

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة عمارثليجي - الأغواط

Faculté : Technologie

Département : Tronc commun sciences et technologie

Domaine : Sciences et technologie

Filière : Physique

Spécialité : Module de physique 2

Polycopié de : Travaux dirigés

Destiné aux étudiants de: ST, SM, Ingéniorat Niveau Première année

Physique 2

Séries des travaux dirigés corrigés

Présenté par : Helaimia Taoufik

Grade MCB, Université de Laghouat

Email : helaimiatoufik@yahoo.fr

Année universitaire : 2024/2025

Avant-Propos

Ce polycopié est destiné aux étudiants de la première année universitaire des spécialités scientifiques et techniques (sciences de la matière, sciences et technologie, et au ingénieurs), il correspond au programme du module Physique 2 (électricité et magnétisme).

Il contient quatre principaux chapitre présentés, au début sous forme d'un résumé de l'essentiel du cours, suivi par une série des exercices avec corrections, pour permet aux étudiants de bien comprendre les différentes parties de ce manuel, et de maitriser la résolution des différents problèmes de l'électricité.

Dans le premier chapitre de ce manuel intitulé "Champ et potentiel électrostatique", on s'intéresse au concept du champ électrique et la force électrostatique, ainsi que le potentiel électrique et l'énergie potentielle électrique générés par des charges ponctuelles, sans oublier le travail, la force électrique et l'énergie interne d'un système de plusieurs charges ponctuelles en interactions mutuelles. Une grande partie de ce chapitre est réservé aux distributions continues de charges (linéaire, surfacique et volumique), le calcul du champ électrique et le potentiel électrique créé par ces distributions continues de charges. On présente aussi une partie spécifique sur les dipôles électriques, et comment calculer le champ et le potentiel qu'ils génèrent. On termine le premier chapitre par une partie consacrée au théorème de Gauss, et ses applications pour le calcul du champ électrique, et par conséquent le potentiel électrique créé par des distributions continues des charges qui ont une haute symétrie.

Le deuxième chapitre de ce polycopié est attribué aux conducteurs à l'équilibre électrostatique, leurs propriétés de base à cet état, et l'influence électrostatique entre les conducteurs. Une partie de ce chapitre est consacrée aux condensateurs (planes, cylindriques et sphériques), ainsi que leurs associations en série et en parallèle.

Le troisième chapitre de ce manuel intitulé "Courant électrique" aborde une partie de l'électrocinétique, en particulier certains concepts tels que l'intensité de courant électrique, la densité de courant électrique. Il traite également les résistances, la loi d'Ohm, l'effet de Joule dans les conducteurs ohmiques, sans oublier les lois de Kirchhoff et leurs applications pour le calcul des courants électriques dans les circuits électriques.

Le quatrième et le dernier chapitre de ce polycopié intitulé "Magnétostatique" est destiné à l'électromagnétisme. Dans cette partie on présente un petit résumé de quelques lois fondamentales de l'électromagnétisme, qui concernent les étudiants de première année universitaire, dans les filières scientifiques et techniques, en basant sur le calcul du champ magnétique généré par un fil parcouru par un courant électrique.

Liste des figures

Chapitre I : Champ et potentiel électrostatique

Figure 1.1	11
Figure 1.2	12
Figure 1.3	14
Figure 1.4	16
Figure 1.5	17
Figure 1.6	20
Figure 1.8.a.	25
Figure 1.8.b.	27
Figure 1.9	27
Figure 1.10	30
Figure 1.11	33
Figure 1.13	37
Figure 1.14	41
Figure 1.15	44
Figure 1.16	46
Figure 1.17	50
Figure 1.18	54
Figure 1.19	57
Figure 1.20	60
Figure 1.21	65
Figure 1.22	68
Figure 1.23	71
Figure 1.24	74
Figure 1.25.a	78
Figure 1.25.b	78

Chapitre II : Les conducteurs

Figure 2.1	88
Figure 2.2	90
Figure 2.3	92
Figure 2.4.a.	94
Figure 2.4.b.	94
Figure 2.5	99

Chapitre III : Courant électrique

Figure 3.1	107
Figure 3.2	112
Figure 3.3	114
Figure 3.4	116
Figure 3.5	119
Figure 3.6	120

Chapitre IV : Magnétostatique

Figure 4.1	133
Figure 4.2	134
Figure 4.3	136
Figure 4.4	138
Figure 4.5	141
Figure 4.6	142

Table des matières

Introduction générale	1
<u>Chapitre I : Champ et potentiel électrostatique</u>	
I.1. Introduction	3
I.2. Rappel de cours	3
I.2.1. Charges ponctuelles	3
I.2.1.1. Principe de conservation de la charge électrique	3
I.2.1.2. La force électrique et loi de Coulomb	3
I.2.1.3. Principe de superposition	4
I.2.1.4. Champ et potentiel électrique (distribution discontinue de charge)	4
I.2.1.4.1. Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle q	4
I.2.1.4.2. Potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle q	4
I.2.1.5. La force électrostatique exerçant sur une charge ponctuelle q	5
I.2.1.6. Energie potentielle d'une charge ponctuelle q	5
I.2.1.7. Travail de la force électrostatique	5
I.2.1.8. L'énergie interne d'un système des charges ponctuelles	5
I.2.2. Champ et potentiel électrique (distribution continue de charge)	6
I.2.2.1. Distribution continue des charges	6
I.2.2.2. Calcul du champ et potentiel électrique généré par une distribution continue de charges	6
I.2.2.3. Densité de charge électrique	7
I.2.2.4. Différents types des distributions continues de charges	7
I.2.2.4.1. Distribution linéique de charges	7
I.2.2.4.2. Distribution surfacique de charges	7
I.2.2.4.3. Distribution volumique de charges	7
I.2.3. Dipôle électrique (champ et potentiel électrique)	8
I.2.3.1. Définition	8

I.2.3.2. Potentiel électrique créé par un dipôle électrique	8
I.2.3.3. Champ électrique créé par un dipôle électrique	8
I.2.3.4. Energie potentielle d'un dipôle électrique placé dans un champ électrique uniforme.....	9
I.2.4. Action du champ électrique sur un dipôle (orientation et état d'équilibre)	9
I.2.5. Théorème de Gauss	9
I.2.5.1. Intérêt de théorème de Gauss	9
I.2.5.2. Flux électrostatique	10
I.2.5.3. Théorème de Gauss	10
I.3. Série des exercices corrigés	11
Exercice (1)	11
Solution de l'exercice (1)	11
Exercice (2)	12
Solution de l'exercice (2)	12
Exercice (3)	14
Solution de l'exercice (3)	14
Exercice (4)	15
Solution de l'exercice (4)	16
Exercice (5)	17
Solution de l'exercice (5)	17
Exercice (6)	19
Solution de l'exercice (6)	20
Exercice (7)	22
Solution de l'exercice (7)	23
Exercice (8)	25
Solution de l'exercice (8)	25
Exercice (9)	27

Solution de l'exercice (9)	28
Exercice (10)	30
Solution de l'exercice (10)	30
Exercice (11)	33
Solution de l'exercice (11)	33
Exercice (12)	34
Solution de l'exercice (12)	35
Exercice (13)	37
Solution de l'exercice (13)	37
Exercice (14)	41
Solution de l'exercice (14)	41
Exercice (15)	44
Solution de l'exercice (15)	44
Exercice (16)	46
Solution de l'exercice (16)	47
Exercice (17)	50
Solution de l'exercice (17)	51
Exercice (18)	54
Solution de l'exercice (18)	54
Exercice (19)	57
Solution de l'exercice (19)	57
Exercice (20)	60
Solution de l'exercice (20)	61
Exercice (21)	65
Solution de l'exercice (21)	65
Exercice (22)	68
Solution de l'exercice (22)	69

Exercice (23)	71
Solution de l'exercice (23)	71
Exercice (24)	74
Solution de l'exercice (24)	75
Exercice (25)	78
Solution de l'exercice (25)	79
I.4. Conclusion	81

Chapitre II : Les conducteurs

II.1. Introduction	83
II.2. Rappel de cours	83
II.2.1. Conducteurs	83
II.2.1.1. Définition	83
II.2.1.2. Propriétés de base.....	83
II.2.1.3. Charge induite et phénomènes d'influences	83
II.2.1.3.1. Influence électrostatique partielle	84
II.2.1.3.2. Influence électrostatique totale	84
II.2.2. Pression électrostatique	84
II.2.3. Condensateurs	85
II.2.3.1. Définition :.....	85
II.2.3.2. Capacité d'un condensateur	85
II.2.3.2.1. Condensateurs plans	86
II.2.3.2.2. Condensateurs sphériques	86
II.2.3.2.3. Condensateurs cylindriques	87
II.2.3.3. Energie emmagasinée dans un condensateur	87
II.2.3.4. Association des condensateurs	87
II.2.3.4.1. Association en série	87

II.2.3.4.2. Association en parallèle	88
II.3. Série des exercices corrigés	88
Exercice (1)	88
Solution de l'exercice (1)	88
Exercice (2)	90
Solution de l'exercice (2)	90
Exercice (3)	92
Solution de l'exercice (3)	93
Exercice (4)	94
Solution de l'exercice (4)	94
Exercice (5)	98
Solution de l'exercice (5)	99
II.4. Conclusion	101

Chapitre III : Courant électrique

III.1. Introduction	103
III.2. Rappel de cours	103
III.2.1. Notion d'intensité et de densité de courant.....	103
III.2.1.1. Notion d'intensité de courant	103
III.2.1.2. Notion de densité de courant	103
III.2.2. Résistance et loi d'Ohm, loi de joule	104
III.2.2.1. Définition	104
III.2.2.2. Résistance d'un fil homogène	104
III.2.2.3. Différence de potentiel aux bornes d'une résistance (loi d'ohm)	104
III.2.2.4. Puissance électrique dissipée dans une résistance (Loi de Joule)	104
III.2.2.5. Association des résistances	104
III.2.2.5.1. Association en série	104

III.2.2.5.2. Association en parallèle	105
III.2.3. Lois de Kirchhoff	105
III.2.3.1. Définitions	105
III.2.3.2. Deux lois de Kirchhoff	105
III.2.3.3. Lois des nœuds	105
III.2.3.4. Lois des mailles	105
III.3. Série des exercices corrigés	106
Exercice (1)	106
Solution de l'exercice (1)	107
Exercice (2)	110
Solution de l'exercice (2)	110
Exercice (3)	112
Solution de l'exercice (3)	112
Exercice (4)	114
Solution de l'exercice (4)	114
Exercice (5)	116
Solution de l'exercice (5)	117
Exercice (6)	119
Solution de l'exercice (6)	120
III.4. Conclusion_.....	124

Chapitre IV : Magnétostatique

IV.1. Introduction	126
IV.2. Rappel de cours	126
IV.2.1. Introduction	126
IV.2.1.1. Expressions du champ magnétique	127
IV.2.1.1.1. Champ magnétique créé par une charge en mouvement	127

IV.2.1.1.2. Champ magnétique créé par un ensemble de charges en mouvement	127
IV.2.2. Force magnétique et loi de Lorentz	127
IV.2.3. Action d'un champ magnétique sur un courant électrique	128
IV.2.4. Champ magnétique produit par un courant stationnaire (loi de Biot-Savart)	128
IV.2.4.1. Loi de Biot et Savart	128
IV.2.4.2. Module du champ magnétique produit par un fil rectiligne infini parcouru par un courant	129
IV.2.4.3. Champ magnétique au centre de courbure d'un arc de cercle	129
IV.2.4.4. Champ magnétique créée dans un solénoïde (à l'intérieur du solénoïde)	130
IV.2.5. Circulation du champ magnétique	130
IV.2.6. Rotationnel du champ magnétique et loi d'Ampère	131
IV.2.6.1. Théorème d'Ampère	131
IV.2.7. Flux du champ magnétique à travers une boucle fermée et induction	132
IV.2.8. Equations de Maxwell	132
IV.3. Série des exercices corrigés	133
Exercice (1)	133
Solution de l'exercice (1)	133
Exercice (2)	134
Solution de l'exercice (2)	134
Exercice (3)	136
Solution de l'exercice (3)	136
Exercice (4)	138
Solution de l'exercice (4)	139
Exercice (5)	141
Solution de l'exercice (5)	141
Exercice (6)	142
Solution de l'exercice (6)	142

IV.4. Conclusion	144
Conclusion générale	145
Annexe	146
Références bibliographiques	147

Introduction générale :

L'électricité est considérée comme l'une des composantes fondamentales et des piliers du développement économique, social, industriel et technologique dans de nombreux domaines dont l'humanité est aujourd'hui témoin. Il est devenu impossible de s'en passer dans notre quotidien.

Le mérite de sa découverte et de son développement jusqu'à ce qu'elle est aujourd'hui, revient à de nombreux scientifiques, chercheurs et découvreurs à travers le temps. C'est aux alentours de 600ans avant Jésus-Christ que Thalès de Millet (Un philosophe et savant grec) observa qu'en frottant une tige d'ambre avec une peau de chat il créait un phénomène d'attraction des corps légers par la tige d'ambre. Cette découverte ne trouve pas d'application pratique jusqu'au début du XVIIème siècle où Otto de Guericke (1602-1686, Physicien et homme politique allemand), inventa en 1672 les premières machines de production continue d'électricité statique (le générateur électrostatique) réalisé à partir d'un globe de soufre. Durant la même période que l'on découvrit que, par frottement du verre, il était possible d'obtenir des effets électriques plus importants que le soufre ou l'ambre. C'est également pendant cette période féconde pour l'électrostatique que l'on met en évidence la présence de deux formes d'électricité : Celle que l'on obtient par le frottement de corps transparents comme le verre ou le cristal et celle qui provient de corps bitumineux ou résineux comme l'ambre. Une nouvelle étape sera franchie avec Stephen GRAY (1666-1736) qui montre que l'on peut véhiculer l'électricité par des fils de soie, de métal, ou même à travers le corps humain à des substances qui ne la possèdent pas. Il parvient même à produire l'électrification sans contact (aujourd'hui nous disons par influence). Il va diviser les corps en conducteurs et non conducteurs (isolants).

En 1746, Louis Guillaume Lemonnier (1717-1799) obtient un courant électrique temporaire dans un long conducteur qu'il avait relié aux deux armatures d'une bouteille de Leyde. La véritable révolution en fin de cette période est l'invention par Alessandro Volta (1745-1827, un physicien italien) de la pile électrique qui, de statique, va rendre l'électricité dynamique.

D'autre part, dans l'antiquité on connaissait également la « pierre de Magnésie », d'où le terme de magnétisme qui recouvre les aimants permanents constitués de la « magnétite » qui est un oxyde de fer (Fe_3O_4). Cette découverte donnera lieu rapidement à des applications à travers les boussoles pour les déplacements terrestres et la navigation.

Le scientifique danois Hans Christian Oersted (1777-1851), venait de découvrir un phénomène nouveau, liée à la relation entre l'électricité et le magnétisme. Cet effet devint connu sous le nom d'électromagnétisme. Oersted découvrit qu'un courant électrique pouvait entraîner le mouvement d'une aiguille aimantée. Avec cette découverte, Oersted ouvrit une voie vers de nouvelles technologies ainsi que de Nouvelles connaissances.

L'électricité et le magnétisme sont intimement liées. Un courant électrique peut générer un champ magnétique, et inversement, bien que ce soit plus rare. Une même force unit les deux branches de la physique que sont l'électricité et le magnétisme : l'électromagnétisme.

Chapitre (I)

Champ et potentiel électrostatique

I.1. Introduction :

On s'intéresse dans cette première partie de ce polycopié, à l'étude du champ et potentiel électrostatique, généré par un ensemble des charges ponctuelles, des distributions continues des charges, linéiques, surfaciques ou volumique. On présente un rappel théorique sur les dipôles électriques, ainsi que le théorème de Gauss utilisé pour le calcul du champ et potentiel électrique produit par des distributions continues des charges qui ont une haute symétrie, soit plane, cylindrique ou sphérique. D'autre part, on présente un grand nombre des exercices résolus en détails destinés aux étudiants de la première année universitaire branches scientifiques et techniques.

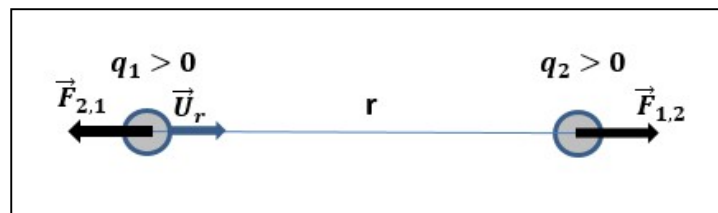
I.2. Rappel de cours :**I.2.1. Charges ponctuelles :****I.2.1.1. Principe de conservation de la charge électrique :**

La charge totale d'un système isolé est conservée, il n'y a pas de création, ni d'annihilation de charges, mais tout simplement un transfert de charges. [1].

I.2.1.2. La force électrique et loi de Coulomb :

L'ingénieur français C. A. Coulomb a établi expérimentalement la loi de l'interaction électrostatique des charges électriques, par analogie avec la loi de gravitation de Newton [2].

Soit deux charges ponctuelles q_1 et q_2 distants avec une distance r . L'expression de la force d'interaction entre ces deux charges est donnée par :



$$\vec{F}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{U}_r$$

$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{C}^{-2}$, est la constant de coulomb

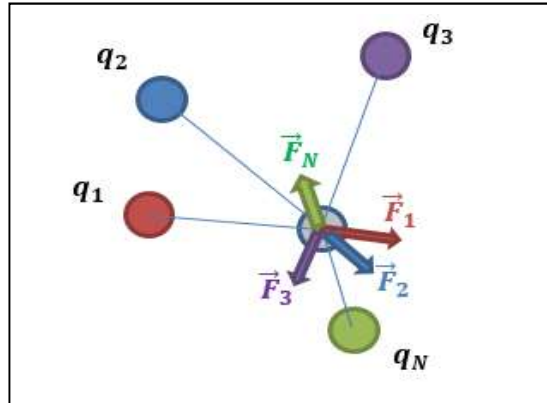
$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$, est la permittivité du vide.

D'autre part, on a : $\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$

I.2.1.3. Principe de superposition :

La force résultante qui exerce sur une charge ponctuelle q entourée par des charges ponctuelles $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$, est la somme de toutes les forces qui exercent sur cette charge [3].

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_N$$

**I.2.1.4. Champ et potentiel électrique (distribution discontinue de charge) :****I.2.1.4.1. Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle q :**

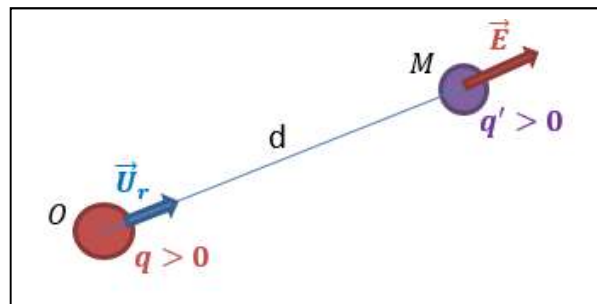
Par définition le champ électrostatique est une région de l'espace où s'exerce une force électrostatique.

Soit une charge ponctuelle $q > 0$ au point O . On place une charge d'essai $q' > 0$ à une distance au point M , avec $OM = d$

La charge q' subit une force électrostatique donnée par [4] :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot q'}{d^2} \vec{U}_r$$

$$\vec{F} = q' \vec{E} = q' \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{d^2} \vec{U}_r \right]$$



$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{d^2} \vec{U}_r$ est l'expression du champ électrostatique créé par la charge q au point M distant de $d = OM$.

L'unité du champ électrostatique dans le système international des unités (SI) est :
Newton/Coulomb (N/C)

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$$

I.2.1.4.2. Potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle q :

Le potentiel électrique $V(r)$ créé par une charge ponctuelle q au point M est donnée par la circulation du champ électrique \vec{E}

$$dV = -\vec{E} \cdot \vec{dr}, \text{ donc } \int dV = - \int \vec{E} \cdot \vec{dr}$$

On prend $V(\infty) = 0$

$$\int_M^\infty dV = - \int_M^\infty \frac{Kq}{r^2} dr$$

$$V(M) = -Kq \int_M^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Kq}{r}$$

$$V(M) = \frac{Kq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (V)$$

I.2.1.5. La force électrostatique exerçant sur une charge ponctuelle q :

Une charge ponctuelle q placée dans une région de l'espace où règne un champ électrique \vec{E} subit une force : $\vec{F} = q\vec{E}$ (N) [3, 5]

I.2.1.6. Energie potentielle d'une charge ponctuelle q :

L'énergie potentielle électrostatique d'une charge ponctuelle q placée en un point M où règne un champ électrique \vec{E} (un potentiel $V(M)$) est égale au travail qu'il faut fournir pour amener cette charge (particule) de l'infini au point actuel M [5].

Pour déplacer cette charge de l'infini au point M , un opérateur doit fournir une force qui s'oppose à la force de coulomb, $\vec{F}_{ext} = -\vec{F} = -q\cdot\vec{E}$

On prend, $V(\infty) = 0$

$$E_p = \int_\infty^M dW = \int_\infty^M \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{r} = -q \int_\infty^M \vec{E} \cdot d\vec{r} = q[V(M) - V(\infty)] = q \cdot V(M)$$

$$E_p = q \cdot V(M) \quad (J)$$

$V(M)$ est le potentiel au point M .

I.2.1.7. Travail de la force électrostatique :

Soit une charge ponctuelle q placée au point A où règne un champ électrique \vec{E} . Le travail de la force électrique lors de déplacement de la charge q du point A à un point B est donnée par la relation :

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{r} = -q[V(B) - V(A)]$$

$$W_{AB} = -q \cdot \Delta V = -\Delta E_p \quad (J) \quad [1, 3, 5]$$

I.2.1.8. L'énergie interne d'un système des charges ponctuelles :

L'énergie interne d'un système de N charge ponctuelle est définie comme le travail nécessaire pour assembler ces charges considérées initialement à l'infini.

Cette énergie interne a l'expression suivante :

$$E_i = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^N \sum_{J=1 (J \neq I)}^N \frac{K q_I q_J}{r_{IJ}}$$

$$E_i = \sum_{I=1}^N \sum_{(J>I)} \frac{K q_I q_J}{r_{IJ}}$$

r_{IJ} est la distance entre la charge q_I et la charge q_J

$K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{C}^{-2}$, est la constante de coulomb.

I.2.2. Champ et potentiel électrique (distribution continue de charge) :

I.2.2.1. Distribution continue des charges :

Pour faire l'étude des propriétés d'un corps chargé, il est important de décrire mathématiquement son état d'électrisation.

On dit qu'une charge est ponctuelle si elle est perçue comme un point par un observateur, dans ce cas l'observateur se trouve à une distance très supérieure à la dimension des charges.

Une distribution discrète est un ensemble des charges discernables pour l'observateur (q_1, q_2, \dots, q_N)

Si les charges ne sont pas discernables par l'observateur, elles peuvent être réparties linéairement, ou en surface, ou dans un volume, dans ces trois cas les distributions des charges sont dites continues.

I.2.2.2. Calcul du champ et potentiel électrique généré par une distribution continue de charges :

La technique utilisée pour calculer le champ (potentiel) électrique créé par une distribution continue de charges consiste à découper la distribution de charges en éléments de charges infinitésimales (élémentaires) dq générant un champ (potentiel) électrique élémentaire $d\vec{E}$ (dV) et d'additionner tous les champs (potentiels) infinitésimaux à l'aide d'une intégrale [6].

On a, $d\vec{E} = \frac{K \cdot dq}{r^2} \vec{U}_r$ par conséquent $\vec{E} = \int d\vec{E}$

\vec{E} : est le champ électrique totale créé par la distribution continue de charges.

$d\vec{E}$: est le champ électrique infinitésimale créé par la charge élémentaire dq .

Même chose pour le potentiel électrique élémentaire (infinitésimal), est donné par l'expression :

$dV = \frac{K \cdot dq}{r}$, on a, $V = \int dV$

I.2.2.3. Densité de charge électrique :

La densité de charge électrique désigne la quantité de charge électrique par unité d'espace, qui peut être à une dimension (ligne), deux dimensions (surface) ou trois dimensions (un volume).

I.2.2.4. Différents types des distributions continues de charges :

Il y'a trois types des distributions continues de charges sont :

Distributions linéiques de charges, distributions surfaciques de charges et les distributions volumiques de charges [7].

I.2.2.4.1. Distribution linéique de charges :

Dans ce cas, la distribution continue de charges est répartie sur une seule dimension, c'est-à-dire une ligne (un fil).

La densité linéique de charge est donnée par la relation suivante : $\lambda = \frac{q}{l} = \frac{dq}{dl}$ [6, 8]

q : est la charge du fil (en coulomb C).

l : longueur du fil (en m)

Sa unité est Coulomb/mètre (C/m)

I.2.2.4.2. Distribution surfacique de charges :

Dans ce cas la distribution continue de charges est répartie sur deux dimensions (une surface), on dit qu'on a une distribution surfacique de charges.

La densité surfacique de charge est donnée par la relation suivante [6, 8] : $\delta = \frac{q}{S} = \frac{dq}{dS}$

q : est la charge contenue dans la surface S (en coulomb C).

S : la surface (superficie, en m^2)

Sa unité est (C/m^2)

I.2.2.4.3. Distribution volumique de charges :

Dans ce cas la distribution continue de charges est répartie sur trois dimensions (un volume), on dit qu'on a une distribution volumique de charges.

La densité volumique de charge est donnée par la relation suivante [9, 10] : $\rho = \frac{q}{V} = \frac{dq}{dV}$

q : est la charge contenue dans le volume V (en coulomb C).

V : le volume qui contient la charge (en m^3)

Sa unité est (C/m^3)

I.2.3. Dipôle électrique (champ et potentiel électrique) :

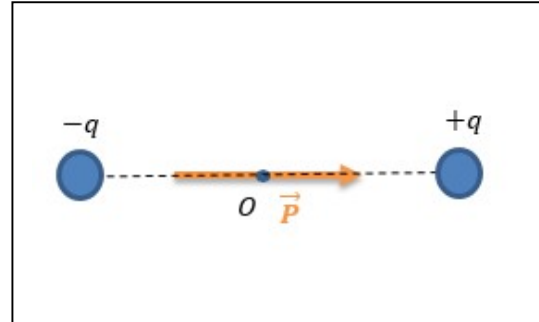
I.2.3.1. Définition :

Un dipôle électrique est formé de deux charges ponctuelles égales et de signes opposés ($-q, +q$) rigidement reliées l'une à l'autre, et distants avec une distance très faible d [11].

Le moment dipolaire \vec{P} d'un dipôle électrique égal :

$$\vec{P} = qd\vec{l}, \text{ donc } \vec{P} = q\vec{d} \quad (C.m)$$

Le vecteur de moment dipolaire \vec{P} est dirigé de la charge négative ($-q$) vers la charge positive ($+q$)



I.2.3.2. Potentiel électrique créé par un dipôle électrique :

L'expression du potentiel créé par un dipôle électrique de moment dipolaire \vec{P} en un point M de l'espace est donné par [11] :

$$V(M) = \frac{KP\cos\theta}{r^2} \quad (V)$$

K : Constante de coulomb

P : Moment dipolaire du dipôle électrique

θ : L'angle entre le vecteur de moment dipolaire \vec{P} et le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

I.2.3.3. Champ électrique créé par un dipôle électrique :

En utilisant la relation entre le champ électrique \vec{E} et le potentiel électrique V suivante [11] :

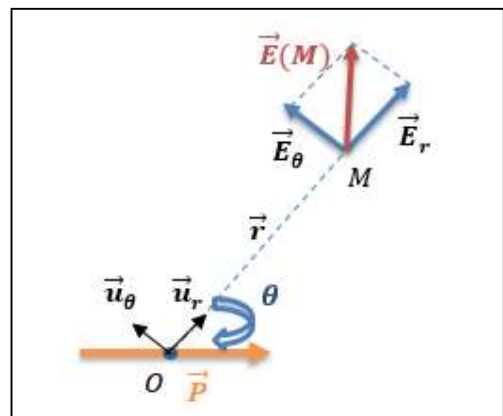
$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$, on trouve les composantes du champ électrique $\vec{E}(M)$ créé par le dipôle électrique au point M de l'espace :

$$\vec{E}(M) = E_r\vec{U}_r + E_\theta\vec{U}_\theta$$

$$\begin{cases} E_r = \frac{2KP\cos\theta}{r^3} \\ E_\theta = \frac{KP\sin\theta}{r^3} \end{cases}$$

Donc, on écrit :

$$\vec{E}(M) = \frac{2KP\cos\theta}{r^3}\vec{U}_r + \frac{KP\sin\theta}{r^3}\vec{U}_\theta \quad (N/C)$$



θ : L'angle entre le vecteur de moment dipolaire \vec{P} et le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

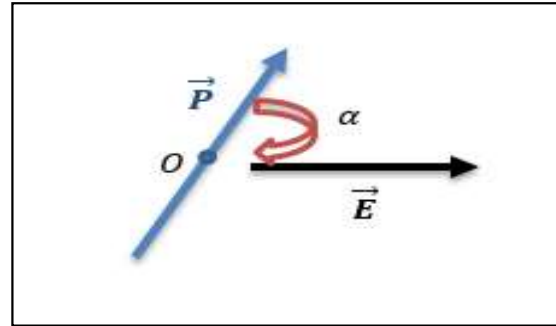
I.2.3.4. Energie potentielle d'un dipôle électrique placé dans un champ électrique uniforme :

On a :

$$U = -\vec{P} \cdot \vec{E} = -PE \cos \alpha$$

D'où :

α : est l'angle entre le vecteur du moment dipolaire \vec{P} et le vecteur du champ électrique \vec{E}



I.2.4. Action du champ électrique sur un dipôle (orientation et état d'équilibre) :

Soit un dipôle électrique de moment dipolaire $\vec{P} = q\vec{d}$ placé dans un champ électrique uniforme \vec{E} (voir figure ci-contre).

Dans ce cas, chacune des charges du dipôle ($-q, +q$) est soumise à une force électrique égale :

$$\vec{F}_1 = -q\vec{E}, \quad \vec{F}_2 = q\vec{E}$$

Ces deux forces sont de directions opposées, et forment un couple de moment

$$\vec{L} = \vec{P} \wedge \vec{E}, \quad \|\vec{L}\| = PE \sin \alpha$$

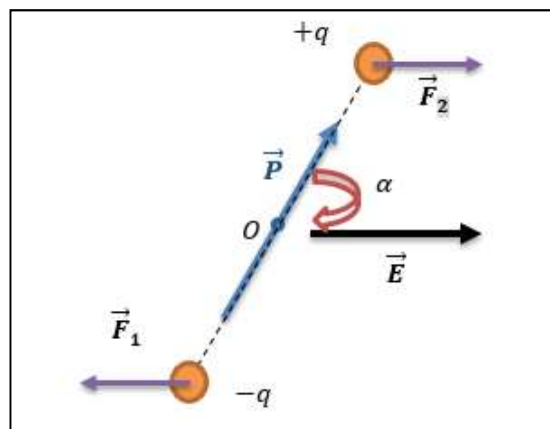
D'où :

α : est l'angle entre le vecteur du moment dipolaire \vec{P} et le vecteur du champ électrique \vec{E}

Le moment de couple \vec{L} s'annule, lorsque le moment dipolaire \vec{P} se dirige le long du champ électrique \vec{E}

$$\|\vec{L}\| = PE \sin \alpha = 0$$

Donc, $\sin \alpha = 0$, et par conséquent $\alpha = 0$



I.2.5. Théorème de Gauss :

I.2.5.1. Intérêt de théorème de Gauss :

Dans le cas où les distributions continues de charges (linéique, surfacique ou volumique) ont un niveau élevé de symétrie, le théorème de Gauss simplifier le calcul du champ électrique créé par ces distributions continues en tout point de l'espace [8, 11].

Ce théorème permet d'évaluer le flux du champ électrique sortant d'une surface fermée en fonction des charges contenues à l'intérieur de cette surface.

I.2.5.2. Flux électrostatique :

Le flux électrostatique est une construction mathématique, il est difficile de donner une explication correcte et simple de ce que c'est. De loin, c'est la multiplication d'un champ électrique par une surface imaginaire, il est tout simplement utilisé comme un outil mathématique [12].

Le flux du champ électrostatique \vec{E} qui traverse une surface S est donné par [13] :

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

L'intégrale porte sur la surface S , donc il s'agira généralement d'une intégrale double.

I.2.5.3. Théorème de Gauss :

Le flux du champ électrostatique à travers toute surface fermée est égal à la charge contenue dans le volume délimité par cette surface fermée (appelée surface de Gauss) divisée par la permittivité du vide ϵ_0 [14].

$$\text{On écrit : } \Phi = \oiint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0}$$

Φ : le flux du champ électrique \vec{E} .

\vec{E} : champ électrostatique

ds : élément de la surface de Gauss imaginaire fermée

$\sum q_{int}$: la somme des charges internes qui se trouve à l'intérieur de la surface fermée de Gauss

ϵ_0 : la permittivité du vide ($\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$)

La considération de symétrie est très importante pour l'application de théorème de Gauss. On fait choisit la surface imaginaire fermée de Gauss de façon que le champ électrique \vec{E} passe par cette surface perpendiculairement, et dans ce cas, on a : $\oiint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \mp E \cdot S$

Si le champ électrique \vec{E} passe par cette surface de façon colinéaire, on a : $\oiint \vec{E} \cdot \vec{ds} = 0$

Généralement, on distingue trois types des symétries sont [13, 15] :

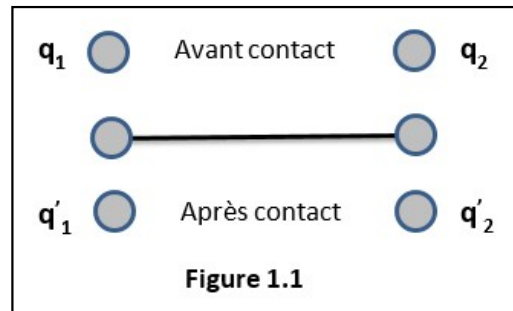
- Symétrie sphérique : la surface imaginaire fermée de Gauss est une sphère concentrique.
- Symétrie cylindrique : la surface de Gauss fermée est un cylindre coaxial.
- Symétrie plane : la surface de Gauss est un cylindre de base dS normale ou plan.

I.3. Série des exercices corrigés :

Exercice (1) :

Deux boules métalliques identiques portent des charges initiales q_1, q_2 . On les met on contact puis on les sépare. (Voir Figure 1.1)

1. Calculer les nouvelles charges \hat{q}_1 et \hat{q}_2 qu'elles portent après la séparation.



On prend :

$$q_1 = -5.10^{-6} \text{ C}, q_2 = 12.10^{-6} \text{ C}, K = 9.10^9 \text{ N.m}^2\text{C}^{-2}$$

Solution de l'exercice (1) :

$$\text{On a : } q_1 = -5.10^{-6} \text{ C}, q_2 = 12.10^{-6} \text{ C}, K = 9.10^9 \text{ N.m}^2\text{C}^{-2}$$

1. Calcul des nouvelles charges \hat{q}_1 et \hat{q}_2 :

Avant le contact les deux boules ont une charge totale :

$$Q_{Tot} = q_1 + q_2 \quad (1)$$

Lorsque on fait le contact entre les deux boules métalliques, seront un seul conducteur, et un équilibre électrostatique aura lieu. Après cet équilibre électrostatique on les sépare, et par conséquence la charge de chaque boule changera, mais la charge totale reste conservée.

On écrit :

$$Q_{Tot} = \hat{q}_1 + \hat{q}_2 \quad (2)$$

D'après les deux équations (1) et (2) on a :

$$q_1 + q_2 = \hat{q}_1 + \hat{q}_2 \quad (3)$$

D'autre part, les deux boules métalliques sont identiques, en matière et en volume, et par conséquence la charge finale de chaque boule après la séparation est la même.

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_2 \quad (4)$$

A partir des deux équations (3) et (4), on écrit :

$$q_1 + q_2 = 2\dot{q}_1$$

$$\text{Donc : } \dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \frac{q_1 + q_2}{2}$$

Application numérique :

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \frac{-5.10^{-6} + 12.10^{-6}}{2}$$

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 3,5.10^{-6} \text{ C}$$

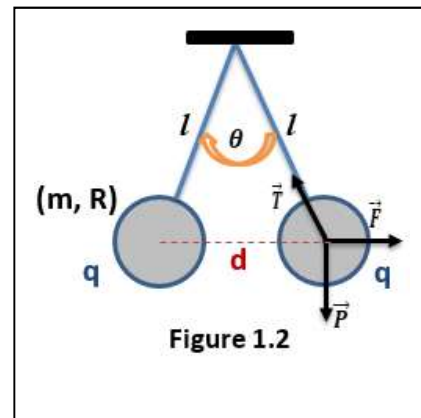
Exercice (2) :

Deux petites sphères conductrices identiques de masses $m = 15 \text{ g}$ et de rayon $R = 3 \text{ cm}$, sont suspendus à deux fils identiques isolants de longueur $l = 10 \text{ cm}$. On les porte à la même charge q , et les fils s'écartent avec un angle θ . (Voir Figure 1.2)

1. Calculer la charge q des deux petites sphères dans les cas suivants :

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ Rad}, \theta = \frac{\pi}{3} \text{ Rad}, \theta = \frac{\pi}{2} \text{ Rad}.$$

2. Calculer la force de tension du fil dans les trois cas précédents.



On donne : $K = 9.10^9 \text{ N.m}^2\text{C}^{-2}$

Solution de l'exercice (2) :

On a : $m = 15 \text{ g}$, $R = 3 \text{ cm}$, $l = 10 \text{ cm}$, $g = 9,81 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$, $K = 9.10^9 \text{ N.m}^2\text{C}^{-2}$

1. Calcul de la charge q des deux petites sphères :

La distance entre les deux boules est d (Voir figure 1.2).

En appliquant la loi de Newton, à l'équilibre :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad , \quad \vec{P} + \vec{T} + \vec{F} = \vec{0} \quad (1)$$

Par projection sur les deux axes du repère, on obtient :

$$(OX) : F - T \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$$

$$(OY) : T \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - mg = 0$$

On écrit :

$$T \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = F \quad (2)$$

$$T \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = mg \quad (3)$$

En divisant les deux équations (2) et (3), on obtient :

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{F}{mg} \quad (4)$$

A partir de la loi de Coulomb, l'expression de la force électrique est :

$$F = \|\vec{F}\| = \left| \frac{Kq^2}{d^2} \right| = \frac{Kq^2}{d^2}$$

On remplace cette expression dans l'équation (4), on obtient :

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{Kq^2}{mgd^2} \quad (5)$$

On calcule la valeur de la distance d entre les deux sphères (deux charges) :

$$d = 2(l + R) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \text{ on remplace cette valeur dans l'équation (5), on obtient :}$$

$$q = 2(l + R) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sqrt{\frac{mg \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{K}}$$

Application numérique :

$$\text{Premier cas : } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ Rad}$$

$$q = 2(0,1 + 0,03)(0,259) \sqrt{\frac{0,015(9,81)(0,268)}{9 \cdot 10^9}}, \quad q = 4,46 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$\text{Deuxième cas : } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ Rad}$$

$$q = 2(0,1 + 0,03)(0,5) \sqrt{\frac{0,015(9,81)(0,577)}{9 \cdot 10^9}}, \quad q = 12,6 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$\text{Troisième cas : } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ Rad}$$

$$q = 2(0,1 + 0,03)(0,707) \sqrt{\frac{0,015(9,81)(1)}{9 \cdot 10^9}}, \quad q = 23,5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

2. Calcul de la force de tension du fil T :

D'après l'équation (3), on a :

$$T = \frac{mg}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Application numérique :

Premier cas : $\theta = \frac{\pi}{6} \text{ Rad}$

$$T = \frac{0,015(9,81)}{0,966} , T = 0,15 \text{ N}$$

Deuxième cas : $\theta = \frac{\pi}{3} \text{ Rad}$

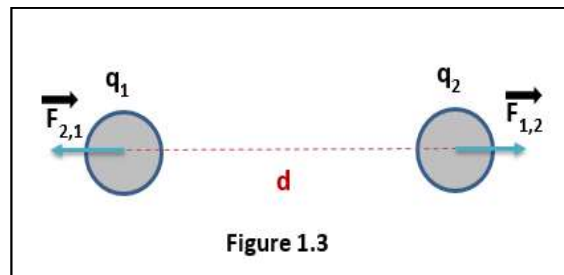
$$T = \frac{0,015(9,81)}{0,866} , T = 0,17 \text{ N}$$

Troisième cas : $\theta = \frac{\pi}{2} \text{ Rad}$

$$T = \frac{0,015(9,81)}{0,707} , T = 0,21 \text{ N}$$

Exercice (3) :

La somme de deux charges ponctuelles q_1 et q_2 qui ont le même signe est $16 \mu\text{C}$. Lorsque elles sont éloignées d'une distance $d = 5 \text{ cm}$ l'une de l'autre, chacune d'elles est soumise à une force de répulsion qui a une norme de 150 N . (Voir Figure 1.3)



1. Calculer les valeurs de ces deux charges q_1 et q_2 .

Solution de l'exercice (3) :

On a : $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{C}^{-2}$, $Q_{\text{Tot}} = 16 \mu\text{C}$, $F = 150 \text{ N}$, $d = 5 \text{ cm}$

D'après les données de l'exercice, on écrit:

$$q_1 + q_2 = 16 \cdot 10^{-6} \text{ C} \quad (1)$$

$$F_{1,2} = F_{2,1} = F = 150 \text{ N} \quad (2)$$

Selon la loi de Coulomb, la force électrique entre les deux charges q_1 et q_2 a l'expression suivante :

$$F_{1,2} = F_{2,1} = \frac{Kq_1q_2}{d^2} = 150 \text{ N}$$

$$\text{Donc : } q_1 = \frac{150d^2}{Kq_2} \quad (3)$$

On remplace l'équation (3), dans l'équation (1) :

$$\frac{150d^2}{Kq_2} + q_2 = 16 \cdot 10^{-6}$$

$$150d^2 + Kq_2^2 = 16 \cdot 10^{-6} Kq_2$$

$$Kq_2^2 - 16 \cdot 10^{-6} Kq_2 + 150d^2 = 0$$

$$9 \cdot 10^9 q_2^2 - 16 \cdot 10^{-6} (9 \cdot 10^9) q_2 + 150(5 \cdot 10^{-2})^2 = 0$$

$$9 \cdot 10^9 q_2^2 - 144 \cdot 10^3 q_2 + 37,5 \cdot 10^{-2} = 0$$

On a :

$$\Delta = (144 \cdot 10^3)^2 - 4(9 \cdot 10^9)37,5 \cdot 10^{-2}$$

$$\Delta = 7236 \cdot 10^6 > 0$$

$\sqrt{\Delta} = 85,06 \cdot 10^3$, donc l'équation accepte deux solutions, sont :

$$q_{2,1} = \frac{144 \cdot 10^3 + 85,06 \cdot 10^3}{2 \cdot 9 \cdot 10^9} = 12,72 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$q_{2,2} = \frac{144 \cdot 10^3 - 85,06 \cdot 10^3}{2 \cdot 9 \cdot 10^9} = 3,28 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

Et par conséquence, on a deux valeurs de la charge q_1 sont :

$$q_{1,1} = 16 \cdot 10^{-6} - 12,72 \cdot 10^{-6} = 3,28 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$q_{1,2} = 16 \cdot 10^{-6} - 3,28 \cdot 10^{-6} = 12,72 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

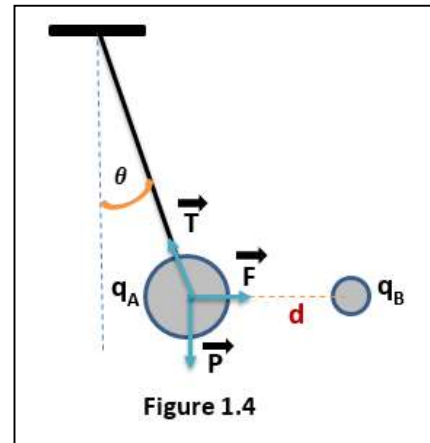
Les valeurs des binaires des charges (q_1, q_2) sont : $(3,28 \mu\text{C}, 12,72 \mu\text{C}), (12,72 \mu\text{C}, 3,28 \mu\text{C})$

Exercice (4) :

Un pendule simple constitue d'un fil isolant qui porte à son extrémité une boule conductrice de masse $m=10 \text{ g}$ supposée une masse ponctuelle, et qui porte une charge $q_A = 3 \cdot 10^{-8} \text{ C}$. .
(Voir Figure 1.4)

On place une charge ponctuelle $q_B = -5.10^{-8} C$ à une distance $d = AB = 1 cm$ de la boule (on suppose que la rotation du pendule par rapport à sa position initiale verticale est faible).

1. Calculer la force électrique exerçant sur la boule avant la rotation du pendule.
2. Calculer l'angle de rotation du pendule par rapport à sa position initiale.



Solution de l'exercice (4) :

On a : $K = 9.10^9 N.m^2C^{-2}$, $g = 9,81 \left(\frac{m}{s^2}\right)$, $m=10 g$, $q_A = 3.10^{-8} C$, $q_B = -5.10^{-8} C$,

$d = AB = 1 cm$

1. Calcul de la force électrique exerçant sur la boule avant la rotation du pendule :

D'après la loi de Coulomb :

$$\vec{F} = \frac{Kq_1q_2}{d^2} \vec{U}_r$$

$$F = \|\vec{F}\| = \left| \frac{Kq_Aq_B}{d^2} \right|$$

Application numérique :

$$F = \|\vec{F}\| = \left| \frac{9.10^9(3.10^{-8})(-5.10^{-8})}{(0.01)^2} \right|$$

$$F = 135.10^{-5} N$$

La force \vec{F} est une force d'attraction, parce-que les deux charges q_A et q_B ont de signe différent.

2. Calcul de l'angle de rotation θ :

A l'équilibre du pendule simple, on applique la loi de Newton :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad , \quad \vec{P} + \vec{T} + \vec{F} = \vec{0} \quad (1)$$

Par projection sur les deux axes du repère, on obtient :

$$(OX) : F - T \sin(\theta) = 0$$

$$(OY): T \cos(\theta) - mg = 0$$

On écrit :

$$T \sin(\theta) = F \quad (2)$$

$$T \cos(\theta) = mg \quad (3)$$

On divise (2) sur (3), on obtient :

$$\tan(\theta) = \frac{F}{mg}, \text{ donc, } \theta = \arctg\left(\frac{F}{mg}\right)$$

Application numérique :

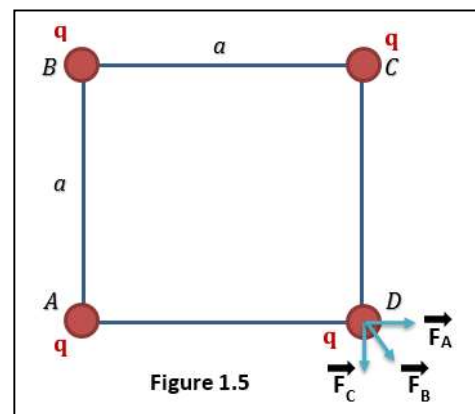
$$\theta = \arctg\left(\frac{135 \cdot 10^{-5}}{0,01(9,81)}\right), \quad \theta = 0,014 \text{ Rad}$$

Exercice (5) :

Quatre charges ponctuelles identiques positives q sont situées aux sommets d'un carré $ABCD$ de côté $a = 10 \text{ cm}$. (Figure 1.5)

1. Calculer la force électrique qui exerce sur chaque charge q
2. En déduire le champ électrique qui exerce sur chaque charge q
3. Calculer l'énergie potentielle de chaque charge
4. Calculer l'énergie interne de ce système de quatre charges.

On prend : $q = 2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$



Solution de l'exercice (5) :

On a : $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{C}^{-2}$, $q = 2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$, $a = 10 \text{ cm}$

1. Calcul de la force électrique qui exerce sur chaque charge q :

On prend par exemple la charge q au sommet D :

$$\vec{F}(D) = \vec{F}_A(D) + \vec{F}_B(D) + \vec{F}_C(D)$$

$$\vec{F}_A(D) = \frac{Kq^2}{AD^3} \overrightarrow{AD}, \quad \vec{F}_A(D) = \frac{Kq^2}{a^3} (a\vec{i})$$

$$\vec{F}_B(D) = \frac{Kq^2}{BD^3} \overrightarrow{BD}, \quad \vec{F}_B(D) = \frac{Kq^2}{(\sqrt{2}a)^3} (a\vec{i} - a\vec{j})$$

$$\text{On a, } BD^2 = a^2 + a^2 = 2a^2, \quad BD = \sqrt{2}a^2$$

$$\vec{F}_C(D) = \frac{Kq^2}{CD^3} \vec{CD}, \quad \vec{F}_C(D) = \frac{Kq^2}{a^3} (-a\vec{j})$$

$$\vec{F}(D) = \frac{Kq^2}{a^3} (a\vec{i}) + \frac{Kq^2}{(\sqrt{2}a)^3} (a\vec{i} - a\vec{j}) + \frac{Kq^2}{a^3} (-a\vec{j})$$

$$\vec{F}(D) = \frac{Kq^2}{a^3} \left(a + \frac{a}{2\sqrt{2}} \right) \vec{i} - \left(a + \frac{a}{2\sqrt{2}} \right) \vec{j}$$

Application numérique :

$$\vec{F}(D) = \frac{9 \cdot 10^9 (2 \cdot 10^{-6})^2}{0,1^3} \left(0,1 + \frac{0,1}{2\sqrt{2}} \right) \vec{i} - \left(0,1 + \frac{0,1}{2\sqrt{2}} \right) \vec{j}$$

$$\vec{F}(D) = 4,86\vec{i} - 4,86\vec{j} \text{ N}$$

$$F = \|\vec{F}(D)\| = \sqrt{4,86^2 + 4,86^2}, \quad F = 6,87 \text{ N}$$

2. Calcul du champ électrique $\vec{E}(D)$ qui exerce sur la charge q au point D :

On a :

$$\vec{F}(D) = q\vec{E}(D), \quad \text{donne } \vec{E}(D) = \frac{1}{q} \vec{F}(D)$$

Application numérique :

$$\vec{E}(D) = \frac{1}{2 \cdot 10^{-6}} (4,86\vec{i} - 4,86\vec{j})$$

$$\vec{E}(D) = (2,43 \cdot 10^6 \vec{i} - 2,43 \cdot 10^6 \vec{j})$$

$$E = \|\vec{E}(D)\| = \sqrt{2,43 \cdot 10^6^2 + 2,43 \cdot 10^6^2}, \quad E = 3,43 \cdot 10^6 \text{ N/C}$$

3. Calcul de l'énergie potentielle $E_p(D)$ de la charge ponctuelle q :

L'énergie potentielle de la charge q en présence du potentielle $V(D)$ est donnée par la relation suivante :

$$E_p(D) = q \cdot V(D)$$

On calcule le potentiel $V(D)$ du point D .

Le potentiel créé par une charge q à une distance d est donné par : $V = \frac{Kq}{d}$

$$V(D) = V_A(D) + V_B(D) + V_C(D)$$

$$V_A(D) = \frac{Kq}{AD} = \frac{Kq}{a}, \quad V_B(D) = \frac{Kq}{BD} = \frac{Kq}{\sqrt{2}a}, \quad V_C(D) = \frac{Kq}{CD} = \frac{Kq}{a}$$

$$V(D) = \frac{Kq}{a} + \frac{Kq}{\sqrt{2}a} + \frac{Kq}{a} = \frac{Kq}{a} \left(\frac{2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \right)$$

Application numérique :

$$V(D) = \frac{9 \cdot 10^9 (2 \cdot 10^{-6})}{0,1} \left(\frac{2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \right), \quad V(D) = 48,73 \cdot 10^4 \text{ V}$$

Par conséquent l'énergie potentielle $E_p(D)$ est :

$$E_p(D) = 2 \cdot 10^{-6} (48,73 \cdot 10^4), \quad E_p(D) = 97,46 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

4. Calcul de l'énergie interne du système des charges :

$$E_i = \sum_{j>i}^i \frac{Kq_i q_j}{r_{i,j}}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad r_{i,j} \text{ est la distance entre la charge } q_i \text{ et } q_j$$

$$E_i = \frac{Kq_1 q_2}{r_{1,2}} + \frac{Kq_1 q_3}{r_{1,3}} + \frac{Kq_1 q_4}{r_{1,4}} + \frac{Kq_2 q_3}{r_{2,3}} + \frac{Kq_2 q_4}{r_{2,4}} + \frac{Kq_3 q_4}{r_{3,4}}$$

On écrit :

$$E_i = \frac{Kq_A q_B}{a} + \frac{Kq_A q_C}{\sqrt{2}a} + \frac{Kq_A q_D}{a} + \frac{Kq_B q_C}{a} + \frac{Kq_B q_D}{\sqrt{2}a} + \frac{Kq_C q_D}{a}$$

$$E_i = \frac{Kq^2}{a} + \frac{Kq^2}{\sqrt{2}a} + \frac{Kq^2}{a} + \frac{Kq^2}{a} + \frac{Kq^2}{\sqrt{2}a} + \frac{Kq^2}{a}$$

$$E_i = \frac{Kq^2}{a} \left[\frac{4\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} \right]$$

Application numérique :

$$E_i = \frac{9 \cdot 10^9 (2 \cdot 10^{-6})^2}{0,1} \left[\frac{4\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} \right], \quad E_i = 194,9 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

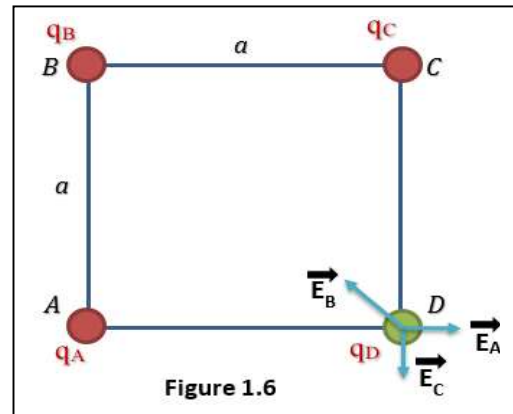
Exercice (6) :

Trois charges q_A , q_B et q_C sont situées aux trois sommets A , B et C respectivement d'un carré $ABCD$ de côté $a = 8 \text{ cm}$. (Figure 1.6)

1. Calculer Le champ électrique $\vec{E}(D)$ créé par les trois charges au sommet D
2. Calculer le potentiel électrique $V(D)$ créé par les trois charges au point D
3. On met une charge ponctuelle q_D au point D :
 - 3.1. Calculer la force électrique $\vec{F}(D)$ qui exerce sur cette charge.

- 3.2. Calculer l'énergie potentielle $Ep(D)$ de cette charge.
- 3.3. Calculer le travail $W(\vec{F})$ nécessaire pour déplacer cette charge du point D au point O le centre du carré.
- 3.4. Donner la nature de cette force (motrice ou résistante)

On donne : $q_A = 5 \cdot 10^{-8} \text{ C}$, $q_B = -7 \cdot 10^{-8} \text{ C}$,
 $q_C = 3 \cdot 10^{-8} \text{ C}$, $q_D = 8 \cdot 10^{-8} \text{ C}$.



Solution de l'exercice (6) :

On a : $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{C}^{-2}$, $q_A = 5 \cdot 10^{-8} \text{ C}$, $q_B = -7 \cdot 10^{-8} \text{ C}$, $q_C = 3 \cdot 10^{-8} \text{ C}$, $q_D = 8 \cdot 10^{-8} \text{ C}$.

1. Calcul du champ électrique $\vec{E}(D)$ créé par les trois charges au sommet D :

$$\vec{E}(D) = \vec{E}_A(D) + \vec{E}_B(D) + \vec{E}_C(D)$$

$$\vec{E}_A(D) = \frac{Kq_A}{AD^3} \overrightarrow{AD} = \frac{Kq_A}{a^3} (a\vec{i})$$

$$\vec{E}_B(D) = \frac{Kq_B}{BD^3} \overrightarrow{BD} = \frac{Kq_B}{(\sqrt{2}a)^3} (a\vec{i} - a\vec{j})$$

$$\vec{E}_C(D) = \frac{Kq_C}{CD^3} \overrightarrow{CD} = \frac{Kq_C}{a^3} (-a\vec{j})$$

$$\vec{E}(D) = \frac{Kq_A}{a^3} (a\vec{i}) + \frac{Kq_B}{2\sqrt{2}a^3} (a\vec{i} - a\vec{j}) + \frac{Kq_C}{a^3} (-a\vec{j})$$

$$\vec{E}(D) = \left(\frac{Kq_A}{a^2} + \frac{Kq_B}{2\sqrt{2}a^2} \right) \vec{i} - \left(\frac{Kq_B}{2\sqrt{2}a^2} + \frac{Kq_C}{a^2} \right) \vec{j}$$

Application numérique :

$$\vec{E}(D) = \left(\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-8}}{(0,08)^2} - \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 7 \cdot 10^{-8}}{2\sqrt{2}(0,08)^2} \right) \vec{i} - \left(\frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-7 \cdot 10^{-8})}{2\sqrt{2}(0,08)^2} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-8}}{(0,08)^2} \right) \vec{j}$$

$$\vec{E}(D) = 35,5 \cdot 10^3 \vec{i} - 7,38 \cdot 10^3 \vec{j} \quad \text{N/C}$$

$$E(D) = \|\vec{E}(D)\| = \sqrt{35,5 \cdot 10^3^2 + 7,38 \cdot 10^3^2}, \quad E(D) = 1,314 \cdot 10^6 \quad \text{N/C}$$

2. Calcul du potentiel électrique $V(D)$ créé par les trois charges au point D :

$$V(D) = V_A(D) + V_B(D) + V_C(D)$$

$$V_A(D) = \frac{Kq_A}{AD} = \frac{Kq_A}{a}, \quad V_B(D) = \frac{Kq_B}{BD} = \frac{Kq_B}{\sqrt{2}a}, \quad V_C(D) = \frac{Kq_C}{CD} = \frac{Kq_C}{a}$$

$$V(D) = \frac{Kq_A}{a} + \frac{Kq_B}{\sqrt{2}a} + \frac{Kq_C}{a} = K\left(\frac{q_A}{a} + \frac{q_B}{\sqrt{2}a} + \frac{q_C}{a}\right)$$

Application numérique :

$$V(D) = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{5 \cdot 10^{-8}}{0,08} + \frac{7 \cdot 10^{-8}}{\sqrt{2}(0,08)} + \frac{3 \cdot 10^{-8}}{0,08} \right)$$

$$V(D) = 3431,7 \text{ V}$$

3. On met une charge ponctuelle q_D au point D :**3.1. Calcul de la force électrique $\vec{F}(D)$ qui exerce sur cette charge q_D :**

$$\vec{F}(D) = q_D \vec{E}(D)$$

Application Numérique :

$$\vec{F}(D) = 8 \cdot 10^{-8} (35,5 \cdot 10^3 \vec{i} - 7,38 \cdot 10^3 \vec{j})$$

$$\vec{F}(D) = 284 \cdot 10^{-5} \vec{i} - 59,04 \cdot 10^{-5} \vec{j} \quad \text{N}$$

$$F(D) = \|\vec{F}(D)\| = \sqrt{284 \cdot 10^{-5}^2 + 59,04 \cdot 10^{-5}^2}$$

$$F(D) = 290,07 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

3.2. Calcul de l'énergie potentielle $E_p(D)$ de cette charge q_D :

$$E_p(D) = q_D \cdot V(D)$$

Application numérique :

$$E_p(D) = 8 \cdot 10^{-8} (3431,7), \quad E_p(D) = 274,54 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

3.3. Calcul du travail $W(\vec{F})$ nécessaire pour déplacer cette charge du point D au point O le centre du carré :

$$W(\vec{F}) = -\Delta E_p = -(E_p(O) - E_p(D)) = -q_D (V(O) - V(D))$$

On calcule le potentiel du point O le centre du carré

$$V(O) = V_A(O) + V_B(O) + V_C(O)$$

$$V(O) = \frac{Kq_A}{AO} + \frac{Kq_B}{BO} + \frac{Kq_C}{CO}$$

$$AO = BO = CO = \frac{BD}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$V_A(O) = \frac{Kq_A}{AO} = \frac{\sqrt{2}Kq_A}{a}, \quad V_B(O) = \frac{Kq_B}{BO} = \frac{\sqrt{2}Kq_B}{a}, \quad V_C(O) = \frac{Kq_C}{CO} = \frac{\sqrt{2}Kq_C}{a}$$

$$V(O) = \frac{\sqrt{2}K}{a}(q_A + q_B + q_C)$$

Application numérique :

$$V(O) = \frac{9\sqrt{2} \cdot 10^9}{0,08} (5 \cdot 10^{-5} - 7 \cdot 10^{-8} + 3 \cdot 10^{-8})$$

$$V(O) = 1590,9 \text{ V}$$

$$W(\vec{F}) = -8 \cdot 10^{-8} (3431,7 - 1590,9)$$

$$W(\vec{F}) = -147,26 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

3.4. La nature de la force \vec{F} (motrice ou résistante) :

Puisque le travail de la force électrique est négatif $W(\vec{F}) < 0$, cette force est résistante.

Exercice (7) :

Deux charges ponctuelles q_A et q_B sont situées aux points $A(0. 1. 2)$ et $B(2. 5. 3)$ de l'espace.

1. Calculer le champ électrique $\vec{E}(C)$ généré par ces deux charges au point $C(3. 2. 7)$.
2. Calculer le potentiel $V(C)$ du point C .
3. On pose une charge q_C au point C :
 - 3.1. Calculer la force électrique $\vec{F}(C)$ qui exerce sur cette charge.
 - 3.2. Calculer l'énergie potentielle $E_p(C)$ de cette charge.
 - 3.3. Calculer le travail de la force électrique $W(\vec{F})$ effectué lors de déplacement de la charge q_C du point C au point $D(7. 7. -5)$.
 - 3.4. Cette force est-elle motrice ou résistante.

On donne : $q_A = 2 \mu\text{C}$, $q_B = -5 \mu\text{C}$, $q_C = 7 \mu\text{C}$.

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \text{ cm}, \quad K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{C}^{-2}$$

Solution de l'exercice (7) :

On a : $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{C}^{-2}$, $q_A = 2 \mu\text{C}$, $q_B = -5 \mu\text{C}$, $q_C = 7 \mu\text{C}$, $A(0.1.2)$, $B(2.5.3)$, $C(3.2.7)$, $D(7.7.-5)$, $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \text{ cm}$

1. Calcul du champ électrique $\vec{E}(C)$ généré par ces deux charges au point $C(3.2.7)$:

$$\vec{E}(C) = \vec{E}_A(C) + \vec{E}_B(C)$$

$$\vec{E}_A(C) = \frac{Kq_A}{AC^3} \vec{AC}, \text{ avec } \vec{AC} = 3 \cdot 10^{-2} \vec{i} + 10^{-2} \vec{j} + 5 \cdot 10^{-2} \vec{k}$$

$$AC = \sqrt{3^2 + 1^2 + 5^2} 10^{-2} = 5,92 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\vec{E}_A(C) = \frac{9 \cdot 10^9 (2 \cdot 10^{-6})}{(5,92 \cdot 10^{-2})^3} [3 \cdot 10^{-2} \vec{i} + 10^{-2} \vec{j} + 5 \cdot 10^{-2} \vec{k}]$$

$$\vec{E}_A(C) = 0,26 \cdot 10^7 \vec{i} + 0,087 \cdot 10^7 \vec{j} + 0,434 \cdot 10^7 \vec{k}$$

$$\vec{E}_B(C) = \frac{Kq_B}{BC^3} \vec{BC}, \text{ avec } \vec{BC} = 10^{-2} \vec{i} - 3 \cdot 10^{-2} \vec{j} + 4 \cdot 10^{-2} \vec{k}$$

$$BC = \sqrt{1^2 + 3^2 + 4^2} 10^{-2} = 5,1 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\vec{E}_B(C) = \frac{9 \cdot 10^9 (-5 \cdot 10^{-6})}{(5,1 \cdot 10^{-2})^3} [10^{-2} \vec{i} - 3 \cdot 10^{-2} \vec{j} + 4 \cdot 10^{-2} \vec{k}]$$

$$\vec{E}_B(C) = -0,339 \cdot 10^7 \vec{i} + 1,018 \cdot 10^7 \vec{j} - 1,357 \cdot 10^7 \vec{k}$$

$$\vec{E}(C) = -0,079 \cdot 10^7 \vec{i} + 1,105 \cdot 10^7 \vec{j} - 0,923 \cdot 10^7 \vec{k}$$

Donc :

$$E(C) = \|\vec{E}(C)\| = \sqrt{(0,079)^2 + (1,105)^2 + (0,923)^2} 10^7$$

$$E(C) = 1,442 \cdot 10^7 \text{ N/C}$$

2. Calcul du potentiel $V(C)$ du point C :

$$V(C) = V_A(C) + V_B(C)$$

$$V_A(C) = \frac{Kq_A}{AC} = \frac{9 \cdot 10^9 (2 \cdot 10^{-6})}{5,92 \cdot 10^{-2}}, \text{ donc } V_A(C) = 3,040 \cdot 10^5 \text{ V}$$

$$V_B(C) = \frac{Kq_B}{BC} = \frac{9 \cdot 10^9 (-5 \cdot 10^{-6})}{5,1 \cdot 10^{-2}}, \text{ donc } V_B(C) = -8,823 \cdot 10^5 \text{ V}$$

Par conséquent on a :

$$V(C) = -5,783 \cdot 10^5 \text{ V}$$

3. on met au point C(3. 2. 7) une charge ponctuelle $q_C = 7 \mu\text{C}$:

3.1. Calcul de la force $\vec{F}(C)$ qui exerce sur la charge q_C :

$$\vec{F}(C) = q_C \vec{E}(C)$$

Application Numérique :

$$\vec{F}(C) = 7 \cdot 10^{-6} (-0,079 \cdot 10^7 \vec{i} + 1,105 \cdot 10^7 \vec{j} - 0,923 \cdot 10^7 \vec{k})$$

$$\vec{F}(C) = -5,53 \vec{i} + 77,35 \vec{j} - 64,61 \vec{k} \quad N$$

$$F(C) = \|\vec{F}(C)\| = \sqrt{(5,53)^2 + (77,35)^2 + (64,61)^2}$$

$$F(C) = 100,93 \quad N$$

3.2. Calcul de l'énergie potentielle $E_p(C)$ de la charge q_C :

$$E_p(C) = q_C \cdot V(C)$$

Application numérique :

$$E_p(C) = 7 \cdot 10^{-6} (-5,783 \cdot 10^5), \quad E_p(C) = -4,048 \quad J$$

3.3. Calcul du travail de la force électrique $W(\vec{F})$ effectué lors de déplacement de la charge q_C du point C au point D(7. 7. -5) :

$$W(\vec{F}) = -\Delta E_p = -(E_p(D) - E_p(C)) = -q_C (V(D) - V(C))$$

On calcule le potentiel $V(D)$ du point D

$$V(D) = V_A(D) + V_B(D)$$

$$V_A(D) = \frac{Kq_A}{AD}, \text{ on a } \overline{AD} = 7 \cdot 10^{-2} \vec{i} + 6 \cdot 10^{-2} \vec{j} - 7 \cdot 10^{-2} \vec{k}$$

$$AD = \sqrt{(7)^2 + (6)^2 + (7)^2} 10^{-2} = 11,57 \cdot 10^{-2} \quad m$$

$$V_A(D) = \frac{9 \cdot 10^9 (2 \cdot 10^{-6})}{11,57 \cdot 10^{-2}} = 1,555 \cdot 10^5 \quad V$$

$$V_B(D) = \frac{Kq_B}{BD}, \text{ on a } \overline{BD} = 5 \cdot 10^{-2} \vec{i} + 2 \cdot 10^{-2} \vec{j} - 8 \cdot 10^{-2} \vec{k}$$

$$BD = \sqrt{(5)^2 + (2)^2 + (8)^2} 10^{-2} = 10,95 \cdot 10^{-2} \quad m$$

$$V_B(D) = \frac{9 \cdot 10^9 (-5 \cdot 10^{-6})}{10,95 \cdot 10^{-2}} = -4,109 \cdot 10^5 \quad V$$

Par conséquent, on a :

$$V(D) = 1,555 \cdot 10^5 - 4,109 \cdot 10^5 = -2,554 \cdot 10^5 \text{ V}$$

$$W(\vec{F}) = -7 \cdot 10^{-6} (-2,554 \cdot 10^5 + 5,783 \cdot 10^5) = 2,260 \text{ J}$$

3.4. Nature de la force \vec{F} :

Le travail de la force $W(\vec{F}) > 0$, donc cette force est motrice.

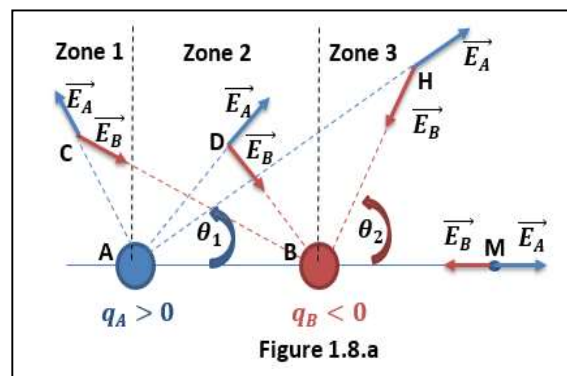
Exercice (8) :

Deux charges ponctuelles q_A et q_B sont situées aux points A et B éloignées de $AB = 2 \text{ m}$. (Voir Figure 1.8.a)

On donne : $q_A = 7 \cdot 10^{-8} \text{ C}$,

$q_B = -5 \cdot 10^{-8} \text{ C}$.

1. Montrer que le champ électrique créé par ces deux charges ne peut être nul qu'en un point M aligné avec les deux points A et B
2. Trouver la position du point M .
3. Trouver le point \acute{M} sur le segment AB qui correspond à un potentiel nul.



Solution de l'exercice (8) :

On a : $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{C}^{-2}$, $AB = 2 \text{ m}$, $q_A = 7 \cdot 10^{-8} \text{ C}$, $q_B = -5 \cdot 10^{-8} \text{ C}$.

1. Recherche du point où le champ électrique créé par les deux charges q_A et q_B est nul :

On distingue dans ce cas 3 régions ou zone sont :

La zone (1) (le point C), et la zone (3) (on parle du point H) dans la figure 1.8.a, pour lesquels les composantes du champ totale créé par les deux charges q_A et q_B sur les deux axes (OX) et (OY) peuvent être nulles, et par conséquent le champ totale peut être nul.

La zone (2) (le point D), où la composante du champ totale sur l'axe (OX) est toujours positive, et par conséquent le champ totale est toujours différent de zéro.

On va étudier le champ créé par les deux charges au point H :

$$\vec{E}(H) = \vec{E}_A(H) + \vec{E}_B(H)$$

On fait la projection sur les deux axes du repère, on obtient :

$$E_x = E_A \cos \theta_1 - E_B \cos \theta_2, \quad E_y = E_A \sin \theta_1 - E_B \sin \theta_2$$

Le champ électrique totale est nul, donc : $E_x = 0$ et $E_y = 0$

On écrit :

$$E_A \cos \theta_1 = E_B \cos \theta_2 \quad (1)$$

$$E_A \sin \theta_1 = E_B \sin \theta_2 \quad (2)$$

On divise l'équation (2) par (1) on obtient :

$$\tan \theta_1 = \tan \theta_2, \text{ donc } \theta_1 = \theta_2$$

Selon la figure, le seul cas qui vérifie cette condition est $\theta_1 = \theta_2 = 0$

Par conséquent, le point pour lequel le champ électrique totale créé par les deux charges q_A et q_B est nul est aligné avec les deux points A et B (représenté dans la figure par le point M)

2. détermination de la position du point M :

On pose : $AB = d$, $BM = x$

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M)$$

On a une seule composante du champ totale sur l'axe (OX) , on fait la projection sur les deux axes, on obtient :

$$E_x = E_A - E_B = 0, \text{ donc } E_A = E_B$$

$$\left| \frac{Kq_A}{(d+x)^2} \right| = \left| \frac{Kq_B}{x^2} \right|, \text{ on écrit :}$$

$$|q_B|(d^2 + x^2 + 2dx) = q_A x^2, \text{ donc } x^2(|q_B| - q_A) + 2d|q_B|x + |q_B|d^2 = 0$$

$$-2 \cdot 10^{-8} x^2 + 20 \cdot 10^{-8} x + 20 \cdot 10^{-8} = 0, \text{ donc } -x^2 + 10x + 10 = 0$$

$$\Delta = 100 + 40 = 140 > 0, \text{ donc } \sqrt{\Delta} = \sqrt{140} = 11,832$$

$$x_1 = \frac{-10 - 11,832}{-2} = 10,916 \text{ m}, \quad x_2 = \frac{-10 + 11,832}{-2} = -0,916 \text{ m}$$

La première solution x_1 est acceptée, par contre la deuxième valeur négative x_2 est rejetée (parce-que le point x_2 se trouve dans la zone (2)).

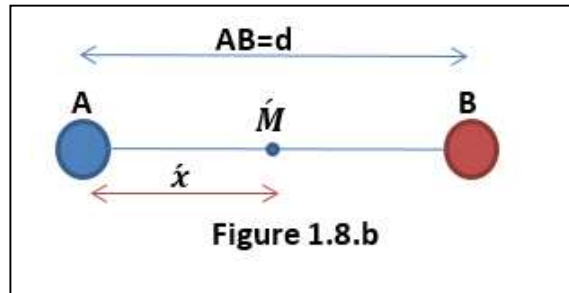
Donc la coordonnée du point M aligné avec les deux points A et B pour lequel le champ électrique totale est nul, est $x_1 = 10,916$

3. Détermination du point M qui correspond à un potentiel nul :

On a : $V(\hat{M}) = V_A(\hat{M}) + V_B(\hat{M}) = 0$

$$\frac{Kq_A}{A\hat{M}} + \frac{Kq_B}{B\hat{M}} = 0, \text{ donc } \frac{q_A}{A\hat{M}} = -\frac{q_B}{B\hat{M}} \quad (3)$$

Posons $A\hat{M} = \hat{x}$, $B\hat{M} = d - \hat{x}$ (Voir la Figure 1.8.b)



L'équation (3) donne :

$$q_A(d - \hat{x}) = -q_B\hat{x}, \text{ donc } \hat{x}(q_B - q_A) = -q_Ad$$

$$\hat{x} = \frac{-q_Ad}{(q_B - q_A)}$$

Application numérique :

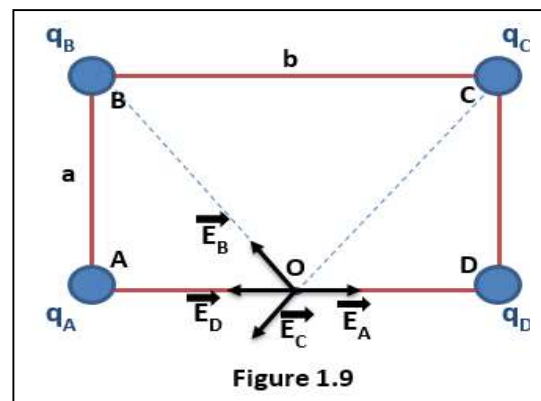
$$\hat{x} = \frac{-7 \cdot 10^{-8}(2)}{(-5 \cdot 10^{-8} - 7 \cdot 10^{-8})} = 1,166 \text{ m}$$

Exercice (9) :

Un rectangle $ABCD$ de côtés $a = 7 \text{ cm}$ et $b = 10 \text{ cm}$. Quatre charges ponctuelles q_A, q_B, q_C et q_D sont respectivement situées aux sommets A, B, C, D . (Voir Figure 1.9)

Au point O le milieu du segment AD calculer :

1. Le potentiel électrique $V(O)$ créé par ces quatre charges
2. Le champ électrique $\vec{E}(O)$ créé par ces quatre charges.
3. On pose une charge q au point O le centre de ce rectangle, calculer :
 - 3.1. L'énergie potentielle $E_p(O)$ de cette charge au point O .
 - 3.2. La force électrique $\vec{F}(O)$ qui exerce sur la charge q au point O .
 - 3.3. Le travail $W(\vec{F})$ de la force électrique nécessaire pour déplacer la charge q du point O à l'infini.
 - 3.4. Cette force est-elle motrice ou résistante.



On donne : $q_A = 3 \mu\text{C}$, $q_B = -5 \mu\text{C}$, $q_C = 5 \mu\text{C}$ et $q_D = 7 \mu\text{C}$, $q = 12 \mu\text{C}$

Solution de l'exercice (9) :

On a : $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{C}^{-2}$, $a = 7 \text{ cm}$ et $b = 10 \text{ cm}$, $q_A = 3 \mu\text{C}$, $q_B = -5 \mu\text{C}$, $q_C = 5 \mu\text{C}$,
 $q_D = 7 \mu\text{C}$, $q = 12 \mu\text{C}$

1. Calcul du potentiel $V(O)$ du point O :

$$V(O) = V_A(O) + V_B(O) + V_C(O) + V_D(O)$$

$$V_A(O) = \frac{Kq_A}{AO}, AO = DO = \frac{b}{2}$$

$$V_A(O) = \frac{2Kq_A}{b} = \frac{2(9 \cdot 10^9)3 \cdot 10^{-6}}{0,1} = 54 \cdot 10^4 \text{ V}$$

$$V_B(O) = \frac{Kq_B}{BO}, BO = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{2}} = \sqrt{0,07^2 + 0,1^2}$$

$$BO = CO = 12,206 \text{ cm}$$

$$V_B(O) = \frac{9 \cdot 10^9(-5 \cdot 10^{-6})}{12,206 \cdot 10^{-2}} = -36,867 \cdot 10^4 \text{ V}$$

$$V_C(O) = \frac{Kq_C}{CO} = \frac{9 \cdot 10^9(5 \cdot 10^{-6})}{12,206 \cdot 10^{-2}} = 36,867 \cdot 10^4 \text{ V}$$

$$V_D(O) = \frac{Kq_D}{DO} = \frac{2Kq_D}{b} = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9(7 \cdot 10^{-6})}{0,1} = 126 \cdot 10^4 \text{ V}$$

Par consequence, on a :

$$V(O) = 54 \cdot 10^4 - 36,867 \cdot 10^4 + 36,867 \cdot 10^4 + 126 \cdot 10^4$$

$$V(O) = 180 \cdot 10^4 \text{ V}$$

2. Calcul du champ électrique $\vec{E}(O)$ créé par les quatre charges au point O :

$$\vec{E}(O) = \vec{E}_A(O) + \vec{E}_B(O) + \vec{E}_C(O) + \vec{E}_D(O)$$

$$\vec{E}_A(O) = \frac{Kq_A}{AO^3} \vec{AO}, \text{ avec } \vec{AO} = \frac{b}{2} \vec{i} = 5 \cdot 10^{-2} \vec{i}, AO = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\vec{E}_A(O) = \frac{9 \cdot 10^9(3 \cdot 10^{-6})}{(5 \cdot 10^{-2})^3} [5 \cdot 10^{-2} \vec{i}]$$

$$\vec{E}_A(O) = 1,08 \cdot 10^7 \vec{i}$$

$$\vec{E}_B(O) = \frac{Kq_B}{BO^3} \vec{BO}, \text{ avec } \vec{BO} = \frac{b}{2} \vec{i} - a \vec{j} = 5 \cdot 10^{-2} \vec{i} - 7 \cdot 10^{-2} \vec{j}$$

$$BO = \sqrt{5^2 + 7^2} 10^{-2} = 8,6 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\vec{E}_B(O) = \frac{9 \cdot 10^9 (-5 \cdot 10^{-6})}{(8,6 \cdot 10^{-2})^3} [5 \cdot 10^{-2} \vec{i} - 7 \cdot 10^{-2} \vec{j}]$$

$$\vec{E}_B(O) = -0,353 \cdot 10^7 \vec{i} + 0,495 \cdot 10^7 \vec{j}$$

$$\vec{E}_C(O) = \frac{Kq_C}{CO^3} \vec{CO}, \text{ avec } \vec{CO} = -\frac{b}{2} \vec{i} - a \vec{j} = -5 \cdot 10^{-2} \vec{i} - 7 \cdot 10^{-2} \vec{j}$$

$$CO = \sqrt{5^2 + 7^2} 10^{-2} = 8,6 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\vec{E}_C(O) = \frac{9 \cdot 10^9 (5 \cdot 10^{-6})}{(8,6 \cdot 10^{-2})^3} [-5 \cdot 10^{-2} \vec{i} - 7 \cdot 10^{-2} \vec{j}]$$

$$\vec{E}_C(O) = -0,353 \cdot 10^7 \vec{i} - 0,495 \cdot 10^7 \vec{j}$$

$$\vec{E}_D(O) = \frac{Kq_D}{DO^3} \vec{DO}, \text{ avec } \vec{DO} = -\frac{b}{2} \vec{i} = -5 \cdot 10^{-2} \vec{i}, \text{ DO} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\vec{E}_D(O) = \frac{9 \cdot 10^9 (7 \cdot 10^{-6})}{(5 \cdot 10^{-2})^3} [-5 \cdot 10^{-2} \vec{i}]$$

$$\vec{E}_D(O) = -2,52 \cdot 10^7 \vec{i}$$

$$\vec{E}(O) = 1,08 \cdot 10^7 \vec{i} - 0,353 \cdot 10^7 \vec{i} + 0,495 \cdot 10^7 \vec{j} - 0,353 \cdot 10^7 \vec{i} - 0,495 \cdot 10^7 \vec{j} - 2,52 \cdot 10^7 \vec{i}$$

$$\vec{E}(O) = -2,146 \cdot 10^7 \vec{i}$$

$$E(O) = \|\vec{E}(O)\| = 2,146 \cdot 10^7 \text{ N/C}$$

3. On pose une charge $q = 12 \cdot 10^{-6} \text{ C}$, au point O :

3.1. Calcul de l'énergie potentielle $E_p(O)$ de la charge q au point O :

$$E_p(O) = q \cdot V(O)$$

Application numérique :

$$E_p(O) = 12 \cdot 10^{-6} (180 \cdot 10^4), \quad E_p(O) = 21,6 \text{ J}$$

3.2. Calcul de la force $\vec{F}(O)$ qui exerce sur la charge q au point O :

$$\vec{F}(O) = q \cdot \vec{E}(O)$$

$$\vec{F}(O) = 12 \cdot 10^{-6} \cdot (-2,146 \cdot 10^7 \vec{i})$$

$$\vec{F}(O) = -257,52 \vec{i} \text{ N}$$

$$F(O) = \|\vec{F}(O)\| = 257,52 \text{ N}$$

3.3. Calcul du travail $W(\vec{F})$ de la force électrique nécessaire pour déplacer la charge q du point O à l'infini :

$$W(\vec{F}) = -\Delta E_p = -(E_p(\infty) - E_p(O)) = qV(O)$$

$$W(\vec{F}) = 12 \cdot 10^{-6} (180 \cdot 10^4), \quad W(\vec{F}) = 21,6 \text{ J}$$

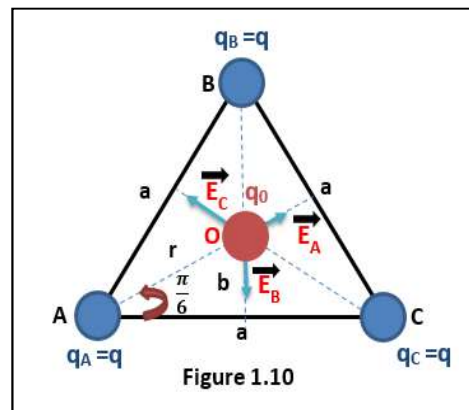
3.4. détermination de la nature de la force \vec{F} :

Le travail effectué par cette force lors du déplacement de la charge q du point O à l'infini est positif $W(\vec{F}) > 0$, donc cette force est motrice.

Exercice (10) :

Trois charges ponctuelles identiques $q_A = q_B = q_C = q$ sont situées aux sommets d'un triangle équilatéral ABC de côté $a = 10 \text{ cm}$. (Voir Figure 1.10)

1. Calculer le potentiel $V(O)$ créé par ces trois charges au centre du triangle O .
2. Calculer le champ électrique $\vec{E}(O)$ créé au point O .
3. Donner la valeur de la charge q_0 qu'on doit poser au centre du triangle pour avoir une résultante des forces nulle sur chacune des quatre charges q .



Solution de l'exercice (10) :

On a : $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{C}^{-2}$, $q_A = q_B = q_C = q = 1 \mu\text{C}$, $a = 10 \text{ cm}$.

1. Calcul du potentiel $V(O)$ créé par les trois charges au centre du triangle O :

$$V(O) = V_A(O) + V_B(O) + V_C(O)$$

$$V_A(O) = \frac{Kq_A}{AO}, \quad AO = BO = CO = r$$

On calcule la valeur de la distance r , on a :

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{a/2}{r} = \frac{a}{2r}, \quad \text{donc } r = \frac{a}{2(\cos \frac{\pi}{6})} = \frac{0,1}{2(0,866)} = 0,057 \text{ m}$$

$$AO = BO = CO = r = 0,057 \text{ m}$$

D'autre part, on a : $q_A = q_B = q_C = q$

On écrit : $V_A(O) = V_B(O) = V_C(O) = \frac{Kq}{r}$

$$V(O) = 3 \frac{Kq}{r}$$

Application numérique :

$$V(O) = 3 \frac{9 \cdot 10^9 (10^{-6})}{0,057} = 473,68 \cdot 10^3 \text{ V}$$

$$V_A(D) = \frac{2Kq_A}{b} = \frac{2(9 \cdot 10^9)3 \cdot 10^{-6}}{0,1} = 54 \cdot 10^4 \text{ V}$$

2. Calcul du champ électrique $\vec{E}(O)$ créé par les trois charges au point O :

$$\vec{E}(O) = \vec{E}_A(O) + \vec{E}_B(O) + \vec{E}_C(O)$$

$$\vec{E}_A(O) = \frac{Kq_A}{AO^3} \vec{AO}. \text{ À partir de la figure 1.10, on a :}$$

$$\vec{AO} = \frac{a}{2} \vec{i} + b \vec{j}, \text{ on calcule la distance } b :$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{b}{r}, \text{ donc } b = r \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 0,057(0,5) = 0,0285 \text{ m}$$

$$\vec{AO} = 0,05 \vec{i} + 0,0285 \vec{j}$$

$$\vec{E}_A(O) = \frac{9 \cdot 10^9 (10^{-6})}{(0,057)^3} [0,05 \vec{i} + 0,0285 \vec{j}]$$

$$\vec{E}_A(O) = 2,429 \cdot 10^6 \vec{i} + 1,385 \cdot 10^6 \vec{j} \text{ N/C}$$

$$\vec{E}_B(O) = \frac{Kq_B}{BO^3} \vec{BO}, \vec{BO} = -r \vec{j} = -0,057 \vec{j}, BO = 0,057 \text{ m}$$

$$\vec{E}_B(O) = \frac{9 \cdot 10^9 (10^{-6})}{(0,057)^3} [-0,057 \vec{j}] = -2,77 \cdot 10^6 \vec{j} \text{ N/C}$$

$$\vec{E}_C(O) = \frac{Kq_C}{CO^3} \vec{CO}, \vec{CO} = -\frac{a}{2} \vec{i} + b \vec{j} = -0,05 \vec{i} + 0,0285 \vec{j}, CO = 0,057 \text{ m}$$

$$\vec{E}_C(O) = \frac{9 \cdot 10^9 (10^{-6})}{(0,057)^3} [-0,05 \vec{i} + 0,0285 \vec{j}] = -2,429 \cdot 10^6 \vec{i} + 1,385 \cdot 10^6 \vec{j} \text{ N/C}$$

Par conséquent, on a :

$$\vec{E}(O) = 2,429 \cdot 10^6 \vec{i} + 1,385 \cdot 10^6 \vec{j} - 2,77 \cdot 10^6 \vec{j} - 2,429 \cdot 10^6 \vec{i} + 1,385 \cdot 10^6 \vec{j}$$

$$E(O) = 0 \text{ N/C}$$

3. Calcul de la valeur de la charge q_0 :

On pose une charge q_0 au centre du triangle O . La force qui exerce sur chacune des trois charges q_A , q_B et q_C doit être nulle.

On choisit l'étude de la charge q_C par exemple. La valeur de la force qui exerce sur cette charge est :

$\vec{F}(C) = q_C \cdot \vec{E}(C)$, on calcule le champ électrique $\vec{E}(C)$ au point C créé par les 3 autres charges q_A , q_B et q_0 .

On a, $q_A = q_B = q_C = q = 1\mu\text{C}$, donc la charge q_0 doit être négative.

$$\vec{E}(C) = \vec{E}_A(C) + \vec{E}_B(C) + \vec{E}_O(C)$$

$$\vec{E}_A(C) = \frac{Kq_A}{AC^3} \vec{AC}. \quad \vec{AC} = a\vec{i} = 0,1\vec{i}, \quad AC = a = 0,1 \text{ m}$$

$$\vec{E}_A(C) = \frac{9 \cdot 10^9 (10^{-6})}{(0,1)^3} [0,1\vec{i}] = 0,9 \cdot 10^6 \vec{i} \text{ N/C}$$

$$\vec{E}_B(C) = \frac{Kq_B}{BC^3} \vec{BC}. \quad \vec{BC} = \frac{a}{2}\vec{i} - (r+b)\vec{j} = 0,05\vec{i} - (0,057 + 0,0285)\vec{j}$$

$$\vec{BC} = 0,05\vec{i} - 0,0855\vec{j} \text{ N/C}, \quad BC = a = 0,1 \text{ m}$$

$$\vec{E}_B(C) = \frac{9 \cdot 10^9 (10^{-6})}{(0,1)^3} [0,05\vec{i} - 0,0855\vec{j}] = 0,45 \cdot 10^6 \vec{i} - 0,769 \cdot 10^6 \vec{j} \text{ N/C}$$

$$\vec{E}_O(C) = \frac{Kq_0}{OC^3} \vec{OC}. \quad \vec{OC} = \frac{a}{2}\vec{i} - b\vec{j} = 0,05\vec{i} - 0,0285\vec{j}$$

$$\vec{E}_O(C) = \frac{9 \cdot 10^9 q_0}{(0,057)^3} [0,05\vec{i} - 0,0285\vec{j}] = 2,429 \cdot 10^{12} q_0 \vec{i} - 1,385 \cdot 10^{12} q_0 \vec{j} \text{ N/C}$$

On écrit :

$$\vec{E}(C) = 0,9 \cdot 10^6 \vec{i} + 0,45 \cdot 10^6 \vec{i} - 0,769 \cdot 10^6 \vec{j} + 2,429 \cdot 10^{12} q_0 \vec{i} - 1,385 \cdot 10^{12} q_0 \vec{j}$$

$$\vec{E}(C) = (1,35 \cdot 10^6 + 2,429 \cdot 10^{12} q_0) \vec{i} - (0,769 \cdot 10^6 + 1,385 \cdot 10^{12} q_0) \vec{j}$$

L'expression de la force $\vec{F}(C)$ au point C est :

$$\vec{F}(C) = q \cdot \vec{E}(C) = 10^{-6} [(1,35 \cdot 10^6 + 2,429 \cdot 10^{12} q_0) \vec{i} - (0,769 \cdot 10^6 + 1,385 \cdot 10^{12} q_0) \vec{j}]$$

$$\vec{F}(C) = (1,35 + 2,429 \cdot 10^6 q_0) \vec{i} - (0,769 + 1,385 \cdot 10^6 q_0) \vec{j}$$

$$\vec{F}(C) = \vec{0}, \text{ implique } \begin{cases} 1,35 + 2,429 \cdot 10^6 q_0 = 0 \\ 0,769 + 1,385 \cdot 10^6 q_0 = 0 \end{cases}$$

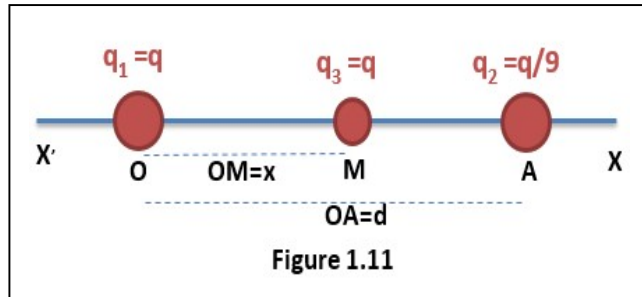
Application numérique :

$$q_0 = \frac{-1,35}{2,429 \cdot 10^6} = -0,555 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

Exercice (11) :

Deux charges ponctuelles $q_1 = q$ et $q_2 = \frac{q}{9}$ sont fixées au points O et A respectivement, distants d'une distance $OA = d = 4 \text{ cm}$. Une troisième charge $q_3 = q$ peut déplacer entre les deux points O et A sur l'axe (xOx) . (Figure 1.11).

1. Ecrire l'expression de la force électrique $\vec{F}(M)$ appliquée sur la charge q_3
2. Donner la position d'équilibre de la charge q_3



Solution de l'exercice (11) :

On a : $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{C}^{-2}$, $q_1 = q$, $q_2 = \frac{q}{9}$, $q_3 = q$, $OA = d = 4 \text{ cm}$.

Les deux charges q_1 et q_2 sont fixées au deux points O et A respectivement.

1. Expression de la force $\vec{F}(M)$ appliquée sur la charge q_3 au point M :

$$\vec{F}(M) = q_3 \cdot \vec{E}(M) = q \cdot \vec{E}(M)$$

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_O(M) + \vec{E}_A(M)$$

$$\vec{E}_O(M) = \frac{Kq_1}{OM^3} \vec{OM} = \frac{Kq}{OM^3} (OM\vec{i})$$

$$\text{On pose : } \begin{cases} OM = x \\ \vec{OM} = x\vec{i} \end{cases} \quad (\text{Voir figure 1.11})$$

$$\vec{E}_O(M) = \frac{Kq}{x^3} x\vec{i} = \frac{Kq}{x^2} \vec{i}$$

$$\text{D'autre part : } \vec{E}_A(M) = \frac{Kq_2}{AM^3} \vec{AM}, \quad q_2 = \frac{q}{9}$$

$$\text{D'après la figure 1.11, on a : } \begin{cases} AM = d - x \\ \vec{AM} = -(d - x)\vec{i} \end{cases}$$

$$\vec{E}_A(M) = \frac{Kq}{9(d-x)^3} (-(d-x)\vec{i}) = -\frac{Kq}{9(d-x)^2} \vec{i}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{Kq}{x^2} \vec{i} - \frac{Kq}{9(d-x)^2} \vec{i} = Kq \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{9(d-x)^2} \right] \vec{i}$$

La force électrique $\vec{F}(M)$ a l'expression suivante :

$$\vec{F}(M) = Kq^2 \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{9(d-x)^2} \right] \vec{i} \text{ N}$$

2. Détermination de la position d'équilibre de la charge q_3 :

La charge ponctuelle q_3 est en équilibre, cela implique que $\vec{F}(M) = \vec{0}$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{9(d-x)^2} = 0$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{9(d-x)^2}, \text{ donc } x^2 - 9(d-x)^2 = 0$$

$$-8x^2 + 18dx - 9d^2 = 0, \text{ on a : } d = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

On obtient :

$$8x^2 - 0,72x + 0,0144 = 0$$

$$\Delta = 0,72^2 - 4 \cdot (0,0144) = 0,4608 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{0,4608} = 0,6788$$

$$x_1 = \frac{0,72 - 0,6788}{16} = 25 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$x_2 = \frac{0,72 + 0,6788}{16} = 87 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

La première position d'équilibre x_1 se trouve sur le segment $OA = 4 \text{ cm}$ entre les deux points O et A , est acceptée, par contre la deuxième position d'équilibre x_2 est rejetée.

Exercice (12) :

Calculer la charge totale q contenue dans les distributions continuées suivantes :

1. un fil rectiligne de longueur l limité entre $-2 \leq x \leq 3 \text{ m}$, avec une distribution continué linéique des charge de densité $\lambda = 5 \cdot 10^{-2} \mu\text{C}/\text{m}$

2. une partie d'un fil de forme circulaire de rayon $R = 15 \text{ cm}$, chargée avec une densité linéique de charge $\lambda = 7 \cdot 10^{-6} \text{ C}/\text{m}$, où $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \text{ Rad}$

3. Un demi disque délimité par : $\begin{cases} 0 \leq r \leq 3 \text{ m} \\ 0 \leq \theta \leq \pi \text{ Rad} \end{cases}$

Chargé avec une distribution surfacique de charge de densité $\delta = 4,5 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$

4. un rectangle chargé avec une distribution surfacique de charge de densité surfacique

$$\delta = -3 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2, \text{ délimité par : } \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \text{ m} \\ 0 \leq y \leq 2 \text{ m} \end{cases}$$

5. un demi sphère creux de rayon $R = 12 \text{ cm}$ chargé avec une distribution surfacique de

charge de densité surfacique $\delta = -5 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$, délimité par : $\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \text{ Rad} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ Rad} \end{cases}$

6. un quart d'une sphère pleine chargé avec une distribution volumique de charge de densité

$$\rho = 8 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^3, \text{ délimité par : } \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \text{ Rad} \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \text{ Rad} \\ 0 \leq r \leq 1 \text{ m} \end{cases}$$

Solution de l'exercice (12) :

Calcul de la charge totale q contenue dans les distributions continuées suivantes :

1. un fil rectiligne de longueur l limité entre $-2 \leq x \leq 3 \text{ m}$, avec une distribution continué linéique des charge de densité $\lambda = 5 \cdot 10^{-2} \mu\text{C/m}$

$$\text{On a : } \lambda = \frac{q}{l} = \frac{dq}{dl}, \quad dq = \lambda \cdot dl, \quad \begin{cases} dl = dx \\ -2 \leq x \leq 3 \text{ m} \end{cases}$$

$$dq = \lambda \cdot dx, \text{ donne } q = \lambda \cdot \int_{-2}^3 dx = \lambda \cdot [3 + 2] = 5\lambda$$

Application numérique :

$$q = 5(5 \cdot 10^{-2} 10^{-6}) = 25 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

2. une partie d'un fil de forme circulaire de rayon $R = 15 \text{ cm}$, chargée avec une densité linéique de charge $\lambda = 7 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}$, où $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \text{ Rad}$

$$\text{On a : } \lambda = \frac{q}{l} = \frac{dq}{dl}, \quad dq = \lambda \cdot dl, \quad \begin{cases} dl = R d\theta \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \text{ Rad} \end{cases}$$

$$dq = \lambda R d\theta, \quad q = \lambda R \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta = \lambda R \left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Application numérique :

$$q = 7 \cdot 10^{-6} \cdot 0,15 \cdot \left(\frac{3,14}{6}\right) = 0,549 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

3. Un demi disque délimité par : $\begin{cases} 0 \leq r \leq 3 \text{ m} \\ 0 \leq \theta \leq \pi \text{ Rad} \end{cases}$

La densité surfacique est $\delta = 4,5 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$

On a : $\delta = \frac{q}{S} = \frac{dq}{dS}$, $dq = \delta \cdot dS$, $dS = r dr d\theta$

$$dq = \delta \cdot r dr d\theta \text{ , donc } q = \delta \cdot \int_0^3 r dr \int_0^\pi d\theta = \pi \delta \left(\frac{9}{2} \right) = \frac{9}{2} \pi \delta$$

Application numérique :

$$q = \frac{9}{2} (3,14) 4,5 \cdot 10^{-6} = 63,58 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

4. un rectangle chargé avec une distribution surfacique de charge de densité surfacique

$$\delta = -3 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2, \text{ délimité par : } \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \text{ m} \\ 0 \leq y \leq 2 \text{ m} \end{cases}$$

On a : $\delta = \frac{q}{S} = \frac{dq}{dS}$, $dq = \delta \cdot dS$, $dS = dx dy$

$$dq = \delta \cdot dx dy \text{ , } q = \delta \cdot \int_0^3 dx \int_0^2 dy = 6\delta$$

Application numérique :

$$q = 6(-3 \cdot 10^{-6}) = -18 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

5. un demi sphère creux de rayon $R = 12 \text{ cm}$ chargé avec une distribution surfacique de

$$\text{charge de densité surfacique } \delta = -5 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2, \text{ délimité par : } \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \text{ Rad} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ Rad} \end{cases}$$

On a : $\delta = \frac{q}{S} = \frac{dq}{dS}$, $dq = \delta \cdot dS$, $dS = R^2 d\varphi \cdot \sin\theta d\theta$

$$dq = \delta \cdot R^2 d\varphi \cdot \sin\theta d\theta \text{ , } q = \delta \cdot R^2 \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta$$

$$q = -\delta \cdot R^2 \cdot 2\pi \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = 2\pi \delta \cdot R^2$$

Application numérique :

$$q = 2(3,14)(-5 \cdot 10^{-6}) \cdot 0,12^2 = -0,45 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

6. un quart d'une sphère pleine chargé avec une distribution volumique de charge de densité

$$\rho = 8 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^3, \text{ délimité par : } \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \text{ Rad} \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \text{ Rad} \\ 0 \leq r \leq 1 \text{ m} \end{cases}$$

On a :

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{dq}{dV} \text{ , } dq = \rho \cdot dV \text{ , } dV = r^2 dr \cdot \sin\theta d\theta d\varphi$$

$dq = \rho \cdot r^2 dr \cdot \sin\theta d\theta d\varphi$, donc :

$$q = \rho \int_0^1 r^2 dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^\pi d\varphi , q = \rho \left(\frac{1}{3}\right) \left(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0\right) \pi = \pi \frac{\rho}{3}$$

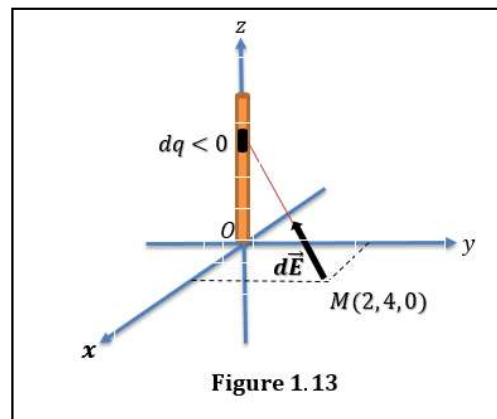
Application numérique :

$$q = 3,14 \frac{8 \cdot 10^{-6}}{3} = 8,37 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

Exercice (13) :

Un fil rectiligne vertical de longueur $l = 40 \text{ cm}$, porte une densité linéique de charge $\lambda = -5 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}$ (Voir Figure 1.13)

1. Calculer la charge totale q du fil.
2. Calculer le champ électrique $\vec{E}(M)$ créé par cette distribution linéique de charge au point $M(2, 4, 0)$ du plan (Oxy)
3. Calculer le potentiel $V(M)$ créé par cette distribution linéique de charge au point M .
4. On place une charge ponctuelle $q_M = 20 \mu\text{C}$ au point M :
 - 4.1. Calculer l'énergie potentielle $E_p(M)$ de cette charge ponctuelle.
 - 4.2. Calculer la force $\vec{F}(M)$ qui exerce sur cette charge ponctuelle.



5. On déplace la charge q_M du point $M(2, 4, 0)$ au point $C(5, -3, 0)$, calculer dans ce cas la variation de sa énergie potentielle.

On donne : $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{C}^{-2}$

Solution de l'exercice (13) :

On a : $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{C}^{-2}$, $l = 40 \text{ cm}$, $\lambda = -5 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}$, $M(2, 4, 0)$, $q_M = 20 \mu\text{C}$, $C(5, -3, 0)$

1. Calcul de la charge totale q du fil :

On a : $\lambda = \frac{q}{l}$, $q = \lambda l$

Application numérique :

$$q = -5 \cdot 10^{-6}(0,4) = -2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

2. Calcul du champ électrique $\vec{E}(M)$ créé au point $M(2, 4, 0)$:

On prend une charge élémentaire dq situé au point $A(0, 0, z)$, qui crée un champ élémentaire $d\vec{E}(M)$ au point M :

$$d\vec{E}(M) = \frac{Kdq}{AM^3} \overrightarrow{AM}$$

On a une distribution linéique de charge de densité λ , on écrit :

$$\lambda = \frac{q}{l} = \frac{dq}{dl}, \quad dq = \lambda \cdot dl, \quad dl = dz, \quad \text{donc : } \begin{cases} dq = \lambda \cdot dz \\ z: 0 \rightarrow l \end{cases}$$

D'autre part, on écrit : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}$

$$\overrightarrow{AM} = -z\vec{k} + x\vec{i} + y\vec{j} = x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$$

$$AM = \|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

On obtient :

$$d\vec{E}(M) = \frac{K\lambda \cdot dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} (x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}) = dE_x\vec{i} + dE_y\vec{j} + dE_z\vec{k}$$

Posons $x^2 + y^2 = a^2$, on obtient :

$$dE_x = K\lambda x \frac{dz}{\sqrt{a^2 + z^2}^3} = K\lambda x \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}}, \quad dE_y = K\lambda y \frac{dz}{\sqrt{a^2 + z^2}^3} = K\lambda y \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$dE_z = -K\lambda z \frac{dz}{\sqrt{a^2 + z^2}^3} = -K\lambda \frac{z \cdot dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\text{On a : } \int \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{z}{a^2 \sqrt{a^2 + z^2}} + c$$

$$E_x = K\lambda x \int_0^l \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = K\lambda x \left(\frac{l}{a^2 \sqrt{a^2 + l^2}} \right) = \frac{K\lambda x l}{a^2 \sqrt{a^2 + l^2}}$$

$$E_y = K\lambda y \int_0^l \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = K\lambda y \left(\frac{l}{a^2 \sqrt{a^2 + l^2}} \right) = \frac{K\lambda y l}{a^2 \sqrt{a^2 + l^2}}$$

$$E_z = -K\lambda \int_0^l \frac{z \cdot dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{K\lambda}{2} \int_0^l \frac{2z \cdot dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = -K\lambda \left(\frac{-1}{\sqrt{a^2 + l^2}} + \frac{1}{a} \right)$$

Application numérique :

$$a^2 = x^2 + y^2 = 0,02^2 + 0,04^2 = 20 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$E_x = \frac{9 \cdot 10^9 (-5 \cdot 10^{-6}) \cdot 0,02(0,4)}{20 \cdot 10^{-4} \sqrt{20 \cdot 10^{-4} + 0,4^2}} = -4,472 \cdot 10^5 \text{ N/C}$$

$$E_y = \frac{9 \cdot 10^9 (-5 \cdot 10^{-6}) \cdot 0,04(0,4)}{20 \cdot 10^{-4} \sqrt{20 \cdot 10^{-4} + 0,4^2}} = -8,944 \cdot 10^5 \text{ N/C}$$

$$E_z = -9 \cdot 10^9 (-5 \cdot 10^{-6}) \left(\frac{-1}{\sqrt{20 \cdot 10^{-4} + 0,4^2}} + \frac{1}{20 \cdot 10^{-4}} \right) = 223,87 \cdot 10^5 \text{ N/C}$$

$$\vec{E}(M) = -4,472 \cdot 10^5 \vec{i} - 8,944 \cdot 10^5 \vec{j} + 223,87 \cdot 10^5 \vec{k} \text{ N/C}$$

$$E(M) = \|\vec{E}(M)\| = \sqrt{4,472^2 + 8,944^2 + 223,87^2} 10^5 = 224,09 \cdot 10^5 \text{ N/C}$$

3. Calcul du potentiel $V(M)$ créé au point M :

La charge élémentaire dq situé au point $A(0, 0, z)$ crée un potentiel élémentaire $dV(M)$ au point M , donné par :

$$dV(M) = \frac{Kdq}{AM}, \text{ avec : } \begin{cases} dq = \lambda \cdot dz \\ z: 0 \rightarrow l \\ AM = \|\vec{AM}\| = \sqrt{a^2 + z^2} \end{cases}$$

$$\text{Où : } a^2 = x^2 + y^2 = 0,02^2 + 0,04^2 = 20 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\text{On peut écrire : } dV(M) = \frac{K\lambda \cdot dz}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

$$\text{On utilise l'intégrale suivant : } \int \frac{dz}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \ln[z + \sqrt{a^2 + z^2}] + c$$

$$V(M) = K\lambda \int_0^l \frac{dz}{\sqrt{a^2 + z^2}} = K\lambda [\ln(l + \sqrt{a^2 + l^2}) - \ln(a)]$$

$$V(M) = K\lambda \cdot \ln \left[\frac{l + \sqrt{a^2 + l^2}}{a} \right]$$

Application numérique :

$$V(M) = 9 \cdot 10^9 (-5 \cdot 10^{-6}) \cdot \ln \left[\frac{0,4 + \sqrt{20 \cdot 10^{-4} + 0,4^2}}{0,0447} \right] = -1,299 \cdot 10^5 \text{ V}$$

4. On place une charge ponctuelle $q_M = 20\mu\text{C}$ au point M **4.1. Calcul de l'énergie potentielle $E_p(M)$ de la charge ponctuelle q_M :**

$$E_p(M) = q_M V(M)$$

Application numérique :

$$E_p(M) = 20 \cdot 10^{-6} (-1,299 \cdot 10^5) = -2,598 \text{ J}$$

4.2. Calcul de la force $\vec{F}(M)$ qui exerce sur la charge ponctuelle q_M :

$$\vec{F}(M) = q_M \vec{E}(M)$$

Application Numérique :

$$\vec{F}(M) = 20 \cdot 10^{-6} (-4,472 \cdot 10^5 \vec{i} - 8,944 \cdot 10^5 \vec{j} + 223,87 \cdot 10^5 \vec{k})$$

$$\vec{F}(M) = -8,944 \vec{i} - 17,888 \vec{j} + 447,74 \vec{k} \quad \text{N}$$

$$F(M) = \|\vec{F}(M)\| = \sqrt{8,944^2 + 17,888^2 + 447,74^2}$$

$$F(M) = 448,18 \text{ N}$$

5. Calcul de la variation de l'énergie potentielle de la charge q_M :

On déplace la charge q_M du point $M(2, 4, 0)$ au point $C(5, -3, 0)$. On calcul la variation de son énergie potentielle :

$$\Delta E_p = E_p(C) - E_p(M) = q_M \cdot V(C) - q_M \cdot V(M) = q_M \cdot (V(C) - V(M))$$

$$V(M) = -1,299 \cdot 10^5 \text{ V}$$

On doit calculer le potentiel $V(C)$ du point $C(5, -3, 0)$ selon la troisième question, on a :

$$dV(C) = \frac{kdq}{AC} = \frac{K\lambda \cdot dz}{\sqrt{b^2 + z^2}}$$

Où : $C(5, -3, 0)$, donc $b^2 = x^2 + y^2 = 0,05^2 + 0,03^2 = 34 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$

$$V(C) = K\lambda \cdot \ln \left[\frac{l + \sqrt{b^2 + l^2}}{b} \right]$$

Application numérique :

$$V(C) = 9 \cdot 10^9 (-5 \cdot 10^{-6}) \cdot \ln \left[\frac{0,4 + \sqrt{34 \cdot 10^{-4} + 0,4^2}}{0,0583} \right]$$

$$V(C) = -1,181 \cdot 10^5 \text{ V}$$

$$\Delta E_p = 20 \cdot 10^{-6} (-1,181 \cdot 10^5 + 1,299 \cdot 10^5)$$

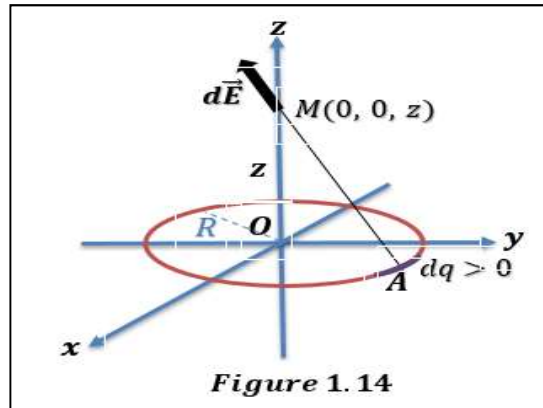
$$\Delta E_p = 0,236 \text{ J}$$

Exercice (14) :

Un fil de forme circulaire, situé dans le plan (O, x, y) de centre $O(0, 0, 0)$ et de rayon $R = 12 \text{ cm}$. (Voir Figure 1.14)

Le cercle est chargé avec une densité linéique $\lambda = 3 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}$.

2. Calculer la charge totale q du fil.
3. Calculer le champ électrique $E(M)$ créé en un point $M(0, 0, z)$ de l'axe (Oz) .
4. Calculer le potentiel $V(M)$ créé par cette distribution de charge au point $M(0, 0, z)$
5. Calculer le potentiel $V(M)$ à partir de l'expression du champ électrique $E(M)$



On prend : $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{C}^{-2}$, $z = 30 \text{ cm}$. $z = 30 \text{ cm}$

Solution de l'exercice (14) :

On a : $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{C}^{-2}$, $R = 12 \text{ cm}$, $\lambda = 3 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}$, $M(0, 0, z)$, $z = 30 \text{ cm}$

1. Calcul de la charge totale du fil circulaire :

On a une distribution linéique de charge, de densité λ , donc :

$$\lambda = \frac{q}{l} = \frac{dq}{dl}, \quad dq = \lambda dl, \quad \begin{cases} dl = R d\theta \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$dq = \lambda R d\theta, \quad \text{donc : } q = \lambda R \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \lambda R$$

Application numérique :

$$q = 2(3,14)3 \cdot 10^{-6} \cdot 0,12 = 2,26 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

2. Calcul du champ électrique $E(M)$ créé en un point $M(0, 0, z)$:

On prend une charge élémentaire dq situé au point $A(x, y, 0)$ du fil circulaire, qui génère un champ électrique élémentaire \vec{dE} au point $M(0, 0, z)$:

$$\vec{dE}(M) = \frac{K dq}{AM^3} \vec{AM}$$

On a une distribution linéique de charge de densité λ , on écrit :

$$\lambda = \frac{q}{l} = \frac{dq}{dl}, \quad dq = \lambda \cdot dl, \quad \begin{cases} dl = R d\theta \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$dq = \lambda R d\theta$$

D'autre part, on écrit : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}$

$$\overrightarrow{AO} = -x\vec{i} - y\vec{j}, \quad \overrightarrow{OM} = z\vec{k}$$

Par conséquence, on a : $\overrightarrow{AM} = -x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$

$$AM = \|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{R^2 + z^2}$$

On obtient :

$$d\vec{E}(M) = \frac{K\lambda R d\theta}{\sqrt{R^2 + z^2}^3} (-x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}) = dE_x\vec{i} + dE_y\vec{j} + dE_z\vec{k}$$

En utilisons les expressions des deux coordonnées (x, y) dans les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos\theta \\ y = R \cdot \sin\theta \end{cases}$$

On obtient :

$$dE_x = -\frac{K\lambda R^2}{\sqrt{R^2 + z^2}^3} \cos\theta d\theta, \quad dE_y = -\frac{K\lambda R^2}{\sqrt{R^2 + z^2}^3} \sin\theta d\theta, \quad dE_z = \frac{K\lambda R z}{\sqrt{R^2 + z^2}^3} d\theta$$

On calcule les trois composantes du champ électrique :

$$E_x = -\frac{K\lambda R^2}{\sqrt{R^2 + z^2}^3} \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta = 0$$

$$E_y = -\frac{K\lambda R^2}{\sqrt{R^2 + z^2}^3} \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = 0$$

$$dE_z = \frac{K\lambda R z}{\sqrt{R^2 + z^2}^3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi K\lambda R z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

On écrit :

$$\vec{E}(M) = \frac{2\pi K\lambda R z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k} \quad N/C$$

Application numérique : on prend $z = 30 \text{ cm}$

$$\vec{E}(M) = \frac{2(3,14)9 \cdot 10^9 (3 \cdot 10^{-6})0,12(0,3)}{((0,12)^2 + 0,3^2)^{3/2}} \vec{k} = 1,809 \cdot 10^5 \text{ N/C}$$

$$E(M) = \|\vec{E}(M)\| = 1,809 \cdot 10^5 \text{ N/C}$$

3. Calcul du potentiel $V(M)$ créé au point $M(0, 0, z)$:

De la même façon précédente dans la deuxième question, on prend une charge élémentaire dq situé au point $A(x, y, o)$ du fil circulaire, qui génère un potentiel électrique élémentaire $dV(M)$ au point $M(0, 0, z)$:

$$dV(M) = \frac{Kdq}{AM}, \quad dq = \lambda \cdot dl, \quad \begin{cases} dl = R d\theta \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$dq = \lambda R d\theta$$

$$AM = \|\vec{AM}\| = \sqrt{R^2 + z^2}$$

$$dV(M) = \frac{K\lambda R d\theta}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$V(M) = \frac{K\lambda R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi K\lambda R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

Application numérique :

$$V(M) = \frac{2(3,14)9 \cdot 10^9 (3 \cdot 10^{-6})0,12}{\sqrt{0,12^2 + 0,3^2}} = 62,973 \cdot 10^3 \text{ V}$$

4. Calcul du champ électrique $\vec{E}(M)$ à partir du potentiel $V(M)$:

$$\text{On a : } \vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\left(\frac{dV}{dx}\vec{i} + \frac{dV}{dy}\vec{j} + \frac{dV}{dz}\vec{k}\right) = E_z\vec{k}$$

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = 0, \quad E_y = -\frac{dV}{dy} = 0, \quad E_z = -\frac{dV}{dz}$$

On calcule la composante E_z du champ électrique :

$$E_z = -\frac{dV}{dz} = -\frac{d}{dz}\left(\frac{2\pi K\lambda R}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right) = -\left[\frac{-2\pi K\lambda R\left(\frac{2z}{2\sqrt{R^2 + z^2}}\right)}{\sqrt{R^2 + z^2}^2}\right] = \frac{2\pi K\lambda Rz}{\sqrt{R^2 + z^2}^3}$$

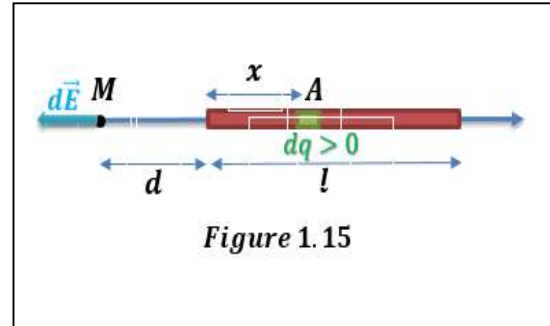
$$E_z = \frac{2\pi K\lambda Rz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{2\pi K\lambda Rz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k} \text{ N/C}$$

Exercice (15) :

Une tige très fine de longueur $l = 20 \text{ cm}$ porte une charge uniforme de densité linéique $\lambda = 2 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}$. (Voir Figure 1.15).

3. Calculer la charge totale q de la tige.
4. Calculer le champ électrique $E(M)$ créé en un point M situé sur l'axe du fil à une distance $d = 50 \text{ cm}$ de l'une de ces extrémités.
5. Calculer le potentiel $V(M)$ créé par cette distribution des charges au point M .
6. On place une charge $q_M = 5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ au point M :
 - 4.1. Calculer l'énergie potentielle $E_p(M)$ de la charge q_M au point M .
 - 4.2. Calculer la force $\vec{F}(M)$ qui exerce sur la charge q_M au point M .



On prend : $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{C}^{-2}$

Solution de l'exercice (15) :

On a : $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{C}^{-2}$, $l = 20 \text{ cm}$, $\lambda = 2 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}$, $d = 50 \text{ cm}$, $q_M = 5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$.

1. Calcul de la charge totale q de la tige :

On a une distribution linéique de charge, donc :

$$\lambda = \frac{q}{l} = \frac{dq}{dl}, \quad dq = \lambda \cdot dl, \quad \begin{cases} dl = dx \\ 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

$$q = \lambda \int_0^l dx = \lambda l$$

Application numérique :

$$q = 2 \cdot 10^{-6} (0,2) = 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

2. Calcul du champ électrique $E(M)$ créé en un point M situé sur l'axe du fil à une distance $d = 50 \text{ cm}$ de l'une de ces extrémités :

On prend une charge élémentaire $dq > 0$, située au point $A(x, 0)$ (voir figure 1.15), qui crée un champ électrique élémentaire $d\vec{E}(M)$, donné par l'expression suivante :

$$d\vec{E}(M) = \frac{Kdq}{AM^3} \overrightarrow{AM}$$

On a une distribution linéique de charge de densité λ , on écrit :

$$\lambda = \frac{q}{l} = \frac{dq}{dl}, \quad dq = \lambda \cdot dl, \quad \begin{cases} dl = dx \\ 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

$$dq = \lambda \cdot dx$$

$$\text{D'autre part, on a : } \overrightarrow{AM} = -(d+x)\vec{i}, \quad AM = d+x$$

Par conséquent on écrit :

$$d\vec{E}(M) = \frac{K\lambda \cdot dx}{(d+x)^3} [-(d+x)\vec{i}]$$

$$d\vec{E}(M) = \frac{-K\lambda \cdot dx}{(d+x)^2} \vec{i} = dE_x \vec{i}$$

$$E_x = \int_0^l dE_x = -K\lambda \int_0^l \frac{dx}{(d+x)^2} = K\lambda \left[\frac{1}{d+l} - \frac{1}{d} \right]$$

Application numérique :

$$E_x = 9 \cdot 10^9 (2 \cdot 10^{-6}) \left[\frac{1}{0,5+0,2} - \frac{1}{0,5} \right] = -10,286 \cdot 10^3 \text{ N/C}$$

$$\vec{E}(M) = -10,286 \cdot 10^3 \vec{i} \text{ N/C}$$

$$E(M) = \|\vec{E}(M)\| = 10,286 \cdot 10^3 \text{ N/C}$$

3. Calcul du potentiel $V(M)$ créé par la distribution des charges au point M :

La charge élémentaire $dq > 0$, située au point $A(x, 0)$ génère un potentiel électrique élémentaire $dV(M)$, donné par l'expression suivante :

$$dV(M) = \frac{Kdq}{AM}, \quad dq = \lambda \cdot dx, \quad \begin{cases} dl = dx \\ 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

$$dq = \lambda dx$$

$$AM = \|\overrightarrow{AM}\| = (d+x)$$

$$dV(M) = \frac{K\lambda dx}{(d+x)}$$

$$V(M) = K\lambda \int_0^l \frac{dx}{(d+x)} = K\lambda [\ln(d+l) - \ln(d)]$$

$$V(M) = K\lambda \cdot \ln\left(\frac{d+l}{d}\right)$$

Application numérique :

$$V(M) = 9 \cdot 10^9 (2 \cdot 10^{-6}) \cdot \ln\left(\frac{0,7}{0,5}\right) = 6,056 \cdot 10^3 \text{ V}$$

4. On place une charge $q_M = 5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ au point M :

4.1. Calcul de l'énergie potentielle $E_p(M)$ de la charge q_M au point M :

$$E_p(M) = q_M V(M)$$

Application numérique :

$$E_p(M) = 5 \cdot 10^{-6} (6,056 \cdot 10^3) = 30,28 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

4.2. Calcul de la force $\vec{F}(M)$ qui exerce sur la charge q_M au point M :

$$\vec{F}(M) = q_M \vec{E}(M)$$

Application Numérique :

$$\vec{F}(M) = 5 \cdot 10^{-6} (-10,286 \cdot 10^3 \vec{i})$$

$$\vec{F}(M) = -51,43 \cdot 10^{-3} \vec{i} \text{ N}$$

$$F(M) = \|\vec{F}(M)\| = 51,46 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

Exercice (16) :

Un arc de rayon $R = 10 \text{ cm}$ est chargé avec une densité linéique uniforme

$\lambda = 12 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}$. cet arc délimite un angle $2\theta_0$. (Voir Figure 1.16).

5. Calculer la charge totale q de l'arc.
6. Donner l'expression du champ électrique $\vec{E}(O)$ au centre de l'arc O .
7. Calculer la valeur du champ électrique $\vec{E}(O)$ dans les cas suivants :

$$\theta_0 = \pi/6 \text{ Rad}, \theta_0 = \pi/2 \text{ Rad}, \theta_0 = \pi \text{ Rad}$$

8. Calculer le potentiel $V(O)$ créé au point O pour : $\theta_0 = \pi/6 \text{ Rad}, \theta_0 = \pi/2 \text{ Rad}, \theta_0 = \pi \text{ Rad}$

9. On place une charge ponctuelle $q_0 = 15 \mu\text{C}$ au point O :

5.1. Calculer la force $\vec{F}(O)$ qui exerce sur cette charge.

5.2. Calculer l'énergie potentielle $E_p(O)$ de cette charge au point O .

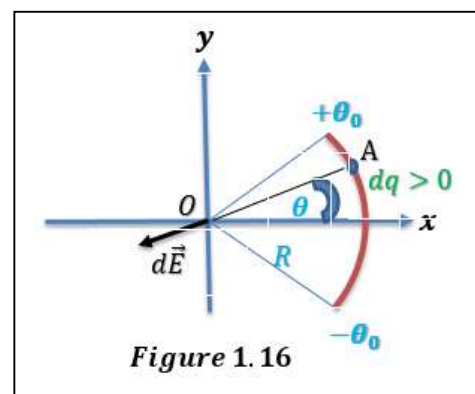


Figure 1.16

On prend : $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{C}^{-2}$

Solution de l'exercice (16) :

On a : $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{C}^{-2}$, $R = 10 \text{ cm}$, $\lambda = 12 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}$, $q_0 = 15 \mu\text{C}$

1. Calcul de la charge totale q de l'arc :

On a une distribution linéique de charge, donc :

$$\lambda = \frac{q}{l} = \frac{dq}{dl}, \quad dq = \lambda \cdot dl, \quad \begin{cases} dl = R d\theta \\ -\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 \end{cases} \quad (\text{Voir figure 2.4})$$

$$q = \lambda \int_{-\theta_0}^{\theta_0} R d\theta = 2\lambda R \theta_0$$

Application numérique :

$$\text{Premier cas : } \theta_0 = \pi/6 \text{ Rad}$$

$$q = 2 \cdot 12 \cdot 10^{-6} (0,1) (\pi/6) = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$\text{Deuxième cas : } \theta_0 = \pi/2 \text{ Rad}$$

$$q = 2 \cdot 12 \cdot 10^{-6} (0,1) (\pi/2) = 3,77 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$\text{Troisième cas : } \theta_0 = \pi \text{ Rad}$$

$$q = 2 \cdot 12 \cdot 10^{-6} (0,1) \pi = 7,53 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

2. l'expression du champ électrique $\vec{E}(O)$ au centre de l'arc O :

On prend une charge élémentaire $dq > 0$, située au point $A(x, y)$ (Voir figure 1.16), qui crée un champ électrique élémentaire $d\vec{E}(O)$, donné par l'expression suivante :

$$d\vec{E}(O) = \frac{K dq}{AO^3} \vec{AO}$$

On a une distribution linéique de charge de densité λ , on écrit :

$$\lambda = \frac{q}{l} = \frac{dq}{dl}, \quad dq = \lambda \cdot dl, \quad \begin{cases} dl = R d\theta \\ -\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 \end{cases}$$

$$dq = \lambda \cdot R d\theta$$

$$\text{D'autre part, on a : } \vec{AO} = -x\vec{i} - y\vec{j}, \quad \begin{cases} x = R \cos\theta \\ y = R \sin\theta \end{cases}$$

$$\vec{AO} = -R\cos\theta\vec{i} - R\sin\theta\vec{j} \quad , \quad AO = R$$

Par conséquent on écrit :

$$d\vec{E}(O) = \frac{K\lambda \cdot R d\theta}{R^3} [-R\cos\theta\vec{i} - R\sin\theta\vec{j}]$$

$$d\vec{E}(O) = \frac{-K\lambda}{R} [\cos\theta d\theta\vec{i} + \sin\theta d\theta\vec{j}] = dE_x\vec{i} + dE_y\vec{j}$$

$$\text{On obtient : } \begin{cases} dE_x = \frac{-K\lambda}{R} \cos\theta d\theta \\ dE_y = \frac{-K\lambda}{R} \sin\theta d\theta \end{cases}$$

$$E_x = \frac{-K\lambda}{R} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \cos\theta d\theta = \frac{-2K\lambda}{R} \sin\theta_0 \quad N/C$$

$$E_y = \frac{-K\lambda}{R} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \sin\theta d\theta = \frac{K\lambda}{R} [\cos\theta_0 - \cos(-\theta_0)] = 0 \quad N/C$$

$$\vec{E}(O) = \frac{-2K\lambda}{R} \sin\theta_0\vec{i} \quad N/C$$

3. Calcul de la valeur du champ électrique $\vec{E}(O)$ dans les cas suivants :

Premier cas : $\theta_0 = \pi/6$ Rad

$$\vec{E}(O) = \frac{-2.9 \cdot 10^9 \cdot 12 \cdot 10^{-6}}{0,1} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\vec{i} = -1080 \cdot 10^3\vec{i} \quad N/C$$

$$E(O) = 1080 \cdot 10^3 \quad N/C$$

Deuxième cas : $\theta_0 = \pi/2$ Rad

$$\vec{E}(O) = \frac{-2.9 \cdot 10^9 \cdot 12 \cdot 10^{-6}}{0,1} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\vec{i} = -2160 \cdot 10^3\vec{i} \quad N/C$$

$$E(O) = 2160 \cdot 10^3 \quad N/C$$

Troisième cas : $\theta_0 = \pi$ Rad

$$\vec{E}(O) = \frac{-2.9 \cdot 10^9 \cdot 12 \cdot 10^{-6}}{0,1} \sin(\pi)\vec{i} = \vec{0} \quad N/C$$

$$E(O) = 0 \quad N/C$$

4. Calcul du potentiel $V(O)$ créé au centre de l'arc O :

La charge élémentaire $dq > 0$, située au point $A(x, y)$, crée un potentiel électrique élémentaire $dV(O)$, donné par l'expression suivante :

$$dV(O) = \frac{Kdq}{AO}, \quad dq = \lambda \cdot dl, \quad \begin{cases} dl = R d\theta \\ -\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 \end{cases}$$

$$dq = \lambda \cdot R d\theta$$

D'autre part, on a : $AO = R$

$$dV(O) = \frac{K\lambda R d\theta}{R}$$

$$V(O) = K\lambda \int_{-\theta_0}^{\theta_0} d\theta = 2K\lambda\theta_0$$

Application numérique :

Premier cas : $\theta_0 = \pi/6 \text{ Rad}$

$$V(O) = 2.9 \cdot 10^9 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \left(3,14/6\right) = 113,04 \cdot 10^3 \text{ V}$$

Deuxième cas : $\theta_0 = \pi/2 \text{ Rad}$

$$V(O) = 2.9 \cdot 10^9 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \left(3,14/2\right) = 339,12 \cdot 10^3 \text{ V}$$

Troisième cas : $\theta_0 = \pi \text{ Rad}$

$$V(O) = 2.9 \cdot 10^9 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 3,14 = 678,24 \cdot 10^3 \text{ V}$$

5. On place une charge ponctuelle $q_0 = 15 \mu\text{C}$ au point O :

5.1. Calcul de la force $\vec{F}(O)$ qui exerce sur la charge q_0 :

$$\vec{F}(O) = q_0 \vec{E}(O)$$

$$\vec{F}(O) = \frac{-2K\lambda q_0}{R} \sin\theta_0 \vec{i} \quad \text{N}$$

Application numérique :

Premier cas : $\theta_0 = \pi/6 \text{ Rad}$

$$\vec{F}(O) = -1080 \cdot 10^3 \vec{i} \left(15 \cdot 10^{-6}\right) = -16,2 \vec{i} \text{ N}$$

$$F(O) = 16,2 \text{ N}$$

Deuxième cas : $\theta_0 = \pi/2 \text{ Rad}$

$$\vec{F}(O) = -2160 \cdot 10^3 \vec{i} (15 \cdot 10^{-6}) = -32,4 \vec{i} \text{ N}$$

$$F(O) = 32,4 \text{ N}$$

Troisième cas : $\theta_0 = \pi \text{ Rad}$

$$\vec{F}(O) = 0 \vec{i} (15 \cdot 10^{-6}) = \vec{0} \text{ N}$$

$$F(O) = 0 \text{ N}$$

5.2. Calcul de l'énergie potentielle $E_p(O)$ de la charge q_0 au point O :

$$E_p(O) = q_0 V(O)$$

Application numérique :

Premier cas : $\theta_0 = \pi/6 \text{ Rad}$

$$E_p(O) = 15 \cdot 10^{-6} (113,04 \cdot 10^3) = 1,695 \text{ J}$$

Deuxième cas : $\theta_0 = \pi/2 \text{ Rad}$

$$E_p(O) = 15 \cdot 10^{-6} (339,12 \cdot 10^3) = 5,086 \text{ J}$$

Troisième cas : $\theta_0 = \pi \text{ Rad}$

$$E_p(O) = 15 \cdot 10^{-6} (678,24 \cdot 10^3) = 10,173$$

Exercice (17) :

Un disque plein de centre $O(0, 0, 0)$ et de rayon $R = 12 \text{ cm}$, se trouve dans le plan (O, x, y) , porte une densité surfacique de charge $\sigma = 20 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$ (Voir Figure 1.17).

4. Calculer la charge totale q contenue dans le disque.
5. Calculer Le champ électrique $\vec{E}(M)$ créé par cette distribution de charge au point $M(0, 0, z)$.
6. Calculer le potentiel électrique $V(M)$ créé au point $M(0, 0, z)$.
7. On pose une charge ponctuelle $q_0 = 20 \mu\text{C}$ au point M :
 - 7.1. Calculer la force électrique $\vec{F}(M)$ qui exerce sur cette charge au point M .
 - 7.2. Calculer l'énergie potentielle $E_p(M)$ de la charge q_0 au point M .

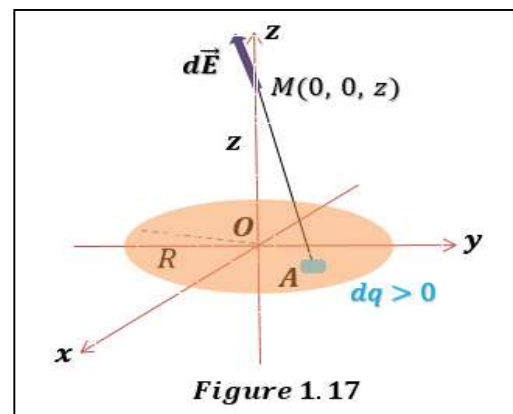


Figure 1.17

On donne : $z = 50 \text{ cm}$, $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{C}^{-2}$

Solution de l'exercice (17) :

On a : $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{C}^{-2}$, $R = 12 \text{ cm}$, $\sigma = 20 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$, $M(0, 0, z)$, $z = 50 \text{ cm}$, $q_0 = 20 \mu\text{C}$

1. Calcul de la charge totale du disque :

On a une distribution surfacique de charge, donc :

$$\delta = \frac{q}{s} = \frac{dq}{ds}, \quad dq = \delta \cdot ds, \quad \begin{cases} ds = r dr d\theta \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq R \end{cases}$$

$$dq = \delta \cdot r dr d\theta, \quad q = \delta \cdot \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta = \delta \left(\frac{R^2}{2}\right) 2\pi = \delta \pi R^2 \quad \text{C}$$

Application numérique :

$$q = 20 \cdot 10^{-6} (3,14) 0,12^2 = 0,904 \cdot 10^{-6} \quad \text{C}$$

2. Calcul du champ électrique $\vec{E}(M)$ créé au point $M(0, 0, z)$:

Une charge élémentaire $dq > 0$, située au point $A(x, y)$ (Voir figure 1.17), génère un champ électrique élémentaire $d\vec{E}(M)$, donné par l'expression suivante :

$$d\vec{E}(M) = \frac{K dq}{AM^3} \overrightarrow{AM}$$

$$\delta = \frac{q}{s} = \frac{dq}{ds}, \quad dq = \delta \cdot ds, \quad \begin{cases} ds = r dr d\theta \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq R \end{cases}, \quad dq = \delta \cdot r dr d\theta$$

Dans les coordonnées polaires on a : $\begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \end{cases}$

D'autre part, on écrit : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}$

$$\overrightarrow{AO} = -x\vec{i} - y\vec{j}, \quad \overrightarrow{OM} = z\vec{k}$$

Par conséquent, on a : $\overrightarrow{AM} = -x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$

$$\overrightarrow{AM} = -r \cos\theta \vec{i} - r \sin\theta \vec{j} + z\vec{k}$$

$$AM = \|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{r^2 + z^2}$$

On obtient :

$$d\vec{E}(M) = \frac{K\delta \cdot r dr d\theta}{\sqrt{r^2 + z^2}^3} (-r\cos\theta\vec{i} - r\sin\theta\vec{j} + z\vec{k}) = dE_x\vec{i} + dE_y\vec{j} + dE_z\vec{k}$$

Par conséquence on a :

$$dE_x = \frac{-K\delta \cdot r^2 dr \cdot \cos\theta d\theta}{\sqrt{r^2 + z^2}^3} = \frac{-K\delta \cdot r^2 dr \cdot \cos\theta d\theta}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$dE_y = \frac{-K\delta \cdot r^2 dr \cdot \sin\theta d\theta}{\sqrt{r^2 + z^2}^3} = \frac{-K\delta \cdot r^2 dr \cdot \sin\theta d\theta}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$dE_z = \frac{K\delta z \cdot r dr d\theta}{\sqrt{r^2 + z^2}^3} = \frac{K\delta z \cdot r dr d\theta}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

On calcule les composantes du champ électrique par intégration, on obtient :

$$E_x = -K\delta \int_0^R \frac{r^2 dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta = 0 \text{ N/C}$$

$$E_y = -K\delta \int_0^R \frac{r^2 dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = 0 \text{ N/C}$$

$$E_z = K\delta z \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi K\delta z \int_0^R \frac{2r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$E_z = 2\pi K\delta z \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \text{ N/C}$$

Application numérique :

$$E_z = 2(3,14)9 \cdot 10^9 (20 \cdot 10^{-6})0,5 \left[\frac{1}{0,5} - \frac{1}{\sqrt{0,12^2 + 0,5^2}} \right] = 31,21 \cdot 10^3 \text{ N/C}$$

$$\vec{E}(M) = 31,21 \cdot 10^3 \vec{k} \text{ N/C}$$

3. Calcul du potentiel $V(M)$ créé au point $M(0, 0, z)$:

L'expression du potentiel élémentaire $dV(M)$ créé par la charge élémentaire $dq > 0$, située au point $A(x, y)$ au point M est : $dV(M) = \frac{Kdq}{AM}$

$$dq = \delta \cdot ds, \quad \begin{cases} ds = r dr d\theta \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq R \end{cases}, \quad dq = \delta \cdot r dr d\theta$$

$$AM = \|\vec{AM}\| = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$dV(M) = \frac{K\delta \cdot r dr d\theta}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

On écrit :

$$V(M) = K\delta \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$V(M) = 2\pi K\delta \left[\sqrt{R^2 + z^2} - z \right] \quad V$$

Application numérique :

$$V(M) = 2.3,14(9 \cdot 10^9)20 \cdot 10^{-6} \left[\sqrt{0,12^2 + 0,5^2} - 0,5 \right] = 16,05 \cdot 10^3 \quad V$$

4. On pose une charge ponctuelle q_0 au point M :

4.1. Calcul de la force électrique $\vec{F}(M)$ qui exerce sur cette charge au point M :

L'expression de la force électrique qui exerce sur la charge ponctuelle q_0 est :

$$\vec{F}(M) = q_0 \vec{E}(M)$$

Application numérique :

$$\vec{F}(M) = 20 \cdot 10^{-6} (31,21 \cdot 10^3 \vec{k}) = 642,2 \cdot 10^{-3} \vec{k} \quad N$$

$$F(M) = \|\vec{F}(M)\| = 642,2 \cdot 10^{-3} \quad N$$

4.2. Calcul de l'énergie potentielle $E_p(M)$ de la charge q_0 au point M :

$$E_p(M) = q_0 V(M)$$

Application numérique :

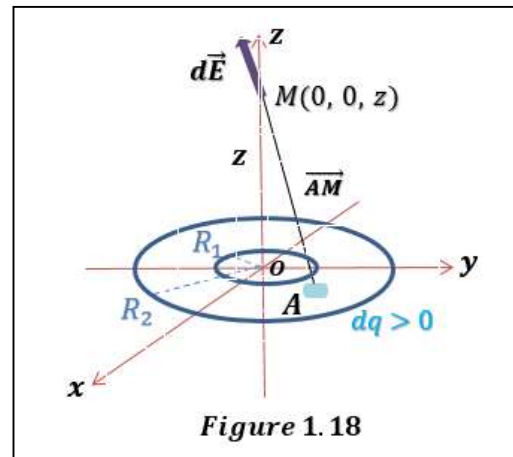
$$E_p(M) = 20 \cdot 10^{-6} (16,05 \cdot 10^3) = 0,321 \quad J$$

Exercice (18) :

Un disque creux de rayon interne $R_1 = 8 \text{ cm}$, et de rayon externe $R_2 = 12 \text{ cm}$, porte une distribution surfacique de charge irrégulière

$$\sigma = 1/r \quad \left(\frac{\text{C}}{\text{m}^2}\right) \text{ avec } r: R_1 \rightarrow R_2 \text{ (Figure 1.18)}$$

4. Calculer la charge totale q du disque creux.
5. Calculer le champ électrique $\vec{E}(M)$ généré par cette distribution de charge au point $M(0, 0, z)$.
6. Calculer le potentiel $V(M)$ du point M .
7. On pose une charge ponctuelle $q_0 = -10 \text{ nC}$ au point M :
 - 7.1. Calculer la force électrique $\vec{F}(M)$ qui exerce sur cette charge.
 - 7.2. Calculer l'énergie potentielle $E_p(M)$ de cette charge.



On donne : $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{C}^{-2}$, $z = 30 \text{ cm}$, $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \text{ cm}$

Solution de l'exercice (18) :

On a : $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{C}^{-2}$, $R_1 = 8 \text{ cm}$, $R_2 = 12 \text{ cm}$, $\sigma = 1/r \quad \left(\frac{\text{C}}{\text{m}^2}\right)$, $M(0, 0, z)$

$q_0 = -10 \text{ nC}$, $z = 30 \text{ cm}$, $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \text{ cm}$

1. Calcul de la charge totale q du disque creux :

On a une distribution surfacique de charges, donc :

$$\delta = \frac{q}{s} = \frac{dq}{ds}, \quad dq = 1/r \cdot ds, \quad \begin{cases} ds = r dr d\theta \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases}, \quad \sigma = 1/r \quad \left(\frac{\text{C}}{\text{m}^2}\right)$$

$$dq = 1/r \cdot r dr d\theta = dr d\theta, \quad q = \int_{R_1}^{R_2} dr \int_0^{2\pi} d\theta = (R_2 - R_1) 2\pi \text{ C}$$

Application numérique :

$$q = 2(3,14)(0,12 - 0,08) = 0,251 \text{ C}$$

2. Calcul du champ électrique $\vec{E}(M)$ généré au point $M(0, 0, z)$:

On prend une charge élémentaire $dq > 0$, située au point $A(x, y, 0)$ (Voir figure 1.18), qui génère un champ électrique élémentaire $d\vec{E}(M)$, donné par l'expression suivante :

$$d\vec{E}(M) = \frac{Kdq}{AM^3} \vec{AM}$$

$$\delta = \frac{q}{s} = \frac{dq}{ds}, \quad dq = \delta \cdot ds, \quad \begin{cases} ds = r dr d\theta \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases}, \quad \sigma = 1/r, \text{ donc :}$$

$$dq = dr d\theta$$

Dans les coordonnées polaires on a : $\begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \end{cases}$

D'autre part, on écrit : $\vec{AM} = \vec{AO} + \vec{OM}$

$$\vec{AO} = -x\vec{i} - y\vec{j}, \quad \vec{OM} = z\vec{k}$$

Par conséquent, on a : $\vec{AM} = -x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$

$$\vec{AM} = -r \cos\theta \vec{i} - r \sin\theta \vec{j} + z\vec{k}$$

$$AM = \|\vec{AM}\| = \sqrt{r^2 + z^2}$$

On obtient :

$$d\vec{E}(M) = \frac{K r dr d\theta}{\sqrt{r^2 + z^2}^3} (-r \cos\theta \vec{i} - r \sin\theta \vec{j} + z\vec{k}) = dE_x \vec{i} + dE_y \vec{j} + dE_z \vec{k}$$

Par conséquent on a :

$$dE_x = \frac{-K r dr \cdot \cos\theta d\theta}{\sqrt{r^2 + z^2}^3} = \frac{-K r dr \cdot \cos\theta d\theta}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$dE_y = \frac{-K r dr \cdot \sin\theta d\theta}{\sqrt{r^2 + z^2}^3} = \frac{-K r dr \cdot \sin\theta d\theta}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$dE_z = \frac{K z dr d\theta}{\sqrt{r^2 + z^2}^3} = \frac{K z dr d\theta}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

On calcule les composantes du champ électrique par intégration, on obtient :

$$E_x = -K \int_{R_1}^{R_2} \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta = 0 \quad N/C$$

$$E_y = -K \int_{R_1}^{R_2} \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = 0 \quad N/C$$

$$E_z = Kz \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi Kz}{z^2} \left[\frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + z^2}} - \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + z^2}} \right]$$

$$E_z = \frac{2\pi K}{z} \left[\frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + z^2}} - \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + z^2}} \right]$$

Application numérique :

$$E_z = \frac{2,3,14(9 \cdot 10^9)}{0,3} \left[\frac{0,12}{\sqrt{0,12^2 + 0,3^2}} - \frac{0,08}{\sqrt{0,08^2 + 0,3^2}} \right] = 21,43 \cdot 10^9 \text{ N/C}$$

$$\vec{E}(M) = 21,43 \cdot 10^9 \vec{k} \text{ N/C}$$

$$E(M) = \|\vec{E}(M)\| = 21,43 \cdot 10^9 \text{ N/C}$$

3. Calcul du potentiel $V(M)$ généré au point M :

La charge élémentaire dq située au point $A(x, y, 0)$ de la surface du disque, génère un potentiel électrique élémentaire $dV(M)$, donné par l'expression suivante :

$$dV(M) = \frac{Kdq}{AM}$$

$$\delta = \frac{q}{s} = \frac{dq}{ds}, \quad dq = \delta \cdot ds, \quad \begin{cases} ds = r dr d\theta \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases}, \quad \sigma = 1/r, \text{ donc :}$$

$$dq = dr d\theta$$

$$AM = \|\vec{AM}\| = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$dV(M) = \frac{K dr d\theta}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

On écrit :

$$V(M) = K \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$V(M) = 2\pi K \left[\ln \left(\sqrt{R_2^2 + z^2} + R_2 \right) - \ln \left(\sqrt{R_1^2 + z^2} + R_1 \right) \right]$$

$$V(M) = 2\pi K \cdot \ln \left(\frac{\sqrt{R_2^2 + z^2} + R_2}{\sqrt{R_1^2 + z^2} + R_1} \right)$$

Application numérique :

$$V(M) = 2(3,14)(9 \cdot 10^9) \ln \left(\frac{\sqrt{0,12^2 + 0,3^2} + 0,12}{\sqrt{0,08^2 + 0,3^2} + 0,08} \right) = 7,14 \cdot 10^9 \text{ V}$$

4. On pose une charge élémentaire $q_0 = -10 \text{ nC}$ au point M :

4.1. Calcul de la force électrique $\vec{F}(M)$ qui exerce sur cette charge :

$$\vec{F}(M) = q_0 \vec{E}(M)$$

Application numérique :

$$\vec{F}(M) = -10^{-8} (21,43 \cdot 10^9 \vec{k}) = -214,3 \vec{k} \quad N$$

$$F(M) = \|\vec{F}(M)\| = 214,3 \quad N$$

4.2. Calcul de l'énergie potentielle $E_p(M)$ de la charge q_0 au point M :

$$E_p(M) = q_0 V(M)$$

Application numérique :

$$E_p(M) = -10^{-8} (7,14 \cdot 10^9) = -71,4 \quad J$$

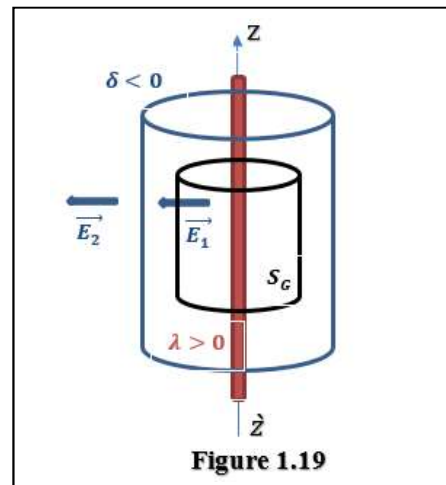
Exercice (19) :

On considère un fil de longueur infini monté sur l'axe (Oz), (Voir figure 1.19). Ce fil porte une densité linéique de charge $\lambda = 5 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}$, entouré par un cylindre de rayon $R = 7 \text{ Cm}$, qui porte une densité surfacique de charge $\delta = -12 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$

1. En utilisant le théorème de Gauss, déterminer le champ électrique $\vec{E}(r)$ créé en tout point de l'espace, (r représente la distance par rapport à l'axe du cylindre (fil) Oz).
2. Donner l'expression du potentiel $V(r)$ créé en tout point de l'espace.

On donne :

$$V(r = 2m) = 3400 \text{ V}, \quad \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$$



Solution de l'exercice (19) :

On a : $\lambda = 5 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}$, $\delta = -12 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$, $R = 7 \text{ Cm}$, $V(r = 2m) = 3400 \text{ V}$,

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$$

1. Détermination de l'expression du champ électrique $\vec{E}(r)$ en tout point de l'espace :

On applique le théorème de Gauss pour calculer le champ électrique $\vec{E}(r)$

$$\text{On a : } \oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \oint E \cdot ds = E \cdot S = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

On choisit la surface fermée de Gauss, un cylindre de rayon r (r représente la distance par rapport à l'axe (Oz) et de hauteur h

Le champ électrique $\vec{E}(r)$ passe perpendiculairement par la surface latérale du cylindre de Gauss, donc : $S = 2\pi r h$

On calcule la charge interne $\sum q_{int}$ qui se trouve à l'intérieure de la surface fermée de Gauss, pour cela on distingue deux zones différentes à étudier :

Première zone : $r < R$

La charge interne est une partie de la charge du fil, donc :

$$\lambda = \frac{q}{l} = \frac{q_{int}}{h}, \quad q_{int} = \lambda \cdot h$$

l est la longueur du fil supposée infini

L'équation (1) donne :

$$E_1 \cdot S = E_1 (2\pi r h) = \frac{\lambda \cdot h}{\varepsilon_0}, \quad \text{donc } E_1 = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}$$

Le champ $\vec{E}(r)$ électrique est radial, donc :

$$\vec{E}_1(r) = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r} \vec{u}_r$$

Deuxième zone : $r > R$

A partir de l'équation (1), on obtient :

$$E_2 \cdot S = E_2 (2\pi r h) = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

On calcule la charge interne $\sum q_{int}$ qui se trouve à l'intérieure du cylindre fermé de Gauss pour $r > R$, qui est la somme d'une partie de la charge du fil $q_{int/fil}$, et une partie de la charge du cylindre $q_{int/cylindre}$

$$\sum q_{int} = q_{int/fil} + q_{int/cylindre}$$

$$\text{On a : } q_{int/fil} = \lambda \cdot h$$

$$\delta = \frac{q}{2\pi Rl} = \frac{q_{int/cylindre}}{2\pi Rh}, \quad q_{int/cylindre} = \delta \cdot 2\pi Rh$$

$$\sum q_{int} = \lambda \cdot h + 2\pi\delta Rh = h(\lambda + 2\pi\delta R)$$

On écrit :

$$E_2(2\pi rh) = \frac{h(\lambda + 2\pi\delta R)}{\epsilon_0}, \quad E_2 = \frac{(\lambda + 2\pi\delta R)}{2\pi r \epsilon_0}$$

$$\vec{E}_2(r) = \frac{(\lambda + 2\pi\delta R)}{2\pi r \epsilon_0} \vec{u}_r$$

2. Expression du potentiel électrique $V(r)$ créé en tout point de l'espace :

$$\text{On a : } \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$$

$$E = -\frac{dV}{dr}, \quad dV = -E dr, \quad \text{donc } V = -\int E dr \quad (2)$$

Première zone : $r < R$

D'après l'équation (2), on a :

$$V_1(r) = -\int E_1 dr = -\int \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int \frac{dr}{r}$$

$$V_1(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + C_1$$

C_1 est une constante, qu'on détermine sa valeur à partir de la continuité du potentiel à $r = R$

Deuxième zone : $r > R$

Selon l'équation (2), on écrit :

$$V_2(r) = -\int E_2 dr = -\int \frac{(\lambda + 2\pi\delta R)}{2\pi r \epsilon_0} dr = -\frac{(\lambda + 2\pi\delta R)}{2\pi\epsilon_0} \int \frac{dr}{r}$$

$$V_2(r) = -\frac{(\lambda + 2\pi\delta R)}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + C_2$$

C_2 est une constante.

Puisque les distributions des charges sont infinies, on ne peut pas choisir le potentiel nul quand r tend vers l'infini.

$$\text{On a : } V(r = 2m) = 3400 \text{ V}$$

Application numérique :

$$V(r = 2m) = V_2(r = 2) = -\frac{(5 \cdot 10^{-6} + 2(3,14)(-12 \cdot 10^{-6})0,07)}{2,3,14(8,85 \cdot 10^{-12})} \ln(2) + C_2 = 3400$$

$$C_2 = -32$$

Donc, on a :

$$V_2(r) = -\frac{(\lambda + 2\pi\delta R)}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) - 32 \quad V$$

On calcule, la valeur de la constante C_1

D'après la continuité du potentiel à $r = R$, on a : $V_1(R) = V_2(R)$

Application numérique :

$$-\frac{5 \cdot 10^{-6}}{2,3,14(8,85 \cdot 10^{-12})} \ln(0,07) + C_1 = -\frac{(5 \cdot 10^{-6} + 2(3,14)(-12 \cdot 10^{-6})0,07)}{2,3,14(8,85 \cdot 10^{-12})} \ln(0,07) - 32$$

$$C_1 = -252436$$

L'expression du potentiel électrique $V_1(r)$ est :

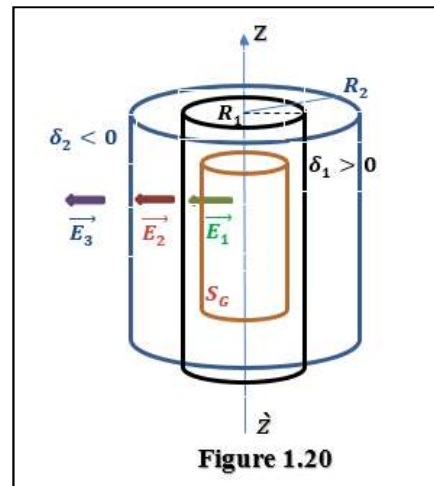
$$V_1(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) - 252436 \quad V$$

Exercice (20) :

Deux cylindres coaxiaux de longueurs infinies de rayons $R_1 = 10 \text{ cm}$, $R_2 = 15 \text{ cm}$ respectivement, portent des charges de distributions surfaciques

$\delta_1 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$, $\delta_2 = -6 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$ respectivement. (Voir Figure 1.20).

1. En utilisant le théorème de Gauss, donner l'expression du champ électrique $\vec{E}(r)$ créé en tout point de l'espace.
2. Calculer les champs électriques suivants, $\vec{E}(r = 0,12 \text{ m})$, $\vec{E}(r = 0,2 \text{ m})$
3. Donner l'expression du potentiel $V(r)$ créé en tout point de l'espace.
4. Calculer les potentiels suivants, $V(r = 0,12 \text{ m})$, $V(r = 0,2 \text{ m})$.



On donne : $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$, $V(3m) = -3 \cdot 10^4 \text{ V}$

Solution de l'exercice (20) :

On a : $R_1 = 10 \text{ cm}$, $R_2 = 15 \text{ cm}$, $\delta_1 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$, $\delta_2 = -6 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$,

$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$, $V(3m) = -3 \cdot 10^4 \text{ V}$

1. Expression du champ électrique $\vec{E}(r)$ créé en tout point de l'espace :

On applique le théorème de Gauss pour déterminer et calculer le champ électrique $\vec{E}(r)$ en tout point de l'espace, on a : $\oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \oint E \cdot ds = E \cdot S = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

On choisit la surface fermée de Gauss, un cylindre de rayon r (r représente la distance par rapport à l'axe (Oz) et de hauteur h

Le champ électrique $\vec{E}(r)$ passe perpendiculairement par la surface latérale du cylindre de Gauss, donc : $S = 2\pi r h$

On calcule la charge interne $\sum q_{int}$ qui se trouve à l'intérieure de la surface fermée de Gauss, pour cela on distingue trois zones différentes à étudier :

Première zone : $r < R_1$

D'après l'équation (1), on obtient :

$$\oint E_1 \cdot ds = E_1 \cdot S = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

La charge qui se trouve dans la surface de Gauss dans ces conditions est nulle, $\sum q_{int} = 0$

Par conséquent le champ électrique est nul, $E_1 = 0 \text{ N/C}$

$$\vec{E}_1 = \vec{0} \text{ N/C}$$

Deuxième zone : $R_1 < r < R_2$

$$\oint E_2 \cdot ds = E_2 \cdot S = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

On calcule la charge interne qui se trouve dans la surface fermée de Gauss, dans ce cas :

$$\delta_1 = \frac{q_1}{2\pi R_1 z} = \frac{q_{int}}{2\pi R_1 h}, \quad q_{int} = 2\pi \delta_1 R_1 h$$

$$E_2 \cdot 2\pi r h = \frac{2\pi \delta_1 R_1 h}{\varepsilon_0}, \quad E_2 = \frac{\delta_1 R_1}{\varepsilon_0 r}, \quad \vec{E}_2 = \frac{\delta_1 R_1}{\varepsilon_0 r} \vec{u}_r \quad \text{N/C}$$

Troisième zone : $r > R_2$

On obtient : $\oiint E_3 \cdot ds = E_3 \cdot S = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0}$

$$\sum q_{int} = 2\pi\delta_1 R_1 h + 2\pi\delta_2 R_2 h = 2\pi h(\delta_1 R_1 + \delta_2 R_2)$$

$$E_3(2\pi r h) = \frac{2\pi h(\delta_1 R_1 + \delta_2 R_2)}{\epsilon_0}$$

$$E_3 = \frac{(\delta_1 R_1 + \delta_2 R_2)}{\epsilon_0 r} \quad , \quad \vec{E}_3 = \frac{(\delta_1 R_1 + \delta_2 R_2)}{\epsilon_0 r} \vec{u}_r \quad N/C$$

2. Calcul des valeurs de $\vec{E}(r = 0,12 \text{ m})$, $\vec{E}(r = 0,2 \text{ m})$:

Calcul de $\vec{E}(r = 0,12 \text{ m})$:

$r = 0,12 \text{ m}$, on est au deuxième zone ($R_1 < r < R_2$), donc :

$$E_2 = \frac{\delta_1 R_1}{\epsilon_0 r}$$

Application numérique :

$$E_2(r = 0,12) = \frac{12 \cdot 10^{-6}(0,1)}{0,12(8,85 \cdot 10^{-12})} = 1,13 \cdot 10^6 \text{ N/C}$$

$$\vec{E}_2(r = 0,12) = 1,13 \cdot 10^6 \vec{u}_r \quad N/C$$

Calcul de $\vec{E}(r = 0,2 \text{ m})$:

$r = 0,2 \text{ m}$, on est au troisième zone ($r > R_2$), donc :

$$E_3 = \frac{(\delta_1 R_1 + \delta_2 R_2)}{\epsilon_0 r}$$

Application numérique :

$$E_3(r = 0,2) = \frac{(12 \cdot 10^{-6}(0,1) - 6 \cdot 10^{-6}(0,15))}{0,2(8,85 \cdot 10^{-12})} = 0,169 \cdot 10^6 \text{ N/C}$$

$$\vec{E}_3 = 0,169 \cdot 10^6 \vec{u}_r \quad N/C$$

3. détermination du potentiel $V(r)$ créé en tout point de l'espace :

On a : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$

$$E = -\frac{dV}{dr} \quad , \quad dV = -E dr \quad , \quad \text{donc } V = -\int E dr \quad (2)$$

Première zone : $r < R_1$

On a, $\vec{E}_1 = \vec{0}$, par conséquence $V_1(r) = C_1$

Deuxième zone : $R_1 < r < R_2$

$$E_2 = \frac{\delta_1 R_1}{\varepsilon_0 r}$$

D'après l'équation (2), on a :

$$V_2(r) = - \int E_2 dr = - \int \frac{\delta_1 R_1}{\varepsilon_0 r} dr = - \frac{\delta_1 R_1}{\varepsilon_0} \int \frac{dr}{r}$$

$$V_2(r) = - \frac{\delta_1 R_1}{\varepsilon_0} \ln(r) + C_2$$

Troisième zone : $r > R_2$

$$E_3 = \frac{(\delta_1 R_1 + \delta_2 R_2)}{\varepsilon_0 r}$$

$$V_3(r) = - \int E_3 dr = - \int \frac{(\delta_1 R_1 + \delta_2 R_2)}{\varepsilon_0 r} dr = - \frac{(\delta_1 R_1 + \delta_2 R_2)}{\varepsilon_0} \int \frac{dr}{r}$$

$$V_3(r) = - \frac{(\delta_1 R_1 + \delta_2 R_2)}{\varepsilon_0} \ln(r) + C_3$$

Comme les distributions des charges sont infinies, on ne peut pas choisir le potentiel nul quand r tend vers l'infini.

$$\text{On a : } V(r = 3m) = -3 \cdot 10^4 \text{ V}$$

Application numérique :

$$V_3(r = 3) = - \frac{(12 \cdot 10^{-6}(0,1) - 6 \cdot 10^{-6}(0,15))}{8,85 \cdot 10^{-12}} \ln(3) + C_3 = -3 \cdot 10^4$$

$$C_3 = 7241$$

Donc, on a :

$$V_3(r) = - \frac{(\delta_1 R_1 + \delta_2 R_2)}{\varepsilon_0} \ln(r) + 7241 \quad \text{V}$$

Il y'a une continuité du potentiel électrique, par conséquent on écrit : $\begin{cases} V_1(R_1) = V_2(R_1) \\ V_2(R_2) = V_3(R_2) \end{cases}$

$$V_2(R_2) = V_3(R_2)$$

$$- \frac{\delta_1 R_1}{\varepsilon_0} \ln(R_2) + C_2 = - \frac{(\delta_1 R_1 + \delta_2 R_2)}{\varepsilon_0} \ln(R_2) + 7241$$

$$C_2 = -185686$$

$$V_2(r) = -\frac{\delta_1 R_1}{\epsilon_0} \ln(r) - 185686 \quad V$$

D'autre part, on a :

$$V_1(R_1) = V_2(R_1)$$

$$C_1 = -\frac{\delta_1 R_1}{\epsilon_0} \ln(R_1) - 185686, \quad C_1 = 126528$$

$$V_1(r) = 126528 \quad V$$

4. Calcul des valeurs des potentiels électriques $V(r = 0,12 \text{ m})$, $V(r = 0,2 \text{ m})$:

On a, $r = 0,12 \text{ m}$, on est au deuxième zone ($R_1 < r < R_2$)

$$V_2(r) = -\frac{\delta_1 R_1}{\epsilon_0} \ln(r) - 185686 \quad V$$

Application numérique :

$$V_2(r = 0,12) = -\frac{12 \cdot 10^{-6}(0,1)}{8,85 \cdot 10^{-12}} \ln(0,12) - 185686 = 1,018 \cdot 10^5 \quad V$$

Pour $r = 0,2 \text{ m}$, on est au troisième zone ($r > R_2$)

$$V_3(r) = -\frac{(\delta_1 R_1 + \delta_2 R_2)}{\epsilon_0} \ln(r) + 7241 \quad V$$

Application numérique :

$$V_3(r = 0,2) = -\frac{(12 \cdot 10^{-6}(0,1) - 6 \cdot 10^{-6}(0,15))}{8,85 \cdot 10^{-12}} \ln(0,2) + 7241$$

$$V_3(r = 0,2) = 6,179 \cdot 10^4 \quad V$$

Exercice (21) :

Un cylindre de rayon $R = 16 \text{ cm}$ et de hauteur infini, chargé avec une densité volumique de charges $\rho = 10^{-6} \text{ C/m}^3$. (Figure 1.21)

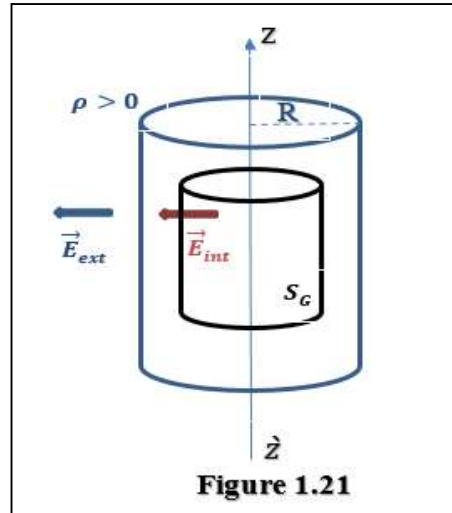


Figure 1.21

1. Calculer les champs électriques $\vec{E}_{int}(r < R)$, $\vec{E}_{ext}(r > R)$
2. Calculer les valeurs du champ électrique aux points $r = 0,12 \text{ m}$, $r = 0,5 \text{ m}$.
3. On pose une charge ponctuelle $q_A = 20 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ sur une distance $d = 50 \text{ cm}$ de l'axe du cylindre (Oz), calculer dans ce cas la force qui exerce sur cette charge.
4. On suppose que la densité volumique de charges du cylindre est n'est pas uniforme, d'expression $\rho = \frac{1}{r} \text{ C/m}^3$, déterminer dans ce cas les expressions des deux champs électriques $\vec{E}_{int}(r < R)$, $\vec{E}_{ext}(r > R)$

On donne : $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$

Solution de l'exercice (21) :

On a : $R = 16 \text{ cm}$, $\rho = 10^{-6} \text{ C/m}^3$, $q_A = 20 \cdot 10^{-6} \text{ C}$, $d = 50 \text{ cm}$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$.

1. Calcul des champs électriques $\vec{E}_{int}(r < R)$, $\vec{E}_{ext}(r > R)$:

On applique le théorème de Gauss : $\oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0}$

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \oint E \cdot ds = E \cdot S = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0} \quad (1)$$

On choisit la surface de Gauss fermée, un cylindre de rayon r et de hauteur h .

On distingue deux zones différentes pour calculer le champ électrique, qui sont :

Première zone : $r < R$

$$\text{D'après l'équation (1), on écrit, } E_{int} \cdot S = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0} \quad (2)$$

Le champ électrique passe perpendiculairement par la surface latérale du cylindre de Gauss, donc : $S = 2\pi r h$

On calcule la valeur de la charge interne qui se trouve dans la surface de Gauss, on a :

$$\rho = \frac{q}{\pi R^2 z} = \frac{q_{int}}{\pi r^2 h}, \quad q_{int} = \rho \pi r^2 h \quad (z \text{ représente la longueur infinie du cylindre})$$

L'équation (2) donne : $E_{int} \cdot (2\pi r h) = \frac{\rho \pi r^2 h}{\varepsilon_0}$, $E_{int} = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$, $\vec{E}_{int} = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \vec{u}_r$

Application numérique :

$$E_{int} = \frac{10^{-6}}{2(8,85 \cdot 10^{-12})} r = 56,4 \cdot 10^3 r \quad N/C$$

$$\vec{E}_{int} = 56,4 \cdot 10^3 r \vec{u}_r \quad N/C$$

deuxième zone : $r > R$

D'après l'équation (1), on écrit, $E_{ext} \cdot S = \frac{\Sigma q_{int}}{\varepsilon_0}$ (3)

$$S = 2\pi r h$$

$$\rho = \frac{q}{\pi R^2 z} = \frac{q_{int}}{\pi R^2 h}, \quad q_{int} = \rho \pi R^2 h$$

D'après l'équation (3), on écrit :

$$E_{ext} \cdot (2\pi r h) = \frac{\rho \pi R^2 h}{\varepsilon_0}, \quad E_{ext} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}, \quad \vec{E}_{ext} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} \vec{u}_r$$

Application numérique :

$$E_{ext} = \frac{10^{-6}(0,16)^2}{2(8,85 \cdot 10^{-12})r} = \frac{1,44 \cdot 10^3}{r} \quad N/C$$

$$\vec{E}_{ext} = \frac{1,44 \cdot 10^3}{r} \vec{u}_r \quad N/C$$

2. Calcul des valeurs du champ électrique aux points $r = 0,12 \text{ m}$, $r = 0,5 \text{ m}$:

$r = 0,12 \text{ m}$, première zone ($r < R$)

$$E_{int}(r = 0,12) = 56,4 \cdot 10^3 (0,12) = 6,72 \cdot 10^3 \quad N/C$$

$$\vec{E}_{int}(r = 0,12) = 6,72 \cdot 10^3 \vec{u}_r$$

$r = 0,5 \text{ m}$, deuxième zone ($r > R$)

$$E_{ext}(r = 0,5) = \frac{1,44 \cdot 10^3}{(0,5)} = 2,88 \cdot 10^3 \quad N/C$$

$$\vec{E}_{ext}(r = 0,5) = 2,88 \cdot 10^3 \vec{u}_r \quad N/C$$

3. Calcul de la force qui exerce sur la charge ponctuelle q_A :

L'expression de la force électrique qui exerce sur la charge ponctuelle q_A est :

$\vec{F}_A = q_A \cdot \vec{E}(d)$, ($\vec{E}(d)$ est le champ électrique qui exerce à une distance $r = d$)

$d = 0,5 \text{ m}$, on est au deuxième zone

Application numérique :

$$\vec{F}_A = 20 \cdot 10^{-6} \cdot (2,88 \cdot 10^3 \vec{u}_r) = 57,6 \cdot 10^{-3} \vec{u}_r \quad N$$

$$F_A = \|\vec{F}_A\| = 57,6 \cdot 10^{-3} \quad N$$

4. Cas de la densité volumique $\rho = \frac{1}{r} \text{ C/m}^3$:

On veut déterminer les expressions des deux champs électriques $\vec{E}_{int}(r < R)$, $\vec{E}_{ext}(r > R)$

Première zone : $r < R$

D'après l'équation (2), on a : $E_{int} \cdot S = \frac{\Sigma q_{int}}{\epsilon_0}$, $S = 2\pi r h$

On calcule la valeur de la charge interne qui se trouve dans la surface de Gauss, on a :

$\rho = \frac{q}{V} = \frac{dq}{dV}$, mais puisque la densité de charge volumique $\rho = \frac{1}{r}$ est variable en fonction de la distance r ($0 < r < R$) on calcule la charge interne par intégration, comme suit :

$$\begin{cases} dq = \rho dV \\ dV = r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz \\ \rho = \frac{1}{r} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq r \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq h \end{cases} \quad (\text{qui sont les limites de la surface de Gauss})$$

$$dq = \frac{1}{r} (r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz) = dr d\theta dz$$

$$q = q_{int} = \int_0^r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = 2\pi r h$$

$$q_{int} = 2\pi r h$$

Selon l'équation (2) on a : $E_{int} \cdot (2\pi r h) = \frac{2\pi r h}{\epsilon_0}$

$$E_{int} = \frac{1}{\epsilon_0} \quad N/C$$

Application numérique :

$$E_{int} = \frac{1}{8,85 \cdot 10^{-12}} = 112,99 \cdot 10^9 \quad N/C$$

$$\vec{E}_{int} = 112,99 \cdot 10^9 \vec{u}_r \quad N/C$$

On passe au calcul du champ électrique $\vec{E}_{ext}(r > R)$

D'après l'équation (3), on a, $E_{ext} \cdot S = \frac{\Sigma q_{int}}{\epsilon_0}$, avec $S = 2\pi r h$

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{dq}{dV}, \quad dq = \rho dV = \frac{1}{r}(r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz) = dr d\theta dz$$

Avec $\begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq h \end{cases}$ (qui sont les limites du volume qui contient la charge interne dans ce cas)

$$q = q_{int} = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = 2\pi R h$$

On obtient :

$$E_{ext} \cdot (2\pi r h) = \frac{2\pi R h}{\epsilon_0}, \quad E_{ext} = \frac{R}{\epsilon_0 r}, \quad \vec{E}_{ext} = \frac{R}{\epsilon_0 r} \vec{u}_r \quad N/C$$

Application numérique :

$$E_{ext} = \frac{0,16}{(8,85 \cdot 10^{-12})r} = \frac{18,08 \cdot 10^9}{r} \quad N/C$$

$$\vec{E}_{ext} = \frac{18,08 \cdot 10^9}{r} \vec{u}_r \quad N/C$$

Exercice (22) :

Une sphère conductrice creuse de rayon $R = 12 \text{ cm}$, porte une distribution surfacique de charge $\delta = 3 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$. Au centre $O(0, 0, 0)$ de cette sphère se trouve une charge ponctuelle $q = 12 \cdot 10^{-6} \text{ C}$. (Voir Figure 1.22).

1. En utilisant le théorème de Gauss déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}(r)$ en tout point de l'espace.
2. Déterminer l'expression du potentiel électrique $V(r)$.
3. Calculer les valeurs du champ électrique $\vec{E}(r)$ et le potentiel électrique $V(r)$ au deux points A ($r = 5 \text{ cm}$), B ($r = 20 \text{ cm}$).

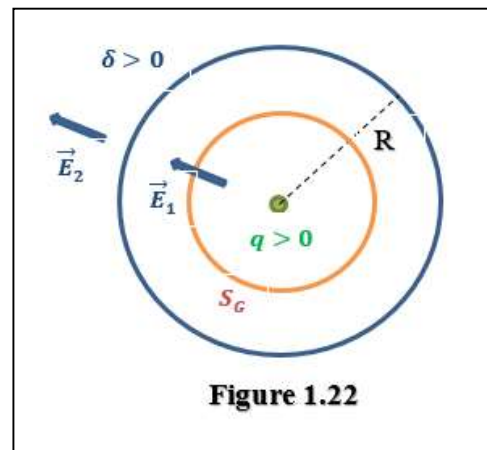


Figure 1.22

On donne : $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$,

$$K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{C}^{-2}$$

Solution de l'exercice (22) :

On a : $R = 12 \text{ cm}$, $\delta = 3 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$, $q = 12 \cdot 10^{-6} \text{ C}$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$,
 $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N.m}^2\text{C}^{-2}$

1. Détermination de l'expression du champ électrique $\vec{E}(r)$ en tout point de l'espace :

Afin de déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}(r)$ en tout point de l'espace, on choisit la surface de Gauss fermée une sphère de centre $O(0, 0, 0)$ et de rayon r , et par conséquent la surface de Gauss sera : $S = S_G = 4\pi r^2$

On applique le théorème de Gauss, on obtient :

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \oiint E \cdot ds = E \cdot S = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0} \quad (1)$$

On distingue deux zones d'étude sont :

Première zone $r < R$

D'après l'équation (1), on écrit $E_1 S = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0}$ (Voir Figure 1.22)

On calcule la charge interne qui se trouve dans la surface de Gauss dans ce cas : $\sum q_{int} = q$

$$E_1(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad E_1 = \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{Kq}{r^2}$$

$$\vec{E}_1(r) = \frac{Kq}{r^2} \vec{u}_r \quad \text{N/C}$$

Deuxième zone $r > R$

D'après l'équation (1), on écrit $E_2 S = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0}$ (Voir Figure 1.22)

On calcule la charge interne qui se trouve dans la surface de Gauss dans ce cas :

$$\sum q_{int} = q + q_{sp \text{ ère}}$$

$$\delta = \frac{q_{sphère}}{4\pi R^2}, \quad q_{sphère} = \delta(4\pi R^2) = 4\pi \delta R^2$$

$$\sum q_{int} = q + 4\pi \delta R^2$$

$$E_2(4\pi r^2) = \frac{(q + 4\pi \delta R^2)}{\epsilon_0}, \quad E_2 = \frac{(q + 4\pi \delta R^2)}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{K(q + 4\pi \delta R^2)}{r^2}$$

$$\vec{E}_2(r) = \frac{K(q + 4\pi \delta R^2)}{r^2} \vec{u}_r \quad \text{N/C}$$

Application numérique :

$$E_1 = \frac{9 \cdot 10^9 (12 \cdot 10^{-6})}{r^2} = \frac{108 \cdot 10^3}{r^2} \quad N/C$$

$$E_2 = \frac{9 \cdot 10^9 (12 \cdot 10^{-6} + 4(3,14)3 \cdot 10^{-6}(0,12)^2)}{r^2} = \frac{112,88 \cdot 10^3}{r^2} \quad N/C$$

2. Expression du potentiel électrique $V(r)$ en tout point de l'espace :

On a : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$

$$E = -\frac{dV}{dr}, \quad dV = -E dr, \quad \text{donc } V = -\int E dr \quad (2)$$

Première zone : $r < R$

D'après l'équation (2) on écrit $V_1(r) = -\int E_1 dr$

$$V_1(r) = -\int \frac{Kq}{r^2} dr = -Kq \int \frac{dr}{r^2} = \frac{Kq}{r} + C_1$$

$$V_1(r) = \frac{Kq}{r} + C_1$$

Deuxième zone : $r > R$

D'après l'équation (2) on écrit $V_2(r) = -\int E_2 dr$

$$V_2(r) = -\int \frac{K(q + 4\pi\delta R^2)}{r^2} dr = -K(q + 4\pi\delta R^2) \int \frac{dr}{r^2} = \frac{K(q + 4\pi\delta R^2)}{r} + C_2$$

On détermine les valeurs des deux constants C_1 et C_2 à partir de la continuité du potentiel électrique, et sa valeur à l'infini, on a :

$$V_2(\infty) = 0 \quad V, \quad V_1(R) = V_2(R)$$

$$V_2(\infty) = C_2 = 0, \quad \text{donc on obtient, } V_2(r) = \frac{K(q + 4\pi\delta R^2)}{r} \quad V$$

D'autre part, $V_1(R) = V_2(R)$

$$\frac{Kq}{R} + C_1 = \frac{K(q + 4\pi\delta R^2)}{R}, \quad C_1 = 4\pi K\delta R$$

Par conséquent, on écrit $V_1(r) = \frac{Kq}{r} + 4\pi K\delta R \quad V$

3. Calcul des valeurs du champ électrique $\vec{E}(r)$ et le potentiel électrique $V(r)$ au deux points A ($r = 5 \text{ cm}$), B ($r = 20 \text{ cm}$) :

Pour $r = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$ (première zone $r < R$)

$$V_1(r) = \frac{Kq}{r} + 4\pi K\delta R, \quad E_1(r) = \frac{Kq}{r^2}$$

Application numérique :

$$V_1(r = 0,05) = \frac{9 \cdot 10^9 (12 \cdot 10^{-6})}{0,05} + 4(3,14)9 \cdot 10^9 (3 \cdot 10^{-6}) \cdot 0,12 = 2,2 \cdot 10^6 \text{ V}$$

$$E_1(r = 0,05) = \frac{9 \cdot 10^9 (12 \cdot 10^{-6})}{0,05^2} = 43,2 \cdot 10^6 \text{ N/C}$$

Pour $r = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$ (deuxième zone $r > R$)

$$V_2(r) = \frac{K(q+4\pi\delta R^2)}{r}, \quad E_2(r) = \frac{K(q+4\pi\delta R^2)}{r^2}$$

Application numérique :

$$V_2(r = 0,2) = \frac{9 \cdot 10^9 (12 \cdot 10^{-6} + 4(3,14)3 \cdot 10^{-6}(0,12)^2)}{0,2} = 5,64 \cdot 10^5 \text{ V}$$

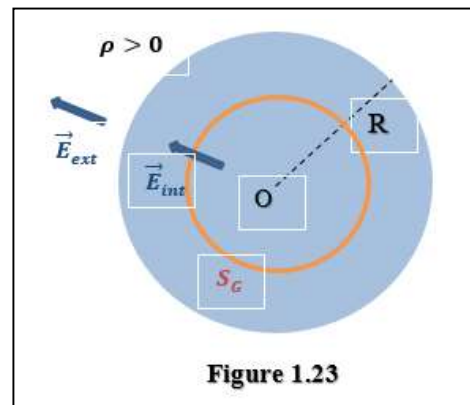
$$E_2(r = 0,2) = \frac{9 \cdot 10^9 (12 \cdot 10^{-6} + 4(3,14)3 \cdot 10^{-6}(0,12)^2)}{0,2^2} = 2,822 \cdot 10^6 \text{ N/C}$$

Exercice (23) :

Une sphère conductrice pleine de rayon $R = 17 \text{ cm}$ porte une distribution volumique de charge de densité volumique $\rho = 20 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^3$.

(Voir figure 1.23)

1. En utilisant le théorème de Gauss déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}(r)$ en tout point de l'espace.
2. Déterminer l'expression du potentiel électrique $V(r)$ en tout point de l'espace.
3. Calculer $V(r = 0,1 \text{ m})$, $V(r = 0,2 \text{ m})$, $\vec{E}(r = 0,1 \text{ m})$, $\vec{E}(r = 0,2 \text{ m})$.



On donne : $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

Solution de l'exercice (23) :

On a : $R = 17 \text{ cm}$, $\rho = 20 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^3$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.

1. Expression du champ électrique $\vec{E}(r)$ en tout point de l'espace :

Au début on choisit la surface fermée de Gauss, une sphère de rayon r et de centre O , donc sa surface externe est : $S = S_G = 4\pi r^2$

On applique le théorème de Gauss, on obtient :

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \oiint E \cdot ds = E \cdot S = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

On distingue deux zones d'étude sont :

Première zone $r < R$

L'équation (1), donne : $E_{int} S = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$

On calcule la charge interne qui se trouve à l'intérieure de la surface de Gauss, on a :

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{q_{int}}{\frac{4}{3}\pi r^3} \quad , \quad q_{int} = \frac{4}{3}\rho\pi r^3$$

Par conséquence, on écrit :

$$E_{int} \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\rho\pi r^3}{3\varepsilon_0} \quad , \quad E_{int} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \quad , \quad \vec{E}_{int} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \vec{u}_r$$

Application numérique :

$$E_{int}(r) = \frac{20 \cdot 10^{-6}}{3(8,85 \cdot 10^{-12})} r = 7,53 \cdot 10^5 r \quad N/C$$

Deuxième zone $r > R$

D'après l'équation (1), on écrit $E_{ext} S = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$ (Voir Figure 1.23)

On calcule la charge interne qui se trouve dans la surface de Gauss dans ce cas :

$$\sum q_{int} = q_{Sphère} = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$E_{ext}(4\pi r^2) = \frac{4\rho\pi R^3}{3\varepsilon_0} \quad , \quad E_{ext}(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E}_{ext}(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad N/C$$

Application numérique :

$$E_{ext}(r) = \frac{20 \cdot 10^{-6} (0,17)^3}{3(8,85 \cdot 10^{-12}) r^2} = \frac{3,7 \cdot 10^3}{r^2} \quad N/C$$

$$\vec{E}_{ext}(r) = \frac{3,7 \cdot 10^3}{r^2} \vec{u}_r \quad N/C$$

2. Expression du potentiel électrique $V(r)$ en tout point de l'espace :

On a : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$

$$E = -\frac{dV}{dr}, \quad dV = -E dr, \quad \text{donc } V = -\int E dr \quad (2)$$

Première zone : $r < R$

D'après l'équation (2) on écrit $V_{int}(r) = -\int E_{int} dr$

$$V_{int}(r) = -\int \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \int r dr = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[\frac{r^2}{2} \right] + C_1$$

$$V_{int}(r) = \frac{-\rho r^2}{6\epsilon_0} + C_1$$

deuxième zone : $r > R$

D'après l'équation (2) on écrit $V_{ext}(r) = -\int E_{ext} dr$

$$V_{ext}(r) = -\int \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} + C_2$$

Pour déterminer les valeurs des deux constants C_1 et C_2 on a :

$$\begin{cases} V_{ext}(\infty) = 0 \\ V_{int}(R) = V_{ext}(R) \end{cases} \quad (\text{il y'a une continuité du potentiel électrique en } r = R)$$

$$V_{ext}(\infty) = 0, \quad V_{ext}(\infty) = C_2 = 0$$

$$\text{Donc l'expression du potentiel externe est } V_{ext}(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} \quad V$$

D'autre part, $V_{int}(R) = V_{ext}(R)$

$$\frac{-\rho R^2}{6\epsilon_0} + C_1 = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 R}, \quad C_1 = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$$

$$V_{int}(r) = \frac{-\rho r^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$$

$$\text{L'expression du potentiel interne est } V_{int}(r) = \frac{\rho(3R^2 - r^2)}{6\epsilon_0} \quad V$$

3. Calcul de $V(r = 0, 1 \text{ m})$, $V(r = 0, 2 \text{ m})$, $\vec{E}(r = 0, 1 \text{ m})$, $\vec{E}(r = 0, 2 \text{ m})$:

$$V(r = 0, 1 \text{ m}) = V_{int}(r = 0, 1) = \frac{\rho(3R^2 - r^2)}{6\epsilon_0}$$

$$V(r = 0,2 \text{ m}) = V_{ext}(r = 0,2) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}$$

Application numérique :

$$V(r = 0,1 \text{ m}) = V_{int}(r = 0,1) = \frac{20 \cdot 10^{-6}(3(0,17)^2 - 0,1^2)}{6(8,85 \cdot 10^{-12})} = 1,78 \cdot 10^3 \text{ V}$$

$$V(r = 0,2 \text{ m}) = V_{ext}(r = 0,2) = \frac{20 \cdot 10^{-6}(0,17)^3}{3(8,85 \cdot 10^{-12})(0,2)} = 18,5 \cdot 10^3 \text{ V}$$

D'autre part :

$$\vec{E}(r = 0,1 \text{ m}) = E_{int}(r = 0,1) = 7,53 \cdot 10^5 r$$

$$\vec{E}(r = 0,2 \text{ m}) = E_{ext}(r = 0,2) = \frac{3,7 \cdot 10^3}{r^2}$$

Application numérique :

$$\vec{E}(r = 0,1 \text{ m}) = E_{int}(r = 0,1) = 7,53 \cdot 10^5 (0,1) = 7,53 \cdot 10^4 \text{ N/C}$$

$$\vec{E}(r = 0,2 \text{ m}) = E_{ext}(r = 0,2) = \frac{3,7 \cdot 10^3}{0,2^2} = 9,25 \cdot 10^4 \text{ N/C}$$

Exercice (24) :

Deux sphères conductrices creuses (vides) ont le même centre $O(0, 0, 0)$ de rayons

$R_1 = 10 \text{ cm}$, $R_2 = 17 \text{ cm}$ respectivement, portent des charges de distributions surfaciques $\sigma_1 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$, $\sigma_2 = -12 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$.

(Voir figure 1.24).

1. Donner l'expression du champ électrique $\vec{E}(r)$ en utilisant le théorème de Gauss.
2. Calculer les valeurs du champ électrique $\vec{E}(r = 0,05 \text{ m})$, $\vec{E}(r = 0,12 \text{ m})$, $\vec{E}(r = 0,24 \text{ m})$.
3. Donner l'expression du potentiel électrique $V(r)$ en tout point de l'espace.
4. Calculer les valeurs du potentiel électrique $V(r = 0,05 \text{ m})$, $V(r = 0,12 \text{ m})$, $V(r = 0,24 \text{ m})$.

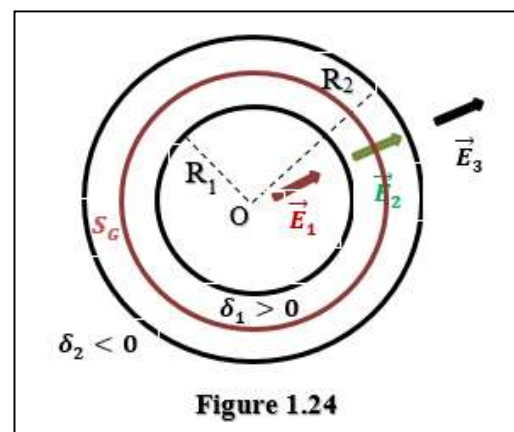


Figure 1.24

On donne : $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

Solution de l'exercice (24) :

On a : $R_1 = 10 \text{ cm}$, $R_2 = 17 \text{ cm}$, $\sigma_1 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$, $\sigma_2 = -12 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$,

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$$

1. Expression du champ électrique $\vec{E}(r)$ en utilisant le théorème de Gauss :

Afin de déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}(r)$ en tout point de l'espace, on choisit la surface de Gauss fermée une sphère de centre $O(0, 0, 0)$ et de rayon r , et par conséquent la surface de Gauss sera : $S = S_G = 4\pi r^2$

On applique le théorème de Gauss, on obtient :

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \oiint E \cdot ds = E \cdot S = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

On distingue trois zones d'étude sont :

Première zone $r < R_1$

D'après l'équation (1), on écrit $E_1 S = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$ (Voir Figure 1.24)

On calcule la charge interne qui se trouve dans la surface de Gauss dans ce cas :

$$\sum q_{int} = 0$$

$$E_1 (4\pi r^2) = \frac{0}{\varepsilon_0} = 0 \quad , \quad E_1 = 0 \text{ N/C}$$

$$\vec{E}_1(r) = \vec{0} \text{ N/C}$$

Deuxième zone $R_1 < r < R_2$

D'après l'équation (1), on écrit $E_2 S = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$

On calcule la charge interne qui se trouve dans la surface de Gauss dans ce cas :

$$\sum q_{int} = q_{S1} = \delta_1 (4\pi R_1^2) \quad (S1 \text{ est la première sphère de rayon } R_1)$$

$$E_2 (4\pi r^2) = \frac{4\pi \delta_1 R_1^2}{\varepsilon_0} \quad , \quad E_2 = \frac{\delta_1 R_1^2}{\varepsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E}_2(r) = \frac{\delta_1 R_1^2}{\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad \text{N/C}$$

Troisième zone $r > R_2$

D'après l'équation (1), on écrit $E_3 S = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$

On calcule la charge interne qui se trouve dans la surface de Gauss dans ce cas :

$$\sum q_{int} = q_{S1} + q_{S2} = \delta_1(4\pi R_1^2) + \delta_2(4\pi R_2^2) = 4\pi(\delta_1 R_1^2 + \delta_2 R_2^2)$$

La charge interne dans la surface de Gauss, dans ce cas est la somme des charges des deux sphères S1 et S2.

$$E_3(4\pi r^2) = \frac{4\pi(\delta_1 R_1^2 + \delta_2 R_2^2)}{\epsilon_0} \quad , \quad E_3 = \frac{(\delta_1 R_1^2 + \delta_2 R_2^2)}{\epsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E}_3(r) = \frac{(\delta_1 R_1^2 + \delta_2 R_2^2)}{\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad N/C$$

Applications numériques :

$$E_2 = \frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 0,1^2}{8,85 \cdot 10^{-12} r^2} = \frac{4,52 \cdot 10^3}{r^2} \quad N/C$$

$$\vec{E}_2(r) = \frac{4,52 \cdot 10^3}{r^2} \vec{u}_r \quad N/C$$

$$E_3 = \frac{(4 \cdot 10^{-6} \cdot 0,1^2 - 12 \cdot 10^{-6} \cdot 0,17^2)}{8,85 \cdot 10^{-12} r^2} = -\frac{34,6 \cdot 10^3}{r^2} \quad N/C$$

$$\vec{E}_3(r) = -\frac{34,6 \cdot 10^3}{r^2} \vec{u}_r \quad N/C$$

2. Calcul des champs électriques $\vec{E}(r = 0,05 \text{ m})$, $\vec{E}(r = 0,12 \text{ m})$, $\vec{E}(r = 0,24 \text{ m})$:

$\vec{E}(r = 0,05 \text{ m})$: Première zone $r < R_1$

$$\vec{E}(r = 0,05 \text{ m}) = E_1(r = 0,05) = 0 \quad N/C$$

$\vec{E}(r = 0,12 \text{ m})$: Deuxième zone $R_1 < r < R_2$

$$\vec{E}(r = 0,12 \text{ m}) = E_2(r = 0,12) = \frac{4,52 \cdot 10^3}{0,12^2} = 313,88 \cdot 10^3 \quad N/C$$

$\vec{E}(r = 0,24 \text{ m})$: Troisième zone $r > R_2$

$$\vec{E}(r = 0,24 \text{ m}) = E_3(r = 0,24) = -\frac{34,6 \cdot 10^3}{0,24^2} = -600,7 \cdot 10^3 \quad N/C$$

3. Expression du potentiel électrique $V(r)$ en tout point de l'espace :

On a : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$

$$E = -\frac{dV}{dr} \quad , \quad dV = -E dr \quad , \quad \text{donc } V = -\int E dr \quad (2)$$

Première zone : $r < R_1$

D'après l'équation (2) on écrit $V_1(r) = - \int E_1 dr$

$E_1 = 0$ N/C par conséquent on a, $V_1(r) = C_1$

Deuxième zone $R_1 < r < R_2$

On écrit, $V_2(r) = - \int E_2 dr$, $E_2 = \frac{\delta_1 R_1^2}{\epsilon_0 r^2}$

$$V_2(r) = - \int \frac{\delta_1 R_1^2}{\epsilon_0 r^2} dr = - \frac{\delta_1 R_1^2}{\epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} = \frac{\delta_1 R_1^2}{\epsilon_0 r} + C_2$$

Troisième zone $r > R_2$

On a, $V_3(r) = - \int E_3 dr$, $E_3 = \frac{(\delta_1 R_1^2 + \delta_2 R_2^2)}{\epsilon_0 r^2}$

$$V_3(r) = - \int \frac{(\delta_1 R_1^2 + \delta_2 R_2^2)}{\epsilon_0 r^2} dr = - \frac{(\delta_1 R_1^2 + \delta_2 R_2^2)}{\epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} = \frac{(\delta_1 R_1^2 + \delta_2 R_2^2)}{\epsilon_0 r} + C_3$$

Pour déterminer les valeurs des trois constantes C_1 , C_2 et C_3 on utilise la continuité du potentiel, et la valeur nulle à l'infini, comme suivant :

$$\begin{cases} V_3(\infty) = 0 \\ V_1(R_1) = V_2(R_1) \\ V_2(R_2) = V_3(R_2) \end{cases}$$

D'abord, on a : $V_3(\infty) = C_3 = 0$, donc $V_3(r) = \frac{(\delta_1 R_1^2 + \delta_2 R_2^2)}{\epsilon_0 r} \quad V$

D'autre part, on a : $V_2(R_2) = V_3(R_2)$

$\frac{\delta_1 R_1^2}{\epsilon_0 R_2} + C_2 = \frac{(\delta_1 R_1^2 + \delta_2 R_2^2)}{\epsilon_0 R_2}$, $C_2 = \frac{\delta_2 R_2}{\epsilon_0}$, et par conséquent on écrit :

$$V_2(r) = \frac{\delta_1 R_1^2}{\epsilon_0 r} + \frac{\delta_2 R_2}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{\delta_1 R_1^2}{r} + \delta_2 R_2 \right] \quad V$$

En fin, on a : $V_1(R_1) = V_2(R_1)$

$C_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{\delta_1 R_1^2}{R_1} + \delta_2 R_2 \right]$, donc $V_1(r) = \frac{\delta_1 R_1 + \delta_2 R_2}{\epsilon_0} \quad V$

4. Calcul des valeurs du potentiel électrique $V(r = 0,05 \text{ m})$, $V(r = 0,12 \text{ m})$, $V(r = 0,24 \text{ m})$:

$V(r = 0,05 \text{ m})$: Première zone : $r < R_1$

$$V(r = 0,05 \text{ m}) = V_1(r = 0,05) = \frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 0,1 - 12 \cdot 10^{-6} \cdot 0,17}{8,85 \cdot 10^{-12}} - 1,85 \cdot 10^5 \text{ V}$$

$V(r = 0,12 \text{ m})$: Deuxième zone $R_1 < r < R_2$

$$V(r = 0,12 \text{ m}) = V_2(r = 0,12) = \frac{1}{8,85 \cdot 10^{-12}} \left[\frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 0,1^2}{0,12} - 12 \cdot 10^{-6} (0,17) \right]$$

$$V(r = 0,12 \text{ m}) = -1,93 \cdot 10^5 \text{ V}$$

$V(r = 0,24 \text{ m})$: Troisième zone $r > R_2$

$$V(r = 0,24 \text{ m}) = V_3(r = 0,24) = \frac{(4 \cdot 10^{-6} \cdot 0,1^2 - 12 \cdot 10^{-6} \cdot 0,17^2)}{8,85 \cdot 10^{-12} (0,24)}$$

$$V(r = 0,24 \text{ m}) = -1,44 \cdot 10^5 \text{ V}$$

Exercice (25) :

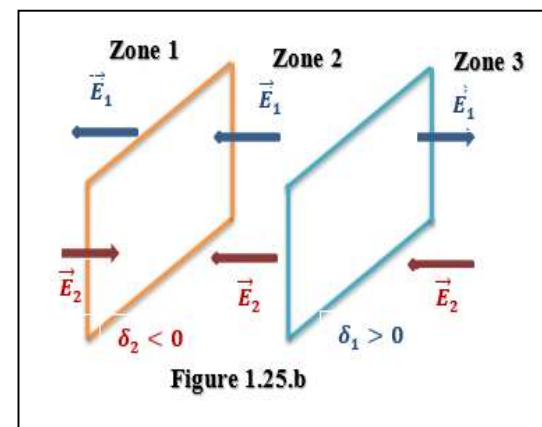
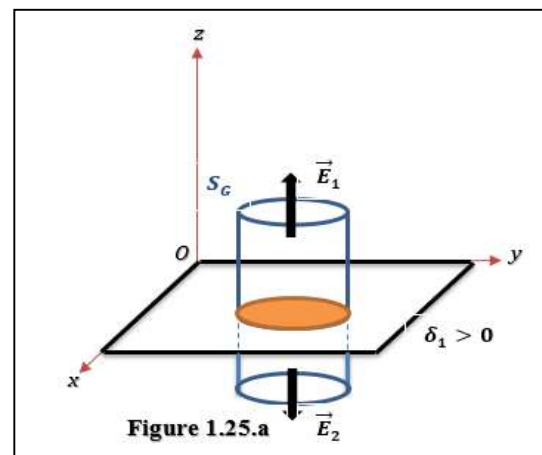
Une plaque conductrice qui se trouve dans le plan (O, x, y) porte une distribution surfacique de charge $\sigma_1 = 5 \cdot 10^{-4} \left(\frac{\text{C}}{\text{m}^2}\right)$. (Figure 1.25.a)

1. Calculer le champ électrique $\vec{E}(z)$ créé par cette plaque.
2. Calculer le potentiel électrique $V(z)$
3. On ajoute une deuxième plaque identique de la première, et en parallèle avec elle, distant de $d = 5 \text{ cm}$, porte une distribution surfacique de charges de densité $\sigma_2 = -5 \cdot 10^{-4} \left(\frac{\text{C}}{\text{m}^2}\right)$. (Figure 1.25.b)

3.1. Calculer le champ électrique \vec{E}

3.2. Calculer la différence de potentiel (d.d.p) entre ces deux plaques.

On donne : $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$



Solution de l'exercice (25) :

On a : $\sigma_1 = 5 \cdot 10^{-4} \left(\frac{C}{m^2}\right)$, $\sigma_2 = -5 \cdot 10^{-4} \left(\frac{C}{m^2}\right)$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$

1. Calcul du champ électrique $\vec{E}(z)$ créé par la plaque :

On applique le théorème de Gauss pour calculer le champ électrique $\vec{E}(z)$ créé par la charge surfacique de la plaque en tout point de l'espace, on a :

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \oint E \cdot ds = E \cdot S = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0} \quad (1)$$

On choisit la surface de Gauss fermée un cylindre de rayon r et de hauteur h , (Voir figure 1.25.a). Ce cylindre a trois surfaces sont, la surface supérieure S_1 et inférieure S_2 qui sont des disques ($S_1 = S_2 = S = \pi r^2$), ainsi que la surface latérale S_3 . On remarque que le champ électrique $\|\vec{E}_1\| = \|\vec{E}_2\| = E$ passe par les deux disques S_1 et S_2 , donc on écrit :

$$\oint E_1 \cdot ds + \oint E_2 \cdot ds = 2E \cdot S = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0} \quad (2)$$

On calcule la charge interne (partie de la charge de la plaque qui se trouve dans la surface (le cylindre) de Gauss (Voir figure 1.25.a)

$$\sigma_1 = \frac{q}{S_{plaque}} = \frac{q_{int}}{S}, \quad q_{int} = \sigma_1 \cdot S = \sigma_1 (\pi r^2)$$

D'après l'équation (2) on a :

$$2E \cdot \pi r^2 = \frac{\sigma_1 (\pi r^2)}{\epsilon_0}, \quad E = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0}, \quad \text{on écrit, } \vec{E} = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \vec{K} \quad N/C$$

Application numérique :

$$E = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{2(8,85 \cdot 10^{-12})} = 28,2 \cdot 10^6 \text{ N/C}$$

$$\text{Par conséquent, on écrit : } \begin{cases} \vec{E}_1 = 28,2 \cdot 10^6 \vec{K} & \left(\frac{N}{C}\right), \quad z > 0 \\ \vec{E}_2 = -28,2 \cdot 10^6 \vec{K} & \left(\frac{N}{C}\right), \quad z < 0 \end{cases}$$

Le champ électrique créé par la charge surfacique de la plaque sur ces deux cotés a la même valeur, mais les deux vecteurs champ \vec{E}_1 (en haut) et \vec{E}_2 (en bas de la plaque) ont des sens

$$\text{opposés.: } \begin{cases} \vec{E}_1 = -\vec{E}_2 \\ \|\vec{E}_1\| = \|\vec{E}_2\| = E = 28,2 \cdot 10^6 \text{ N/C} \end{cases}$$

Le champ électrique à une composante sur l'axe (Oz)

2. Expression du potentiel électrique $V(z)$ créé par la plaque :

On a : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$

$$E = -\frac{dV}{dz}, \quad dV = -Edz, \quad \text{donc } V(z) = -\int Edz \quad (3)$$

$$V(z) = -\int \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} dz = -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \int dz = -\frac{\sigma_1 z}{2\varepsilon_0} + C_1$$

On a : $V(z=0) = C_1$, donc C_1 est le potentiel à la surface de la plaque.

$$V(z) = -\frac{\sigma_1 z}{2\varepsilon_0} + C_1 \quad V$$

3. Cas des deux plaques en parallèle :

On ajoute une deuxième plaque identique de la première, et en parallèle avec elle, distant de

$d = 5 \text{ cm}$, porte une distribution surfacique de charges de densité $\sigma_2 = -5 \cdot 10^{-4} \left(\frac{\text{C}}{\text{m}^2}\right)$,

(Figure 1.25.b).

3.1. Calculer le champ électrique \vec{E} :

Le champ électrique créé par la première plaque a le module $E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$. D'autre part, la charge de cette plaque est positive, et ce champ électrique est dirigé vers l'extérieur (\vec{E}_1 est représenté dans la figure 1.25.b avec la couleur bleue).

De la même façon précédente, le champ électrique créé par la deuxième plaque a le module $E_2 = \left|\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\right| = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$, et la charge de cette plaque est négative, donc ce champ électrique est dirigé vers cette plaque (\vec{E}_2 est représenté dans la figure 1.25.b avec la couleur marron).

Par conséquent, le champ électrique totale créé par les deux plaque en tout point de l'espace est la somme des deux vecteurs champ \vec{E}_1 et \vec{E}_2 , on écrit : $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

D'après la figure 1.25.b, on distingue trois zone d'étude du champ totale, sont :

- Dans les deux zone (1) et (3), on a : $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0} \text{ N/C}$
- Dans la zone (2) entre les deux plaques, on a : $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2\vec{E}_1$

Dans cette zone les deux champs ont le même module et le même sens. Par conséquent, on écrit :

$$\vec{E} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \vec{K} \text{ N/C}, \quad E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \text{ N/C}$$

Application numérique :

$$E = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{8,85 \cdot 10^{-12}} = 56,4 \cdot 10^{-4} \text{ N/C}$$

$$\vec{E} = 56,4 \cdot 10^{-4} \vec{K} \text{ N/C}$$

3.2. Calcul de la différence de potentiel (d.d.p) entre les deux plaques :

La différence de potentiel (d.d.p) entre les deux plaques (armatures d'un condensateur plan) est égale à la circulation du champ électrique \vec{E} entre ces deux plaques le long d'une ligne de champ depuis un point A de la première plaque chargée positivement vers un point B de la deuxième plaque chargée négativement.

On écrit : $dV = -E dr$

$$\int_A^B dV = - \int_A^B E dr = -E \int_A^B dr = -E(AB)$$

$$V_B - V_A = -E(AB), \text{ avec } AB = d$$

$$\Delta V = V_A - V_B = E \cdot d, \text{ on a : } \begin{cases} E = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \\ d = AB = 5 \text{ cm} \end{cases}$$

Par conséquent, la différence de potentiel entre les deux plaques est : $\Delta V = V_A - V_B = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \cdot d$

Application numérique :

$$\Delta V = V_A - V_B = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot 0,05 = 28,2 \cdot 10^5 \text{ V}$$

$$\Delta V = 28,2 \cdot 10^5 \text{ V}$$

I.4. Conclusion :

Dans ce chapitre on a présenté un rappel théorique général de cours avec un nombre important des exercices corrigés en détails, concernant le calcul du champ et potentiel électrique créé par une, ou un ensemble des charges ponctuelles, ainsi que les distributions continues des charges, linéiques, surfaciques et volumiques. Sans oublier le calcul du champ et potentiel électrique créé par des distributions continues des charges ayant un niveau élevé de symétrie en utilisant le théorème de Gauss, afin de permet aux étudiants de maîtriser la résolution des différents problèmes de l'électrostatique.

Chapitre (II)

Les conducteurs

II.1. Introduction :

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude des conducteurs en équilibre électrostatique, leurs propriétés de bases, ainsi que le phénomène d'influence électrostatique entre les conducteurs à la fois partielle et totale. Une grande partie de ce chapitre est consacrée à l'étude des condensateurs de tous types : sphériques, cylindriques et plans. Sans oublier l'association des condensateurs sous leurs deux types : série et parallèle.

II.2. Rappel de cours :

II.2.1. Conducteurs :

II.2.1.1. Définition :

Un conducteur est un matériau qui contient des porteurs de charge électrique pouvant se déplacer facilement, sous l'effet d'un champ électrique extérieur même faible [12], comme :

Les métaux à l'état solide ou liquide, le sol, les solutions aqueuses, les plasmas ...etc.

On dit qu'un conducteur est en équilibre électrostatique, si la vitesse d'ensemble des électrons est nulle en tout point du conducteur. Lorsque le conducteur subit un champ électrique extérieur, les électrons se déplacent avec une vitesse moyenne, cela crée un courant électrique qui provoque un déséquilibre électrostatique du conducteur.

II.2.1.2. Propriétés de base :

A l'équilibre électrostatique un conducteur est caractérisé par [11, 13] :

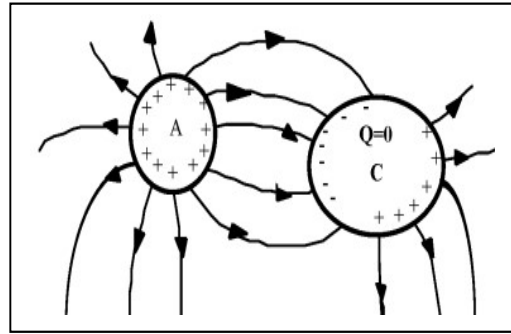
- Champ électrique nul en tout point à l'intérieur du conducteur.
- Champ électrique au voisinage du conducteur est perpendiculaire à sa surface externe.
- Si le conducteur est neutre, le champ électrique externe est nul.
- Potentiel constant en tout point du conducteur.
- La surface externe du conducteur est une surface équipotentielle.
- Un conducteur en équilibre électrostatique est chargé surfaciquement : il n'y a aucune charge à l'intérieur du conducteur. Toutes les charges se répartissent à la surface du matériau.

II.2.1.3. Charge induite et phénomènes d'influences :

L'électrisation par influence électrostatique est un phénomène de séparation des charges électriques positive et négatives existant dans le conducteur en quantités égales [11]. On distingue deux type d'influence électrostatique :

II.2.1.3.1. Influence électrostatique partielle :

On rapproche un conducteur (A) chargé avec une charge positive, à un conducteur (C) neutre isolé. Dans le conducteur neutre, des charges négatives se déplacent à la surface en face du conducteur (A) chargé positivement, avec une apparition des charges positives dans l'autre côté, par influence électrostatique. La charge totale du conducteur (C) reste nulle.

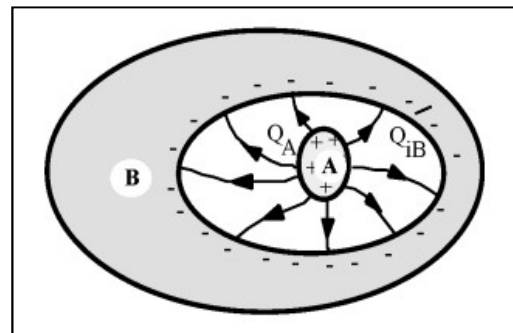


Si on relie le conducteur (C) à la terre, les charges positive s'écoulent au sol, et la charge totale de ce conducteur sera non nulle.

II.2.1.3.2. Influence électrostatique totale :

On dit qu'il y'a une influence totale entre deux conducteur (A) et (B) lorsque l'un entoure l'autre [11, 14].

Considérons un conducteur (A) chargé avec une charge positive Q_A entouré par un conducteur neutre (B). Les charges négatives du conducteur neutre (B) répartissent sur la surface interne, par influence électrostatique, d'où :



$$Q_{iB} = -Q_A$$

D'autre part, les charges positives du conducteur neutre (B) répartissent sur la surface externe du conducteur. Puisque ce conducteur est neutre, donc on a :

$$Q_{extB} = -Q_{iB} = Q_A$$

D'où :

Q_A : est la charge du conducteur (A).

Q_{iB} : est la charge de la surface intérieur du conducteur (B).

Q_{extB} : est la charge de la surface extérieur du conducteur (B).

II.2.2. Pression électrostatique :

Soit un conducteur (A) chargé surfaciquement avec une densité surfacique de charge

$\delta = \frac{q}{S} = \frac{dq}{dS}$, d'après le théorème de Gauss, nous savons que :

Le champ électrique à proximité immédiate du conducteur est $\vec{E} = \frac{\delta}{\epsilon_0} \vec{u}$

Sur la surface même règne un champ électrique $\vec{E} = \frac{\delta}{2\varepsilon_0} \vec{u}$

L'ensemble des forces subies par les charges dq d'un élément de surface dS vaut :

$$\vec{F} = dq\vec{E} = \delta \cdot dS \cdot \frac{\delta}{2\varepsilon_0} \vec{u} = \frac{\delta^2 dS}{2\varepsilon_0} \vec{u}$$

On peut donc calculer la pression électrostatique :

$$P = \frac{dF}{dS} = \frac{\delta^2}{2\varepsilon_0}$$

Donc, un conducteur en équilibre électrostatique subit une pression de dilatation, en tout point de sa surface donnée par [15, 16] :

$$P = \frac{\delta^2}{2\varepsilon_0}$$

Où : δ est la densité surfacique de charge et ε_0 est la permittivité diélectrique du vide.

II.2.3. Condensateurs :

II.2.3.1. Définition :

Un condensateur est un système formé de deux conducteurs très proches l'un de l'autre, en influence totale, ces deux conducteurs sont appelés armatures, séparés par un isolant mince dit diélectrique (papier, céramique, vide...). [16].

Un condensateur permet d'emmagasiner de l'énergie électrique. Une des caractéristiques des condensateurs est leur tension de service maximale, qui dépend de la nature et de l'épaisseur de l'isolant entrant dans leur constitution.

Le diélectrique doit être d'épaisseur constant, faible et de superficie égale à celle des armatures métalliques.

II.2.3.2. Capacité d'un condensateur :

La capacité d'un condensateur C représente le rapport entre la charge q accumulée dans le condensateur, et la différence du potentiel ΔV entre les deux armatures du condensateur, donnée par :

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \text{constant}$$

D'où :

C : Capacité du condensateur, en farads (F)

q : Charge électrique des armatures, en coulomb (C)

ΔV : Différence de potentiel aux bornes du condensateur, en volts (V)

La capacité est une constante propre à chaque condensateur, dépend de plusieurs facteurs tel que :

- La taille du condensateur
- La forme du condensateur.
- La nature de la substance isolante, ou le diélectrique

On distingue trois types des condensateurs selon leurs formes sont :

II.2.3.2.1. Condensateurs plans :

Les deux armatures du condensateur sont des plaques conductrices planes en influence totale. La différence de potentiel entre les deux armatures, l'une chargée positivement et l'autre

négativement est [17] : $\Delta V = V_A - V_B = E \cdot d = \frac{\delta d}{\epsilon_0} = \frac{q}{C}$

$E = \frac{\delta}{\epsilon_0}$: est le champ électrique créé entre les deux armatures.

d : est la distance entre les deux armatures.

q : est la charge du condensateur.

C : est la capacité du condensateur.

ΔV : est la différence du potentiel entre les deux armatures du condensateur.

$\delta = \frac{q}{S}$: est la densité surfacique de charges des armatures.

S : est la surface de l'armature.

ϵ_0 : est la permittivité du vide.

II.2.3.2.2. Condensateurs sphériques :

Sont formé de deux conducteurs sphériques concentriques en influence totale. Le conducteur interne de rayon R_1 et le conducteur externe sphérique a une forme d'une coquille de rayon interne R_2 et externe R_3 .

La différence du potentiel entre les deux armatures sphériques est donnée par la relation

suyvante [18] : $\Delta V = V_A - V_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right] = \frac{q}{C}$

ϵ_0 : est la permittivité du vide.

R_1 : est le rayon du conducteur sphérique interne.

R_2 : est le rayon interne du conducteur sphérique externe.

q : est la charge du condensateur sphérique.

C : est la capacité du condensateur sphérique.

ΔV : est la différence du potentiel entre les deux armatures du condensateur.

II.2.3.2.3. Condensateurs cylindriques :

Ce type des condensateurs est formé de deux conducteurs cylindriques coaxiaux de longueur l , le cylindre interne de rayon R_1 et le cylindre externe de rayon R_2 . Les deux cylindres sont en influence totale.

La différence de potentiel entre les deux armatures cylindriques du condensateur est donnée par la relation suivante : $\Delta V = V_A - V_B = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \left[\frac{R_2}{R_1} \right] = \frac{q}{C}$

q : est la charge du condensateur sphérique.

C : est la capacité du condensateur sphérique.

ϵ_0 : est la permittivité du vide.

l : est la longueur du condensateur cylindrique.

R_1 : est le rayon du cylindre interne.

R_2 : est le rayon du cylindre externe.

ΔV : est la différence du potentiel entre les deux armatures du condensateur.

II.2.3.3. Energie emmagasinée dans un condensateur :

L'énergie électrique W stockée dans un condensateur de capacité C est donnée par la relations suivantes [18, 19] :

$$W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} , W = \frac{1}{2} qV , W = \frac{1}{2} CV^2$$

q : est la charge du condensateur.

C : est la capacité du condensateur.

V : est la différence de potentiel entre les bornes du condensateur.

L'unité de l'énergie W est le Joule.

II.2.3.4. Association des condensateurs :

II.2.3.4.1. Association en série :

La capacité équivalente d'un ensemble des condensateurs associés en série est donnée par la relation suivante [19, 20] :

$$\frac{1}{C_{\text{éq}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

II.2.3.4.2. Association en parallèle :

La capacité équivalente d'un ensemble des condensateurs associés en parallèle est donnée par la relation suivante [19, 20] :

$$C_{\text{éq}} = \sum_{i=1}^n C_i = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

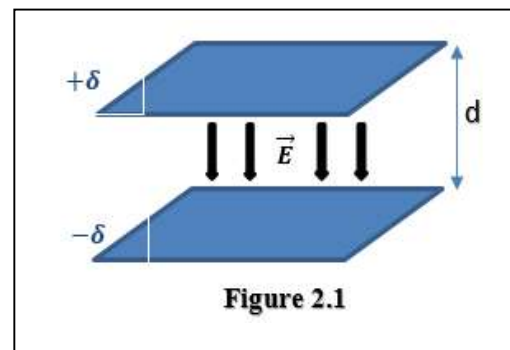
II.3. Série des exercices corrigés :

Exercice (1) :

Un condensateur plan formé de deux plaques planes de superficie $S = 0,1 \text{ m}^2$ distants avec une distance $d = 0,1 \text{ mm}$, portent une densité surfacique de charges :

$$|+\delta| = |-\delta| = 5 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2. \text{ (Figure 2.1).}$$

1. Calculer le champ électrique \vec{E} créé entre les deux armatures.
2. Calculer la charge q portée par chacune des deux armatures.
3. Calculer la différence de potentiel (d.d.p) ΔV entre les deux armatures.
4. Calculer la capacité C de ce condensateur plan.
5. Calculer l'énergie électrique W stockée dans ce condensateur.



On donne : $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

Solution de l'exercice (1) :

On a : $S = 0,1 \text{ m}^2$, $d = 0,1 \text{ mm}$, $|+\delta| = |-\delta| = 5 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.

1. Calcul du champ électrique \vec{E} créé entre les deux armatures :

L'expression du champ électrique créé entre les armatures d'un condensateur est donnée par la relation :

$$E = \|\vec{E}\| = \left| \frac{\delta}{\varepsilon_0} \right| \quad (\text{Voir chapitre I, exercice (25)}).$$

Application numérique :

$$E = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{8,85 \cdot 10^{-12}} = 5,65 \cdot 10^5 \text{ N/C}$$

2. Calcul de la charge q portée par chacune des deux armatures :

On a, $\delta = \frac{q}{S}$, $q = \delta \cdot S$

Application numérique :

$$q = 5 \cdot 10^{-6} (0,1) = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

3. Calcul de la d.d.p entre les deux armatures :

On a :

$$dV = -E dr \text{ , donc } \int_A^B dv = - \int_A^B E \cdot dr = - \int_A^B \frac{\delta}{\epsilon_0} \cdot dr = - \frac{\delta}{\epsilon_0} \int_A^B dr$$

La distance entre les deux armatures est $AB = d = 0,1 \text{ mm}$

On obtient : $V_B - V_A = - \frac{\delta}{\epsilon_0} d = -E \cdot d$

La différence du potentiel entre les armatures du condensateur est :

$$\Delta V = V_A - V_B = \frac{\delta}{\epsilon_0} d = E \cdot d$$

Application numérique :

$$\Delta V = 5,65 \cdot 10^5 (0,1 \cdot 10^{-3}) = 56,5 \text{ V}$$

4. Calcul de la capacité C du condensateur plan :

On a, la différence du potentiel ΔV aux bornes du condensateur est $\Delta V = \frac{q}{C}$

$$C = \frac{q}{\Delta V}$$

Application numérique :

$$C = \frac{0,5 \cdot 10^{-6}}{56,5} = 8,84 \cdot 10^{-9} \text{ F}, \quad C = 8,84 \text{ nF}$$

5. Calcul de l'énergie électrique W stockée dans le condensateur :

L'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur est $W = \frac{q^2}{2C}$

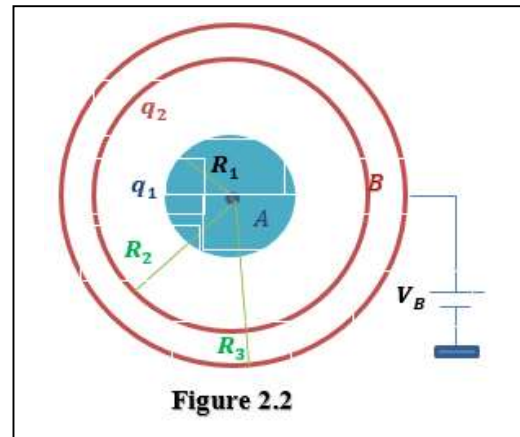
Application numérique :

$$W = \frac{0,5 \cdot 10^{-6}^2}{2(8,84 \cdot 10^{-9})} = 28,3 \cdot 10^{-6} \text{ Joule}$$

Exercice (2) :

Soit un condensateur sphérique formé de deux conducteurs concentriques (Voir Figure 2.2). Le premier conducteur interne A est isolé, de rayon $R_1 = 10 \text{ cm}$ porte une charge

$q_1 = 30 \cdot 10^{-6} \text{ C}$. Le deuxième conducteur externe B de rayon interne $R_2 = 12 \text{ cm}$, et rayon externe $R_3 = 14 \text{ cm}$ est porté à un potentiel V_B constant.



1. On prend au début le potentiel $V_B = 0 \text{ V}$, calculer dans ce cas :

- 1.1. Les charges q_2 et q_3 de la surface interne et externe du conducteur B respectivement.
- 1.2. La d.d.p ΔV entre les deux armatures sphériques A et B .
- 1.3. La capacité C du condensateur sphérique.
- 1.4. L'énergie électrique W stockée (emmagasinée) dans le condensateur.

2. On enlève le potentiel V_B à une valeur différente de zéro ($V_B = 100 \text{ V}$ par exemple), quelles sont les grandeurs qui varient parmi : q_1 , C , ΔV , V_A

Solution de l'exercice (2) :

On a : $R_1 = 10 \text{ cm}$, $q_1 = 30 \cdot 10^{-6} \text{ C}$, $R_2 = 12 \text{ cm}$, $R_3 = 14 \text{ cm}$, $V_B = \text{Cte}$,

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}.$$

1. On prend au début $V_B = 0 \text{ V}$:

1.1. Calcul des charges q_2 et q_3 de la surface interne et externe du conducteur B :

Le conducteur A est isolé, par conséquent sa charge q_1 reste toujours conservée.

On applique le théorème de Gauss au milieu du conducteur B , pour $R_2 < r < R_3$

On choisit la surface de Gauss fermée, une sphère de rayon r , donc sa surface externe est donnée par : $S = S_G = 4\pi r^2$

D'après le théorème de Gauss, on a $\oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = E \cdot S = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0}$

Nous savons que le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur est nul, donc on écrit :

$$E \cdot S = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0} = 0 \quad (q_2 \text{ est la charge de la surface interne du conducteur } B)$$

$$\text{Donc : } q_2 = -q_1 = -30 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

Il y'a une influence totale entre le conducteur A et la surface interne du conducteur B, on dit que les charges de la surface interne du conducteur B sont totalement piégés par le champ électrique créé par la charge q_1 du conducteur A.

le conducteur B a un potentiel nul $V_B = 0 \text{ V}$ (relié à la terre), la surface externe de ce conducteur a une charge nulle.

1.2. Calcul de la d.d.p ΔV entre les deux armatures sphériques A et B :

$$\text{On a, } \int_A^B dv = - \int_A^B E \cdot dr$$

$$R_1 < r < R_2 :$$

On applique le théorème de Gauss pour déterminer l'expression du champ électrique dans cette région : $\oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = E \cdot S = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0}$

$$E \cdot S = E(4\pi r^2) = \frac{q_1}{\epsilon_0}, \quad E = \frac{q_1}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

$$\int_A^B dv = - \int_{R_1}^{R_2} \frac{q_1}{4\pi r^2 \epsilon_0} \cdot dr = - \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2}$$

$$V_B - V_A = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right], \quad \text{on écrit } V_A - V_B = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$$

$$\Delta V = V_A - V_B = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right] \quad (1)$$

Application numérique :

$$\Delta V = \frac{30 \cdot 10^{-6}}{4(3,14)8,85 \cdot 10^{-12}} \left[\frac{0,12 - 0,1}{0,1(0,12)} \right] = 449,8 \cdot 10^3 \text{ V}$$

1.3. Calcul de la capacité C du condensateur sphérique :

$$\text{On a, } \Delta V = \frac{q_1}{C}, \quad \text{donc on a, } C = \frac{q_1}{\Delta V}$$

Application numérique :

$$C = \frac{30 \cdot 10^{-6}}{449,8 \cdot 10^3} = 66,7 \cdot 10^{-12} \text{ F}, \quad C = 66,7 \text{ pF}$$

1.4. Calcul de l'énergie électrique W stockée dans le condensateur :

L'énergie électrique stockée dans le condensateur est donnée par la relation : $W = \frac{q^2}{2C}$

Application numérique :

$$W = \frac{(30 \cdot 10^{-6})^2}{2(66,7 \cdot 10^{-12})} = 6,75 \text{ Joule}$$

2. On varie le potentiel V_B à une valeur différente de zéro :

Le conducteur A est isolé, par conséquent sa charge q_1 reste toujours conservée, et d'après la relation (1), on a :

$$\Delta V = V_A - V_B = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right] = \text{constant}$$

La différence du potentiel entre les deux armatures est constante, parce que tous les grandeurs (q_1 , ϵ_0 , R_1 et R_2) sont des constants. D'autre part on a :

$$\Delta V = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right] = \frac{q_1}{C}, \text{ par conséquent la capacité du condensateur sphérique est constante}$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 \left[\frac{R_1 R_2}{(R_2 - R_1)} \right] = \text{constant}$$

On conclut que la variation du potentiel V_B du conducteur sphérique externe B induit une variation du potentiel V_A du conducteur interne isolé A , et les grandeurs q_1 , C , ΔV restent constants.

Exercice (3) :

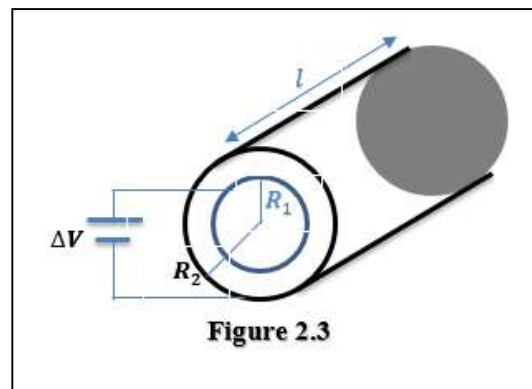
Soit un condensateur cylindrique formé de deux cylindres coaxiaux de longueur

$l = 7 \text{ cm}$. Le cylindre interne de rayon

$R_1 = 1 \text{ cm}$ et le cylindre externe de rayon

$R_2 = 1,2 \text{ cm}$ (Figure 2.3).

On applique une d.d.p entre ces deux armatures $\Delta V = 10^3 \text{ V}$.



1. Calculer la charge q portée par chacune des deux armatures cylindriques.
2. Calculer la capacité C de ce condensateur.
3. Calculer l'énergie électrique W emmagasinée dans le condensateur.
4. Lorsque on varie la d.d.p ΔV au bornes du condensateur, est-ce que la capacité C du condensateur changera ou non.

On donne : $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

Solution de l'exercice (3) :

On a : $l = 7 \text{ cm}$, $R_1 = 1 \text{ cm}$, $R_2 = 1,2 \text{ cm}$, $\Delta V = 10^3 \text{ V}$, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.

1. Calcul de la charge q portée par chacune des deux armatures cylindriques :

La différence du potentiel aux bornes d'un condensateur cylindrique est donnée par :

$$\Delta V = V_A - V_B = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln \left[\frac{R_2}{R_1} \right] = \frac{q}{C} \quad (1)$$

$$\Delta V = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln \left[\frac{R_2}{R_1} \right], \quad q = \frac{2\pi\varepsilon_0 l (\Delta V)}{\ln \left[\frac{R_2}{R_1} \right]}$$

Application numérique :

$$q = \frac{2(3,14)8,85 \cdot 10^{-12} (0,07) 10^3}{\ln \left[\frac{0,012}{0,01} \right]} = 21,34 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

2. Calcul de la capacité C du condensateur :

On a, $\Delta V = \frac{q}{C}$, donc on a, $C = \frac{q}{\Delta V}$

Application numérique :

$$C = \frac{21,34 \cdot 10^{-9}}{10^3} = 21,34 \cdot 10^{-12} \text{ F}, \quad C = 21,34 \text{ pF}$$

3. Calcul de l'énergie électrique W emmagasinée dans le condensateur :

L'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur est donnée par la relation : $W = \frac{q^2}{2C}$

Application numérique :

$$W = \frac{(21,34 \cdot 10^{-9})^2}{2(21,34 \cdot 10^{-12})} = 10,67 \cdot 10^{-6} \text{ Joule}$$

4. Cas d'augmentation du potentiel du condensateur ΔV :

D'après l'équation (1), $\Delta V = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln \left[\frac{R_2}{R_1} \right] = \frac{q}{C}$

L'expression de la capacité C de ce condensateur cylindrique est donnée par :

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln \left[\frac{R_2}{R_1} \right]} = \text{const}$$

La capacité du condensateur est constante, et la variation de la différence du potentiel (d.d.p) ΔV aux bornes du condensateur cause une variation de sa charge q .

Exercice (4) :

Soit les deux circuits représentés dans les deux figures (2.4.a) et (2.4.b). Pour chacun des deux circuits, calculer les grandeurs suivantes :

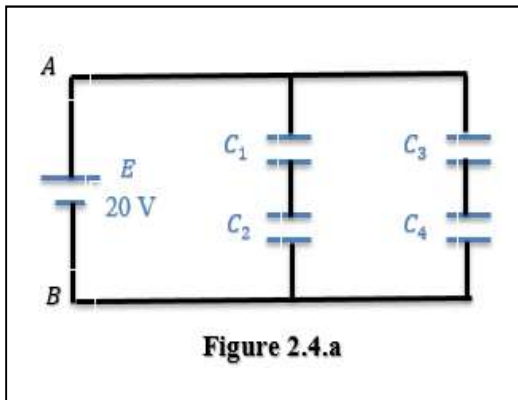


Figure 2.4.a

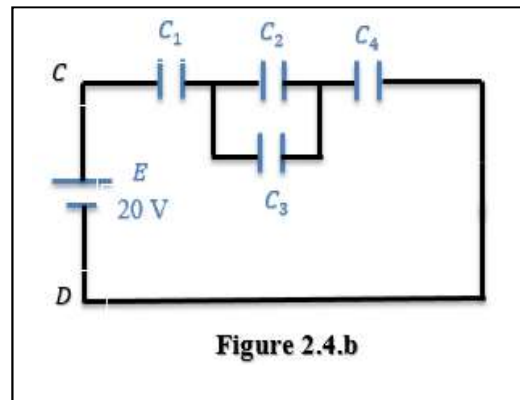


Figure 2.4.b

1. La valeur de la capacité équivalente C_{eq}
2. La charge q de la capacité équivalente.
3. L'énergie W emmagasinée dans la capacité équivalente.
4. La charge et la tension aux bornes de chaque condensateur dans le circuit.

On donne : $E = 20 \text{ V}$, $C_1 = 10 \mu\text{F}$, $C_2 = 15 \mu\text{F}$, $C_3 = 20 \mu\text{F}$, $C_4 = 22 \mu\text{F}$

Solution de l'exercice (4) :

On a : $E = 20 \text{ V}$, $C_1 = 10 \mu\text{F}$, $C_2 = 15 \mu\text{F}$, $C_3 = 20 \mu\text{F}$, $C_4 = 22 \mu\text{F}$.

1. Premier circuit électrique : (Voir la figure 2.4.a)

1.1. Calcul de la capacité équivalente C_{AB} :

Les deux condensateurs C_1 et C_2 sont associés en série, et par conséquent la capacité équivalente est donnée par :

$$\frac{1}{C_{1,2}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}$$

$$C_{1,2} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

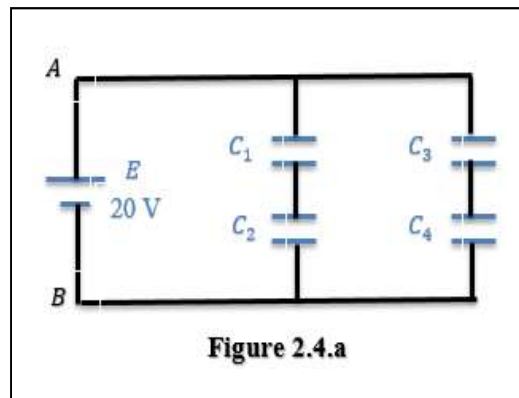


Figure 2.4.a

D'autre part, les deux condensateurs C_3 et C_4 sont associés en série, et par conséquent la capacité équivalente est donnée par :

$$\frac{1}{C_{3,4}} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} = \frac{C_3 + C_4}{C_3 C_4}, \quad C_{3,4} = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4}$$

$$\text{D'après la figure, on a : } C_{AB} = C_{1,2} + C_{3,4} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4}$$

Application numérique :

$$C_{AB} = \frac{10 \cdot 10^{-6}(15 \cdot 10^{-6})}{10 \cdot 10^{-6} + 15 \cdot 10^{-6}} + \frac{20 \cdot 10^{-6}(22 \cdot 10^{-6})}{20 \cdot 10^{-6} + 22 \cdot 10^{-6}} = 16,47 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

1.2. Calcul de la charge q de la capacité équivalente C_{AB} :

$$\text{On a, } \Delta V = E = \frac{q}{C_{AB}}, \quad q = E \cdot C_{AB}$$

Application numérique :

$$q = 20(16,47 \cdot 10^{-6}) = 329,4 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

1.3. Calcul de l'énergie électrique W emmagasinée dans la capacité équivalente C_{AB} :

L'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur est donnée par la relation : $W = \frac{q^2}{2C_{AB}}$

Application numérique :

$$W = \frac{(329,4 \cdot 10^{-6})^2}{2(16,47 \cdot 10^{-6})} = 3,294 \cdot 10^{-3} \text{ Joule}$$

1.4. Calcul de la charge et la tension aux bornes de chaque condensateur dans le circuit :

On commence par les deux condensateurs C_1 et C_2 :

$$\text{On a, } E = V_1 + V_2 = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2}, \quad q_1 = q_2 \text{ (Association en série)}$$

$$E = q_1 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = q_1 \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right)$$

$$q_1 = E \left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \right)$$

Application numérique :

$$q_1 = q_2 = 20 \left(\frac{10 \cdot 10^{-6}(15 \cdot 10^{-6})}{10 \cdot 10^{-6} + 15 \cdot 10^{-6}} \right) = 120 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

Par conséquence on a, $V_1 = \frac{q_1}{C_1}$, $V_2 = \frac{q_2}{C_2}$

Application numérique :

$$V_1 = \frac{120 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 10^{-6}} = 12 \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{120 \cdot 10^{-6}}{15 \cdot 10^{-6}} = 8 \text{ V}$$

On passe au deux condensateur C_3 et C_4 , et de la même façon précédente on a :

$$E = V_3 + V_4 = \frac{q_3}{C_3} + \frac{q_4}{C_4}, \quad q_3 = q_4 \text{ (Association en série)}$$

$$E = q_3 \left(\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \right) = q_3 \left(\frac{C_3 + C_4}{C_3 C_4} \right)$$

$$q_3 = E \left(\frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} \right)$$

Application numérique :

$$q_3 = q_4 = 20 \left(\frac{20 \cdot 10^{-6} (22 \cdot 10^{-6})}{20 \cdot 10^{-6} + 22 \cdot 10^{-6}} \right) = 209,52 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

On calcule le deux potentiel V_3 et V_4 : $V_3 = \frac{q_3}{C_3}$, $V_4 = \frac{q_4}{C_4}$

Application numérique :

$$V_3 = \frac{209,52 \cdot 10^{-6}}{20 \cdot 10^{-6}} = 10,476 \text{ V}$$

$$V_4 = \frac{209,52 \cdot 10^{-6}}{22 \cdot 10^{-6}} = 9,524 \text{ V}$$

2. Deuxième circuit électrique : (Voir la figure 2.4.b)

2.1. Calcul de la capacité équivalente C_{CD} :

Les deux condensateurs C_2 et C_3 sont associés en parallèle, et par conséquence la capacité équivalente est donnée par :

$$C_{2,3} = C_2 + C_3$$

Par conséquence, on écrit :

$$\frac{1}{C_{CD}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{2,3}} + \frac{1}{C_4}$$

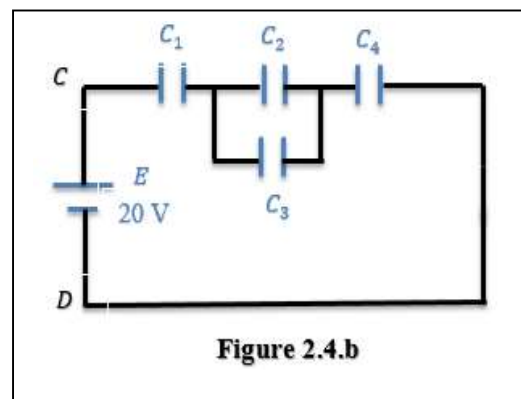


Figure 2.4.b

$$\frac{1}{C_{CD}} = \frac{C_1 C_{2,3} + C_1 C_4 + C_{2,3} C_4}{C_1 C_{2,3} C_4}$$

$$C_{CD} = \frac{C_1 C_{2,3} C_4}{C_1 C_{2,3} + C_1 C_4 + C_{2,3} C_4}$$

Application numérique :

$$C_{2,3} = 15.10^{-6} + 20.10^{-6} = 35.10^{-6} \text{ F}$$

$$C_{CD} = \frac{10.10^{-6}(35.10^{-6})22.10^{-6}}{10.10^{-6}(22.10^{-6})+10.10^{-6}(35.10^{-6})+22.10^{-6}(35.10^{-6})} = 5,746.10^{-6} \text{ F}$$

2.2. Calcul de la charge q de la capacité équivalente C_{CD} :

$$\text{On a, } \Delta V = E = \frac{q}{C_{CD}} \text{ , } q = E \cdot C_{CD}$$

Application numérique :

$$q = 20(5,746.10^{-6}) = 114,92.10^{-6} \text{ C}$$

2.3. Calcul de l'énergie électrique W emmagasinée dans la capacité équivalente C_{CD} :

L'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur est donnée par la relation : $W = \frac{q^2}{2C_{CD}}$

Application numérique :

$$W = \frac{(114,92.10^{-6})^2}{2(5,746.10^{-6})} = 1,149.10^{-3} \text{ Joule}$$

2.4. Calcul de la charge et la tension aux bornes de chaque condensateur dans le circuit :

On a les trois condensateurs C_1 , $C_{2,3}$ et C_4 sont associés en série, donc ils sont traversés par le même courant, et par conséquent ils ont la même charge, on écrit :

$$E = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_1}{C_{2,3}} + \frac{q_1}{C_4} = q_1 \left(\frac{C_1 C_{2,3} + C_1 C_4 + C_{2,3} C_4}{C_1 C_{2,3} C_4} \right)$$

$$q_1 = E \left(\frac{C_1 C_{2,3} C_4}{C_1 C_{2,3} + C_1 C_4 + C_{2,3} C_4} \right)$$

Application numérique :

$$q_1 = q_4 = 20 \left(\frac{10.10^{-6}(22.10^{-6}).35.10^{-6}}{10.10^{-6}(22.10^{-6})+10.10^{-6}(35.10^{-6})+35.10^{-6}(22.10^{-6})} \right) = 114,92.10^{-6} \text{ C}$$

$$q_1 = q_{2,3} = q_4 = 114,92.10^{-6} \text{ C}$$

Le condensateur $C_{2,3}$ possède la charge $q_{2,3} = 114,92 \cdot 10^{-6} \text{ C}$

$$\text{On écrit : } V_{2,3} = \frac{q_{2,3}}{C_{2,3}} = \frac{114,92 \cdot 10^{-6}}{35 \cdot 10^{-6}} = 3,283 \text{ V}$$

$$\text{On a, } V_{2,3} = V_2 = V_3$$

$$V_2 = \frac{q_2}{C_2} = 3,283 \text{ V}, \text{ donc on a, } q_2 = V_2 \cdot C_2 = 3,283(15 \cdot 10^{-6}) = 49,245 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

q_2 est la charge du condensateur C_2

$$\text{D'autre part, } V_3 = \frac{q_3}{C_3} = 3,283 \text{ V}, \text{ on écrit :}$$

$$q_3 = V_3 \cdot C_3 = 3,283(20 \cdot 10^{-6}) = 65,66 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

q_3 est la charge du condensateur C_3

On passe au calcul des tensions de chaque condensateur dans le circuit, on a :

$$V_1 = \frac{q_1}{C_1}, \quad V_2 = \frac{q_2}{C_2}, \quad V_3 = \frac{q_3}{C_3} \text{ et } V_4 = \frac{q_4}{C_4}$$

Application numérique :

$$V_1 = \frac{114,92 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 10^{-6}} = 11,49 \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{49,245 \cdot 10^{-6}}{15 \cdot 10^{-6}} = 3,283 \text{ V}$$

$$V_3 = V_2 = 3,283 \text{ V}$$

$$V_4 = \frac{114,92 \cdot 10^{-6}}{22 \cdot 10^{-6}} = 5,227 \text{ V}$$

Exercice (5) :

Déterminer la valeur de la capacité équivalente des assemblages des condensateurs représentés dans la figure 2.5.

On donne : $C_i = 10i \mu F$

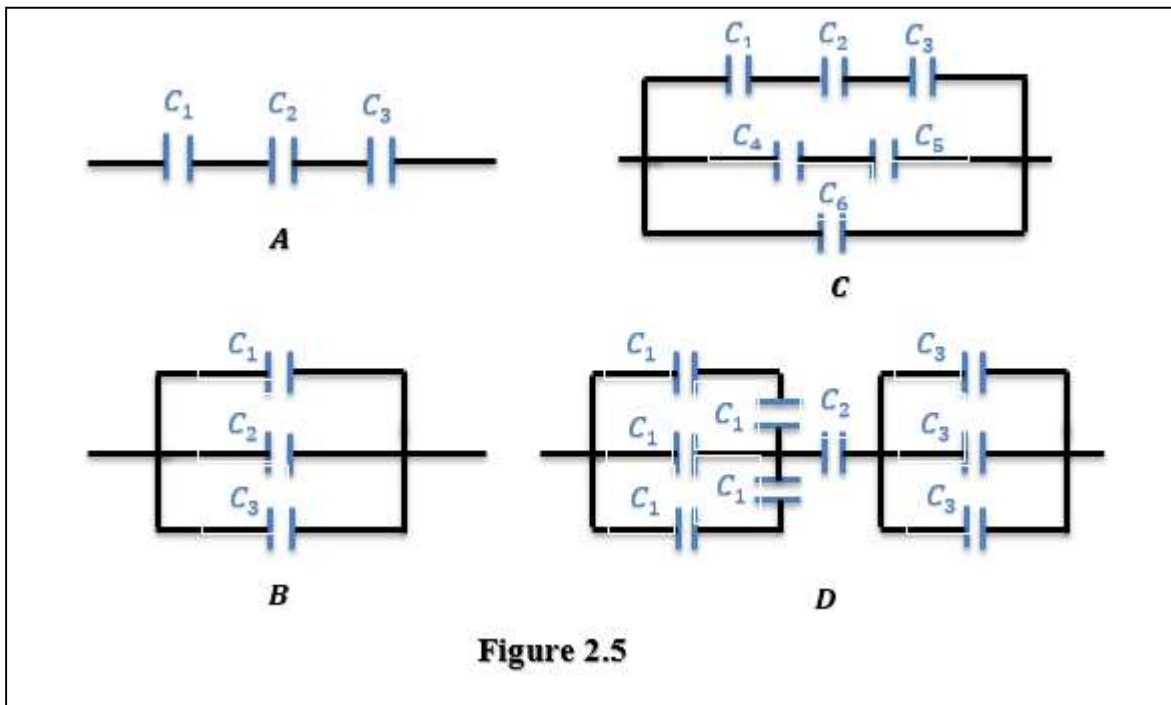


Figure 2.5

Solution de l'exercice (5) :

On a : $C_i = 10i \mu F$

1. Détermination de la capacité équivalente $C_{\text{éq}}$:

1.1. Assemblage A :

Les trois condensateurs C_1 , C_2 et C_3 sont associés en série, donc on a :

$$\frac{1}{C_{\text{éq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3}{C_1 C_2 C_3}$$

$$C_{\text{éq}} = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3}$$

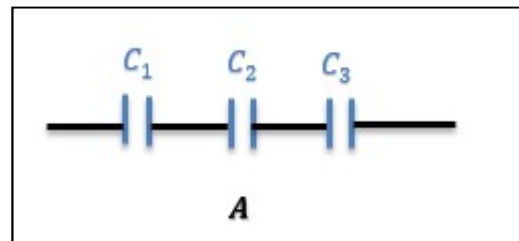
Application numérique :

$$C_{\text{éq}} = \frac{10 \cdot 10^{-6} (20 \cdot 10^{-6}) 30 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 10^{-6} (20 \cdot 10^{-6}) + 10 \cdot 10^{-6} (30 \cdot 10^{-6}) + 20 \cdot 10^{-6} (30 \cdot 10^{-6})} = 5,45 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

$$C_{\text{éq}} = 5,45 \mu F$$

1.2. Assemblage B :

Les trois condensateurs C_1 , C_2 et C_3 sont associés en parallèle, donc on a :



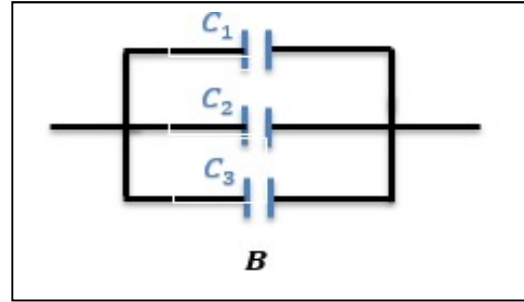
$$C_{\text{éq}} = C_1 + C_2 + C_3$$

Application numérique :

$$C_{\text{éq}} = 10 \cdot 10^{-6} + 20 \cdot 10^{-6} + 30 \cdot 10^{-6}$$

$$C_{\text{éq}} = 60 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

$$C_{\text{éq}} = 60 \text{ } \mu\text{F}$$

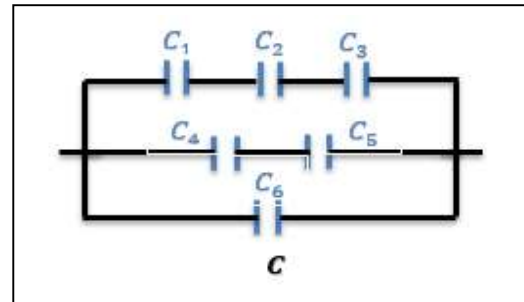


1.3. Assemblage C :

Les trois condensateurs C_1 , C_2 et C_3 sont associés en série, donc on a :

$$\frac{1}{C_{\text{éq1}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3}{C_1 C_2 C_3}$$

$$C_{\text{éq1}} = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3}$$



Application numérique :

$$C_{\text{éq1}} = \frac{10 \cdot 10^{-6} (20 \cdot 10^{-6}) 30 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 10^{-6} (20 \cdot 10^{-6}) + 10 \cdot 10^{-6} (30 \cdot 10^{-6}) + 20 \cdot 10^{-6} (30 \cdot 10^{-6})} = 5,45 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

$$C_{\text{éq1}} = 5,45 \text{ } \mu\text{F}$$

D'autre part, les deux condensateurs C_4 et C_5 sont associés en série, donc on a :

$$\frac{1}{C_{\text{éq2}}} = \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_5} = \frac{C_4 + C_5}{C_4 C_5}$$

$$C_{\text{éq2}} = \frac{C_4 C_5}{C_4 + C_5}$$

Application numérique :

$$C_{\text{éq2}} = \frac{40 \cdot 10^{-6} (50 \cdot 10^{-6})}{40 \cdot 10^{-6} + 50 \cdot 10^{-6}} = 22,22 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

Par conséquent, la capacité équivalente est :

$$C_{\text{éq}} = C_{\text{éq1}} + C_{\text{éq2}} + C_6$$

Application numérique :

$$C_{\text{éq}} = 5,45 \cdot 10^{-6} + 22,22 \cdot 10^{-6} + 60 \cdot 10^{-6} = 87,67 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

1.4. Assemblage D :

On va simplifier cet assemblage des condensateurs.

On a :

$$C_{\acute{e}q3} = \frac{C_1 C_1}{C_1 + C_1} = \frac{C_1}{2}$$

$$C_{\acute{e}q3} = C_{\acute{e}q4} = \frac{C_1}{2}$$

D'autre part : $C_{\acute{e}q5} = C_3 + C_3 + C_3 = 3C_3$

On a, aussi :

$$C_{\acute{e}q6} = C_{\acute{e}q3} + C_{\acute{e}q4} + C_1 = \frac{C_1}{2} + \frac{C_1}{2} + C_1 = 2C_1$$

$$C_{\acute{e}q6} = 2C_1$$

Finalement, on écrit :

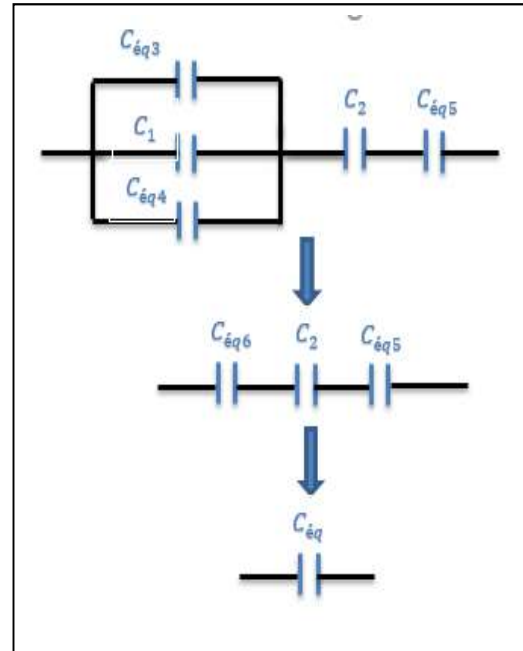
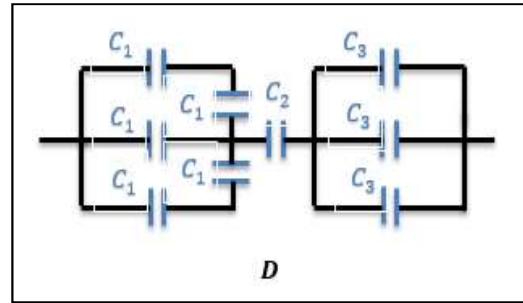
$$C_{\acute{e}q} = \frac{C_2 C_{\acute{e}q5} C_{\acute{e}q6}}{C_2 C_{\acute{e}q5} + C_2 C_{\acute{e}q6} + C_{\acute{e}q5} C_{\acute{e}q6}}$$

Application numérique :

$$C_{\acute{e}q5} = 3C_3 = 3(30 \cdot 10^{-6}) = 90 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

$$C_{\acute{e}q6} = 2C_1 = 2(10 \cdot 10^{-6}) = 20 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

$$C_{\acute{e}q} = \frac{20 \cdot 10^{-6} (90 \cdot 10^{-6}) (20 \cdot 10^{-6})}{20 \cdot 10^{-6} (90 \cdot 10^{-6}) + 20 \cdot 10^{-6} (20 \cdot 10^{-6}) + 90 \cdot 10^{-6} (20 \cdot 10^{-6})} = 9 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$



II.4. Conclusion :

Nous avons présenté en détail un ensemble d'exercices résolus concernant les conducteurs en équilibre électrostatique, les condensateurs de tous types, plans, cylindriques et sphériques, ainsi que la méthode de calculer la capacité équivalente en cas de l'association en série et en parallèle, ainsi que le calcul de l'énergie stockée dans le condensateur.

Chapitre (III)

Courant électrique

III.1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous présentons un rappel théorique des définitions liées aux résistances, telles que la loi d'Ohm et l'énergie perdue par effet Joule, ainsi que l'association des résistances en série et en parallèle. D'autre part, nous présentons un rappel des lois de Kirchhoff (la loi des nœuds et la loi des mailles) et de leurs applications dans la résolution d'exercices liés aux réseaux électriques. Nous concluons par une série d'exercices accompagnés de solutions détaillées.

III.2. Rappel de cours :

III.2.1. Notion d'intensité et de densité de courant

III.2.1.1. Notion d'intensité de courant :

L'intensité électrique de courant est une grandeur physique qui mesure le flux de charges électriques, par exemple des électrons dans un circuit, qu'on appelle aussi un courant électrique. L'intensité représente la quantité de charges électriques qui traverse une section donnée du circuit par unité de temps [13, 15]. L'intensité de courant se mesure en ampères (A) et se note généralement par la lettre I .

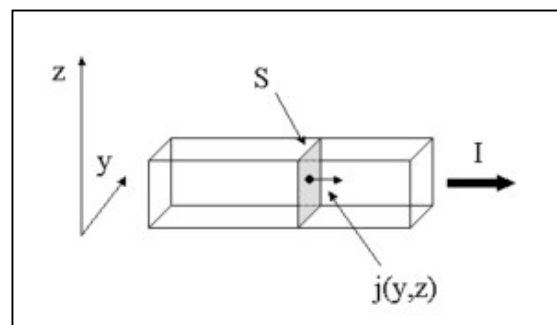
$$\text{On écrit : } I = \frac{dq}{dt} \quad (A)$$

Pour la mesure de l'intensité de courant électrique, on utilise un ampèremètre, qui se branche en série avec le circuit électrique. L'ampèremètre mesure le courant électrique qui traverse le circuit en ampères.

Un ampère correspond à un débit de charges électriques de 1 coulomb par seconde soit au passage de $6,24 \times 10^{18}$ électrons par seconde.

III.2.1.2. Notion de densité de courant :

La densité de courant électrique est définie comme le courant électrique par unité de surface [9, 14], (La densité de courant, ou densité volumique de courant, est un vecteur qui décrit le courant électrique à l'échelle locale, en tout point d'un système physique).



Mathématiquement, le courant et la densité de courant sont liés par la relation :

$$I = \int_S \vec{j}(y, z) \cdot \vec{dS}$$

I : est l'intensité de courant électrique en ampères (A)

$J(y, z)$: est la densité de courant au point de coordonnées (y, z) en $A \cdot m^{-2}$

S : est la section en m^2

III.2.2. Résistance et loi d'Ohm, loi de joule :

III.2.2.1. Définition :

La résistance électrique traduit la propriété d'un composant à s'opposer au passage de courant électrique [9, 11]. Elle est généralement désignée par la lettre R et son unité de mesure est l'Ohm (Ω). Elle est liée aux notions de résistivité et de conductivité électrique.

III.2.2.2. Résistance d'un fil homogène :

La résistance d'un fil homogène est donnée par la relation suivante [20] : $R = \frac{\rho l}{S}$

R : est la résistance du fil.

ρ : est la résistivité, lié à la matière du fil.

l : est la longueur du fil.

S : est la section du fil, généralement pour un fil de rayon r égale à, $S = \pi r^2$ (en m^2).

III.2.2.3. Différence de potentiel aux bornes d'une résistance (loi d'ohm) :

La différence de potentiel aux bornes d'une résistance R traversée par une intensité de courant I est donnée par la relation suivante :

$$V = R \cdot I \text{ (Volt)}$$

III.2.2.4. Puissance électrique dissipée dans une résistance (Loi de Joule) :

La résistance ou la propriété d'un composant à s'opposer au passage de courant électrique, cause une perte d'énergie électrique sous forme de chaleur traduit par l'effet de Joule. Cette puissance électrique dissipée est donnée par la relation suivante :

$$P = R \cdot I^2 \text{ (en joule)}$$

P : est la puissance électrique dissipée par effet de joule.

R : est la résistance du conducteur.

I : est l'intensité de courant traversant la résistance R .

III.2.2.5. Association des résistances :

III.2.2.5.1. Association en série :

La résistance équivalente d'un ensemble des résistances associées en série est donnée par la relation suivante [11, 20] :

$$R_{\text{éq}} = \sum_{i=1}^n R_i = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

III.2.2.5.2. Association en parallèle :

La résistance équivalente d'un ensemble des résistances associées en parallèle est donnée par la relation suivante [13, 15, 20] :

$$\frac{1}{R_{\text{éq}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

III.2.3. Lois de Kirchhoff :

III.2.3.1. Définitions :

Circuit électrique (réseau) : un ensemble des dipôles (résistances, condensateurs, générateurs...) associés de façon quelconque (série et parallèle).

Branche : une partie du circuit électrique parcourue par le même courant I .

Nœud : représente le point de rencontre de trois branches au minimum.

Maille : un contour fermé constitué au moins de deux branches.

III.2.3.2. Deux lois de Kirchhoff :

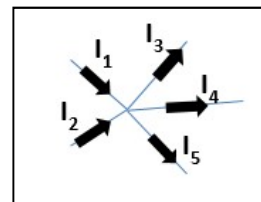
III.2.3.3. Lois des nœuds :

La somme des intensités de courant entrant dans un nœud est égale à la somme des intensités de courant sortant du nœud. [18, 20].

On écrit, $\sum I_i = 0$

Exemple :

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5$$



III.2.3.4. Lois des mailles :

La somme des tensions (différences de potentiel) dans une maille égale zéro. [19, 20].

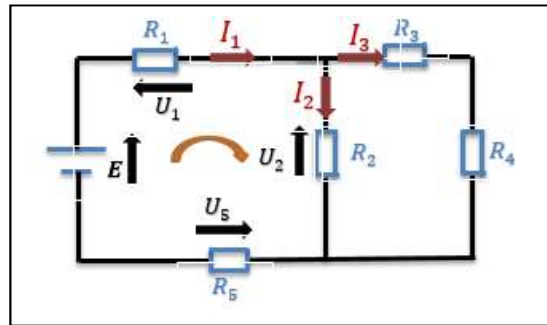
On écrit, $\sum U_i = 0$

Exemple :

On a :

$$E - U_1 - U_2 - U_5 = 0$$

Remarque :



Dans un circuit électrique, on a :

- Nombres des équations des mailles indépendantes m est :

$$m = b - (n - 1)$$

b : est le nombre des branches dans le circuit.

n : est le nombre des nœuds dans le circuit.

- Nombres des courants inconnus = b (Nombres des branches dans le circuit)

III.3. Série des exercices corrigés :

Exercice (1) :

Soit les assemblages des résistances représentés dans la figure 3.1.

1. Déterminer la valeur de la résistance équivalente R_{eq} dans chaque montage.
2. On applique une tension $V = 20 V$ aux bornes de chaque résistance équivalente dans chaque montage, calculer :
 - 2.1. L'intensité de courant qui traverse R_{eq} dans chaque montage.
 - 2.2. La puissance dissipée sous forme de chaleur (effet de Joule) dans chaque cas.

On donne : $R_i = 10i \Omega$

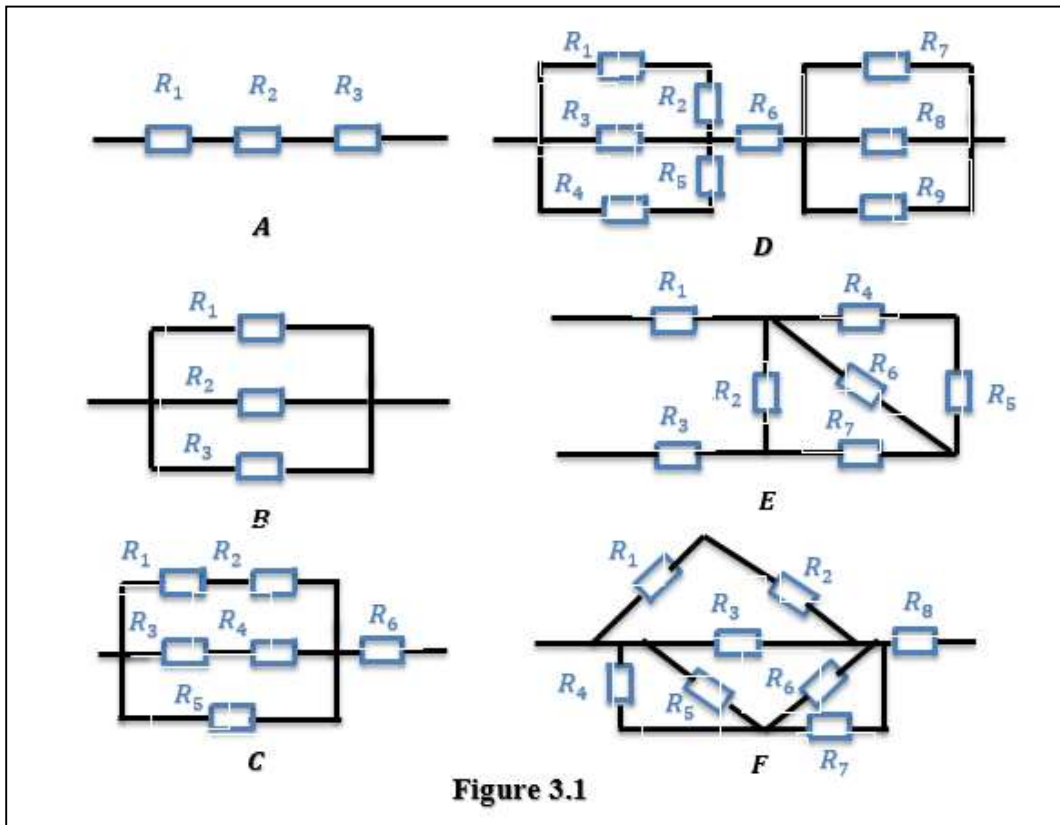


Figure 3.1

Solution de l'exercice (1) :

On a : $R_i = 10i \Omega$

1. Détermination de la résistance équivalente R_{eq} dans chaque montage :

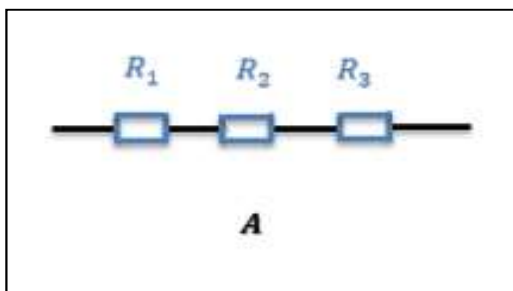
1.1. Montage A :

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

Application numérique :

$$R_{eq} = 10 + 20 + 30 = 60 \Omega$$

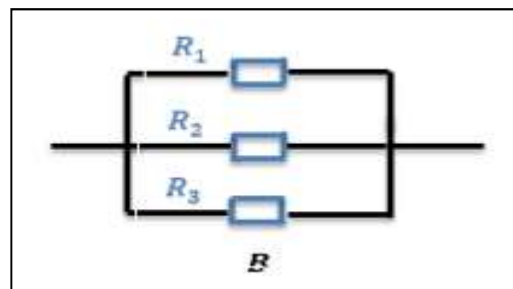
$$R_{eq} = 60 \Omega$$



1.2. Montage B :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 R_2 R_3}$$



$$R_{\acute{e}q} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

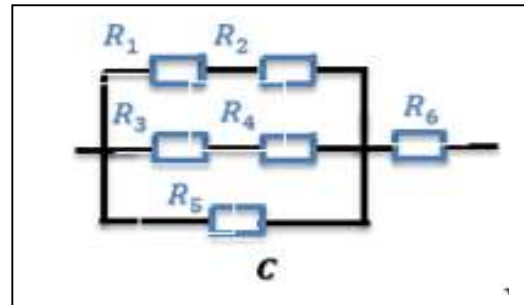
Application numérique :

$$R_{\acute{e}q} = \frac{10(20)30}{10(20) + 10(30) + 20(30)} = 5,45 \Omega$$

1.3. Montage C :

$$R_{\acute{e}q} = [(R_1 + R_2) // (R_3 + R_4) // R_5] + R_6$$

On va simplifier l'expression de la résistance équivalente $R_{\acute{e}q}$:



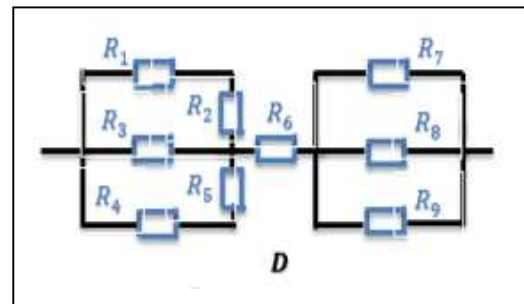
$$R_{\acute{e}q} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)R_5}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + (R_1 + R_2)R_5 + (R_3 + R_4)R_5} + R_6$$

Application numérique :

$$R_{\acute{e}q} = \frac{30(70)50}{30(70)+30(50)+70(50)} + 60 = 74,8 \Omega$$

1.4. Montage D :

$$R_{\acute{e}q} = [(R_1 + R_2) // R_3 // (R_4 + R_5)] + R_6 + [R_7 // R_8 // R_9]$$



$$R_{\acute{e}q} = \frac{(R_1+R_2)R_3(R_4+R_5)}{(R_1+R_2)R_3+(R_1+R_2)(R_4+R_5)+R_3(R_4+R_5)} + R_6 + \frac{R_7 R_8 R_9}{R_7 R_8 + R_7 R_9 + R_8 R_9}$$

Application numérique :

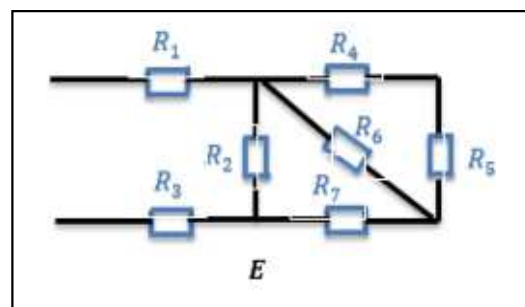
$$R_{\acute{e}q} = \frac{30(30)90}{30(30)+30(90)+30(90)} + 60 + \frac{70(80)90}{70(80)+70(90)+80(90)} = 99,24 \Omega$$

1.5. Montage E :

$$R_{\acute{e}q} = R_1 + [((R_4 + R_5) // R_6) + R_7] // R_2 + R_3$$

$$R_{\acute{e}q} = R_1 + R_3 + \left[\frac{(R_4 + R_5)R_6}{(R_4 + R_5) + R_6} + R_7 \right] // R_2$$

$$R_{\acute{e}q} = R_1 + R_3 + \left[\frac{(R_4+R_5)R_6+R_7(R_4+R_5+R_6)}{(R_4+R_5+R_6)} \right] // R_2$$



On pose, $R_A = \left[\frac{(R_4+R_5)R_6+R_7(R_4+R_5+R_6)}{(R_4+R_5+R_6)} \right]$

On écrit :

$$R_{\acute{e}q} = R_1 + R_3 + R_A // R_2 = R_1 + R_3 + \frac{R_A R_2}{R_A + R_2}$$

Application numérique :

$$R_A = \left[\frac{90(60)+70(150)}{150} \right] = 106 \Omega$$

$$R_{\acute{e}q} = 10 + 30 + \frac{106(20)}{126} = 56,82 \Omega$$

1.5. Montage F :

$$R_{\acute{e}q} = [(R_1 + R_2) // R_3 // (R_4 // R_5 + R_6 // R_7)] + R_8$$

$$R_{\acute{e}q} = \left[\frac{(R_1+R_2)R_3}{(R_1+R_2)+R_3} // \left(\frac{R_4R_5}{R_4+R_5} + \frac{R_6R_7}{R_6+R_7} \right) \right] + R_8$$

On pose :

$$R_A = \frac{(R_1+R_2)R_3}{(R_1+R_2)+R_3} , R_B = \left(\frac{R_4R_5}{R_4+R_5} + \frac{R_6R_7}{R_6+R_7} \right)$$

On écrit, $R_{\acute{e}q} = \frac{R_A \cdot R_B}{R_A + R_B} + R_8$

Application numérique :

$$R_A = \frac{30(30)}{60} = 15 \Omega$$

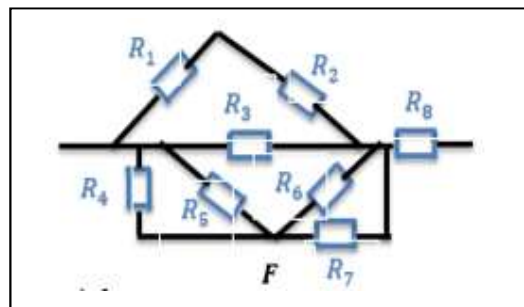
$$R_B = \left(\frac{40(50)}{90} + \frac{60(70)}{130} \right) = 54,53 \Omega$$

$$R_{\acute{e}q} = \frac{15(54,53)}{15+54,53} + 80 = 91,76 \Omega$$

2. On applique une tension $V = 20 V$:

2.1. Calcul de l'intensité de courant qui traverse R_{eq} dans chaque montage :

On a : $V = R_{\acute{e}q} I$, $I = \frac{V}{R_{\acute{e}q}}$



Montage	A	B	C	D	E	F
$R_{\acute{e}q} (\Omega)$	60	5,45	74,8	99,24	56,82	91,76
$I (A)$	0,33	3,67	0,267	0,2	0,35	0,218

2.2. Calcul de la puissance dissipée sous forme de chaleur dans chaque cas :

La puissance dissipée sous forme de chaleur par effet de Joule, est donnée par la relation suivante : $P = RI^2$

Montage	A	B	C	D	E	F
P (Joule)	6,534	73,40	5,332	3,969	6,96	4,36

Exercice (2) :

Calculer la résistance d'un fil métallique de longueur $l = 1 \text{ m}$ et de diamètre $d = 1,5 \text{ mm}$ dans les cas suivant :

1. Un fil de cuivre.
2. Un fil d'argent.
3. Un fil d'or.
4. Un fil d'aluminium.
5. Un fil de magnésium.
6. Un fil de bronze.

On donne :

Les valeurs de la résistivité ρ de chaque matériau à 20°C sont :

$$\rho_{Cu} = 17.10^{-9} \Omega.m, \rho_{Ag} = 16.10^{-9} \Omega.m, \rho_{Au} = 22.10^{-9} \Omega.m, \rho_{Al} = 28.10^{-9} \Omega.m$$

$$\rho_{Mg} = 43.10^{-9} \Omega.m, \rho_{Bronze} = 55.10^{-9} \Omega.m$$

Solution de l'exercice (2) :

$$\text{On a : } l = 1 \text{ m}, d = 1,5 \text{ mm}, \rho_{Cu} = 17.10^{-9} \Omega.m, \rho_{Ag} = 16.10^{-9} \Omega.m,$$

$$\rho_{Au} = 22.10^{-9} \Omega.m, \rho_{Al} = 28.10^{-9} \Omega.m, \rho_{Mg} = 43.10^{-9} \Omega.m, \rho_{Bronze} = 55.10^{-9} \Omega.m.$$

1. Calcul de la résistance d'un fil métallique :

La résistance d'un fil conducteur de longueur l , de section S et de résistivité ρ est donnée par la relation suivante : $R = \frac{\rho l}{S} \quad (\Omega)$

$$\text{La section d'un fil de rayon } r \text{ est } S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \frac{d^2}{4}$$

Application numérique :

$$\text{On a, } d = 1,5.10^{-3} \text{ m}$$

$$S = 3,14 \frac{(1,5 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 1,766 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

1.1. Un fil de cuivre :

La résistivité du cuivre à 20°C est $\rho_{Cu} = 17 \cdot 10^{-9} \Omega \cdot m$

$$R_{Cu} = \frac{17 \cdot 10^{-9}(1)}{1,766 \cdot 10^{-6}} = 9,62 \cdot 10^{-3} \Omega$$

1.2. Un fil d'argent :

La résistivité de l'argent à 20°C est $\rho_{Ag} = 16 \cdot 10^{-9} \Omega \cdot m$

$$R_{Ag} = \frac{16 \cdot 10^{-9}(1)}{1,766 \cdot 10^{-6}} = 9,06 \cdot 10^{-3} \Omega$$

1.3. Un fil d'or :

La résistivité de l'or à 20°C est $\rho_{Au} = 22 \cdot 10^{-9} \Omega \cdot m$

$$R_{Au} = \frac{22 \cdot 10^{-9}(1)}{1,766 \cdot 10^{-6}} = 12,46 \cdot 10^{-3} \Omega$$

1.4. Un fil d'aluminium :

La résistivité de l'aluminium à 20°C est $\rho_{Al} = 28 \cdot 10^{-9} \Omega \cdot m$

$$R_{Al} = \frac{28 \cdot 10^{-9}(1)}{1,766 \cdot 10^{-6}} = 15,86 \cdot 10^{-3} \Omega$$

1.5. Un fil de magnésium :

La résistivité du magnésium à 20°C est $\rho_{Mg} = 43 \cdot 10^{-9} \Omega \cdot m$

$$R_{Mg} = \frac{43 \cdot 10^{-9}(1)}{1,766 \cdot 10^{-6}} = 24,35 \cdot 10^{-3} \Omega$$

1.6. Un fil de bronze :

La résistivité du bronze à 20°C est $\rho_{Bronze} = 55 \cdot 10^{-9} \Omega \cdot m$

$$R_{Bronze} = \frac{55 \cdot 10^{-9}(1)}{1,766 \cdot 10^{-6}} = 31,14 \cdot 10^{-3} \Omega$$

Exercice (3) :

Soit le circuit électrique représenté dans la figure 3.2.

1. Combien des nœuds dans le circuit.
2. Combien des mailles dans le circuit.
3. Calculer les différentes intensités de courant traversant les différentes résistances dans le circuit.

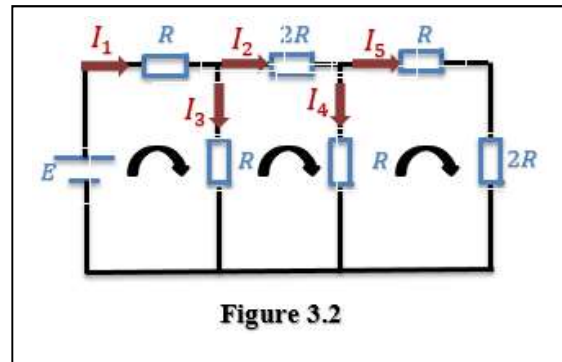


Figure 3.2

On donne : $E = 20 \text{ V}$, $R = 10 \Omega$

Solution de l'exercice (3) :

On a : $E = 20 \text{ V}$, $R = 10 \Omega$.

1. Nombre des nœuds dans le circuit :

Il y'a quatre nœuds dans le circuit, donc $n = 4$

2. Nombre des mailles dans le circuit :

Il y'a six mailles dans le circuit ($l = 6$)

3. Calcul des différentes intensités de courant traversant les différentes résistances :

D'après la loi des nœuds $\sum I_i = 0$, on écrit :

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (1)$$

$$I_2 = I_4 + I_5 \quad (2)$$

On applique la loi des mailles $\sum U_i = 0$

On commence par la première maille à gauche de la figure 3.2, on a :

$$E - RI_1 - RI_3 = 0 \quad (3)$$

On passe au deuxième maille au milieu du circuit, on a :

$$RI_3 - 2RI_2 - RI_4 = 0 \quad (4)$$

Dans la troisième maille à droite de la figure 4.7, on écrit :

$$RI_4 - RI_5 - 2RI_5 = 0, \text{ donc :}$$

$$RI_4 - 3RI_5 = 0 \quad (5)$$

On remplace l'équations (1) dans (3), on obtient :

$$E - R(I_2 + I_3) - RI_3 = 0, \text{ donc } E - RI_2 - 2RI_3 = 0 \quad (6)$$

On remplace l'équations (2) dans (4), on obtient :

$$RI_3 - 2R(I_4 + I_5) - RI_4 = 0, \text{ donc } RI_3 - 3RI_4 - 2RI_5 = 0 \quad (7)$$

On remplace l'équations (2) dans (6), on obtient :

$$E - R(I_4 + I_5) - 2RI_3 = 0, \text{ donc } 2RI_3 + RI_4 + RI_5 = E \quad (8)$$

On écrit le système des trois équations (5), (7), (8) avec les trois inconnus I_3, I_4 et I_5 :

$$\begin{cases} 2RI_3 + RI_4 + RI_5 = E \\ 0I_3 + RI_4 - 3RI_5 = 0 \\ RI_3 - 3RI_4 - 2RI_5 = 0 \end{cases}$$

On utilise la méthode de résolution de Cramer, on commence par le calcul du déterminant du système :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2R & R & R \\ 0 & R & -3R \\ R & -3R & -2R \end{vmatrix}, \text{ d'autre part on a } R = 10 \Omega.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 20 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & -30 \\ 10 & -30 & -20 \end{vmatrix} = -26000$$

On passe au calcul des trois intensités de courant I_3, I_4 et I_5 :

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 20 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & -30 \\ 0 & -30 & -20 \end{vmatrix}}{-26000} = 0,85 \text{ A}$$

$$I_4 = \frac{\begin{vmatrix} 20 & 20 & 10 \\ 0 & 0 & -30 \\ 10 & 0 & -20 \end{vmatrix}}{-26000} = 0,23 \text{ A}$$

$$I_5 = \frac{\begin{vmatrix} 20 & 10 & 20 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & -30 & 0 \end{vmatrix}}{-26000} = 0,08 \text{ A}$$

On calcule les autres intensités de courant, on a :

$$I_2 = I_4 + I_5 = 0,23 + 0,08 = 0,31 \text{ A}$$

$$I_1 = I_2 + I_3 = 0,31 + 0,85 = 1,16 \text{ A}$$

Exercice (4) :

Soit le circuit électrique représenté dans la figure 3.3.

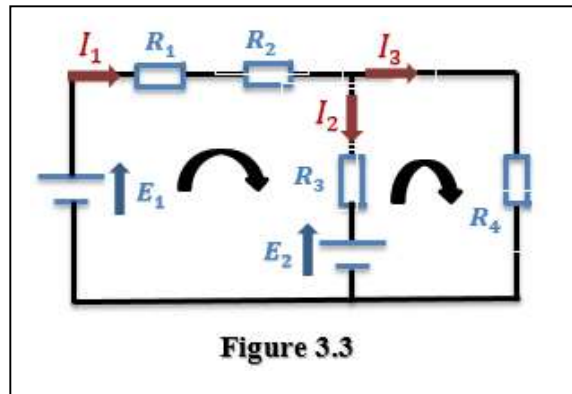


Figure 3.3

1. Combien des nœuds dans le circuit.
2. Combien des mailles dans le circuit.
3. Quel est le nombre des équations des mailles indépendantes.
4. Calculer les différentes intensités de courant traversant les différentes branches dans le circuit.
5. Calculer les différentes tensions aux bornes de chaque résistance dans le circuit.
6. Calculer la puissance dissipée sous forme de chaleur par effet de Joule dans chaque résistance.
7. Déterminer le récepteur et le générateur dans le circuit.

On donne : $E_1 = 20 \text{ V}$, $E_2 = 12 \text{ V}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 14 \Omega$, $R_3 = 18 \Omega$, $R_4 = 20 \Omega$.

Solution de l'exercice (4) :

On a : $E_1 = 20 \text{ V}$, $E_2 = 12 \text{ V}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 14 \Omega$, $R_3 = 18 \Omega$, $R_4 = 20 \Omega$.

1. Nombre des nœuds dans le circuit :

Il y'a deux nœuds dans le circuit représenté dans la figure 3.3.

$$n = 2$$

2. Nombre des mailles dans le circuit :

Il y'a trois maille dans le circuit ($l = 3$).

3. Nombre des équations des mailles indépendantes :

Le nombre des équations indépendantes des mailles est donnée par la relation suivante :

$$m = b - (n - 1)$$

b : est le nombre des branches dans le circuit. Dans ce cas $b = 3$

$$\text{Par conséquent, } m = 3 - (2 - 1) = 2$$

Il y'a deux équations des mailles indépendantes.

4. Calcul des différentes intensités de courant traversant les différentes branches :

On applique la loi des nœuds $\sum I_i = 0$:

D'après la figure 4.8, on a : $I_1 = I_2 + I_3$ (1)

On applique la loi des mailles $\sum U_i = 0$:

On commence par la première maille à gauche de la figure 4.8, on a :

$$E_1 - (R_1 + R_2)I_1 - R_3I_2 - E_2 = 0 \quad (2)$$

On passe au deuxième maille à droite de la figure 4.8, on obtient :

$$E_2 + R_3I_2 - R_4I_3 = 0 \quad (3)$$

On remplace l'équation (1) dans l'équation (2), on obtient :

$$\begin{aligned} E_1 - (R_1 + R_2)(I_2 + I_3) - R_3I_2 - E_2 &= 0 \\ -(R_1 + R_2 + R_3)I_2 - (R_1 + R_2)I_3 &= E_2 - E_1 \end{aligned} \quad (4)$$

On obtient les deux équations des mailles indépendantes :

$$\begin{cases} -(R_1 + R_2 + R_3)I_2 - (R_1 + R_2)I_3 = E_2 - E_1 \\ -R_3I_2 + R_4I_3 = E_2 \end{cases}$$

On remplace les valeurs de chaque résistance, ainsi que E_1 et E_2 , on obtient le système des deux équations suivant :

$$\begin{cases} -42I_2 - 24I_3 = -8 \\ -18I_2 + 20I_3 = 12 \end{cases}$$

On calcule le déterminant, on a :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -42 & -24 \\ -18 & 20 \end{vmatrix} = -1272$$

On calcule les intensités de courant, on a :

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} -8 & -24 \\ 12 & 20 \end{vmatrix}}{-1272} = -0,1 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} -42 & -8 \\ -18 & 12 \end{vmatrix}}{-1272} = 0,51 \text{ A}$$

On calcule l'intensité de courant I_1 :

$$I_1 = I_2 + I_3 = -0,1 + 0,51 = 0,41 \text{ A}$$

Le courant I_2 a un signe négatif, c'est-à-dire que le sens réel de ce courant est opposé à celui-ci montré dans le circuit de la figure 4.8 (les sens des courants montrés dans la figure sont choisies de façon arbitraire).

5. Calcul des différentes tensions aux bornes de chaque résistance dans le circuit :

D'après la loi d'Ohm, on a : $U = R.I$ (V)

On écrit, $U_1 = R_1 \cdot I_1$, $U_2 = R_2 \cdot I_1$, $U_3 = R_3 \cdot I_2$ et $U_4 = R_4 \cdot I_3$

Application numérique :

$$U_1 = 10(0,41) = 4,1 \text{ V}$$

$$U_2 = 14(0,41) = 5,74 \text{ V}$$

$$U_3 = 18(0,1) = 1,8 \text{ V}$$

$$U_4 = 20(0,51) = 10,2 \text{ V}$$

6. Calcul de la puissance dissipée sous forme de chaleur par effet de Joule dans chaque résistance :

La puissance dissipée dans une résistance par effet de Joule est donnée par la relation suivante :

$$P = R \cdot I^2 \text{ (Joule)}$$

On obtient :

$$P_1 = R_1 \cdot I_1^2, P_2 = R_2 \cdot I_1^2, P_3 = R_3 \cdot I_2^2 \text{ et } P_4 = R_4 \cdot I_3^2$$

Application numérique :

$$P_1 = 10 \cdot (0,41)^2 = 1,68 \text{ J}$$

$$P_2 = 14 \cdot (0,41)^2 = 2,35 \text{ J}$$

$$P_3 = 18 \cdot (0,1)^2 = 0,18 \text{ J}$$

$$P_4 = 20 \cdot (0,51)^2 = 5,2 \text{ J}$$

7. Détermination du récepteur et le générateur dans le circuit :

Le courant I_1 sort du pôle positif de E_1 et par conséquent ce dernier est un générateur. D'autre part, le courant I_2 (sens réel) sort du pôle positif de E_2 qui joue le rôle d'un deuxième générateur dans le circuit.

Exercice (5) :

Soit le circuit électrique représenté dans la figure 3.4. Répondre sur les questions suivantes :

1. Combien de branche dans le circuit électrique.
2. Combien de courant inconnu dans le montage.

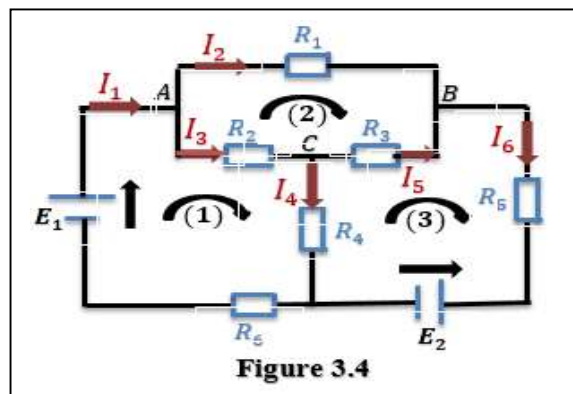


Figure 3.4

3. Combien de maille dans le circuit électrique.
4. Combien de nœud dans le montage.
5. Quel est le nombre des équations des mailles indépendantes.
6. Calculer les différentes intensités de courant traversant les différentes résistances dans le circuit.
7. Déterminer le générateur et le récepteur dans le montage.

On donne :

$$E_1 = 15 \text{ V}, E_2 = 12 \text{ V}, R_1 = 12 \Omega, R_2 = 14 \Omega, R_3 = 16 \Omega, R_4 = 20 \Omega, R_5 = 22 \Omega$$

$$R_6 = 28 \Omega.$$

Solution de l'exercice (5) :

$$\text{On a : } E_1 = 15 \text{ V}, E_2 = 12 \text{ V}, R_1 = 12 \Omega, R_2 = 14 \Omega, R_3 = 16 \Omega, R_4 = 20 \Omega, R_5 = 22 \Omega$$

$$R_6 = 28 \Omega.$$

1. Nombre des branches dans le circuit :

Il y'a six branche dans le montage, donc : $b = 6$

2. nombre des courants inconnus dans le montage :

Nombre des courants inconnus = Nombre des branches dans le montage

$$\text{Nombre des courants inconnus} = 6$$

3. Nombre des mailles dans le circuit électrique :

D'après la figure 3.4, on constate qu'il y'a sept maille dans le circuit électrique ($l = 7$).

4. Nombre des nœuds dans le montage :

On remarque que le montage électrique contient quatre nœuds, $n = 4$.

5. Nombre des équations des mailles indépendantes :

Le nombre des équations indépendantes des mailles est donnée par la relation suivante :

$$m = b - (n - 1)$$

b : est le nombre des branches dans le circuit électrique.

n : est le nombre des nœuds dans le circuit électrique.

$$\text{Par conséquence, } m = 6 - (4 - 1) = 3$$

Il y'a trois équations des mailles indépendantes.

6. Calcul des différentes intensités de courant traversant les différentes résistances dans le circuit électrique :

On applique la loi des nœuds au trois nœuds A, B, C, on obtient :

$$\sum I_i = 0$$

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (1)$$

$$I_3 = I_4 + I_5 \quad (2)$$

$$I_6 = I_2 + I_5, \text{ donc on a, } I_2 = I_6 - I_5 \quad (3)$$

On remplace les expressions de I_2 , I_3 dans l'équation (1), on obtient :

$$I_1 = I_6 - I_5 + I_4 + I_5 = I_4 + I_6$$

$$\text{Donc, } I_1 = I_4 + I_6 \quad (4)$$

On applique la loi des mailles dans les trois mailles 1, 2 et 3 (Voir figure 3.4), on obtient :

$$\begin{cases} E_1 - R_2 I_3 - R_4 I_4 - R_6 I_1 = 0 & (5) \\ -R_1 I_2 + R_3 I_5 + R_2 I_3 = 0 & (6) \\ R_4 I_4 - R_3 I_5 - R_5 I_6 - E_2 = 0 & (7) \end{cases}$$

On remplace les équations des nœuds (2), (3), et (4) dans les équations des mailles (5), (6), on obtient le système de trois équations avec trois inconnus I_4 , I_5 et I_6 suivant :

$$\begin{cases} R_4 I_4 - R_3 I_5 - R_5 I_6 = E_2 & (7) \\ (R_2 + R_4 + R_6) I_4 + R_2 I_5 + R_6 I_6 = E_1 & (8) \\ R_2 I_4 + (R_1 + R_2 + R_3) I_5 - R_1 I_6 = 0 & (9) \end{cases}$$

On remplace les valeurs des résistances dans ce système des équations, on obtient :

$$\begin{cases} 20 I_4 - 16 I_5 - 22 I_6 = 12 & (7) \\ 62 I_4 + 14 I_5 + 28 I_6 = 15 & (8) \\ 14 I_4 + 42 I_5 - 12 I_6 = 0 & (9) \end{cases}$$

On utilise la méthode de Cramer pour résoudre ce système des équations. On commence par le calcul de déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 20 & -16 & -22 \\ 62 & 14 & 28 \\ 14 & 42 & -12 \end{vmatrix} = -98032$$

On passe au calcul des différentes intensités de courant, on a :

$$I_4 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -16 & -22 \\ 15 & 14 & 28 \\ 0 & 42 & -12 \end{vmatrix}}{-98032} = 0,34 \text{ A}$$

$$I_5 = \frac{\begin{vmatrix} 20 & 12 & -22 \\ 62 & 15 & 28 \\ 14 & 0 & -12 \end{vmatrix}}{-98032} = -0,15 \text{ A}$$

$$I_6 = \frac{\begin{vmatrix} 20 & -16 & 12 \\ 62 & 14 & 15 \\ 14 & 42 & 0 \end{vmatrix}}{-98032} = -0,13 \text{ A}$$

Les deux courants I_5 et I_6 ont un signe négatif, cela signifie que leurs sens réels sont opposés aux sens choisis au début de façon arbitraire, qui sont représentés dans la figure 3.4.

On passe au calcul des autres intensités de courant, on a :

$$I_2 = I_6 - I_5 = -0,13 + 0,15 = 0,02 \text{ A}$$

$$I_3 = I_4 + I_5 = 0,34 - 0,15 = 0,19 \text{ A}$$

$$I_1 = I_2 + I_3 = 0,02 + 0,19 = 0,21 \text{ A}$$

7. Détermination du générateur et récepteur dans le montage électrique :

Le courant I_1 sort du pôle positif de E_1 , et par conséquent ce dernier est un générateur.

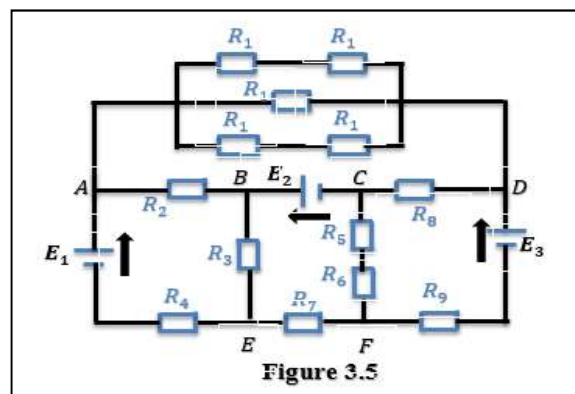
D'autre part, le courant I_6 (sens réel) sort du pôle positif de E_2 , et par conséquent ce dernier joue le rôle d'un générateur dans le circuit.

On conclut que E_1 et E_2 jouent les rôles de deux générateurs dans le circuit électrique.

Exercice (6) :

Soit le circuit électrique de la figure 3.5 ci-contre. Répondre sur les questions suivantes :

1. Calculer les valeurs des résistances équivalentes R_{AD} et R_{CF} .
2. Combien de nœuds dans le circuit électrique.
3. Combien de branches dans le montage électrique.
4. Combien de mailles dans ce circuit électrique.
5. Calculer le nombre m des équations des mailles indépendantes.
6. Calculer les différentes intensités de courant traversant les différentes branches.
7. Calculer les différentes tensions aux bornes de chaque résistance ainsi que la puissance électrique dissipée dans chaque résistance.
8. Déterminer les générateurs et les récepteurs dans le circuit.



On donne :

$$E_1 = 20 \text{ V}, E_2 = 15 \text{ V}, E_3 = 12 \text{ V}, R_i = 10 \Omega$$

Solution de l'exercice (6) :

$$\text{On a : } E_1 = 20 \text{ V}, E_2 = 15 \text{ V}, E_3 = 12 \text{ V}, R_i = 10 \Omega$$

1. Calcul des valeurs des résistances équivalentes:

On commence par la première résistance équivalente R_{AD} :

$$R_{AD} = [(R_1 + R_1) // R_1 // (R_1 + R_1)]$$

$$R_{AD} = [2R_1 // R_1 // 2R_1] = \frac{2R_1(R_1)2R_1}{2R_1^2 + 4R_1^2 + 2R_1^2}$$

$$R_{AD} = \frac{4R_1^3}{8R_1^2} = \frac{R_1}{2}$$

Application numérique :

$$R_{AD} = \frac{10}{2} = 5 \Omega$$

On passe à la deuxième résistance équivalente R_{CF} :

$$R_{CF} = R_5 + R_6$$

Application numérique :

$$R_{CF} = 50 + 60 = 110 \Omega$$

2. Le nombre n des nœuds dans le circuits électrique :

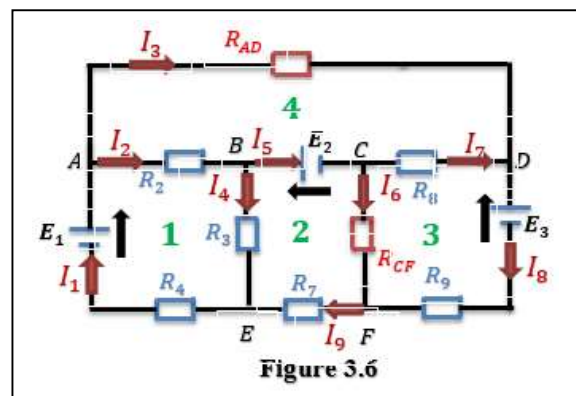
Remarque : à partir de cette question on travaille avec le montage qui contient les résistances équivalentes R_{AD} et R_{CF} , représenté dans la figure 3.6.

D'après la figure 4.11, on constate qu'il y'a six (6) nœuds dans le montage électrique

Donc, $n = 6$.

3. Le nombre b des branches dans le circuits électrique :

On constate qu'il y'a neuf (9) branches dans le circuit électrique, $b = 9$.



Par conséquent il y'a 9 courant inconnu dans le montage.

4. Le nombre l des mailles dans le circuits électrique :

On constate que le circuit électrique contient 14 mailles, $l = 14$.

5. Le nombre m des équations des mailles indépendantes :

le nombre m des équations des mailles indépendantes peut être calculer par la relation suivante :

$$m = b - (n - 1)$$

$$m = 9 - (6 - 1) = 4$$

Il y'a 4 équations des mailles indépendantes relatif à ce montage électrique.

6. Calcul des différentes intensités de courant traversant les différentes branches :

On applique la loi des nœuds aux nœuds A, B, C, D, F

$$\sum I_i = 0$$

On obtient les équations suivantes :

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (1)$$

$$I_2 = I_4 + I_5 \quad (2)$$

$$I_5 = I_6 + I_7 \quad (3)$$

$$I_8 = I_7 + I_3, \text{ on écrit } I_3 = I_8 - I_7 \quad (4)$$

$$I_9 = I_6 + I_8 \quad (5)$$

On remplace l'équation (3) dans l'équation (2), on obtient :

$$I_2 = I_4 + I_5 = I_4 + I_6 + I_7$$

$$I_2 = I_4 + I_6 + I_7 \quad (6)$$

On remplace les équations (6) et (4) dans l'équation (1), on obtient :

$$I_1 = I_2 + I_3 = I_4 + I_6 + I_7 + I_8 - I_7 = I_4 + I_6 + I_8$$

$$I_1 = I_4 + I_6 + I_8 \quad (7)$$

D'autre part, on applique la loi des mailles dans les quatre mailles 1, 2, 3 et 4 (Regarder figure 4.11).

La maille 1 :

$$E_1 - R_2 I_2 - R_3 I_4 - R_4 I_1 = 0 \quad (8)$$

La maille 2 :

$$R_3 I_4 - E_2 - R_{CF} I_6 - R_7 I_9 = 0 \quad (9)$$

La maille 3 :

$$R_{CF} I_6 - R_8 I_7 - E_3 - R_9 I_8 = 0 \quad (10)$$

La maille 4 :

$$-R_{AD} I_3 + R_8 I_7 + E_2 + R_2 I_2 = 0 \quad (11)$$

On remplace les valeurs des différentes résistances et de E_1 , E_2 et E_3 dans les quatre équations des mailles, on obtient le système des équations suivant :

$$\begin{cases} 20I_2 + 30I_4 + 40I_1 = 20 & (8) \\ 30I_4 - 110I_6 - 70I_9 = 15 & (9) \\ 110I_6 - 80I_7 - 90I_8 = 12 & (10) \\ 5I_3 - 80I_7 - 20I_2 = 15 & (11) \end{cases}$$

On remplace les expressions des courants I_1 , I_2 , I_3 , I_5 et I_9 (équations (7), (6), (4), (3), (5)) dans les équations des mailles (8), (9) et (11), on obtient :

$$\begin{cases} 90I_4 + 60I_6 + 20I_7 + 40I_8 = 20 & (8) \\ 30I_4 - 180I_6 + 0I_7 - 70I_8 = 15 & (9) \\ 0I_4 + 110I_6 - 80I_7 - 90I_8 = 12 & (10) \\ -20I_4 - 20I_6 - 105I_7 + 5I_8 = 15 & (11) \end{cases}$$

On utilise la méthode de Cramer pour résoudre ce système linéaire de quatre équations à quatre inconnus. On commence par le calcul du déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 90 & 60 & 20 & 40 \\ 30 & -180 & 0 & -70 \\ 0 & 110 & -80 & -90 \\ -20 & -20 & -105 & 5 \end{vmatrix}$$

Pour calculer ce déterminant d'ordre 4, on va choisir de travailler avec la colonne qui contient un maximum des zéro pour minimiser les calculs au maximum. On choisit la première colonne :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 90 & 60 & 20 & 40 \\ 30 & -180 & 0 & -70 \\ 0 & 110 & -80 & -90 \\ -20 & -20 & -105 & 5 \end{vmatrix} = 90 \begin{vmatrix} -180 & 0 & -70 \\ 110 & -80 & -90 \\ -20 & -105 & 5 \end{vmatrix} - 30 \begin{vmatrix} 60 & 20 & 40 \\ 110 & -80 & -90 \\ -20 & -105 & 5 \end{vmatrix} + 20 \begin{vmatrix} 60 & 20 & 40 \\ -180 & 0 & -70 \\ 110 & -80 & -90 \end{vmatrix} = 270415000$$

Le déterminant est différent de zéro, donc on passe au calcul des courants (Les solutions de ce système des équations linéaires) :

$$I_4 = \frac{\begin{vmatrix} 20 & 60 & 20 & 40 \\ 15 & -180 & 0 & -70 \\ 12 & 110 & -80 & -90 \\ 15 & -20 & -105 & 5 \end{vmatrix}}{270415000} = 0,04 \text{ A}$$

$$I_6 = \frac{\begin{vmatrix} 90 & 20 & 20 & 40 \\ 30 & 15 & 0 & -70 \\ 0 & 12 & -80 & -90 \\ -20 & 15 & -105 & 5 \end{vmatrix}}{270415000} = -0,034 \text{ A}$$

$$I_7 = \frac{\begin{vmatrix} 90 & 60 & 20 & 40 \\ 30 & -180 & 15 & -70 \\ 0 & 110 & 12 & -90 \\ -20 & -20 & 15 & 5 \end{vmatrix}}{270415000} = -0,19 \text{ A}$$

$$I_8 = \frac{\begin{vmatrix} 90 & 60 & 20 & 20 \\ 30 & -180 & 0 & 15 \\ 0 & 110 & -80 & 12 \\ -20 & -20 & -105 & 15 \end{vmatrix}}{270415000} = -0,004 \text{ A}$$

On calcule les autres intensités de courant :

Application numérique :

$$I_1 = I_4 + I_6 + I_8 = 0,04 - 0,034 - 0,004 = 0,002 \text{ A}$$

$$I_2 = I_4 + I_6 + I_7 = 0,04 - 0,034 - 0,19 = -0,184 \text{ A}$$

$$I_3 = I_8 - I_7 = -0,004 + 0,19 = 0,186 \text{ A}$$

$$I_5 = I_6 + I_7 = -0,034 - 0,19 = -0,224 \text{ A}$$

$$I_9 = I_6 + I_8 = -0,034 - 0,004 = -0,038 \text{ A}$$

Remarque :

Les signes négatifs des courants indiquent que leurs sens réels sont opposés à ceux choisis de façon arbitraire dans le circuit (Représentés dans la figure 3.6).

7. Calcul des différentes tensions aux bornes de chaque résistance ainsi que la puissance électrique dissipée dans chaque résistance :

La tension aux bornes d'une résistance est donnée par la relation : $U = R \cdot I$ (V)

La puissance électrique dissipée par effet de Joule dans une résistance R traversée par un courant I est donnée par la relation suivante : $P = RI^2$ (Joule)

Par conséquent, on a :

Résistance (Ω)	R_{AD} (5 Ω)	R_2 (20 Ω)	R_3 (30 Ω)	R_4 (40 Ω)	R_{CF} (110 Ω)	R_7 (70 Ω)	R_8 (80 Ω)	R_9 (90 Ω)
Courant (A)	0,186	0,184	0,04	0,002	0,034	0,038	0,19	0,004
Tension (V)	0,93	3,68	1,2	0,08	3,74	2,66	15,2	0,36
Puissance dissipée (Joule)	0,173	0,677	0,048	0,00016	0,127	0,101	2,888	0,0014

8. Détermination des générateurs et récepteurs dans le circuit :

Le courant I_1 sort du pôle positif de E_1 , donc ce dernier est un générateur dans le circuit électrique.

Le courant I_5 (sens réel de courant) sort du pôle positif de E_2 , par conséquent ce dernier est un générateur.

Le courant I_8 (sens réel de courant) sort du pôle positif de E_3 , par conséquent ce dernier est un générateur.

On conclut qu'il y'a trois générateurs dans ce circuit électrique sont E_1 , E_2 et E_3 .

III.4. Conclusion :

Dans cette partie, nous avons présenté une variété d'exercices accompagnés de solutions détaillées, concernant les réseaux électriques et l'utilisation des lois de Kirchhoff, pour calculer les courants électriques dans un groupe de conducteurs ohmiques, en plus de pratiquer le calcul de résistances équivalentes, dans le cas des associations en série ainsi qu'en parallèle.

Chapitre (IV)

Magnétostatique

IV.1. Introduction :

Dans ce chapitre, on s'intéresse au phénomène de la magnétostatique, qui représente l'étude du magnétisme dans les situations où le champ magnétique est indépendant du temps. Plus précisément, la magnétostatique s'attache à calculer les champs magnétiques lorsque les sources de ces champs sont connues (courant électrique, aimants). On commence par un petit rappel théorique des différents lois et théorèmes fondamentales régissant ce domaine, ensuite on présente un ensemble des exercices corrigés destinés aux étudiants, pour maîtriser notamment le calcul du champ magnétique créé par un fil parcouru par un courant électrique.

IV.2. Rappel de cours :

IV.2.1. Introduction :

Les aimants sont connus depuis l'Antiquité, sous le nom de magnétite, des pierres trouvées à proximité de la ville de Magnesia (Turquie). C'est de cette pierre que provient le nom actuel de champ magnétique.

En 1752 l'américain Benjamin Franklin découvre la nature électrique de la foudre. Il y avait déjà à cette époque de nombreux déclarations de marins attirant l'attention sur des faits bizarres :

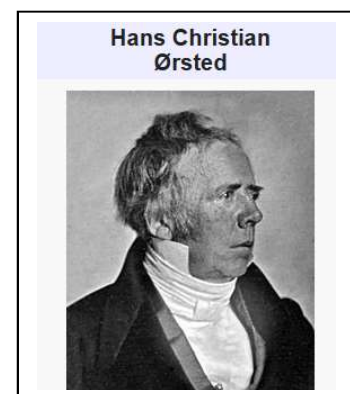
- Les orages perturbent les boussoles
- La foudre frappant un navire aimante tous les objets métalliques.

Franklin en déduisit la possibilité d'une communauté de nature entre les phénomènes électriques et magnétiques.

En 1820 Hans Christian Oersted a placé un fil conducteur au-dessus d'une boussole et fait passer un courant. En présence d'un courant l'aiguille de la boussole est effectivement déviée, prouvant l'existence d'un lien entre le courant électrique et le champ magnétique.

L'étude quantitative des interactions entre aimants et courants fut faite par les physiciens français Jean-Baptiste Biot et Félix Savart (1820).

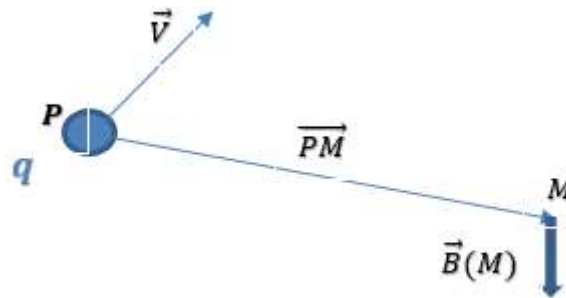
L'élaboration de la théorie électromagnétique mit en jeu un grand nombre de physiciens, citons : Laplace, Oersted, Ampère, Biot et Savart, Faraday, Foucault, Maxwell, Lorentz et bien d'autres.



IV.2.1.1. Expressions du champ magnétique :

IV.2.1.1.1. Champ magnétique créé par une charge en mouvement :

Soit une particule de charge q située en un point P , qui se déplace avec une vitesse \vec{v} dans un référentiel galiléen. Cette charge crée un champ magnétique \vec{B} en un point M , donné par [8] :



$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 q \vec{v} \wedge \overline{PM}}{4\pi \|\overline{PM}\|^3} \quad (T)$$

L'unité du champ magnétique est le Tesla (T)

Il y'a une autre unité fréquemment utilisée est le Gauss (G), sa valeur est :

$$1 G = 10^{-4} \text{ Tesla}$$

μ_0 : est la perméabilité magnétique du vide, qui représente la capacité du vide à laisser passer un champ magnétique, sa valeur est :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ (H.m}^{-1}\text{)}$$

IV.2.1.1.2. Champ magnétique créé par un ensemble de charges en mouvement :

Soit N particules de charges q_i situées en des points P_i , se déplacent avec des vitesses \vec{v}_i . En appliquant le principe de superposition, le champ magnétique total créé par tous ces particules en un point M , est la somme de tous les champs magnétiques créés par chaque particule au point M , donné par [8, 13, 15] :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{q_i \vec{v}_i \wedge \overline{P_i M}}{\|\overline{P_i M}\|^3} \quad (T)$$

IV.2.2. Force magnétique et loi de Lorentz :

Une charge q qui se déplace avec une vitesse \vec{v} dans un champ magnétique caractérisé par le vecteur \vec{B} subit une force magnétique appelée force de Lorentz \vec{F}_m donnée par [18] :

$$\vec{F}_m = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$$

D'où :

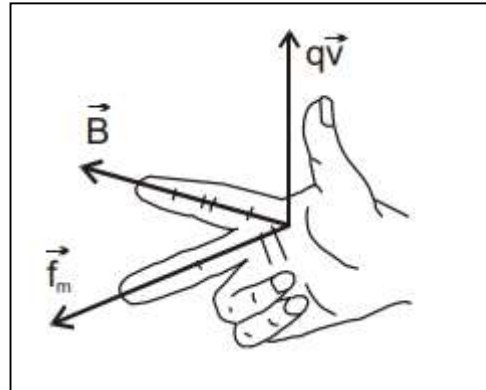
q : Charge, en coulomb.

\vec{v} : Vitesse de la charge, en mètre/second.

\vec{B} : Champ magnétique, en Tesla.

On détermine le sens de la force de Lorentz, selon la règle de la main droite, suivante :

- Pouce : sens de $q \cdot \vec{v}$ (sens de \vec{v} si $q > 0$; ou sens opposé à \vec{v} si $q < 0$)
- Index : sens du champ magnétique \vec{B}
- Majeur : sens de la force de Lorentz \vec{F}_m



IV.2.3. Action d'un champ magnétique sur un courant électrique :

L'action d'un champ magnétique sur un courant électrique est décrite par la force de Lorentz, qui agit sur les charges (les électrons) en mouvement dans un conducteur, lorsqu'il est traversé par un courant électrique. Cette force est perpendiculaire à la fois à la direction du courant et à la direction du champ magnétique. Elle peut entraîner un mouvement du conducteur dans le champ magnétique (comme dans le cas d'un moteur électrique).

En résumé, le champ magnétique exerce une force sur les charges mobiles (électrons) dans le courant, ce qui peut affecter le mouvement du conducteur dans lequel circule ce courant électrique.

IV.2.4. Champ magnétique produit par un courant stationnaire (loi de Biot-Savart) :

IV.2.4.1. Loi de Biot et Savart:

Afin de déterminer le module du champ magnétique \vec{B} généré par un long fil parcouru par un courant, les physiciens Biot et Savart déterminèrent en 1820 [18, 20] le champ magnétique infinitésimal $d\vec{B}$ généré par un segment de fil infinitésimal $d\vec{l}$ parcouru par un courant électrique I à un endroit M .

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \cdot \sin(\theta)}{r^2} \vec{n}$$

$d\vec{B}$: champ magnétique élémentaire (infinitésimal) en tesla.

I : courant électrique qui circule dans l'élément de fil, en ampère.

$d\vec{l}$: segment de fil élémentaire orienté dans le sens du courant, en mètre.

r : distance entre $d\vec{l}$ et l'endroit M , où l'on veut évaluer le champ magnétique, en mètre.

μ_0 : perméabilité magnétique du vide ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ (H.m}^{-1}\text{)}$).

θ : angle entre $d\vec{l}$ et \vec{r}

\vec{n} : vecteur unitaire d'orientation du champ magnétique selon la règle de la main droite.

IV.2.4.2. Module du champ magnétique produit par un fil rectiligne infini parcouru par un courant :

les deux physiciens français Jean-Baptiste Biot et Félix Savart furent en mesure de déterminer une expression mathématique décrivant le module et l'orientation du champ magnétique \vec{B} généré par un long fil rectiligne parcouru par un courant électrique I .

Le module du champ magnétique \vec{B} est donnée par l'expression suivante [15, 18, 20] :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

B : module du champ magnétique en tesla.

I : le courant électrique traversant le fil, en ampère.

R : distance entre le point P où l'on veut évaluer le champ magnétique et le centre du fil, en mètre.

μ_0 : perméabilité magnétique du vide

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ (H.m}^{-1}\text{)}.$$

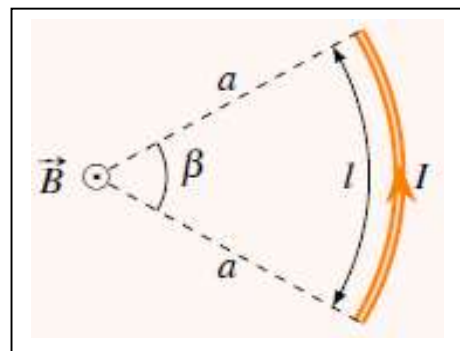
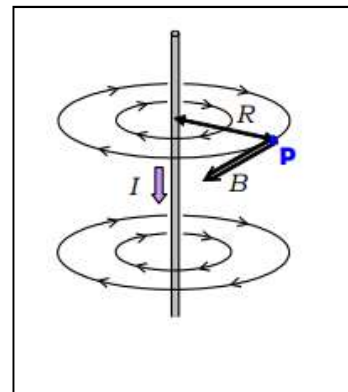
IV.2.4.3. Champ magnétique au centre de courbure d'un arc de cercle :

Le module du champ magnétique \vec{B} (en tesla) crée par un fil sous forme d'un arc de cercle de rayon a (en mètre) et de longueur l (en mètre), délimite un angle β (en radians) parcouru par un courant d'intensité I (en ampère), est donnée par la relation suivante :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} l$$

D'autre part, on a :

$$\beta = \frac{l}{a} \text{ donc, on écrit : } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \beta$$



IV.2.4.4. Champ magnétique créée dans un solénoïde (à l'intérieur du solénoïde) :

Un solénoïde ressemble beaucoup à un ressort, et la grandeur du champ magnétique dans un solénoïde formée de N tours de fil, traversée par un courant d'intensité I est donnée par la relation suivante [20] :

$$B = \frac{\mu_0 N \cdot I}{l}$$

l : est la longueur du solénoïde en mètre.

B : module du champ magnétique créée à l'intérieur du solénoïde, en tesla.

N : nombre de tours du fil du solénoïde.

Ici le champ magnétique \vec{B} est uniforme à l'intérieur du solénoïde.

On trouve la direction avec la règle de la main droite : on place nos doigts dans le sens de la rotation du courant dans les anneaux du solénoïde, notre pouce pointe alors dans la direction du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde.

Remarque :

Les solénoïdes occupent une place très importante en magnétisme pour deux raisons :

1. Ils permettent de créer un champ magnétique uniforme.
2. Les solénoïdes agissent exactement comme un aimant.

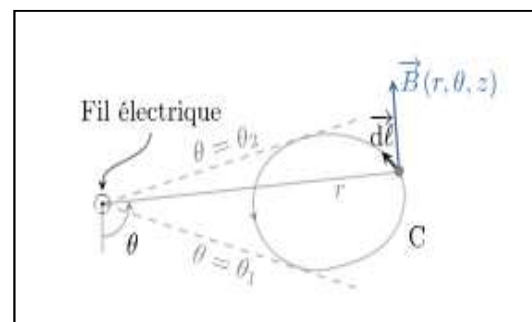
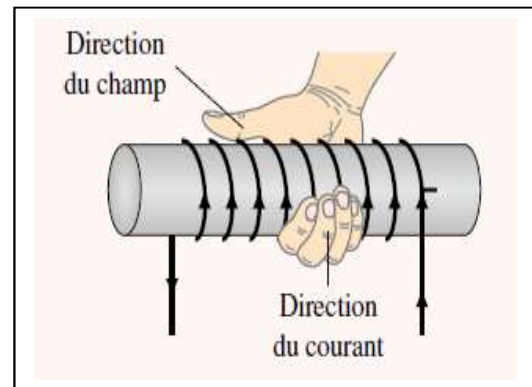
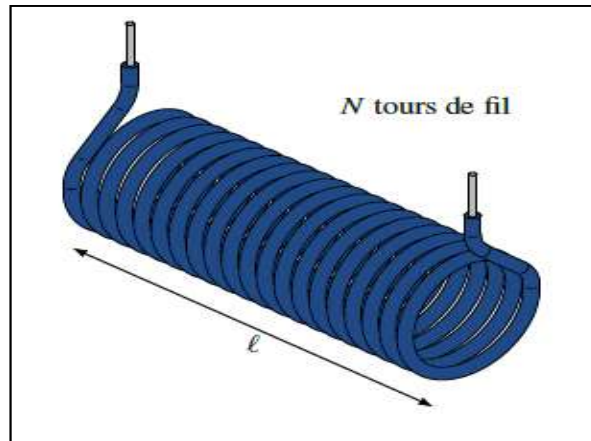
IV.2.5. Circulation du champ magnétique :

Soit un fil traversé par un courant électrique d'intensité I . La circulation du champ magnétique \vec{B} le long d'un contour fermé (C) est donnée par la relation suivante :

$$C = \oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_{(C)} d\theta$$

On distingue trois cas :

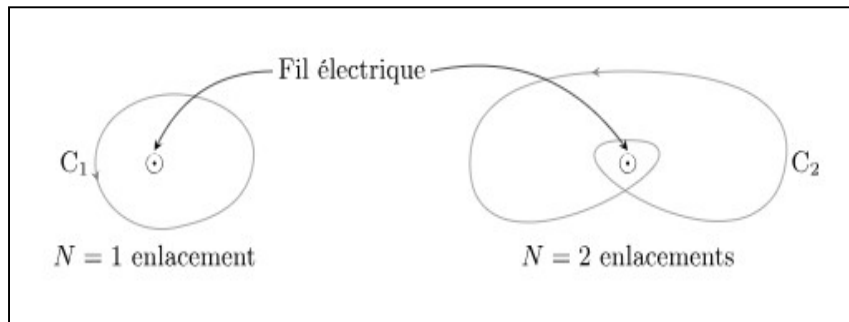
- Le contour fermé (C) se referme sans enlancer le fil conducteur, dans ce cas,



θ augmente à partir de θ_1 puis diminue à partir de θ_2 jusqu'à retrouver sa valeur initiale. Par conséquent $\oint_{(C)} d\theta = 0$, la circulation du champ magnétique \vec{B} est nulle si (C) n'enlace pas le fil électrique.

- Le contour fermé (C) se referme et enlace le fil conducteur une fois, dans ce cas, on trouve : $\oint_{(C)} d\theta = 2\pi$, la circulation du champ magnétique \vec{B} est $C = \oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$
- Le contour fermé (C) se referme et enlace le fil conducteur N fois, dans ce cas, on trouve : $\oint_{(C)} d\theta = 2N\pi$, la circulation du champ magnétique \vec{B} est

$$C = \oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 NI$$



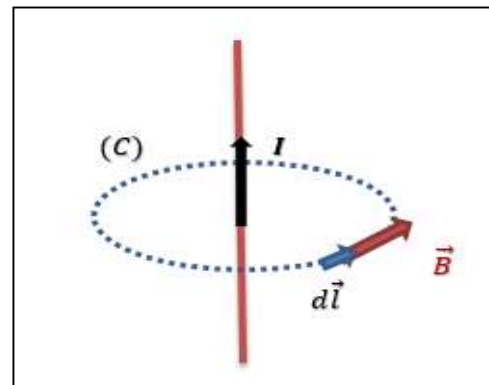
IV.2.6. Rotationnel du champ magnétique et loi d'Ampère :

Le rotationnel du champ magnétique est la somme de sa dépendance à la variation du champ électrique au cours du temps et d'un courant électrique fixe. (Voir les équations de Maxwell)

IV.2.6.1. Théorème d'Ampère :

Ce théorème permet de calculer la valeur du champ magnétique grâce à la donnée du courant électrique. La circulation du champ magnétique le long d'un contour (C) fermé est donnée par la relation suivante [13, 18] :

$$C = \oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$



\vec{B} : Le champ magnétique que l'on veut évaluer

$d\vec{l}$: Un déplacement élémentaire le long du contour (parcours) fermé (C)

μ_0 : Perméabilité du vide

I : Intensité de courant, en ampère.

IV.2.7. Flux du champ magnétique à travers une boucle fermée et induction :

Le flux magnétique ou flux d'induction magnétique, souvent noté ϕ , est une grandeur physique mesurable caractérisant l'intensité et la répartition spatiale du champ magnétique. Cette grandeur est égale au flux du champ magnétique \vec{B} à travers une surface orientée \vec{S} . Ce flux est par définition le produit scalaire de ces deux vecteurs.

le flux du champ magnétique \vec{B} à travers un élément infinitésimal de surface orienté \vec{dS} est le produit scalaire de ces deux vecteurs :

$$d\phi = \vec{B} \cdot \vec{dS} = \|\vec{B}\| \cdot \|\vec{dS}\| \cdot \cos\theta$$

θ : est l'angle entre les lignes du champ magnétique \vec{B} et le vecteur normal à la surface \vec{S}

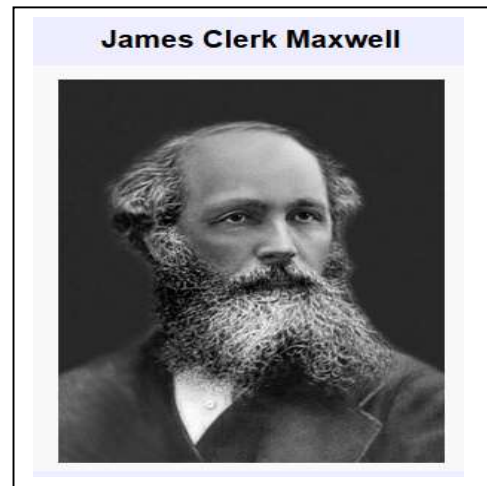
Le flux à travers la surface S est alors l'intégrale :

$$\phi = \iint_S d\phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS}$$

Par définition, l'induction électromagnétique est un phénomène physique conduisant à l'apparition d'une force électromotrice dans un conducteur électrique soumis à un flux de champ magnétique variable. Cette force électromotrice peut engendrer un courant électrique dans le conducteur. Ce phénomène a pour origine la force de Lorentz, appliquée aux électrons libres dans le conducteur électrique.

IV.2.8. Equations de Maxwell :

Les quatre équations de Maxwell (James Clerk Maxwell, 1831-1879) publiées en 1864, constituent le fondement de la théorie électromagnétique. Ces équations traduisent sous forme locale différents théorèmes (Gauss, Ampère, Faraday) qui régissaient l'électromagnétisme avant que Maxwell ne les réunisse sous forme d'équations intégrales. Ces équations montrent notamment qu'en régime stationnaire, les champs électrique et magnétique sont indépendants l'un de l'autre.



Dans un référentiel R galiléen, le champ électromagnétique vérifie les quatre équations de Maxwell suivantes [8, 13, 15, 20] :

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \quad \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad , \quad \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t})$$

La dernière équation montre que la variation du champ électrique induit un champ magnétique. le terme $\mu_0 \vec{j}$ ajoute simplement que le champ magnétique est également dépendant d'un courant électrique traversant un conducteur électrique,

D'où :

\vec{E} : Champ électrique, ρ : Densité volumique de charge

ϵ_0 : Permittivité du vide, \vec{B} : Champ magnétique

μ_0 : Perméabilité du vide, \vec{j} : Densité de courant

On écrit les équations de Maxwell dans le vide, pour $\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$:

$$\text{div} \vec{E} = 0 \quad , \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad , \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

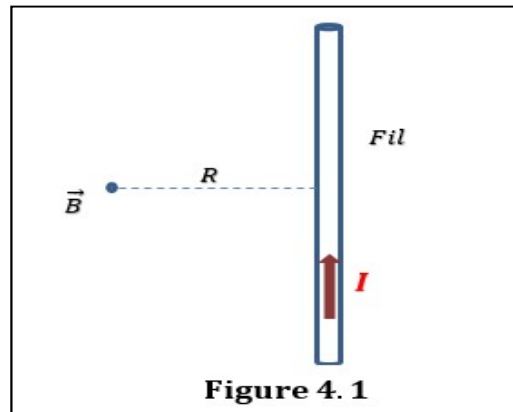
IV.3. Série des exercices corrigés :

Exercice (1) :

Un fil rectiligne dans un circuit est parcouru par un courant électrique contenu d'intensité I . (Voir figure 4.1)

Le module du champ magnétique \vec{B} créée à une distance perpendiculaire du fil $R = 0.9 \text{ cm}$ étant $B = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ T}$.

1. Calculer l'intensité de courant I traversant ce fil.



On donne : $\mu_0 = 12,566 \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}$

Solution de l'exercice (1) :

On a : $R = 0.9 \text{ cm}, B = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ T}, \mu_0 = 12,566 \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}$

1. Calcul de l'intensité de courant I traversant le fil :

L'expression du champ magnétique \vec{B} créé par un fil de longueur infini parcouru par un courant d'intensité I est donné par l'expression suivante :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Où : $\mu_0 = 12,566 \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}$ est la perméabilité du vide.

R : est la distance entre le point où l'on veut évaluer le champ magnétique et le centre du fil, en mètre.

Donc on a :

$$I = \frac{B \cdot 2\pi R}{\mu_0}$$

Application numérique :

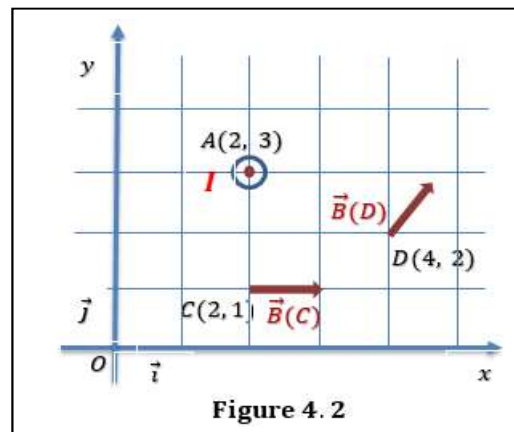
$$I = \frac{1,6 \cdot 10^{-5} \cdot 2(3,14)0,9 \cdot 10^{-2}}{12,566 \cdot 10^{-7}}$$

$$I = 0,719 \text{ A}$$

Exercice (2) :

Un très long fil supposé de longueur infini, parallèle à l'axe (Oz), situé au point $A(2\text{m}, 3\text{m})$ et parcouru par un courant d'intensité $I = 0,2 \text{ A}$ dans le sens positif de l'axe (Oz). (Voir figure 4.2).

1. Calculer le module du champ magnétique $\vec{B}(C)$ créé au point $C(2\text{m}, 1\text{m})$ et déterminer sa direction.
2. Calculer le module du champ magnétique $\vec{B}(D)$ créé au point $D(4\text{m}, 2\text{m})$ et déterminer sa direction.



On donne : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ m}$, $\mu_0 = 12,566 \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}$

Solution de l'exercice (2) :

On a : $I = 0,2 \text{ A}$, $A(2, 3)$, $C(2, 1)$, $D(4, 2)$, $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ m}$, $\mu_0 = 12,566 \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}$

1. Calcul du champ magnétique $\vec{B}(C)$ créé par le fil au point $C(2, 1)$ sens et module :

L'expression du champ magnétique généré par un fil de longueur infini est :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

R : est la distance entre le point où l'on veut évaluer le champ magnétique et le centre du fil, en mètre.

$$R = \|\overrightarrow{AC}\|$$

$$\overrightarrow{AC} = 0\vec{i} - 2\vec{j} = -2\vec{j} \text{ m}$$

$$R = \|\overrightarrow{AC}\| = AC = 2 \text{ m}$$

Application numérique :

$$B = \frac{12,566 \cdot 10^{-7} (0,2)}{2 \cdot 3,14 (2)} = 0,2 \cdot 10^{-7} \text{ Tesla}$$

On détermine le sens du champ magnétique $\vec{B}(C)$, par application de la règle de la main droite suivante (voir la figure ci-contre) :

- Le pouce : vers le sens du courant conventionnel.
- Les jointures : vers l'endroit où l'on veut évaluer le champ magnétique.
- On fait plier les doigts à 90° avec la paume de la main.



L'orientation des doigts indique le sens du champ magnétique.

Le sens du champ magnétique $\vec{B}(C)$ est indiqué sur la figure 4.1.

2. Calcul du champ magnétique $\vec{B}(D)$ crée par le fil au point $D(4, 2)$ sens et module :

Le module du champ magnétique \vec{B} créé par le fil de longueur infini au point D est donné par l'expression suivante :

$$B(D) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

$$R = \|\overrightarrow{AD}\|$$

$$\overrightarrow{AD} = 2\vec{i} - \vec{j} \text{ m}$$

$$R = \|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = 2,236 \text{ m}$$

Application numérique :

$$B(D) = \frac{12,566 \cdot 10^{-7} (0,2)}{2 \cdot 3,14 (2,236)} = 0,179 \cdot 10^{-7} \text{ Tesla}$$

Pour déterminer le sens du champ magnétique $\vec{B}(D)$, on utilise la règle de la main droite citée précédemment.

Le sens du champ magnétique $\vec{B}(D)$, créé au point D est indiqué dans la figure 4.2.

Exercice (3) :

Soit deux fils très longs et parallèles distants de 2 cm, et parallèles avec l'axe (Oz). Ces deux fils sont situés aux points $A(0, 1)$ et $C(0, -1)$ respectivement. (Voir figure 4.3).

Les intensités de courants qui traversent les deux fils sont respectivement $I_1 = 1,2 A$ et $I_2 = 2 A$.

1. Calculer le champ magnétique $\vec{B}(d)$ résultant créé par les deux fils au point $D(3, 0)$
2. Déterminer la direction de ce champ magnétique.

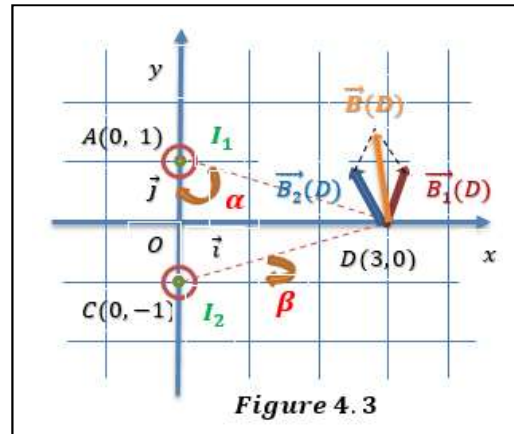


Figure 4.3

On donne : $\mu_0 = 12,566 \cdot 10^{-7} Tm/A$, $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 cm$

Solution de l'exercice (3) :

On a : $A(0, 1)$, $C(0, -1)$, $D(3, 0)$, $I_1 = 1,2 A$, $I_2 = 2 A$, $\mu_0 = 12,566 \cdot 10^{-7} Tm/A$, $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 cm$

1. Calcul du champ magnétique $\vec{B}(D)$ résultant créé par les deux fils au point $D(3, 0)$:

Pour calculer le champ magnétique totale créé par les deux fils au point $D(3, 0)$ on doit d'abord calculer le champ magnétique créé par chaque fil au point D , puis on applique le principe de superposition pour calculer le champ magnétique totale $\vec{B}(D)$.

On commence par le calcul du champ magnétique $\vec{B}_1(D)$ du premier fil situé au point $A(0, 1)$ créé au point $D(3, 0)$:

Le module de ce champ magnétique est donné par l'expression suivante :

$$B_1(D) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R_1}$$

$$R_1 = \|\overrightarrow{AD}\|, \overrightarrow{AD} = 3 \cdot 10^{-2} \vec{i} - 10^{-2} \vec{j} \quad m$$

$$R_1 = \|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{3^2 + 1^2} \cdot 10^{-2} = 3,16 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Application numérique :

$$B_1(D) = \frac{12,566 \cdot 10^{-7}(1,2)}{2(3,14)(3,16 \cdot 10^{-2})} = 0,759 \cdot 10^{-5} \text{ Tesla}$$

On détermine les composantes du champ magnétique $\overrightarrow{B}_1(D)$

$$\overrightarrow{B}_1(D) = B_1 \cos(\alpha) \vec{i} + B_1 \sin(\alpha) \vec{j}$$

On calcule la valeur de l'angle α (Voir figure 4.3) :

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{3 \cdot 10^{-2}}{10^{-2}} = 3$$

$$\alpha = 71,56^\circ = 1,249 \text{ Rad}$$

Application numérique :

$$\overrightarrow{B}_1(D) = 0,759 \cdot 10^{-5}(0,316) \vec{i} + 0,759 \cdot 10^{-5}(0,948) \vec{j}$$

$$\overrightarrow{B}_1(D) = 0,239 \cdot 10^{-5} \vec{i} + 0,719 \cdot 10^{-5} \vec{j} \quad \text{Tesla}$$

Pour déterminer la direction du champ magnétique $\overrightarrow{B}_1(D)$, on utilise la règle de la main droite suivante :

On place notre pouce dans la direction du courant I_1 (sortant de la page) et nos doigts dans la direction de la ligne allant du fil jusqu'à le point D (même sens du vecteur \overrightarrow{AB}), dans ce cas nos doigts plient dans la direction du champ magnétique $\overrightarrow{B}_1(D)$ (voir la figure 4.3)

Passant maintenant au calcul du champ magnétique $\overrightarrow{B}_2(D)$ du deuxième fil situé au point $C(0, -1)$, créé au point $D(3, 0)$:

On a :

$$B_2(D) = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi R_2}$$

$$R_2 = \|\overrightarrow{CD}\|, \quad \overrightarrow{CD} = 3 \cdot 10^{-2} \vec{i} + 10^{-2} \vec{j} \quad \text{m}$$

$$R_2 = \|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{3^2 + 1^2} \cdot 10^{-2} = 3,16 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Application numérique :

$$B_2(D) = \frac{12,566 \cdot 10^{-7}(2)}{2(3,14)(3,16 \cdot 10^{-2})} = 1,266 \cdot 10^{-5} \text{ Tesla}$$

On calcule les composantes de ce champ magnétique. D'après la figure 4.3, on a :

$$\vec{B}_2(D) = -B_2 \sin(\beta) \vec{i} + B_2 \cos(\beta) \vec{j}$$

On calcule l'angle β :

$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{10^{-2}}{3 \cdot 10^{-2}} = 0,33$$

$$\beta = 18,43^\circ = 0,321 \text{ Rad}$$

Application numérique :

$$\vec{B}_2(D) = -1,266 \cdot 10^{-5} (0,316) \vec{i} + 1,266 \cdot 10^{-5} (0,948) \vec{j}$$

$$\vec{B}_2(D) = -0,4 \cdot 10^{-5} \vec{i} + 1,2 \cdot 10^{-5} \vec{j} \quad \text{Tesla}$$

On utilise la même règle de la main droite citée précédemment pour trouver la direction du champ magnétique $\vec{B}_2(D)$ (représentée sur la figure 4.3).

En appliquant le principe de superposition, on trouve les composantes du champ magnétique totale $\vec{B}(D)$, créé par les deux fils au point D , on a :

$$\vec{B}(D) = \vec{B}_1(D) + \vec{B}_2(D)$$

$$\vec{B}(D) = 0,239 \cdot 10^{-5} \vec{i} + 0,719 \cdot 10^{-5} \vec{j} + -0,4 \cdot 10^{-5} \vec{i} + 1,2 \cdot 10^{-5} \vec{j}$$

$$\vec{B}(D) = -0,161 \cdot 10^{-5} \vec{i} + 1,919 \cdot 10^{-5} \vec{j}$$

$$B(D) = \|\vec{B}(D)\| = \sqrt{(0,161 \cdot 10^{-5})^2 + (1,919 \cdot 10^{-5})^2}$$

$$B(D) = 1,926 \cdot 10^{-5} \text{ Tesla}$$

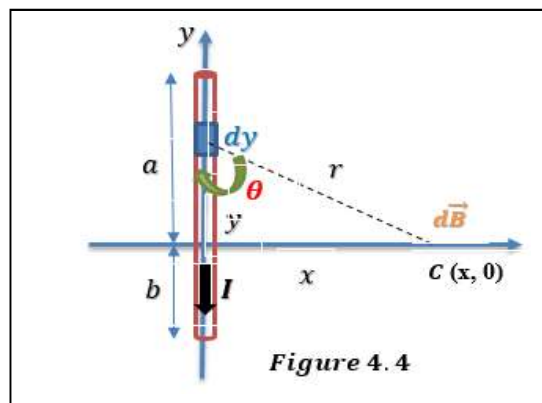
La direction du champ magnétique totale $\vec{B}(D)$ créé par les deux fils au point D , est représentée dans la figure 4.3.

Exercice (4) :

Soit un bout de fil parallèle avec l'axe (Oy), parcouru par un courant d'intensité

$I = 1,2 \text{ A}$ (Voir figure 4.4).

1. Calculer le module du champ magnétique $\vec{B}(C)$ créé au point $C(x, 0)$.
2. Déterminer la direction du champ magnétique $\vec{B}(C)$.
3. Faire l'application numérique pour, $a = 3 \text{ cm}$, $b = 1 \text{ cm}$, $x = 12 \text{ cm}$.



4. Donner l'expression du champ magnétique créé par le fil lorsque sa longueur tend vers l'infini.

On donne : $\mu_0 = 12,566 \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}$

Solution de l'exercice (4) :

On a : $I = 1,2 \text{ A}$, $a = 3 \text{ cm}$, $b = 1 \text{ cm}$, $x = 12 \text{ cm}$, $\mu_0 = 12,566 \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}$.

1. Calcul de module du champ magnétique $\vec{B}(C)$ créé au point $C(x, 0)$:

On prend une partie du fil de longueur élémentaire dl qui crée un champ magnétique élémentaire dB égal :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} dl \cdot \sin\theta$$

On a : $dl = dy$

y : $-b \rightarrow +a$ (Voir figure 4.4)

θ : est l'angle entre $d\vec{l}$ (même sens du courant) et le vecteur entre $d\vec{l}$ et le point C où l'on veut évaluer le champ magnétique.

D'après la figure, on écrit :

$$\sin\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}}, \text{ avec } r = \sqrt{y^2 + x^2}$$

Donc, on écrit :

$$dB = \frac{\mu_0 I x}{4\pi} \left(\frac{dy}{(y^2 + x^2)^{3/2}} \right)$$

Avec : y : $-b \rightarrow +a$, et $x = \text{Constant}$

On utilise l'intégrale suivante : $\int \frac{dy}{(y^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{y}{x^2 \sqrt{y^2 + x^2}} + c$

On obtient par intégration :

$$B = \frac{\mu_0 I x}{4\pi} \int_{-b}^a \frac{dy}{(y^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + x^2}} \right]$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + x^2}} \right] \text{ Tesla}$$

2. Détermination de la direction du champ magnétique $\vec{B}(C)$:

On applique la règle de la main droite pour déterminer la direction du champ magnétique $\vec{B}(C)$ créé par le fil au point C . On place notre pouce dans le sens du courant I , et nos doigts dans le sens de x (du fil vers le point C), dans ce cas nos doigts plient dans le sens de l'orientation du champ magnétique $\vec{B}(C)$. Le champ magnétique sort de la page.

3. Application numérique pour le calcul du champ magnétique $\vec{B}(C)$:

On a : $a = 3 \text{ cm}$, $b = 1 \text{ cm}$, $x = 12 \text{ cm}$

$$B(C) = \frac{12,566 \cdot 10^{-7} (1,2)}{4(3,14)(0,12)} \left[\frac{0,03}{\sqrt{(0,03)^2 + (0,12)^2}} + \frac{0,01}{\sqrt{(0,01)^2 + (0,12)^2}} \right]$$

$$B(C) = 3,257 \cdot 10^{-7} \text{ Tesla}$$

4. L'expression du champ magnétique créé par le fil lorsque sa longueur tend vers l'infini :

Le fil est de longueur infini, et donc on a la même chose pour les deux limites du fil a et b

On utilise l'expression du champ magnétique trouvée précédemment :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + x^2}} \right]$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{b^2}}} \right], \text{ avec } a \rightarrow +\infty \text{ et } b \rightarrow +\infty$$

On trouve le résultat suivant :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \text{ Tesla}$$

Qui est l'expression du champ magnétique créé par un fil de longueur infinie.

Exercice (5) :

Un bout de fil de longueur $l = 4m$ est parcourue par un courant électrique d'intensité $I = 1,8 A$, parallèle avec l'axe (Ox). (Voir figure 4.5).

1. Calculer le champ magnétique $\vec{B}(D)$ crée au point D distant par rapport à l'axe du fil de $R = 1,5 m$.
2. Déterminer la direction du champ magnétique $\vec{B}(D)$

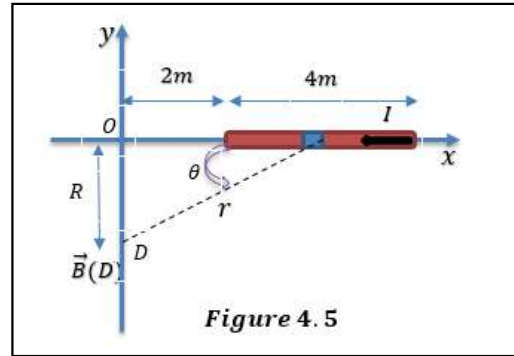


Figure 4.5

On donne : $\mu_0 = 12,566 \cdot 10^{-7} Tm/A$

Solution de l'exercice (5) :

On a : $l = 3m, I = 1,8 A, R = 1,5 m, \mu_0 = 12,566 \cdot 10^{-7} Tm/A$

1. Calcul du champ magnétique $\vec{B}(D)$ crée au point D distant par rapport à l'axe du fil de $R = 1,5 m$:

On prend une partie élémentaire du fil $d\vec{l}$ qui crée un champ magnétique élémentaire $d\vec{B}$ au point (D), son module est donné par l'expression suivante :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl \cdot \sin\theta$$

r : distance entre $d\vec{l}$ et l'endroit D , où l'on veut évaluer le champ magnétique, en mètre.

θ : est l'angle entre $d\vec{l}$ (qui a le même sens du courant I) et le vecteur allant de dl au point où l'on veut évaluer le champ magnétique (D)

$$\text{On a, } \begin{cases} dl = dx \\ x: 2 \rightarrow 6 m \end{cases}$$

$$\sin\theta = \frac{R}{r}, \quad r = \sqrt{R^2 + x^2} \quad (\text{Voir figure 4.5})$$

R : Distance (perpendiculaire) entre l'axe du fil et le point (D), où l'on veut évaluer le champ magnétique.

On écrit :

$$dB = \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_2^6 \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$B(D) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left[\frac{6}{\sqrt{6^2 + R^2}} - \frac{2}{\sqrt{2^2 + R^2}} \right]$$

Application numérique :

$$B(D) = \frac{12,566 \cdot 10^{-7} (1,8)}{4(3,14)1,5} \left[\frac{6}{\sqrt{6^2 + (1,5)^2}} - \frac{2}{\sqrt{2^2 + (1,5)^2}} \right]$$

$$B(D) = 0,204 \cdot 10^{-7} \text{ Tesla}$$

2. Détermination de la direction du champ magnétique $\vec{B}(D)$:

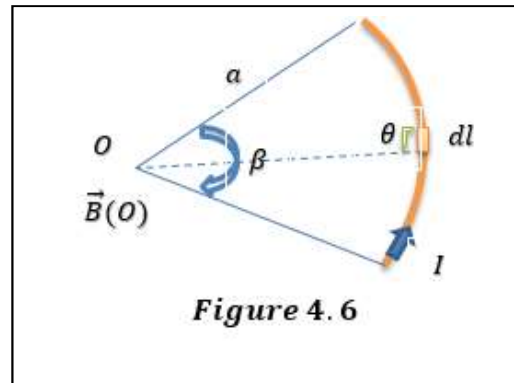
Pour déterminer la direction du champ magnétique $\vec{B}(D)$, on utilise la règle de la main droite suivante :

On place notre pouce dans la direction du courant I et nos doigts dans la direction de la ligne allant du fil jusqu'à le point D (même sens du vecteur \vec{OD}), dans ce cas nos doigts plient dans la direction du champ magnétique $\vec{B}(D)$ qui sort de la page.

Exercice (6) :

Un fil de longueur $l = 20 \text{ cm}$, a la forme d'un arc de cercle de rayon $a = 50 \text{ cm}$, délimite un angle β parcourue par un courant d'intensité $I = 3,2 \text{ A}$. (Voir figure 4.6).

1. Calculer le champ magnétique crée au centre de courbure de cet arc.
2. Déterminer la direction de ce champ magnétique.
3. Calculer la valeur de l'angle β délimité par le fil, pour que le champ magnétique crée au centre de l'arc soit un tiers de sa valeur précédente, et donner sa longueur en mètre.



On donne : $\mu_0 = 12,566 \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}$

Solution de l'exercice (6) :

On a : $l = 20 \text{ cm}$, $a = 50 \text{ cm}$, $I = 3,2 \text{ A}$, $\mu_0 = 12,566 \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}$.

1. Calcul du module du champ magnétique crée au centre de courbure de cet arc :

On prend une partie élémentaire du fil $d\vec{l}$ qui crée un champ magnétique élémentaire $d\vec{B}$ au centre (O) de l'arc, son module est :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} dl \cdot \sin\theta$$

θ : est l'angle entre $d\vec{l}$ (qui a le même sens du courant I) et le vecteur allant de dl au point où l'on veut évaluer le champ magnétique (le centre de l'arc O).

Dans ce cas $\theta = \frac{\pi}{2}$, donc $\sin\theta = 1$

On écrit :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} dl$$

$$B(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \int dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} l$$

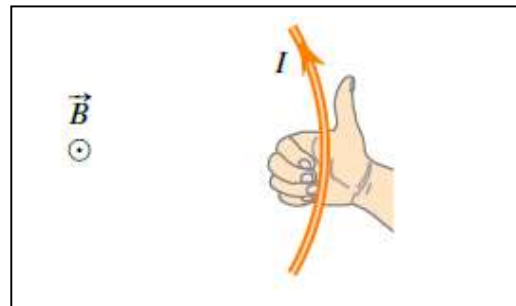
Application numérique :

$$B(O) = \frac{12,566 \cdot 10^{-7} (3,2)(0,2)}{4(3,14)(0,5)^2} = 2,56 \cdot 10^{-7} \text{ Tesla}$$

2. Détermination de la direction du champ magnétique $\vec{B}(O)$:

On applique la règle de la main droite pour déterminer l'orientation du champ magnétique au centre de l'arc $\vec{B}(O)$. (Voir figure ci-contre)

On trouve que ce champ magnétique sort de la page.



3. Calcul de la valeur de l'angle β délimité par le fil, pour que le champ magnétique créé au centre de l'arc soit un tiers de sa valeur précédente, et donner sa longueur en mètre :

La nouvelle valeur du champ magnétique égale un tiers de la valeur précédente. L'expression du champ magnétique au centre de l'arc est :

$$B(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} l$$

$$\frac{B(O)}{3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \frac{l}{3}$$

Donc la nouvelle longueur du fil \hat{l} égale un tiers de sa valeur précédente l , on a :

$$\dot{\lambda} = \frac{l}{3} = \frac{0,2}{3} = 6,67 \cdot 10^{-2} m$$

$$\dot{\lambda} = 6,67 \text{ cm.}$$

On calcule l'angle β délimité par le fil, dans ce cas

$$\text{On a : } \dot{\lambda} = \beta \cdot a, \text{ donc } \beta = \frac{\dot{\lambda}}{a}$$

Application numérique :

$$\beta = \frac{6,67 \cdot 10^{-2}}{0,5} = 0,13 \text{ Rad}, \quad \beta = 7,65^\circ$$

IV.4. Conclusion :

Dans ce chapitre on a résolu un nombre des exercices en détails, afin de permettre aux étudiants d'avoir une bonne idée sur le calcul du champ magnétique créé par un fil parcouru par un courant électrique, qui a des formes rectilignes et curvilignes, et d'avoir une idée simple sur le domaine de la magnétostatique.

Conclusion générale :

La physique 2, ou l'électricité et le magnétisme est une matière de la physique générale. Comme son nom l'indique, elle se compose principalement de deux grandes parties essentielles sont :

La première partie est l'électricité, qui se divise elle-même en deux branches, à savoir l'électrostatique ou l'électricité statique, et l'électrocinétique. Dans ce polycopié, et à travers le premier chapitre intitulé " Champ et potentiel électrostatique", ainsi que le deuxième chapitre intitulé " Les conducteurs" nous avons abordé certains aspects importants liés à l'électrostatique. Plus précisément, cela concerne le calcul du champ et potentiel électrostatique générés soit par une charge ponctuelle, ou par un ensemble des charges ponctuelles en interaction mutuelle. Ainsi que le calcul du champ et le potentiel électrostatique résultants de distributions continues des charges avec des répartitions linéiques, surfaciques ou volumiques en un point de l'espace environnant.

Nous avons également abordé le concept des dipôles électriques, et nous avons concentré particulièrement sur le champ et le potentiel électrique résultant d'un dipôle électrique en un point de l'espace qui l'entoure. Enfin, nous avons traité le théorème de Gauss, qui est principalement utilisé pour le calcul du champ et le potentiel électrique générés par des distributions des charges présentant un niveau élevé de symétrie soit plane, cylindrique ou sphérique. Sans oublier d'aborder au concept de l'effet électrostatique, soit partiel ou total entre les conducteurs, ainsi que le concept de l'équilibre électrostatique dans un conducteur, et ses propriétés dans cet état d'équilibre. Nous avons également consacré une partie de ce manuel aux condensateurs, sous leurs différents formes plans, cylindriques ou sphériques. Tout cela est accompagné d'une série des exercices résolus en détail concernant tout ce qui a été abordé précédemment dans le premiers et le deuxième chapitre.

En ce qui concerne la deuxième branche de l'électricité, à savoir l'électrocinétique nous avons abordé un nombre limité des concepts et des lois, particulièrement importants pour les étudiants de première année dans les filières scientifiques et techniques, ainsi que dans l'ingénierat. Nous nous sommes concentrés sur les résistances, ainsi que la loi d'Ohm et l'effet de Joule, sans oublier l'association en série et en parallèle des résistances et des condensateurs, et le calcul de l'énergie emmagasinée dans les condensateurs. Sans oublier les lois de Kirchhoff, à savoir la loi des mailles et la loi des nœuds, et leurs applications pour le calcul des courants électriques traversant les différents branches d'un circuit électrique.

La deuxième partie de ce module est le magnétisme, nous nous sommes concentrés sur des lois les plus importants liées à l'électromagnétisme, particulièrement destinées aux étudiants de première année. Nous avons également proposé quelques exercices simples axés sur la méthode de calcul du champ magnétique généré par un fil traversé par un courant électrique connu, et ce, en un point de l'espace autour du fil.

Enfin, j'espère que ce document sera utile aux étudiants de première année dans les filières scientifiques et techniques.

Annexe :**Constantes fondamentales :**

Constante	Symbole	Valeur	Unité
Vitesse de la lumière dans le vide	c	$2,997924 \cdot 10^8$	$m \cdot s^{-1}$
Charge élémentaire de l'électron	e	$1,602176 \cdot 10^{-19}$	C
Masse de l'électron	m_e	$9,109383 \cdot 10^{-31}$	Kg
Permittivité du vide	ϵ_0	$8,854187 \cdot 10^{-12}$	$F \cdot m^{-1}$
Perméabilité du vide	μ_0	$1,256637 \cdot 10^{-6}$	$H \cdot m^{-1}$
Nombre d'Avogadro	N_A	$6,022141 \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
Constante de Planck	h	$6,626070 \cdot 10^{-34}$	$J \cdot s$
Constante de Coulomb	$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$9 \cdot 10^9$	$N \cdot m^2 C^{-2}$
Constante gravitationnelle	G	$6,67430 \cdot 10^{-11}$	$m^3 Kg^{-1} s^{-2}$
Unité de masse atomique	u	$1,660539 \cdot 10^{-27}$	Kg

Constantes usuelles :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \quad N \cdot m^2 C^{-2}$$

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

Constantes numériques :

$$\pi = 3,141592653589793$$

$$\pi^2 \approx 10$$

$$e = 2,718281828459045$$

Références bibliographiques :

- [1] ALONSO, M et FINN, E.J., Physique générale, 2. Champ et ondes, Paris, Dunod, Nov. 2001.
- [2] BENSON, H., Physique, 2. Electricité et magnétisme, Editions du Renouveau Pédagogique, Inc., Québec, 2004.
- [3] Dr. Afifa Yedjour, Dr. H. Aouabdi-Settaouti, Electricité, Université des sciences et technologie d'Oran, Mohamed Boudiaf USTO-MB. Algérie, - 2016/2017.
- [4] M.Berlin, J.P. Faroux et J. Renault, "Electromagnétisme 1, Electrostatique", Dunod, 1977.
- [5] HALLIDAY, D., RESNICK, R., et WALKER, J., Physique, 2. Electricité et magnétisme, Montréal, Dunod, 6ème édition, 2003.
- [6] Séries de travaux dirigés « Electricité » et Examens, Université des sciences et technologie Abd El Hamid Ibn Badis, Mostaganem 2015-2020
- [7] D. Sivoukhine, "Cours de physique Général, tome III électricité" Union Soviétique, traduction Française, Edition Mir, 1987.
- [8] M.Berlin, J.P. Faroux et J. Renault, "Electromagnétisme 1, Electrostatique", Dunod, 1977.
- [9] E. Amzallag, J. Cipriani, J. Ben Naim et N. Piccioli "La physique du Fac, Electrostatique et Electrocinétique" 2ième Edition, Edi-Science, 2006.
- [10] VAN DE VORST, A., Introduction à la physique, Bruxelles, 2^{ème} édition, DeBoeck Université, 1993.
- [11] Mohamed AKBI, Electricité, 1 Electrostatique, 2^{ème} édition, 2006.
- [12] Y. GRANJON ; Exercices et Problèmes d'Electricité ; Dunod, Paris, (2003)
- [13] R. A. SERWAY, J. W. JEWETT, JR., A. DUCHARME, M. PÉRIARD, Physique - Tome 2 Electricité et magnétisme, Ed. De Boeck, (2013)
- [14]. Electricité et ondes, cours, exercices et travaux pratiques, J. L. Caubarrere, J. Fourny, H. Ladjouze, OPU, 8ème Edition 2006.
- [15] FEYNMAN, R.R., le cours de physique de de Feynman, Electromagnétisme 1et 2, Paris, Dunod, 2002.
- [16] Electrostatique et dynamique des particules chargées, Lumbroso Dunod (Paris)1996.
- [17] Electricité - Electromagnétisme, Cours et 100 exercices, F. BANCEL, E.Schatzman, (DUNOD) 1999
- [18] Electricité, Magnétisme, Cours, P.Baruch, J.F.Hulin Michel., Hermann(Paris)1972
- [19] Précis d'électricité Fondamentale, Pierre Baudoux, Presses Universitaires de Bruxelles 1974
- [20] Electricité et Magnétisme, Solutions et Corrigés des Problèmes, J.A.Denis, Marcheterre Bernard, Editions du renouveau pédagogique(Paris) 2004