل المنمذجة الناتجة عن واقع خام. تعتبر المعادلات التفاضلية من أكثر فروع الرياضيات إفادة و تطبيقا في أرض الواقع ، و ذلك لعدة عوامل نذكر منها سلاسة النمذجة و توفر طرق الحل سواء كانت تقريبية أو مضبوطة ، و من أكثر المعادلات التفاضلية شيوعا و استعمالا هي المعادلات التفاضلية وفق شروط ابتدائية و هي التي تسمى مشاكل كوشي ، غير أنه في بعض الحالات تكون الشروط الابتدائية في حدود مجال البحث حينها نطلق عليها تسمية المشاكل الحدية و هي مشاكل أصعب نوعا ما من نظيرتها الكوشية ، ما يضطرنا إلى إعادة صياغتها وفق أشكال جديدة لمشاكل من نوع آخر تماما و هذا بالضبط ما يسمى بالتشكيل التغيري للمشاكل الحدية.

تطرقنا في مذكرتنا هذه إلى نوع خاص من المشاكل الحدية و هي المسماة بمشاكل ديريخلي الحدية ، و هي من أكثر المشاكل شيوعا و استعمالا. و بشكل خاص جدا حيث تكون الدراسة على الفضاءات ذات البعد الواحد فنقوم بترجمة الأخيرة وفق ما يسمى بالتشكيل التغيري إلى نوع جديد من المشاكل و هي مشاكل التحسين وفق الشروط على مجال البحث.

الكلمات المفتاحية: متراجحة كوشي-شوارتز ، متراجحة هولدر ، متراجحة بوانكاريه ، علقة غرين ، مشكلة حدية ، شروط على مجال البحث ، مقعر.

Abstract

The utility of mathematics generally appears in the treatment of raw reality modeled problems. Differential equations, for example, is one of the most useful mathematical branches in the applied mathematics, and this is true for many reasons like easy modeling and the availability of solving methods either approximated or exact. One of the most common and used differential equations is the differential equations with initial conditions which are called Cauchy's problems. In some cases, however, the initial conditions are within the research scope, in this case, they called the boundary-value problems and they are rather more difficult than their of Cauchy counterparts, forcing us to reformulate them in new problem forms of a completely different kind and this is exactly what we call the variational formulation of boundary-value problems.

In this thesis, we have referred to a special type of boundary-value problem, which is called Dirichet's boundary-value problem, one of the most common and used problems. In particular, the study on one-dimensional spaces where we translate the latter according to the so-called variational formulation to a new type of problems that is optimization problems under constraints.

Keywords: Cauchy Schwarz's inequality, Holder's inequality, Poincaré inequality, Green's formula, Boundary-value problem, Constraints, Convex.

Résumé

L'intérêt de mathématiques apparaît généralement dans le traitement des problèmes modélisés de la réalité brute. Les équations différentielles sont l'une des branches mathématiques les plus utiles dans les domaines appliqués, et cela est vrai pour de nombreuses raisons, comme la modélisation facile et la disponibilité de méthodes de résolution approchées ou exactes. Parmi des équations différentielles les plus fréquentes et les plus utilisées sont les équations différentielles avec des conditions initiales, ces qu'on appelle de Cauchy. Dans certains cas, cependant, les conditions initiales sont à l'intérieur, dans ce cas, ils ont appelé des problèmes aux limites et ils sont plutôt plus difficiles que ceux de Cauchy, qui nous oblige à les reformuler dans de nouvelles formes de problèmes d'un genre complètement différent et c'est exactement ce que nous appelons la formulation variationnelle des problèmes aux limites.

Dans ce mémoire, on a abordé un type spécial des problèmes aux limites qui s'appelle Dirichlet problèmes aux limites, parmi les problèmes les plus courants et les plus utilisés. En particulier, l'étude sur les espaces dimensionnels de dimension un où on traduit ces derniers selon la formulation variationnelle à un nouveau type de problèmes qui sont des problèmes d'optimisation sous contraintes.

Mots clés: Inégalité de Cauchy Schwarz, Inégalité de Holder, Formule de Green, Inégalité de Poincaré, problème aux limites, Contraintes, Convexe.

Table des matières

0.1 Introduction 2
0.1.1 Problématique 2
0.1.2 Objectif 2
0.2 Organisation du mémoire 2

1 Rappels sur des outils mathématiques 4
1.1 Introduction 5
1.2 Généralités sur les formes bilinéaires et quadratiques 5
1.2.1 Formes bilinéaires symétriques et antisymétriques 5
1.2.2 Formes quadratiques 7
1.3 Rappels sur les espaces euclidiens 7
1.3.1 Produit scalaire 7
1.3.2 Orthogonalités 9
1.4 Espaces préhilbertiens, hilbertiens et théorème de projection et de Riesz 12
1.4.1 Généralités(Espaces préhilbertiens, espaces de Hilbert) 12
1.4.2 Projection d'un point sur un convexe fermé(Théorème de projection) 14
1.4.3 Applications importantes du théorème de projection 17
1.4.4 Théorème de représentation de Riesz 18
1.5 Quelques notions de démarrage 20
1.6 Optimisation à plusieurs variables sans contraintes 22
1.6.1 Conditions d'optimalité 22
1.7 Optimisation à plusieurs variables avec contraintes d'égalités 24
1.7.1 Méthode de substitution directe 25
1.7.2 Méthode des multiplicateurs de Lagrange 26
1.8 Topologie faible 29
1.8.1 Définition et propriétés élémentaire de la topologie faible $\sigma(E, E')$ 29
1.8.2 Ensembles convexes et opérateurs linéaires 29
1.8.3 Espaces réflexifs 30

1.8.4 Espaces séparable 30
1.9 Espaces L^p 31
1.9.1 Définition et propriétés élémentaire des espaces L^p 31
1.10 Les espaces de Sobolev 34
1.10.1 Définitions et premières propriétés 34
1.10.2 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ 36
1.10.3 L'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ 36
1.11 Espaces fonctionnels 37
1.12 Compléments divers 40

2 Formulation variationnelle de problème aux limites de Dirichlet en dimension un 41
2.1 Rappel 42
2.1.1 Principe des contractions 42
2.2 Introduction 44
2.2.1 Problèmes aux limites de Dirichlet 44
2.2.2 Théorème de Lax-Milgram 45
2.3 Approximation variationnelle d'un problème aux limites en dimension un 46
2.3.1 Formulation variationnelle 46
2.3.2 L'espace vectoriel $H_0^1(0,1)$ 50
2.3.3 Les relations entre les solutions faibles et les solutions fortes (classiques) 53
2.4 La formulation variationnelle et l'optimisation 54
2.4.1 Généralités sur les problèmes d'optimisation 54
2.4.2 Les relations de la formulation variationnelle et l'optimisation 60
2.5 Conclusion 63

3 Résolution d'un problème quadratique non convexe et sous contraintes linéaires 64
3.1 Introduction 65
3.2 Décomposition de la fonction objectif 67
3.3 Optimisation de la fonction concave φ 68
3.4 Maximisation de la fonction convexe ψ 73
3.4.1 La nouvelle forme de la fonction ψ 73
3.5 L'algorithme 81
3.6 Conclusion 83

4 Annexe **86**
4.1 A. Enumération des sommets 86
4.1.1 Implémentation du logiciel 86

Notations

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, les notations qu'on a utilisé dans ce mémoire sont les suivantes :

$\bar{\Omega}$	L'adhérence de Ω.
Γ	La frontière de Ω.
$D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$	L'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables à support compact contenu dans Ω.
$D'(\Omega)$	L'espace des distributions sur Ω.
$D'(0,T;E)$	L'espace des distributions des fonctions $u : [0,T] \to E$.
$\langle .,. \rangle, (.,.)$	Le produit scalaire d'un espace de Hilbert.
E'	Le dual topologique de E.
$\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$	L'espace des fonctions continues.
$L^p(\Omega)$	L'espace de Lebesgue, $1 \leq p \leq \infty$.
$L^p(0,T;E)$	L'espace des fonctions $t \to f(t)$ de $]0,T[\to E$ qui sont mesurables a valeur dans E.
$W^{1,p}(\Omega)$	L'espace de Sobolev, $1 \leq p \leq \infty$.
$W_0^{1,p}(\Omega)$	La fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.
$W^{-1,p'}(\Omega)$	Le dual toplogique de l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$.
$\rightharpoonup$	La convergence faible.
$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$	L'espace de Sobolev.
$\overset{*}{\rightharpoonup}$	La convergence faible $*$.
p.p.	Presque partout.
$\\|.\\|_p$	La norme associée á l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$.
$\\|.\\|_{H_0^1(\Omega)}$	La norme associée á l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$.
u'	La dérivée première de u par rapport aux temps notée aussi $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$.
u''	La dérivée seconde de u par rapport aux temps notée aussi $u_{tt} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

0.1 Introduction

0.1.1 Problématique

On sait que de nombreux problèmes de physique, mécanique et autre sciences exactes peuvent se ramener à la minimisation d'une certaine énergie, ou plus généralement à la recherche de points annulant la différentielle de cette énergie. C'est la base de la méthode variationnelle de résolution des problèmes aux limites qui a connu une extension considérable durant ces cinquante dernières années. En particulier cette méthode est le fondement de la méthode des éléments finis pour la résolution numérique de tels problèmes.

0.1.2 Objectif

Notre objectif dans le présent travail est de montrer que, si l'on se restreint aux problèmes à une variable, il est possible d'introduire les méthodes variationnelles en n'utilisant que peu de connaissances. Il suffit de connaître la théorie élémentaire des espaces de *Hilbert* et de l'intégrale de *Lebesgue* de fonctions d'une variable réelle. Dans le cas particulier qui intéresse des problèmes en dimension un, il n'est pas nécessaire de maîtriser la théorie des distributions de *Schwartz*, bien qu'elle soit bien sûr sous-jacente dans ce type de questions.

0.2 Organisation du mémoire

Notre mémoire est organisé de la façon suivant

1. Dans le premier chapitre : Rappels sur des outils mathématiques ; il est divisé en trois parties :
   (a) Outils des espaces *hilbertiens* ; il présente quelques définitions et quelques notions générales sur ces espaces qui sont très importants dans notre étude.
   (b) Outils d'optimisation ; remarquant que le résultat de la formulation variationnelle est un problème d'optimisation.
   (c) Outils des espaces de *Sobolev* et des espaces fonctionnels ; il est important pour le deuxième chapitre.
2. Dans le deuxième chapitre : Formulation variationnelle de problème aux limites de Dirichlet en dimension un ; on commence par étudier un exemple de problèmes aux limites avec conditions aux limites de *Dirichlet*, justifiant ainsi l'introduction du théorème de $Lax - Milgram$.

3. Dans le troisième chapitre : Résolution d'un problème quadratique non convexe et sous contraintes linéaires ; on va proposer un exemple de problèmes d'optimisation quadratique et on va proposer une méthode pour ce cas particulier, les formes quadratique sont importantes car la formulation variationnelle qui est présentée dans le deuxième chapitre transforme un problème aux limites à un problème d'optimisation quadratique.

Chapitre 1

Rappels sur des outils mathématiques

Les espaces de *Hilbert*

1.1 Introduction

Le mathématicien *allemand David Hilbert* $(1862-1943)$, le premier à avoir introduit de manière systématique les espaces qui maintenant portent son nom, est connu pour les 23 fameux problèmes qu'il proposa au congrès international des mathématiciens en 1900. Ses idées ont profondément marqué l'ensemble des mathématiciens jusqu'à l'heure actuelle, en particulier en introduisant des méthodes géométriques en analyse, donnant ainsi naissance à un domaine important des mathématiques : l'analyse fonctionnelle. Les méthodes géométriques présentées dans ce mémoire sont basées sur la notion de produit scalaire et d'orthogonalité. Dans ce paragraphe, nous introduisons l'espace de *Hilbert* avec ses propriétés élémentaires. Nous caractériserons la norme qui est déduite d'un produit scalaire. S'il n'y a pas de spécification le corps $\mathbb{K}$ est, comme auparavant, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Dans cette partie $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.2 Généralités sur les formes bilinéaires et quadratiques

1.2.1 Formes bilinéaires symétriques et antisymétriques

Définition 1.2.1. *(les formes bilinéaires) On appelle forme bilinéaire sur* $E \times E$ (E *est un* $\mathbb{K}-$ *espace vectoriel*) *toute application* $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ *telle que :*

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (x, x\prime, y) \in E^3, \varphi(\alpha x + x\prime, y) = \alpha \varphi(x, y) + \varphi(x\prime, y)$$

φ *est linéaire par rapport à la 1*$^{\text{ère}}$ *place.*

$$\forall \beta \in \mathbb{K}, \forall (x, y, y\prime) \in E^3, \varphi(x, \beta y + y\prime) = \beta \varphi(x, y) + \varphi(x, y\prime)$$

φ *est linéaire par rapport à la 2*$^{\text{ème}}$ *place.*

Notation 1.2.1. *Nous notons $L(E, E; \mathbb{K})$ l'ensemble des formes bilinéaires sur $E \times E$.*
Il est immédiat que $L(E, E; \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel.

Proposition 1.2.1. *Soient φ une forme bilinéaire sur $E \times E$, $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_p \in \mathbb{K}$, $x_1, ..., x_n$, $y_1, ..., y_p \in E$. On a alors :*

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{p} \beta_j y_j\right) = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}^{n} \alpha_i \beta_j \varphi(x_i, y_j).$$

Démonstration. On a, par récurrence immédiate sur n :

$$\forall y \in E, \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, y\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(x_i, y),$$

d'où

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{p} \beta_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi\left(x_i, \sum_{j=1}^{p} \beta_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{p} \beta_j \varphi(x_i, y_j)\right)$$

$$= \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}^{n} \alpha_i \beta_j \varphi(x_i, y_j).$$

□

Définition 1.2.2. *Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est dite symétrique si et seulement si : $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(y, x) = \varphi(x, y)$. On abrègera forme bilinéaire symétrique en : fbs.*

Notation 1.2.2. *Nous notons $S(E; \mathbb{K})$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur $E \times E$. Il est immédiat que $S(E; \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}-$ sous espace vectoriel (sev) de $L(E, E; \mathbb{K})$.*

Proposition 1.2.2. *Pour qu'une application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ soit une fbs, il faut et il suffit que l'on ait :*

- *φ est symétrique ;*
- *φ est linéaire par rapport à la $2^{ème}$ place.*

1.2.2 Formes quadratiques

Définition 1.2.3. *Soit φ une fbs sur $E \times E$. On appelle forme quadratique associée à φ l'application, souvent notée ϕ, de E dans $\mathbb{K}$ définie par :*

$$\forall x \in E, \varphi(x,x) = \phi(x).$$

On abrègera forme quadratique en : fq.

Proposition 1.2.3. *Soient φ une fbs sur $E \times E$, ϕ la fq associée à φ. On a :*

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}, \forall x_1, ..., x_n \in E,$
$$\phi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \phi(x_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j \varphi(x_i, y_j);$$
2. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha^2 \phi(x) + 2\alpha\beta\varphi(x,y) + \beta^2 \phi(y);$
3. $\forall (x,y) \in E^2, \phi(x+y) = \phi(x) + 2\varphi(x,y) + \phi(y);$
4. $\forall (x,y) \in E^2, \varphi(x,y) = 1/4(\phi(x+y) - \phi(x-y));$
5. $\forall (x,y) \in E^2, \phi(x+y) + \phi(x-y) = 2\phi(x) + \phi(y).$

Proposition 1.2.4. *Soit $\phi : E \to \mathbb{K}$ une application. On dit que ϕ est une forme quadratique si et seulement s'il existe une fbs $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ telle que ϕ soit la fq associée à φ.*

Notation 1.2.3. *Notons $Q(E)$ l'ensemble des fq sur E.*

Remarque 1.1. *Il est clair que l'application $U : S(E; \mathbb{K}) \to Q(E)$ qui, à toute fbs φ sur $E \times E$ fait correspondre la fq associée à φ, et l'application $V : Q(E) \to S(E; K)$ qui, à toute fq ϕ sur E associe la forme polaire de ϕ, sont des bijections réciproques l'une de l'autre.*

1.3 Rappels sur les espaces euclidiens

1.3.1 Produit scalaire

Définition 1.3.1. *(produit scalaire) Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$. Un produit scalaire sur E est une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ telle que pour tout $x, x_1, x_2, y \in E$, et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :*

1. $\varphi(x,x) \geq 0$ *et* $\varphi(x,x) = 0$ *si et seulement si* $x = 0$ *;*

2. $\varphi(x, y) = \overline{(\varphi(y, x))}$;
3. $\varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$;
4. $\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x, y)$.

Remarque 1.2. *Les propriétés suivantes d'un produit scalaire induit par les axiomes* 1. *à* 4. *:*

i) $\langle 0, x\rangle = \langle x, 0\rangle = 0$, *pour tout* $x \in E$,
ii) $\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \lambda_i \overline{\mu_j}\langle x_i, y_j\rangle$, *pour tout* $x_i, y_j \in E$, λ_i, $\mu_j \in \mathbb{K}$.

Définition 1.3.2. *(définition de produit scalaire dans le cas réel) On appelle produit scalaire sur* E *toute fbs* φ *sur* $E \times E$ *telle qu'en notant* ϕ.

Notation 1.3.1. *Lorsque* φ *est un produit scalaire, on note souvent* $(x\backslash y)$ *ou* $\langle x, y\rangle$ *ou* $x.y$ *à la place de la fq associée à* φ*, on ait :*

i) $\forall x \in E : \phi(x) \geq 0$;
ii) $\forall x \in E : (\phi(x) = 0) \Rightarrow (x = 0)$.

Notation 1.3.2. *Lorsque* φ *est un produit scalaire, on note souvent* $(x\backslash y)$ *ou* $\langle x, y\rangle$ *ou* $x.y$ *à la place de* $\varphi(x, y)$.

Définition 1.3.3. *On appelle espace euclidien tout couple* (E, φ) *où* E *est un* $\mathbb{R}-e.v$ *de dimension finie et* φ *un produit scalaire sur E. abrègera espace vectoriel euclidien en : eve.*

Théorème 1.3.1. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soient* (E, φ) *un eve,* ϕ *la fq associée à* φ*. On a alors :*

$$\forall x, y \in E, \quad \varphi(x, y)^2 \leq \phi(x)\phi(y).$$

Ou

$$|\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle^{1/2} \cdot \langle y, y\rangle^{1/2}.$$

Démonstration. On procède comme d'habitude, pour cette inégalité, on introduit un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$. De la positivité du produit scalaire, on déduit

$$\langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in E, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Mais, de la bilinéarité, on déduit :

$$\langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle - 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle \geq 0, \forall x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ce trinôme du second degré en λ reste toujours positif. Nécessairement, son discriminant est négatif;

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle.$$

Ceci conduit à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

Proposition 1.3.1. *(Étude du cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz) Soient (E, φ) un eve, ϕ la fq associée à $\varphi, (x, y) \in E^2$; on a :*

$$\varphi(x, y)^2 = \phi(x)\phi(y) \iff \{x, y\} \quad \textit{lié}.$$

Théorème 1.3.2. *(Inégalité de Minkowski) Soient (E, φ) un eve, ϕ la fq associée à φ ; on a :*

$$\forall (x, y) \in E^2, \phi(x + y)^{1/2} \leq \phi(x)^{1/2} + \phi(y)^{1/2}.$$

Proposition 1.3.2. *(Étude du cas d'égalité dans l'inégalité de Minkowski) Soient (E, φ) eve, ϕ la fq associée à φ, $(x, y) \in E^2$; On a :*

$$(\phi(x + y))^{1/2} = (\phi(x))^{1/2} + (\phi(y))^{1/2}) \iff (x = 0 \quad \textit{ou} \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+, y = \alpha x).$$

On traduit cette dernière condition par : x, y est positivement liée.

Proposition 1.3.3. *(et définition) Soient (E, φ) un eve, ϕ la fq associée à φ. L'application $\|.\| : E \underset{x \longrightarrow (\phi(x))^{1/2}}{\rightarrow} \mathbb{K}$ est une norme sur E, appelée norme euclidienne associée à φ.*

Remarque 1.3. *Soient $\langle ., . \rangle$ un produit scalaire sur $E, ||.||$ la norme euclidienne associée. Les formules obtenues en $1), 2)$ proposition$(1.2.3)$, $3), 4), 5)$ peuvent être récrites sous la forme suivante, pour tout (x, y) de E^2 :*

- $||x + y||^2 = ||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + ||y||^2$;
- $||x + y||^2 - ||x - y||^2 = 4\langle x, y\rangle$;
- $||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz peut être récrite :

- $(\langle x, y\rangle)^2 \leq ||x||^2||y||^2$.

Et l'inégalité de Minkowski peut être récrite :

- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

1.3.2 Orthogonalités

Définition 1.3.4. *Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace vectoriel euclidien.*

1. *Soit $(x, y) \in E^2$; on dit que x est orthogonal à y, et on note $x \perp y$, si :*

$$\langle x, y\rangle = 0.$$

2. *Soient $x \in E$,$A \in P(E) :=$ l'ensemble de tous les parties de E ; on dit que x est orthogonal à A, et on note $x \perp A$, si :*

$$\forall a \in A, \langle x, a\rangle = 0.$$

3. *Pour toute partie A de E, on définit l'orthogonal de A, noté $A^{\perp}$:*

$$A^{\perp} = \{x \in E; \forall a \in A : \langle x, a \rangle = 0\}.$$

4. *Une famille $x_{ii \in I}$ d'éléments de E est dite orthogonale si :*

$$\forall (i, j) \in I^2 : (i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle = 0).$$

5. *Une famille $x_{ii \in I}$ d'éléments de E est dite orthonormale si :*

$$(x_i)_{i \in I} \quad \textit{est} \quad \textit{orthogonale} \quad \textit{et} \quad \forall i \in I : \|x_i\| = 1.$$

Remarque 1.4.

1. $0 \perp x$ *pour tout* $x \in H$;
2. $x \perp y \Longleftrightarrow y \perp x$, *symétrie ;*
3. $x \perp x \Rightarrow x = 0$;
4. $x \perp x_i$ *et* $\lambda_i \in \mathbb{K}, i = 1, \ldots, n \Rightarrow x \perp \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$;
5. $x \perp x_n$ *et* $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0 \Rightarrow x \perp x_0$;
6. *Soit* $\langle x_i, x_j \rangle = 0; i \neq j; i, j = 1, \ldots, n$ *alors*

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

Si on prend $n = 2$, *dans* (6) *on obtient*

$$\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \quad \textit{si} \quad x_1 \perp x_2.$$

Dans léspace vectoriel $\mathbb{R}^2$, *c'est le théorème de* Pythagore.

Proposition 1.3.4. *Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un eve.*

1. *Pour toute partie A de E, $A^{\perp}$ est un sev de E.*
2. $\forall (A, B) \in (P(E))^2 : \quad A \subset B \Rightarrow A^{\perp} \supset B^{\perp}$.
3. $\forall A \in P(E), A^{\perp} = Vect(A)^{\perp}$ *(tel que $Vect(A)$ est l'espace vectoriel engendré par A).*
4. *Pour tout sev F de E : $F \oplus F^{\perp} = E$, et donc :*

$$dim(F^{\perp}) = dim(E) - dim(F).$$

5. $\forall A \in P(E)$, $A^{\perp\perp} = Vect(A)$.
6. $E^{\perp} = \{0\}$ *et* $\{0\}^{\perp} = E$.

7. $\forall A \in P(E),\ A \cap A^{\perp} \subset \{0\}$.
8. *Pour tous sev F, G de E :*

$$(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp} \quad et \quad (F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}.$$

Proposition 1.3.5. *Soient $(E, \langle ., . \rangle)$ un eve, $x_{ii\in I}$ une famille dans E.*

$$\left\{ \begin{array}{c} x_{ii\in I} \text{ est orthogonale} \\ \forall i \in I, x_i \neq 0 \end{array} \right| \Longrightarrow x_{ii\in I} \text{ est libre.}$$

Proposition 1.3.6. *(Théorème de Pythagore) Soient $(E, \langle ., . \rangle)$ un eve, $(x, y) \in E^2$. On a :*

$$x \perp y \iff ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 \iff ||x-y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

Théorème 1.3.3. *(Orthogonalisation de Schmidt)*
Soient $(E, \langle ., . \rangle)$ un eve, $p \in \mathbb{N}^*$, $(e_1, ..., e_p)$ une famille libre dans E. Il existe $(V_1, ..., V_p) \in E^p$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{c} V_1, ..., V_p \text{ sont deux à deux orthogonaux} \\ \forall k \in \{1, ..., p\}, Vect(V_1, ..., V_k) = Vect(e_1, ..., e_p) \end{array} \right\}$$

avec : $\forall k \in \{1, ..., p\}, V_k \neq 0$.

Corollaire 1.3.1. *(Théorème de la base orthonormée incomplète)*
Pour toute famille orthonormale $(e_1, ..., e_p)$ d'un eve E, il existe $e_{p+1}, ..., e_n \in E$ (où $n = dim(E)$ tels que $(e_1, ..., e_n)$ soit une base orthonormée (b.o.n.) de E.

Corollaire 1.3.2. *Tout eve admet au moins une b.o.n.*

Définition 1.3.5. *Soient φ une fbs sur $E \times E$ et $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. On appelle matrice de φ dans (ou : relativement à) B, et on note $Mat_B(\varphi)$, la matrice carrée d'ordre n, symétrique suivante :*

$$Mat_B(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Proposition 1.3.7. *Si $B = (e_1, ..., e_n)$ est une b.o.n. de $(E, \langle ., . \rangle)$ alors :*

$$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x \rangle e_i.$$

Proposition 1.3.8. *Soient $(E, \langle .,. \rangle)$ un eve, B une base de E, $A = Mat_B(\langle .,. \rangle)$. Alors :*

$$\begin{bmatrix} B \quad est \quad orthogonale \quad si \quad et \quad seulement \quad si \quad A \in D_n(R) \\ B \quad est \quad orthonormale \quad si \quad et \quad seulement \quad si \quad A = I_n \end{bmatrix}.$$

Proposition 1.3.9. *Si B est une b.o.n. de E, on a, pour tout (x, y) de E^2 et en notant $X = Mat_B(x)$, $Y = Mat_B(y)$:*

$$\langle x, y \rangle = XY^t.$$

1.4 Espaces préhilbertiens, hilbertiens et théorème de projection et de Riesz

1.4.1 Généralités(Espaces préhilbertiens, espaces de Hilbert)

Définition 1.4.1. *(espace préhilbertien) Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.*

Théorème 1.4.1. *Dans un espace préhilbertien E, l'application $\|.\| : E \to \mathbb{R}$, donnée par $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$, pour tout $x \in E$, est une norme pour E.*

Démonstration. Nous avons $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$, de plus

$$\|\lambda x\| = \langle \lambda x, \lambda x \rangle^{1/2} = (\lambda\overline{\lambda}\langle x, x \rangle)^{1/2} = (|\lambda|^2 \langle x, x \rangle)^{1/2} = |\lambda| \langle x, x \rangle^{1/2} = |\lambda| \|x\|.$$

Enfin

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2Re\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

D'où

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

La norme $\|.\|$ ainsi définie s'appelle la norme induite par le produit scalaire. $\square$

Théorème 1.4.2. *(Loi du parallélogramme) La norme induite par le produit scalaire satisfait l'égalité*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Démonstration. En effet,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Les égalités

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle) = 4Re\langle x,y\rangle$$

$$\|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2 = 4Im\langle x,y\rangle$$

Nous amènent à

$$4\langle x,y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2).$$

Cette égalité nous montre que deux produits scalaires différents sur E entraînent deux normes induites différentes.

□

Théorème 1.4.3. *Un produit scalaire est une fonction continue sur $E \times E$, par rapport à la norme induite.*

Démonstration. Soient $x_0, y_0 \in E$ et les suites $x_n)$ et (y_n) de E telles que $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0$ et $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y_0$.

Alors $|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| = |\langle x_n - x_0, y_n\rangle + \langle x_0, y_n - y_0\rangle|$

$$\leq |\langle x_n - x_0, y_n\rangle| + |\langle x_0, y_n - y_0\rangle|$$

$$\leq \|x_n - x_0\|\|y_n\| + \|x_0\|\|y_n - y_0\|.$$

D'où

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle x_0, y_0\rangle.$$

□

Définition 1.4.2. *(Espace de Hilbert) Un espace de Hilbert(ou hilbertien) est un espace vectoriel normé complet par rapport à la norme induite par un produit scalaire. En d'autres mots, un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme est induite par un produit scalaire(géné ralement, le corps de base est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).*

Dans toute la suite de ce mémoire, H sera un espace hilbertien de dimension infinie, et $(x, y) \in H^2 \longrightarrow \langle x, y\rangle$ un produit scalaire sur H.

Définition 1.4.3. *On dit q'une suite (x_n) est de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall p > q \geq n_0 \in \mathbb{N} : \mid x_p - x_q \mid < \varepsilon.$$

On dit que E est complet si et seulement si toute suite de Cauchy de E converge dans E.

1.4.2 Projection d'un point sur un convexe fermé(Théorème de projection)

Définition 1.4.4. *(la convexité) Soit E un e.v. réel et $K \subset E$,*

- *On dit que K est convexe si*

$$\forall (x, y) \in K^2, \forall t \in [0, 1] : tx + (1-t)y \in K.$$

(On note encore $[x, y] \subset K$).

- *On dit que K est dite strictement convexe si*

$$\forall (x, y) \in K^2, \forall t \in]0, 1[: tx + (1-t)y \in K.$$

Ou un ensemble K est convexe si, pour toute paire de points (a, b) de K, K contient aussi le segment $[a, b]$.

Remarque 1.5. *La notion d'« ensemble concave» n'existe pas.*

Théorème 1.4.4. *(Théoréme de projection) Soit $C \subset H$ une partie convexe fermée non vide. Pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que $d(x, C) = ||x - y||$, $y = x_C$ est appelé projeté orthogonal de x sur C.*

Démonstration. Pour tout $z \in C$ on a $||x - z|| \geq d(x, C)$ (qui existe, puisque c'est l'inf d'une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0). Par définition, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ tel que :

$$d(x, C) \leq ||x - x_n|| \leq d(x, C) + 1/n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrons que (x_n) est de Cauchy ; ainsi, H étant hilbertien c'est un espace complet, donc on pourra conclure quant à laconvergence de la suite (x_n) :

Soit $p, q \in \mathbb{N}$, et notons $\delta = d(x, C)$. H étant un espace de Hilbert, l'identité du parallélogramme est vérifiée, donc

$$2(||x - x_p||^2 + ||x - x_q||^2) = ||(x - x_p) - (x - x_q)||^2 + ||(x - x_p) + (x - x_q)||^2$$

et on a

$$2(||x - x_p||^2 + ||x - x_q||^2) = ||x_p - x_q||^2 + 4||x - (x_p + x_q)/2||^2.$$

Or C est convexe, donc $(x_p + x_q)/2 \in C$, donc

$$||x - (x_p + x_q)/2||^2 \geq \delta^2.$$

En réorganisant, on a donc

$$||x_p - x_q||^2 \leq 2(||x - x_p||^2 - \delta^2 + ||x - x_q||^2 - \delta^2).$$

Or il apparaît par comparaison que

$$\underset{p \to +\infty}{lim} ||x - x_p|| = \delta,$$

donc

$$\underset{p \to +\infty}{lim} ||x - x_p||^2 = \delta^2.$$

D'où pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p \geq n_0 : |(||x - x_p||^2 - \delta^2)| \leq \varepsilon^2/2.$$

D'où pour $p, q \geq n_0$ on a $||x_p - x_q|| \leq \varepsilon$, donc (x_n) est bien une suite de Cauchy, donc elle converge vers $y \in \overline{C}$ car H est complet. Mais C est fermé, donc $C = \overline{C}$ et $y \in C$. On a

$$\underset{n \to +\infty}{lim} ||x - x_n|| = ||x - y||$$

par continuité de l'application norme, donc par unicité de la limite,

$$||x - y|| = \delta = d(x, C).$$

Enfin, si on prend $y, z \in C$ vérifiant $||x - y|| = ||x - z|| = d(x, C)$: on construit une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $c_n = y$ si n est pair, $c_n = z$ si n est impair. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $||x - c_n|| = \delta$ donc avec le même raisonnement que ci-dessus, cela implique la convergence de la suite (c_n), et donc $y = z$. Il y a donc unicité du projeté orthogonal, ce que l'on souhaitait démontrer. $\square$

Proposition 1.4.1. *Soit C un convexe fermé non vide de H, $x \in H$ quelconque. Alors il existe un unique $y \in C$ vérifiant*

$$\forall c \in C, \langle c - y, x - y \rangle \leq 0,$$

et $y = x_C$ projection orthogonale de x sur C (c'est une caractérisation de x_C).

Démonstration.

- Si il existe $y \in C$ vérifiant l'hypothèse de la proposition, pour $z \in C$ on a :

$$||z - x||^2 = ||z - y + y - x||^2 = ||z - y||^2 + ||y - x||^2 - 2\langle z - y, y - x \rangle.$$

Donc l'hypothèse assure que $||z - x||^2 \geq ||y - x||^2$ donc cela étant vrai pour tout $z \in C, ||y - x|| \leq d(x, C)$; mais $y \in C$ donc $||y - x|| \geq d(x, C)$ donc finalement $||x - y|| = d(x, C)$. Ayant unicité du projeté orthogonal d'aprés le théorème(1.4.1), on a bien $y = x_C$.

- Vérifions maintenant que x_C vérifie bien l'hypothèse de l'énoncé.
On a pour tout $z \in C$: $||x - z|| \geq ||x - x_C||$ et

$$||x - z||^2 = ||x - x_C + x_C - z||^2 = ||x - x_C||^2 - 2\langle x - x_C, x_C - z \rangle + ||x_C - z||^2.$$

Donc

$$2\langle z - x_C, x - x_C \rangle \leq ||z - x_C||^2.$$

Nous avons presque le résultat attendu, mais il nous faut se débarrasser du membre de droite. Pour cela, on paramètre le problème : fixons $z_0 \in C$, ayant C convexe on a pour tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$z = \lambda z_0 + (1 - \lambda) x_C \in C.$$

D'où en appliquant le petit calcul ci-dessus, ayant $z - x_C = \lambda(z_0 - x_C)$, nous avons

$$2\lambda \langle z_0 - x_C, x - x_C \rangle \leq \lambda^2 ||z_0 - x_C||^2.$$

Pour $\lambda \in]0; 1]$ cela donne

$$2\langle z_0 - x_C, x - x_C \rangle \leq \lambda ||z_0 - x_C||^2.$$

Avec $\lambda \to 0+$ on a bien le résultat attendu. □

1.4.3 Applications importantes du théorème de projection

Lemme 1.4.1. *Pour toute partie A de $H, A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé de H.*

Démonstration. Le fait que $A^{\perp}$soit un sous-espace est évident. Montrons qu'il est fermé :

Si on prend $y \in \overline{A^{\perp}}$ il existe une suite (y_n) d'éléments de $A^{\perp}$ qui converge vers y. La fonction $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ est continue d'aprés l'inégalité de $Cauchy - Schwarz$; or $\forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}$ on a $\langle x, y_n\rangle = 0$ donc avec $n \to +\infty$ on a $\langle x, y\rangle = 0$ par continuité, donc $y \in A^{\perp}$: $A^{\perp}$ est bien un fermé. □

Nous avons maintenant deux petites propositions trés importantes, et qui généralisent des résultats déjà vus en dimension finie.

Proposition 1.4.2. *Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. On a*

1. $F \oplus F^{\perp} = H$ *;*
2. *Pour tout $x\in H$, on a $x_F = p_F(x)$ projection orthogonale sur F ; ainsi $x - x_F \in F^{\perp}$;*
3. $(F^{\perp)^{\perp}} = F$.

Démonstration.

1+2 : le fait que F et $F^{\perp}$sont en somme directe ne pose aucun problème. Montrons que pour $x \in H$ il existe $(y, z) \in F \times F^{\perp}$ tel que $x = y + z$. F est un sous-espace vectoriel, c'est donc en particulier un convexe ; étant de plus fermé, d'aprés le *théorème(1.4.1)*, il existe un unique $x_F \in F$ tel que $d(x, F) = ||x - x_F||$. Notons $y = x - x_F$; d'aprés la *proposition(1.4.1)*, on a pour tout $f \in F\langle f - x_F, y\rangle \leq 0$. Soit $y_0 \in F$ fixé. Comme F est un espace vectoriel, $y_0 + x_F \in F$ et $-y_0 \in F$: cela implique $\langle y_0, y\rangle \leq 0$ et $\langle -y_0, y\rangle \leq 0$ donc $\langle y_0, y\rangle = 0$. Ceci étant vrai pour tout $y_0 \in F$, on a bien $y = x - x_F \in F^{\perp}$ donc les affirmations 1 et 2 sont démontrées.

3 : On a toujours $F \subset F^{\perp^{\perp}}$. Montrons l'inclusion inverse. On a d'aprés l'affirmation 1 de cette proposition que $H = F \oplus F^{\perp}$. Donc pour $x \in F^{\perp^{\perp}}$ il existe un unique couple $(x_F, x_{F^{\perp}}) \in F \times F^{\perp}$ tel que $x = x_F + x_{F^{\perp}}$. Or l'on a $||x_{F^{\perp}}||^2 = ||x - x_F||^2$ donc $||x_{F^{\perp}}||^2 = \langle x - x_F, x - x_F\rangle = \langle x, x - x_F\rangle - \langle x_F, x - x_F\rangle$.

Ayant $x \in F^{\perp^{\perp}}$, $x - x_F \in F^{\perp}$ on a $\langle x, x - x_F\rangle = 0$; de même, comme $x_F \in F$ et $x - x_F \in F^{\perp}$, $\langle x_F, x - x_F\rangle = 0$. Donc $||x_{F^{\perp}}|| = 0$ donc $x_{F^{\perp}} = 0$: $x \in F$, ce qu'il fallait démontrer. □

Proposition 1.4.3. *Soit F un sous-espace quelconque de H. Alors on a :*

1. $\overline{F} = F^{\perp^\perp}$ *;*

2. F *dense dans* $H \iff F^\perp = \{0\}$.

Démonstration. 1. On a toujours $F \subset F^{\perp^\perp}$; donc $F \subset F^{\perp^\perp}$. Ainsi, le lemme(1.4.1) affirmant que $F^{\perp^\perp}$ est unfermé, on a $F \subset F^{\perp^\perp}$.

On a toujours $F \subset F$; par orthogonalité, on a donc $F^\perp \subset F^\perp$donc en recomposant, $F^{\perp^\perp} \subset F^{\perp^\perp}$. Or F est un fermé, donc l'affirmation 3 de la proposition (1.4.2) nous donne $F = F^{\perp^\perp}$. Ainsi, $F^{\perp^\perp} \subset F$. On a donc bien par double inclusion $F = F^{\perp^\perp}$.

2. On a F dense $\iff F = H \iff F^{\perp^\perp} = H$ d'aprés ci-dessus.

Or l'affirmation 1 de la proposition(1.4.2) nous donne $H = F^\perp \oplus F^{\perp^\perp}$donc F dense $\iff F^\perp = \{0\}$.

□

1.4.4 Théorème de représentation de Riesz

Théorème 1.4.5. *(de représentation de Riesz) Soit H' le* ***dual topologique*** *de H (c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur H).*

Soit $a \in H$, on note $\phi_a : x \in H \mapsto \langle a, x\rangle \in \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Alors $\phi : a \in H \mapsto \phi_a \in H'$ est bien définie, et c'est un isomorphisme de H sur H'.

Démonstration. Tout d'abord, ϕ est bien définie car l'inégalité de Cauchy-Schwarz assure la continuité de la fonction $\phi_a(a \in H$ fixé).

ϕ est injective : si $\phi_a = 0$ alors en particulier, $\phi_a(a) = \langle a, a\rangle = ||a||^2 = 0$ donc $a = 0$ et $ker\phi = \{0\}$.

Montrons que ϕ est surjective. Soit $L \in H\prime$. Si $L = 0L = \phi(0)$ et c'est bon; sinon, notons $E = kerL$, E est un hyperplan de H.

Ayant $E = L^{\langle -1\rangle}(\{0\})$ et L continue, E est un fermé de H. D'après la proposition(1.4.2), $E \oplus E^\perp = H$. Ayant L différente de l'application nulle, il existe $u \in E^\perp$tel que $L(u) \neq 0$. On a en fait $E = Vecta$: si on prend $x \in E^\perp$et si on note $w = x - \frac{L(x)}{L(a)}a$ on a $L(w) = L(x) - \frac{L(x)}{L(a)}L(a)$ par la linéarité, donc $L(w) = L(x) - L(x) = 0 : w \in E$. Or $w \in E^\perp$ par construction, donc $w \in E \cap E \perp = \{0\}$ d'où $x = \frac{L(x)}{L(a)}a : x \in Vecta$ et par double inclusion (l'autre inclusion étant évidente) on a bien $E^\perp = Vect(a)$.

On a donc pour tout $x \in H : x = \frac{L(x)}{L(a)}a + x_E$, $x_E \in E$. Notons maintenant $b = \frac{L(x)}{\|a\|^2}a$.On pour tout $x \in H$

$$\langle x, b\rangle = \langle \frac{L(x)}{L(a)}a + x_E, \frac{L(x)}{\| a \|^2}a\rangle = \frac{L(x)}{L(a)}\frac{L(x)}{\| a \|^2}\langle a, a\rangle = L(x)$$

car $x_E \in E$ et $a \in E^\perp$. D'où l'on a $L = \phi_b$ et ϕ est bien surjective.

En conclusion, φ est bien un isomorphisme, il y a donc isomorphisme entre H et son dual topologique.

$\square$

Introduction à l'optimisation

1.5 Quelques notions de démarrage

L'optimisation vise à résoudre des problèmes où l'on cherche à déterminer parmi un grand nombre de solutions candidates celle qui donne le meilleur rendement. Plus précisément, on cherche à trouver une solution satisfaisant un ensemble de contraintes qui minimise ou maximise une fonction donnée. L'application de l'optimisation est en expansion croissante et se retrouve dans plusieurs domaines. Les problèmes considérés dans ce document s'écrivent sous la forme standard

$$\min_{s.c. x \in S} f(x) \tag{1.1}$$

Où $x = (x_1, x_2, .., x_n)^\top$ *est un vecteur de* $\mathbb{R}^n, f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *est la fonction que l'on désire minimiser (appelée* fonction objectif*),* $S \subseteq \mathbb{R}^n$ *est l'ensemble dans lequel les points doivent appartenir, et s.c. est l'abréviation de sous la ou les contraintes.*

La formulation (1.1) *signifie que l'on cherche à trouver une solution du domaine réalisable* $x^* \in S$ *dont la valeur de la fonction objectif est la plus petite.*

Définition 1.5.1. *Une solution* $x^* \in S$ *est un minimum global de la fonction* f *sur le domaine* S *si*

$$f(x^*) \leq f(x) \forall x \in S.$$

La valeur optimale est $f(x^*)$*.*

Notez que le minimum global n'est pas nécessairement unique, mais la valeur optimale l'est. Par exemple, le problème d'optimisation suivant

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{min} \quad sin(x)$$

possède une infinité de minima globaux, soient $\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ *mais une seule valeur optimale :* -1*.*

Définissons maintenant la notion d'optimalité dans un voisinage restreint. Pour introduire cette idée, on va définir $B_\varepsilon(x^*)$ *comme étant l'ensemble des points de*

$\mathbb{R}^n$ *dont la distance à* x^* *est inférieure à* ε*, un scalaire positif donné. Cet ensemble est communément appelé une boule de rayon* ε *centrée en* x^* *, et s'écrit formellement :*

$$B_\varepsilon(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x - x^* \| < \varepsilon\}.$$

Définition 1.5.2. *Une solution* $x^* \in S$ *est un minimum local de la fonction* f *sur le domaine* S *si*

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in S \cap B_\varepsilon(x^*).$$

Les maxima sont définis de façon similaire, il suffit de remplacer les inégalités $(\leq)$ *aux définitions* 1.5.1 *et* 1.5.2 *par* $(\geq)$*.*

Le gradient d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *différentiable. évalué au point* $x \in \mathbb{R}^n$ *est un vecteur de* $\mathbb{R}^n$ *s'écrivant*

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)^T.$$

La dérivée directionnelle de f *en* $x \in \mathbb{R}^n$ *dans la direction unitaire* $d \in \mathbb{R}^n$ *est*

$$f'(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+td) - f(x)}{t} = d^T.\nabla f(x).$$

De plus, si les dérivées secondes de f *existent et sont continues, alors la matrice Hessienne s'écrit*

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} & \cdots & f''_{x_1x_n} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} & \cdots & f''_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_nx_1} & f''_{x_nx_2} & \cdots & f''_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

Définition 1.5.3. *Une matrice symétrique* A *de dimension* $n \times n$ *est dite*

- *Semi-définie positive si* $\langle y, Ay \rangle = y^T Ay \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}^n$.
- *Définie positive si* $\langle y, Ay \rangle = y^T Ay > 0, \forall y \neq 0 \in \mathbb{R}^n$.
- *Semi-définie négative si* $\langle y, Ay \rangle = y^T Ay \leq 0, \forall y \in \mathbb{R}^n$.
- *Définie négative si* $\langle y, Ay \rangle = y^T Ay < 0, \forall y \neq 0 \in \mathbb{R}^n$.

Si aucune des propriétés ci-dessus n'est satisfaite, la matrice A *est dite indéfinie.*

Une façon simple de vérifier si une matrice est définie positive est de considérer les déterminants *des* n *sous matrices suivantes de* A

$d_1 = \det(a_{11})$,

$d_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,

$$d_3 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, ..., d_n = \det(A).$$

Ces n déterminants sont appelés les mineurs principaux dominants. Dans le cas la matrice est inversible, et donc lorsque $d_n \neq 0$, il est toujours facile de déterminer si une matrice est définie positive, définie négative ou bien indéfinie. En effet, il suffit d'analyser le signe de chacun des mineurs principaux dominants.

Classement d'une matrice inversible

Soit $d_1, d_2, ...d_n$ les mineurs principaux dominants d'une matrice A symétrique inversible de dimension $n \times n$ et $e_1, e_2, ..., e_n$ les mineurs principaux dominants de la matrice $-A$.

· *Si $d_i > 0$ pour chaque $i \in \{1, 2..., n\}$ alors A est définie positive ;*
· *Si $d_j < 0$ pour chaque $j \in \{1, 2..., n\}$ alors A est définie négative ;*
· *Sinon A est indéfinie.*

La vérification qu'une matrice singulière est semi-définie positive, semi-définie négative ou indéfinie requiert beaucoup plus de calculs. Par exemple, pour montrer qu'une matrice est semi-définie positive, il ne suffit pas de vérifier que les mineurs principaux dominants sont tous positifs ou nuls. Une possibilité consiste à analyser toutes valeurs propres de la matrice.

1.6 Optimisation à plusieurs variables sans contraintes

Dans cette section nous considérons le cas particulier du problème d'optimisation (1.1) sans contraintes où $S = \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire ;

$$\min_{x \in R^n} f(x) \tag{1.2}$$

où $f \in C^2$(cette notation signifie f est différentiable aux moins deux fois, et que ses dérivées sont continues).

1.6.1 Conditions d'optimalité

Soit x un minimum local de f sur $S = \mathbb{R}^n$. La définition(1.5.2) *assure qu'il existe un scalaire $\varepsilon > 0$ tel que*

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in B_\varepsilon(x^*),$$

en particulier pour n'importe quelle direction unitaire $d \in \mathbb{R}^n$ et scalaire $t > 0$ suffisamment petit, le point $x = x^* + td$ appartient à la boule $B_\varepsilon(x^*)$ et donc

$$f(x^*) \leq f(x^* + td).$$

Ceci implique que la dérivée directionnelle de f *en* x^* *dans n'importe quelle direction unitaire* $d \in \mathbb{R}^n$ *satisfait*

$$f'_d(x^*) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x^*+td)-f(x^*)}{t} \geq 0.$$

Le résultat précédent est valide pour n'importe quelle direction unitaire d, et donc il est valide en particulier pour $-\frac{\nabla f(x^*)}{\|\nabla f(x^*)\|}$*. Il s'ensuit que :*

$$0 \leq \; f'_d(x^*) = d^T \cdot \nabla f(x^*) = -\frac{\nabla f(x^*)^T \cdot \nabla f(x^*)}{\|\nabla f(x^*)\|} = -\|\nabla f(x^*)\|,$$

et donc, $\nabla f(x^*) = 0$ *(car on a montré que* $0 \leq -\|\nabla f(x^*)\|$*, or* $\|\nabla f(x^*)\|$ *est toujours positif). Nous avons donc montré la condition d'optimalité suivante :*

Condition nécessaire de premier ordre

Si x *est un minimum local de la fonction* f *sur* $\mathbb{R}^n$*, alors* $\nabla f(x^*) = 0$ *(c'est-à-dire,* x *est un point critique).*

Cette définition donne une condition nécessaire mais pas suffisante. En effet, il est possible que le gradient soit nul en un point et que ce point ne soit pas un minimum local (par exemple, ce point peut être un maximum local ou un point selle*).*

Un point critique $x^* \in \mathbb{R}^n$ *est un point selle si pour n'importe quel* $\varepsilon > 0$*, il existe deux points* $a \in B_\varepsilon(x^*)$ *et* $b \in B_\varepsilon(x^*)$ *qui soient tels que* $f(a) < f(x^*) < f(b)$*. Un point de selle n'est donc ni un minimum local ni un maximum local.*

Les conditions de second ordre nous permettent de distinguer ces cas. Considérons encore une fois x^* *un minimum local de* f *sur* $S = \mathbb{R}^n$*. A l'aide du développement de Taylor d'ordre 2 de* f *autour du minimum local* x^* *on obtient pour toute direction unitaire* $d \in \mathbb{R}^n$ *et pour* $t \in \mathbb{R}$ *suffisament petit*

$$\begin{aligned} f(x^*) \leq f(x^*+td) &\approx f(x^*) + td^T \cdot \nabla f(x^*) + \frac{t^2}{2} d^T \nabla^2 f(x^*) d \\ &= f(x^*) + \frac{t^2}{2} d^T \nabla^2 f(x^*) d. \end{aligned}$$

Pour passer de la première à la deuxième ligne, on a utilisé le fait que $\nabla f(x^*) = 0$ *en un minimum local. En simplifiant cette dernière expression, et en divisant par* $t^2 > 0$ *on obtient*

$$\frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x^*) d \geq 0,$$

une expression indépendante de t *. On a alors la condition suivante :*

Condition nécessaire de second ordre

Si x^* est un minimum local de la fonction f sur $\mathbb{R}^n$, alors $\nabla f(x^*) = 0$ et
$y^T \nabla^2 f(x^*) y \geq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire, la matrice Hessienne $\nabla^2 f(x^*)$ est semi-définie positive).

La contraposée de cette condition assure que si la matrice des dérivés secondes $\nabla^2 f(x^*)$ n'est pas semi-définie positive, alors x^* n'est pas un minimum local de f . De façon similaire, si la matrice n'est pas semi-définie négative, alors x^* n'est pas un maximum local de f . Et donc, si la matrice est indéfinie en un point critique x^* de la fonction f , alors x^* est un point selle. En effet, si la matrice est indéfinie alors elle n'est ni semi-définie positive ni semi-définie négative, et conséquemment x^* n'est ni un minimum ni un maximum local de f .

De plus, si la condition de second ordre est strictement satisfaite, on obtient la condition suffisante suivante.

Condition suffisante de second ordre

Soit $x^* \in \mathbb{R}^*$. Si $\nabla f(x^*) = 0$ et $y^T \nabla^2 f(x^*) y \geq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (c'est-à-dire, la matrice Hessienne$\nabla^2 f(x^*)$est définie positive), alors x^* est un minimum local de la fonction f sur $\mathbb{R}^n$.

Nous pouvons spécialiser les conditions d'optimalités de deuxième ordre aux fonctions de deux variables.

Pour s'attaquer à un problème d'optimisation, on procédera de la façon suivante. En un premier temps, on utilisera les conditions nécessaires du premier ordre pour identifier tous les points critiques de f. C'est-à-dire,on trouvera tous les points où le gradient s'annule. Ensuite, pour chacun de ces points, on évaluera la matrice des dérivées secondes, et on utilisera les conditions d'optimalité de deuxième ordre pour classer les points. On ne pourra conclure seulement lorsque cette matrice sera inversible. Et dans ce cas, si elle est définie positive il s'agira d'un minimum local, si elle est définie négative il s'agira d'un maximum local, et autrement (c'est-à-dire si la matrice est indéfinie) il s'agira d'un point selle.

1.7 Optimisation à plusieurs variables avec contraintes d'égalités

Dans la plupart des problèmes d'optimisation, les variables ne sont pas libres de prendre n'importe quelle valeur.

Elles sont habituellement restreintes à un domaine. Dans cette section, nous nous penchons sur les problèmes sous la forme générale (1.1). Le résultat suivant, *cité sans preuve, sera fréquemment utilisé.*

Théorème 1.7.1. *Si l'ensemble S est fermé et borné, et si la fonction f est continue sur S, alors il existe un minimum global atteint en un point de S et un maximum global atteint en un point de S.*

On a un autre forme équivalent

$$\begin{cases} Min\ f(x) \\ g_j(x) = 0, j = 1, 2, .., m \end{cases}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Généralement on a $m < n$

$\cdot$ *Si $m > n \rightarrow \{ \begin{matrix} \text{redondance dans les contraintes;} \\ \text{trop de contraintes.} \end{matrix}$*

$\cdot$ *Un nombre excessif de contrainte $\underset{Conduit\ \grave{a}}{\rightarrow}$ problème sans solution.*

Il existe plusieurs méthodes pour ce type de problèmes. Parmi elles, on peut citer :

∘ *Méthode de substitution directe ;*

∘ *Méthode des multiplicateurs de Lagrange.*

1.7.1 Méthode de substitution directe

Définition 1.7.1.

$$\left.\begin{matrix} dx_1, dx_2, .., dx_n \\ \text{une variation } \textbf{admissible} \\ \text{autour du point} \\ x^* = (x_1^*, .., x_n^*)^t \end{matrix}\right\} \rightleftarrows \begin{cases} g_i(x_1^* + dx_1, .., x_n^* + dx_n) = 0 \\ \forall i = 1, .., m \end{cases}.$$

Problème sans contrainte

$\cdot$ *n variables indépendantes ;*

$\cdot$ *fonction objectif peut être évaluée pour tout ensemble de n nombres.*

Problème avec contrainte

au moins une variable indépendante devient liée aux autres variables avec l'ajout de chaque équation contrainte

$$\left.\begin{matrix} n \text{ variables} \\ m \text{ contraintes} \end{matrix}\right\} \rightarrow n - m \text{ variables indépendantes.}$$

Si on choisit les valeurs de $n - m$ variables, les valeurs des variables restantes sont déterminées par les équations des contraintes.

En théorie

m variables quelconques peuvent être exprimées en fonction

des autres $n-m$ variables en utilisant les m contraintes →On remplace les m variables dans la fonction objectif→On obtient une nouvelle fonction qui ne dépend que de n-m variables →La nouvelle fonction n'est liée à aucune contrainte →On obtient alors un problème d'optimisation sans contraintes.

Cette méthode de substitution directe paraît simple en théorie mais, elle peut s'avérer difficile en pratique.

Souvent les contraintes ne sont pas linéaires ce qui ne permet pas d'exprimer m variables quelconques en fonction des autres $n-m$ variables.

Mais dans des cas simples, la méthode peut s'avérer très utile.

1.7.2 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

On introduit une variable additionnelle pour chaque contrainte.

Pour un problème à n variables et m contraintes, on ajoute donc m variables pour avoir en tout $n+m$ variables.

Condition nécessaire pour le cas général

n variables et m contraintes sous forme d'égalités.

Théorème 1.7.2. *Une condition nécessaire pour que la fonction f sous les contraintes $g_j(x)=0, i=1,2,..,m$ admette un minimum relatif au point x^**

$$x^* \text{ est un minimum relatif de } f \implies \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*,\lambda)=0, i=1,2,..,n \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(x^*,\lambda)=0, i=1,2,..,m \end{cases}.$$

Remarque 1.6. *On a m contraintes, on peut choisir n-m variables indépendantes $x_1,x_2,..,x_m$ les variables dépendantes $x_{m+1},x_{m+2},..,x_n$ les variables indépendantes. On utilise les m premiers coefficients de dL pour définir les $\lambda_i, i=1,..,m$*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x^*)=0, i=1,..,n.$$

Les conditions suffisantes pour le cas général

Théorème 1.7.3. *Une condition suffisante pour que la fonction f sous les contraintes $g_i(x)=0, i=1,2,..,m$ admette un minimum relatif au point x^* est que la forme quadratique*

$$F=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 L}{\partial x_i\partial x_j}dx_i dx_j,$$

évaluée au point $x = x^*$*soit positive pour toutes les valeurs de* dx *pour lesquelles les contraintes sont satisfaites.*

En pratique, comment montrer que la forme quadratique

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j,$$

est positive ou négative pour toute variation admissible dx *c.à.d. définie positive ou définie négative?*
On utilise le polynôme défini par

$$P(z) = \begin{vmatrix} H_L - I_n z & J\left(\frac{g_1,..,g_m}{x_1,..,x_n}\right)^t \\ J\left(\frac{g_1,..,g_m}{x_1,..,x_n}\right) & \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \end{vmatrix}$$

$\left.\begin{array}{c} \textit{les racines du polynôme} \\ P(z) \\ \textit{sont toutes positives} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j > 0$, *pour toute variation admissible* dx.

$$P(z) = \begin{vmatrix} H_L - I_n z & \begin{pmatrix} \nabla g_1 & \cdots & \nabla g_m \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} (\nabla g_1)^t \\ \vdots \\ (\nabla g_m)^t \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \end{vmatrix}, H_L = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}\right), \quad j = 1,..,n est que les dérivées partie$$

L=L$(x_1,..,x_n,\lambda_1,..,\lambda_m)$ *Par rapport à chacun de ces arguments soient nulles au point* x^*.

x^* *est un minimum relatif de* f $\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*,\lambda) = 0, i = 1,2,..,n \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(x^*,\lambda) = 0, i = 1,2,..,m \end{array} \right.$.

Remarque 1.7. *On a m contraintes, on peut choisir n-m variables indépendantes* $x_1, x_2, .., x_m$ *les variables dépendantes* $x_{m+1}, x_{m+2}, .., x_n$ *les variables indépendantes. On utilise les m premiers coefficients de* dL *pour définir les* $\lambda_i, i = 1,..,m$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x^*) = 0, i = 1,..,n.$$

Les conditions suffisantes pour le cas général

Théorème 1.7.4. *Une condition suffisante pour que la fonction f sous les contraintes $g_i(x) = 0, i = 1, 2, .., m$ admette un minimum relatif au point x^* est que la forme quadratique*

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j,$$

évaluée au point $x = x^*$ soit positive pour toutes les valeurs de dx pour lesquelles les contraintes sont satisfaites.

En pratique, comment montrer que la forme quadratique

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j,$$

est positive ou négative pour toute variation admissible dx c.à.d. définie positive ou définie négative?

On utilise le polynôme défini par

$$P(z) = \begin{vmatrix} H_L - I_n z & J\left(\frac{g_1,..,g_m}{x_1,..,x_n}\right)^t \\ J\left(\frac{g_1,..,g_m}{x_1,..,x_n}\right) & \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \text{les racines du polynôme} \\ P(z) \\ \text{sont toutes positives} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \quad F = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j > 0, \text{ pour toute}$$

variation admissible dx.

$$P(z) = \begin{vmatrix} H_L - I_n z & (\nabla g_1 \quad \cdots \quad \nabla g_m) \\ \begin{pmatrix} (\nabla g_1)^t \\ \vdots \\ (\nabla g_m)^t \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \end{vmatrix}, H_L = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}\right), \quad j = 1, .., n.$$

Les espaces de *Sobolev*

1.8 Topologie faible

1.8.1 Définition et propriétés élémentaire de la topologie faible $\sigma(E, E')$

Soit E un espace de Banach et soit $f \in E'$. On désigne par $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$. Lorsque f décrit E' on obtient une famille $(\varphi_f)_f \in E'$ d'applications de E dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.8.1. *la topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_f \in E'$.*

Théorème 1.8.1. *Soit (x_n) une suite de E. On a :*

i) $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E') \Leftrightarrow \langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle,\ \forall f \in E'$.

ii) Si $x_n \to x$ fortement, alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$.

iii) Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$, alors $\|x_n\|_E$ est bornée et $\|x\|_E \leq limInf\|x_n\|_E$.

iv) Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$ et si $f_n \to f$ fortement dans E', alors $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

Théorème 1.8.2. *Lorsque E est de dimension finie, la topologie faible $\sigma(E, E')$ et la topologie usuelle coïncident. En particulier une suite (x_n) converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.*

1.8.2 Ensembles convexes et opérateurs linéaires

Théorème 1.8.3. *Soit C un sous ensemble non vide convexe de E, alors C est faiblement fermé pour $\sigma(E, E')$ si et seulement s'il est fortement fermé.*

Théorème 1.8.4. *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit T un opérateur linéaire et continu de E dans F. Alors T est continu de E faible $\sigma(E, E')$ dans F faible $\sigma(F, F')$.*
Et réciproquement.

1.8.3 Espaces réflexifs

Définition 1.8.2. *Soit E un espace de Banach, et soit J l'injection canonique de E dans E''. On dit que E est réflexif on identifier implicitement E et E'', $(E = E'')$.*

Théorème 1.8.5. *(**Kakutani**) Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si :*

$$B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\},$$

est compacte pour la topologie $\sigma(E, E')$.

Théorème 1.8.6. *Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si E' est réflexif.*

Théorème 1.8.7. *Soit E un espace de Banach réflexif. Soit $K \subset E$ un sous-ensemble convexe, fermé et borné. Alors K est compacte pour la topologie $\sigma(E, E')$.*

1.8.4 Espaces séparable

Définition 1.8.3. *On dit qu'un espace métrique est séparable, s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense.*

Théorème 1.8.8. *Soit E un espace métrique séparable, et soit F un sous-ensemble de E. Alors F est séparable.*

Théorème 1.8.9. *Soit E un espace de Banach tel que E' soit séparable. Alors E est séparable.*

Théorème 1.8.10. *Soit E un espace de Banach.*
Alors (E réflexif et séparable) $\Leftrightarrow$ (E' réflexif et séparable).

Théorème 1.8.11. *Soit E un espace de Banach séparable. Alors $B_{E'}$ est métrisable pour la topologie $\sigma(E', E)$.*
Reciproquement, si $B_{E'}$ est métrisable pour $\sigma(E', E)$, alors E est séparable.

Théorème 1.8.12. *Soit E un espace de Banach tel que E' soit séparable. Alors B_E est métrisable pour la topologie $\sigma(E, E')$.*

Théorème 1.8.13. *Soit E un espace de Banach séparable, et soit (f_n) une suite bornée dans E'. Alors il existe une sous-suite extraite (f_{n_k}) qui converge pour la topologie $\sigma(E', E)$.*

Théorème 1.8.14. *(**Eberlein-Šmulian**) Soit E un espace de Banach tel que toute suite bornée (x_n) possède une sous-suite extraite (x_{n_k}) convergente pour la topologie $\sigma(E, E')$.Alors E est réflexif.*

1.9 Espaces L^p

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

$$\mathcal{F} = \{f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \textit{ intégrable}\} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

L'application

$$f \longmapsto \|f\| = \int_\Omega |f(x)|dx.$$

est une semi-norme.
On va définir une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}$.

$$\forall f, g \in \mathcal{F} \qquad f\Re g \Leftrightarrow \forall x \in \Omega \qquad f(x) = g(x)\ p.p\ .$$

Définition 1.9.1. *L'ensemble quotient $\mathcal{F}/\Re$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_\Omega |f(x)|dx$, s'appelle l'espace de Lebesgue et sera noté par L^1.*

1.9.1 Définition et propriétés élémentaire des espaces L^p

Définition 1.9.2. *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 < p < \infty$, on dit que $f \in L^p(\Omega)$ si f est mesurable et $|f|^p \in L^1(\Omega)$.*

Théorème 1.9.1. *L'application*

$$f \longleftrightarrow \|f\|_p = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{1/p}$$

est une norme sur L^p.

Définition 1.9.3. *On dit que f est essentiellement bornée sur Ω s'il existe une constante C positive telle que $|f(x)| \leq C$ p.p.*
La plus petite de ces constantes est appellée le sup essentiel de f.
On le note par $ess.\sup|f(x)|$.

Définition 1.9.4. *On appelle espace de Lebesgue de puissance d'ordre ∞ l'espace, noté $L^\infty(\Omega)$, des classes des fonctions mesurables au sens de Lebesgue, définies presque partout sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant :*

$$ess.\sup|f(x)| < +\infty$$

Théorème 1.9.2. *L'application de $L^\infty(\Omega)$ dans $\mathbb{R}^+$ définit par*

$$f \longmapsto \|f\|_\infty = ess.\sup_{x\in\Omega}|f(x)|$$

est une norme.

Notation 1.9.1. *Soit $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par q l'exposant conjugué de p, i.e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Théorème 1.9.3. *$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, le produit scalaire étant donné par :*

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx,$$

$\left(\text{\textit{qui s'écrit}} \int_\Omega u(x)v(x)dx \text{ \textit{pour les fonctions réelles}}\right)$

Proposition 1.9.1. ***(Inégalité de Young)*** *Soient $1 < p < \infty$ et $a, b \geq 0$. Alors*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Démonstration. La fonction log est concave. Donc $\forall a, b > 0$

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{\log(a^p)}{p} + \frac{\log(b^q)}{q} = \log(ab).$$

D'où

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

□

Remarque 1.8. *Lorsque $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy Schwarz.*

Théorème 1.9.4. ***(Inégalité de Hölder)*** *Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $f.g \in L^1(\Omega)$ et,*

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

Démonstration. 1. Si $p = 1$ et si $p = \infty$ la conclusion est évidente.
2. Si $1 < p < \infty$: d'après **l'inégalité de Young**, on a :

$$|f(x)||g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q \quad p.p \text{ sur } \Omega.$$

Il en résulte que $fg \in L^1(\Omega)$ et que :

$$\int_{\Omega} |fg|dx \leq \frac{1}{p}\|f(x)\|_p^p + \frac{1}{q}\|g(x)\|_q^q.$$

On remplace f par λf ($\lambda > 0$) il vient :

$$\int_{\Omega} |fg|dx \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{\lambda q}\|g\|_q^q. \tag{1.3}$$

On choisit $\lambda = \|f\|_p^{-1}\|g\|_q^{q/p}$,
de manière à minimiser le membre à droite dans (1.3), on obtient alors

$$\int_{\Omega} |fg|dx \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

$\square$

Théorème 1.9.5. *(**Fischer-Riesz**) $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*
Et si $1 < p < \infty$ alors $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach séparable.

Proposition 1.9.2. *Soient (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$, tels que $\|f_n - f\|_p \to 0$. Alors il existe une suite extraite (f_{n_k}) de (f_n) telle que :*

i. $f_{n_k}(x) \to f(x)$ p.p sur Ω.
ii. $|f_{n_k}(x)| \leq h(x), \forall k \in$ et p.p sur Ω, avec $h \in L^p(\Omega)$.

Proposition 1.9.3.

1. $L^\infty = (L^1)'$.
2. $L^1 \subset (L^\infty)'$.
3. *La boule unité fermée B_{L^∞} est compacte pour la topologie faible $* \ \sigma(L^\infty, L^1)$.*
4. *Si (f_n) une suite bornée dans L^∞ on peut en extraire une sous-suite qui converge dans L^∞ pour la topologie faible $* \ \sigma(L^\infty, L^1)$.*

Théorème 1.9.6. *(**Théorème de Reisz**) Soit T une forme linéaire et continue sur $L^p(\Omega)$. Alors il existe une unique fonction $g \in L^{p'}(\Omega)$ telle que*

$$T(f) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \quad , \forall f \in L^p(\Omega).$$

1.10 Les espaces de Sobolev

1.10.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.10.1. *On pose*

$$H^1(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, 2, ..., n \right\},$$

la dérivation est à comprendre au sens des distribution. En autres termes, une fonction $u \in L^2(\Omega)$ est dans $H^1(\Omega)$ s'il existe des fonctions $v_1, v_2, ..., v_n$ dans $L^2(\Omega)$ telle que :

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega v_i \varphi\, dx \quad , \forall \varphi \in D(\Omega)\ , \quad \forall i = 1, 2, ..., n.$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v) + (\nabla u, \nabla v).$$

La norme associée est

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2.$$

Théorème 1.10.1. *L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.*

De la même façon, on définit les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$, où m est un entier strictement positif par :

$$H^m(\Omega) =: \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\}.$$

On le munit de la norme naturelle :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{\alpha : |\alpha| \leq m} \int_\Omega |\ D^\alpha u(x)\ |^2\, dx \right)^{1/2},$$

(où $D^\alpha u$ est comprise au sens des distributions).
De façon plus générale, pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, on peut définir les espaces de Sobolev. Ces espaces sont construits sur l'espace de Banach L^p.

Définition 1.10.2. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq \infty$, on définit lespace de Sobolev $W^{m,p}$ comme suit*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\}.$$

Théorème 1.10.2. *L'application*

$$u \longleftrightarrow \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{\alpha:|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p} & , \quad si\ 1 \leq p < \infty; \\ \\ \sup\limits_{1\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_\infty & , \quad si\ p = \infty. \end{cases}$$

est une norme sur $W^{m,p}(\Omega)$.

Si $p = 2$ on a : $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$.

Théorème 1.10.3. *L'application définie par :*

$$H^m(\Omega) \times H^m(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(u, v) \longrightarrow (u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v),$$

est un produit scalaire sur $H^m(\Omega)$.

Théorème 1.10.4. *$H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire est un espace de Hilbert.*

Définition 1.10.3. *On dit que Ω de $\mathbb{R}^\ltimes$ est régulier de classe C^k s'il existe un nombre fini d'ouverts $(w_i)_{0\leq i\leq I}$ tels que $\overline{w_0} \subset \Omega$, $\overline{\Omega} \subset \bigcup\limits_{i=0}^{I}$, $\partial\Omega \subset \bigcup\limits_{i=1}^{I}$, et pour chaque $i \in \{1, ..., I\}$ il existe une application bijective ϕ_i de classe C^k de w_i dans l'ensemble*
$Q = \{y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^\ltimes,\ |\ y'\ | < 1,\ |\ y_n\ | < 1\}$, et telle que
$\phi_i(w_i \cap \Omega) = Q \cap \{y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^\ltimes,\ y_n > 0\}$,
$\phi_i(w_i \cap \partial\Omega) = Q \cap \{y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^\ltimes,\ y_n = 0\}$.

Théorème 1.10.5. *Si Ω est "assez régulier" avec $\Gamma = \partial\Omega$ borné, alors la norme de $W^{m,p}(\Omega)$ est équivalente à la norme*

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_p + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_p.$$

Théorème 1.10.6 (Rellich-Kondrachov). *On suppose Ω borné de classe C^1. On a*
Si $p < n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\quad \forall q \in [1, p^*[$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$;
Si $p = n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\quad \forall q \in [1, +\infty[$;
Si $p > n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$,
avec injection compact.

Remarque 1.9. *Le théorème de Rellich est à peu près optimal au sens suivant :*

(i) Si Ω n'est pas borné, l'injection $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ n'est pas compacte en générale.

(ii) l'injection $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ n'est jamais compacte même si Ω est borné et régulier.

1.10.2 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.10.4. *Soit $1 \leq p < \infty$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $C_c^1(\Omega)$:={l'ensemble de tous les fonctions de classe C^1 sur un compacte de Ω} dans $W^{1,p}(\Omega)$.*

On note : $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}$ est un espace de Banach séparable, il est réflexif si $1 < p < \infty$. $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $H^1(\Omega)$.

Théorème 1.10.7. *$C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.*
Autrement dit on peut utiliser indifféremment $C_c^\infty(\Omega)$ au lieu de $C_c^1(\Omega)$ dans la définition de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Proposition 1.10.1. *Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow u = 0$ sur la frontière de Ω.*

Proposition 1.10.2. *On peut définir $W_0^{m,p}$ pour $m > 1$, par :*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega) : u = Du = ... = D^{m-1}u = 0 \quad , \quad sur\ \partial\Omega\}$$

1.10.3 L'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$

Notation : On désigne par $W^{-1,q}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ et par $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$.
On identifier $L^2(\Omega)$ et son dual, mais on n'identifie pas $H_0^1(\Omega)$ et son dual.
On a le schéma suivant

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega),$$

avec injections continues et denses.
Si Ω est borné on a

$$W_0^{1,p} \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,q}(\Omega) \quad , Si\ \frac{2n}{n-2} \leq p < \infty,$$

avec injections continues et denses.

Théorème 1.10.8. *Soit $F \in W^{-1,q}(\Omega)$, alors il existe $f_0, f_1, ..., f_n \in L^q(\Omega)$ telles que*

$$\langle F, v\rangle = \int_\Omega f_0(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega f_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

avec $\|F\| = \max_{0\leq i\leq n} \|f_i\|_q$.

1.11 Espaces fonctionnels

Ce paragraphe est destiné à rappeler, au fur et à mesure des besoins, les principaux résultats sur les fonctions définies sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espace de *Banach* réel.

Définition 1.11.1. *Soit $0 < T < \infty$ et soit $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach réel. Nous notons par $D(0, T; X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $(0, T)$ à valeurs dans X.*

Définition 1.11.2. *Une fonction $f : [0, T] \to X$ est dite fortement dérivable en $t_0 \in (0, T)$ s'il existe un élément $\frac{df}{dt}(t_0) \in X$ appelé la dérivée forte de f en t_0, telle que*

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{1}{h}\left(f\left(t_0 + h\right) - f\left(t_0\right)\right) - \frac{df}{dt}\left(t_0\right)\right\|_X = 0.$$

Définition 1.11.3. *Une fonction $f : [0, T] \to X$ est dite intégrable s'il existe une suite de fonctions (f_n), $n \in \mathbb{N}$ appartenant à $D(0, T; X)$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \left\|f_n\left(s\right) - f\left(s\right)\right\|_X ds = 0.$$

Théorème 1.11.1. ***(Bochner)*** *Une fonction $f : [0, T] \to X$ mesurable est intégrable si et seulement si $t \to ||f(t)||_X : [0, T] \to \mathbb{R}^+$ est integrable, dans ce cas*

$$\left\| \int_0^T f\left(s\right) ds \right\|_X \leq \int_0^T \left\|f\left(s\right)\right\|_X ds.$$

Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Lebesgue $L^p(0, T; X)$ est l'ensemble des classes de fonctions $f : (0, T) \to X$ mesurables, telles que l'application $t \to \|f\left(t\right)\|_X$ appartient à $L^p(X)$. On sait que $L^p(0, T; X)$ est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(0,T;X)} &= \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad \textit{si } 1 \leq p < \infty, \\ \|f\|_{L^\infty(0,T;X)} &= \inf\left\{C > 0 / \left\|f(t)\right\|_X \leq C; \quad \textit{p.p. } t \in (0, T)\right\} \;\; \textit{si } p = \infty. \end{aligned}$$

Naturellement, on a :

$$L^p(0,T;L^p(\varOmega)) = L^p(Q) \quad où \quad Q = \varOmega\times]0,T[.$$

Par ailleurs, nous avons les résultats suivants :

Théorème 1.11.2. *1. $L^p(0,T;X)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ est un espace de Banach.*

2. *Si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(.,.)_X$, alors $L^2(0,T;X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire*

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X \, dt.$$

3. *$L^r(0,T;X) \hookrightarrow L^q(0,T;X)$ avec injection continue, $1 \leq q \leq r \leq \infty$.*
4. *Si X est un espace de Hilbert, alors*

$$\begin{aligned} L^p(0,T;X)' &= L^q(0,T;X) \ \ si\ 1 < p,q < \infty, \ \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \\ L^1(0,T;X)' &\subset L^\infty(0,T;X), \end{aligned}$$

où $L^p(0,T;X)'$ représente le dual de l'espace $L^q(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$.

5. *D'après le théorème de Danford-Pettis (cf. par exemple Yosida []) l'espace*

$$L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega)) \ \left(resp\ L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\right)$$

est le dual de

$$L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)+L^q(\Omega)) \ \left(resp\ de\ L^1(0,T;L^2(\Omega).)\right).$$

Et $H^{-1}(\Omega)+L^q(\Omega)$ muni de la structure de dual fort de $H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega)$, où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Définition 1.11.4. *Soit u, $w \in L^1(0,T;X)$. La fonction w s'appelle la dérivée généralisée d'ordre n de u sur $(0,T)$ si*

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t)\,u(t)\,dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t)\,w(t)\,dt \ \forall\varphi \in D(\Omega).$$

Nous écrivons $w = \dot{u}$ pour $n=1$ et $w = u^{(n)}$ pour $n \geq 2$.

Soit $1 < p < \infty$. L'espace L'espace de Sobolev $W^{1,p}(0,T;X)$ est l'espace des fonctions $u : [0,T] \to X$ telles que $u \in L^p(0,T;X)$ et $u' \in L^p(0,T;X)$. L'espace $W^{1,p}(0,T;X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} = \left(\|u\|_{\ L^p(0,T;X)} + \|u'\|_{\ L^p(0,T;X)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.11.5. *Une fonction $f : [0,T] \to X$ est dite absolument continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour toute suite d'intervalles (a_j,b_j) disjoints, inclus dans $[0,T]$, tels que $\sum\limits_j (b_j - a_j) < \delta$ on a $\sum\limits_j \|f(b_j) - f(a_j)\| \leq \varepsilon$.*

Maintenant nous rappelons le lien entre les fonctions absolument continues et les fonctions de l'espace $W^{1,p}(0,T;X)$.

Théorème 1.11.3. *Soit $1 \leq p \leq \infty, X$ un espace de Banach reflexive et soit $u \in L^p(0,T;X)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$u \in W^{1,p}(0,T;X)$.*
2. *u admet un représentant absolument continu presque partout dérivable, ayant la dérivée forte dans $L^p(0,T;X)$.*
3. *Il existe $u_0 \in X$ et $g \in L^p(0,T;X)$, telles que*

$$u(t) = u_0 + \int_0^t g(s)ds \quad \forall t \in [0,T].$$

Il découle de la démonstration du théorème précédent que, si X est un espace réflexive, alors toute fonction $u \in W^{1,p}(0,T;X)$ est fortement dérivable p.p. sur $(0,T)$ et $u' = \frac{du}{dt}$. Par ailleurs $W^{1,p}(0,T;X)$ coïncide avec l'ensemble des fonctions $u : [0,T] \to X$ absolument continues et $W^{1,\infty}(0,T;X)$ coïncide avec l'ensemble des fonctions lipschitziennes $u : [0,T] \to X$.
Etant donnés un entier $k \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$, on définit par récurrence l'espace

$$W^{k,p}(0,T;X) = \left\{ u \in W^{k-1,p}(0,T;X) ;\ u' \in W^{k-1,p}(0,T;X) \right\}.$$

L'espace $W^{k,p}(0,T;X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}(0,T;X)} = \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \sum_{\alpha=1}^{k} \left\| u^{(\alpha)} \right\|_{L^p(0,T;X)}.$$

On dénote aussi par $C(0,T;X)$ l'espace des fonctions continues sur $[0,T]$ à valeurs dans X avec la norme

$$\|u\|_{C(0,T;X)} = \max_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_X ,$$

1.12 Compléments divers

Théorème 1.12.1. *Si $f \in L^p(0,T;X)$ et $\frac{\partial f}{\partial t} \in L^p(0,T;X)$, $(1 \leq p \leq \infty)$, alors f est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de $(0,T)$ continue de $[0,T] \to X$.*

Théorème 1.12.2 (Formule de Green). *On suppose que Ω est un ouvert borné de frontière Γ, C^1 par morceaux. Alors, si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, alors on a la formule de Green suivante :*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma u v \nu_i d\Gamma \qquad \forall i = 1, ..., n.$$

où ν_i est la normale unité extérieure à Γ.

Un résultat essentiel pour les application du prochain chapitre est l'inégalité suivante :

Lemme 1.12.1 (Inégalité de Poincaré). *On suppose que Ω est un ouvert borné. Alors il existe une constante C (dépendant de Ω et p) telle que :*

$$\|u\|_p \leq C \|\nabla u\|_p \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \ , \quad 1 \leq p < \infty.$$

En particulier l'expression $\|\nabla u\|_p$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ qui est équivalente à la norme $\|u\|_{W^{1,p}}$; sur $H_0^1(\Omega)$ l'expression $\int_\Omega \nabla u \nabla v$ est un produit scalaire qui induite la norme $\|\nabla u\|_2$ équivalente à la norme $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Soit H un espace de Hilbert réel

Définition 1.12.1. *Soit $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme. On dit que :*
(i) a est bilinéaire si elle est linéaire par rapport à u et v , $(\forall u, v \in H)$.
(ii) a est continue s'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$|a(u,v)| \leq M \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall u, v \in H.$$

(iii) a est elliptique ou coercive (ou encore définie positif) s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall u \in H \quad a(u,u) \geq \alpha \|u\|_H^2.$$

Lemme 1.12.2. *Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire, continue et elliptique sur H. alors il existe un isomorphisme $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que :*

$$a(u,v) = (Au, v)_H \quad \forall u, v \in H.$$

Chapitre 2

Formulation variationnelle de problème aux limites de Dirichlet en dimension un

2.1 Rappel

2.1.1 Principe des contractions

De nombreuses questions, liées à l'existence et à l'unicité des solutions de certains types d'équations (par exemple, des équations différentielles),. peuvent être ramenées à la question d'existence et d'unicité d'un point fixe pour une application de l'espace métrique correspondant dans lui-même. Parmi les différents critères d'existence et d'unicité d'un point fixe pour de telles applications, l'un des plus simples et à la fois des plus importants est celui qui porte le nom de principe des contractions. Soit R un espace métrique. Une application A de l'espace R dans lui-même est appelée application contractante ou simplement contraction, s'il existe un nombre $\alpha < 1$ tel que pour tout couple de points $x, y \in R$ on a l'inégalité

$$d(Ax, Ay) \leq \alpha d(x, y). \tag{2.1}$$

Toute application contractante est continue. En effet, si $x_n \to x$, en vertu de (2.1) on a également $Ax_n \to Ax$.
On dit que x est un point fixe pour l'application A, si $Ax = x$. Autrement dit, les points fixes sont les solutions de l'équation $Ax = x$.

Théorème 2.1.1. ***(Principe des contractions).*** *Toute contraction, définie sur un espace métrique complet R, admet un point fixe et un seul.*

Démonstration. Soit x_0 un point arbitraire de R. Posons $x_1 = Ax_0, x_2 = Ax_1 = A^2x_0, ..., x_n = Ax_{n-1} = A^nx_0$.
Montrons que x_n est une suite de Cauchy. En effet, en posant, pour fixer les idées, $m \geq n$ on a

$$d(x_n, x_m) = d(A^nx_0, A^mx_0) \leq \alpha^n d(x_0, x_{m-n}) \leq \alpha^n\{d(x_0, x_1)+d(x_1, x_2)+...+d(x_{m-n-1}, x_{m-n})\}$$

$$\leq \alpha^n d(x_0, x_1)\{1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{m-n+1}\} \leq \alpha^n d(x_0, x_1)\frac{1}{1-\alpha}.$$

Comme $\alpha < 1$ pour n assez grand cette quantité peut devenir aussi petite que l'on veut. L'espace R étant complet, la suite de Cauchy x_n a une limite dans R. Posons

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Alors, en vertu de la continuité de l'application A, on a

$$Ax = A\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

L'existence du point fixe est donc démontrée. Démontrons l'unicité de ce point. Si

$$Ax = x, Ay = y,$$

l'inégalité (2.1) prend la forme

$$d(x, y) \leq \alpha d(x, y);$$

comme $\alpha < 1$, il vient

$$d(x, y) = 0$$

c.-à-d.

$$x = y.$$

$\square$

2.2 Introduction

2.2.1 Problèmes aux limites de Dirichlet

Dans ce qui suit, on désignera par $\mathcal{C}^m(I)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles m fois continûment dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, m entier≥ 0. Par ailleurs, on notera f', f'' et $f^{(n)}$ pour $n \geq 3$, les dérivées successives d'une fonction d'une variable réelle.
Considérons le problème suivant : étant donné deux fonctions $c, f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ et deux constantes α et β, trouver une fonction $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ qui vérifie

$$(P) \begin{cases} -u'' + c(x)u(x) = f(x), 0 < x < 1, \\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta. \end{cases}$$

Un tel problème est appelé problème aux limites', car la fonction inconnue doit satisfaire les conditions aux limites $u(0) = \alpha, u(1) = \beta$ posées à la frontière de l'intervalle ouvert sur lequel l'équation différentielle doit être satisfaite.
Si la fonction continue c est positive pour tout $x \in [0,1]$, le problème (P) soit appelé problème de *Dirichlet*[1]. Il modélise en particulier les situations suivantes en mécanique des milieux continus.

Exemple 2.2.1. *(Une barre élastique). On considère une barre élastique fixée aux deux extrémités : les unités sont choisies de telle sorte que cette barre puisse être représentée par l'intervalle* $[0,1]$. *Cette barre est soumise à une force tangentielle d'intensité* $f(x)$ *en tout point* x *de* $[0,1]$. *Soient* $\sigma(x)$ *et* $u(x)$ *la contrainte et le déplacement latéral au point* x. *Sous les hypothèses de petits déplacements et d'un matériau linéaire élastique, nous avons, dans l'intervalle* $[0,1]$,

$$\sigma = Eu' \text{ (loi de Hooke). } -\sigma' = f - cu \text{ (l'equation d'équilibre).}$$

$$u(0) = u(1) = 0 \text{ (conditions limites).}$$

Où E *est le module d'élasticité et* $-cu$ *est la force de résistance à la rupture. Si on prend* $E = 1$. *Par élimination de* σ. *On obtient*

$$-u'' + cu = f.$$

Exemple 2.2.2. *(Diffusion de la chaleur dans le cas stationnaire). Soient u la température et q le flux de chaleur dans une tige (représentée par l'intervalle $[0,1]$) soumise à une source de la température 0, nous avons, dans le cas stationnaire :*

$$-q = ku' \text{ (loi de Fourier)}, \; q' = f \text{ (conservation de l'énergie)}.$$

$$u(0) = u(1) = 0 \text{ (conditions limites)}.$$

Où k est la conductivité. Si on prend $k = 1$, on obtient

$$-u'' = f.$$

2.2.2 Théorème de Lax-Milgram

Théorème 2.2.1. *(De Lax-Milgram). Soit V un espace de Hilbert, et soit $a : V \times V \to \mathbb{R}$ une application bilinéaire continue. On suppose de plus que $a(.,.)$ est coercive dans le sens qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2$ pour tout $u \in V$. On se propose de montrer que, pour tout $l \in V^* = L(V, \mathbb{R})$, il existe un unique u tel que*

$$a(u,v) = l(v), \forall v \in V. \tag{2.2}$$

Démonstration. Passons par :

a) Pour tout $v \in V$, notons $A(v) \in V$ l'unique élément tel que $a(v,.) = (A(v),.)$. Montrons que A est linéaire et continue et que (2.2) équivaut à $A(u) = f$ où $f \in V$ est tel que $l = (f,.)$. Il est clair que A est linéaire de part la bilinéarité de $a(.,.)$. Étant donné $u, v \in V$ on a

$$|(A(u),v)| = |a(u,v)| \leq \|a\|\|u\|\|v\|,$$

ce qui montre que

$$\|A(u)\| = \sup_{\|v\| \leq 1} (A(u),v) \leq \|a\|\|u\|,$$

d'où la continuité de A. On remarque alors que (2.2) équivaut à

$$(A(u),v) = l(v) = (f,v), \forall v \in V,$$

ce que est bien équivalent à $A(u) = f$.

b) Pour $\rho > 0$, on pose $T_\rho : V \to V$ par $T_\rho(v) = v - \rho(A(v) - f)$. Montrons que l'on peut choisir ρ tel que T_ρ soit une *contraction*. En déduire (2.2). En développant à $\|T_\rho(w) - T_\rho(v)\|^2$, on obtient que

$$\|T_\rho(w) - T_\rho(v)\|^2 \leq (1 - 2\rho\gamma + \rho^2 c^2)\|w - v\|^2.$$

où $c = \|$ (la norme de l'application bilinéaire $a(.,.)$). Pour $\rho = \dfrac{\gamma}{c^2}$, on obtient que T_ρ est une *contraction* de rapport $\sqrt{1 - \dfrac{\gamma}{c^2}} < 1$, qui admet donc un point fixe unique d'après le *Théorème des contractions de Banach (théorème 2.1.1)*, ce qui démontre bien (2.2) notant que $T_\rho = u$ si et seulement si $A(u) = f$.

c) Montrons qu'il existe alors $\gamma > 0$ tel que, pour tout $l \in L(V, \mathbb{R})$, on a $\|u\| \leq \gamma\|f\|$.
Notant que u la solution de (2.2), on a

$$\alpha\|u\|^2 \leq a(u, u) = (f, u) \leq \|f\|\|u\|,$$

d'où le résultat avec $\gamma = \alpha^{-1}$.

□

2.3 Approximation variationnelle d'un problème aux limites en dimension un

2.3.1 Formulation variationnelle

Étant donné deux fonctions $c, f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, trouver une fonction $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ qui vérifie

$$(P_1) \begin{cases} -u'' + c(x)u(x) = f(x), 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

C'est par commodité que nous supposons ici les conditions aux limites homogènes, et ce n'est pas une restriction. En effet, si elles sont posées sous la forme $u(0) = \alpha, u(1) = \beta$, il suffit pour s'y ramener de faire un changement de fonction inconnue en soustrayant la fonction $\{\alpha(1 - x) + \beta x\}$.

Notation 2.3.1. *Notons qu'une solution classique de (P_1), une fonction $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ qui vérifie (P_1).*

La difficulté de ce problème réside principalement dans les conditions aux limites $u(0) = u(1) = 0$ *entièrement différentes de celles intervenant dans le problème de Cauchy. Supposons connue une solution* $u \in \mathcal{C}^2$ *de* (P_1) *que nous appellerons solution classique de* (P_1)*. Soit alors*

$$v \in \mathcal{C}_0^2(\big[0,1\big]) := \{v \in \mathcal{C}^2([0,1]) : v(0) = v(1) = 0\}.$$

Multiplions par v *les deux membres de l'équation vérifiée par* u *et intégrons entre* 0 *et* 1*. On obtient*

$$\int_0^1 (-u'' + cu)\, v dx,$$

ce qui donne après une intégration par parties où intervient de façon cruciale le fait que $v(0) = v(1) = 0$*,*

$$\int_0^1 (u'v' + cuv)\, dx = \int_0^1 fv dx \qquad \forall v \in \mathcal{C}_0^2([0,1]) \tag{2.3}$$

on a donc établi qu'une solution classique de (P_1) *vérifie :*

$$u \in \mathcal{C}_0^2(\big[0,1\big]) \quad et \quad a(u,v) = l(v), \quad \forall v \in \mathcal{C}_0^2([0,1]),$$

où l'on a posé, pour tout $u, v \in \mathcal{C}_0^2([0,1])$*,*

$$a(u,v) = \int_0^1 (u'v' + cuv)\, dx \quad et \quad l(v) = \int_0^1 fv dx.$$

Le fondement de la méthode variationnelle est le fait surprenant que (2.3) caractérise la solution de (P_1)*. l'outil théorique principal est le théorème 2.2.1 (de Lax-Milgram). Et maintenant, nous garantissons l'existence et l'unicité de la solution du problème* (P_1) *aux les conditions du théorème 2.2.1 (de Lax-Milgram), et ceci est plus suffisant pour que nous suivons l'étude sur ce problème.*
Introduisons l'espace vectoriel V *formé des fonctions continues sur l'intervalle* $[0,1]$*, nulles aux points* 0 *et* l*, et une fois continûment dérivables par morceaux sur ce même intervalle, c'est-à-dire dérivables en tout point de l'intervalle* $[0,1]$ *sauf (peut être) en un nombre fini de points* x_i *de l'intervalle* $]0,1[$*, la dérivée coïncidant sur chaque intervalle ouvert entre deux points* x_i *consécutifs avec la restriction d'une fonction continue sur l'intervalle fermé correspondant (le nombre et la position des points* x_i*varient avec la fonction considérée). Muni de l'application*

$$v \in V \to \|v\|_V = \left(\int_0^1 (|v'|^2 + |v|^2) dx\right)^{\dfrac{1}{2}},$$

cet espace vectoriel est normé (c'est même un espace préhilbertien).
Pour la mise en œuvre et l'analysé de la méthode que nous avons en vue, il est essentiel de poser le problème aux limites sous une forme différente, appelée formulation variationnelle : c'est l'objet du résultat qui suit.

Théorème 2.3.1. *(De la formulation variationnelle).*

(1) Si u est solution du problème aux limites, alors

$$a(u,v) = l(v), \quad \forall v \in V,$$

où la forme bilinéaire $a : V \times V \to \mathbb{R}$ et la forme linéaire $f : V \to \mathbb{R}$ respectivement pour expressions

$$a(u,v) = \int_0^1 (u'v' + cuv)\, dx, l(v) = \int_0^1 fv dx,$$

pour,des fonctions quelconques $u, v \in V$.

(2) On suppose $c \geq 0$. Une fonction $u \in V$ est solution des équations $a(u,v) = l(v)$ pour tout $v \in V$ si et seulement si

$$\inf_{v \in V} J(v), \quad où \quad J(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - l(v).$$

Démonstration. (i) Soit v une fonction arbitraire de l'espace V. Notant $x_i, 1 \leq i \leq N$, les points, supposés rangés par ordre croissant, où la dérivée de la fonction v n'est pas définie, et posant $0 = x_0, 1 = x_{N+1}$, on peut écrire

$$\int_0^1 u''(x)v(x)dx = \sum_{i=0}^{N} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u''(x)v(x)dx$$

$$= \sum_{i=0}^{N} \left(- \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x)v'(x)dx + \{u'(x)v(x)\}_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} \right)$$

$$= - \int_0^1 u'(x)v'(x)dx,$$

la dernière égalité ci-dessus provenant de la continuité des fonctions u' et v sur l'intervalle $[0,1]$ et des relations $v(0) = v(1) = 0$.

(ii) Démontrons l'inégalité suivante, qui nous servira à plusieurs reprises par la suite : en supposant la fonction $c \geq 0$, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq a(v, v), \quad \forall v \in V.$$

Pour cela, il suffit d'établir que

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq \int_0^1 |v'|^2 dx, \quad \forall v \in V.$$

Or on peut écrire, pour tout $x \in [0, 1\,]$,

$$|v(x)| = |\int_0^x v'(t)dt| \leq \int_0^1 |v'(t)|dt \leq \Big(\int_0^1 |v'(t)|^2 dt\Big)^{\dfrac{1}{2}},$$

d'après l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* pour les fonctions. Dans ces conditions, l'inégalité annoncée est satisfaite avec $\alpha = 1/2$.

(iii) La caractérisation du point (2) se démontre à partir de l'identité (de vérification immédiate) :

$$J(u + v) - J(u) = \{a(u, v) - l(v)\} + \frac{1}{2} a(v, v), \quad \forall u, v \in V.$$

En effet, on en déduit, d'une part

$$J(u + v) - J(u) = \frac{1}{2} a(v, v) \geq \frac{\alpha}{2} \|v\|_V^2 \geq 0 \quad \forall v \in V.$$

Dès que $a(u, v) - l(v) = 0$ pour tout $v \in V$.donc,

$$a(u, v) = l(v) \Longrightarrow J(u + v) - J(u) \geq 0,$$

et car V est un espace vectoriel, donc $u + v$ soit arbitraire de V, donc,

$$a(u, v) = l(v) \Longrightarrow J(u) = \inf_{v \in V} J(v)......(*).$$

Par ailleurs, pour $v \in V$ fixé, l'inégalité

$$J(u + \theta v) - J(u) = \theta\{a(u, v) - l(v)\} + \frac{\theta^2}{2} a(v, v), \quad \forall \theta \in \mathbb{R},$$

car θ est arbitraire de $\mathbb{R}$ il faut et il suffit que $a(u, v) - l(v) = 0$, donc car V est un espace vectoriel $u + \theta v$ est arbitraire de V donc,

$$J(u) = \inf_{v \in V} J(v) \Longrightarrow a(u, v) = l(v)......(**).$$

De $(*)$ et de $(**)$: le point (2) est bien vérifié.

□

Remarque 2.1. *(1) Lorsque la fonction c est positive, la démonstration ci-dessus fournit une nouvelle preuve de l'unicité de la solution u. Il en résulte en effet que*

$$v \in V \quad et \quad a(v,v) = 0 \Rightarrow \|v\|_V = 0 \Rightarrow v = 0,$$

de sort que

$$v \neq 0 \Rightarrow J(v+u) - J(u) > 0.$$

(2) L'expression $\{a(u,v) - l(v)\}$ n'est autre que la dérivée de la fonction J au point u, appliquée à la fonction v, ce qui explique la caractérisation du minimum par l'annulation de la "première variation" de la fonction J, c'est pourquoi les relations "$a(u,v) - l(v)$ pour tout $v \in V$" sont appelées des équations variationnelles.

(3) Réciproquement, on peut définir le problème aux limites directement par l'une des formulations variationnelles (1) ou (2) du théorème (2.3.1) La première difficulté consiste ensuite à démontrer l'existence d'une solution, car celle-ci ne peut être établie en toute généralité que dans un espace complet, à savoir la complétion de l'espace V pour sa norme (qui est ici l'espace de Sobolev $H_0^1(0,1)$). Si le résultat "abstrait" d'existence est relativement facile à démontrer(cf. théorème(2.4.3)), c'est l'étude des espaces complétés qui est délicate (sur tout en dimension ≥ 2, où toutes ces idées se généralisent). Une seconde difficulté consiste à démontrer que la solution ainsi obtenue est suffisamment régulière pour être également une solution au sens "classique" où nous l'avons entendu jusque là.

(4) La fonctionnelle $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - l(v)$ est une fonctionnelle convexe (car $a(v,v)$ est symétrique).

2.3.2 L'espace vectoriel $H_0^1(0,1)$

Le lecteur a certainement appris que l'espace $\mathcal{C}_0^2([0,1])$ muni de sa norme naturelle n'est pas de Hilbert. C'est là où intervient le deuxième outil fondamental de la méthode variationnelle : les espaces de Sobolev. Commençons par préciser quelques notations. Pour $1 \leq p < +\infty$, on notera $L^p(]0,1[)$ l'ensemble des (classes) de fonctions mesurables u sur $]0,1[$ telles que $\int_0^1 |u(x)|^p dx < +\infty$, muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(]0,1[)} = \Big(\int_0^1 |u(x)|^p dx\Big)^{\dfrac{1}{p}}.$$

On notera aussi $L^p_{loc}(]0,1[)$ *l'ensemble (des classes) de fonctions mesurables* u *sur* $]0,1[$ *telles que* $|u|^p$ *soit intégrable sur tout compact* $\Bbbk \subset]0,1[$.

Définition 2.3.1. *On note* $H^1(0,1)$ *l'ensemble des fonctions* $u \in L^2(]0,1[)$ *pour lesquelles il existe* $w \in L^2(]0,1[)$ *tel que*

$$u(x_2) - u(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} w(s)ds \quad pour \quad tout \quad x_1, x_2 \in]0,1[.$$

Il est important que les fonctions de $H^1(0,1)$ *sont continues sur* $]0,1[$ *(avec l'abus de notation habituel constante à identifier un élément de* $L^2(]0,1[)$ *avec un de ses représentants) et même prolongeables continûment à* $[0,1]$. *Les fonctions de* $H^1(0,1)$ *soit aussi dérivables presque partout et* $u'(t) = w(t)$ *p.p. on notera dans la suite* $u' := w$, *étant entendu que cette fonction* u' *n'est égale que presque partout à la dérivée de* u. *De façon équivalente,* $H^1(0,1)$ *est l'ensemble des fonctions absolument continues sur* $[0,1]$ *telles que leur dérivée presque partout appartiennent à* $L^2(]0,1[)$. *On remarquera aussi que l'on peut prendre* $x_1, x_2 \in [0,1]$ *dans la définition de* $H^1(0,1)$ *et que l'on peut remplacer "pour tout* $x_1, x_2 \in [0,1]$*" par "il existe* x_1 *tel que pour tout* $x_2 \in [0,1]$*". On pose alors , pour tout* $u, v \in H^1(0,1)$,

$$(u, v) = \int_0^1 (u'v' + uv)\, dx \tag{2.4}$$

et on vérifie aisément que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $H^1(0,1)$ *(aussi* $H^1_0(0,1)$ *).*

Proposition 2.3.1. *L'espace* $H^1(0,1)$ *muni de la norme dérivée du produit scalaire (2.4) est un espace de Hilbert.*

Démonstration. Passons par :

a) Montrons que $u \in H^1(0,1)$ se prolonge de façon continue sur $[0,1]$ et que u est presque partout dérivable avec $u'(x) = v(x)$ *p.p.* on notera par la suite $u' = v$ en gardant à l'esprit que $u'(x)$ n'est que presque partout la dérivée de u en x.
Ceci découle immédiatement de la définition.

b) Montrons que $H^1(0,1)$ est un espace de *Hilbert* quand on le munit du produit scalaire (2.4)

$$(u_1, u_2) = \int_0^1 u_1 u_2 dx + \int_0^1 u_1' u_2' dx.$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1(0,1)$ une suite de *Cauchy* dans $H^1(0,1)$. Il résulte de la définition de la norme dans $H^1(0,1)$ que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ sont de *Cauchy* dans $L^2(]0,1[)$. Notons u et w leurs limites respectives. Choisissons alors $x_1 \in [0,1]$ tel qu'il existe une sous-suite que l'on note encore $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n(x_1) = u(x_1)$. Pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n(x) = u_n(x_1) + \int_{x_1}^x u_n'(s) ds.$$

Passons à la limite, il vient

$$u(x) = u(x_1) + \int_{x_1}^x w(s) ds,$$

ce qui montre que $u \in H^1(0,1)$ et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u dans $H^1(0,1)$.

En fin observant que, pour tout $x \in [0,1]$ et $m, n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} |u_n(x) - u_m(x)| &\leq |u_n(x_1) - u_m(x_1)| + \left|\int_{x_1}^x |u_n'(s) - u_m'(s)| ds\right| \\ &\leq |u_n(x_1) - u_m(x_1)| + \sqrt{1-0}\|u_n' - u_m'\|_{L^2(]0,1[)} \\ &\leq |u_n(x_1) - u_m(x_1)| + \|u_n' - u_m'\|_{L^2(]0,1[)} \end{aligned}$$

on obtient donc que toute sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite qui converge uniformément vers u sur $[0,1]$, ce qui implique la convergence uniforme de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers u sur $[0,1]$.

□

Proposition 2.3.2. *Posons*

$$H_0^1\Big(0,1\Big) = \{u \in H^1(0,1) : u(0) = u(1) = 0\}.$$

$H_0^1(0,1)$ *est aussi un espace de Hilbert.*

Démonstration. Montrons que $H_0^1(0,1)$ est un espace de *Hilbert* quand on le munit du produit scalaire de $H^1(0,1)$. Montrons qu'il existe une constante $c \geq 0$ telle que pour $u \in H_0^1(0,1)$, on a

$$\|u\|_{H^1(0,1)} \leq \mathrm{c}\|v\|_{L^2}.$$

(c'est l'inégalité de Poincaré). Il de coule immédiatement de b) du démonstration de proposition (2.3.1) que $H_0^1(0,1)$ *est fermé dans* $H^1(0,1)$ *on notant le fait, établi dans la démonstration de b), que la convergence dans* $H^1(0,1)$ *implique la convergence uniforme sur* $[0,1]$.
Soit $u \in H_0^1(0,1)$. *Pour tout* $x \in [0,1]$, *on a* $u(x) = \int_0^x |v(t)|dt$ *car* $u(0) = 0$.
Utilisons l'inégalité de Hlder, il vient

$$u^2(x) \leq \int_0^1 |v(t)dt,$$

avec $c = (1-0) = 1$. □

2.3.3 Les relations entre les solutions faibles et les solutions fortes (classiques)

Si u est une solution classique de (P_1) alors $u \in H_0^1(0,1)$ et, comme on l'a vu plus haut, u satisfait (2.3) : la solution forte est aussi solution faible. Réciproquement, si u est solution faible et si on suppose de plus que $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$, par application de la formule de *Green* (théorème 1.5.2), on obtient, pour tout $v \in H_0^1(0,1)$,

$$\int_0^1 f(x)v(x)dx = \int_0^1 (u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x))\, dx =$$

$$= \int_0^1 (-u''(x) + c(x)u(x))\, v(x)dx.$$

C'est-à-dire

$$\int_0^1 (-u''(x) + c(x)u(x) - f(x))\, v(x)dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(0,1).$$

Si $f, c \in \mathcal{C}([0,1])$, alors $-u'' + cu - f \in \mathcal{C}([0,1])$ puisque, par hypothèse, $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$. La relation précédente implique dans ce cas $-u''(x) + c(x)u(x)v(x)dx = f(x), \quad \forall v \in]0,1[$. Ainsi, une so- lution faible suffisamment régulière est solution classique. Cependant, suivant la régularité des fonctions f et c. la solution faible n'est pas toujours de classe C^2 et n'est donc pas toujours solution classique. La formulation faible correspond donc réellement à une extension du concept de solution par rapport à la solution classique. Remarquons aussi que la formulation variationnelle a un sens pour $f \in L^2(]0,1[)$ et $c \in L^\infty(]0,1[)$, tandis que la formulation classique nécessite que ces fonctions soient continues.

2.4 La formulation variationnelle et l'optimisation

2.4.1 Généralités sur les problèmes d'optimisation

Un problème d'optimisation se présente sous la forme suivante : étant donné une partie U non vide d'un espace vectoriel V et une fonction $J : V \to \mathbb{R}$, il s'agit de trouver un minimum de la fonction J par rapport à l'ensemble U, c'est-à-dire un élément u qui vérifie

$$(P_*) \qquad u \in U \quad et \quad J(u) = \inf_{v \in U} J(v).$$

Pour la définition du problème (P_*), il est donc suffisant de connaître la fonction J sur l'ensemble U, mais dans la pratique, celle-ci est généralement connue sur l'espace V tout entier. Précisons quelques points de terminologie, essentiellement selon la nature de la fonction J, qu'on a coutume d'appeler fonctionnelle en *Optimisation*, et de l'ensemble U. On distingue les problèmes sans contraintes lorsque $U = V$, et les problèmes avec contraintes dans le cas contraire. Parmi les problèmes avec contraintes, un cas très important dans les applications est celui d'ensembles U de la forme

$$U = \{v \in V; \quad \varphi_i(v) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq m'; \quad \varphi_i(v) = 0, \quad m'+1 \leq i \leq m\},$$

les fonctions données $\varphi_i : V \to \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq m$, étant appelées les contraintes du problème. Si $m' = m$, ou si $m' = 0$, on dit souvent par abus de langage qu'il s'agit d'un problème avec "$contraintes - inégalités$", ou avec "$contraintes - égalités$", respectivement. En l'absence d'hypothèses supplémentaires sur les fonctions φ_i et J, notamment en ce qui concerne la convexité et a fortiori la linéarité, le problème (P_*) associé s'appelle un problème de *programmationnonlinéaire*. Puisque l'on peut toujours remplacer une "$contrainte - égalité$", $\varphi_i(v) = 0$ par les deux "$contraintes - inégalités$" $\varphi_i(v) \leq 0$ et $-\varphi_i(v) \leq 0$, bornons-nous provisoirement à considérer les seuls problèmes avec "$contraintes - inégalités$", correspondant par conséquent à des ensembles U de la forme

$$U = \{v \in V; \quad \varphi_i(v) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq m\}.$$

Si les fonctions J et φ_i sont convexes, on dit qu'il s'agit d'un problème de programmation convexe : on notera que l'ensemble U est alors convexe ; en effet,

$$\begin{cases} \varphi_i(u) \leq 0; \quad \varphi_i(v) \leq 0; \\ \\ \theta \in [0,1] \end{cases} \Longrightarrow \varphi_i(\theta u + (1-\theta)v) \leq \theta\varphi_i(u) + (1-\theta)\varphi_i(v) \leq 0,$$

et une intersection d'ensembles convexes est convexe.
Deux cas particuliers très importants de la programmation convexe sont ceux de la *programmation quadratique* et de la *programmation linéaire* : dans un problème de *programmation quadratique*, la fonction J est une fonctionnelle quadratique sur $V = \mathbb{R}^n$:

$$J : v \in \mathbb{R}^n \to J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v), \quad A = A^\intercal \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n,$$

la matrice A étant supposée définie positive (ce qui entraîne la stricte convexité de la fonction J), et les contraintes φ_i sont affines (donc convexes) :

$$U = \{v \in \mathbb{R}^n; \quad \sum_{j=1}^{n} c_{ij} v_j \leq d_i, \quad 1 \leq i \leq m\}.$$

Exemple 2.4.1.

$$\begin{cases} \min J(v_1, v_2, v_3) = 3v_1^2 + 2v_2^2 + v_3^2 + 4v_1v_2 - v_1 - v_2 - v_3; \\ \varphi_1(v_1, v_2, v_3) = v_1 - 50 \leq 0, \\ \varphi_2(v_1, v_2, v_3) = v_1 + v_2 - 100 \leq 0, \qquad (n = m = 3) \\ \varphi_3(v_1, v_2, v_3) = v_1 + v_2 + v_3 - 150 \leq 0. \end{cases}$$

Dans ce cas

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A est symétrique et définie positive.

$$\text{et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dans un problème de programmation linéaire, la fonction J est une fonctionnelle linéaire sur $V = \mathbb{R}^n$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i,$$

et l'ensemble U est encore de la forme :

$$U = \{v \in \mathbb{R}^n; \quad \sum_{j=1}^{n} c_{ij} v_j \leq d_i, \quad 1 \leq i \leq m\}.$$

Exemple 2.4.2.

$$\begin{cases} \min J(v_1, v_2, v_3) = 3v_1 + 2v_2 + v_3; \\ \varphi_1(v_1, v_2, v_3) = v_1 - 50 \leq 0, \\ \varphi_2(v_1, v_2, v_3) = v_1 + v_2 - 100 \leq 0, \qquad (n = 3, m = 2). \end{cases}$$

Remarque 2.2. *Si la matrice symétrique intervenant dans la définition d'une fonctionnelle quadratique est seulement positive, cette dernière est encore convexe ; il serait donc concevable d'appeler encore problème de programmation quadratique le problème d'optimisation correspondant. Or, ce faisant, la programmation linéaire apparaîtrait comme un cas particulier de la programmation quadratique, ce qui est grossièrement inexact à bien des égards, à telle enseigne d'ailleurs qu'un chapitre séparé devra être spécialement consacré à la programmation linéaire.*

Examinons maintenant les questions d'existence et d'unicité de la solution du problème (P_*). Que l'on soit en dimension finie ou non, l'unicité d'une solution éventuelle est en général établie indépendamment de l'existence, le plus souvent à partir de la convexité de l'ensemble U et de la stricte convexité de la fonctionnelle. Pour ce qui concerne l'existence, commençons par le cas de la dimension finie. Si U est une partie fermée bornée de $V = \mathbb{R}^n$ et si la fonction $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, est continue, il est clair que le problème (P) a au moins une solution. En vue d'étendre dans un premier temps ce résultat au cas d'ensembles U non bornés (notamment lorsque U $V = U = \mathbb{R}^n$), on introduit la notion suivante : une fonction J à valeurs réelles définie sur un espace vectoriel normé V est dite *coercive* si

$$\lim_{\|v\|_V \to +\infty} J(v) = +\infty.$$

Théorème 2.4.1. *Soit U une partie non vide fermée de $\mathbb{R}^n$, et $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue, coercive, si l'ensemble U est non borné. Alors il existe au moins un élément u tel que*

$$(P_*) \qquad u \in U \quad \text{et} \quad J(u) = \inf_{v \in U} J(v).$$

Démonstration. Soit u_0 un point quelconque de l'ensemble U. La *coercivit*é de la fonctionnelle J entraîne l'existence d'un nombre r tel que

$$\|v\| > r \Longrightarrow J(u_0) < J(v).$$

Dans ces conditions, l'ensemble des solutions du problème (P) coïncide avec celui des solutions du problème (P_*^0) correspondant à l'ensemble

$$U_0 = U \cap \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| \leq r\}.$$

On est donc ramené au cas d'un sous-ensemble non vide $(u_0 \in U_0)$, fermé, borné. $\square$

Remarque 2.3. *(1) Le théorème (2.4.1) fournit une démonstration du théorème de projection lorsque l'espace* V *est de dimension finie ; il suffit en effet d'introduire la fonction (avec les notations du théorème précédent)* $J(v) = \|w-v\|$ *qui est coercive puisque* $J(v) \geq \|v\| - \|w\|$ *Mais ce point de vue fait jouer un rôle artificiel à la compacité : la démonstration du théorème de projection repose en effet d'une part sur le caractère complet de l'espace et d'autre part sur la "géométrie" de l'espace, liée à l'existence d'un produit scalaire. Par contre, l'avantage de la présente démonstration est de s'appliquer à une norme quelconque.*

(2) On notera que, lorsque l'ensemble U *est non borné et la fonctionnelle linéaire, le résultat ci-dessus ne s'applique pas en général.*

C'est la compacité qui intervient de façon essentielle dans la démonstration du théorème (2.4.1). On peut s'en convaincre autrement par la considération d'une suite minimisante $(u_k)_{k\geq 0}$, c'est-à-dire une suite de points qui vérifie

$$u_k \in U \quad pour \quad tout \quad k \geq 0, \qquad \lim_{k\to+\infty} J(u_k) = \inf_{v\in U} J(v).$$

Cette suite étant nécessairement bornée, puisque la fonctionnelle J est *coercive*. on peut extraire une suite $(u_{k'})$ qui converge vers un élément $u \in U$ (l'ensemble U est fermé).
La fonction J étant continue,

$$J(u) = \lim_{k'\to+\infty} J(u_{k'}) = \inf_{v\in U} J(v),$$

ce qui fournit une nouvelle preuve de l'existence d'une solution du problème (P).
C'est d'ailleurs ce type de raisonnement qui permet d'étendre le résultat au cas de la dimension infinie, avec néanmoins des hypothèses supplémentaires, et essentielles, de convexité, aussi bien pour la fonctionnelle J que pour l'ensemble U. La démonstration reposant sur la compacité "*faible*" des parties convexes fermées bornées des espaces de *Hilbert* (parties (*ii*) et (*iii*) de la démonstration ci-dessous), nous commençons par la définition suivante : On dit qu'une suite $(u_{k'})_{k'\geq 0}$ d'éléments d'un espace *préhilbertien* V converge faiblement s'il existe un élément $U \in V$ tel que

$$\lim_{k\to+\infty} (v, u_k) = (v, u) \quad pour \quad tout \quad v \in V.$$

On notera que, si toute suite qui converge au sens de la norme converge faiblement, l'inverse n'est pas toujours vrai.

Théorème 2.4.2. *Soit* U *une partie non vide, convexe, fermée, d'un espace de Hilbert séparable* V, *et* $J : V \to \mathbb{R}$ *une fonctionnelle convexe, dérivable, coercive si l'ensemble* U *est non borné. Alors il existe au moins un élément* u *tel que*

$$u \in U \quad et \quad J(u) = \inf_{v\in U} J(v).$$

Démonstration. (i) Comme dans le cas de la dimension finie (théorème (2.4.1)), la *coercivité* de la fonctionnelle permet de se ramener au seul cas d'un ensemble U borné (et encore convexe puisqu'une boule est convexe ; se reporter à la démonstration du théorème précité).

(ii) Considérons une suite minimisante $(u_k)_{k\geq 0}$:

$$u_k \in U \quad pour \quad tout \quad k \geq 0, \quad \lim_{k\to+\infty} J(u_k) = \inf_{v\in U} J(v),$$

sans exclure à ce stade l'éventualité où $\inf_{v\in V} J(v) = -\infty$. La suite (u_k) étant bornée (d'après(i)), montrons qu'on peut en extraire une suite qui converge faiblement.
Soit C une constante telle que

$$\|u_k\| \leq C \quad pour \quad tout \quad k \geq 0.$$

On note pour commencer que, si v est un élément quelconque de l'espace V, la suite de nombres réels $\{(v, u_k)\}_{k\geq 0}$ est bornée puisque $|(v, u_k)| \leq C\|v\|$. L'espace V étant supposé séparable, soit $(v_k)_{k\geq 0}$ un ensemble dénombrable dense. La suite $\{(v_1, u_k)\}_{k\geq 0}$ étant bornée, on peut en extraire une suite $\{(v_1, u_{k_1})\}_{k_1\geq 0}$ convergente ; de même, la suite $\{(v_2, u_{k_1})\}_{k_1\geq 0}$ étant bornée, on peut en extraire une suite $\{(v_2, u_{k_2})\}_{k_2\geq 0}$ convergente, et ainsi de suite. Considérons la suite "*diagonale*" $(w_l)_{l\geq 0}$, où $w_l := u_{l_l}$. Par construction, chaque suite $\{(v_k, u_l)\}_{l\geq 0}$, $l \geq 0$, a une limite, qui est la limite de la suite $\{(v_k, u_{l_k})\}_{l_k\geq 0}$. On va montrer qu'en fait toute suite $\{(v, u_l)\}_{l\geq 0}$, $v \in V$, a une limite : étant donné un élément quelconque $v \in V$, soit en effet $\varepsilon > 0$ donné. Il existe un élément v_k tel que $\|v - v_k\| \leq \frac{\varepsilon}{4C}$. Dans ces conditions,

$$\begin{aligned}\|(v, w_l) - (v, w_m)| = |(v, w_l - w_m)| &\leq |(v_k, w_l - w_m)| + |(v - v_k, w_l - w_m)| \leq \\ &\leq |(v_k, w_l) - (v_k, w_m)| + \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

puisque $\|w_l - w_m\| \leq \|w_l\| + \|w_m\| \leq 2C$. L'élément v_k étant fixé, la suite $\{(v_k, w_l)\}_{l\geq 0}$ converge d'après ce qui précède ; c'est donc une suite de Cauchy. Par suite, il existe un entier $l_0 = l_0(\varepsilon, v_k)$ tel que

$$l, k \geq l_0 \Longrightarrow |(v_k, w_l) - (v_k, w_m)| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

et l'assertion est établie.
Définissons une application $J : V \to \mathbb{R}$ par

$$f(v) = \lim_{l\to+\infty} (v, w_l) \quad pour \quad tout \quad v \in V.$$

C'est une application linéaire, et continue puisque

$$|(v, w_l)| \leq C\|v\| \quad pour \quad tout \quad l \quad \Longrightarrow |f(v)| \leq C\|v\|.$$

D'après le théorème de représentation de *Riesz*, il existe un élément $u \in V$ tel que $f(v) = (v, u)$ pour tout v ; on a donc bien établi la convergence faible de la suite extraite $(w_l) = (u_{l_l})$ vers l'élément u.

(iii) Démontrons ensuite que la limite "*faible*" u de la suite extraite (w_l) appartient à l'ensemble U. Notons P l'opérateur de projection associé à l'ensemble convexe fermé U,

$$w_l \in U \Longrightarrow (Pu - u, w_l - Pu) \geq 0 \quad pour \quad tout \quad entier \quad l.$$

La convergence faible de la suite (w_l) vers l'élément u entraîne

$$\lim_{l \to +\infty} (Pu - u, w_l - Pu) = (Pu - u, u - Pu) = -\|u - Pu\|^2 \leq 0,$$

et donc $u \in U$. On a ainsi établi qu'un ensemble fermé convexe est "*faiblement*" fermé, c'est-à-dire que la limite "faible" d'une suite faiblement convergente de points d'un tel ensemble lui appartient.

(iv) Montrons enfin que la fonctionnelle J vérifie

$$J(v) \leq \lim_{l \to +\infty} \inf J(v_l),$$

pour toute suite (v_l) convergeant faiblement vers un élément v. La fonction J étant supposée dérivable et convexe, on a en effet

$$J(v) + (\bigtriangledown J(v), v_l - v) \leq J(v_l) \quad pour \quad tout \quad entier \quad l,$$

et, par définition de la convergence faible,

$$\lim_{l \to +\infty} (\bigtriangledown J(v), v),$$

ce qui établit la propriété annoncée ; on l'appelle la faible semi-continuité inférieure séquentielle de la fonctionnelle J.

(v) Il est maintenant facile de conclure : la limite faible $u \in U$ de la suite extraite (w_l) de la suite minimisante (u_k) vérifie

$$J(v) \leq \lim_{l \to +\infty} \inf J(w_l) = \lim_{l \to +\infty} J(u_k) = \inf_{v \in U} J(v).$$

□

2.4.2 Les relations de la formulation variationnelle et l'optimisation

Remarque 2.4. *(1) Le théorème(2.4.2) reste vrai dans les espaces de Banach réflexifs, dont les espaces de Hilbert (séparables ou non) sont des cas particuliers ; de même, il reste vrai si on remplace l'hypothèse de dérivabilité de la fonction J par la seule continuité.*

(2) La réciproque de la propriété (ii) est vraie (toute suite faiblement convergente est bornée), mais elle ne peut pas s'établir de façon élémentaire.

Dans certains cas particuliers, la démonstration de l'existence d'une solution peut être notablement simplifiée, en évitant notamment tout recours à la convergence faible.
Commençons par une définition : étant donné un espace de Hilbert V, une fonction $J : V \to \mathbb{R}$ est appelée fonctionnelle quadratique sur V si elle est de la forme

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - l(v),$$

où $a(.,.) : V \times V \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire, continue, symétrique $(a(u,v) = a(v,u)$ pour tout $u, v \in V)$ et $l : V \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue. Cette définition généralise de façon naturelle celle d'une fonctionnelle quadratique sur $\mathbb{R}^n$ puisque, grâce au théorème de représentation de *Riesz*, il existe un opérateur $A \in \mathcal{L}(v)$ et un élément $b \in V$, tous deux définis de façon unique, tels que

$$a(u,v) = (Au,v) = (u,Av) \quad pour \quad tout \quad u,v \in V,$$

$$l(v) = (b,v) \quad pour \quad tout \quad u,v \in V,$$

en désignant par $(.,.)$ le produit scalaire de l'espace V. Le théorème de projection et le théorème de représentation de *Riesz* permettent alors d'établir simplement un résultat général d'existence pour des problèmes (P_*) posés avec de telles fonctionnelles. On notera que le cas $U = V$ correspond exactement à la formulation variationnelle des problèmes aux limites.

Théorème 2.4.3. *Soit*

$$J : v \in V\ rightarrow J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - l(v)$$

une fonctionnelle quadratique sur un espace de Hilbert V. On suppose de plus qu'il existe un nombre α tel que

$$\alpha > 0 \quad et \quad a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad pour \quad tout \quad v \in V.$$

Étant donné une partie non l'ide, convexe, fermée U de V, il existe un et un seul élément u vérifiant

$$(P_*) \qquad u \in U \quad et \quad J(u) = \inf_{v \in U} J(v).$$

Cet élément u vérifie également

$$a(u, v-u) \geq l(v-u) \quad pour \quad tout \quad v \in V.$$

et, réciproquement, si un élément $u \in V$ vérifie les inéquations ci-dessus, c'est la solution du problème (P). Si U est un sous-espace vectoriel, les inéquations précédentes sont remplacées par les équations

$$a(u, v) = l(v) \quad pour \quad tout \quad v \in V.$$

Démonstration. La forme bilinéaire $a(.,.)$ est également un produit scalaire sur l'espace V, la norme associée étant équivalente à la norme $\|.\|$ associée au produit scalaire $(.,.)$ de l'espace V. En effet, les hypothèses faites entraînent :

$$\sqrt{\alpha}\|v\| \leq \sqrt{a(v,v)} \leq \sqrt{\|a\|}\|v\|$$

en désignant par $\|a\|$ la norme (dans l'espace $\mathcal{L}_2(V, \mathbb{R})$ de l'application bilinéaire $a(.,.)$. La forme linéaire l étant donc encore continue pour cette nouvelle norme, le théorème de représentation de *Riesz* montre qu'il existe un élément $c \in V$ et un seul tel que

$$l(v) = a(u, v) \quad pour \quad tout \quad v \in V.$$

Par suite, on peut transformer l'expression de la fonctionnelle, en l'écrivant

$$J(v) = \frac{1}{2} - a(v,v) - a(c,v) = \frac{1}{2}a(v-c, v-c) - \frac{1}{2}a(c,c).$$

Dans ces conditions, résoudre le problème (P_*) revient à chercher la projection u de l'élément c sur l'ensemble U, au sens du produit scalaire $a(.,.)$. D'après le théorème de projection, il en existe une et une seule, ce qui établit l'existence et l'unicité de la solution u du problème (P_*). D'après le même théorème, cette solution est également caractérisée par les inéquations

$$a(u-c, v-u) \geq 0 \quad pour \quad tout \quad v \in U.$$

ou par les équations

$$a(u-c, v) = 0 \quad pour \quad tout \quad v \in U.$$

si U est un sous-espace vectoriel, relations qui coïncident avec celles de l'énoncé puisque $a(c, v) = f(v)$ pour tout $v \in V$. □

Remarque 2.5. *(1) Un usage essentiel de la symétrie de la forme bilinéaire a été fait, d'une part, pour conclure que l'expression $a(.,.)$. est un produit scalaire, d'autre part, pour écrire la nouvelle expression de la fonctionnelle.*

(2) Les inéquations $a(u, v-u) \geq l(v-u)$ sont un cas particulier des inéquations d'Euler $J'(u)(v-u) \geq 0$ appliquées à la fonctionnelle J, de dérivée donnée par

$$J'(u)v = a(u, v) - l(v) \quad \textit{pour} \quad \textit{tout} \quad v \in V.$$

Une observation analogue (et pour cause...) a été faite à propos du théorème de projection.

(3) On a indiqué aux paragraphe 2.3 les raisons pour lesquelles les relations $a(u, v) = l(v)$ sont des équations "variationnelles" ; c'est dans le même esprit que les relations "$a(u, v-u) \geq l(v-u)$ pour tout $v \in U$" sont appelées des inéquations variationnelles.

2.5 Conclusion

Nous avons transformé un problème aux limites à un problème d'optimisation. Remarquons que cette étude est une introduction à la méthode des éléments finis.

Chapitre 3

Résolution d'un problème quadratique non convexe et sous contraintes linéaires

Le résultat du chapitre précédent est la possibilité de changer un problème aux limites à un problème d'optimisation quadratique, et parmi les méthodes de la programmation quadratique nous avons choisi la méthode qui est présentée dans [7]. Cette méthode permet de rechercher un maximum d'une fonction concave ou minimum d'une fonction convexe, elle basée sur la projection orthogonale sur les convexes fermés, elle est importante et efficace comme algorithme.

3.1 Introduction

L'objet de ce chapitre consiste à trouver la solution exacte d'un problème de programmation quadratique avec des contraintes linéaires et une fonction objectif quadratique écrite sous sa forme canonique.
Cette étude décrit une nouvelle méthode basée sur la décomposition de la fonction objectif en une somme de deux fonctions l'une convexe et l'autre concave ; un nouvel ensemble réalisable est construit par une transformation homographique, de telle sorte que la projection du point critique de la fonction objectif sur cet ensemble, donne la solution exacte du problème étudié.
Notons qu'on n'a pas besoin de transformer le problème quadratique en un équivalent linéaire comme dans les méthodes numériques ; la méthode est purement analytique et évite le choix de la solution initiale.
La technique est simple et nous permet de trouver les coefficients de la fonction convexe lors du passage d'un sommet à un sommet voisin.
Le théorème fournis reste valable pour un domaine convexe fermé et borné ; il peut être appliqué à un grand nombre de problèmes d'optimisation.
Les résultats obtenus sont d'une grande importance pour la résolution des cas de programmation séparable.
On a l'exemple suivant :

$$(P)\begin{cases} \max J(v_1, v_2) = 5v_1 + 5v_2 - v_1^2 - v_2^2 \\ v_1 + 2v_2 - 8 \leq 0 \\ 3v_1 + v_2 - 9 \leq 0 \\ v_1, v_2 \geq 0 \end{cases}$$

La méthode utilisée pour résoudre ce problème nécessite au moins dix variables. Dans la méthode présentée dans cette thèse, sans ajouter de variable, la solution exacte est atteinte dans la première tentative. Cette technique analytique détermine la solution optimale exacte du problème. Il est à mentionner ici que la méthode est générale pour n'importe quel problème d'optimisation quadratique.
Le principe de cette technique est de projeter le point critique sur un nouveau

convexe construit à partir de l'ensemble des solutions réalisables.
Un second ingrédient est l'étude de la fonction convexe. Les solutions optimales sont des points extrêmes qui sont toujours des sommets. Donc il est seulement nécessaire de se déplacer d'un sommet à un autre et de choisir le sommet qui produit la solution optimale.
En se déplaçant d'un sommet à l'un de ses voisins, la forme de la fonction convexe change et de nouveaux termes contenant le double produit apparaissent ; alors une technique simple à programmer, calcule ces coefficients est présentée.
Enfin un exemple illustratif de la méthode est traité.

3.2 Décomposition de la fonction objectif

Considérons le problème suivant :

$$(P)\begin{cases} J(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{ij} v_i v_j \\ \max\limits_{v\in U} J(v) \end{cases} \tag{3.1}$$

où $U = \{v \in \mathbb{R}^n : v \geq 0 \quad et \quad Ax \leq b\}$, A une matrice $m \times n$ et b un vecteur de $\mathbb{R}_+^m$. Il est facile de voir qu'on peut se restreindre à l'étude du cas suivant

$$J(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \beta_i v_i^2,$$

où les coefficients α_i et β_i sont des réels quelconques, et la fonction $J(v)$ n'est ni convexe ni concave.
Commençons par voir comment optimiser la fonction $J(v)$
Pour cela, soit $\varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i v_i + \beta_i v_i^2\right)$, où la somme porte sur tous les indices i pour $\beta_i < 0$; et $\psi(v) = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i v_i + \beta_i v_i^2\right)$, où la somme porte sur tous les indices i pour $\beta_i \geq 0$.
Après décomposition, la fonction $J(v)$ devient comme suit :

$$J(v) = \varphi(v^1) + \psi(v^2) \quad tel \quad que \quad v = \begin{pmatrix} v^1 \\ \overline{v^2} \end{pmatrix}.$$

Nous allons commencer par étudier la fonction concave $\varphi(v)$.
Nous donnons ici la solution optimale exacte en projetant le point critique $v^* = \left(\frac{-\alpha_i}{2\beta_i}\right)_i$ sur un nouveau convexe U'. Si le point critique v^* est à l'intérieur du convexe U , alors la solution optimale se trouve exactement en ce point (car on remarque que si on suppose que le minimum local existe, J est localement bornée donc bornée sur le fermé U, et par suite elle est continue). Sinon, la projection directe du point v^* sur U donne seulement une solution approchée comme le font les autres méthodes (voir Exemple 3.3.2).
Nous montrons dans le théorème 3.3.1, que $\max\limits_{v\in U} \varphi(v) = \varphi(\overline{v})$, où $\overline{v}$ est la projection du point sur le convexe U'.
Soit $U \subset \mathbb{R}^n \to U' \subset \mathbb{R}^n$ l'application qui transforme le convexe U en un convexe U'.
$T(v) = \Lambda v, \quad \Lambda = \left(\sqrt{-\beta_1}, ..., \sqrt{-\beta_i}\right)$ n'est pas nulle, parce que les $\beta_i < 0$ pour tout i. Alors elle est conforme.

3.3 Optimisation de la fonction concave φ

Soit U un ensemble convexe fermé borné de $\mathbb{R}^n$. Posons :
$\varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i v_i + \beta_i v_i^2\,) \quad ,\alpha_i \in \mathbb{R}, \quad \beta_i < 0, \quad pour \quad tout \quad i$
$v^* = (v_i^*)_i = \left(\frac{-\alpha_i}{2\beta_i}\right)_i; \quad w^* = (w_i^*)_i = \left(\frac{\alpha_i}{2\sqrt{-\beta_i}}\right)_i$
$w = \Big(w_i\Big)_i = \Big(\sqrt{-\beta_i} w_i\Big)_i; \quad \max_{v\in U}\varphi(v) = \varphi(\overline{v}); \quad v^* = (v_i^*\,)_i \in U.$

Théorème 3.3.1. *Il existe un ensemble convexe fermé borné U' de $\mathbb{R}^n$, et un vecteur $w_0 = (w_{0i}\,)\in U'$, tel que les conditions suivantes soient satisfaites :*

1. $\max_{v\in U}\varphi(v) = \varphi(v^*) - \|w^* - w_0\|^2;$ *(Propriété 1)*
2. $\|w^* - w_0\| = \inf_{w\in U}\|w^* - w_0\|$ *; (Propriété 2)*
3. $\overline{v}_i = \dfrac{w_{0i}}{\sqrt{-\beta_i}}$*, pour tout* i*,* $i = 1, 2, .., n.$ *; (Propriété 3)*

Démonstration. Pour tout $v \in U$, soit
$\Delta\varphi_i = (\alpha_i v_i^* + \beta_i v_i^{*2}) - (\alpha_i v_i + \beta_i v_i^2)$. Alors
$\Delta\varphi_i = \alpha_i \left(\frac{-\alpha_i}{2\beta_i}\right)_i + \beta_i \left(\frac{-\alpha_i}{2\beta_i}\right)_i^2 - \alpha_i v_i - \beta_i v_i^2$
$= -\beta_i \left(v_i + \frac{\alpha_i}{2\beta_i}\right)^2$
$= -\beta_i\,(v_i + v_i^*\,)^2.$
Mais $\varphi(v^*) - \varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} \Delta\varphi_i$
$\varphi(v^*) - \varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} -\beta_i\,(v_i - v_i^*\,)^2$; pour tout $v \in U$,
Par conséquent, $\inf_{v\in U} (\varphi(v^*) - \varphi(v)) = \inf_{v\in U} (\sum_{i=1}^{n} -\beta_i\,(v_i - v_i^*\,)^2\,)$,
peut être écrite sous la forme suivante :
$\varphi(v^*) - \max_{v\in U}\varphi(v) = \inf_{v\in U} \sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{-\beta_i}\left(v_i - v_i^*\right)\right)^2 = \inf_{v\in U'} \sum_{i=1}^{n} (w_i^* - w_i\,)^2.$
Soit

$$U' = \{w = (w_i)_i \in \mathbb{R}^n : \quad w_i = \sqrt{-\beta_i} v_i, \quad v = (v_i)_i \in U\},$$

parce que

$$\inf_{v\in U'} \sum_{i=1}^{n} (w_i - w_i^*)^2 = \|w^* - w_0\|^2, \quad w_0 \in U'.$$

Alors, $\max_{v\in U}\varphi(v) = \varphi(v^*) - \|w^* - w_0\|^2$, d'où la propriété (1).

$\inf_{v\in U'}\|w^* - w\|^2 = \|w^* - w_0\|^2$., alors $\|w^* - w_0\|^2 \leq \|w^* - w\|^2$ pour tout $w \in U'$.
Ceci implique que $\|w^* - w_0\| \leq \|w^* - w\|$ pour tout $w \in U'$.

Nous avons par conséquent $\|w^* - w_0\| \leq \inf\limits_{v \in U'} \|w^* - w\|$.
Puisque $w \in U'$ alors ;
$\|w^* - w_0\| \geq \inf\limits_{v \in U'} \|w^* - w\|.$; Donc $\|w^* - w_0\| = \inf\limits_{v \in U'} \|w^* - w\|$. D'où la propriété (2).
Le vecteur w_0 est la projection du vecteur w^* sur le nouveau convexe U'.
Nous avons

$$\begin{aligned}
\max_{v \in U} \varphi(v) &= \varphi(\overline{v}) = \varphi(v^*) - \|w^* - w_0\|^2 \\
&= \varphi(v^*) - \inf_{v \in U} \sum_{i=1}^{n} \left(w_i^* - \sqrt{-\beta_i} v_i \right)^2 \\
&= \varphi(v^*) - \inf_{v \in U} \left(w_i^* - \sqrt{-\beta_i} \overline{v_i} \right)^2 .
\end{aligned}$$

D'où la propriété (3). □

Remarque 3.1. *Si $v^* \in U$ alors $\inf\limits_{v \in U} \sum_{i=1}^{n} -\beta_i \left(v_i^* - v_i\right)^2 = 0$ et $\max\limits_{v \in U} \varphi(v) = \varphi(v^*)$.*

La transformation $T : U \subset \mathbb{R}^n \to U' \subset \mathbb{R}^n$, qui pour tout $v \in U$, associe $T(v) = \Lambda v, \quad \Lambda = \left(\sqrt{-\beta_1}, ..., \sqrt{-\beta_i}\right)$ a comme matrice *Jacobèenne*.

$$\begin{pmatrix}
\sqrt{-\beta_1} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \sqrt{-\beta_n}
\end{pmatrix}$$

Son déterminant est $\Pi_{i=1}^{n} \sqrt{-\beta_1} \neq 0$. Donc elle est conforme.

Remarque 3.2. *Le convexe U est borné. On peut se restreindre au cas $\alpha_i \geq 0$ pour tout i.*
En effet, supposons que nous avons $\alpha_i v_i + \beta_i v_i^2$ avec $\alpha_i < 0$.
Soit $\max v_i = \delta_i^*, \quad w_i = \delta_i^* - v_i \geq 0$.
Par conséquent

$$\begin{aligned}
\alpha_i v_i + \beta_i v_i^2 &= \alpha_i v_i + \beta_i v_i^2 - \alpha_i \delta_i^* + \alpha_i \delta_i^* \\
&= \beta_i w_i^2 + \left(-\alpha_i - 2\beta_i \delta_i^* \right) w_i + \alpha_i \delta_i^* + \beta_i \delta_i^{*2} \\
&= \beta_i w_i^2 + \alpha_i' w_i + K_i,
\end{aligned}$$

où $\alpha_i' = -\alpha_i - 2\beta_i \delta_i^* \geq 0 \quad$ et $\quad K_i = \alpha_i \delta_i^* + \beta_i \delta_i^{*2}$.
Par conséquent, il suffit de remplacer : v_i par $\delta_i^* - w_i$, et $\alpha_i v_i + \beta_i v_i^2$ par $\beta_i w_i^2 + \alpha_i' w_i + K_i$.

Exemple 3.3.1.

$$\begin{cases} v_1, v_2 \geq 0 \\ 3v_1 + v_2 - 9 \leq 0 \\ v_1 + 2v_2 - 8 \leq 0 \\ \\ \max \varphi(v_1, v_2) = 5v_1 + 5v_2 - v_1^2 - v_2^2 \end{cases}$$

Dans ce cas $\beta_1 = \beta_2 = -1$, *donc* $U = U'$.

$$\frac{\partial J}{\partial v_1}(v_1, v_2) = 5 - 2v_1 = 0 \Longrightarrow v_1^* = \frac{5}{2};$$
$$\frac{\partial J}{\partial v_2}(v_1, v_2) = 5 - 2v_2 = 0 \Longrightarrow v_2^* = \frac{5}{2}.$$

Le point critique $v^* = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ *n'appariant pas à* U, *parce que* $3 \times \frac{5}{2} + \frac{5}{2} - 9 = 1 > 0$, $\overline{v} = P_U(v^*) = v^* - \frac{(v^*, a) - b}{\|a\|^2} a$ *où* $a = (3, 1)$, $b = 9$.

$$(v^*, a) = \frac{5}{2} \times 3 + \frac{5}{2} \times 1 = 10, \quad \|a\|^2 = 10.$$
$$\overline{v} = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) - \frac{1}{10}(3, 1) = (2.2, 2.4).$$
$$\max_{(v_1, v_2) \in U} \varphi(v_1, v_2) = \varphi(\overline{v}) = 12, 40.$$

Ici

$$U = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 / \quad 3v_1 + v_2 - 9 \leq 0, \quad v_1 + 2v_2 - 8 \leq 0, \quad v_1 \geq 0, \quad v_2 \geq 0\}.$$

Exemple 3.3.2.

$$\begin{cases} v \geq 0 \\ 3v_1 + 2v_2 \leq 6 \\ \\ \max \varphi(v_1, v_2) = 5v_1 + 8v_2 - v_1^2 - 2v_2^2 \end{cases}$$

Dans ce cas $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = -2$ *donc* $U \neq U'$.

$$\frac{\partial J}{\partial v_1}(v_1, v_2) = 5 - 2v_1 = 0 \Longrightarrow v_1^* = \frac{5}{2};$$
$$\frac{\partial J}{\partial v_2}(v_1, v_2) = 8 - 4v_2 = 0 \Longrightarrow v_2^* = 2.$$

Le point critique $v^* = \left(\frac{5}{2}, 2\right)$ *n'appariant pas à* U*, parce que* $3 \times \frac{5}{2} + 2.2 > 6$,
$\overline{v} = P_{U'}(v^*) = v^* - \frac{(v^*, a) - b}{\|a\|^2} a$ *où* $a = (3, 2)$, $b = 6$.

$$(v^*, a) = \frac{5}{2} \times 3 + 2 \times 2 = \frac{23}{2}, \quad \|a\|^2 = 13.$$

$$\overline{v} = \left(\frac{5}{2}, 2\right) - \frac{11}{2 \times 13}(3, 2) = \left(\frac{5}{2} - \frac{33}{26}, 2 - \frac{11}{13}\right) = (\frac{16}{13}, \frac{15}{13}).$$

$$U = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 / \quad 3w_1 + \frac{2}{\sqrt{2}} w_2 \leq 6, \quad w_1 \geq 0, \quad w_2 \geq 0\}.$$

De plus $w^* = \left(\frac{5}{2}, 2\sqrt{2}\right)$.
La projection de ce point sur U' *donne le point suivant* w_0 :
$w_0 = \left(1, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \Longrightarrow \overline{v} = \left(1, \frac{3}{2}\right)$ *et* $\max\limits_{(v) \in U} \varphi(v) = \varphi\left(1, \frac{3}{2}\right) = 11,500.$
Notons que la projection du point v^* *sur* U *donne le point* $(\frac{16}{13}, \frac{15}{13})$*, et* $\varphi\left(\frac{16}{13}, \frac{15}{13}\right) = 11,207$.
Évdemment $\max\limits_{(v) \in U} \varphi(v) \leq \varphi(v^*) = \varphi\left(\frac{5}{2}, 2\right) = 14,250.$
Le point $\left(\frac{16}{13}, \frac{15}{13}\right)$ *de l'ensemble convexe* U *est le plus proche point du point critique* v^**, mais il n'est pas la solution optimale de* φ.

Exemple 3.3.3.

$$\begin{cases} v_1, v_2, v_3 \geq 0 \\ v_1 + 3v_2 \leq 18 \\ v_1 + v_2 + v_3 \leq 8 \\ 2v_1 + v_2 + 2v_3 \leq 14 \\ \\ \max J(v_1, v_2, v_3) = 2v_1 + 3v_2 + 3v_3 + v_1^2 + 2v_2^2 - v_3^2 \end{cases}$$

Nous avons $\varphi(v_3) = 3v_3 - v_3^2$,
le point critique est $v^* = \frac{3}{2}$ *et* $\max\limits_{v_3 \in U} \varphi(v_3) = \varphi(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4}$.
D'autre part $\psi(v_1, v_2) = 2v_1 + 3v_2 + v_1^2 + 2v_2^2$.
ψ *est une fonction convexe, et sa solution optimale est un point extrême (sommet de* U*).*

$$\max_{(v_1, v_2) \in U^2} \psi(v_1, v_2) = \psi(0, 6) = 90$$

(d'après l'énumération des sommets voir l'annexe). Mais

$$\max_{v\in U} J(v) \leq \max_{v\in U} \psi(v) + \max_{v\in U} \varphi(v).$$

Par conséquent

$$\max J(v) \leq 92,25.$$

Aussi $\quad (0, 6, \frac{3}{2}) \in U,$

$$J(0, 6, \frac{3}{2}) \leq \max_{v\in U} J(v).$$

Alors

$$\max_{v\in U} J(v) = J(0, 6, \frac{3}{2}) = 92,25.$$

Remarque 3.3. *Si nous posons*

$$\psi(v) = \sum_{\beta_i > 0} (\alpha_i v_i + \beta_i v_i^2),$$

alors

$$\psi(v^*) - \psi(v) = \sum_{i=1}^{n} -\beta_i (v_i^* - v_i)^2 \quad \textit{pour} \quad \textit{tout} \quad v \in U,$$

et

$$\psi(v^*) - \max_{v\in U} \psi(v) = -\max_{v\in U} \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{\beta}_i v_i^* - \sqrt{\beta}_i v_i)^2.$$

Donc

$$\max_{v\in U} \psi(v) = \psi(v^*) + \max_{v\in U} \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{\beta}_i v_i^* - \sqrt{\beta}_i v_i)^2.$$

Soit $w^* = (w_i^*)_i = \left(\dfrac{\alpha_i}{2\sqrt{\beta}_i}\right)_i$ *et* $w = (w_0)_i = (\sqrt{\beta}_i v_i)_i$.
Notons que w_0 *est le point le plus éloigné du convexe*

$$U = \{w \in \mathbb{R}^n : \quad w_i = \sqrt{\beta}_i v_i, \quad v = (v_i)_i \in U\}.$$

3.4 Maximisation de la fonction convexe ψ

On sait que le maximum de ψ est atteint en un sommet du polyèdre. le principe de logicielle est de commencer par un sommet, et de passer à un autre sommet voisin meilleur.

3.4.1 La nouvelle forme de la fonction ψ

Calculons les nouveaux coefficients α_i', β_i' de la fonction ψ, lors du passage d'un sommet à un sommet voisin.
Soit i_0 l'indice du vecteur sortant, et j_0 celui du vecteur entrant.
De la colonne du pivot, nous avons

$$v_{j_0} = \frac{b_{i_0}}{a_{i_0j_0}} - \sum_{j\neq j_0} \frac{a_{i_0j}}{a_{i_0j_0}} v_j.$$

Posons $\theta_0 = \dfrac{b_{i_0}}{a_{i_0j_0}}$, par conséquent

$$v_{j_0} = \theta_0 - \sum_{j\neq j_0} \frac{1}{a_{i_0j_0}} a_{i_0j} v_j.$$

Ici

$$v_{j_0} = \theta_0 \left(1 - \sum_{j\neq j_0} \frac{1}{b_{i_0}} a_{i_0j} v_j\right).$$

Par conséquent

$$v_{j_0}^2 = \theta_0^2 + \frac{\theta_0^2}{b_{i_0}^2} \left(\sum_{j\neq j_0} a_{i_0j} v_j\right)^2 + \frac{2\theta_0^2}{b_{i_0}} \sum_{j\neq j_0} a_{i_0j} v_j.$$

La valeur de la fonction devient donc

$$\psi(v) = \alpha_{j_0} v_{j_0} + \beta_{j_0} v_{j_0}^2 + \sum_{j\neq j_0} (\alpha_j v_j + \beta_j v_j^2)$$

Nous remplaçons $\alpha_{j_0} v_{j_0} + \beta_{j_0} v_{j_0}^2$ par sa valeur :

$$\psi(v) = \Delta_0 + \sum_{j\neq j_0} \left(\alpha_j - \left(\frac{\alpha_{j_0}\theta_0}{b_{i_0}} + \frac{2\beta_{j_0}\theta_0^2}{b_{i_0}}\right) a_{i_0j}\right) v_j + \sum_{j\neq j_0} \left(\beta_j v_j^2 + \beta_{j_0} \left(\frac{\theta_0}{b_{i_0}}\right)^2 \left(\sum_{j\neq j_0} a_{i_0j} v_j\right)^2\right),$$

Où $\Delta_0 = \alpha_{j_0} v_{j_0} + \beta_{j_0} v_{j_0}^2$; mais

$$\left(\sum_{j\neq j_0} a_{i_0j} v_j\right)^2 = \sum_{k\neq j_0} (a_{i_0k})^2 v_k^2 + 2 \sum_{\substack{j\neq j_0\\ k\neq j\\ k\neq j_0}} \sum a_{i_0j} a_{i_0k} v_j v_k,$$

donc

$\psi(v) = \Delta_0 + \sum_{j\neq j_0}(\alpha_j - (\dfrac{\alpha_{j_0}\theta_0}{b_{i_0}} + \dfrac{2\beta_{j_0}\theta_0^2}{b_{i_0}})a_{i_0j})v_j + \sum_{j\neq j_0}(\beta_j + \beta_{j_0}(\dfrac{\theta_0}{b_{i_0}})^2(a_{i_0j})^2)v_j^2 + 2\beta_{j_0}(\dfrac{\theta_0}{b_{i_0}})^2 2 \sum_{\substack{j\neq j_0\\ k\neq j\\ k\neq j_0}} \sum a_{i_0j} a_{i_0k} v_j v_k.$

Nous obtenons la forme des coefficients pour la première phase

$$\alpha_j' = \alpha_j - \left(\alpha_{j_0} + 2\beta_{j_0}\theta_0\right)\frac{a_{i_0j}}{a_{i_0j_0}}, si \quad j \neq j_0 \quad et \quad \alpha_{j_0}' = 0$$

$$\beta_j' = \beta_j + \frac{\beta_{j_0}(a_{i_0j})^2}{(a_{i_0j_0})^2}, si \quad j \neq j_0 \quad et \quad \beta_{j_0}' = 0$$

$\gamma_{ji} = \beta_{j_0}(\dfrac{\theta_0}{b_{i_0}})^2 a_{i_0j} a_{i_0i} \quad pour j \neq i, \quad j \neq j_0, \quad i \neq j_0 \quad et \quad \gamma_{j_0i} = \gamma_{ij_0} = \gamma_{ii} = 0, \quad \forall i = 1, 2, ...$

La forme de la fonction devient alors

$$\psi(v) = \Delta_0 + \sum_{j\neq j_0} \alpha_j' v_j + \sum_{j\neq j_0} \beta_j' v_j^2 + 2 \sum_{\substack{j\neq j_0\\ i\neq j\\ i\neq j_0}} \sum \gamma_{ji} v_j v_i.$$

Méthode pour calculer l'expression $\sum_j \sum_i \gamma_{ji} v_j v_i$.

l'expression

$$2 \sum_{\substack{j\neq j_0\\ i\neq j\\ i\neq j_0}} \sum a_{i_0j} a_{i_0i} v_j v_i.$$

avec $a_{i_0j_0} a_{i_0j} = 0 \ \forall j = 1, 2, ...$ peut être calculée de la manière suivante : le produit cartésien de l'ensemble $\{a_{i_oj}\}$ excluant la diagonale et la ligne du pivot, en utilisant la table 1. L'expression $\sum_j \sum_i \gamma_{ji} v_j v_i$ est équivalente à l'expression suivante :

$$\frac{b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}} \sum_{j \neq j_0} (\gamma_{j_0 j} + \gamma_{j j_0})\, v_j - \frac{1}{a_{i_0 j_0}} \sum_{j \neq j_0} a_{i_0 j} (\gamma_{j_0 j} + \gamma_{j j_0})\, v_j - \frac{1}{a_{i_0 j_0}} \sum_{i \neq j_0} \sum_{\substack{i \neq j \\ j \neq j_0}} a_{i_0 j} (\gamma_{i j_0} + \gamma_{j_0 i})\, v_i v_j,$$

d'où la nouvelle forme des coefficients pour n'importe quelle phase : $\alpha'_j = \alpha_j - (\alpha_{j_0} + 2\beta_{j_0}\theta_0)\, \dfrac{a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}} + \dfrac{b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}} (\gamma_{j_0 j} + \gamma_{j j_0})\,, si \quad j \neq j_0 \quad et \quad \alpha'_{j_0} = 0 \quad sinon$

$\beta'_j = \beta_j + \dfrac{\beta_{j_0} (a_{i_0 j})^2}{(a_{i_0 j_0})^2} - \dfrac{1}{a_{i_0 j_0}} a_{i_0 j} \Big(\gamma_{j_0 j} + \gamma_{j j_0}\Big), si \quad j \neq j_0 \quad et \quad \beta'_{j_0} = 0 \quad sinon$

$\gamma_{ji} = \gamma^*_{ij} - \dfrac{a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}} (\gamma_{j_0 j} + \gamma_{j j_0}\,),$

pour $i \neq j$, $j \neq j_0$, $i \neq j_0$ et $\gamma_{j_0 i} = \gamma_{i j_0} = \gamma_{ii} = 0$, $\forall i = 1, 2, ...$ où $\gamma^*_{ij} = \beta_{j_0} (\dfrac{\theta_0}{b_{i_0}})^2 a_{i_0 j} a_{i_0 i}$.

Remarque 3.4. *Généralement* $\gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}$, *mais* $\gamma^*_{ij} \neq \gamma^*_{ji}$.
γ^*_{ij}, *est pris à partir du tableau du produit cartésien de la ligne du pivot multipliée par* $\beta_{j_0} (\dfrac{\theta_0}{b_{i_0}})^2$.

Table1. Calcul des valeurs de w^*

	$a_{i_0 1}$	$a_{i_0 1}$			$a_{i_0 i_0}$				$a_{i_0 n+m}$
$a_{i_0 1}$	0	$a_{i_0 1}$ $a_{i_0 2}$ $v_1 v_2$			0				$a_{i_0 1}$ $a_{i_0 n+m}$ $v_1 v_{n+m}$
$a_{i_0 2}$	$a_{i_0 2}$ $a_{i_0 1}$ $v_2 v_1$	0			0				$a_{i_0 2}$ $a_{i_0 n+m}$ $v_2 v_{n+m}$
			0		0				
				0	0				
$a_{i_0 j_0}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
					0	0			
					0		0		
					0			0	
$a_{i_0 n+m}$	$a_{i_0 n+m}$ $a_{i_0 1}$ $v_{n+m} v_1$				0	0			0

Exemple 3.4.1. *Soit le problème quadratique suivant (standardisé) :*

$$(P) \begin{cases} v_1, v_2, v_3 \geq 0 \\ -v_1 + v_2 + v_3 = 3 \\ v_1 - v_2 + v_4 = 6 \\ v_1 + 2v_2 + v_5 = 12 \\ \\ \max \psi(v) = v_1 + 2v_2 + v_1^2 + 3v_2^2 \end{cases}$$

La fonction est $\psi(v) = v_1 + 2v_2 + v_1^2 + 3v_2^2 + 0$.
Nous passerons du point extrême $(0, 0, 0)$ *au second* $(6, 0, 0)$.
*La table*2.1 *contient les valeurs initiales de* α *et* β*, prises du problème* (P) *et nous calculons les valeurs de* θ, Δ *à l'aide des expressions :*

$$\theta_{i_0} = \min_{a_{ij}>0}\{\frac{b_j}{a_{ij}}\}, \quad \Delta_j = \alpha_j\theta_j + \beta_j\theta_j^2,$$

$$\theta_1 = \min\{\infty, \frac{6}{1}, \frac{12}{1}\} = 6; \quad \theta_2 = \min\{\frac{3}{1}, \infty, \frac{12}{2}\} = 3$$

$\Longrightarrow \theta_{i_0} = \theta_2 = 3; \quad i_0 = 2; \quad v_4$ *est la variable qui sort de la base.*
$\Delta_1 = \alpha_1\theta_1 + \beta_1\theta_1^2 = 1 \times 6 + 1 \times (6)^2 = 6 + 36 = 42$
$\Delta_2 = \alpha_2\theta_2 + \beta_2\theta_2^2 = 2 \times 3 + 3 \times (3)^2 = 6 + 27 = 33$
$\Delta_{j_0} = \min\{\Delta_1, \Delta_2\} = max\{42, 33\} = 42 \Longrightarrow j_0 = 1 \Longrightarrow x_1$ *est la variable entrante.*
Posons $u = u + \Delta_{j_0}$; $u = 0 + 42$ *qui est la valeur de la fonction objectif à cette itération.*
Le pivot est alors $a_{i_0j_0} = a_{21}$.
On va calculer les nouveaux coefficients de la fonction objectif α', β', γ'*, les nouvelles valeurs de la matrice* A *, les nouvelles valeurs du vecteur des ressources et donc la nouvelle solution de base.*

$$\theta_0 = \frac{b_{i_0}}{a_{i_0j_0}} = \frac{6}{1} = 6$$

$$\alpha'_j = \alpha_j - (\alpha_{j_0} + 2\beta_{j_0}\theta_0)\frac{a_{i_0j}}{a_{i_0j_0}} + \frac{b_{i_0}}{a_{i_0j_0}}(\gamma_{j_0j} + \gamma_{jj_0}) \quad et \quad \alpha'_{j_0} = 0$$

Table 2.1 : valeurs initialise de $\alpha, \beta, \theta, \Delta$.

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	
1	2	0	0	0	α
1	3	0	0	0	β
6	3				θ
42	33				Δ
-1	1	1	0	0	$v_3 = 3$
1	-1	0	1	0	$v_4 = 6$
1	2	0	0	1	$v_5 = 12$

Table 2.2 : calcul de γ_{24}^*

	1	*-1*	*0*	*1*	*0*
1	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
-1	*0*	*0*	*0*	*-1*	*0*
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
1	*0*	*-1*	*0*	*0*	*0*
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*

La table 2.2 contient le produit cartésien de l'ensemble $\{a_{i_0}j\}_j = \{1, -1, 0, 1, 0\}$ *excluant la diagonale et la ligne du pivot(* i_0 *est l'indice de la variable sortante ;* j_0 *est l'indice de la variable entrante ; on commence par mettre à des zéros dans la diagonale, dans la ligne et la colonne du pivot).*
Appliquons la formule de calcul des γ^*_{ij} *des variables hors bases :*

$$\gamma^*_{ij} = a_{i_0j}a_{i_0i}\beta_{j_0}(\frac{\theta_0}{b_{i_0}})^2$$

où

$$\theta_0 = \frac{b_{i_0}}{a_{i_0j0}} = \frac{b_2}{a_{21}} = \frac{6}{1} = 6$$

$\gamma^*_{24} = a_{24}a_{22}\beta_1(\frac{\theta_0}{b_2})^2 = (-1) \times \left(\frac{6}{6}\right)^2 \times 1 = -1; \quad \gamma^*_{42} = \gamma^*_{24}; \quad \gamma'_{24} = \gamma^*_{24} - 0$ *parce que*
$\gamma_{14} = \gamma_{41} = 0; \alpha'_2 = \alpha_2 - (\alpha_1 + 2\beta_1\theta_0)\,\frac{a_{22}}{a_{21}} = 2 - (1 + 2 \times 2 \times 1 \times 6) \times \frac{-1}{1} = 2 + (13) = 15$
$\beta'_2 = \beta_2 + \frac{\beta_1(a_{22})^2}{(a_{21})^2} = 3 + \frac{1 \times (-1)^2}{(1)^2} = 4$
$\alpha'_4 = \alpha_4 - (\alpha_1 + 2\beta_1\theta_0)\,\frac{a_{24}}{a_{21}} = 0 - (1 + 2 \times 1 \times 6) \times \frac{1}{1} = 2 + (13) = -13$
$\beta'_4 = \beta_4 + \frac{\beta_1(a_{24})^2}{(a_{21})^2} = 0 + \frac{1 \times (1)^2}{(1)^2} = 1$
$\alpha'_2 = 15, \quad \alpha'_4 = -13, \quad \beta'_2 = 4, \quad \beta'_4 = 1,$
$\gamma_{24} = \beta_1(\frac{\theta_0}{b_2})^2 a_{24}a_{22} = (1) \times \left(\frac{6}{6}\right)^2 \times 1 \times (-1) = -1$
$\gamma_{42} = \beta_1(\frac{\theta_0}{b_2})^2 a_{22}a_{24} = (1) \times \left(\frac{6}{6}\right)^2 \times (-1) \times 1 = -1.$
Ici nous avons $\gamma_{24} = \gamma_{42} = -1$ *et* $\gamma_{24}v_2v_4 + \gamma_{42}v_4v_2 = -2v_2v_4$.
La fonction devient $\psi(v) = 15v_2 - 13v_4 + 4v_2^2 + v_4^2 - 2v_2v_4 + 42$.
Calculons les valeurs des b_1, b_2, b_4 *avec l'expression* $b'_i = b_i - \frac{a_{ij_0}}{a_{i_0j_0}}b_{i_0}$.
$b'_1 = b_1 - \frac{a_{11}}{a_{21}}b_2 = 3 - \frac{-1}{1} \times 6 = 9, \quad b'_2 = \theta_0 = \frac{b_{i_0}}{a_{i_0j_0}} = \frac{b_2}{a_{21}} = \frac{6}{1} = 6 \quad car(i_0 = 2),$
$b'_3 = b_3 - \frac{a_{31}}{a_{21}}b_2 = 12 - \frac{1}{1} \times 6 = 6.$

Calculons les coefficients a_{ij} *avec* $a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{ij_0}}{a_{i_0j_0}} a_{i_0j}$.

$a'_{11} = a_{11} - \dfrac{a_{11}}{a_{21}} a_{21} = -1 - (-1) = 0, \quad a'_{12} = a_{12} - \dfrac{a_{11}}{a_{21}} a_{22} = 1 - \dfrac{-1}{1}(-1) = 0,$

$a'_{13} = a_{13} - \dfrac{a_{11}}{a_{21}} a_{23} = -1 - \dfrac{-1}{1} \times 0 = 1, \quad a'_{14} = a_{14} - \dfrac{a_{11}}{a_{21}} a_{24} = 0 - \dfrac{-1}{1} \times 1 = 1,$

$a'_{15} = a_{15} - \dfrac{a_{11}}{a_{21}} a_{25} = 0 - \dfrac{-1}{1} \times 0 = 0.$

Pour $i_0 = 2$ *on appliqué la formule* $a'_{i_0j} = \dfrac{a_{i_0j}}{a_{i_0j_0}}$

$a'_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{21}} = 1, \quad a'_{22} = \dfrac{a_{22}}{a_{21}} = \dfrac{-1}{1} = -1, \quad a'_{23} = \dfrac{a_{23}}{a_{21}} = \dfrac{0}{1} = 0, \quad a'_{24} = \dfrac{a_{24}}{a_{21}} = \dfrac{1}{1} = 1,$

$a'_{25} = \dfrac{a_{25}}{a_{21}} = \dfrac{0}{1} = 0;$

$a'_{31} = a_{31} - \dfrac{a_{31}}{a_{21}} a_{21} = 1 - 1 = 0, \quad a'_{32} = a_{32} - \dfrac{a_{31}}{a_{21}} a_{22} = 2 - \dfrac{1}{1} \times (-1) = 3, \quad a'_{33} = a_{33} - \dfrac{a_{31}}{a_{21}} a_{23} = 0 - \dfrac{1}{1} \times 0 = 0, \quad a'_{34} = a_{34} - \dfrac{a_{31}}{a_{21}} a_{24} = 0 - \dfrac{1}{1} \times 1 = -1, \quad a'_{35} = a_{35} - \dfrac{a_{31}}{a_{21}} a_{25} = 1 - \dfrac{1}{1} \times 0 = 1.$

Table 3.1 : calcul des valeurs de $\alpha, \beta, \theta, \Delta$ *pour la deuxième phase.*

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	
0	15	0	-13	0	α
0	4	0	1	0	β
	2		6		θ
	46		-42		Δ
0	0	1	1	0	$v_3 = 9$
1	-1	0	1	0	$v_1 = 6$
0	3	0	-1	1	$v_5 = 6$

Table 3.2 : calcul de γ^*_{45}

	0	3	0	-1	1
0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
-1	0	0	0	0	-1
1	0	0	0	-1	0

La fonction devient $\psi(v) = \dfrac{-20}{3} v_4 - \dfrac{31}{3} v_5 + \dfrac{7}{9} v_4^2 + \dfrac{4}{9} v_5^2 - \dfrac{2}{9} v_4 v_5 + 88.$

Pour passer au point extrême suivant $(8, 2, 0)$*, la table 3.1 donne les nouvelles va-*

leurs de $\alpha, \beta, \theta, \Delta$.
La table 3.2 contient le produit cartésien de l'ensemble $(a_{i_0j}) = (0, 3, 0, -11)$ *excluant la diagonale et la ligne du pivot.* $\gamma^*_{54} = \gamma^*_{45} = (-1) \times \left(\frac{\beta'_{i_0}}{a'_{i_0j_0}}\right) = (-1) \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 1 = -\frac{4}{9}$;
donc $\gamma_{45} = -\frac{4}{9} - \frac{a_{34}}{3}[\gamma_{25} + \gamma_{52}] = -\frac{4}{9}$ *parce que* $\gamma_{25} = \gamma_{52} = 0$ *dans l'expression précédente de* ψ *;*
$\gamma_{54} = -\frac{4}{9} - \frac{a_{35}}{3}(\gamma_{24} + \gamma_{42}) = -\frac{4}{9} - \frac{1}{3}[-1-1] = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$, $\quad \gamma_{45} = -\frac{4}{9}$ *et* $\gamma_{54} = \frac{2}{9}$;
nous constatons que $\gamma_{45} \neq \gamma_{54}$ *mais* $\gamma^*_{45} = \gamma^*_{54}$.
$\gamma_{45}v_4v_5 + \gamma_{54}v_5v_4 = -\frac{4}{9}v_4v_5 + \frac{2}{9}v_4v_5 = -\frac{2}{9}v_4v_5$;
$\alpha'_4 = -13 - (15 + 2 \times 2 \times 4)\frac{a_{34}}{3} + \frac{6}{3}(\gamma_{24} + \gamma_{42}) = -13 - \frac{31}{3}(-1) + \frac{6}{3}(-1-1) = -\frac{20}{3}$;
$\alpha'_5 = 0 - (\frac{31}{3})a_{35} + \frac{6}{3}(\gamma_{25} + \gamma_{52}) = -\frac{31}{3}(1) + \frac{6}{3}(0) = -\frac{31}{3}$;
$\beta'_4 = 1 + \frac{4}{9}a^2_{34} - \frac{1}{3}a_{34}(\gamma_{24} + \gamma_{42}) = 1 + \frac{4}{9} \times (-1)^2 - \frac{1}{3} \times (-1) \times (-1-1) = 1 + \frac{4}{9} - \frac{2}{3} = \frac{7}{9}$;
$\beta'_5 = 0 - \frac{4}{9}a^2_{35} - \frac{1}{3}a_{34}(\gamma_{25} + \gamma_{52})$, *mais* $\gamma_{25} = \gamma_{52} = 0$, *donc* $\beta'_5 = \frac{4}{9}(1)^2 = \frac{4}{9}$.
Ici $\gamma_{45} = \gamma_{54} = -\frac{1}{9}$.
Passage au point extrême suivant $(2, 5, 9)$
La table 4.2 contient le produit cartésien de l'ensemble $(a_{i_0j} = (0, 0, 1, 1, 0))$ *excluant la diagonale et la ligne du pivot* $\gamma^*_{35} = \gamma^*_{53} = 0$;
donc $\gamma_{35} = 0 - \frac{a_{13}}{1}(\gamma_{45} + \gamma_{54}) = -\frac{1}{1}\left(-\frac{4}{9} + \frac{2}{9}\right) = \frac{2}{9}$, $\quad \gamma_{53} = 0 - \frac{a_{15}}{1}(\gamma_{43} + \gamma_{34}) = 0$;
parce que $\gamma_{43} = \gamma_{34} = 0$ *dans l'expression précédente de* ψ *et* $a_{15} = 0$.
Notons que $\gamma_{35} = \frac{2}{9}$ *et* $\gamma_{35} = 0$ *donc* $\gamma_{35} \neq \gamma_{35}$.
$\alpha'_3 = 0 - \left(\frac{20}{3} + 2 \times 9 \times \frac{7}{9}\right)\frac{a_{13}}{1} + \frac{9}{1}(\gamma_{43} + \gamma_{34}) = -\left(\frac{20}{3} + 14\right)(1) + \frac{9}{1}(0) = -\frac{22}{3}$;
$\alpha'_5 = -\frac{31}{3} - \left(\frac{20}{3} + 14\right)\frac{a_{15}}{1} + \frac{9}{1}(\gamma_{45} + \gamma_{54}) = -\frac{31}{3} - \left(\frac{20}{3} + 14\right)(0) + 9 \times \left(-\frac{20}{3} + 14\right)(0) + 9\left(-\frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right) = -\frac{37}{3}$.
$\beta'_3 = 0 + \frac{7}{9} \times \frac{1}{(1)^2} \times (a_{13})^2 - \frac{1}{1}a_{13}(\gamma_{43} + \gamma_{34}) = \frac{7}{9} \times (1) = \frac{7}{9}$;
$\beta'_5 = \frac{4}{9} + \frac{7}{9}(a_{15})^2 - \frac{1}{1}a_{15}(\gamma_{45} + \gamma_{54}) = \frac{4}{9} + \frac{7}{9} \times 0 = \frac{4}{9}$.

Table 4.1 : calcul des valeurs de $\alpha, \beta, \theta, \Delta$ *pour la troisième phase.*

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	
0	*0*	*0*	$-\frac{20}{4}$	$-\frac{31}{3}$	α
0	*0*	*0*	$\frac{7}{9}$	$\frac{4}{9}$	β
			9	*6*	θ
			3	*-46*	Δ
0	*0*	*1*	*1*	*0*	$v_3 = 9$
1	*0*	*0*	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$v_1 = 8$
0	*1*	*0*	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$v_2 = 2$

Table 4.2 : calcul de γ_{35}^*

	0	*0*	*1*	*1*	*0*
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
1	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
1	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*

La table 4.1 donne les nouvelles valeurs de $\alpha, \beta, \theta, \Delta$.
La forme finale de la fonction devient : $\psi(v) = -\dfrac{22}{3}v_3 - \dfrac{37}{3}v_5 + \dfrac{7}{9}v_3^2 + \dfrac{4}{9}v_5^2 + \dfrac{2}{9}v_3v_5 + 91$.
Passage au point extrême suivant
La table 5.1 donne les nouvelles valeurs de $\alpha, \beta, \theta, \Delta$.
Tous les $\Delta < 0$ *stop. La dernière valeur de* $\psi(v)$ *est la solution optimale.*

Table 5.1 : calcul des valeurs de $\alpha, \beta, \theta, \Delta$ *pour la dernière phase*

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	
0	*0*	$-\frac{22}{3}$	*0*	$-\frac{37}{3}$	α
0	*0*	$\frac{7}{9}$	*0*	$\frac{4}{9}$	β
		9		*6*	θ
		-3		*-58*	Δ
0	*0*	*1*	*1*	*0*	$v_4 = 9$
1	*0*	$-\frac{2}{3}$	*0*	$\frac{1}{3}$	$v_1 = 2$
0	*1*	$\frac{1}{3}$	*0*	$\frac{1}{3}$	$v_2 = 5$

Remarque 3.5. *Nous utilisons la même technique pour calculer les nouveaux coefficients de J lors du passage d'un point extrême à un point extrême voisin.*

3.5 L'algorithme

Notons par Z la valeur de la fonction objectif ; elle est initialisée à 0 ; γ_{ij} sont les coefficients des termes $v_i v_j$ initialisés à 0.

I. Si $\beta_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. On applique l'algorithme du simplexe.

II. Si $\beta_i \geq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. et α_i quelconque, alors deux cas sont possibles :

a) Si $a_{ki} < 0$ pour tout $1 \leq k \leq m$ et $1 \leq i \leq n$ alors on s'arrête : ce programme n'admet pas d'optimum.

b) S'il existe k et i tel que $a_{ki} > 0$ on suit les étapes suivantes :

i. Calculer $\theta_j = \min\limits_{a_{kj}}\{\dfrac{b_k}{a_{kj}}\}$ pour tous les k tel que $a_{ki} > 0$; Choisir i_0 tel que $\theta_j = \dfrac{b_{i_0}}{a_{i_0 j}}$, x_{i_0}, est alors vecteur sortant ;

ii. Si $a_{ki} < 0$ pour tous les k alors $\theta = +\infty$;

iii. Calculer $\Delta_j = \alpha_j \theta_j + \beta_j \theta_j^2$;

iv. Choisir $\Delta_{j_0} = \max\limits_{j} \Delta_j$;

v. Si $\Delta_{j_0} = +\infty$ alors on s'arrête : ce programme n'admet pas un optimum ;

vi. Si $\Delta_{j_0} \leq 0$ alors on s'arrête : ce programme est optimal ;

vii. Poser $z = z + \Delta_{j_0}$, (j_0 est l'indice du vecteur entrant) ;

viii. Remplacer x_{i_0} par x_{j_0}, dans la base et prendre $a_{i_0 j_0}$ comme pivot ;

ix. Calculer $\alpha'_j = \alpha_j - (\alpha_{j_0} + 2\beta_{j_0}\theta_0)\,\dfrac{a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}} + \dfrac{b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}}\,(\gamma_{j_0 j} + \gamma_{j j_0})$;

x. Poser $\alpha'_{j_0} = 0$;

xi. Calculer $\beta'_j = \beta_j + \dfrac{\beta_{j_0}}{(a_{i_0 j_0})^2} - \dfrac{1}{a_{i_0 j_0}} a_{i_0 j}\,(\gamma_{j_0 j} + \gamma_{j j_0})$;

xii. Poser $\beta'_{j_0} = 0$;

xiii. Calculer $\gamma'_{ji} = \beta_{j_0}(\dfrac{\theta_0}{b_{i_0}})^2 a_{i_0 j} a_{i_0 i} - \dfrac{a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}}(\gamma_{j_0 i} + \gamma_{i j_0})$;

xiv. Poser $\gamma_{j_0 i} = \gamma_{i j_0} = \gamma_{ii} = 0$ pour tout i ;

xv. Calculer $a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{ij_0}}{a_{i_0j_0}} a_{i_0j}$, si $i \neq i_0$;

xvi. Calculer $b'_i = b_i - \dfrac{a_{ij_0}}{a_{i_0j_0}} b_{i_0}$, si $i \neq i_0$;

xvii. Calculer $a'_{i_0j} = \dfrac{a_{i_0j}}{a_{i_0j_0}}$;

xviii. Calculer $b'_{i_0} = \dfrac{b_{i_0}}{a_{i_0j_0}}$;

xix. Recommencer à partir de II.

3.6 Conclusion

Ce chapitre du mémoire a été l'occasion de présenter un cadre général de la programmation quadratique. Ce cadre a ensuite donné lieu à la présentation détaillée de la méthode de résolution des problèmes quadratiques à fonction objectif convexe ou non convexe.
Nous avons présenté certaines méthodes de calcul de la solution optimale en programmation quadratique.
Les problèmes des flots en réseau à coût minimum peuvent être modélisés par des fonctions quadratiques. Parmi les problèmes classiques associés à cette formulation on peut citer : l'équilibre du trafic en réseaux de communication (de trafic urbain, télécommunication), le routage en réseau, l'affectation du trafic, les problèmes de classification.
Les algorithmes de résolution des problèmes d'optimisation quadratiques sont très complexes et très lourds à mettre en œuvre pour les problèmes de grande taille ou pour la résolution en temps réel.
En développant plusieurs exemples à l'aide de notre méthode, nous avons montré la simplicité des calculs et surtout la précision des résultats obtenus après un nombre d'itérations très limitées.
Nous avons explicité les conditions d'utilisation de la méthode en démontrant l'existence de solutions et les techniques permettant de les calculer :

a) Après la décomposition de la fonction objectif en deux fonctions, l'une concave φ ; et l'autre convexe ψ ; si le point critique appartient à U(ensemble des solutions réalisables), la solution optimale de J est la solution optimale de φ.

b) Si le point critique n'appartient pas à U alors la solution optimale de J, est la projection du point critique sur U'(nouveau convexe obtenu par la translation T).

c) L'extrémum de la fonction convexe ψ est un sommet.

d) Nous avons aussi donné la technique de calcul de la valeur de la fonction ψ lors du passage d'un sommet à un sommet voisin.

e) En passant d'un sommet à un sommet voisin, le double produit apparaît dans l'expression de la fonction, et ceci nécessite une technique pour le calculer. Le théorème reste valable si le convexe U est remplacé par un convexe fermé et borné $\mathbb{R}^n$, il permet de résoudre les problèmes quadratiques dont les contraintes ne sont pas nécessairement linéaires.

f) Contrairement aux autres méthodes analytiques donnant la solution exacte en passant par le processus de linéarisation ou les méthodes numériques fournissant des solutions approchées.

D'un point de vu algorithmique, notons que la recherche de la solution est simple et dispense des lourds calculs tels les conditions de Kuhn, du lagrangien et autre matrice hesienne.
Les travaux présentés dans ce mémoire permettent de traiter toutes les situations modélisables sous forme de problèmes de programmation quadratique.

Conclusion générale

Pour commencer l'étude sur les problèmes aux limites, nous devons d'abord assurer l'existence et l'unicité de la solution. En utilisant le théorème de Lax-Milgram nous avons pu les prouver sous des conditions spécifiques, ce qui est plus que suffisant pour commencer l'étude sur les problèmes aux limites.

A partir d'un problème aux limites de Dirichlet de dimension un, et par des étapes simples (intégration par partie,...), nous avons obtenu un problème d'optimisation quadratique. Cependant, nous avons rencontré deux difficultés :

1. les solutions obtenues à partir de la formulation variationnelle sont des solutions faibles.
2. l'espace vectoriel de toutes les solutions possibles n'est pas nécessairement un espace de Hilbert.

Pour la première difficulté, nous avons examiné la possibilité qu'une solution faible soit également une solution forte. Et pour la deuxième difficulté, nous définissons un produit scalaire, ensuite, nous limitons le domaine de la recherche en $H_0^1(0,1)$, ce qu'on a déjà prouvé qu'il est complet, donc un espace de Hilbert.

Enfin, nous avons transformé un problème aux limites complètement à un problème d'optimisation quadratique. Dans le dernier chapitre, nous avons étudié de manière plus détaillée un modèle parmi les modèles des problèmes résultant de la formulation variationnelle, ceci regroupe tous les problèmes d'optimisation quadratiques non convexes et sous contraintes linéaires.

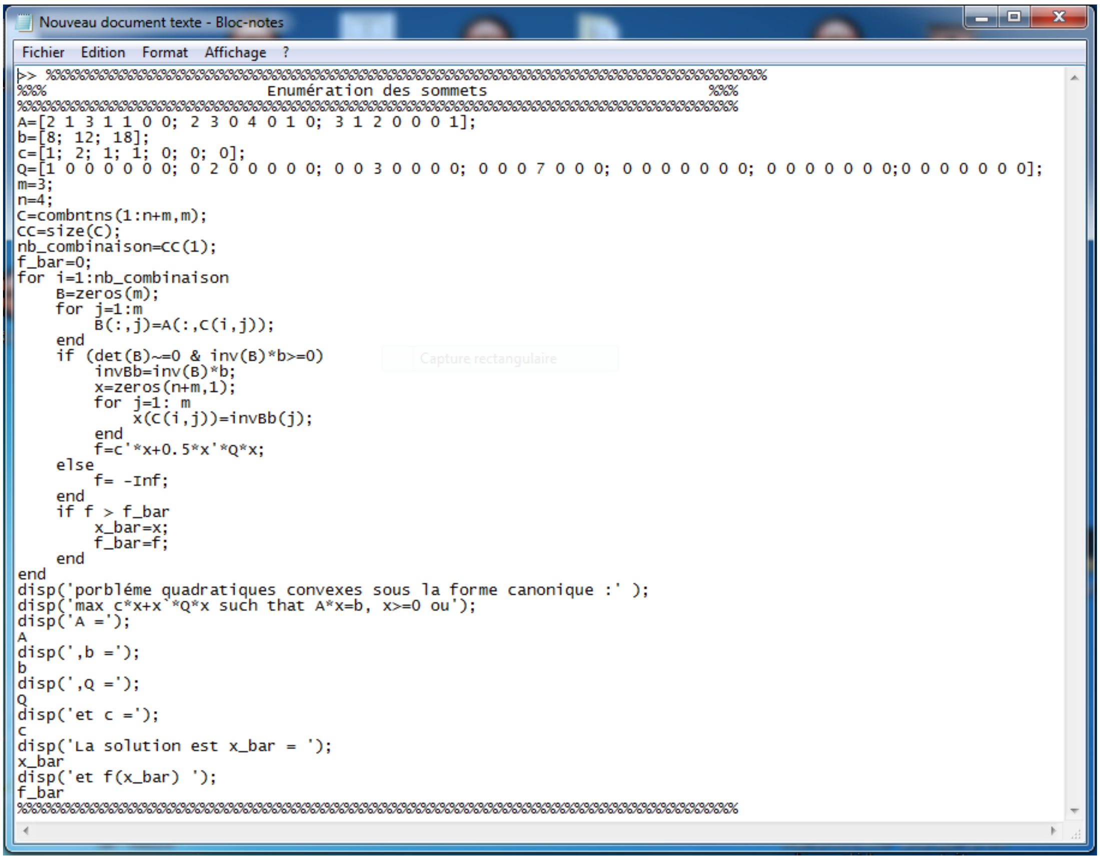
Chapitre 4

Annexe

4.1 A. Enumération des sommets

4.1.1 Implémentation du logiciel

Pour son implémentation nous avons utiliser logiciel MATLAB.



Nouveau document texte - Bloc-notes

Fichier Edition Format Affichage ?

```
>> %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%                         Enumération des sommets                          %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
A=[2 1 3 1 1 0 0; 2 3 0 4 0 1 0; 3 1 2 0 0 0 1];
b=[8; 12; 18];
c=[1; 2; 1; 1; 0; 0; 0];
Q=[1 0 0 0 0 0 0; 0 2 0 0 0 0 0; 0 0 3 0 0 0 0; 0 0 0 7 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0];
m=3;
n=4;
C=combntns(1:n+m,m);
CC=size(C);
nb_combinaison=CC(1);
f_bar=0;
for i=1:nb_combinaison
    B=zeros(m);
    for j=1:m
        B(:,j)=A(:,C(i,j));
    end
    if (det(B)~=0 & inv(B)*b>=0)
        invBb=inv(B)*b;
        x=zeros(n+m,1);
        for j=1: m
            x(C(i,j))=invBb(j);
        end
        f=c'*x+0.5*x'*Q*x;
    else
        f= -Inf;
    end
    if f > f_bar
        x_bar=x;
        f_bar=f;
    end
end
disp('porbléme quadratiques convexes sous la forme canonique :' );
disp('max c*x+x`*Q*x such that A*x=b, x>=0 ou');
disp('A =');
A
disp(',b =');
b
disp(',Q =');
Q
disp('et c =');
c
disp('La solution est x_bar = ');
x_bar
disp('et f(x_bar) ');
f_bar
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

FIGURE 4.1 – Le programme de la méthode

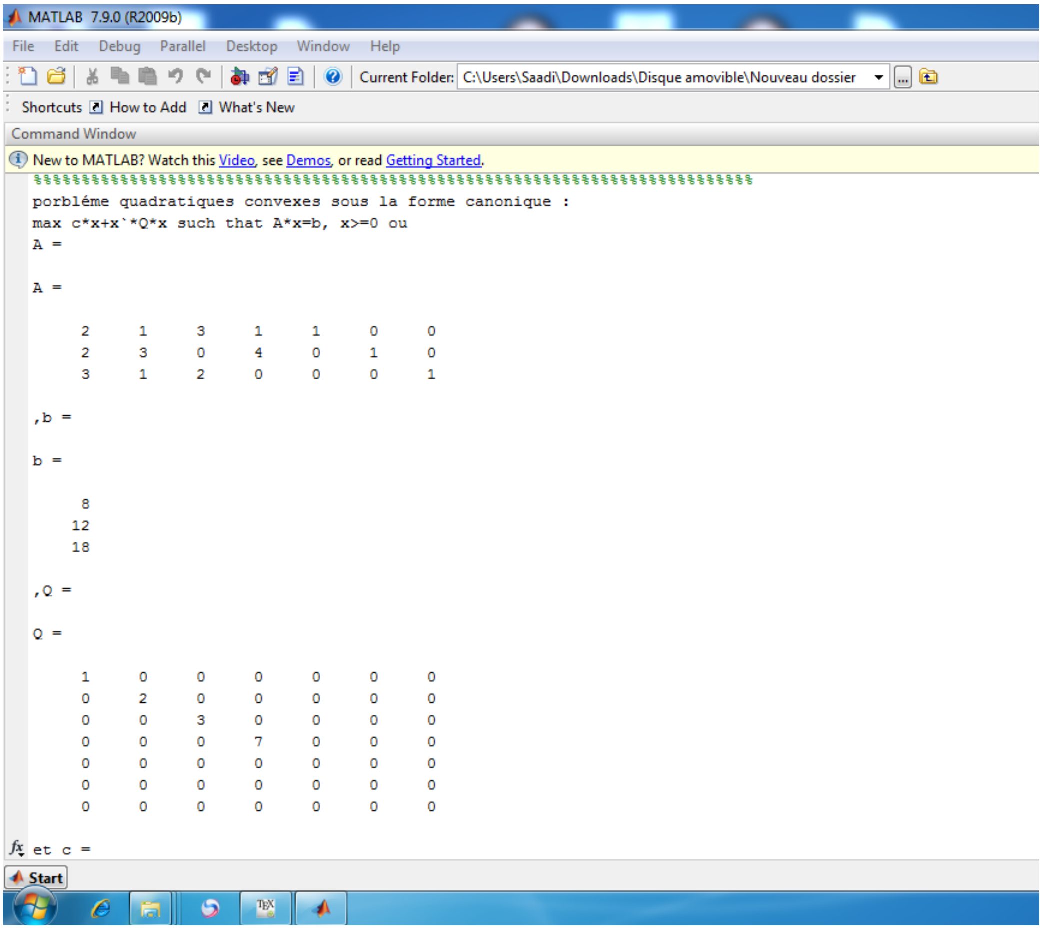


FIGURE 4.2 – L'exécution de la programme pour un exemple

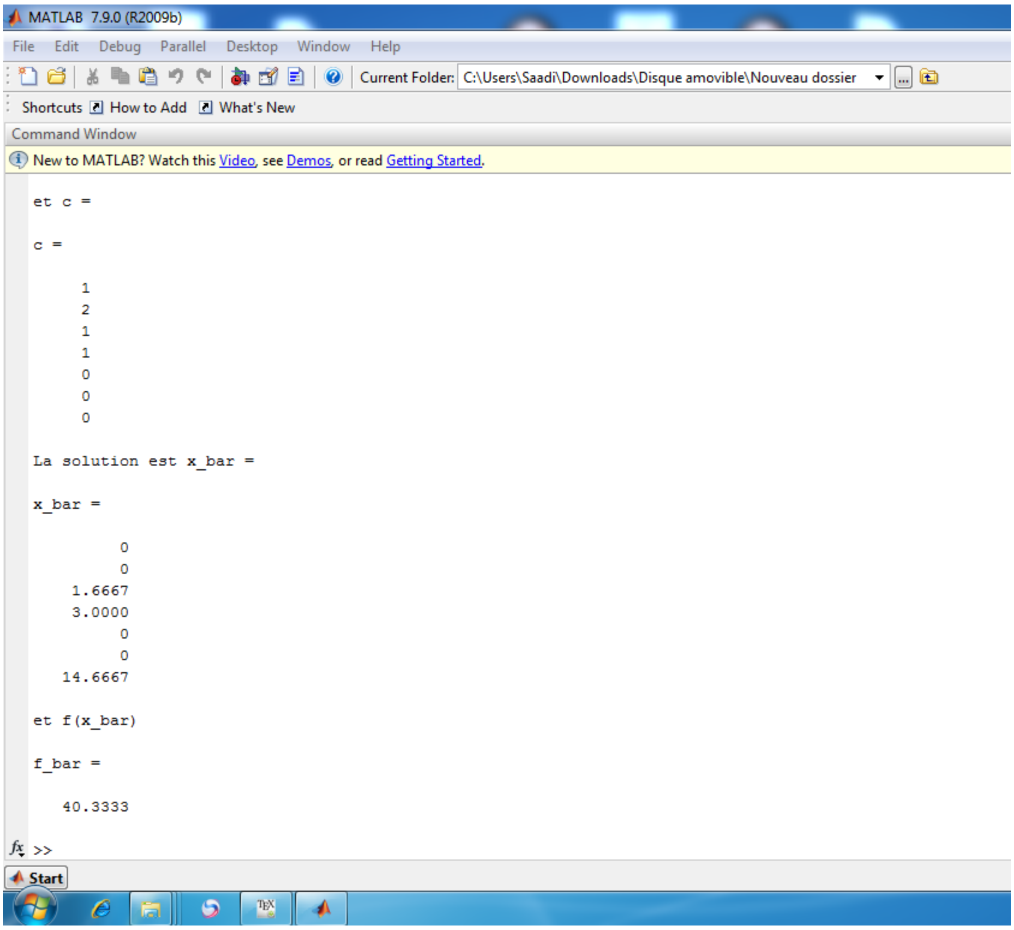


FIGURE 4.3 – L'exécution de la programme pour un exemple

Bibliographie

[1] M'hammed Achour, Moussa Gheraslia. Les systèmes de détection de fuites de données. Mémoire de Master informatique. Université de Laghouat, 2015.

[2] Saadi Achour. Théorème de KKT. Mémoire de Licence mathématiques. Université de Laghouat, 2015.

[3] R. A. Adams, Sobolev spaces, Academic Press, New York, 1975.

[4] Dominique Azé, Jean Baptiste, Hiriart Urruty. Analyse variationnelle et optimisation. Cépadués marss, 2010.

[5] H. Brezis. Analyse fonctionelle, théorie et applications. Masson, Paris, 1983.

[6] Ahmed Chikhaoui. Algorithmes d'optimisation des Problèmes de formes quadratiques. Thèse de doctorat en informatique. Université des sciences et de la technologie d'Oran «Mohamed Boudiaf», 2010.

[7] A. Chikhaoui, B. Djebbar, A. Belabbaci and A. Mokhtari. Optimization of quadratic function under its canonial form. Journal of Applied Sciences, 2009.

[8] P.G. Ciarlet, J.L. Lions. Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Cours et exercices corrigés. Dunod, Paris, 1998.

[9] Khalil Djeloud. Espaces de Besov et L'izorkin-Tribel. Mémoire de Master Mathématiques. Université de Laghouat, 2014.

[10] Joseph Grifone. Algèbre linéaire. Cépaduès, Toulouse-France, 2011.

[11] A. Kolmogorov, S. Fomine ,Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. Mir, Moscou, 1973.

[12] Jean-Pierre Marco, Laurent Lazzarini, Hassan Boualem, Robert Brouzet, Bernhard Eisner, Laurent Kaczmarek, Denis Pennequin. Mathématiques L1, cours complet avec 1000 tests et exercices corrigés. Pearson éducation France, 2007.

[13] Jean-Pierre Marco, Philippe Thieullen, Jacques-Arthur Weil, Joël Benoist, Hassan Boualem, Robert Brouzet, Alexandre Cabot, Marie-Line Chabanol, Jacques Féjoz, Laurent Lazzarini, Roger Mansuy, Laurent Mesnager, Sihem Mesnager, Denis

Pennequin, Alain Yger, Mohamed Zarrabi. Mathématiques L2, Cours complet avec 700 tests et exercices corrigés. Pearson éducation France, 2007.

[14] Jean-Pierre Marco, Hakim Boumaza, Benjamin Collas, Stéphane Collion, Marie Dellinger, Zoé Faget, Laurent Lazzarini, Florent Schaffhauser. Mathématiques L3, Cours complet avec 600 tests et exercices corrigés. Pearson éducation France, 2009.

[15] Halima Messaoudi. Etude d'un problème aux limites semi-linéaires hyperbolique pour un opérateur fortement elliptique. Mémoire de Master. Université de Laghouat, 2016.

[16] Y. Ouinten. Techniques d'optimisation classiques. Université de Laghouat, 2007-2010.

[17] Laurent Schwartz, Topologie générale et analyse fonctionnelle. Hermann, Paris, 1970.