الجمهورية الجزائرية الشعبية الديموقراطية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي الأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كـلـيـــــةالـعـلــــــوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de MASTER

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Analyse Mathématique

Par:
Benhorma Amel

THEME

Quelques propriétés des groupes topologiques

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Mr.Belacel Amar	*M.C.A*	*Président*
Mr. Yagoub Ameur	*M.C.B*	*Examinateur*
Mr. Belabbaci Youcef	*M.C.A*	*Encadreur*

Année Universitaire 2020/2019

Remerciements

Au nom de dieu le Clément, le Misércordieux.Et que la priére et le paix soient sur notre prophète Mohamed.

En tout premier lieu je remercie le Dieu le Tout-Puissant de m'avoir donné la santé et la patience de terminer ce mémoire.

J'adresse un trés grand remerciement à mon encadreur Monsieur **Dr.Belabbaci Youcef** pour ses orientations et ses précieux conseils et pour sa patience durant notre préparation de ce mémoire.

Je souhaite remercier Monsieur le chef de departement **Dr.Rahmoune Abdelaziz** pour son soutien moral et ses encouragements.

J'adresse aussi mes vifs remerciements aux membres du jury le Monsieur **Dr.Yagoub Ameur**, et **Dr.Belacel Amar** pour avoir bien voulu évaluer et juger ce modeste travail.

Un trés grand merci à tous mes professeurs d'université et mes enseignants durant les trois cycles, et mes remerciements vont aussi à tous les personnes qui m'ont aidé et soutenue de prés ou de loin.

Dédicaces

Je dédie ce travail à ma famille, elle qui m'a doté d'une éducation digne, son amour a fait de moi ce qui je suis aujourd'hui .

Particuliérement, à mon père, ce don de dieu, à qui je doit tout : ma vie, ma réussite, mon bonheur.

A la femme qui a souffert sans me laisser souffrir, qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse : mon adorable mère.

A mes chères soeurs et mes chers frères et mon fiancé qui n'ont pas cessée de me conseiller, encourager et soutenir.Que Dieu les protège .

A mon grand-père et ma grand-mère , tout ma famille et mes amis. Que dieu leur donne une longue et joyeuse vie.

A l'esprit de mon grand-père et ma grand-mère de ma mère.La miséricorde de Dieu soit sur eux.

Merci pour leurs amours et leurs encouragements.

ملخص

عملنا هذا يتمحور حول دراسة الزمر الطوبولوجية وبعض خصائصها، ويركز أيضا على تمثيل الزمرة والزمرة الطبولوجية.

الكلمات الدلالية

الزمرة الطبولوجية. الزمرة التكافئية للزمرة الطبولوجية. تمثيل الزمرة. توطئة شور. التمثيل المنتظم. تمثيل الزمر الطبولوجية التبادلية البسيطة . تمثيل الزمرة الطبولوجية.

Résumé :

Notre travail porte sur l'étude des groupes topologiques et de certaines de ses caractéristiques, et porte aussi sur la représentation d'un groupe et d'un groupe topologique.

Mots clés : Groupe toplogique. Groupe quotient d'un groupe topologique. Représentation d'un groupe .Lemme de Schur. Représentation régulière. Représentation des groupes topologiques commutatives simples. Représentation d'un group topologique.

Abstract :

Our work focuses on the study of topological groups and their characterstics, and also relates to the representation group and topological group.

Key-words : Topological group. Quotient group of topological group. Representation of group. Schur's lemma. regular representation. Representation of the simplest commutative topological groups.Represntation of topological group.

Table des matières

Introduction

L'algebre et la topologie les deux domaines fondamentaux de la mathématique jouent des rôles complpémentaire, la combinaison de ces deux permet d'avoir des résultats intéressants, donc l'objectif de ce mémoire est d'étudier la théorie des groupes topologiques qui englobe tout ce qui algebre et topologie, elle permet de donner des propriétés topologiques sur les groupes intéressants (tore, groupe de rotations,...)comme des quotients d'espace topologique par un groupe topologique.

Ce mémoire est constitué de trois chapitres, nous rappelons en premier chapitre les notions préliminaires de groupe,sous-groupe,et les opérations sur les groupes, on a également parlé du concept de groupe distingué puis le groupe quotient.Avec des exemples pour chaque concept.

Dans le deuxiéme chapitre on rappelle tout d'abord les espaces topologiques, puis on introduit les groupes topologiques par présenter les notions algébriques précédentes (sous-groupes, groupe quotient,morphismes,$\cdots$) en topologie.Par ailleurs on illustre par des exemples.

Enfin le troisiéme chapitre porte sur la notion de la représentation de groupe puis on étudie des cas particuliers ,et on donne quelques propriétés de cette représentation pour passer à la représentation des groupes topologiques, qui joue un rôle trés important en mathématique.

Chapitre 1

Rappels

Dans ce chapitre on rappelle la notion du groupe, puis celle de sous-groupe, on va étudier ensuite les applications entre deux groupes : homomorphisme, isomorphisme et le produit. Et à la fin de ce chapitre on va présenter les sous-groupes distingués, puis passer aux groupes quotients.

1.1 Groupes

Définition 1.1. *(Groupe) L'ensemble G muni d'une opération $*$ (loi de composition) s'appelle groupe s'il satisfait les quatre propriétés suivantes :*

1. *Pour tout $g_1, g_2 \in G, g_1 * g_2 \in G$ ($*$ est une loi de composition interne).*
2. *Pour tout $g_1, g_2, g_3 \in G, (g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$ (la loi est associative).*
3. *G possède un élément neutre e : $\forall g \in G, g * e = e * g = g$.*
4. *Pour tout $g \in G$, il existe un élément inverse $g^{-1} \in G$ tel que : $g*g^{-1} = g^{-1}*g = e$.*

Définition 1.2. ***(Groupe commutatif)*** *On dit que G est un groupe commutatif (abélien) si la loi de composition est commutative c'est-à-dire :*

$$\forall g_1, g_2 \in G, g_1 * g_2 = g_2 * g_1.$$

Remarque 1.1. *1- S'il existe l'élément neutre e, il est unique.*

En effet, si e' vérifie aussi la propriété 3 du définition 1.1 , alors $e' * e = e * e' = e'$

(car e est l'élément neutre) et $e * e^{'} = e^{'} * e = e$ (car $e^{'}$ aussi). Donc $e = e^{'}$. Remarquez aussi que l'inverse de l'élément neutre est lui-même.

2- *Un élément $g \in G$ ne possède qu'un seul inverse.*
En effet, si $g^{'}$ et $g^{''}$ vérifient tous les deux la propriété 4 alors on a $g * g^{'} = e$ et $g * g^{''}$ donc $g^{'} * (g * g^{''}) = e$. Par l'associativité et la propriété de l'élément neutre alors $(g^{'} * g) * g^{''} = g^{'}$. Mais $g^{'} * g = e$ donc $e * g^{''} = g^{'}$ et ainsi $g^{''} = g^{'}$.

Définition 1.3. *(groupe fini) Un groupe est dite finie si le nombre de ses éléments est fini,dans le cas contraire il est infinie.*

Définition 1.4. *(L'ordre du groupe) Le nombre d'éléments du groupe finie G est appelé son ordre et noté $\mid G \mid$.*

Définition 1.5. *(Le centre du groupe) Soit $(G, \times)$ un groupe, l'ensemble de tous les éléments de G qui commutent avec chaque élément de G est appelé le centre du groupe G, et noté $Z(G)$.Ainsi un élément g_0 de G appartient à $Z(G)$ si et seulement si :*

$$g \times g_0 = g_0 \times g, \forall g \in G.$$

Exemple 1.1.

1. $(\mathbb{R}^*, \times)$ *est un groupe commutatif.*
2. $(\mathbb{Z}, +)$ *est un groupe commutatif.*
3. $(\mathbb{Q}^*, \times), (\mathbb{C}^*, \times), (\mathbb{Q}, +)$ *et* $(\mathbb{C}, +)$ *sont des groupes commutatifs.*
4. *Soit X un espace vectoriel, G_X l'ensemble de tous les opérateurs bijectifs linéaires. On définit la multiplication dans G_X comme une multiplication des opérateurs. Alors G_X est un groupe. En effet,*
   1- *L'élément identité ici est l'opérateur d'identité 1 (c'est un opérateur tel que $1x = x$ pour tout $x \in X$).*
   2- *L'élément inverse de l'opérateur A est l'opérateur inverse A^{-1}.*

* *Si X est de dimension fini n, pour une base fixé en X les opérateurs $A \in G_X$ sont décrites par un non singulière (c'est-à-dire de déterminant non nul) matrices carrées d'ordre n.*

5. *L'ensemble $GL(n, \mathbb{R})$ de tous les matrices carrées d'ordre n inversible à coefficients réels muni de la loi $\times$, est un groupe.On l'appelle le groupe linéaire complet d'ordre n sur $\mathbb{R}$.*
6. *Le sous-ensemble $SL(n, \mathbb{R})$ des matrices de déterminant 1 de l'ensemble $GL(n, \mathbb{R})$:*

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) \mid detM = 1\}.$$

   est un groupe . On l'appelle le groupe linéaire spécial d'ordre n sur $\mathbb{R}$

7. ***Groupe de permutation** : Soit E un ensemble non vide quelconque. On note par $\zeta(E)$ l'ensemble des permutations sur E(ensemble des bijections de E dans E). Alors la composition $\circ$ constitue une loi de composition interne sur $\zeta(E)$, et $(\zeta, \circ)$ est un groupe, appelé groupe des permutations de E.*

1.1.1 Produit de groupes

Un produit de deux groupes désigne généralement à un produit direct de deux groupes.

Définition 1.6. ***(Produit direct de deux groupes)*** *Soit le groupe $(G, *)$ et le groupe $(G', \triangle)$. Le produit direct de deux groupes arbitraires G et G' est l'ensemble $G \times G'$ de tous les couples (g, g') où $g \in G$ et $g' \in G'$ muni de l'opération binaire :*

$$(g_1, g_1') \times (g_2, g_2') = (g_1 * g_2, g_1' \triangle g_2').$$

Exemple 1.2.

1) *Soit $\mathbb{R}$ le groupe des nombres réels sous addition, le produit direct $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est le groupe de tous les vecteurs à deux composantes (g_1, g_2) sous l'opération d'ajout de vecteur :*

$$(g_1, g_1') + (g_2, g_2') = (g_1 + g_2, g_1' + g_2').$$

2) Soit $\mathbb{R}^+$ le groupe des nombres réels positifs sous la multiplication, le produit direct $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ est le groupe de tous les vecteurs sous l'opération de multiplication par composante :

$$(g_1, g_1') \times (g_2, g_2') = (g_1 \times g_2, g_1' \times g_2').$$

Lemme 1.1. *Le produit direct $G_1 \times G_2$ de deux groupes est abélien si et seulement si, les groupes G_1 et G_2 sont abéliens.*

Démonstration. 1. Supposons que $G_1 \times G_2$ est abélien. Soit $g_1, g_1' \in G_1$, et e_2 l'élément neutre de G_2. Alors

$$(g_1 g_1', e_2) = (g_1, e_2)(g_1', e_2) = (g_1', e_2)(g_1, e_2) = (g_1' g_1, e_2).$$

donc $g_1 g_1' = g_1' g_1$, alors G_1 est abélien.

Et soit $g_2, g_2' \in G_2$, et e_1 l'élément neutre de G_1.Alors

$$(e_1, g_2 g_2') = (e_1, g_2)(e_1, g_2') = (e_1, g_2')(e_1, g_2) = (e_1, g_2' g_2);$$

donc $g_2 g_2' = g_2' g_2$, alors G_2 est abélien.

2. Supposons maintenant que G_1 et G_2 sont abéliens, soit $(g_1, g_1'), (g_2, g_2') \in G_1 \times G_2$. Alors

$$(g_1, g_1')(g_2, g_2') = (g_1 g_2, g_1' g_2') = (g_2 g_1, g_2' g_1') = (g_2, g_2')(g_1, g_1');$$

alors $G_1 \times G_2$ est abélien.

□

1.1.2 Sous-groupes d'un groupe

Définition 1.7. ***(Sous-groupe)*** *Soit $(G, \times)$ un groupe. On dit qu'une partie H de G est un sous-groupe de G si H est non vide et si les relations :*

$$h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 h_2^{-1} \in H.$$

Proposition 1.1. ***(Définition équivalente)*** *Soit $(G, \times)$ un groupe,H une partie de G, alors H est un sous-groupe de G si et seulement si :*

a) *Soit* e_G *l'élément neutre de G, donc* $e_G \in H$.

b) *Pour tout* $h_1, h_2 \in H$, $h_1 \times h_2 \in H$.

c) *Pour tout* $h_1 \in H, h_1^{-1} \in H$.

Démonstration. Supposons que H est un sous-groupe de G, alors

a) H est non vide donc il existe un élément $h_1 \in H$ et $h_2 \in H$ alors $h_1 \times h_1^{-1} \in H$ et puisque $h_1 \times h_1^{-1} = e_G$ donc $e_G \in H$.

b) Soient $h_1 \in H$ et $h_2^{-1} \in H$ alors $h_1 \times (h_2^{-1})^{-1} \in H$ impliquent que $h_1 \times h_2 \in H$.

c) Soit $h \in H$, et d'après a)$e_G \in H$, alors $e_G \times h^{-1} \in H$, et $e_G \times h^{-1} \in H = h^{-1}$, alors $h^{-1} \in H$.

Reciproquement,

— D'après a), $e_G \in H$ alors H est non vide.

— Soient h_1, h_2 deux éléments de H, d'après c), $h_2^{-1} \in H$ et donc d'après b), $h_1 \times h_2^{-1} \in H$.

Alors H est un sous-groupe de G. □

Proposition 1.2. *Si H est un sous-groupe de* $(G, \times)$, *alors* $\times$ *constitue une loi de composition interne sur H, et* $(H, \times)$ *est un groupe.*

Démonstration.

1. D'après b), $\times$ est bien une loi de composition interne sur H ($\forall h_1, h_2 \in H, h_1 \times h_2 \in H$).
2. L'associativité n'est pas perdue par restriction.
3. L'élément neutre est e_G qui est dans H d'après a).
4. D'apres c), pour tout élément $h_1 \in H$, il existe un élément inverse $h_1^{-1} \in H$.

□

Exemple 1.3.

1. $\mathbb{R}^*$ *est un sous-groupe de* $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2. *Soit* $(G, \times)$ *est un groupe, alors l'élément neutre de G et G lui-même sont des sous-groupes de G.*
3. *Soit* $U = \{(z \in \mathbb{C}\backslash \mid z \mid= 1\}$, *alors* $(U, \times)$ *est un sous-groupe de* $(\mathbb{C}^*, \times)$.

4. *Le groupe $GL(n, \mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{C})$.*
5. *Le groupe $SL(n, \mathbb{K})$ est un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

Sous-groupe de $\mathbb{Z}$

voir [7]

Théorème 1.1. *Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les $n\mathbb{Z}$, pour $n \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. L'ensemble $n\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des multiples de n :

$$n\mathbb{Z} = \{kn|k \in \mathbb{Z}\}.$$

Fixons $n \in \mathbb{Z}$. L'ensemble $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. En effet,

— $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$.

— L'élément neutre 0 appartient à $n\mathbb{Z}$.

— Pour $x = kn$ et $y = k'n$ des éléments de $n\mathbb{Z}$.

— Enfin, si $x = kn$ est un élément de $n\mathbb{Z}$ alors $-x = (-k)n$ est aussi un élément de $n\mathbb{Z}$.

Réciproquement, soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ si $H = \{0\}$ alors $H = 0\mathbb{Z}$ et c'est fini. Sinon H contient au moins un élément non nul et positif (puisque tout élément est accompagné de son opposé) et notons

$$n = min\{h > 0 \mid h \in H\};$$

alors $n > 0$ comme $n \in H$ alors $-n \in h$, $2n = n + n \in H$, et plus généralement pour $k \in Z$ alors $kn \in H$. Ainsi $n\mathbb{Z} \in H$. Nous allons maintenant montrer l'inclusion inverse. Soit $h \in H$.écrivons la division euclidienne :

$$h = kn + r, \quad avec \quad k, r \in \mathbb{Z} \quad et \quad 0 \leq r \leq n.$$

Mais $h \in H$ et $kn \in H$ donc $r = h - kn \in H$. Nous avons un entier $r \geq 0$ qui est un élément de H et strictement plus petit que n. par le définition de n, nécessairement $r = 0$, autrement dit $h = kn$, et donc $h \in n\mathbb{Z}$, alors $H = n\mathbb{Z}$. $\square$

Théorème 1.2. *Soit $\{H_i\}$ une famille de sous-groupes de G, alors l'intersection des H_i, est un sous-groupe.*

Démonstration. notons $H = \cap_{i \in I} H_i$.

— Puisque $\forall i \in I, e_G \in H_i$, alors $e_G \in H$.

— Soient $h_1, h_2 \in H$. Alors, pour tout $i \in I, h_1 \in H_i, h_2 \in H_i$, ainsi $h_1 h_2^{-1} \in H_i$. Donc $h_1 h_2^{-1} \in H$.

Alors H est un sous-groupe de $(G, \times)$. □

Définition 1.8. *(Sous-groupe engendré par une partie) Soit G un groupe et soit A une partie de G. On appelle sous-groupe engendré par A le plus petit sous-groupe de G contenant A. On le note <A>.*

Proposition 1.3. *Soit $H = \cap_{i \in I} H_i$ la famille des sous-groupes de G contenant A alors H est un sous-groupe engendré par A.*

Démonstration. D'après le théorème 1.2, H est un sous-groupe de G. Puisque $A \in h$, alors $A \in H_i, \forall i \in I$, et par ailleurs tout sous-groupe contenant A est l'un des H_i et donc contient H, qui est leur intersection, ceci montre que H est le plus petit sous-groupe de G contenant A. □

Proposition 1.4. *Soit E l'ensemble des produits $a_1. \cdots .a_n \in G$ avec n un entier positif et pour tout $i \geq 1, a_i \in A$ ou $a_i^{-1} \in\in A$ (avec le produit vide est égal à e). Cet ensemble est un sous-groupe de G engendré par A.*

Démonstration. E contient e. De plus, étant donné deux éléments $a_1. \cdots .a_n$ et $b_1. \cdots .b_m$, il est clair que le produit $a_1. \cdots .a_n.b_1. \cdots .b_m$ est encore dans E, puisque c'est un produit d'un certain nombre d'éléments appartenant eux ou leur inverse à A. Enfin, l'inverse de $a_1. \cdots .a_n$est $a_n^{-1}. \cdots .a_1^{-1}$, c'est encore un élément de E. Il s'ensuit que E est un sous-groupe de G contenant A. Par ailleurs, si un groupe quelconque H de G contient A. Alors d'après les propriétés b) et c) de proposition 1.1, il contient tous les inverses des éléments de A, et aussi tous les produits d'un certain nombre(fini) d'élément de A et d'inverses d'éléments de A. Donc H contient E. Finalement E est le plus petit des sous-groupes de G contenant A. □

1.1.3 Homomorphisme et isomorphisme de groupes

Définition 1.9. ***(Homomorphisme de groupes)****Soit* $(G, \times)$ *et* $(G^{'}, .)$ *deux groupes. On appelle homomorphisme de groupes, ou morphisme de groupes de G dans* $G^{'}$ *toute application* $f : G \to G^{'}$ *tel que :*

$$f(g_1 \times g_2) = f(g_1).f(g_2) \forall g_1, g_2 \in G.$$

Définition 1.10. ***(Le noyau et l'image d'homomorphisme)****Soit* $f : G \to G^{'}$ *un homomorphisme de groupes.*

— *L'ensemble*

$$f^{-1}(\{e^{'}\}) = \{g \in G, f(g) = e^{'}\}$$

avec $e^{'}$ *l'élément neutre de* $G^{'}$*, est appelé le noyau de f, et noté Ker f.*

— *L'ensemble*

$$f(G) = \{g^{'} \in G^{'}; \exists g \in G, f(g) = g'\} = \{f(g); g \in G\}$$

est appelé l'image de f est noté Im f.

Proposition 1.5. *Si f est un homomorphisme du groupe G dans un groupe* G'*, alors :*

(1) $f(e)$ *est l'élément neutre du groupe* G'*.*

(2) $f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$*, pour tout* $g \in G$*.*

Démonstration.

(1) Soient e l'élément neutre de G et e' l'élément neutre de G', $f(e) = f(e.e) = f(e).f(e)$(puisque f est un homomorphisme). En multipliant par $f(e)^{-1}$ on obtient, $e' = f(e)$.

(2) Soit $g \in G$ alors $gg^{-1} = e$ donc $f(gg^{-1}) = f(e)$. Cela entraine $f(g)f(g^{-1}) = e'$, en multipliant par $f(g)^{-1}$ on obtient, $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$. D'où le résultat.

□

Proposition 1.6. *Soit f un homomorphisme du groupe alors,*

(1) L'image directe d'un sous-groupe par f est un sous-groupe .

(2) L'image réciproque d'un sous-groupe par f est un sous-groupe.

Démonstration.

(1) Soit H un sous-groupe de G, posons $f(H) = H'$, et montrons que H' est un sous-groupe,

— On a $f(e) = e' \in H'$, donc H' n'est pas vide.

— Soit $h_1, h_2 \in H$ puisque H est un sous groupe , donc $h_1h_2^{-1} \in H$, et d'après l'assertion (2) de proposition précédente et car f est un homomorphisme donc ,

$$h_1h_2^{-1} \in H \Rightarrow f(h_1h_2^{-1}) \in H^{'} \Rightarrow f(h_1)f(h_2^{-1}) \in H^{'} \Rightarrow f(h_1)f(h_2)^{-1}) \in H^{'},$$

alors $H^{'}$ est un sous-groupe.

(2) Considérons donc un sous-groupe $H^{'}$, posons $H = f^{-1}(H^{'})$, et montrons que H est un sous-groupe.

— Comme $f(e) = e'$ et $e' \in H'$, on a $e \in H$, donc H n'est pas vide.

— Soit $h_1, h_2 \in H$, on a $f(h_1) \in H'$ et $f(h_2) \in H'$, d'où $f(h_1)f(h_2)^{-1} \in H'$, car H' est un sous-groupe , or en utilisant l'assertion (2) de proposition précédente , on a $f(h_1)f(h_2^{-1}) = f(h_1)f(h_2)^{-1}$. On conclut que

$$f(h_1)f(h_2^{-1}) = f(h_1h_2^{-1}) \in H',$$

c'est-à-dire $h_1h_2^{-1} \in H$, ce qui prouve le résultat voulu.

□

Proposition 1.7. *Soit $f : G \to G'$ un homomorphisme du groupe,*

(1) Ker f est un sous-groupe de G.

(1) Im f est un sous-groupe de G'.

Démonstration.

(1) Montrons que le noyau est un sous-groupe de G.

(a) $f(e) = e'$, donc $e \in Kerf$, alors $Kerf$ n'est pas vide.

(b) Soient $g_1, g_2 \in Kerf$. Alors $f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2) = e'e' = e'$, donc $g_1g_2 \in Kerf$.

(c) Soient $g_1 \in Kerf$. Alors $f(g_1^{-1}) = f(g_1)^{-1} = e'^{-1} = e'$, donc $g_1^{-1} \in Kerf$.

(2) Montrons que l'image est un sous-groupe de G',

(a) $f(e) = e'$, donc $e' \in Imf$, alors Imf n'est pas vide.

(b) Soient $f(g_1), f(g_2) \in Imf$, avec $g_1, g_2 \in G$. Alors $f(g_1)f(g_2) = f(g_1g_2) \in Imf$.

(c) Soit $f(g_1) \in Imfetg_1 \in G$, alors $f(g_1)^{-1}) = f(g_1^{-1}) \in Imf$.

□

<u>Définition</u> 1.11. *(Isomorphisme de groupes)* *Soit G et G' deux groupes. On appelle Isomorphisme du groupe de G sur G' tout homomorphisme du groupe $f : G \to G'$, qui de plus une bijection de G sur G'.*

<u>Définition</u> 1.12. *(Automorphisme de groupes)* *Un automorphisme du groupe est un isomorphisme du groupe dont le groupe d'arrivée est le même que le groupe de départ.*

Exemples

1. L'application :
$$\begin{array}{rcccc} f & : & GL(n,\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ & & M & \mapsto & f(M) = detM \end{array}$$
est un homomorphisme du groupe puisque $det(M \times N) = detM \times detN$.
2. Le groupe G_X tel que $dimX = n$, et GL(n,$\mathbb{C}$) sont isomorphes
3. Si on considére $[\alpha + \beta]$ le produit sur $\mathcal{T}^1 = [0, 1)$ des nombres $\alpha + \beta \in \mathcal{T}^1$ alors $\mathcal{T}^1$ est un groupe appel le tore de dimension 1.Le groupe $\mathcal{T}^1$ est isomorphe à $\mathbb{R}^1/\mathbb{N}$.
4. Soit X un cercle et soit Γ^1 l'ensemble de tout les rotations de X, alors Γ^1 est appel le groupe de rotations du cercle.Le groupe Γ^1 est isomorphe à le tore $\mathcal{T}^1$ du exemple (3) précedent.

5. Soit M la matrice d'ordre n, soit $\overline{M}$ la matrice dont ces éléments sont les conjugués complexe des éléments de M, et soit M' la matrice transposée de M , les applications :
$$\begin{array}{rccc} f_1 & : & GL(n,\mathbb{C}) & \rightarrow & SL(n,\mathbb{C}) \\ & & M & \mapsto & \overline{M} \end{array}$$
et
$$\begin{array}{rccc} f_2 & : & GL(n,\mathbb{C}) & \rightarrow & SL(n,\mathbb{C}) \\ & & M & \mapsto & M'^{-1} \end{array}$$
sont des automorphismes de groupes.

1.1.4 Sous-groupes distingués

<u>Définition</u> 1.13. ***(Sous-groupe distingué)*** *Un sous-groupe H de G est distingué ou normal si pour tout $g \in G$,*

$$Hg = gH, \quad c'est - \text{à} - dire \quad \forall g \in G, \forall h_1 \in H, \exists h_2 \in H : gh_1 = h_2 g.$$

Le sous groupe distingué H de G est noté par $H \lhd G$

<u>Proposition</u> 1.8. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) $H \lhd G$;

(b) *Pour tout $g \in G, gHg^{-1} = H$.*

Démonstration.

a⇒ b) On a $H \lhd G$ c'est-à-dire : $gH = Hg$, en multipliant à droite par g^{-1} on obtient : $gHg^{-1} = H$

b⇒ a), On a $gHg^{-1} = H$ c'est-à-dire $gHg^{-1} \subset H$

$$gh = (ghg^{-1})g = h^{'}g \in Hg \Rightarrow gH \subset Hg$$

et

$$hg = g(g^{-1}hg) = gh^{'} \in gH \Rightarrow Hg \in gH$$

donc

$$gH = Hg.$$

□

Exemple 1.4. *(1) Pour tout groupe G, les sous-groupes $\{e\}$ est G sont distingués dans G.*

(2) Soit $G = GL(n, \mathbb{C}, H) = SL(n, \mathbb{C})$, alors H est un sous-groupe distingué de G, en effet, $\forall g \in G, h \in H$ on a $det(ghg^{-1}) = det \quad g, deth, det \quad g^{-1} = det \quad h = 1$ donc $ghg^{-1} \in H$.

(3) Si G est a bélian, tout sous-groupe de G est distingué.

(4) Pour tout groupe G, le centre $Z(G)$ est un sous-groupe distingué dans G.

Proposition 1.9. *Pour tout homomorphisme f d'un groupe G dans un groupe G', le noyau Ker f est un sous-groupe distingué dans G.*

Démonstration. soient $h \in Kerf$ et $g \in G$, il s'agit de vérifier que $ghg^{-1} \in Kerf$, pour cela calculons $f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g^{-1})$ mais $f(h) = e'$, donc $f(ghg^{-1}) = f(g)f(g^{-1}) = e'$, alors $ghg^{-1} \in Kerf$. □

Proposition 1.10. *Soit f un homomorphisme du groupe G dans un groupe G', alors : L'image d'un sous-groupe distingué dans G par f est un sous-groupe distingué dans f(G).*

Démonstration. Soit H un sous groupe distingué dans G, et soit $g' \in f(G)$ alors $g' = f(g)$ pour $g \in G$, et d'autre part on a :

$$g'f(H) = f(g)f(H) = f(gH) = f(Hg) = f(H)f(g) = f(H)g'$$

d'où le résultat. □

Proposition 1.11. *Si H et K sont deux sous-groupes d'un groupe G tels que $H \triangleleft G$ et $K \triangleleft G$, alors $H \cap K \triangleleft G$*

Démonstration. soit $l \in H \cap K$ alors $l \in H, l \in K$ et car $H \triangleleft G$ et $K \triangleleft G$ on a : pour tout $g \in G$ $glg^{-1} \in H$ et $glg^{-1} \in K$ donc $glg^{-1} \in H \cap K$, d'où le résultat □

1.1.5 Groupe quotient

Soient G un groupe et H un sous-groupe distingué de G, le but de théorème fondamental suivant est de munir l'ensemble quotient G/H d'une structure du groupe, déduite de celle de G.

Théorème 1.3. *Soient G un groupe et H un sous-groupe de G, on suppose que $H \triangleleft G$;*

(i) On définit une loi de composition interne dans G/H , en posant indépendamment des représentants choisis :

$$Hg_1Hg_2 = Hg_1g_2 \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

(ii) Cette loi munit l'ensemble G/H d'une structure du groupe, appelé le groupe quotient de G par H.

(iii) La surjection canonique $p : G \to G/H$ est alors un homomorphisme du groupe G dans le groupe quotient G/H.

Démonstration.

(i) Le produit de deux classes ainsi défini ne dépend-il pas des représentants g_1 et g_2 que l'on choisit pour poser Hxy ?. En d'autre termes, si l'on prend d'autres représentants $g_1' \in Hg_1$ et $g_2' \in Hg_2$, il est clair que $Hg_1g_2 = Hg_1'g_2'$? En effet, soient $g_1' \in Hg_1, g_2' \in Hg_2$, alors $g_1' = h_1g_1, g_2' = h_2g_2$ pour $h_1, h_2 \in H$, et puisque H est un sous-groupe distingué de G donc $g_1h_2 = h_2'g_1$ pour certains $h_2' \in H$, alors nous avons,

$$g_1'g_2' = (h_1g_1)(h_2g_2) = h_1(g_1h_2)g_2 = h_1h_2^{'}g_1g_2.$$

Par conséquent,

$$Hg_1^{'}g_2^{'} = Hh_1h_2^{'}g_1g_2 = Hg_1g_2.$$

(ii) L'associativité de la loi défini dans G/H est évidente, car pour tout $g_1, g_2, g_3 \in G$, on a

$$Hg_1(Hg_2Hg_3) = Hg_1(g_2g_3) = H(g_1g_2)g_3 = (Hg_1Hg_2)Hg_3.$$

De même, pour tout $g \in G$, on a $HgHe = Hge = Hg$ et $Hg(Hg)^{-1} = Hgg^{-1} = He$, ce qui montre que G/H est un groupe.

(iii) Il est clair puisque, par définition, on a :

$$p(g_1g_2) = Hg_1g_2 = Hg_1Hg_2 = p(g_1)p(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

□

Notation : Notons par $\tilde{g}$ la classe à-gauche de g : $Hg, \forall g \in G$.

Remarque 1.2. *L'élément neutre du groupe quotient G/H est $\tilde{e} = H$, et pour tout $g \in G$, le symétrique dans G/H de $\tilde{g}$ est $\tilde{g}^{-1} = \widetilde{g^{-1}}$.*

Exemple 1.5. *(1) Soit G un groupe, si l'on prend $H = e$, alors $\tilde{g} = g$ pour tout $g \in G$(car $g_1 \sim g_2$ est alors équivalent à $g_1 g_2^{-1} = e$, c'est-à-dire $g_2 = g_1$). Il en résulte $G/e \simeq G$, via l'isomorphisme $g_1 \mapsto \tilde{g}_1$.*

(2) Soit G un groupe, si l'on prend $H = G$, alors $\tilde{g} = \tilde{e}$ pour tout $g \in G$ (car on a $ge^{-1} \in G$, c'est-à-dire $g \sim e, \forall g \in G$). Il n'y a donc qu'une seule classe, d'où G/G est le groupe trivial à un élément.

Théorème d'isomorphisme

Théorème 1.4. *Soit G un groupe, pour tout groupe G' et tout morphisme du groupe $f : G \to G'$, le groupe quotient de G par le sous-groupe normal Ker f est isomorphe au sous-groupe Im f de G' :*

$$G/Kerf \simeq Imf.$$

Démonstration. Soit $f : G \to G'$ un morphisme du groupe, on a le noyau de f est un sous-groupe distingué de G. Pour tout $\tilde{g} \in G/Kerf$, posons $\varphi(\tilde{g}) = f(g) \in Imf$.Cette définition est indépendante du choix de représentant dans $\tilde{g}$, En effet,si l'on choisit un autre représentant $g' \in \tilde{g}$, on a par définition $gg'^{-1} \in Kerf$, donc $f(gg'^{-1}) = e$, d'où $f(gg'^{-1}) = f(g)f(g')^{-1} = e$, c'est-à-dire $f(g) = f(g')$, ou encore $\varphi(\tilde{g}) = \varphi(\tilde{g'})$. On définit donc bien une application :

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & G/Kerf & \longrightarrow & Imf \\ & & \tilde{g} & \longmapsto & f(g) \end{array}$$

L'application φ est surjective par construction ,il est clair que c'est un morphisme du groupe puisque :

$$\forall \tilde{g}, \tilde{g'} \in G/Kerf, \varphi(\tilde{g}\tilde{g'}) = \varphi(\widetilde{gg'}) = f(gg') = f(g)f(g') = \varphi(\tilde{g})\varphi(\tilde{g'}).$$

Vérifions qu'elle est injective, pour cela considérons $\tilde{g} \in Ker\varphi$, on a alors $\varphi(\tilde{g}) = e'$, le neutre du groupe d'arrivée G'. D'où $f(g) = e'$, c'est-à-dire $g \in Kerf$, ou encore $\tilde{g} = \tilde{e}$. Ceci montre que $Ker\varphi = \tilde{e}$, donc φ est injective . On conclut que φ est un isomorphisme du groupe de $G/Kerf$ sur Im f. $\square$

Chapitre 2

Groupes topologiques

Nous commençons ce chapitre par un rappel sur les espaces topologiques dans la première section, et dans la deuxième section, on va se concentrer sur les groupes topologiques, certaines de ses propriétés et des exemples, puis on va étudier aussi les sous-groupes, le produit, le morphisme et le groupe quotient d'un groupe topologique, pour relier la structure algébrique avec la structure topologique.

2.1 Rappel sur les espaces topologiques

Définition 2.1. ***(Espace topologique)*** *On appelle espace topologique tout couple constitué par un ensemble E et un ensemble τ de parties de E appelées parties ouverts ou ouverts de E, satisfaisant aux trois propriétés suivantes :*

1. $\phi \in \tau$ *et* $E \in \tau$ *;*
2. *Toute réunion d'ouverts est un ouverte ;*
3. *Toute intersection finie d'ouverts est un ouverte.*

On dit encore que l'ensemble τ de partie de E définit sur E une topologie.

Définition 2.2. ***(Toplogie discrète)*** *Soit $\mathcal{P}(E)$l'ensemble de parties de E, alors $\mathcal{P}(E)$ est une topologie sur E, appelé topologie discrète, et le couple $(E, \mathcal{P}(E))$ est appelé espace discret.*

Définition 2.3. ***(ensemble fermé)*** *On dit qu'un sous-ensemble A de E est fermé si son complémentaire $\complement_E A$ est ouvert.*

Axiomes des fermés : L'ensemble τ des parties fermées de E vérifie les propriétés suivantes, appelées axiomes des fermés.

1. L'ensemble E et l'ensemble vide ϕ sont fermés ;
2. Toute réunion finie de fermés est une fermée ;
3. Toute intesection de fermés est une fermée.

Définition 2.4. ***(Voisinage)*** *On appelle voisinage d'un point x de E tout sous-ensemble de E contenant un ouvert contenant x .*

Définition 2.5. ***(Base de topologie)*** *Soit (E, τ) un espace topologique, et soit B une sous-ensemble de τ. On dit que B est une base pour la topologie τ si et seulement si tout ouvert de E est réunion d'une sous-famille de B :*

$$\forall O \in \tau, \exists (O_i)_{i\in I} \subset B : O = \cup_{i\in I} O_i.$$

Définition 2.6. ***(Topologie induite)*** *Soit (E, τ) un espace topologique et A une partie de E. On appelle topologie induite par τ sur A la topologie τ_A tel que :*

$$\tau_A = \{O \cap A; O \in \tau\}.$$

Définition 2.7. ***(Adherence, intérieur, frontière)*** *Soit E un espace topologique et A une partie de E.*

1. *On dit que x est un point adhérent à A, si tout voisinage V de x contient un point de A, c'est-à-dire :$V \cap A \neq \phi$.*

   L'ensemble des points adhérents à A est dite l'adhérence de A et noté $\overline{A}$.

2. *On dit que x est un point intérieur à A s'il existe un voisinage V de x tel que :$x \in V \subset A$.*

   L'ensemble des points intérieurs à A est l'intérieur de A et noté :$\mathring{A}$.

3. *La frontière de A noté FrA est l'ensemble des points x dont tout voisinage V contient au moins un point de Aa et un point de de complémentaire de A. On a donc :*$FrA = \overline{A} \cap \overline{\complement_E A}$.

Définition 2.8. ***(Application ouverte, application fermée)*** *Soit deux espaces topologiques X et Y.*

1. *On dit qu'une application f de X dans Y est ouverte si pour tout ouvert U de X, l'image f(U) est ouverte dans Y.*
2. *On dit qu'une application f de X dans Y est fermée si pour tout fermé U de X, l'image f(U) est fermée dans Y.*

Définition 2.9. ***(Ensemble dense, espace séparable,espace séparé)*** *Soit E un espace topologique et A une partie de E.*

1. *On dit que A est dense sur E si son adhérence $\overline{A}$ est E.*
2. *On dit que E est séparable s'il existe une partie de E au plus dénombrable dense dans E.*
3. *On dit que E est un espace séparé(Hausdorff) si en peut séparer deux points différents quelconque de E par deux voisinages disjoints :*

$$\forall x, y \in E, x \neq y, \exists V \in V_x, \exists W \in V_y : V \cap W = \phi.$$

Définition 2.10. ***(Application continue)*** *On dit que l'application f de l'espace topologique E dans l'espace topologique F est continue au point x de E si pour tout voisinage V de $f(x)$, il existe un voisinage υ de x dont l'image par f soit dans V*

$$(f \quad continue \quad en \quad x) \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} (\forall V, V \in V_{f(x)})(\exists \upsilon, \upsilon \in V_x) : (f(\upsilon) \subset V).$$

Une application f d'un espace topologique E dans l'espace topologique F est dite continue, si elle est continue en tout point de E.

Définition 2.11. ***(Fonction continue)****Soit E et F deux espaces topologiques, La fonction f de E vers F est continue si l'image réciproque par f d'un ouvert est un ouvert.*

Théorème 2.1. *Soient E et F deux espaces topologiques, et $f : E \longrightarrow F$ une application.Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *L'application f est continue ;*
2. *Pour tout ouvert O de F ,$f^{-1}(O)$ est un ouvert de E ;*
3. *Pour tout fermé C de F ,$f^{-1}(C)$ est un fermé de E ;*
4. *Pour toute partie A de E, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;*
5. *Pour toute partie B de F, $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.*

Démonstration. Voir les pages 9 et 10 de [3]. □

Définition 2.12. ***(Homéomorphisme)*** *On dit que f est un homéomorphisme si f est bijectif ,continue et d'inverse continue.*

Remarque 2.1. *Toute homéomorphisme est une application ouverte et fermée.*

Définition 2.13. ***(Espace métrique)*** *On dit que d est une distance sur E si :*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(condition de séparation) ;*
2. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in E$*(condition de symétrie) ;*
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in E$*(inégalité triangulaire).*

Le couple (E, d) est appelé espace métrique.

Définition 2.14. ***(Suite de Cauchy)*** *Soit (E, d) un espace métrique. On dit q'un suite (x_n) de E est de Cauchy si :* $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall p, q\forall > N \Rightarrow d(x_p, x_q) < \epsilon$.

Définition 2.15. ***(Espace complet)*** *On dit que l'espace (E, d) est complet si toute suite de Cauchy de E converge dans E.*

Définition 2.16. ***(Recouverement ouvert)*** *Soit (E, τ) un espace topologique. Un recouverement ouvert de E est une famille $(U_i)i \in I$ d'ouverts de réunion égale à E.*

Un recouverement ouvert d'une partie A de E est une famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts dont la réunion contient A.

Définition 2.17. ***(Espace compact)*** *On dit que l'espace métrique (E, d) est compact si de tout recouverement ouvert de E, il existe un sous-recouverement fini de E.*
Une partie A de E est compact si le sous-espace (A,d) est compact.

Proposition 2.1. *Toute partie compacte d'un espace topologique séparé est fermée.*

Démonstration. Voir la page 37 de [6] □

Théorème 2.2. *Les parties compactes de* $\mathbb{R}^n$ *sont les parties fermées et bornées.*

Démonstration. Voir la page 37 de [6] □

Propriété 2.1.
a) Dans un espace topologique séparé, une union finie de compacts est compacts.
b) Dans un espace topologique séparé, une intersection quelconque de parties compactes est compacte.
c) Un produit d'espaces topologiques compacts est compact.

Démonstration. Voir la page 37 de [6] □

Définition 2.18. ***(La norme)****Soit E un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$*. Une norme sur E est une application* $\|.\|$ *sur E à valeurs réelles et satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. $\forall x \in E \| \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$ *(séparation) ;*
2. $\forall(\lambda, x) \in K \times E, \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *(homogénétie) ;*
3. $\forall(x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 2.19. ***(Produit scalaire)*** *Soit E un espace vectoriel complexe. Un produit scalaire est une application* $< .,. >: E \times E \to \mathbb{C}$*, vérifiant*

1. $< x, x > \geq 0$ *pour tout* $x \in E$ *;*
2. $< \lambda x + \mu y, z >= \lambda < x, z > +\mu < y, z >$ *;*
3. $< x, y >= \overline{< y, x >}$.

Définition 2.20. ***(Espace de Hilbert)*** *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel réel ou complexe muni d'une produit scalaire et qui est complet pour la norme associée.*

Définition 2.21. ***(Espace euclidien)*** *un espace vectoriel euclidien est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.*

Définition 2.22. ***(Espace préhilbertienne)*** *Un espace vectoriel réel E muni d'un produit scalaire s'appelle un espace préhilbertien, si E est de dimension finie, et si E est un espace euclidien.*

Définition 2.23. ***(Espace vectoriel topologique)*** *Soit E un espace vectoriel.On dit que E est un espace vectoriel topologique si :*

— *E est un espace topologique ;*

— *Les applications*

$$\begin{array}{rcccc} f_1 & : & E \times E & \longrightarrow & E \\ & & (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 + x_2; \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcccc} f_2 & : & \mathbb{C} \times E & \longrightarrow & E \\ & & (\alpha, x) & \longmapsto & \alpha x; \end{array}$$

sont continues.

Alors le couple (E, τ) est appellé espace vectoriel topologique.

2.2 Groupes topologiques

2.2.1 Notion du groupe topologique

Définition 2.24. ***(Groupe topologique)*** *On dit qu'un ensemble G est un groupe topologique s'il satisfait les conditions suivantes :*

(a) G est un groupe ;

(b) G est un espace topologique séparé ;

(c) Les applications :

$$\begin{array}{rcl} f_1 \ : \ G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & f_1(g) = g^{-1}; \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} f_2 \ : \ G \times G & \longrightarrow & G \\ (g_1, g_2) & \longmapsto & f_2(g_1, g_2) = g_1 g_2; \end{array}$$

sont continues.

Exemple 2.1. *1. Le groupe additif* $\mathbb{R}$ *muni de la topologie ordinaire est un groupe topologique.*

2. Soit $\mathbb{R}^*$ *le groupe multiplicatif des nombres réels positifs.La topologie de* $\mathbb{R}^*$ *induite par celle de* $\mathbb{R}$*, est compatible avec sa structure de groupe donc c'est un groupe topologique.*

3. Soit $\mathcal{T}$ *le groupe quotient de* $\mathbb{R}$ *par la relation d'équivalence* $g_1 \sim g_2$ *si* $(g_1 - g_2)$ *est un entier ; autrement dit* $\mathcal{T}$ *est le tore à 1-dimension. Pour tout* $c \in \mathcal{T}$*, posons* $\mid c \mid$ *est la plus petite des valeurs absolus des représentants de c sur* $\mathbb{R}$*, si alors on pose pour tout couple* g, h *d'élément de* T *:*

$$d(g, h) = \mid g - h \mid;$$

on définit sur$\mathcal{T}$ *une distance, d'ailleurs invariante par les translations de* $\mathcal{T}$*, et la topologie associée à cette distance est compatible avec la structure de groupe*$\mathcal{T}$*.*
Le groupe $\mathcal{T}$ *muni de cette topologie est le tore topologique à 1-dimension.*

4. Le groupe multiplicatif des nombes complexes de valeur absolue 1 $G = (z \in \mathbb{C}, \mid z \mid = 1)$*, muni de la topologie induit par celle du plan complexe est un groupe topologique.*

5. Si l'on identifie le groupe des dilatations de la droites $x \longmapsto \lambda x + a$ *(où* $\lambda \neq 0$*) à l'ensemble D des points* (λ, a) *du plan* $\mathbb{R}^2$ *d'abxisse non-nulle, et qu'on donne à D la topologie induite par celle de* $\mathbb{R}^2$ *. D devient un groupe topologique .En effet, si* $s = (\lambda, a)$*, on a*

$$s^{-1} = (\lambda, a)^{-1} = (\frac{1}{\lambda}, \frac{-a}{\lambda});$$

donc s^{-1} *est fonction continue de s sur D ; d'autre part si* $s = (\lambda, a)$ *et* $s' = (\lambda', a')$*,on a* $s \circ s' = (\lambda\lambda', \lambda a' + a)$*, donc* $s \circ s'$ *est bien fonction continue du couple (s,s').*

6. *Tout groupe muni de la topologie discrète est un groupe topologique.*

7. *Le groupe linéaire complet* $Gl(n, \mathbb{K})$ *avec (*$\mathbb{K} = \mathbb{R}ou\mathbb{C}$*) muni de la topologie naturelle de* $\mathbb{K}^{n^2}$ *est un groupe topologique. En effet,pour* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *,soit* $g \in GL(n, \mathbb{C})$ *tel que :*

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}$$

nous allons maintenat prouver la continuité des fonctions f_1 *et* f_2 *dans la condition (c). Soit* G_{ji} *le déterminant de la matrice (n-1)(n-1) obtenue en supprimant le* $j^{\text{éme}}$ *ligne et la* $i^{\text{éme}}$ *colone de la matrice g. Puisque*

$$(g^{-1})_{ji} = \frac{G_{ji}}{detg}$$

la fonction $f_1(g) = g^{-1}$ *est continue , de mếme nous avons ;*

$$(gh)_{ji} = \sum_{s=1}^{n} g_{js}h_{si}$$

et donc $f_2(g, h) = gh$ *est continue, alors* $GL(n, \mathbb{C})$ *avec sa topologie naturelle est un groupe topologique.*

Translation d'un groupe topologique

<u>**Définition**</u> **2.25.** ***(La translation à gauche et à droite)*** *Soit G un groupe topologique, pour tout* $g_0 \in G$*, la translation à droite est définie par l'application :*

$$\begin{array}{rccc} R_{g_0} & : G & \longrightarrow & G \\ & g & \longmapsto & R_{g_0}(g) = gg_0; \end{array}$$

et la translation à gauche est définie par l'application :

$$\begin{array}{rcrcl} L_{g_0} & : & G & \longrightarrow & G \\ & & g & \longmapsto & L_{g_0}(g) = g_0 g. \end{array}$$

Proposition 2.2. *La translation à droite R_{g_0} et la translation à gauche L_{g_0} du groupe topologique G sont des homéomorphes de l'espace G sur lui même.*

Démonstration. L'application R_{g_0} est bijective, on va montrer qu'elle est continue.Puisque $R_{g_0}(g) = f_2(g, g_0) = gg_0$ qui est continue d'aprés la condition (c) dans définition 2.1.1, et aussi l'application inverse $R_{g_0}^{-1} = R_{g_0^{-1}}$ est continue $R_{g_0^{-1}} = f_2(g, g_0^{-1})$ donc R_{g_0} est un homéomorphisme de G sur G.Et de méme pour L_{g_0}.

$\square$

Soit A et B deux sous-ensembles d'un groupe topologique G, on notera :
$A^{-1} = \{a^{-1}, a \in A\}$,
$AB = \{a \times b, a \in A, b \in B\}$.

Propriété 2.2.

(1) Si A et B deux sous-ensembles ouverts de G, alors AB est un sous-ensemble ouvert de G.

(2) Si A est ouvert de G, alors A^{-1} est un ouvert de G.

Voisinage d'un point

Du fait que toute translation est un homéomorphie résulte que, l'ensemble des voisinages d'un point g se déduit de l'ensemble des voisinages de l'élément neutre e par la translation à droite ou à gauche. L'étude des voisinages d'un point g de G se ramène donc à celle des voisinages de e.

Propriété 2.3.

(1) Pour tout voisinage V de e, le symétrique V^{-1} est voisinage de e.

(2) Chaque voisinage V de e, contient un voisinage symétrique de e, c'est-à-dire un voisinage U tel que $U^{-1} = U$. En effet, d'aprés la propriété (1) V^{-1} est un voisinage de e, posons $V \cap V^{-1} = U$, alors $U \subseteq V$ et $U^{-1} = U$.

(3) Tout voisinage V de e contient un voisinage U tel que $UU \subset V$. En effet, puisque l'application $f_2(g_1, g_2) = g_1 g_2$ est continue.Pour $g_1 = e, g_2 = e$ il existe des voisinages U_1, U_2 d'identité, pour laquelle $U_1 U_2 \subset V$, ainsi le voisinage $U = U_1 \cap U_2$ satisfaite la condition $UU \subset V$.

Démonstration. Voir les pages 139 et 140 de [9] □

Définition 2.26. ***(Espace topologique homogène)*** *Un espace topologique X est dite homogène, si pour tout $x, y \in X$, il existe un homéomorphisme $f : X \longrightarrow X$ tel que $f(x) = y$.*

Proposition 2.3. *Tout groupe topologique est homogène.*

Démonstration. Soit G un groupe topologique, posons $f = L_{(b^{-1})a}$ la translation à gauche, alors d'aprés la proposition précédente f est un homéomorphisme, il reste de montrer que $f(g_1) = g_2$. Pour cela on a pour tout $g_1, g_2 \in G$:

$$f(g_1) = L_{(b^{-1})a}(g_1) = (b^{-1})ag_1 = g_2.$$

Donc G est homogène. □

Remarque 2.2. *L'homogénéité des groupes topologiques est trés utile dans la pratique car il suffit de vérifier une propriété locale en un point (l'élément neutre par exemple) afin de la démontrer sur tout le groupe.*

2.2.2 Produit de groupes topologiques

Définition 2.27. *Soient G_1 et G_2 deux groupes topologiques. L'ensemble produit $G = G_1 \times G_2$ posséde à la fois une structure de groupe-produit et d'espace topologique produit. La topologie produit sur G est compatible avec la structure de groupe produit sur G; l'ensemble G muni de ces deux structures est appelé produit de groupes topologiques G_1 et G_2.*

Exemple 2.2.

1. *On appelle groupe topologique additif* $\mathbb{R}^n$ *le produit de* n *groupes topologiques identiques au groupes topologique additif* $\mathbb{R}$.
2. *On appelle tore à* n *dimension le produit* $\mathcal{T}^n$ *de* n *groupes égaux au tore topologique* $\mathcal{T}$.

2.2.3 Sous-groupe d'un groupe topologique

Définition 2.28. ***(Sous-groupe topologique)*** *Soit* G *un groupe topologique et* H *une partie de* G.
H est un sous-groupe topologique de G si H est un sous-groupe de G muni de la topologie induit par G.

Proposition 2.4. *Soit* G *un groupe topologique, et* H *un sous-groupe de* G, *alors* H *est un groupe topologique.*

Démonstration. Un sous-groupe algébrique étant un groupe (d'aprés proposition 1.2 du chapitre 1), donc H est un groupe, il suffit de motrer que les applications :

$$\begin{array}{rccl} f_1 & : & H \times H & \longrightarrow & H \\ & & (g_1, g_2) & \longmapsto & g_1 g_2; \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} f_2 & : & H & \longrightarrow & H \\ & & g & \longmapsto & g^{-1}; \end{array}$$

sont continues. Ce qui évident car elle sont les restrictions de celles de G qui sont continues puisque G est un groupe toplogique. □

Définition 2.29. ***(Sous-groupe fermé)*** *Un sous-groupe* H *de* G *est dite fermé s'il est un sous-ensemble fermé de l'espace topologique* G.

Exemple 2.3.

1. $GL(n, \mathbb{R})$ *est un sous-groupe topologique fermé de* $GL(n, \mathbb{C})$.
2. $SL(n, \mathbb{K})$ *avec* $(\mathbb{K} = \mathbb{R} ou \mathbb{C})$ *est un sous-groupe topologique de* $GL(n, \mathbb{K})$.

3. *Soient*

$$U(n) = \{g : g \in GL(n, \mathbb{C}), \sum_{s=1}^{n} \overline{g_{sj}} g_{si} = \delta_{ji}, j, i = 1....n\};$$

et

$$SU(n) = \{g : g \in SL(n, \mathbb{C}), \sum_{s=1}^{n} \overline{g_{sj}} g_{si} = \delta_{ji}, j, i = 1....n\},$$

avec

$$\delta_{ji} = \begin{cases} 1 & si j = i \\ 0 & si j \neq i; \end{cases}$$

alors $U(n)$ et $SU(n)$ sont des sous-groupes topologiques de $GL(n, \mathbb{C})$ et $SL(n, \mathbb{C})$ respectivement.

Proposition 2.5. *Soit G un groupe topologique, si H est un sous-groupe ouvert de G, alors H est fermé.*

Démonstration. Pour montrer que H est fermé, on va montrer que $\overline{H} \subset H$. Comme H est ouvert,aH est un voisinage de a et donc $aH \cap H \neq \phi$, ainsi $\exists h_1, h_2 \in H$ tel que :

$$ah_1 = h_2 \Rightarrow a = h_2 h_1^{-1},$$

et car H est un sous-groupe topologique de G et d'aprés la proposition précédente H est groupe topologique donc $h_2 h_1^{-1} \in H$, alors

$$a \in H \Rightarrow \overline{H} \subset H;$$

ce qui montre que H est fermé. □

2.2.4 Groupe topologique quotient

Définition 2.30. ***(Topologie quotient)*** *Soit G un groupe topologique et soit H un sous-groupe de G, on considére le quotient G/H, l'ensemble des classes à gauche de G selon H et on désigne par π la projection canonique de G sur G/H.*
On définit la topologie quotient sur G/H comme la topologie dont les ouverts sont les images $\pi(U)$ des ouverts U de G par l'application π.

Proposition 2.6. *La projection canonique π de l'espace G dans l'espace G/H est ouverte et continue.*

Démonstration. En déduire de la définition du topologie quotient sur G/H que π est ouvert.
maintenant on va montrer que π est continue.Soit $\tilde{U}$ un ensemble ouvert sur G/H, par définition $\tilde{U}$ est de la forme $U = \pi(U)$, lorseque U est un ouvert de G, donc l'image réciproque de $\tilde{U}$,

$$\pi^{-1}(\tilde{U}) = \cup H = \cup_{h\in H} Uh;$$

est ouvert car il est la réunion des ensembles ouverts Uh (d'aprés propriétés de l'homéomorphisité des translation), donc π est continue. □

Proposition 2.7. *Si H est un sous-groupe fermé du groupe topologique G, alors l'espace quotient G/H est séparé.*

Démonstration. On suppose que H est fermé, soient $\tilde{g_1}$ et $\tilde{g_2}$ deux point de G/H, soit $g_1 \in \tilde{g_1}, g_2 \in \tilde{g_2}$, si $\tilde{g_1} \neq \tilde{g_2}$, alors $g_1^{-1}g_2 \notin H$, et puisque H est fermé, il existe un voisinage V de l'élément $g_1^{-1}g_2$ tel que :

$$V \cap H = \phi. \tag{2.1}$$

D'un autre coté, puisque les fonctions $f_1(g) = g^{-1}$ et $f_2(g, g') = gg'$ sont continue, alors il existe des voisinage V_1 et V_2 des éléments g_1 et g_2 tel que :

$$V_1^{-1}V_2 \subset V. \tag{2.2}$$

ON défini $\tilde{V_1} = \pi(V_1)$ et $\tilde{V_2} = \pi(V_2)$. Par définition $\tilde{V_1}$ et$\tilde{V_2}$ sont des voisinages de $\tilde{g_1}$ et $\tilde{g_2}$ respectivement.
On va montrer que $\tilde{V_1} \cap \tilde{V_2} = \phi$, supposons le contraire,supposons qu'il existe un élément $\tilde{g_0}$ tel que :

$$\tilde{g_0} \in \tilde{V_1} \cap \tilde{V_2} = \pi(V_1) \cap \pi(V_2). \tag{2.3}$$

On conclut de l'equation (2.3) qu'il existe

$$g_0, g_0^{'} \in \tilde{g_0}, \tag{2.4}$$

avec $g_0 \in V_1$ et $g_0' \in V_2$,alors on a :

$$g_0^{-1} g_0' \in V_1^{-1} V_2, \tag{2.5}$$

et d'aprés l'equation (2.2)

$$g_0^{-1} g_0' \in V. \tag{2.6}$$

D'autre coté l'equation (2.4) implique que g_0 etg_0' seraient dans la même classe selon H, c'est-à-dire :

$$g_0^{-1} g_0' \in H; \tag{2.7}$$

mais les equations (2.6) et (2.7) conterdit l'equation (2.1), alors $\tilde{V_1} \cap \tilde{V_2} = \phi$, donc $\tilde{g}_1$ et $\tilde{g}_2$ ont des voisinages disjoints, alors G/H est séparé. □

Théorème 2.3. *Soit G un groupe topologique, soit H un sous-groupe distingué fermé de G, alors G/H est un groupe topologique.*

Démonstration. On a G/H est un groupe et G/H muni de la topologie quotient est un espace topologique séparé. Il reste de montrer que la condition (c) du définition 2.23 est satisfaite pour G/H.

On désigne par π la projection canonique de G dans G/H.Soit $\tilde{U}$ un voisinage de $\tilde{g_1}^{-1} \in G/H$, alors il existe un élément $g_1^{-1} \in \tilde{g_1}^{-1}$ et un voisinage U de g_1^{-1} tel que $\tilde{U} = \pi(U)$. Puisque la fonction $f(g) = g^{-1}$ est continue, il existe un voisinage U_1 de g_1 tel que :

$$U_1^{-1} \subset U. \tag{2.8}$$

Posons $\tilde{U_1} = \pi(U_1)$ un voisinage de $\tilde{g}_1$ et l'equation (2.8) montre que $\tilde{U_1}^{-1} = \pi(U_1)^{-1} \subset \pi(U) = \tilde{U}$.

Par consèquent la fonction $f_1(\tilde{g}) = \tilde{g}^{-1}$ est continue sur G/H.

Soit maintenant $\tilde{U}$ un voisinage de l'élément $\tilde{g}\tilde{g'}$, tel que $\tilde{g}, \tilde{g'} \in G$, donc il existe des éléments $g \in \tilde{g}, g' \in \tilde{g'}$ et un voisinage U de gg' tel que $\tilde{U} = \pi(U)$, puisque la fonction $f_2(g, g') = gg'$ est continue alors il existe des voisinages U_1, U_2 de g et g' respectivement tel que :

$$U_1 U_2 \subset U. \tag{2.9}$$

Posons $\tilde{U_1} = \pi(U_1), \tilde{U_2} = \pi(U_2)$, alors $\tilde{U_1}, \tilde{U_1}$ sont des voisinages de $\tilde{g}$ et $\tilde{g'}$ respectivement et l'equation(2.9) donne

$$\tilde{U_1}\tilde{U_2} = \pi(U_1)\pi(U_2) = \pi(U_1U_2) \subset \pi(U) = \tilde{U};$$

c'est-à-dire la fonction $f_2(\tilde{g}, \tilde{g'}) = \tilde{g}\tilde{g'}$ est continue dans G, donc la condition (c) est satisfaite, alors G/H est un groupe topologique. □

Proposition 2.8. *Soit G un groupe topologique, H un sous-groupe de G, alors G/H est homogène.*

Démonstration. Soit $Ha, Hb \in G/H$, et considindérons l'application f de G/H dans lui même telle que $X \longmapsto Xa^{-1}b$, il est claire que f est bijective, on va montrer que f est continue.On a

$$Ha \in G/H \Rightarrow a^{-1}H^{-1} \in G/H,$$

car G/H est un groupe ,et $a^{-1}H^{-1}Hb \in G/H$, alors $a^{-1}b \in G/H$, et puisque G/H est un groupe topologique ,d'aprés la condition (c), f est continue donc f est un homéomorphisme , et on a $f(Ha) = Haa^{-1}b = Hb$, ce qui resulte que G/H est homogène. □

2.2.5 Homomorphisme et isomorphisme du groupes topologiques

Définition 2.31. ***(Homomorphisme continue)*** *Soit G et G′ deux groupes topologiques.L'application f du groupe topologique G dans G′ est appelé un homomorphisme continue de G dans G′ si :*

(a) f est une application continue de l'espace G dans l'espace G′ ;

(b) f est un homomorphisme de G dans G′.

si $f(G) = G$, f est appelé un homomorphisme continue de G dans G′.

Proposition 2.9. *Si H est un sous-groupe distingué fermé du groupe topologique G, alors l'application canonique π du groupe G dans le groupe quotient G/H est un homomorphisme continue ouverte de G dans G/H.*

Démonstration. Voir la page 145 de [9] □

Définition 2.32. ***(Isomorphisme continue)*** *L'application f du groupe G dans G' est dite un isomorphisme continue du groupe G dans G' si :*

(a') f est une application continue de l'espace G dans l'espace G' ;

(b') f est un isomorphisme de G dans G'.

si $f(G) = G'$, f est appelé un isomorphisme continue de G dans G'.

Définition 2.33. ***(Isomorphisme topologique)*** *L'application f du groupe G dans G' est dite isomorphisme topologique du groupe G dans G' si :*

(a") f est un homéomorphisme de l'espace G dans l'espace G' ;

(b") f est un isomorphisme du groupe G dans le groupe G'.

si $f(G) = G'$, f est dite un isomorphisme topologique du groupe G dans le groupe G'. Deux groupes topologique sont dits isomorphes topologiquement s'il existe un isomorphisme topologique de G dans G'.

Théorème 2.4.

1. *Si f est un homomorphisme continue du groupe G dans le groupe G' et $H = Kerf$, alors :*
   (a) *H est un sous-groupe distingué fermé de G.*
   (b) *$f = \psi\varphi$, tel que φ est l'homomorphisme canonique du groupe G dans le groupe G/H et ψ est l'isomorphisme continue du groupe G/H dans le groupe G'.*
2. *Si de plus, f est ouvert, alors ψ est un isomorphisme topologique du groupe G/H dans le groupe G', dans ce cas les groupes G/H et G' sont isomorphe topologiquement.*

Démonstration. Voir les pages 145 et 146 de [9]. □

Remarque 2.3. *Pour nombreux groupes topologiques, tous les homomorphismes continues sont ouverts.*

Exemple 2.4. *Le tore à 1 dimension est isomorphe à le groupe quotient $\mathbb{R}/\mathbb{N}$.*

Chapitre 3

Représentation du groupe

La représentation de groupe décrit un groupe en le faisant agir sur un espace vectoriel de maniére linéaire, donc le but de ce chapitre est d'etudier la représentation de groupe puis de groupes fini et ensuite de groupe topologique, et donne quelques propriétés fondamentales et des exemples.

3.1 Représentation algébrique d'un groupe

Soit G un groupe et soit X un espace vectoriel complexe non triviale.

Définition 3.1. *(**Représentation du groupe**) : On appelle une représentation du groupe G dans l'espace X, l'application T définie de G dans l'ensemble des opérateurs linéaires de X dans lui même satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. $T(e) = I_d$*, avec* I_d *est l'opérateur identité dans* X*;*
2. $T(g_1 g_2 = T(g_1)T(g_2)$*, pour tout* $g_1, g_2 \in G$*.*

L'espace X est appelé l'espace de représentation, et l'opérateur T(g) est appelé l'opérateur de représentation.

Propriété 3.1. *La représentation T est un homomorphisme du groupe G dans le groupe* G_X*(*G_X *: le groupe de tous les opérateurs linéaires de X sur X, voir l'exemple 4 de chapitre 1).*

Remarque 3.1. *La propriété précédente peut être considérée comme une autre définition d'une représentation.*

Exemple 3.1. *1. Pour tout groupe G, le morphisme $\rho : G \longrightarrow K$ qui envoie tout élément de G sur I_d est une représentation de degré 1, dite représentation triviale.*

2. Si G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$(le groupe des matrices inversibles carrées d'ordre n), l'application :

$$\begin{array}{rcl} \rho \ : \ G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ M & \longmapsto & \rho(M) = detM; \end{array}$$

est une représentation de G ;

3. Soit le groupe $\mathbb{R}$, pour tout nombre complexe k, la fonction $\alpha \longrightarrow e^{k\alpha}$ dans $\mathbb{R}$ satisfie les conditions 1 et 2, et donc définit une représentation de $\mathbb{R}$ de dimension 1 ;

4. La fonction $\phi \longrightarrow e^{in\phi}$ sur le groupe Γ^1 de rotation de circle (voir l'exemple 2.4 du section 1.1.3 de chapitre 1) est une représentation du groupe Γ^1 de dimension 1 pour tout entier n.

3.2 Cas particulier d'une représentation de dimension finie

Définition 3.2. ***(Représentation de dimension finie) :*** *Une représentation est dite de dimension finie si l'espace de représentation X est aussi de dimension finie.*

Définition 3.3. ***(Sous-espace invariant) :*** *Un sous-espace $Y \subset X$ est dit un sous-espace invariant de T si :*

$$T(g)y \in Y \quad \textit{pour tout} \quad g \in G \quad \textit{et} \quad y \in Y.$$

Définition 3.4. ***(Représentation irréductible) :*** *Une représentation est dite irréductible si $\{0\}$ est X sont les seuls sous-espaces invariants de T.*

Définition 3.5. ***(Représentation réductible) :*** *Une représentation est réductible si elle n'est pas irrédictible.*

<u>Définition</u> 3.6. ***(Deux représentations équivalentes) :*** *Supposons que S et T sont deux représentations d'un groupe G dans les espaces X et Y respectivement. on dit que S et T sont équivalentes ($S \sim T$) s'il existe un isomorphisme $A : X \to Y$ tel que :*

$$AT(g) = S(g)A \quad pourtout \quad g \in G.$$

<u>Lemme</u> 3.1. *(**Lemme de Schur**) Soit T et S deux représentations irréductibles du groupe G sur les espaces X et Y respectivement. Soit A un opérateur de X dans Y satisfaisant la condition :*

$$AT(g) = S(g)A \quad pour \quad tout \quad g \in G; \tag{3.1}$$

alors soit A un isomorphisme linéaire de X sur Y et donc T équivalent à S, ou bien A=0.

Démonstration. L'image $L = AX$de X sous A est un sous-espace de Y, et L est invariant sous $S(g)$, puisque l'equation 3.1 implique que $S(g)Ax = AT(g)x = Ax' \in AX = L$.Pour tout $g \in G$ et $x \in X$. Comme S est irréductible, donc L est l'espace nul ou tout l'espace Y. Dans le premier cas $A = 0$, et dans le deuxiéme cas, supposons que $L = Y$. c'est-à-dire A est surjective et on va montre qu'elle est injective. Donc soit $M = \{x : Ax = 0\}$; il suffit de montrer que $M = 0$, on observe que M est invariant sous T. En effet, si on a $x \in M$, alors $Ax = 0$. encore d'aprés l'equation 3.1 on a $ATg(x) = S(g)Ax = S(g)0 = 0$, si bien que $T(g)x \in M$. Puisque T est irréductible, alors on conclut que l'un ou l'autre $M = \{0\}$ ou $M = X$. mais le dexiéme cas est impossible, car il implique que $Y = L = AX = \{0\}$. □

<u>Lemme</u> 3.2. *Soit T une représentation irréductible de dimension finie du groupe G sur l'espace X, alors tout opérateur linéaire B, qui commute avec tous les opérateurs $T(g), g \in G$, présente sous la forme $B = \lambda I$, avec λ est un nombre complexe.*

Démonstration. Par l'hypothése on a B est commute avec tous les opérateurs T(g),c'est-à-dire :

$$BT(g) = T(g)B, \forall g \in G \tag{3.2}$$

Puisque B est un opérateur linéaire sur un espace de dimension finie, il admet au moins une valeur propre λ. Soit $A = B - \lambda I$, donc A est une application non-injective sur X.

D'après l'equation 3.2 il s'ensuit que $AT(g) = T(g)A$ pour tout $g \in G$, c'est-à-dire que A satisfait la condition 3.1 pour tout $S(g) = T(g), Y = X$. Puisque A est non-injective donc n'est pas un isomorphisme, le lemme de ***Schur*** implique que $A = 0$, ce qui veut dire que $B - \lambda I = 0$, et $B = \lambda I$. □

Corollaire 3.1. *Une représentation irréductble de dimension finie du groupe commutatif G est de dimension 1.*

Démonstration. Soit T une représentation irréductible du groupe commutatif G sur l'espace de dimension finie X, pour tout $g_0, g \in G$, on a :

$$T(g_0)T(g) = T(g_0 g) = T(g g_0) = T(g)T(g_0)$$

. Donc tous opérateur $T(g_0)$ commute avec tous les T(g) , le lemme 3.2 montre que $T(g_0) = \lambda(g_0)I$. Tous sous-espace de X est invariant sous tous operateur $T(g) = \lambda(g)I$. Si $dimX > 1$, cela contre dit l'irréductibilité de la représentation T. Donc T est de dimension 1. □

3.2.1 La somme directe des représentations

Soit G un groupe, soient $X_1, X_2, ..., X_n$ des espaces vectoriels, et soit $X = X_1 + ... + X_n$ leur somme direct .Tout vecteur x de X représente uniquement de la forme $x = x_1 + ... + x_n$, avec $x_k \in X_k$.

Soit l'opérateur linéaire T(g) sur X définie par

$$T(g)(x_1 + ... + x_n) = T(g)x_1 + ... + T_n(g)x_n \tag{3.3}$$

il est claire que $T(e) = 1 \quad avec 1 est l'opérateur identité, T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2)$.

Définition 3.7. ***(la somme directe des représentations) :*** *La correspondance $g \to T(g)$ est un représentation de G sur l'espace X appelée la somme directe du représentation $T_1, ..., T_n$ et notée par $T_1 + ... + T_n$.*

Définition 3.8. ***(Représentation completement réductible)*** *Une représentation est dite complétement réductible si elle est la somme directe d'un nombre fini des représentations irréductibles.*

<u>Définition</u> 3.9. ***(Représentation adjointe)*** *Soient X,Y des espaces vectoriels duals par rapport au forme $< x.y >$, et soient T,S des représentations du groupe G dans X et Y respectivement. La représentation S est dite la représentation adjointe de T par rapport au $< x, y >$ si*

$$< T(g)x, S(g)y >=< x, y >, \quad pour \quad tout \quad g \in G, x \in X, y \in Y \tag{3.4}$$

.

<u>Proposition</u> 3.1. *La condition 3.4 équivalent à la condition suivant : $< T(g^{-1})x, y >=< x, S(g)y >$, pour tout $g \in G, x \in X, y \in Y$.*

Démonstration. Voir la page 31 de [9] □

<u>Définition</u> 3.10. ***(Représentation unitaire) :*** *Soit X un espace pré-Hilbertieme. Alors on dit que la représentation T est unitaire si et seulement si :*

$$< T(g)x, T(g)y >=< x, y >, \quad pourtout \quad g \in G \quad et \quad x, y \in X \tag{3.5}$$

<u>Proposition</u> 3.2. *La condition 3.5 équivalent à la condition suivante : $< T(g^{-1}x, y >=< x, T(g)y >$, pour tout $x, y \in X$.*

Démonstration. Voir la page 46 de [9] □

3.3 Représentation d'un groupe fini

3.3.1 La moyenne invariante d'un groupe fini

La principale methode pour etudier la représentation des groupes finie est l'utilisation de la moyenne invariante sur G.

<u>Définition</u> 3.11. ***(Moyenne invariante)*** *Soit G un groupe d'ordre N, et soit $g_1 = e, \cdots, g_N$ leur éléments.La moyenne arithmetique de la valeur de la fonction numérique f* *sur le groupe G d'ordre N est appelée la moyenne invariante de la fonction f sur G,noté $M(f)$ ou bien $M(f(g))$. donc on a :*

$$M(f) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(g_k)$$

ou bien

$$M(f) = \frac{1}{N}\sum_{g} f(g).$$

Propriété 3.2. *La moyenne invariante M(f) satisfait les propriétés suivantes :*

1. *M(1)=1 avec 1 est la fonction $f \equiv 1$ sur G ;*
2. $M(\overline{f}) = \overline{M(f)}$
3. $M(f) \geqslant 0, si f \geqslant 0 \qquad et M(f) > 0 \qquad f \geqslant 0 \qquad f \neq 0;$
4. $M(f_1 + f_2) = M(f_1) + M(f_2), M(\alpha f) = \alpha M(f)$, *avec α un nombre ;*
5. $M(f_h) = M(f)$ *et* $M(f^h) = M(f)$ *; avec* $f_h(g) = f(gh)$ *et*$f^h(g) = f(hg)$;
6. $M(f(g^{-1}) = M(f(g))$.

Démonstration. Voir la page 61 de [9] □

Soit $x = x(g)$ une fonction vectorielle sur le groupe $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_N\}$ avec des valeurs dans un espace vectoriel X.Si X est de dimension fini, alors $(x)_j$ indique la $j^{éme}$ coordonée du vecteur x par raport à une base fixe de X.

Définition 3.12. *Le vecteur*

$$M(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x(g_k)$$

est appelé la moynne invariante de la fonction vectorielle x sur le groupe G.Noté aussi M(x(g)).

Propriété 3.3. *La moyenne invariante $M(x)$ satisfait les propriétés suivantes :*

1. *M(c)=c avec le c à la gauche est la fonction $x(g) \equiv c$ et le c à droite est un vecteur sur X ;*
2. $M(x_1 + x_2) = M(x_1) + M(x_2), M(\alpha x) = \alpha M(x)$, *avec α un nombre ;*
3. $M(Ax) = AM(x)$, *avec A est un opérateur linéaire de X sur X ;*

4. *$M(x_h) = M(x)$ et $M(x^h) = M(x)$, avec $x_h(g) = x(gh)$ et $x^h(g) = x(hg)$;*

Démonstration. Voir la page 61 de [9] □

Notation : Soient X,Y,Z des espaces vectoriels, L(X,Y)l'ensemble de tous les opérateurs linéaires de X sur Y. Si X, Y sont de dimensions finies, $e_1, \cdots, e_n$, et $f_1, \cdots, f_n$ sont des bases sur X, Y respectivement, et soit $A \in L(X,Y)$, A_{jk} est la matrice des éléments de l'opérateur A.Finalement soit A=A(g) une fonction d'opérateur sur $G = (g_1, \cdots, g_N)$.

Définition 3.13. *L'opérateur*

$$M(A) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} A(g_k)$$

est appelé la moyenne invariante de la fonction d'opérateur A sur le groupe G, notée aussi M(A(g)).

Propriété 3.4. *La moyenne invariante M(A)de la fonction d'opérateur A(g) satisfait les propriétés suivantes :*

1. *M(A)=A ;*
2. *$M(A_1 + A_2) = M(A_1) + M(A_2), M(\alpha A) = \alpha M(A)$, avec α un nombre ;*
3. *$M(BA) = BM(A)$,et $M(AC) = M(A)C$ avec $B \in L(Y,Z)$ et $C \in L(Z,Y)$;*
4. *$M(A_h) = M(A)$ et $M(A^h) = M(A)$, avec $A_h(g) = A(gh)$ et $A^h(g) = A(hg)$;*
5. *$tr(M(A)) = M(tr(A))$, si $A \in L(X)$ et X de dimension fini ;*
6. *$(M(A))_{jk} = (M(A)_{jk})$.*

Démonstration. Voir la page 62 de [9] □

3.3.2 Réductibilité complete des représentations d'un groupe fini

Théorème 3.1. *Toute représentation d'un groupe fini équivalente à une représentation unitaire.*

Démonstration. Soit T une représentation du groupe fini sur un espace de dimension fini X, et soit le produit scalaire sur X, $< x, y >_1 = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \overline{\eta}_j$ avec ξ_j, η_j sont des coordonnées des vecteurs $x, y \in X$, et $n = dimX$. supposons maintenant la forme $< x, y >$ sur X, avec

$$f(g) =< T(g)x, T(g)y >_1 . \tag{3.6}$$

$$< x, y >= M(f) = M(< T(g)x, T(g)y >_1). \tag{3.7}$$

et on va montrer que la forme $< x, y >$ est un produit scalaire sur X : premiérement on va montrer que $< x + \lambda y, z >=< x, z > +\lambda < y, z >$, donc par la linéarité de $T(g)$ et d'après l'équation 3.7

$$< x+\lambda y, z >= M(< T(g)(x+\lambda y), T(g)z >_1) = M(< T(g)x+\lambda T(g)y, T(g)z >_1); \tag{3.8}$$

de plus d'après la bilinèarité de la forme $< x, y >_1$ on a :

$$M(< T(g)x+\lambda T(g)y, T(g)z >_1) = M(< T(g)x, T(g)z >_1 +\lambda < T(g)y, T(g)z >_1). \tag{3.9}$$

encore 1 ,4 et 5 du propriétés 3.2 de la moyenne invariante donnent :

$$\begin{aligned} M(< T(g)x, T(g)z >_1 +\lambda < T(g)y, T(g)z >_1) &= M(< T(g)x, T(g)z >_1) \\ &+ \lambda M(< T(g)y, T(g)z >_1) =< x, z > +\lambda < y, z > .. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Par consèquent les équations 3.8,3.9 et 3.10 montre la linéarité de $< x, y >$. La mềme maniére pour $< x, \lambda y + z >= \lambda < x, y > + < y, z >$ .Donc $< x, y >$ est bilinèaie. Ensuite $< x, y >$ est hermitienne, en effet,Puisque $< x, y >_1$ est hermitienne on a

$$< y, x >= M(< T(g)y, T(g)x >_1) = M(\overline{< T(g)x, T(g)y >_1})$$

ensuite d'après 2 de la propriété 3.2

$$M(\overline{< T(g)x, T(g)y >_1}) = \overline{M(< T(g)x, T(g)y >_1} = \overline{< x, y >}.$$

D'où le résultat. Il reste de montrer que $M(< T(g)x, T(g)x >_1) \geq 0$. Puisque $< x, y >_1$ est un produit scalaire et d'aprés 3 de la propriété 3.2 on a

$$< x, x >= M(< T(g)x, T(g)x >_1) \geq 0.$$

Si on pose $g = e$,et si $< T(g)x, T(g)x >_1 = 0$ on obtient

$$< T(e)x, T(e)x >_1 = < x, x >_1 = 0;$$

par consèquent $< x, x >= 0$ si et seulement si $x = 0$. Donc $< x, y >$ est un produit scalaire sur X.

Il reste de montrer que $< T(h)x, T(h)y >= < x, y >$ pour tout $h \in G$. Par l'équation 3.7 on a

$$< T(h)x, T(h)y >= M(< T(g)T(h)x, T(g)T(h)y >_1)$$

et par 5 de la propriété 3.2

$$\begin{aligned} M(< T(g)T(h)x, T(g)T(h)y >_1) &= M(< T(gh)x, T(gh)y >_1) = M(f_h) \\ &= M(f) = M(< T(g)x, T(g)y >_1) = < x, y > . \end{aligned}$$

Finallement T est une représentation unitaire par rapport à $< x, y >$. □

Théorème 3.2. *Tout représentation du groupe fini est réductible complétement.*

3.3.3 La représentation régulière (L'espace $L^2(G)$)

Soit $L^2(G)$ l'espace des fonction numérique $f(g)$ sur le groupe fini $G = \{g_1, \cdots, g_N\}$ de dimension N.

Soit le produit scalaire $< f_1, f_2 >$ sur $L^2(G)$avec :

$$< f_1, f_2 >= M(f_1, \overline{f_2}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f_1(g_k)\overline{f_2(g_k)}.$$

Remarque 3.2. *$L^2(G)$ est un espace euclidienne de dimension N.*

Soit l'opérateur linéaire $T(h)$,

$$T(h)f = f_h$$

c'est-à-dire

$$T(h)f(g) = f(gh), \forall h \in G.$$

De plus on a

$$T(h_1)T(h_2)f(g) = T(h_1)(T(h_2)f(g)) = T(h_1)(f(gh_2)) = f((gh_1)h_2) = f(g(h_1h_2)) = T(h_1h_2)f(g);$$

et on a $T(e)f(g) = f(ge) = f(g)$ donc la correspendance $h \longrightarrow T(h)$ est une représentation du groupe G. Posons $f = f_1\overline{f_2}$, et appliquons 6 de la propriété 3.2 on obtient que

$$< T(h)f_1, T(h)f_2 >= M(f_{1h}\overline{f_{2h}}) = M(f_h) = M(f) = M(f_1\overline{f_2}) =< f_1, f_2 >;$$

donc T est une représentation unitaire.

Définition 3.14. ***(Représentation régulière à droite)*** *La représentation unitaire T définie ci-dessus sur $L^2(G)$ est appellée la représentation régulière à droite du groupe G.*

Définition 3.15. ***(Représentation régulière à gauche)*** *La représentation unitaire $\overline{T}$ définie sur $L^2(G)$ par la formule suivante :*

$$\overline{T}_h f(g) = f(h^{-1}g)$$

est appellée la représentation régulière à gauche sur G.

Proposition 3.3. *Les représentations régulière à gauche et à droite sont unitairement équivalentes.*

Démonstration. Soit $f \in L^2(G)$, f' la fonction définie par ,

$$f'(g) = f(g^{-1}),$$

et soit l'opérateur linéaire $W : f \longrightarrow f'$, on a $W^2 = 1$, donc W applique $L^2(G)$ sur $L^2(G)$, donc est un isomorphisme. De plus ,

$$< Wf, Wf_1 >=< f', f_1' >= M(f(g^{-1}), \overline{f_1(g^{-1})});$$

et d'après 6 du propriété 3.2 on obtient :

$$< Wf, Wf_1 >= M(f(g^{-1}), \overline{f_1(g^{-1})}) = M(f(g), \overline{f_1(g)}) =< f, f_1 >;$$

alors W est unitaire .D'une côté on a

$$W(T(h))(f)(g) = T(h)f(g^{-1}) = f(g^{-1}h) \tag{3.11}$$

et d'autre côté

$$(\overline{T}(h)W)(f)(g) = Wf(h^{-1}g) = f((h^{-1}g)^{-1}g)^{-1}) = f(g^{-1}(h^{-1})^{-1}) = f(g^{-1}h). \tag{3.12}$$

Par conséquent d'après les équations 3.11 et 3.12 on observe que $WT(h) = \overline{T}(h)W$, donc T et $\overline{T}$ sont unitairements équivalents. $\square$

3.3.4 Relation d'orthogonalité

<u>Théorème</u> 3.3. *Soient T_1 et T_2 deux représentations irréductibles du groupe fini G, et soit $t^1_{jk}(g), t^2_{jk}(g)$leurs éléments matriciels. Alors on a*

$$< t^1_{jk}(g), t^2_{pq}(g) >= 0 \qquad si \quad T_1 \quad et \quad T_2 \quad sont \quad non-\text{équivalents}$$

$$< t^1_{jk}(g), t^2_{pq}(g) >= \begin{cases} 0 & si \quad j \neq p \quad ou \quad k \neq q; \\ \frac{1}{n_1} & si \quad j = p \qquad et \quad k = q. \end{cases}$$

avec n_1 est la dimension de la représentation T_1, et $< .,. >$ est la produit scalaire sur $L^2(G)$.

Démonstration. soient X et Y deux espaces du représentations T_1, et T_2, et soit $B \in L(X,Y)$. Posons $A(g) = T_1(g)BT_2(g^{-1})$ et

$$C = M(A(g)) = M(T_1(g)BT_2(g^{-1}); \tag{3.13}$$

puisque

$$T_1(g), B, T_2(g^{-1})$$

sont des opérateurs linéaires, donc $A(g) \in L(Y,X)$, et alors d'aprés 2 du propriété 3.4 $M(A(g))$ est un opérateur linéaire donc $C \in L(X,Y)$.

De plus par 3 du propriété 3.4 on a

$$T_1(h)C = T_1(h)M(A(g)) = M(T_1(h)A(g));$$

et puisque $T_2(h^{-1})T_2(h) = T_2(h^{-1}h) = T_2(e) = 1$ donc par cette propriété et5 du propriété 3.4 on obtient

$$T_1(h)C == M(T_1(h)A(g)T_2(h^{-1})T_2(h)) = M(T_1(h)T_1(g)BT_2(g^{-1})T_2(h^{-1}))T_2(h);$$

ensuite $T_2(g^{-1})T_2(h^{-1}) = T_2(g^{-1}h^{-1}) = T_2((hg)^{-1})$, alors on obtient

$$T_1(h)C = M(T_1(hg)BT_2((hg)^{-1}))T_2(h) = M(A(hg))T_2(h) = M(A(g))T_2(h) = CT_2(h);$$

par consèquent ,

$$T_1(h)C = CT_2(h). \tag{3.14}$$

Supposons que T_1 et T_2 non-équivalente, on applique le lemme de ***Schur*** sur l'équation 3.14, on conclut que C=0 car T_1, T_2 non-équivalent, c'est-à-dire qu'on a :

$$M(T_1(g)BT_2(g^{-1})) = 0 \quad pour \quad tout \quad B \in L(X,Y). \tag{3.15}$$

Ecrivons l'équation 3.15 en terme des éléments matricielles, et utilisant 6 du propriété 3.4 on conclut que

$$M(\sum_{\mu=1}^{n_1}\sum_{\nu=1}^{n_2} t^1_{j\mu}(g)b_{\mu\nu}t_{\nu p}(g^{-1}) = 0; \quad avecj = 1,\cdots,n_1; \quad p = 1,\cdots,n_2. \tag{3.16}$$

pour tout $b_{\mu\nu}$, on choisit,

$$b_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & pour \quad \mu = k \quad et \quad \nu = q; \\ 0 & pour \quad les \quad autres \quad cas. \end{cases}$$

alors l'équation 3.16 devient,

$$M(t^1_{jk}(g)t^2_{qp}(g^{-1})) = 0; \tag{3.17}$$

on a $t^2_{qp}(g^{-1})\overline{t^2_{qp}(g^{-1})}^t = 1$ donc ,

$$t^2_{qp}(g^{-1})\overline{t^2_{pq}(g^{-1})} = 1 \Longrightarrow t^2_{qp}(g^{-1}) = \overline{t^2_{pq}(g)};$$

donc 3.17 devient

$$M(t^1_{jk}(g)\overline{t^2_{pq}(g)}) = 0$$

d'autre part on a $< t^1_{jk}(g), t^2_{pq}(g) >= M(t^1_{jk}(g)\overline{t^2_{pq}(g)}) = 0$, cette relation vient la première relation du théorème 3.3. Si $T_1 = T_2, Y = X$, on a $T_1(h)C = CT_1(h)$ c'est-à-dire que C commute avec tout les opérateurs $T_1(g)$. Le lemme 3.2 montre que $C = \lambda I$, avec λ une nombre quelconque .

On va trouver λ ; on a

$$trC = trM(T_1(g)BT_1(g^{-1})) = trM(T_1(g)BT_1(g)^{-1}), \tag{3.18}$$

d'après 5 du propriété 3.4 , et 4 du propriété 3.2 ,l'équation 3.18 devient ;

$trC = trM(T_1(g)BT_1(g)^{-1}) = M(tr(T_1(g)BT_1(g)^{-1})) = M(tr(BT_1(g)T_1(g)^{-1})) = M(trB).$

Puisque $trB \in L(Y, X)$ alors 1 du propriété 3.4 donne :

$$trC = M(trB) = trB.$$

D'autre part on a $trC = tr\lambda I = \lambda n_1$, et alors

$$\lambda = \frac{1}{n_1}trB$$

on déduire que

$$C = (\frac{1}{n_1}trB)I \tag{3.19}$$

combinaisons l'équation 3.13 avec l'équation 3.19 pour $T_2 = T_1$ on obtient ,

$$M(T_1(g)BT_1(g^{-1})) = (\frac{1}{n_1}trB)I \tag{3.20}$$

pour tout $B \in L(X)$.

Ecrivons maintenant l'équation 3.20 en terme des éléments matricielles on obtient

$$M(\sum_{\mu=1}^{n_1}\sum_{\nu=1}^{n_2} t^1_{j\mu}(g)b_{\mu\nu}t_{\nu p}(g^{-1}) = \begin{cases} \frac{1}{n_1}\sum_{\mu=1}^{n_1} b_{\mu\mu} & pour \quad j = p; \\ 0 & pour \quad j \neq p. \end{cases}$$

on choisit

$$b_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & pour \quad \mu = k \quad et \quad \nu = q; \\ 0 & dans \quad les \quad autres \quad cas. \end{cases}$$

alors on a

$$M(t^1_{jk}(g)t^1_{qp}(g^{-1})) = \begin{cases} \frac{1}{n_1} & pour \quad j = p \quad et \quad k = q; \\ 0 & pour \quad j \neq p \quad ou \quad k = q.. \end{cases}$$

Puisque $t^1_{qp}(g^{-1}) = \overline{t^1_{pq}(g)}$, donc on obtient la deuxième relation du théorème 3.3. $\square$

Remarque 3.3. *Les relations du théoréme 3.3 sont appellées les relations d'orthogonalité pour les représentations unitaires irréductibles du groupe fini.*

Corollaire 3.2. *Le nombre de couples des représentations irréductibles non-équivalentes du groupe fini est fini et ne dépasse pas l'ordre du groupe.*

3.4 Représentation de dimension finie d'un groupe topologique

3.4.1 Les fonctions continues sur un groupe topologique

Définition 3.16. *Soit $f = f(g)$ une fonction à valeur complexe définie sur un group topologique G.*
On dit que la fonction f est continue sur le groupe G si elle est continue sur l'espace G.

Définition 3.17. *Soit X un espace vectoriel complexe de dimension fini n, et soit $e_1, \cdots, e_n$ une base finie sur X, soit f une fonction à valeur vectorielle sur X définie sur le groupe topologique G, et soit $(f_1(g), \cdots, f_n(g))$ les composants du point $f(g)$ sur la base $e_1, \cdots, e_n$.*
On dit que la fonction f est continue sur le groupe G si les fonctions à valeurs complexes $f_1(g), \cdots, f_n(g)$ sont continues sur le groupe.

Définition 3.18. *Soit $A = A(g)$ une fonction valorisée par un opérateur sur G dont les valeurs sont des opérateurs linéaires sur X.*
On dit que la fonction A est continue sur G si la fonction vectorielle $A(g)x$ est continue sur G pour tout $x \in X$.

3.4.2 Représentation de dimension finie d'un groupe topologique

Définition 3.19. ***(Représentation de dimension finie d'un groupe topologique)***
Soit G un groupe topologique, et soit X un espace vectoriel complexe de dimension fini différent de $\{0\}$.
On appelle représentation du groupe toplogique G sur X tout application qui porte tout $g \in G$ dans un opérateur linéaire $T(g)$ sur X de telle manière que :

1. *$T(e) = I_d$, avec I_d est l'opérateur identité sur X;*

2. *$T(g_1g_2) = T(g_1)T(g_2)$, pour tout $g_1, g_2 \in G$;*

3. *La fonction valorisée par un opérateur $T(g)$ est continue sur G.*

Proposition 3.4. *Tout les représentations de dimension 1 ,*

$$g_1 \times g_2 \times \cdots \times g_n \longrightarrow f(g_1, g_2, \cdots, g_n), \quad g_1 \in G_1, g_2 \in G_2, \cdots, g_n \in G_n \tag{3.21}$$

du produit direct $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ du groupes topologiques $G_1, G_2, \cdots, G_n$ sont décrits par la formule

$$f(g_1, g_2, \cdots, g_n) = f_1(g_1)f_2(g_2)\cdots f_n(g_n) \tag{3.22}$$

lorseque

$$g_j \longrightarrow f_j(g^j), \quad g_j \in G_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n, \tag{3.23}$$

sont des représentations de dimension 1 du groupe $G_1, G_2, \cdots, G_n$.

Proposition 3.5. *Les représentation indiqué dans 3.21 sont unitaires si et seulement si les représentation indiqué dans 3.23 sont unitaires.*

3.5 Caractérisation des représentation de dimension 1 des groupes topologiques commutatifs simples

3.5.1 Exemples et caractéristiques

(1) Représentation de dimension 1 du groupe $\mathbb{R}^1$: Chaque représentation de dimension 1 du groupe $\mathbb{R}^1$ peut être décrit par une fonction de valeur complexe $f(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}$, qui satisfait la condition

$$f(0) = 1, f(\alpha_1 + \alpha_2) = f(\alpha_1)f(\alpha_2) \tag{3.24}$$

cette fonction est continue.

Propriété 3.5. *1. La fonction $f(\alpha)$ est différentiable et son dérivé est aussi continue.*

2. *La fonction $f(\alpha)$ satisfie l'équation différentielle*

$$\frac{df}{d\alpha} = kf \tag{3.25}$$

avec k est un constant.

3. *Tout représentation de dimension 1 :$\alpha \longrightarrow f(\alpha)$ du groupe $\mathbb{R}^1$ et écrit sous-la forme :$f(\alpha) = e^{k\alpha}$.*

4. *Tout représentation unitaire de dimension 1 :$\alpha \longrightarrow f(\alpha)$ du groupe $\mathbb{R}^1$ et écrit sous-la forme :$f(\alpha) = e^{i\tau\alpha}, \tau \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Voir les pages de 152 à 154 de [9] □

(2) Représentation de dimension 1 du groupe $\mathbb{R}^n$: — Tout les représentation de dimension 1 du groupe $\mathbb{R}^n$:$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \longrightarrow f(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ sont décrit par la formule

$$f(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = e^{k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n} \qquad k_i \in \mathbb{C}, i = 1, \cdots, n \tag{3.26}$$

— Une représentation de dimension 1 du groupe $\mathbb{R}^n$ est unitaire si et seulement si

$$f(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = e^{i(\tau_1\alpha_1 + \cdots + \tau_n\alpha_n)}, \qquad \tau_1, \cdots, \tau_n \in \mathbb{R}^1. \tag{3.27}$$

(3) Représentation de dimension 1 du groupe $\mathbb{C}^n$: Soit l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \Longrightarrow & \mathbb{R}^{2n} \\ (z_1, z_2, \cdots, z_n) & \longmapsto & (\alpha_1, \beta 1, \cdots, \alpha_n, \beta_n), \qquad avec z_1 = \alpha_1 + i\beta_1; \end{array}$$

un isomorphisme du groupe $\mathbb{C}^n$ sur $\mathbb{R}^{2n}$.
La représentation $z_1, z_2, \cdots, z_n) \longmapsto \varphi(z_1, z_2, \cdots, z_n))$ de dimension 1 du groupe $\mathbb{C}^n$ définit une represntation du groupe $\mathbb{R}^{2n}$

$$f(\alpha_1, \beta 1, \cdots, \alpha_n, \beta_{n)}) = \varphi(\alpha_1 + i\beta_1, \cdots, \alpha_n + i\beta_n); \tag{3.28}$$

et d'après l'équation 3.26 on obtient

$$f(\alpha_1, \beta 1, \cdots, \alpha_n, \beta_{n)}) = e^{k_1\alpha_1 + i_1\beta_1 + \cdots + k_n\alpha_n + i_n\beta_n}. \tag{3.29}$$

Conséquence : Tout représentation du groupe $\mathbb{C}^n$ est de la forme suivante :

$$\varphi(z_1, z_2, \cdots, z_n) = e^{p_1 z_1 + q_1\overline{z_1} + \cdots + p_n z_n + q_n\overline{z_n}}, \tag{3.30}$$

avec $p_j = \frac{1}{2}(k_j - il_j), \quad q_j = \frac{1}{2}(k_j + il_j)$.
En effet, puisque $z_j = \alpha_j + i\beta_j$, donc on a

$$\alpha_j = \frac{z_j + \overline{z_j}}{2}, \quad et \quad \alpha_j = \frac{z_j - \overline{z_j}}{2i},$$

et donc l'équation 3.29 devient

$$\begin{aligned} e^{k_1\alpha_1+i_1\beta_1+\cdots+k_n\alpha_n+i_n\beta_n} &= e^{k_1\frac{z_1+\overline{z_1}}{2}+i_1\frac{z_1+\overline{z_1}}{2i}+\cdots+k_n\frac{z_n+\overline{z_n}}{2}+i_n\frac{z_n+\overline{z_n}}{2i}} \\ &= e^{z_1(\frac{k_1}{2}+\frac{i_1}{2i})+\overline{z_1}(\frac{k_1}{2}-\frac{i_1}{2i})+\cdots+z_n(\frac{k_n}{2}+\frac{i_n}{2i})+\overline{z_n}(\frac{k_n}{2}-\frac{i_n}{2i})} \\ &= e^{\frac{1}{2}z_1(k_1-ii_1)+\frac{1}{2}\overline{z_1}(k_1+ii_1)+\cdots+\frac{1}{2}z_n(k_n-ii_n)+\frac{1}{2}\overline{z_n}(k_n+ii_n)}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Si en prend $p_j = k_j + ii_j$ et $q_j = k_j - ii_j$ on obtient l'équation 3.30.

<u>Définition</u> 3.20. *Un représentation de dimension 1 du groupe $\mathbb{C}^n$ est unitaire si et seulement si les nombres k_j et i_j sont imaginaires pures.*

<u>Propriété</u> 3.6. *Tout les représentations unitaires de dimension 1 du groupe $\mathbb{C}^n$ sont de la forme*

$$\varphi(z_1, z_2, \cdots, z_n) = e^{p_1z_1-\overline{p_1z_1}+\cdots+p_nz_n-\overline{p_nz_n}}.$$

En effet, si on pose $k_j = iy_j$ et $ij = iy'_j$, alors l'équation 3.30 devient

$$\begin{aligned} \varphi(z_1, z_2, \cdots, z_n) &= e^{\frac{1}{2}z_1(iy_1+y'_1)+\frac{1}{2}\overline{z_1}(iy_1-y'_1)+\cdots+\frac{1}{2}z_n(iy_n+y'_n)+\frac{1}{2}\overline{z_n}(iy_n-y'_n)} \\ &= e^{\frac{1}{2}z_1(iy_1+y'_1)+\frac{1}{2}\overline{z_1}(y'_1-iy_1)+\cdots+\frac{1}{2}z_n(iy_n+y'_n)+\frac{1}{2}\overline{z_n}(y'_n-iy_n)} \\ &= e^{p_1z_1-\overline{p_1z_1}+\cdots+p_nz_n-\overline{p_nz_n}}. \end{aligned} \tag{3.32}$$

D'où le résultat.

(4) **Représentation de dimension 1 du groupe Γ^1 :** Chaque rotation d'un cercle est décrit par un angle α de la rotation, lorsque la relation par α et par $\alpha + 2\pi$ sont les même rotation.Donc la représentation $\alpha \longrightarrow f(\alpha)$ du groupe Γ^1 satisfait la condition d'exemple (1) est aussi la condition suivant

$$f(\alpha + 2\pi) = f(\alpha). \tag{3.33}$$

Donc d'après le point 3 du propriété 3.5

$$f(\alpha) = e^{k\alpha}.$$

<u>Conséquence :</u> Toutes les représentations de dimension 1 du groupe Γ^1 sont unitaires.
En effet, puisque $f(\alpha) = e^{k\alpha}$ et d'après le point 3 du propriété 3.5 alors

$$f(\alpha + 2\pi) = e^{k(\alpha+2\pi} = e^{k\alpha+2k\pi},$$

pour trouver que $e^{k\alpha+2k\pi} = e^{k\alpha}$ il faut que $k = im$ avec m un entier, donc

$$f(\alpha) = e^{im\alpha}, \tag{3.34}$$

et par le point 4 du propriété 3.5 la représentation est unitaire.

(5) Représentation de dimension 1 du groupe $\mathcal{T}^1$: Le tore $\mathcal{T}^1$ est isomorphe à le groupe Γ^1 ,et l'application $\alpha \longrightarrow \beta = (\frac{1}{2\pi})\alpha$ est un isomorphisme entre $\mathcal{T}^1$ et Γ^1 .Donc une représentation de dimension 1 : $\beta \longrightarrow \varphi(\beta)$ du groupe $\mathcal{T}^1$ définit une représentation de dimension 1 : $\alpha \longrightarrow f(\alpha)$ du groupe Γ^1, avec $f(\alpha) = \varphi(\frac{1}{2\pi}\alpha)$, et on a d'après l'équation 3.34

$$f(\alpha) = e^{im\alpha}.$$

Donc toutes les représentations de dimension 1, $\beta \longrightarrow \varphi(\beta)$ du tore $\mathcal{T}^1$ sont de la forme

$$\varphi(\beta) = \varphi(\frac{1}{2\pi}\alpha) = e^{im\alpha} = e^{im2\pi\beta}.$$

Propriété 3.7. *Toutes les représentations de dimension 1 du tore $\mathcal{T}^1$ sont unitaires.*

(6) Représentation de dimension 1 du groupe $\mathcal{T}^n$: Le tore $\mathcal{T}^n$ est le produit direct des n copies des groupes $\mathcal{T}^1$. D'après l'exemple précédent, on obtient que toutes les représentations de dimension 1 du groupe $\mathcal{T}^n$ sont de la forme

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = \varphi(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = \varphi(\beta_1)\varphi(\beta_2)\cdots\varphi(\beta_n) = e^{2\pi i(m_1\beta_1 + \cdots + m_n\beta_n)},$$

avec les $m_1, \cdots, m_n$ sont des entiers.
Consèquence : Toutes ces représentations sont unitaires.

3.6 Representation du groupe toplogique

Définition 3.21. ***(Représentation du groupe toplogique)*** *Soit G un groupe topologique, et soit X un espace vectoriel topologique.On dit que l'application $T : g \longrightarrow T(g)$ est une représentation du groupe topologique G sur X, si on a un opérateurs linéaire continue $T(g)$ portant X dans lui-mêm pour laquelle les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *T(e)=I avec I est l'opérateur identité sur X ;*
2. *$T(g_1g_2) = T(g_1)T(g_2)$, pour tout $g_1, g_2 \in G$;*
3. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \rho & : & X \times G & \rightarrow & X \\ & & (x,g) & \mapsto & T(g)x \end{array};$$

soit continue.

L'espace X est dite l'espace de représentation T, et l'opérateur $T(g)$ est appellé l'opérateur de représentation T.

Définition 3.22. ***(Représentations équivalentes)*** *Deux représentations T_1 et T_2 du groupe topologique G sur les espaces X_1 et X_2 respectivement sont équivalentes s'il existe une application linéaire bijective S de l'espace X_1 sur X_2 satisfait les propriétés suivantes :*

1. *S est un homéomorphisme de l'espace vectoriel topologique X_1 sur l'espace vectoriel topologique X_2 ;*
2. *pour tout $g \in G$*

$$ST_1(g) = T_2(g)S.$$

Définition 3.23. ***(Représentation irréductible)*** *Soit T un représentation du groupe topologique G dans l'espace vectoriel topologique X.On dit que T est une représentation irréductible s'il n'y pas aucune de sous-espace fermé dans X distinct de $\{0\}$ et X, qu'est invariant sous tous les opérateurs T(g)pour tout $g \in G$.*

Définition 3.24. ***(Opérateur unitaire)*** *Soit E un espace de Hilbert complexe. Si $T \in \mathcal{L}(E, E)$, l'adjoint T^* de est défini par*

$$\forall x, y \in E, (Tx \backslash y) = (x \backslash T^* y),$$

alors on dit qu'un élément $T \in GL(E)$ est un opérateur unitaire si $TT^* = T^*T = Id_E$.

Définition 3.25. ***(Représentation unitaire)*** *Une représentation T de G dans X est dite unitaire si X est un espace de Hilbert, et toute opérateur $T(g)$ de T est unitaire.*

Proposition 3.6. *Soit T une représentation algébrique du groupe topologique G sur l'espace X. Si la fonction vectorielle $T(g)x$ est continue sur g pour tout $x \in X$, alors T est continue sur g et sur x.*

Démonstration. Voir la page 163 de [9]. □

Exemple 3.2. *1. Soit SO(n) le groupe spéciale orthogonal, et soit X est le polynômes à n coefficients complexes homogènes de degré N et*

$$(T(g)P)(x) = P(g^{-1}x).$$

Munissons X du produit hermitien

$$(P,Q) = \int_{s^{n-1}} P(x)\overline{Q(x)}dx.$$

Alors T est une représentation du groupe SO(n) sur X.

2. ***(La représentation reguliére du groupe** Γ^1 **)** : Soit $L^2(\Gamma^1)$ l'ensemble de toutes les fonctions **Lebesgues** mesurables $f(\gamma)$définie presque partout sur $\gamma \in [-\pi,\pi]$et satisfait la condition*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\gamma)|^2 d\gamma < \infty.$$

Soit $f_1, f_2 \in L^2(\Gamma^1)$,et supposons le produit scalaire

$$< f_1, f_2 >= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\gamma)\overline{f_2(\gamma)}d\gamma.$$

*Alors $L^2(\Gamma^1)$ est un espace de **Hilbert**. Et soit maintenant $X = L^2(\Gamma^1)$ et $T(\gamma)$ un opérateur linéaire sur $L^2(\Gamma^1)$ définie comme suite*

$$T(\gamma_0)f(\gamma) = f(\gamma+\gamma_0).$$

alors la correspendance $T : \gamma \longrightarrow T(\gamma)$ est une représentation unitaire.En effet,

(a) $T(0)f(\gamma) = f(\gamma)$. c'est-à-dire $T(0) = I$;

(b) $T(\gamma_1)T(\gamma_2)f(\gamma) = T(\gamma_1)f(\gamma+\gamma_2) = f(\gamma+\gamma_1+\gamma_2) = T(\gamma_1+\gamma_2)f(\gamma)$. c'est-à-dire $T(\gamma_1+\gamma_2) = T(\gamma_1)T(\gamma_2)$, donc T est une représentation algebrique du groupe Γ^1 ;

(c) $< T(\gamma_0)f_1, T(\gamma_0)f_2 >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(\gamma+\gamma_0)\overline{f_2(\gamma+\gamma_0)}d\gamma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(\gamma)\overline{f_2(\gamma)}d\gamma$. don T est unitaire.

Puisque l'application

$$\begin{array}{cccc} \rho & : & \Gamma^1 & \to & L^2(\gamma) \\ & & \gamma \mapsto T(\gamma)f & & \end{array};$$

est continue, et d'aprés la proposition 3.6 donc T est continue.

On conclut que T est une représentation unitaire du groupe topologique Γ^1 sur l'espace $L^2(\Gamma^1)$ appellé représentation reguliére du groupe Γ^1.

Conclusion

Dans ce travail nous avons présenter les groupes topologiques avec quelques de ses propriétés et on expose leur représentations, nous sommes intéressés à plusieurs notions essentielles de topologie dans le cas particulier de groupes topologiques telle que la continuité, la séparation et l'homogénéité,$\cdots$, etc.

Bibliographie

[1] S.Axler, K.A.Ribet .*Groups and Symmetries : From finite groups to lie groups* - Springer.

[2] A.O.Barut, R.Raczka . *Theory of group representations and applications*-PWN-Polish scientific publishers warszawa (1980).

[3] N. Bourbaki *Éléments de Mathématique : Topologie générale 1-4 : Chapitres 1-4* - Springer . Moscou (2009).

[4] N. Bourbaki .*Éléments de Mathématique : Topologie Generale 5-10. Chapitres 5 à 10* -Springer (2009).

[5] R. Godement .*Algebra (Translation of Cours d'algèbre)* .Houghton Mifflin ompany, (1968) .

[6] Choquet, Gustave .*Cours de topologie : espaces topologiques et espaces métriques-fonctions numériques-espaces vectoriels topologiques : licence et première année de maîtrise C1*- Dunod, (2000).

[7] A. Kostrikin .*Introduction à l'algèbre*-Mir, (1981).

[8] E.Kowalski . *An introduction to the representation theory of groups* - American Mathematical Society (1980).

[9] M.A. Naimark, A.I Stern *Theory of group representations* - Heidelberg :, Springer-Verlag, (1982).

[10] L.pontrjagin , E.Lehmer .*Topological groups* - Princeton, (1946).