

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Amar telidji de Laghouat
Faculté des Sciences

Mémoire

Pour obtenir

MASTER

SPÉCIALITÉ : ANALYSE MATHÉMATIQUES

Intitulé :

Équation de La chaleur et leur application en marché financier (Modèle Black Scholes).

Présenté par : **BADAOUI Mohamed**

Devant le jury composé de :

.....	Professeur	Université de Lagouat	Président
YAGOUB Ameur	Maître assistant A	Université de Lagouat	Encadreur
.....	Examineur
.....	Professeur	Examineur

Année Universitaire : 2017-2018

Remerciements

En préambule à ce mémoire, j'adresse ces quelques mots pour remercier notre grand Dieu tout puissant pour exprimer ma reconnaissance envers sa grande générosité. Dieu m'a Donné la volonté, la patience, la santé et la confiance durant toutes mes années d'études. En effet, je voudrai remercier mon université, mes encadreurs et tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de mon mémoire. Je tiens à remercier mon promoteur Mr YAGOUB Ameur pour son précieux conseils, son patiences et sa disponibilités tout au long de mon parcours universitaire. Je remercie ma famille d'être si patients, si généreux et tellement merveilleux, ils ont Toujours été une source de motivation d'encouragements et de beaucoup de bonheur. Je souhaite aussi adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont Apporté leur aide et qui ont contribué Ã l'élaboration de ce mémoire. Merci à mes professeurs et enseignants d'avoir été là, de nous avoir énormément appris Par la qualité des enseignements qu'ils nous ont prodigués. C'est, encore, un grand plaisir pour moi, d'adresser mes plus sincères remerciements a Particulier au Dr Monsieur : Rahmoune Abdelaziz. Je remercie également mes camarades de Master et mes amis du département pour Leurs conseils et leurs idées. Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont Toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire. Merci à tous et à toutes.

BADAOUI Mohamed.

Table des matières

Notations.	5
Introduction.	6
1 Préliminaires	8
1.1 Généralités sur les équations différentielles	8
1.2 Classification des équations aux Dérivées Partielles linéaires	10
1.2.1 Classification des EDP linéaires du premier ordre	10
1.2.2 Classification des EDP linéaires du second ordre	11
2 Etude analytique de l'équation de la chaleur	12
2.1 Lois de conservation et phénomènes de diffusion	12
2.1.1 Lois de conservation, équation de Burgers	12
2.1.2 Démographie de base	12
2.1.3 Concentration d'une espèce chimique (1D)	13
2.1.4 Trafic routier	13
2.2 Equations de diffusion, loi de Fick	14
2.3 Equation de la chaleur et séries de Fourier	15
2.3.1 Séparation des variables	15
2.3.2 Equation de la chaleur et transformée de Fourier	21
2.3.3 Les solutions sur de L'équation de la chaleur, le premier retour	25
2.3.4 La transformée de Laplace	27
3 Le mouvement brownien et l'équation de la chaleur	30
3.1 Le mouvement brownien	30
3.2 Comportement en temps petit	31
3.2.1 Perturbation déterministe	31

3.2.2	Calcul d'espérances via les EDP	32
3.2.3	Horizon aléatoire	32
3.2.4	EDP associée à un mouvement brownien avec dérive	33
3.3	La formule d'Ito pour le mouvement brownien	33
3.3.1	La formule d'Ito	34
3.3.2	Représentation des v.a comme intégrales stochastiques	34
3.3.3	Mouvement brownien vectoriel	34
3.3.4	Equation de la chaleur et formule d'Ito	35
3.3.5	Le brownien géométrique	35
4	Application	39
4.1	Littérature financière	39
4.1.1	Produits dérivés	39
4.1.2	Options, couverture et problème de pricing	39
4.1.3	Problème de pricing	40
4.2	Résolution analytique de l'équation de Black – Scholes	41
4.2.1	La formule d'évaluation	41
4.2.2	Notations	42
4.2.3	Cas d'une option Call européenne	42
4.2.4	Evaluation du prix de l'option	44
4.2.5	Cas d'une option Put européenne	45
	Conclusion.	46

Notations.

\mathbb{D}	le disque unité ouvert du plan complexe \mathbb{C} .
$\bar{\mathbb{D}}$	le disque unité fermé du plan complexe \mathbb{C} .
\mathbb{T}	le cercle unité.
$\hat{\mathbb{C}}$	$= \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
$A \lesssim B$	signifie qu'il existe une constante C absolue que $A \leq CB$.
$A \asymp B$	signifie que $A \lesssim B$ et $B \lesssim A$.
dm	la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle unité.
dA	la mesure planaire de Lebesgue normalisée sur le disque unité \mathbb{D} .
$dA_\alpha(z)$	$= (1 + \alpha)(1 - z ^2)^\alpha dA(z)$.
μ_α	mesure de Clark sur \mathbb{T} .
$W(\zeta, \delta)$	L'ensemble de Carleson sur \mathbb{D}
$E_\varphi(s)$	$= \{\zeta \in \mathbb{T} : \varphi(\zeta) \geq s\}$, l'ensemble de niveau du symbole φ .
K	l'ensemble de Cantor généralisé associée à la suite $(a_n)_n$.
$\mathcal{L}(E, F)$	l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de E dans F .
$\mathcal{L}(E)$	l'ensemble des opérateurs linéaires bornés sur l'espace E .
$L^2(\mathbb{T})$	l'espace de Lebesgue usuel.
$L^\infty(\mathbb{T})$	l'espace des fonctions bornées dans \mathbb{T} .
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produit scalaire de $L^2(\mathbb{T})$.
$\text{Hol}(\mathbb{D})$	espace des fonctions holomorphe sur \mathbb{D} .
H^2	l'espace de Hardy.
H^∞	l'espace des fonctions analytiques bornées.
u	fonction intérieure.
K_u	l'espace modèle.
K_u^∞	$= K_u \cap H^\infty$ est dense dans K_u .
\mathcal{D}_α	l'espace de Dirichlet.
\mathcal{D}	l'espace de Dirichlet classique.
$\text{span}\{x_i, i \in I \subseteq \mathbb{N}\}$	le sous-espace vectoriel fermé engendré par x_i .

Introduction.

Une révolution de grande ampleur a eu lieu depuis une trentaine d'années sur les marchés Financiers, suite à une politique affirmée de dérégulation. Ce nouveau paysage financier est Né notamment des déséquilibres et des incertitudes qui pèsent sur les relations économiques Internationales depuis le début des années 1970 (endettement des pays en voie de développement, instabilité des taux de change). Le développement de l'inflation et la grande volatilité des taux d'intérêt ont perturbé les anticipations des investisseurs. D'autre part, l'internationalisation des capitaux, les progrès technologiques en informatique et communication ont modifié les relations entre les différentes places financières : New-York, Londres, Tokyo, etc.. : il est maintenant possible à tout instant d'intervenir sur tous les marchés.

Ce mémoire se concentre sur une application particulière des équations aux dérivées partielles en Finance mathématique. Il considère l'étude du cas de **l'équation de la chaleur**. Celle – ci est une équation aux dérivées partielles linéaire homogène d'ordre 2 dont la solution explicite a été mise en évidence en mathématiques et en physique théorique, notamment suite aux travaux du mathématicien et physicien français **Jean – Baptiste Joseph Fourier** (1768 – 1830).

Comme nous le préciserons plus en détails par la suite, l'équation de propagation de la chaleur trouve des applications intéressantes dans l'analyse économique, notamment dans le cadre du traitement de la célèbre équation de **Black – Scholes** en finance. En effet, l'équation de **Black – Scholes** considère que, sous certaines conditions, le prix $C = C(t, s)$ d'une option d'achat (call) satisfait l'équation aux dérivées partielles linéaire homogène d'ordre 2 suivante :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Nous présentons d'étude l'équation de la chaleur qui sera utilisé au cours de ce mémoire. Notons qu'on va étudier un type de les équations en dérivés partielles que s'appelé problèmes paraboliques, nous allons donc subdiviser ce chapitre en quatre parties :

Dans la première partie nous faisons appel à des résultats de base, comme les généralités sur les équations différentielles et les types des équations différentielles partielles.

La deuxième partie est consacrée à présenter les outils nécessaires dans l'étude de l'équation de la chaleur (séries de Fourier, Méthode de séparation des variables, le transformée de Fourier, le Produit de convolution, le transformée de Laplace.

La troisième partie est consacrée à présenter les notions de mouvement brownien, quelques des éléments de calcul stochastique)

Enfin dans la dernière section nous présentons les notions et les propositions de Modèle Black-Scholes.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Généralités sur les équations différentielles

Définition 1.1. *La première définition que nous devrions couvrir devrait être celle de l'équation différentielle. Est une équation qui contient des dérivées, soit des dérivées ordinaires, soit des dérivées partielles. voir [8] Une équation faisant intervenir une fonction y ainsi que ses dérivées $y^{(k)}$ jusqu'à l'ordre n . Par exemple, une telle équation pourrait être :*

$$y'(t) = 5y(t) \quad \text{ou} \quad y = 0.7y'(t) - 6t$$

L'équation différentielle d'ordre n la plus générale peut toujours s'écrire sous la forme :
 $F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ (ED)

Où F est une fonction de $(n + 2)$ variables. Nous ne considérons que le cas où t et y sont 'a valeurs dans \mathbb{R} . Une solution 'a une telle équation différentielle sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction $y \in C^n(I, \mathbb{R})$ (une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui est n fois continument dérivable) telle que pour tout $t \in I$, on ait $F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$

Remarque : On dit souvent intégrer l'ED au lieu de trouver une solution 'a l'ED.

On considéré maintenant l'équation différentielle voir [6]

$$y' = F(t, y(t)) \quad (1-1)$$

Le problème de Cauchy :

Considérons l'équation différentielle (1-1) et E ouvert de \mathbb{R}^n Le problème de Cauchy est le suivant : on se donne un intervalle I de \mathbb{R} , $t_0 \in I$, $y_0 \in E$ et on cherche toutes les solutions $y : I \rightarrow E$ de (1) telles que $y(t_0) = y_0$

Définition 1.2. *On dira que l'application $f : U \rightarrow E$ est localement lipschitzienne en sa seconde variable sur $U \subset \mathbb{R} \times E$ si et seulement si, quelque soit $(t_0, z_0) \in U \subset \mathbb{R} \times E$,*

il existe un voisinage ouvert $U_0 \subset U$ de (t_0, z_0) dans $\mathbb{R} \times E$ tel qu'il existe une constante $C_0 > 0$

Vérifiant voir [6] :

$$\|f(t, z) - f(t, x)\| \leq C_0$$

Théorème 1.1. Avec les notations de l'équation différentielle (I), si f est continue sur U et localement lipschitzienne en sa seconde variable sur U quel que soit $(t_0, z_0) \in U$, il existe un intervalle ouvert I_0 contenant t_0 et une fonction $y : I_0 \rightarrow E$, telle que :

$$y(t_0) = y_0$$

y est une solution de (I)

pour tout intervalle $J \subset I_0$ contenant t_0 il n'existe qu'une seule solution de (I) passant par y_0 en t_0 . Il s'agit de $y \upharpoonright J$

Soit l'équation différentielle autonome :

$$\dot{y} = f(y(t)) \quad (1-2)$$

En générale on ne sait pas résoudre l'équation différentielle (1-2) alors on fait une étude qualitative de ses solutions. Cette étude commence par la recherche des points d'équilibre (points singuliers, fixes, stationnaires) c'est-à-dire les points où la vitesse s'annule.

Définition 1.3. Le point y^* est dit point d'équilibre du système (I_1) si $f(y^*) = 0$ autrement dit

y^* est une solution constante de l'équation $\dot{y} = f(y(t))$.

Définition 1.4. Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n contenant 0, et soit une fonction de classe ,

1. V est dite définie positive si :

(i) $V(0) = 0$, et

(ii) $V(u) > 0$ pour $u \in \Omega \setminus \{0\}$

2. V est dite définie négative, si $-V$ définie positive.

3. V est dite semi-définie positive si :

(i). $V(0) = 0$, et

(ii). $V(u) \geq 0$ pour tout $u \in \Omega$

4. V est dite semi-définie négative si $-V$ est semi-définie positive.

1.2 Classification des équations aux Dérivées Partielles linéaires

Définition 1.5. De nombreux problèmes dans le monde physique peuvent être modélisés par une différentielle partielle équation, d'applications aussi diverses que le flux de chaleur, la vibration d'un ballon, la propagation des ondes sonores, la diffusion de l'encre dans un verre d'eau, les champs électriques et magnétiques, la propagation des algues le long de la surface de l'océan, la fluctuation du prix d'une option d'achat d'actions, et la mécanique quantique le comportement d'un atome d'hydrogène. Cependant, comme pour tout domaine des mathématiques appliquées, le domaine des EDP est intéressant non seulement à cause de ses applications, mais parce qu'il a pris une vie mathématique propre voir [7].

Définition 1.6. Par définition, une équation aux dérivées partielles (EDP) a pour inconnue une fonction de plusieurs variables alors qu'une équation différentielle ordinaire a pour inconnue une fonction d'une seule variable).

L'analyse mathématique et numérique des EDP est un vaste domaine, que nous abordons ici sous l'angle de trois équations type (linéaires) et de deux méthodes Numériques de base : différences finies et éléments finis voir [1] On peut difficilement étudier les équations aux dérivées partielles (E.D.P.) dans une totale généralité comme on peut le faire pour l'équation différentielle ordinaire (E.D.O.)

Le domaine étant trop vaste. Heureusement, les E.D.P. les plus intéressantes proviennent de la modélisation d'un nombre restreint de phénomènes :

Le transport : convection de chaleur dans un liquide, convection d'un polluant dans l'atmosphère ...

- La diffusion : diffusion de la chaleur dans un solide ..
- Les vibrations : son dans l'air, vibration des structures ...
- L'équilibre : calcul de l'équilibre d'une structure soumise à des forces ...

Nous verrons qu'à chacun de ces phénomènes correspond une catégorie d'E.D.P.. L'étude est restreinte aux E.D.P. linéaires (en fait affines) d'ordre inférieur ou égal à 2.

1.2.1 Classification des EDP linéaires du premier ordre

voir [13]

L'équation est appelée linéaire si la fonction inconnue n'apparaît que sous forme linéaire

$$\alpha(x, y)\mu_x + b(x, y)\mu_y + c(x, y)\mu = d(x, y)$$

Equations différentielles partielles presque linéaires

$$P(x, y)\mu_x + Q(x, y)\mu_y = R(x, y, \mu)$$

Equations différentielles partielles quasi-linéaires

$$P(x, y, \mu)\mu_x + Q(x, y, \mu)\mu_y = R(x, y, \mu)$$

1.2.2 Classification des EDP linéaires du second ordre

Considérons l'EDP linéaire de second ordre dans deux variables

$$A\mu_{xx} + B\mu_{xy} + C\mu_{yy} + D\mu_x + E\mu_y + F\mu = G$$

Le déterminant :

$$d = B^2(x_0, y_0) - 4A(x_0, y_0)C(x_0, y_0)$$

Lorsque (x_0, y_0) l'équation est dite :

Elliptique : si $d < 0$

Parabolique : si $d = 0$

Hyperbolique : si $d > 0$

Si cela est vrai à tous les points d'un domaine Ω , alors l'équation est dite elliptique, parabolique ou hyperbolique dans ce domaine.

Chapitre 2

Etude analytique de l'équation de la chaleur

2.1 Lois de conservation et phénomènes de diffusion

2.1.1 Lois de conservation, équation de Burgers

L'équation la plus simple combinant à la fois la propagation non linéaire et la diffusion des effets sont l'équation de Burgers

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx} \dots \dots \dots (2 - 1)$$

L'équation a été étudiée d'abord dans un contexte physique par **Bateman**(1915). Par la suite, **Burgers** (1948) l'a redéfinie comme une équation modèle dans la théorie de la turbulence. Autour de 1950, **Hopf** et indépendamment **Cole**, ont montré que la solution exacte de (1) pourrait être trouvée en utilisant la transformation voir [20].

Quelques exemples de lois de conservation :

2.1.2 Démographie de base

Dans tous les exemples qui suivent, la même idée est à l'œuvre, formulée ici dans un cadre Discret : dans un territoire donne l'évolution d'une population, entre deux dates est (Immigration - émigration) + (naissances - décès).

Ce que l'on exprimera encore, $\partial\Gamma$ représentant l'ensemble des postes frontières et Γ l'ensemble des bureaux d'état-civil du territoire, par la formule voir [1] :

$$\sum (entrées(x, t_1, t_2) - sorties(x, t_1, t_2)) + \sum (naissance(x, t_1, t_2) - décès(x, t_1, t_2))$$

2.1.3 Concentration d'une espèce chimique (1D)

On considère ici un tube mince, de section constante s contenant une espèce chimique dont la concentration est fonction de \mathbf{x} variable d'espace, et du temps \mathbf{t} : Nous nous intéressons à l'évolution de la concentration $C = c(x, t)$:

Nous noterons :

- $c(x, t)$ la concentration en x à l' instant t en $[M/L^3]$;

- $J(x, t)$ quantité de matière traversant la section du tube en x par unité de surface et par unité de temps à l'instant t en $[M/L^2T]$ (débit par unité de surface ou densité de courant, dans le sens des x croissants, que l'on pourra interpréter comme) ;

- $f(x, t, c)$ l'apport de matière par unité de temps et de volume en (x, t) en $[M/L^3 \times T]$:

La différence entre les quantités de matière (pour l'espèce concernée) contenues aux instants t_1 et t_2 dans la portion $[x_1, x_2]$ du tube, est voir [1]

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} s c(x, t_2) dx - \int_{x_1}^{x_2} s c(x, t_1) dx \\ &= \int_{t_1}^{t_2} s (J(x_1, t) - J(x_2, t)) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{x_1}^{x_2} s f(x, t, c(x, t)) dx \right) dt \end{aligned}$$

Ce qui donne $t = t_2$ étant arbitraire :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial c(x, t)}{\partial t} dx = (J(x_1, t) - J(x_2, t)) + \int_{x_1}^{x_2} f(x, t, c(x, t)) dx$$

ou

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial c(x, t)}{\partial t} dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x, t, c(x, t)) dx$$

D'où enfin, puisque $x = x_2$ est tout autant arbitraire :

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} = f(x, t, c(x, t)) \dots (2, 2)$$

2.1.4 Trafic routier

Différents aspects de la théorie mathématique du flux de la circulation ont suscité l'intérêt de nombreux auteurs, citons seulement livres. Il s'est avéré qu'il existe plusieurs phénomènes intéressants dans la théorie du flux de trafic, y compris ondes de déplacement, de choc et de raréfaction. En utilisant des modèles mathématiques ou de simulation, on peut résoudre de nombreuses situations de circulation routière, par exemple, le trafic après que le feu de signalisation est devenu rouge ou vert, évitant un accident avec la dernière voiture dans une file d'attente, carrefour, T-jonctions, tout le trafic rond voir [19] .

Nous considérons ici une portion de route sur laquelle circulent des véhicules. Les grandeurs . Etudiées sont fonctions de \mathbf{x} variable d'espace, et du temps \mathbf{t} :

Nous noterons :

- $\mathbf{c}(\mathbf{x}; \mathbf{t})$ le nombre de véhicules par unité de longueur au voisinage de x à l' instant t de dimension $[1/L]$

- $\mathbf{v}(\mathbf{x}; \mathbf{t})$ la vitesse moyenne (orientée) des véhicules à l' instant t au point x de dimension $[L/T]$

-le nombre de véhicules passant en x par unité de temps , de dimension $[1/L]$ est donné Par

$$J(x, t) = c(x, t) \times \nu(x, t)$$

On supposera que la vitesse moyenne est fonction de l'intensité du trafic seule, ce qui s'exprime

$$J(x, t) = c(x, t) \times \nu(x, t) = \Phi(c(x, t))$$

- on note enfin $f(x, t, c)$ le nombre de véhicules qui entrent ou sortent de la route par unité de temps en x à l' instant t de dimension $[1/L]$: $f(x, t, c)$ est nul si aucune entrée ou sortie n'est possible au point considéré.

Peu de choses changent par rapport 'a l'exemple précédent, et le même raisonnement sur la conservation du nombre de véhicules conduit à la même équation qui devient voir [1]

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = \Phi(c(x, t)) + \frac{\partial c(x,t)}{\partial x} + f(x, t, c(x, t)).....(2, 3)$$

2.2 Equations de diffusion, loi de Fick

Diffusion en trois dimensions comme avec l'équation de chaleur unidimensionnelle, si nous remplaçons "température" par "Concentration", puis la loi de Fourier est connue comme la loi de Fick et la dérivation de l'équation de diffusion pour la substance procède presque exactement comme ci-dessous voir [20]

1.Retour sur la concentration d'une espèce chimique (**1D**), loi de **Fick**

On considère ici le tube mince du paragraphe (précédent) et l'équation de conservation

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial J(x,t)}{\partial x} = f(x, t, c(x, t)).....(2, 4)$$

Si nous supposons qu'entre deux points et la quantité de matière qui diffuse, par unité de temps, des plus fortes vers les plus faibles concentrations est proportionnelle 'a la différence des concentrations entre ces points (loi de Fick) , la densité de courant **J** vérifie

$$J(x, t) = -D \frac{\partial c(x,t)}{\partial x}$$

Et l'équation (2.4) devient :

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D(x, t) \frac{\partial c(x,t)}{\partial x} \right) = f(x, t, c(x, t)).....(2, 5)$$

Et lorsque D est constant :

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} - D \frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2} = f(x, t, c(x, t)).....(2, 6)$$

2.3 Equation de la chaleur et séries de Fourier

Dans l'étude de la chaleur, un modèle physique peut être imaginé dans lequel la chaleur est considéré comme un fluide à l'intérieur de la matière, libre de couler d'une position à une autre. La quantité de liquide présente est mesurée dans certaines unités telles que calorie (cal) ou BTU (British Thermal Unit). La présence de la chaleur dans la matière est la température de celle-ci, étant entendu que plus la chaleur présente plus la température, et qu'il coule des endroits de haute température aux endroits de basse température. La température peut être mesurée directement par un thermomètre ; la quantité de chaleur présente est déduite indirectement, comme nous le voyons par la définition suivante voir [23].

2.3.1 Séparation des variables

On considère ici le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = 0 \\ u(x, 0) = h(x) \text{ pour tous } x > 0 \dots (2, 7) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \text{ pour tous } x > 0 \end{cases}$$

Dans lequel $u(x, t)$ est définie sur $[0, L] \times [0, +\infty[$ et h sur $[0, L]$:

Le théorème 4 donne des conditions suffisantes sur h pour que ce problème admette une solution.

Théorème 1

Avec les notations de (2.7) on suppose que h est de classe C^3 sur $[0, L]$ et prolongeable en une fonction de classe C^2 et de classe C^3 par morceaux, impaire et $2L$ périodique. Alors, le problème (3.1) admet une solution et une seule qui est donnée par :

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \exp^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 Dt} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

Les h_k étant les coefficients de Fourier du prolongement de h .

Démonstration :

a) L'existence :

On note ici $D = \frac{1}{c}$

1. Rechercher les solutions de la forme $F(x) \times G(t)$ vérifiant les conditions aux limites.

Ceci conduit à un problème

$$F''(x) - \lambda F(x) = 0 \text{ avec } F(0) = F(L) = 0$$

(Il s'agit d'un problème de Sturm-Liouville), qui n'admet des solutions non nulles que pour

Certaines valeurs de que l'on précisera.

2. On suppose que $h(x)$ est un polynôme trigonométrique de période $2L$:

$$h(x) = \sum_{k=1}^n h_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Le système (E) ; (1) ; (2) admet-il une solution ?

3. On suppose que h est de classe C^3 sur $[0; L]$ et prolongeable en une fonction de classe C^2 et de classe C^3 par morceaux, impaire et $2L$ périodique que l'on notera \tilde{h} On notera sa Série de Fourier.

$$\sum h_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Et on posera

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \exp^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \frac{t}{c}} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Lorsque cela aura un sens.

(a) Que dirons des séries de coefficients $\sum_k |h_k|$, $\sum_k k |h_k|$ et $\sum_k k^2 |h_k|$?

(b) Nous Montrons que la somme des fonctions de la variable x :

$$x \rightarrow u_m(x, t) = h_k e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \frac{t}{c}} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Est une fonction de classe C^2 et préciser $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$

(c) Nous Montrer que la somme des fonctions de la variable t ;

$$t \rightarrow u_m(x, t) = h_k e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \frac{t}{c}} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Est une fonction de classe C^1 et préciser $\frac{\partial}{\partial x} u(x, t)$

(d) Nous Montrons qu'il existe une solution $u(x, t)$ du problème que l'on exprimera en fonction des coefficients de Fourier de \tilde{h}

Nous allons répondre des questions précédentes :

1. On considère une fonction de la forme $u(x, t) = F(x) \times G(t)$ vérifiant l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = c \frac{\partial}{\partial t} u(x, t)$$

sur $[0, L] \times [0, +\infty[$ ainsi que la condition aux bords : $u(0, t) = u(L, t) = 0$

Le système devient :

$$\begin{cases} F(x)G(t) = cF(x)G'(t) & \text{pour } x \in [0, L] \text{ et } t \geq 0 \\ F(0)G(t) = F(L)G(t) = 0 & \text{pour tout } t \geq 0 \end{cases}$$

On suppose pour la suite que u n'est pas la fonction nulle (F et G ne sont donc pas Identiquement nulles).

Etude de F : Fixons t_1 en lequel $G(t_1) \neq 0$ il vient :

$$\begin{cases} F'(x) = c \frac{G'(t_1)}{G(t_1)} F(x) = \lambda F(x) & \text{pour } x \in [0, L] \text{ et } t \geq 0 \\ F(0) = F(L) = 0 \end{cases}$$

Ceci conduit au problème

$$F''(x) - \lambda F(x) = 0 \text{ avec } F(0) = F(L) = 0$$

(Il s'agit d'un problème de Sturm-Liouville (HP) et pas d'un problème de Cauchy (in P)). Distinguons selon le paramètre λ :

(a) Lorsque $\lambda = 0$; $F(x) = \alpha x + b$ ne vérifie les conditions $F(0) = F(L) = 0$ que si elle est nulle ;

(b) Lorsque $\lambda > 0$, $F(x) = \alpha e^{\sqrt[3]{\lambda}x} + b e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}$ ne s'annule en 0 et L que si elle est nulle.

(c) Lorsque $\lambda = -\omega^2 < 0$, $F(x) = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$ est nulle en 0 et L ssi $\alpha = 0$ et $\beta \sin(\omega L) = 0$. Pour qu'il existe des solutions non nulles, il faut et il suffit que $\omega L \equiv 0 [\pi]$

$$\text{soit } \omega = \frac{kL}{L} \text{ et } \lambda = -\frac{k^2 L^2}{L^2}$$

- Retour à G lorsque $\lambda = -\frac{k^2 L^2}{L^2}$, $k \in N$

On reprend l'équation $F'(x)G(t) = CF(x)G'(t)$ en un point x_1 tel que $F(x_1) \neq 0$. Il

Vient :

$$G'(t) = \frac{F'(x_1)}{CF(x_1)} G(t) = -\frac{k^2 L^2}{CL^2} G(t)$$

Et

$$G(t) = \gamma e^{\frac{k^2 \pi^2}{cL^2} t}$$

Conclusion : les solutions non nulles à variables séparables sont de la forme :

$$u(x, t) = e^{-\frac{k^2 \pi^2}{cL^2} t} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

2. soit $h(x) = \sum_{k=1}^n h_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$ en posant :

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^n u_k(x, t) = \sum_{k=0}^n h_k e^{-\frac{k^2 \pi^2}{cL^2} t} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

On a clairement une solution de l'équation qui vérifie les conditions $u(x, 0) = h(x)$ et $u(0, t) = u(L, t) = 0$

3. Passons aux séries : On suppose que h est de classe C^3 sur $[0, L]$ et prolongeable en une fonction de classe C^2 et de classe C^3 par morceaux, impaire et $2L$ périodique que l'on Notera \tilde{h} :

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k e^{-\frac{k^2 \pi^2}{L^2} \frac{t}{c}} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

Lorsque cela a un sens.

(a) Comme \tilde{h} est au moins continue et de classe C^1 par morceaux, sa série de Fourier converge normalement et sa somme est \mathbf{h} : On a donc :

$$\tilde{h}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

Et $\sum_k |h_k|$ converge ($|h_k| = \left\| x \rightarrow h_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \right\|_{\infty}$)

De la même façon, la série de Fourier de \tilde{h}' converge normalement et les termes généraux de cette série s'obtiennent en dérivant ceux de \tilde{h} :

$$\tilde{h}'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \frac{k\pi}{L} x \cos\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

On en déduit la convergence de $\sum_k |h_k|$ pour les mêmes raisons que précédemment.

Enfin, la série de Fourier de \tilde{h} qui est continue et de classe C^1 par morceaux converge Normalement et $\sum_k k^2 |h_k|$ est convergente.

(b) On note

$$\begin{aligned} f_k &:= x \rightarrow u_x(x, t) = h_k e^{-\frac{k^2 \pi^2}{L^2} \frac{t}{c}} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \\ f_k'(x) &= h_k \frac{k\pi}{L} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{L^2} \frac{t}{c}} \cos\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \\ f_k''(x) &= h_k \frac{k^2 \pi^2}{L^2} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{L^2} \frac{t}{c}} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \end{aligned}$$

i. Chaque fonction f_k est de classe C^2 ;

ii. la série $\sum f_k(x)$ converge en un point (0 par exemple) ; il y a même convergence Normale sur \mathbb{R} ;

iii. la série $\sum f_k'(x)$ converge en un point ; il y a même convergence normale sur \mathbb{R} ;

iv. la série $\sum f_k''(x)$ converge uniformément sur tout compact de \mathbb{R} Il y a même Convergence normale sur \mathbb{R} ;

D'après le théorème de dérivation d'une série de fonction $\sum f_k$ est de classe C^2 et on obtient ses dérivées en dérivant terme à terme ce qui donne :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} h_k e^{-\frac{k^2 \pi^2}{L^2} \frac{t}{c}} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \\ \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} h_k \frac{k\pi}{L} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{L^2} \frac{t}{c}} \cos\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} h_k \frac{k^2 \pi^2}{L^2} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{L^2} \frac{t}{c}} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \end{aligned}$$

(c) On démontre de la même façon que la somme des fonctions de la variable t ;

$$t \rightarrow u_m(x, t) = h_k e^{-\frac{k^2 \pi^2}{L^2} \frac{t}{c}} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

Est une fonction de classe C^1 et que la dérivée de sa somme est

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{-1}{c} \sum_{k=0}^{\infty} h_k \frac{k^2 \pi^2}{L^2} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{L^2} \frac{t}{c}} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

(d) $u(x, t)$ satisfait à l'équation car $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = C \frac{\partial}{\partial t} u(x, t)$ comme on peut le vérifier en regardant les deux séries, $u(x, t)$ est nulle si $x = 0$ ou L ; enfin , $u(x, t) = h(x)$

L'idée de base était que l'on peut prolonger une fonction quelconque par imparité et 2Lpériodicité pour l'écrire comme somme d'une série trigonométrique.

b) L'unicité :

Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème (3.1). On note $u_0 = u_2 - u_1$ et on veut montrer que $u_0 = 0$:

1. Nous allons Intégrer $u(x, t) \times \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0(x, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} u_0(x, t) \right)$ entre $x_1 = 0$ et $x_2 = L$
2. En déduire que $t \rightarrow \int u_0^2(x, s) ds \searrow$

Nous suivons les étapes suivantes :

1. 1. Développons, intégrons par parties, dérivons sous le signe somme :

$$\begin{aligned} & \int_0^L u(x, t) \times \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0(x, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} u_0(x, t) \right) dx \\ & \int_0^L u(x, t) \times \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0(x, t) dx - \frac{1}{c} \int_0^L u_0(x, t) \frac{\partial}{\partial t} u_0(x, t) dx \\ & = [u_0(x, t) \frac{\partial}{\partial x} u_0(x, t)]_0^L - \int_0^L \left(\frac{\partial}{\partial x} u_0(x, t) \right)^2 dx - \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L u_0^2(x, t) dx \end{aligned}$$

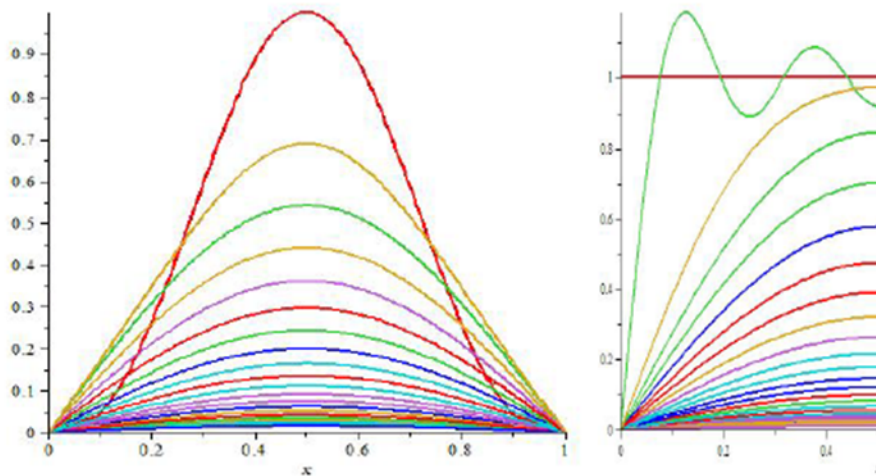
La partie toute intégrée est donc nulle de par la condition aux bords vérifiée par u_0 :

2. La fonction $t \rightarrow \int_0^L u_0^2(x, s) ds$ a donc une dérivée négative sur \mathbb{R}^+ et \searrow . Comme elle est nulle en $t = 0$ et par ailleurs positive, elle est partout nulle.

Observations

Les conditions sur la fonction h apparaîtront peu réalistes pour des applications réelles. On peut ainsi se demander ce qu'il advient de l'expression formelle de la solution $u(x, t)$ lorsque h est simplement continue par morceaux sur $[0, L]$: Nous allons tenter, avec l'exemple (simpliste) 1.

Derépondra à cette question en représentant les fonctions $u(x, t)$ lorsque h vérifie les propriétés de notre théorème (1), puis lorsqu'elle est seulement de classe C^1 par morceaux. Ce sont là des observations importantes qui éclaire la notion de **solution faible** indispensable



pour justifier les méthodes numériques.

On a représenté ici les sommes partielles :

$$u_7(x, t) = \sum_{k=1}^7 h_k e^{-\frac{k^2 \pi^2}{L^2} Dt} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

- A gauche, la fonction h vérifie les hypothèses du théorème.

-A droite, h est égale à 1 sur $[0, 1]$ ce qui met à mal la continuité aux bords lorsque $t = 0$:

La Première fonction qui oscille autour de la valeur 1, est $u_7(x, 0)$ c'est la 7^{ième} somme de Fourier de h .

Exemple :

Le but est de tracer certaines des fonctions données par le théorème 4 en sortant, comme il se doit dans la vraie vie, des hypothèses du théorème pour voir ce qui en reste. On travaillera sous Maple.

1. On suppose définie sur $[0, L]$. Nous Traçons le prolongement impair et de période $2L$.

2. Nous écrirons une fonction qui prend en argument une fonction définie sur $[0, L]$, un entier n , un réel L et retourne le coefficient de Fourier de son prolongement impair de période $2L$. Écrivons de la même façon une fonction Fourier retournant sa somme de Fourier (au point x). Testons avec les exemples de la question 4. Puis Interprétons à la lumière des théorèmes fondamentaux sur la convergence des séries de Fourier.

3. Construire enfin une fonction $U(h, nL, x, t)$ qui retourne l'expression de la fonction

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \exp\left(-\frac{k^2 \pi^2}{L^2} Dt\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

4. Enfin Réalisons des tracés lorsque $L = 1$, $h(x) = 64x^3(1 - x)^3$ (les hypothèses du théorème sont alors vérifiées) et $h(x) = 1$ sur $[0, 1]$ (elles ne le sont plus).

La solution de cet exemple est suivante :**Avec MAPLE :**

1. Juste pour le fun, un prolongement impair et de période $2L$ à l'aide de la fonction `partieEntiere`

2. On exprime les coefficients $b_n(f)$ pour une fonction impaire. Les sommes de Fourier s'expriment simplement.

Lorsque f est le prolongement impair et de période $2L$ de $h : x \rightarrow 64x^3(1 - x)^3$ il y a convergence normale de la série de Fourier (est de classe au moins...); lorsque est le prolongement impair et de période $2L$ de 1, elle est de classe par morceaux, non continue, il y a convergence alors simple des sommes de Fourier vers la régularisée de mais pas convergence uniforme.

3. Pas de mystère pour exprimer les sommes partielles de la série de somme : $u(x, t)$ Pour ce qui est de la syntaxe, on utilise les formes inertes `Sum` et `Int` pour choisir la façon d'effectuer les calculs (on choisit ici `value` car dans les deux cas le logiciel calcule formellement les coefficients $b_n(f)$:

2.3.2 Equation de la chaleur et transformée de Fourier

Nous sommes sur le point de faire la transition de la série de Fourier à la transformée de Fourier. "Transition" est le mot approprié, car dans l'approche, nous allons prendre la transformée de Fourier émerge lorsque nous passons des fonctions périodiques aux fonctions non périodiques, nous verrons une fonction non périodique (qui peut être à peu près n'importe quoi) comme un cas limite d'une fonction périodique à mesure que la période devient de plus en plus longue. En fait, ce processus ne produit pas immédiatement le résultat souhaité. Il faut un peu de bricolage supplémentaire pour amadouer la transformée de Fourier de la série Fourier, mais c'est une approche intéressante.

Le spectre d'une fonction périodique est un ensemble discret de fréquences, éventuellement un ensemble infini (quand il y a un angle) mais toujours un ensemble discret. En revanche, la transformée de Fourier d'un signal non périodique produit un spectre continu, ou un continuum de fréquences.

La transformée de Fourier analyse un signal dans ses composantes de fréquence. Nous n'avons pas encore examiné comment va la synthèse correspondante. Comment pouvons-nous récupérer dans le domaine temporel à partir de dans la fréquence domaine voir [17].

Transformée de Fourier : point de vue élémentaire

Définition 2.1. On définit la transformée de Fourier d'une fonction intégrable sur \mathbb{R} en posant :

$$F(f)(\omega) = (\widehat{f})(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega x} dx \dots \dots (2-8)$$

La définition varie dans la littérature d'un facteur multiplicatif autour de la pulsation et on peut aussi poser

$$F(f)(\omega) = (\widehat{f})(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \omega x} dx$$

Propriétés 1 (intégrale de Fourier) :

1. La transformée de Fourier est définie pour tout réel ω .

Si f est intégrable sur \mathbb{R} , $t \rightarrow f(t)e^{-i\omega t}$ l'est aussi : elles ont le même module.

2. \widehat{f} est continue et bornée sur \mathbb{R} , donc la majoration de $\|\widehat{f}\|_{\infty}$ est : Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$:

$$|\widehat{f}(\omega)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t} dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt$$

On a donc : $\|\widehat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$

Lemme de Riemann Lebesgue :

Soit f une fonction continue par morceaux sur \mathbb{R} . On veut montrer que

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \widehat{f}(\omega) = 0$$

1. On suppose que f est une fonction en escalier sur $[a, b]$, nous Montrons que

$$\lim_{\alpha} \int_a^b e^{i\alpha t} f(t) dt$$

a pour limite 0 (désigne un réel).

2. Nous allons Montrer que le même résultat est vrai pour toute fonction f , continue par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$:

3. On considère maintenant f intégrable sur \mathbb{R} . Montrons que

(a). pour tout ε , il existe un intervalle compact $[a, b]$ tel que

$$\int_{]-\infty, \alpha]} |f| \leq \varepsilon \quad \int_{[b, +\infty[} |f| \leq \varepsilon$$

(b) Enfin en déduire que

$$\lim_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t} f(t) dt = 0$$

La démonstration :

1. Les fonctions en escalier : si φ est une fonction en escalier attachée à la subdivision $(t_j)_j$ du segment $[a, b]$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^b \varphi(t) e^{int} dt \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \alpha_k e^{int} dt \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\alpha_k| \left| \frac{e^{int_{k+1}} - e^{int_k}}{in} \right| dt \leq \frac{2}{n} \sup |\alpha_k| |b - \alpha| \end{aligned}$$

La limite est bien 0 lorsque $n \rightarrow \infty$

2. Considérons maintenant f continue par morceaux sur $[a, b]$ et $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction en escalier qui vérifie $\|f - \varphi\|_{[\alpha, b]} \leq \varepsilon / |b - \alpha|$ Nous avons par ailleurs

$$\left| \int_{\alpha}^b f(t) e^{i\alpha t} dt \right| \leq \left| \int_{\alpha}^b (f(t) - \varphi(t)) e^{i\alpha t} dt \right| + \left| \int_{\alpha}^b \varphi(t) e^{i\alpha t} dt \right|$$

Le premier terme du membre de droite est majoré par ε .

- Pour le second, on sait qu'il existe un rang N_{ε} à partir du quel

$$\left| \int_{\alpha}^b \varphi(t) e^{i\alpha t} dt \right| \leq \varepsilon$$

En conséquence, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N_{ε} tel que :

$$n \geq N_{\varepsilon} \implies \left| \int_{\alpha}^b f(t) e^{i\alpha t} dt \right| \leq 2\varepsilon$$

3. Considérons maintenant une fonction f intégrable sur \mathbb{R} ou sur un intervalle quelconque

$I \subset \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$: Il existe un segment $[\alpha, b] \subset I$ tel que

$$\left| \int_I |f| - \int_{[\alpha, b]} |f| \right| \leq \varepsilon$$

On a :

$$\left| \int_I f(t)e^{i\alpha t} dt \right| = \left| \int_{[\alpha, b]} f(t)e^{i\alpha t} dt \right| + \left| \int_{I \setminus [\alpha, b]} f(t)e^{i\alpha t} dt \right| \leq \left| \int_{[\alpha, b]} f(t)e^{i\alpha t} dt \right| + \varepsilon$$

Comme dans la démonstration précédente, il existe un rang N_ε à partir du quel

$$\left| \int_{\alpha}^b f(t)e^{i\alpha t} dt \right| \leq \varepsilon$$

Et on conclut de la même façon.

Dérivation et transformation de Fourier

1. On considère une fonction f intégrable sur \mathbb{R} de transformée de Fourier définie par $\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t} dt$. La fonction $(\omega, t) \rightarrow f(t)e^{-i\omega t}$ satisfait clairement au théorème de continuité d'une intégrale à paramètre

1) $g := t \rightarrow f(t)e^{-i\omega t}$ est intégrable sur \mathbb{R} ;

2) $\omega := t \rightarrow f(t)e^{-i\omega t}$ est continue ;

3) il existe une majoration uniforme $|f(t)e^{-i\omega t}| \leq |f(t)|$ par une fonction intégrable sur

\mathbb{R} :

Par contre, pour la dérivation sous le signe somme, rien n'assure que :

$$\frac{\partial}{\partial \omega} g(\omega) = -i\omega f(t)e^{-i\omega t}$$

Vérifie les mêmes hypothèses. On supposera donc pour aller plus loin dans les calculs que

de plus $t \rightarrow tf(t)$ est intégrable sur \mathbb{R} Alors :

- $g := t \rightarrow \frac{\partial}{\partial \omega} g(\omega) = -itf(t)e^{-i\omega t}$ est intégrable sur \mathbb{R} ;

- $\omega \rightarrow \frac{\partial}{\partial \omega} g(\omega) = -itf(t)e^{-i\omega t}$ est continue ;

- il existe une majoration uniforme $|\frac{\partial}{\partial \omega} g(\omega)| \leq |tf(t)|$ par une fonction intégrable sur \mathbb{R} :

Donc, si $f(t)$ et $tf(t)$ sont intégrables sur \mathbb{R} \widehat{f} est de classe C^1 et

$$\frac{d\widehat{f}(\omega)}{d\omega} = -i \int_{\mathbb{R}} xf(x)e^{-i\omega x} dx$$

2. On suppose maintenant que f est intégrable et dérivable sur \mathbb{R} et que f' est intégrable elle aussi . On peut donc définir la transformée de Fourier de f' qui est

$$F(f')(\omega) = \widehat{f'}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)e^{-i\omega x} dx$$

On est alors tenté d'intégrer par parties. Cela donnerait

$$F(f')(\omega) = [e^{-i\omega x} f(x)]_{-\infty}^{+\infty} + i\omega \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\omega x} dx$$

Dans cette formule les deux intégrales sont définies. En conséquence la partie toute intégrée A elle-même un sens lorsque f et f' sont toutes deux intégrables. Pour se convaincre que cette limite est nulle on intégré les mêmes fonctions sur l'intervalle $[0, +1]$ par exemple.

Cela montre que voir [1] :

$$\int_0^{+\infty} f(x)e^{-i\omega t} dx = [e^{-i\omega t} f(x)]_0^{+\infty} + i\omega \int_0^{+\infty} f(x)e^{-i\omega t} dx$$

Et là on voit clairement que si la partie toute intégrée a une limite $\lim_{+\infty} f' = 0$

Transformée de Fourier d'une Gaussienne

La courbe gaussienne (parfois appelée la distribution normale) est la courbe familière en forme de cloche qui se pose sur les mathématiques, les statistiques, les probabilités, l'ingénierie, la physique, etc. Nous verrons une version simple du gaussien, donnée par équation voir [24] :

Soit f définie par $f(t) = e^{-\alpha t^2}$, avec $\alpha > 0$.

1. Nous Montrons que sa transformée de Fourier est de classe C^∞ .

2. Nous Montrons que \widehat{f} vérifie une équation différentielle linéaire.

La démonstration

$$1. \widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} e^{-\alpha t^2} dt = \int_{\mathbb{R}} h(\omega, t) e^{-i\omega t} dt$$

La fonction h admet des dérivées partielles par rapport à ω à tous les ordres qui sont

$$\frac{\partial^k}{\partial \omega^k} h(\omega, t) = (-it)^k e^{-i\omega t} e^{-\alpha t^2} = h_k(\omega, t)$$

Pour tout $k \geq 0$, on a

- $t \rightarrow h_k(\omega, t)$ intégrable sur \mathbb{R} ;

- $t \rightarrow h_k(\omega, t)$ continue sur $[-A, A]$;

- il existe φ_k intégrable sur \mathbb{R} telle que pour $h_k(\omega, t) \in [-A, A] \times \mathbb{R}$,

$$|h_k(\omega, t)| = |t|^k e^{-\alpha t^2} \leq A^k e^{-\alpha t^2} = \varphi_k(t)$$

Ainsi, \widehat{f} est de classe C^1 sur tout $[-A, A]$ et donc sur \mathbb{R} et $\widehat{f}'(\omega) = \int_{\mathbb{R}} h_1(\omega, t) dt$

2. En dérivant, nous avons

$$\begin{aligned} \widehat{f}'(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} h_1(\omega, t) dt = -i \int_{\mathbb{R}} (te^{-\alpha t^2}) e^{-i\omega x} dt \\ &= -i \left[\frac{e^{-\alpha t^2}}{-2\alpha} e^{-i\omega x} \right]_{-\infty}^{+\infty} + i \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{e^{-\alpha t^2}}{-2\alpha} \right) (-i\omega) e^{-i\omega x} dt \end{aligned}$$

Ce qui nous donne l'équation différentielle

$$y'(\omega) = -\frac{\omega}{-2\alpha} y(\omega)$$

Assortie de la condition initiale $y(0) = \widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t^2} dt$ d'où, après calcul de l'intégrale de Gauss

$$\widehat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$$

Produit de convolution (fonctions intégrables)

Définition 2.2. produit de convolution

Soient f et g deux fonctions continue par morceaux sur \mathbb{R} , Lorsque la fonction $t \rightarrow f(x-t)g(t)$ est intégrable, on pose :

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt \dots \dots \dots (2-9) \quad \text{On appelle}$$

produit de convolution de et cette fonction

Existence et propriétés du produit de convolution La convolution est un opérateur linéaire et, par conséquent, possède un certain nombre de propriétés importantes, y compris les propriétés commutatives, associatives et distributives. Les définitions et interprétations de ces propriétés sont résumées ci-dessous voir [24].

Soient f et g continues par morceaux sur \mathbb{R} , On suppose f intégrable et g bornée.

1. $f * g$ et $g * f$ sont définies sur \mathbb{R} et que $g * f = f * g$.
2. si f ou g est continue, le produit de convolution $f * g$ est aussi continu.
3. En admettant au besoin la validité d'une formule du type :

$$\int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(x,t)dt)dx = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(x,t)dx)dt$$

Exprimer une relation entre

$$g * f, \widehat{f} \text{ et } \widehat{g}$$

Transformée de Fourier et convolution : formulaire

Si f est une fonction intégrable sur \mathbb{R} , sa transformée de Fourier est définie sur \mathbb{R} , continue et bornée sur \mathbb{R} sa limite est nulle en $\pm\infty$ $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \widehat{f}(\omega) = 0$ et on a les formules suivantes :

Lorsque la transformée est définie par :

$$F(f)(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\omega x} dx$$

si f et $x \rightarrow xf(x)$ sont intégrable, $\frac{d\widehat{f}(\omega)}{d\omega} = -i \int_{\mathbb{R}} xf(x)e^{-i\omega x} dx$

si f et f' sont intégrable, $\widehat{f'}(\omega) = i\omega \widehat{f}(\omega)$

si $g_{\alpha}(t) = e^{-\alpha t^2}$ $\widehat{g}_{\alpha}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} g_{1/4\alpha}(\omega)$

si $f, g, f * g$ sont (définies) et intégrables

$$g * f = \widehat{f} \times \widehat{g}$$

2.3.3 Les solutions sur de L'équation de la chaleur, le premier retour

On se propose ici d'étudier le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = g(x, t) & \text{pour tous } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) & \text{pour tous } x \in \mathbb{R} \end{cases} \dots\dots(4, 4)$$

On cherchera d'éventuelles solutions de ce système en calculant la transformée de Fourier de la fonction

$$x \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t)$$

Ce qui nous ramène à une équation différentielle ordinaire vérifiée par la transformée de Fourier $\varphi_t : x \in \mathbb{R} \rightarrow u(x, t)$ pour un paramètre $t > 0$, Cette approche conduit aux théorèmes 3 et 4.

théorème 2.3.10

problème homogène, solution fondamentale

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ par $u : x \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$

- u est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$.

- u est solution de l'équation $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = 0$ sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$.

- pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = 0$ et lorsque $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(0, t) = +\infty$

- pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx = 1$ et si $\alpha > 0$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{[-\alpha, \alpha]} u(x, t) dx = 1$

Réalisation avec Maple :

2.3.4 La transformée de Laplace

La transformée de Laplace est un autre outil opérationnel pour résoudre des coefficients constants d'équations différentielles linéaires. Le processus de solution se compose de trois étapes principales :

- Le problème "hard" donné est transformé en une équation
- Cette équation simple est résolue par des manipulations purement algébriques.
- La solution de l'équation simple est transformée pour obtenir le résultat de la résolution du problème donné.

De cette manière, la transformation de Laplace réduit le problème de la résolution d'une équation différentielle à un problème algébrique. La troisième étape est facilitée par tables, dont le rôle est similaire à celui des tables intégrales en intégration. voir [10]

Transformée de Laplace, point de vue élémentaire

Définition 2.3. transformée de Laplace

Soit f une fonction numérique continue par morceaux (ou localement sommable) sur $]0, +1[$, La transformée de Laplace de f est la fonction $L(f)$ définie sur l'ensemble complexes p tels que admette une intégrale sur $]0, +1[$, par :

$$L(f)(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \dots \dots (2.10)$$

Théorème 2.1. propriétés de la transformée de Laplace

Soit f continue par morceaux (ou localement intégrable) sur $]0, +1[$ et $q \in \mathbb{C}$, On suppose que $L(f)$ sa transformée de Laplace est définie pour le complexe q .

- $L(f)$ est définie pour tout complexe p tel que $R(p) > R(q)$.

- Il existe un réel p_0 et un seul tel que $t \rightarrow f(t)e^{-pt}$.

* est intégrable sur $]0, +1[$ si $R(p) > p_0$.

* N'admet pas d'intégrale (même impropre) si $R(p) < p_0$

On dit alors que p_0 est l'abscisse de sommabilité de $L(f)$. voir [1]

- La restriction de $L(f)$ à $]p_0, +\infty[$ est de classe C^1 et l'on a

$$\frac{d^m}{dp^m} L(f)(p) = (-1)^m L(t^m f)(p) \dots \dots \dots (2.10.1)$$

Résolution de l'équation de la chaleur par transformée de Laplace

voir [5]

Exemple

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$$

Tel que : $x \geq 0$, $t > 0$ et α constante positive.

Sous les conditions initiales :

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0 \dots\dots\dots(1) \\ u(0, t) = u_0 \dots\dots\dots(2) \dots\dots\dots(2.10.2) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \dots\dots\dots(3) \end{cases}$$

Solution

On applique le transformée de Laplace :

$$L \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \right\} = L \left\{ \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\}$$

Donc : $sU(x, s) - u(x, 0) = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$

Parce que $\frac{d^2}{dx^2} U(x, s) - \frac{s}{\alpha} U(x, s) = -\frac{1}{\alpha} u(x, 0)$

On à (3) on trouve :

$$\frac{d^2}{dx^2} U(x, s) - \frac{s}{\alpha} U(x, s) = 0 \dots\dots\dots(2.10.3)$$

(2.10.3) est une équation différentielle de l'ordre 2 la solution est :

$$U(x, s) = Ae^{\gamma x}$$

On substitution dans (2.10.3) on obtient :

$$r^2 Ae^{\gamma x} - \frac{s}{\alpha} Ae^{\gamma x} = 0$$

L'équation précédente a deux racines réels : $r_1 = \sqrt[2]{\frac{s}{\alpha}}$, $r_2 = -\sqrt[2]{\frac{s}{\alpha}}$

La solution générale donne comme suivante :

$$U(x, s) = A_1 e^{r_1 x} + A_2 e^{r_2 x} = A_1 e^{x \sqrt[2]{\frac{s}{\alpha}}} + A_2 e^{-x \sqrt[2]{\frac{s}{\alpha}}} \dots\dots\dots(2.10.4)$$

On trouvant les constantes A_1, A_2 a grâce les conditions initiales (3) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U(x, s) = \lim_{x \rightarrow \infty} \{u(x, t)\} = L \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) \right\} = 0$$

Ou $A_1 = 0$

L'équation (5.2.3) devenus

$$U(x, s) = A_2 e^{-x \sqrt[2]{\frac{s}{\alpha}}}$$

Encore on a condition(2) :

$$U(0, s) = L \{u(0, t)\} = L \{u_0\} = \frac{u_0}{s}$$

Grace les deux derniers résultats

$$U(0, s) = A_2 = \frac{u_0}{s}$$

Donc : $U(x, s) = u_0 \frac{e^{-x \sqrt[2]{\frac{s}{\alpha}}}}{s}$

Pour trouver la solution on applique l'inverse de transformée de Laplace :

$$U(x, t) = L^{-1} \left\{ u_0 \frac{e^{-x \sqrt[2]{\frac{s}{\alpha}}}}{s} \right\}$$

On a $L \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{\alpha}{2\sqrt[2]{t}} \right) \right\} = \frac{e^{-\alpha \sqrt[2]{s}}}{s}$

Donc :

$$\begin{aligned}
 U(x, t) &= L^{-1} \left\{ u_0 \frac{e^{-x \sqrt[2]{\frac{s}{\alpha}}}}{s} \right\} = L^{-1} \left\{ u_0 \frac{e^{-(x/\sqrt[2]{\alpha} \sqrt[2]{s})}}{s} \right\} \\
 &= u_0 \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt[2]{\alpha t}} \right) \\
 &= u_0 \left(1 - \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt[2]{\alpha t}} \right)
 \end{aligned}$$

Finalement on trouve :

$$U(x, t) = u_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt[2]{\pi}} \int_0^{x/(2\sqrt[2]{\alpha t})} e^{-\tau^2} d\tau \right) \dots \dots \dots (2.10.5)$$

Chapitre 3

Le mouvement brownien et l'équation de la chaleur

3.1 Le mouvement brownien

Dans cette section, nous introduisons le mouvement brownien. Le mouvement brownien peut être considéré comme la limite de la marche aléatoire lorsque le temps et l'espace des incréments vont à zéro. Il n'est pas évident de savoir comment prendre une telle limite ou même ce que l'on entend par le mot limite. Plutôt que de s'inquiéter de ces détails pour le moment, nous allons plutôt assumer qu'une sorte de marche aléatoire simple existe et énumérer certaines propriétés que la limite devrait avoir. Nous allons commencer avec le cas unidimensionnel. Le processus sera défini en temps continu et l'espace continu – nous .

Soit W_t la position du mouvement brownien (marche aléatoire continu) à l'instant t .

Le mouvement brownien est également appelé le processus Wiener. Pour les mathématiciens les termes mouvement brownien et processus de Wiener sont synonymes. En littérature scientifique, le terme mouvement brownien est souvent utilisé pour un processus physique pour lequel il existe plusieurs modèles mathématiques différents dont l'un est celui que nous discutons ici voir [15].

Le mouvement brownien est un exemple de processus stochastique continu, Un processus stochastique est une collection de variables aléatoires $\{W_t\}$ indexées par temps. Dans notre cas, le temps court sur les réels non négatifs. (La marche aléatoire simple est un processus stochastique avec le temps indexé par les entiers non négatifs). Cette collection de variables aléatoires peut aussi être vue comme une fonction aléatoire.

$$t \rightarrow W_t$$

Un processus stochastique est une famille $(X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires à valeurs dans un espace mesurable χ et indexées par le temps t .

Dans ce mémoire on prendra $\chi = \mathbb{R}^d$ muni de sa tribu borélienne. Le paramètre de temps t variant dans T peut être discret ou continu.

Dans ce mémoire, on considère des processus stochastiques à temps continu et l'intervalle de variation du temps T est soit fini $T = [0, T]$, $0 < T < +\infty$, soit infini $T = [0, +\infty[$. On écrira souvent processus pour processus stochastique. Pour chaque $\omega \in \Omega$, l'application $X(\omega) : t \in T \rightarrow X_t(\omega)$ est appelé une trajectoire du processus dans le scénario ω . Le processus stochastique X est dit c'ad-l'ag (resp. continu) si pour chaque $\omega \in \Omega$, la trajectoire $X(\omega)$ est continue à droite et admet une limite à gauche (resp. continue). Etant donné un processus stochastique $Y(Y_t)_{t \in T}$, on dit que Y est une

modification de X si pour tout $t \in T$ on a $X_t = Y_t$ **p.s.**, i.e $P[X_t = Y_t] = 1$

On dit que Y est indistinguable de X si leurs trajectoires coïncident p.s. :

$P[X_t = Y_t, \forall t \in T]$. Bien entendu, la notion d'indistinguabilité est plus forte que celle de modification, mais si on sait que les deux processus X et Y sont c'ad-l'ag, et si Y est une modification de X , alors X et Y sont indistinguishables.

L'interprétation du paramètre t comme index de temps introduit un aspect dynamique : pour modéliser le fait que l'incertitude des événements de Ω devient de moins en moins incertaine lorsque le temps s'écoule, i.e. on possède de plus en plus d'information. voir [18]

Nous allons illustrer Le mouvement brownien par des graphes suivants :

3.2 Comportement en temps petit

3.2.1 Perturbation déterministe

Une perturbation aléatoire ou un bruit dans un système dynamique est le résultat de l'erreur dans la modélisation du système ou de l'erreur due au capteur. Par exemple Imaginons que nous essayons de modéliser un système dynamique complexe. Mais en raison de sa complexité, nous ne pouvons pas le modéliser exactement. Donc, il y a une erreur dans notre modélisation. Si nous savons ce qui pourrait être l'erreur possible dans notre modélisation, nous appelons cette erreur comme une perturbation aléatoire ou du bruit. Ce type d'erreur est appelé erreur de modélisation voir [25].

Une perturbation aléatoire est parfois ajoutée après que les implications du modèle déterministe ont été déduites même si le modèle est fondamentalement déterministe voir [12]

Soit $X_t = x(t)$ un mouvement différentiable, issu de x , éventuellement aléatoire. Pour toute fonction $f \infty$ -différentiable, a dérivée seconde bornée

$$f(X_h) = f(X) + f_x(X_h)dX_h = f(X) + f'_x(X)x'(h) + 0(h)$$

Perturbation aléatoire soit $X_t = x + W_t$ un mouvement brownien issu de x ,

$$E[f(x_h)] = f(x) + \frac{1}{2}f''(x)h + 0(h)$$

On peut étendre le raisonnement à n'importe quelle date t

$$E[f(X_{t+h})] = E[f(X_t)] + \frac{1}{2}E[f_{xx}(X_t)]t + 0(h)$$

3.2.2 Calcul d'espérances via les EDP

Théorème 3.1. Soit $f(x)$ une fonction bornée, et

$$u(t, x, f) = E[f(x + W_t)] = \int_{\mathbb{R}} g(t, x, y)f(y)dy$$

$\implies u$ est solution de l'EDP de la chaleur

$$u'_t(t, x, f) = \frac{1}{2}u''_{xx}(t, x, f), \quad u(0, x) = f(x)$$

\implies Si f est régulière, on aussi :

$$u'_t(t, x, f) = u_t(t, x, \frac{1}{2}f''_{xx})$$

\implies Sous une forme plus probabiliste

$$E[f(x + W_t)] = f(0, x) + \int_0^t [\frac{1}{2}f''_{xx}(x + W_s)] ds$$

\implies Si $f(t, x)$ est bornée et dérivable en temps, alors

$$u'_t(t, x, f) = \frac{1}{2}u''_{xx}(t, x, f) + u_t(t, x, f_1) = u_t(t, x, \frac{1}{2}f''_{xx} + f_t)$$

3.2.3 Horizon aléatoire

Un temps d'arrêt U est une v.a. telle que $\{U \leq t\}$ ne dépend que du passé avant t , par exemple

$$U = \sum_{i=1}^n 1_{A_i} t_i, \quad A_i \in \sigma(W_s, s \leq t_i)$$

Théorème 3.2. pour tout t.a. borné U

$$E[f(U, x + W_U)] = f(0, x) + E \left[\int_0^U [(f'_t + \frac{1}{2}f''_{xx})(s, x + W_s)] ds \right]$$

Application : La loi du temps de sortie des bandes.

Soit

$y > 0$ et τ_y le premier instant ou $|W_t|$ passe le niveau y .

En appliquant le théorème a $f(t, x) = \cosh(\lambda x)e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t}$ on montre :

$$E \left[e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t} \right] = \frac{1}{\cosh y(\lambda y)}$$

3.2.4 EDP associée à un mouvement brownien avec dérive

Soit le brownien décentré $\{X = x + bt + \sigma W, t \geq 0\}$ de densité.

$$\begin{aligned} g_{b,\sigma^2}(x, t, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp -\frac{(y-x-bt)^2}{2\sigma^2 t} \\ &= g(\sigma^2 t, x, bt, y) = g(\sigma^2 t, x, y - bt) \end{aligned}$$

De générateur $L_{b,\sigma^2} f(t, x) = \frac{1}{2}\sigma^2 f''_{xx}(t, x) + b f'_x(t, x)$

Les fonctions satisfont l'EDP , $u_t(t, x, f) = L_{b,\sigma^2} f(t, x, f)$, $u(0, x, f) = f(x)$

Remarque

- Puisque la solution de l'EDP de la chaleur s'interprète comme $E[f(x + W_t)]$ la trajectoire brownienne joue pour cette EDP le même rôle que les caractéristiques, solutions d'équations différentielles, pour la résolution des EDP du premier ordre. Ce résultat s'étend a des situations très générales.

- Mais l'étape la plus importante sera de passer de ce calcul, vrai en moyenne, a un calcul trajectoire.

Cette étape amorcée par Paul Lévy dans les années 30 a été complétée par K.Ito dans les années 50.

- Plus précisément, Ito interprété la quantité

$$\tau_t(f) = f(t, x + W_t) - f(0, x) - \int_0^t \left[\frac{1}{2} f''_{xx}(s, x + W_s) + f'(s, x + W_s) \right] ds$$

Comme une intégrale stochastique.

3.3 La formule d'Ito pour le mouvement brownien

L'une des premières applications du procédé Wiener a été proposée par Bachelier, qui environ 1900 a écrit un document novateur sur la modélisation de l'actif des prix à la Bourse de Paris. Bien sûr, Bachelier n'aurait pas pu appeler le processus de Wiener, mais il a utilisé ce qui dans la terminologie moderne équivaut à $W(t)$ comme description des fluctuations du marché affectant le prix $X(t)$ de un atout. A savoir, il a supposé que les incréments de prix infinitésimaux $dX(t)$ sont proportionnels aux incréments $dW(t)$ du processus de Wiener

$$dX(t) = \sigma dW(t) \dots \dots \dots (3.1)$$

Où σ est une constante positive. Par conséquent, un actif avec le prix initial $X(0) = x$ ca vaudrait le coup voir [4]

$$X(t) = x + \sigma dW(t) \dots \dots \dots (3.2)$$

3.3.1 La formule d'Ito

Soit $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \otimes \mathbb{R})$ une fonction deux fois dérivable :

$$f(t, x + W_t) = f(0, x) + \int_0^t f_x(s, x + W_s) dW_s + \int_0^t f_t(s, x + W_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(s, x + W_s) ds \dots (3.3)$$

Le terme $\int_0^t f_x(s, x + W_s) dW_s$ s'appelle l'intégrale stochastique de $f_x(s, x + W_s)$ par rapport au mouvement brownien :

- c'est la limite p.s. des sommes de Darboux.

$$S_t^n(f, W) = \sum_{t_i \leq t} f_x(t_i, x + W_{t_i})(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

Le long de la subdivision dyadique d'ordre n.

Preuve = formule de Taylor a l'ordre 2 + variation quadratique

3.3.2 Représentation des v.a comme intégrales stochastiques

Théorème de représentation : Soit f une fonction continue, a croissance linéaire et

$u(t, x, f) = E[f(x + W_t)]$ la fonction de classe $C^{1,2}$ pour $t > 0$

La v.a $f(x + W_T) = u(T, x + W_T, f)$ admet une représentation comme intégrale stochastique

$$f(x + W_T) = E[f(x + W_t)] + \int_0^t u_x(T - s, x + W_s, f) dW$$

Attention Même si la fonction f est dérivable, pour obtenir ce résultat on n'applique pas la formule d'Ito a f mais a $u(T - t, x, f)$

3.3.3 .Mouvement brownien vectoriel

Définition

Un mouvement brownien vectoriel standard est une f.a. à trajectoires continues, a valeurs dans $R^d, \{W_t^1, W_t^2, \dots, W_t^d\}$ telle que :

- $W_0 = 0$

- tout accroissement $W_t - W_s$ ou $(0 \leq s < t)$ suit une loi gaussienne sur R^d , centrée de matrice de covariance $(t - s)Id$, ou Id est la matrice identité.

- Pour tout $0 = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n$, les accroissements $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ avec sont indépendants.

Les coordonnées sont des mouvements browniens indépendants.

Un brownien dans le plan

3.3.4 Equation de la chaleur et formule d'Ito

Equation de la chaleur

$$u_t(t, x, f) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d u_{x_i x_i}(t, x, f) = \frac{1}{2} \Delta_x u(t, x, f)$$

$$u(0, x) = f(x), x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$$

Formule d'Ito : Soit

$\{X_t^x = (x_1 + b_1 t + \sigma_1 W_t^1, \dots, x_d + b_d t + \sigma_d W_t^d); \}$ un brownien vectoriel généralisé et f de classe $C^{1,2}$

$$f(t, X_t^x) = f(0, x) + \sum_{i=1}^d \int_0^t f_{x_i}(s, X_s^x) \sigma_i dW_s^i + \sum_{i=1}^d \int_0^t f_{x_i}(s, X_s^x) b_i ds$$

$$+ \int_0^t f_t(s, X_s^x) ds + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \int_0^t \sigma_i^2 f_{x_i x_i}(s, X_s^x) ds \dots \dots (3.4)$$

Un brownien dans l'espace

3.3.5 Le brownien géométrique

Bachelier modélise la dynamique d'un cours boursier à l'aide d'un mouvement brownien avec drift.

Samuelson (1960) propose de retenir cette modélisation pour les rendements, plutôt que pour les cours eux-mêmes.

Définition du brownien géométrique

Définition

Le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien géométrique s'il satisfait aux quatre conditions suivantes voir [22]

1- $(X_t)_{t \geq 0}$ a les mêmes densités marginales qu'un Brownien géométrique classique

Mouvement : pour tout suit une distribution log-normale :

$$\forall t \geq 0, X_t = \exp(\sigma Z_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t); \text{ ou } Z \rightarrow (0, t)$$

2- X_t est continue.

3- $(e^{-n} X_t)_{t \geq 0}$ est une martingale par rapport à $(F_t)_{t \geq 0}$.

4 - $(X_t)_{t \geq 0}$ n'a pas la même distribution conjointe que le mouvement brownien géométrique classique

Théorème 3.3. *Le Mouvement brownien géométrique $z_0 e^{(\mu t + \sigma W(t))}$ suit la loi log-normale sous les paramètres suivants $(\ln(z_0) + \mu t), \sigma \sqrt{t}$*

La preuve

$$F(x) = p[X \leq x] = p[z_0 e^{(\mu t + \sigma W(t))} \leq x]$$

$$\begin{aligned}
 &= p \left[\mu t + \sigma W(t) \leq \ln\left(\frac{x}{z_0}\right) \right] \\
 &= p \left[W(t) \leq \frac{\ln(x/z_0) - \mu t}{\sigma} \right] \\
 &= p \left[\frac{W(t)}{\sqrt{t}} \leq \frac{\ln(x/z_0) - \mu t}{\sigma \sqrt{t}} \right] \\
 &= \int_{-\infty}^{(\ln(x/z_0) - \mu t) / \sigma \sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-y^2/2)} dy
 \end{aligned}$$

On dérive para port x , on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{t}\sqrt{2\pi}} e^{(-\frac{1}{2} \left[\frac{\ln(x/z_0) - \mu t}{\sigma \sqrt{t}} \right]^2)}$$

Rappelons :

$$\begin{aligned}
 N(d) &= \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-y^2/2)} dy, N(-\infty) = 0, N(+\infty) = 1 \\
 N'(d) &= \frac{\partial N(d)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(d^2)}{2}}
 \end{aligned}$$

Définition (Le rendement) voir [14]

Dans le domaine financier, le rendement d'un titre ou d'un actif est le revenu (dividende, intérêt) de cet actif.

Le rendement d'une obligation (taux de rendement actuariel) varie au fil du temps en fonction du cours de cette obligation.

Le rendement d'une action (en anglais : « dividend yield ») est le rapport du dernier dividende versé au cours de l'action (cours moyen d'une période ou cours de fin de période).

Se distinguant ainsi de la rentabilité financière, un rendement se calcule par rapport à un cours, et non pas par rapport à une valeur comptable (les capitaux propres d'une entreprise).

Les rendements des actions cotées sur les Bourses occidentales ont été en 2008 de l'ordre de 3 à 4 %, avec des variations par secteurs d'activité des sociétés cotées (immobilier : 4 %; télécom : 6 %; automobile : 3,5 %; biotechnologies : 0,5 %, etc.).

Le rendement d'une action dépend de la rentabilité financière de l'entreprise et du taux de distribution (en anglais : « pay-out ratio ») de ses résultats (Taux de distribution = Dividende / Bénéfice net).

Si la rentabilité financière d'une entreprise et le taux de distribution de ses résultats restent stables, le dividende connaît une croissance constante, dont on peut calculer le taux : Taux de croissance du dividende = Rentabilité financière x (1 - Taux de distribution).

Rendement=la différence des logarithmes des cours.

Un brownien géométrique est un processus (S_t) tel que :

$$-S_0 = x;$$

Les rendements $Log(S_t) - Log(S_s)$ suivent une loi gaussienne de moyenne $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t - s)$ et de variance $\sigma^2(t - s)$.

- Pour tout $0 < t_1 < t_2 \dots < t_n$, les accroissements relatifs $\left\{ \frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}}; 0 \leq i \leq n-1 \right\}$ Sont indépendants.

Théorème 3.4. *La moyenne du Mouvement brownien géométrique donne comme suivant :*

$$E [z_0 e^{(\mu t + \sigma W(t))}] = z_0 e^{(\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2})}$$

Preuve

$$\begin{aligned} E [z_0 e^{(\mu t + \sigma W(t))}] &= z_0 e^{(\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2})} \\ E [X(t)] &= E [z_0 e^{(\mu t + \sigma W(t))}] \\ &= z_0 e^{\mu t} E [e^{\sigma W(t)}] \\ &= z_0 e^{\mu t} E [e^{\sigma W(t)\mu}] |_{\mu=1} \\ &= z_0 e^{\mu t} e^{\frac{\sigma^2 t \mu^2}{2}} |_{\mu=1} \\ &= z_0 e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}} \end{aligned}$$

Rappelons :

La fonction génératrice de moments est :

$$Z \rightarrow N(\alpha, b^2) \implies E(e^{sZ}) = e^{\alpha s + \frac{1}{2} b^2 s^2}$$

Lorsque σW distribuent comme la manière suivante : $\sigma \sqrt{t} Z$

Théorème 3.5. *L'écart type du Mouvement brownien géométrique donne comme suivant :*

$$V [z_0 e^{(\mu t + \sigma W(t))}] = z_0^2 e^{(2\mu t + \sigma^2 t)} (e^{\sigma^2 t} - 1)$$

Preuve

$$\begin{aligned} V [z_0 e^{(\mu t + \sigma W(t))}] &= z_0^2 e^{(2\mu t + \sigma^2 t)} (e^{\sigma^2 t} - 1) \\ V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ E [X(t)^2] &= E [z_0^2 e^{(\mu t + \sigma W(t))^2}] \\ &= z_0^2 E [e^{2\mu t + 2\sigma W(t)}] \\ &= z_0^2 e^{2\mu t} E [e^{2\sigma W(t)}] \\ &= z_0^2 e^{2\mu t} E [e^{2\sigma W(t)\mu}] |_{\mu=1} \\ &= z_0^2 e^{2\mu t + 2\sigma^2 t} \end{aligned}$$

$$V [z_0 e^{(\mu t + \sigma W(t))}] = z_0^2 e^{2\mu t + 2\sigma^2 t} - z_0^2 e^{2\mu t + \sigma^2 t} = z_0^2 e^{(2\mu t + \sigma^2 t)} (e^{\sigma^2 t} - 1)$$

Propriétés dubrownien géométrique

Soit S un mouvement brownien géométrique de valeur initiale x .

1. Le cours S_i de condition initiale $S_0 = x$ suit une loi log-normale dont les deux premiers moments et la densité valent

$$\begin{aligned} E [S_i] &= x e^{\mu t} \quad , \quad E [S_t^2] = x^2 e^{(2\mu + \sigma^2)t} \\ l(t, x, y) &= \frac{1}{\sigma y \sqrt{2\pi t}} \exp -\frac{1}{2\sigma^2 t} [\text{Log}(y/x) + (\mu - \sigma^2)t]^2 \end{aligned}$$

2. Pour toute fonction f continue et bornée sur \mathbb{R}^+ , $v(t, x, f) = E[f(S_t^x)]$ est solution de l'EDP,

$$\begin{cases} v_t(t, x, f) = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t, x, f) + \mu x v_x(t, x, f) = Lv(t, x, f) \\ u(0, x, f) = f(x) \end{cases}$$

3. De même, pour toute fonction f régulière,

$$v(t, x, f) = E[f(S_t^x)] = f(0, x) + \int_0^t E\left[\frac{1}{2}\sigma^2 S_\mu^2 f_{xx}(\mu, S_\mu) + \mu S_\mu f_x(\mu, S_\mu) + f_t(\mu, S_\mu)\right] d\mu$$

4. La formule d'Ito

$$f(t, S_t^x) = f(0, x) + \int_0^t f_t(\mu, S_\mu) dS_\mu + \int_0^t \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S_\mu^2 f_{xx}(\mu, S_\mu) + \mu S_\mu f_x(\mu, S_\mu) + f_t(\mu, S_\mu)\right) d\mu$$

Chapitre 4

Application

4.1 Littérature financière

4.1.1 Produits dérivés

Un produit dérivé ou contrat dérivé ou encore derivative Product est un instrument financier :

- Dont la valeur fluctue en fonction de l'évolution du taux ou du prix d'un produit appelé sous-jacent ;
- Qui ne requiert aucun placement net initial ou peu significatif ;
- Dont le règlement s'effectue à une date future.

Il s'agit d'un contrat entre deux parties, un acheteur et un vendeur, qui fixe des flux financiers futurs fondés sur ceux d'un actif sous-jacent, réel ou théorique, généralement financier.

A l'origine, les produits dérivés ont été créés pour permettre aux entreprises de se couvrir contre différents types de risques financiers.

Les transactions sur les produits dérivés sont en forte croissance depuis le début des années 1980 et représentent désormais l'essentiel de l'activité des marchés financiers voir [3].

4.1.2 Options, couverture et problème de pricing

Les Options

voir [11]

Une option est le droit (mais pas l'obligation) d'acheter (option d'achat ou call) ou de vendre (Option de vendre ou put) des actifs –risqués– à un prix convenu (prix d'exercice ou

Strike) et Durant une période spécifiée (période d'exercice) ou jusqu'à une date convenue (date d'exercice).

L'actif sous-jacent est lié à un stock, un paquet d'actions d'une compagnie, un indice (Dow Jones, etc), une monnaie, des matières premières, etc.

Une option est un contrat entre deux partis sur le négoce de l'actif à un temps futur

Définition (Call Européen)

Une option d'achat européenne, call, donne le droit à son détenteur d'acheter une certaine quantité d'actif sous-jacent (de valeur S_t à l'instant t) à une

Certaine date future, appelée maturité, noté T , et à un prix fixé dans le contrat, noté K , appelé Strike. L'acheteur ayant donc le droit et non le devoir d'exercer l'option à la maturité, il va exercer son option si $S_T > K$ sinon il ne fait rien. La valeur réelle donc échangée à la maturité, appelée le "pay-off" de l'option, est donc $(S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0)$.

Définition (Put Européen) : Une option de vente européenne, put, donne le droit à son

Détenteur de vendre une certaine quantité d'actif sous-jacent à une date future et à un prix fixé dans le contrat. Avec les mêmes notations que pour le call, on obtient que le pay-off du put est $(K - S_T)^+ = \max(K - S_T, 0)$. voir [21]

Couverture

Le problème de couverture d'une option consiste à trouver une stratégie financière basée sur les actifs du marché dont la valeur à chaque date t est égale au pay-off de l'option.

4.1.3 Problème de pricing

Pour des options call et put un problème majeur apparaît. Par exemple dans le cas d'un call l'acheteur est toujours protégé car il choisit l'exercice de l'option donc il ne craint rien.

En revanche pour le vendeur le risque est maximal car sa perte est possiblement infinie. Il est donc naturel qu'en mathématiques financières le problème de pricing d'une option, c'est-à-dire de détermination de la valeur de l'option à toute date, soit très important, ainsi que le problème de couverture de l'option voir [21].

La fonction pay-off

Pour un call européen, si à la date T on a $S < K$ le détenteur de l'option ne l'exerce pas (sinon il perd de l'argent), d'où $V = 0$ si $S_T < K$. Si $S_T > K$ alors le gain (hors prime payée pour acquérir l'option) est $S_T - K$. Donc pour un call.

$$V(S_T, T) = \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+.$$

Pour un put européen, l'exercice n'a lieu que si $S_T < K$, la fonction pay-off sera

$$V(S_T, T) = (K - S_T)^+$$

Dans les figures 1 et 2 nous n'avons pas tenu compte du profit. En effet le détenteur a acheté

L'option, (premium) et éventuellement les coûts de transaction. Comme ces sommes sont payées à t_0 , l'actualisation donne un coefficient multiplicateur de profits ne correspond pas aux figures 1 ou 2 et induit $\exp(r(T - t_0))$, où r est le taux moyen. Ainsi le diagramme donne un profit négatif pour certaines valeurs de S , voir par exemple la figure 3.

Pour un call américain on a la même formule (mais pour tout $t \leq T$),

$$V(S, t) = (S_t - K)^+$$

Pour un put américain :

$$V(S, t) = (K - S_t)^+$$

4.2 Résolution analytique de l'équation de Black – Scholes

Cette section est une application en finance des résultats établis dans la section précédente, en considérant notamment le cas de l'équation de Black – Scholes ; équation nommée ainsi en l'honneur au mathématicien américain Fischer Black (1938 – 1995) et à l'économiste américain Myron S. Scholes, récipiendaire, avec Robert C. Merton, du Prix Nobel d'économie en 1997. Il ne faut pas confondre modèle de Black – Scholes et équation de Black – Scholes. Cette dernière formalise une approche de l'interaction entre le prix implicite de l'option et les variations de prix de l'actif sous-jacent voir [16].

4.2.1 La formule d'évaluation

En dérivant de notre formule de la valeur d'une option en termes de prix de l'action, nous supposons « condition idéale » sur le marché pour l'action et pour l'option voir [9].

Fischer Black et Myron Scholes ont proposé en 1973 ce « désormais célèbre modèle ». Comme c'est un modèle ils sont partis des hypothèses :

- le prix du sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique ;
- la volatilité est connue à l'avance et est constante ;
- il est possible d'acheter et de vendre le sous-jacent à tout moment et sans frais ;
- les ventes à découvert sont autorisées (on emprunte pour acheter une certaine quantité de sous-jacent pour la vendre) ;

- il n'y a pas de dividende ;
- le taux d'intérêt est connu à l'avance et est constant ;
- l'exercice de l'option ne peut se faire qu'à la date d'échéance et pas avant (option européenne).

4.2.2 Notations

On note V la valeur d'une option (on se limitera aux options européennes dans ce cours). On pourra faire la distinction entre un "call" C et un "put" P si besoin. Ce sont des fonctions du temps t , et de la valeur actuelle de l'action sous-jacente S . On note donc $V = V(S, t)$, On notera également voir [2] :

- σ la volatilité du prix de l'action ;
- E le prix d'exercice fixé par l'option ;
- T le temps qui reste à l'option avant son échéance ;
- r le taux d'intérêt.

5- 3 - Equation de Black-Scholes :

C'est une équation aux dérivées partielles qui permet de calculer la valeur d'une option européenne en fonction du temps et de la valeur de l'action sous-jacente.

4.2.3 Cas d'une option Call européenne

Pour une option Call européenne, notons sa valeur $C(S, t)$, ce qui correspond au u précédemment, où S représente le prix du sous-jacent, et $t \in [0, T]$, T étant la maturité.

On a l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t}(S, t) + rS \frac{\partial C}{\partial S}(S, t) + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S, t) - rC(S, t) = 0, \forall t \in [0, T], S \in \mathbb{R}_+ \\ C(S, t) = (S - E)^+ = \max(S - E, 0), \forall S \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \dots(4.1)$$

Pour résoudre cette équation, nous allons procéder à divers changements de variable pour nous ramener à une équation de la chaleur du type :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \dots\dots\dots(4.2)$$

Pour pouvoir se ramener à ce type d'équation, commençons tout d'abord par supprimer les coefficients S et S^2 de l'équation de Black-Scholes. Pour ce faire, on pose :

$$S = Ee^x, \quad t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}, \quad C(S, t) = Ev(x, \tau)$$

Un changement de temps de ce type paraît naturel pour se ramener à une condition en $t = 0$ et Non plus en $t = T$.

On a donc :

$$v(x, \tau) = \frac{1}{E}C(Ee^x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2}) = \frac{1}{E}C(S, t).....(4.3)$$

On dérive (3) par rapport à x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{E} \frac{\partial C}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x} + \underbrace{\frac{1}{E} \frac{\partial C}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x}}_{=0} \\ &= \frac{S}{E} \frac{\partial C}{\partial S} \end{aligned}$$

On dérive une nouvelle fois par rapport à x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{E} S \frac{\partial C}{\partial S} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{1}{E} S \frac{\partial C}{\partial S} \right) \frac{\partial S}{\partial x} \\ &= \frac{1}{E} \left(\frac{\partial C}{\partial S} + S \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) S \\ &= \frac{S}{E} \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{S^2}{E} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \end{aligned}$$

Dérivons maintenant (3) par rapport à τ :

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{E} \frac{\partial C}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{E} \frac{\partial C}{\partial t} \frac{-1}{\frac{1}{2}\sigma^2}$$

Pour plus de clarté on introduit les valeurs suivantes :

$$C_t = -\frac{E}{2}\sigma^2 v_\tau.....(4.4)$$

$$SC_S = E v_x.....(4.5)$$

$$S^2 C_{SS} = E v_{xx} - SC_S = E v_{xx} - E v_x.....(4.6)$$

Rappelons l'équation de Black-Scholes :

$$C_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS} + rSC_S - rC = 0.....(4.7)$$

On injecte alors (4), (5) et (6) dans (7), ce qui nous donne :

$$-\frac{E}{2}\sigma^2 v_\tau + \frac{E}{2}\sigma^2 (v_{xx} - v_x) + rE v_x - rE v = 0$$

Soit, en divisant par $(E/2)\sigma^2$

$$v_\tau + v_{xx} - v_x + k v_x - k v = 0 \quad k = \frac{2r}{\sigma^2}$$

Ou encore avec les notations du départ :

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k - 1) \frac{\partial v}{\partial x} - k v \quad \text{avec } k = \frac{2r}{\sigma^2}.....(4.8)$$

On a alors comme condition initiale (en $\tau = 0$ puisque la condition est en $t = T$) :

$$v(x, 0) = \frac{1}{E}C(Ee^x, T) = \frac{1}{E} \max(Ee^x - E, 0) = \max(e^x - 1, 0).$$

Pour arriver à une équation comme celle de l'équation de la chaleur, on procède alors à un second changement de variables. On pose :

$$v(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau)$$

On réinjecte alors cela dans l'équation (8) :

$$e^{\alpha x + \beta \tau} (\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau}) = e^{\alpha x + \beta \tau} (\alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k - 1)(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x}) - k u).$$

Soit encore :

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k - 1)(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x}) - k u$$

En regroupant les termes de mêmes dérivées :

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2}(k-1) \\ \beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2 = 0 \end{cases} \iff$$

On a donc :

$$v = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} u(x, \tau)$$

Et u vérifie alors

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall \tau > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x} \max(e^x - 1, 0) = \max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0) \end{cases}$$

$u_0(x)$ vérifie bien. La solution est donc :

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds \dots \dots \dots (4.9)$$

4.2.4 Evaluation du prix de l'option

voir [21]

Dans cette section, nous allons nous atteler à l'évaluation de l'intégrale dans l'équation (9). On commence par poser :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{s-x}{\sqrt{2\tau}} \\ u(x, \tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x'\sqrt{2\tau} + x) e^{-\frac{x'^2}{2}} dx' \\ &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+x'\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{x'^2}{2}} dx'}_{I_1} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+x'\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{x'^2}{2}} dx'}_{I_2} \end{aligned}$$

Calcul de I_1 On va ici essayer de se ramener à la loi de répartition normale centrée réduite :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x}}{\sqrt{2\tau}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}(x' - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau})^2} dx' \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\tau}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho \end{aligned}$$

avec $\rho = x' - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$

on note alors $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$ qui est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite .

On pose également $d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$.

On obtient alors :

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} (1 - N(-d_1))$$

Or , $\forall d \in \mathbb{R}$, on a $N(d) + N(-d) = 1$. Donc finalement :

$$\begin{cases} I_1 = e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1) \\ d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau} \end{cases}$$

Calcul de I_2 Par un calcul similaire on obtient :

$$\begin{cases} I_1 = e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2) \\ d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau} \end{cases}$$

Maintenant que l'on a l'expression de u remontons à l'expression de C , valeur du Call.

Tout d'abord, on a :

$$v(x, t) = e^{\alpha x + \beta \tau} \text{ et } C(S, t) = Ev(x, \tau)$$

On rappelle également que :

$$x = \ln \frac{S}{E}, \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \text{ et } k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} . \text{ D'ou :}$$

$$\begin{aligned} C(S, t) &= Ee^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \times \\ &\quad (e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2)) \\ &= Ee^{-\frac{1}{2}(k-1)\ln \frac{S}{E} - \frac{1}{4}(k+1)^2\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} \times \\ &\quad (e^{\frac{1}{2}(k+1)\ln \frac{S}{E} + \frac{1}{4}(k+1)^2\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)\ln \frac{S}{E} + \frac{1}{4}(k-1)^2\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} N(d_2)) \end{aligned}$$

Ce qui se simplifie en :

$$\begin{cases} C(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) \\ d_1 = \frac{\ln \frac{S}{E} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \\ d_2 = \frac{\ln \frac{S}{E} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \end{cases} \dots\dots\dots(4.10)$$

4.2.5 Cas d'une option Put européenne

On pourrait procéder de même pour une option Put européenne, mais on va utiliser la remarque faite dans la première partie : la parité Put-Call. On note P le prix du Put européen.

On avait montré qu'entre un Put et un Call européen, de même maturité et de même Strike E , Existe une relation entre leur prix :

$$C(S, t) - P(S, t) = S - Ee^{-r(T-t)}$$

Donc

$$P(S, t) = S(N(d_1) - 1) - Ee^{-r(T-t)}(1 - N(d_2))$$

On peut simplifier cette équation en utilisant le fait que $N(d) + N(-d) = 1$. On obtient alors :

$$\begin{cases} P(S, t) = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) \\ d_1 = \frac{\ln \frac{S}{E} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \\ d_2 = \frac{\ln \frac{S}{E} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \end{cases} \dots\dots\dots(4.11)$$

Conclusion.

Dans le monde d'aujourd'hui, la finance joue un rôle des plus importants et est parfois à l'origine de crises mondiales. Il apparaît alors important que la finance soit basée sur des modèles Mathématiques solides permettant d'évaluer les risques et les prix. De cette nécessité, le modèle et la formule de Black-Scholes s'est imposée comme référence depuis 1973, dans le calcul d'option. Malgré ses défauts, ce modèle connaît ce succès car il possède de nombreux avantages : sa simplicité d'application et de formule, son importante utilisation par les opérateurs du marché mais aussi et surtout parce qu'il permet de calculer un paramètre important en finance : la volatilité. La volatilité mesure la variation moyenne dans le temps d'un actif financier et donne donc une information cruciale sur le risque

Bibliographie

- [1] D. Auroux, méthodes numériques pour le pricing d'options , polytechnique Sophia2010.
- [2] T. Audibert, Equation de la chaleur, approches élémentaires , 21 décembre 2013.
- [3] O. Berruyer, crise Boursière, www.les-crises.fr .
- [4] A. boukabou , thèse et application de transformée de Laplace , opu, alger, 2013.
- [5] Z. Brzeiniak , T. Zastawniak , Basic Stochastic Processes , Springer , London ,1999.
- [6] A.Chekroun ,Fonction de Lyapunov et stabilité globale pour un modèle de Kermack-McKendrick avec l'âge d'infection , MEMOIRE de Master mathématique Option : Systèmes dynamiques et applications a la dynamiques de populations , UNIVERSITE ABOUBEKR BELKAID TLEMCEN , 2011 à 2012.
- [7] M. P. Coleman, An Introduction to Partial Differential Equations with MATLAB , Second Edition, CRC Press , usa,2013.
- [8] P. Dawkins, Differential equations, 2007 , <http://tutorial.math.lamar.edu/terms.aspx>.
- [9] B. Fischer et M. SCHOLES, 1973, " The pricing of options and corporate liabilities".
- [10] M.Finan , Laplace Transforms : Theory, Problems, and Solutions , Arkansas Tech University.
- [11] O. Guibé, Méthodes numériques pour la finance, 2010.
- [12] M. Hardy, A. Bryman ,Handbook of Data Analysis , paperback edition , London à 2009.
- [13] S. Kothari,Classification Of Partial Differential Equations And Their Solution Characteristics. Indo-German Winter Academy 2009, IIT Roorkee, India, December 13-19, 2009.
- [14] Livre blanc gratuit, <https://www.mataf.net/fr/bourse/edu/finance-dentreprise/rendement>.

-
- [15] G. Lawler, Random Walk and the Heat Equation, Department of Mathematics, University of Chicago, Chicago, IL 60637.
- [16] B. Mabele et autres, (2013) ." Equation de la Chaleur ", Laboratoire d'Analyse et de Recherche en Economie Quantitative, 8(12) :012.
- [17] B. Osgood, The Fourier Transform and its Applications , Electrical Engineering Department, Stanford University.
- [18] P. Ham, Optimisation et controle stochastique appliques a la finance, Springer, New York.
- [19] A. Takaci , Mathematical and simulation models of traffic flow, PAMM Proc. Appl. Math. Mech. 5, 633-634 (2005) / DOI 10.1002/pamm.200510293.
- [20] P. Stavroulakis, A. Tersian , Partial Differential Equations, World Scientific , use, 2004.
- [21] F. Salvarani, Modelé de Black-Scholes, Ecole Normale Supérieure de Cachan, juin 2011.
- [22] X. Xingjian, Fake Geometric Brownian Motion And Its Option Pricing , University of Oxford, 2011.
- [23] D. V. Widder, Academic Press, New York, 1975.
- [24] <http://www.thefouriertransform.com/pairs/gaussian.php>. - SIGNALS AND SYSTEMS , <http://robotics.itee.uq.edu.au/elec3004/2013/lectures/Convolution>
- [25] <https://math.stackexchange.com/questions/1212429/what-exactly-is-a-random-disturbance-in-control-theory>.

Résumé.

Cette mémoire s'inscrit dans le domaine des équations aux dérivées partielles. Dans la première partie de la mémoire, on s'intéresse aux les notions de l'équation de la chaleur (généralisation et classification des équations aux dérivées partielles linéaires, étude analytique de l'équation de la chaleur, Le mouvement brownien et l'équation de la chaleur. Dans la deuxième partie de la mémoire, on s'intéresse des applications de l'équation de la chaleur en marché financier (Modéle Black Scholes).

Mots clés :

Dérivés partiels, l'équation de la chaleur séries de Fourier, équation de Black-Scholes, Évaluation d'option (call- put).

Abstract.

This memory belongs to the field of partial differential equations. In the first part of the thesis, we are interested in the notions of the equation of heat (generalization and classification of linear partial differential equations, analytical study of the equation of heat, Brownian motion and the equation heat. In the second part of the thesis, we are interested in applications of the heat equation in the financial market (Black Scholes model).

Key words :

Partial derivatives, Fourier series, the heat equation, Black-Scholes equation, pricing options (call- put).