

الجمهورية الجزائرية الشعبية الديمقراطية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
جامعة عمار تليجي الأغواط  
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كلية العلوم  
FACULTE DES SCIENCES  
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES



## ***Mémoire de MASTER***

**Domaine:** Mathématiques et Informatique  
**Filière:** Mathématiques  
**Option:** Analyse Mathématique

**Par:**  
Belouidiane Oumelkhir

### **THEME**

---

***Contrôlabilité exacte pour un problème aux limites dans une variété Riemannienne***

---

*Soutenu publiquement devant le jury composé de:*

Mr. Belabbaci Youcef  
Mme. Moussouni Nacima  
Mme. Boukhatam Yamna

M.C.A  
M.C.B  
M.C.A

Président  
Examineur  
Encadreur

**Année Universitaire 2020/2021**

# *Remerciements*

*Je remercie d'abord **ALLAH** qui m'a donné la volonté pour la réalisation de ce modeste mémoire.*

*Je tiens à exprimer mes vifs remerciements pour mon encadrante, Madame **Boukhatem Yamna** d'avoir accepté de m'encadrer pour mon projet de fin d'études, ainsi que pour ses remarques pertinentes et s'encouragement.*

*Un très grand merci aux professeurs : **Y. Belabbaci** et **N. Moussouni** qui ont accepté de participer à mon jury de ce mémoire.*

*Je veux remercier également tous les collègues d'étude, particulièrement la promotion de master mathématique, 2020/2021.*

*J'exprime, enfin, ma reconnaissance à tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de mes travaux..*

# *Dédicaces*

*Je dédie ce mémoire*

*A mes très chers parents..*

*A toute ma famille et spécialement à ma petite soeur Amal .*

*A tous mes amis sans exception.*

*A mes amis et mes camarades du département.*

*A tous ceux qui m'ont apporté du soutien.*

*A tous mes enseignants.*

## Résumé :

Dans ce travail, on étudie la contrôlabilité exacte pour une équation d'onde à coefficients variables soumise à des contrôles aux limites mixtes. Les inégalités d'observabilité sont établies par la méthode géométrie riemannienne sous certaines conditions géométriques pour le problème de Dirichlet et pour le problème de Neumann, respectivement. Ensuite, un certain nombre d'exemples non triviaux sont présentés pour vérifier l'inégalité d'observabilité. En particulier, un contre-exemple est donné sans contrôlabilité exacte aux limites où le contrôle est exercé sur toute la frontière.

**Mots clés :** Contrôlabilité exacte ; Équation d'onde ; Hilbert Uniqueness Method (la méthode HUM) ; Variété riemannienne,

## Abstract :

In this work, we study the exact controllability for a wave equation with variable coefficients subjected to mixed limit controls. The observability inequalities are established by the Riemannian geometry method under certain geometric conditions for the Dirichlet problem and for the Neumann problem, respectively. Then, a number of non-trivial examples are presented to verify the observability inequality. In particular, a counterexample is given without boundary exact controllability, where the control is exerted on the whole boundary.

**Key-words :** Exact controllability ; Hilbert Uniqueness Method ; Riemannian manifold ; Wave equation .

## الملخص:

في هذا العمل قمنا بدراسة قابلية التحكم الدقيق لمعادلة الموجة ذات معاملات متغيرة تخضع لضوابط حدية مختلطة، تم تحديد تفاوتات الملاحظة من خلال طريقة الهندسة الريمانية في ظل ظروف هندسية معينة لمشكلة ديريتشليت و مشكلة نيومان على التوالي . بعد ذلك يتم تقديم عدد من الأمثلة للتحقق من عدم المساواة في الملاحظة . على وجه الخصوص يتم إعطاء مثال مضاد دون إمكانية التحكم الدقيق للحدود حيث يتم ممارسة التحكم على الحد بالكامل.

## الكلمات المفتاحية:

التحكم الدقيق، طريقة تفرد هيلبرت، منوعة ريمان، معادلة الموجة.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Rappels d'analyse fonctionnelle</b>	<b>4</b>
1.1 Les espaces de Lebesgue . . . . .	4
1.2 Les distributions . . . . .	6
1.3 Les espaces de Sobolev . . . . .	6
1.3.1 Espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ . . . . .	6
1.3.2 L'espaces $H_0^m(\Omega)$ . . . . .	8
1.3.3 L'espace dual de $H_0^m(\Omega)$ . . . . .	8
1.3.4 Théorème de trace . . . . .	8
1.4 Les espaces fonctionnels . . . . .	9
<b>2 Rappels sur la géométrie différentielle</b>	<b>11</b>
2.1 Variété différentiable . . . . .	11
2.1.1 Définitions . . . . .	11
2.1.2 Espace tangent et Espace cotangent . . . . .	12
2.1.3 Dérivation . . . . .	12
2.1.4 Application tangente . . . . .	13
2.1.5 Fibré tangent et Fibré cotangent . . . . .	14
2.1.6 Champ de Vecteurs . . . . .	15
2.1.7 Champ de Tenseurs et formes différentielles . . . . .	15
2.2 Variété Riemannienne . . . . .	18
2.2.1 Métrique Riemannienne . . . . .	18
2.2.2 Connexion Linéaire . . . . .	20
2.2.3 Géodésiques . . . . .	22
2.2.4 Courbures . . . . .	22
2.2.5 Les opérateurs sur variété Riemannienne . . . . .	24
<b>3 Contrôlabilité exacte</b>	<b>27</b>
3.1 Notation et position du problème . . . . .	27
3.2 Lemmes techniques . . . . .	31
3.3 Preuve du Principaux théorèmes . . . . .	39
3.4 Exemples . . . . .	45
3.5 Conditions nécessaire de contrôlabilité exacte et contre-exemples . . . . .	50
<b>Conclusion</b>	<b>53</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>54</b>

# Introduction

La théorie du contrôle qui est une théorie mathématique permettant de déterminer des lois de guidage, d'action, sur un système donné. La contrôlabilité des équations aux dérivées partielles est un sujet en plein développement.

Ce problème a reçu beaucoup d'attention dans la littérature, avec de nombreuses contributions effectuées au cours des dernières années. Pour le cas du coefficient constant et pour le cas des coefficients variables, les variances observées ont été obtenues, l'inégalité d'observation est générée sous réserve de certaines conditions sont presque nécessaires pour une contrôlabilité exacte.

Dans [14], Yao a étudié la contrôlabilité exacte d'un problème mixte avec coefficients variables suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où  $u_{tt}$  désigne la dérivée seconde de  $u$  par rapport à  $t$ ,  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , de frontière régulière  $\Gamma$ . Les fonctions  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1 \dots, n$  sont symétriques lisse sur  $\bar{\Omega}$  et il existe  $a > 0$  telle que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq a \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \forall x \in \Omega, \quad \xi_i \in \mathbb{R}.$$

Les conditions initiales  $u_0$  et  $u_1$  sont des fonctions données.

Sous les conditions aux limites mixte suivantes

$$u = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0, T], \quad u = v, \quad \text{sur } \Gamma_0 \times [0, T],$$

où  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  est une partition de la frontière  $\Gamma$  et  $v$  est fonction contrôle. Il a utilisé la méthode de la variété riemannienne et la méthode **HUM**, Hilbert Uniqueness Method, qui a été introduite par Lions dans [9] ou il a traité une équation d'onde pour un contrôle sur toute ou sur une partie de la frontière, Dans ce mémoire, on vas étudier et analysé le problème de Yao.

Ce travail est organisé comme suit : le premier chapitre est consacré à donner un rappel de quelques outils mathématiques. Nous commençons par les espaces de Lebesgue en donnant quelques définitions et propriétés élémentaires. Puis, ils sont suivis par quelques définitions et quelques propriétés fondamentales sur les espaces de Sobolev qui seront utilisés dans la suite. Enfin, on donne quelques définitions sur les espaces fonctionnels.

Dans le second chapitre, on donne quelques définitions fondamentales et propriétés élémentaires sur les variétés. En commençant par des notions d'une variété différentiable,

espace tangent et cotangent ainsi que le fibré tangent et des applications sur leurs espaces et champ vecteur et champ de tenseur et formes différentielles. La dernière section de ce chapitre est consacré à quelques définitions de base sur la géométrie Riemannienne et quelques opérateurs utiles pour l'étude de notre problème.

Le troisième chapitre est consacré a l'étude de la contrôlabilité exacte d'une équation d'onde avec coefficients variables soumise à des conditions mixte. Les inégalités d'observabilité sont établies par la méthode de géométrie riemannienne sous certaines conditions géométriques . Ensuite, un certain nombre d'exemples non triviaux sont présentés pour vérifier l'inégalité d'observabilité. En particulier, un contre exemple est donné sans contrôlabilité exacte aux limites, où le contrôle est exercé sur toute la frontière.

# Chapitre 1

## Rappels d'analyse fonctionnelle

Ce chapitre est consacré à donner un rappel de quelques outils mathématiques. Nous commençons par les espaces de Lebesgue en donnant quelques définitions et propriétés élémentaires. Puis, ils sont suivis par quelques définitions et quelques propriétés fondamentales sur les espaces de Sobolev qui seront utilisés dans la suite à l'étude du problème considéré dans cet mémoire. Enfin, on donne quelques définitions sur les espaces fonctionnels. Les principaux ouvrages utilisés sont [1] et [3].

### 1.1 Les espaces de Lebesgue

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  muni de la mesure de Lebesgue  $dx$ .

**Définition 1.1.1.** Soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p < \infty$ , on appelle  $\mathcal{L}^p$  l'espace des fonctions mesurables, telle que

$$\left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

**Définition 1.1.2.** On dit que  $f$  est essentiellement borné sur  $\Omega$  s'il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$|f(x)| < c \quad p.p.$$

La plus petite de ces constantes est appelé le sup essentiel de  $f$ , on la note par

$$c_1 = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| < +\infty.$$

$\mathcal{L}^\infty(\Omega)$  est un ensemble des fonctions mesurables qui ont un sup essentiel fini.

**Définition 1.1.3.** On appelle l'espace de Lebesgue  $L^p(\Omega)$ , pour  $1 \leq p < \infty$ , comme l'ensemble quotient  $L^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega)/\mathcal{R}$  avec

$$\forall f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega) : f \mathcal{R} g \Leftrightarrow f = g \quad p.p.$$

où  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.

**Proposition 1.1.1.** L'application  $f : L^p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$$f \longmapsto \begin{cases} \|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|, & \text{si } p = \infty, \end{cases}$$

est une norme.

**Proposition 1.1.2.**  $L^2(\Omega)$  est un espace Hilbert, le produit scalaire étant donné par

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)\overline{v(x)}dx,$$

(qui s'écrit  $\int_{\Omega} u(x)v(x)dx$  pour les fonctions réelles).

**Théorème 1.1.1** (Fischer- Riesz).  $L^p(\Omega)$  est un espace de Banach pour tout  $1 \leq p \leq \infty$  et si  $1 < p < \infty$   $L^p(\Omega)$  est un espace de Banach séparable.

**Notation 1.** Soit  $1 \leq p < \infty$ , on désigne par  $p'$  l'exposant conjugué de  $p$ , i.e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

**Théorème 1.1.2** (Inégalité de Young). Soient  $1 < p < \infty$  et  $a$  et  $b$  deux réels positifs. Alors, on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

En cas particulier, pour tout  $a, b \in \mathbb{R}_+$ , on a

$$ab \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{4\delta},$$

où  $\delta$  est une constante positive.

**Théorème 1.1.3** (Inégalité de Hölder). Soient  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^{p'}(\Omega)$  avec  $1 \leq p < \infty$ . Alors  $f, g \in L^1(\Omega)$  et

$$\int_{\Omega} |fg|dx \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

**Remarque 1.1.1.** Lorsque  $p = 2$  et  $q = 2$ , l'inégalité de Hölder devient inégalité de Cauchy Schwartz.

**Théorème 1.1.4.** Soient  $(f_n)_n$  une suite de  $L^p(\Omega)$  et  $f \in L^p(\Omega)$ , tel que

$$\|f_n - f\|_p \rightarrow 0.$$

Alors, il existe une sous suite extraite  $(f_{n_k})_k$  telle que

- i)  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$  p.p sur  $\Omega$ .
- ii)  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ , p.p sur  $\Omega$ , avec  $g \in L^p(\Omega)$ .

**Théorème 1.1.5.**  $L^p$  est un espace réflexif pour  $1 < p < \infty$ .

**Théorème 1.1.6** (Théorème de présentation de Riesz). Soit  $1 < p < \infty$  et  $\varphi \in L^{p'}$ , alors il existe  $u \in L^p(\Omega)$  unique telle que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_{\Omega} u(x)f(x)dx,$$

pour tout  $f \in L^p(\Omega)$ . De plus, on a  $\|u\|_{p'} = \|\varphi\|_{p'}$ .

**Remarque 1.1.2.** Toute forme linéaire continues sur  $L^p$  avec  $1 < p < \infty$  se présente à l'aide d'une fonction de  $L^q(\Omega)$ .

**Définition 1.1.4.** Soient  $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces de Banach. On dit que  $F$  s'injecte continument dans  $E$  si  $F \subset E$  et si l'inclusion est continue, c'est -à- dire, il existe  $C > 0$  telle que

$$\forall x \in F : \|x\|_E \leq C\|x\|_F.$$

On désigne par  $F \hookrightarrow E$  l'injection de  $F$  dans  $E$ .

**Proposition 1.1.3.** Si  $\Omega$  est de mesure finie alors

- i)  $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ .
- ii)  $\forall q \geq p, L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ .

## 1.2 Les distributions

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Notation 2.** On note  $D(\Omega)$  ou  $C_c^\infty(\Omega)$  l'espace des fonctions à valeurs réelles, infiniment dérivables sur  $\Omega$  et à support compact contenu dans  $\Omega$ . On note  $C_K^\infty(\Omega)$  l'ensemble de fonctions de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega$  à support dans un compact  $K \subset \Omega$ . Les fonctions de  $D(\Omega)$  sont appelées les fonctions tests.

**Définition 1.2.1.** Une distribution (réelle) dans l'ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est une forme linéaire continue sur  $D(\Omega)$  telle que

$$\begin{aligned} T : D(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longmapsto T(\phi) = \langle T, \phi \rangle, \end{aligned}$$

on note par  $D'(\Omega)$  l'ensemble des distributions sur  $\Omega$ , c'est le dual topologique de  $D(\Omega)$ .

**Proposition 1.2.1.**  $(D'(\Omega), +, \cdot)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

**Proposition 1.2.2.** Si  $T$  est une forme linéaire sur  $D(\Omega)$ , alors  $T$  est une distribution sur  $\Omega$  si et seulement si pour tout  $K$  compact de  $\Omega$  il existe  $m_K \in \mathbb{N}$  et une constante  $c_{K,m}$  tels que pour tout  $\varphi \in D(\Omega)$  avec  $\text{supp}(\varphi) \subset K$ , on a

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_{K,m} \sup_{|\alpha| \leq m_K} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi|,$$

pour tout  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  (multi -indice),  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$  et

$$D^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$
 est la dérivée d'ordre  $\alpha$  de la fonction test  $\varphi$ .

**Définition 1.2.2.** Soient  $T \in D'(\Omega)$  et  $\alpha$  un multi-indice la dérivée d'une distribution est définie par

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \quad \langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle.$$

**Proposition 1.2.3.** Toute fonction de  $L^p(\Omega)$  définit une distribution dite régulière, donnée par

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On note cette distribution par  $f$  au lieu de  $T_f$ .

## 1.3 Les espaces de Sobolev

### 1.3.1 Espace de Sobolev $H^m(\Omega)$

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Définition 1.3.1.** Soit  $m \in \mathbb{N}^n$ , on définit l'espace de Sobolev  $H^m(\Omega)$  par

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \quad |\alpha| \leq m \right\},$$

où  $D^\alpha u$  est la dérivée de  $u$  d'ordre  $\alpha$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ , au sens de distribution.

**Corollaire 1.3.1.** *L'injection canonique :  $L^p(\Omega) \subset D'(\Omega)$  est continue.*

**Remarque 1.3.1.** *La dérivée d'une fonction régulière coïncide avec sa dérivée au sens des distributions.*

**Proposition 1.3.1.** *L'application définie par :*

$$\begin{aligned} H^m(\Omega) \times H^m(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) &\longmapsto \langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_2 \end{aligned}$$

*est un produit scalaire sur  $H^m(\Omega)$ ,  
avec la norme associée est*

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Théorème 1.3.1.** *L'espace  $D(\Omega)$  est dense dans  $H^m(\Omega)$ .*

**Cas particulier :** si  $m = 1$ , on obtient :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n \right\},$$

muni du produit scalaire donné par

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx,$$

ainsi, la norme associée est donnée par

$$\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2^2 = \|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2.$$

**Proposition 1.3.2.** *Soit  $m \geq m'$ , alors  $H^{m'}(\Omega) \subset H^m(\Omega)$  avec une injection continue.*

**Définition 1.3.2** (Ouvert régulière). *On dit qu'un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) est de classe  $C^1$  si pour tout  $x \in \Gamma = \partial\Omega$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  et une application  $h : Q \rightarrow U$  bijective tels que*

$$h \in C^1(\bar{Q}), \quad h^{-1} \in C^1(\bar{U}), \quad h(Q_+) = U \cap \Omega \quad \text{et} \quad h(Q_0) = U \cap \Gamma,$$

avec  $x = (x', x_N)$ , où  $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$ ,

$$R_+^n = \{x = (x', x_n) : x_n > 0\},$$

$$Q = \{x = (x', x_n) : |x'| < 1 \quad \text{et} \quad |x_n| < 1\},$$

$$Q_+ = Q \cap \mathbb{R}_+^n$$

$$Q_0 = \{x = (x', x_n) : |x'| < 1 \quad \text{et} \quad x_n = 0\}.$$

**Théorème 1.3.2** (Rellich-Kondrachov). *Soient  $\Omega$  un ouvert borné de classe  $C^1(\mathbb{R}^n)$  et  $m \in \mathbb{N}^*$ , on a*

$$\text{Si } n < 2, \text{ alors } H^m(\Omega) \subset L^q(\Omega), \text{ où } \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n},$$

$$\text{Si } n = 2, \text{ alors } H^m(\Omega) \subset L^p(\Omega), \text{ où } \forall p \in [2, +\infty[,$$

$$\text{Si } n > 2, \text{ alors } H^m(\Omega) \subset L^\infty(\Omega),$$

avec des injections continues.

### 1.3.2 L'espaces $H_0^m(\Omega)$

**Définition 1.3.3.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On désigne par  $H_0^m(\Omega)$  la fermeture de  $D(\Omega)$  dans  $H^m(\Omega)$ . Autrement dit,

$$u \in H_0^m(\Omega) \Leftrightarrow \exists (u_n) \in D(\Omega) \text{ telle que } u_n \rightarrow u \text{ dans } H^m(\Omega)$$

lorsque  $n \rightarrow +\infty$

**Proposition 1.3.3.** Si  $u \in H^m(\Omega)$  est à support compact, alors  $u \in H_0^m(\Omega)$ .

**Proposition 1.3.4.** L'espace  $H_0^1(\Omega)$  muni de la norme induite par  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert séparable.

**Théorème 1.3.3.** Soit  $u \in H^1(\Omega)$ , alors on a l'équivalence suivante :

$$u \in H_0^1(\Omega) \Leftrightarrow u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

**Remarque 1.3.2.** On définit l'espace  $H_0^m(\Omega)$  pour  $m > 1$  par

$$H_0^m(\Omega) = \{u \in H^m(\Omega) : u = Du = \dots = D^{m-1}u = 0, \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

**Lemme 1.3.1** (Inégalité de Poincaré). On suppose que  $\Omega$  est borné, alors il existe une constante  $C$  (dépendant de  $\Omega$  et  $p$ ) telle que

$$\|u\|_{H^1} \leq C \|\nabla u\|_2, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

**Corollaire 1.3.2.** La norme  $\|\nabla u\|_2$  est équivalente à la norme  $\|u\|_{H^1}$ .

### 1.3.3 L'espace dual de $H_0^m(\Omega)$

**Définition 1.3.4.** L'espace  $H^{-m}(\Omega)$  est un dual topologique de  $H_0^m(\Omega)$ , c'est-à-dire  $T \in H^{-m}(\Omega)$  si

$$T : H_0^m(\Omega) \rightarrow \mathbb{C} \text{ est linéaire et continue,}$$

i.e.

$$\exists k > 0, \forall u \in H_0^m(\Omega) : |T(u)| \leq k \|u\|_{H_0^m}.$$

**Remarque 1.3.3.** L'espace dual de  $H_0^1(\Omega)$  est l'espace  $H^{-1}(\Omega)$ .

**Remarque 1.3.4.** On a les inclusions suivantes

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega),$$

avec des injections continues et denses.

### 1.3.4 Théorème de trace

**Définition 1.3.5.** Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $s \in ]0, 1[$ , on définit l'espace de Sobolev fractionnaire par

$$H^s(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{H^s}^2 = \left( \|u\|_2^2 + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Théorème 1.3.4.** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulière, alors il existe une application linéaire continue définie par  $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$  telle que*

$$\ker \gamma = \{u \in H^1(\Omega), \quad \gamma u = 0\} = H_0^1(\Omega).$$

$$\text{Im} \gamma = \{u|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega), \quad \gamma u = u|_{\partial\Omega}\} = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

et

$$\|u|_{\Gamma}\|_{H^{\frac{1}{2}}} \leq C \|u\|_{H^1}.$$

## 1.4 Les espaces fonctionnels

Soit  $(X, \|\cdot\|_X)$  un espace de Banach réel.

**Définition 1.4.1.** *On définit l'espace  $C(0, T; X)$  par*

$$C(0, T; X) = \{f : (0, T) \rightarrow X ; \quad \text{avec } f \text{ continue } \}.$$

*muni de la norme*

$$\|u\|_{C(0, T; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X$$

**Définition 1.4.2.** *On dit qu'une fonction  $f : (0, T) \rightarrow X$  est fortement dérivable en  $t_0 \in (0, T)$  s'il existe un élément*

$$\frac{df}{dt}(t_0) \in X \quad \text{telle que} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} \left( f(t_0 + h) - f(t_0) - \frac{df}{dt}(t_0) h \right) \right\|_X = 0.$$

$\frac{df}{dt}(t_0)$  est appelé la dérivée forte de  $f$  en  $t_0$ .

**Définition 1.4.3.** *Soit  $0 < T < \infty$ . On note par  $D(0, T; X)$ , l'ensemble des fonctions continues à support compact dans  $(0, T)$  à valeurs dans  $X$ .*

**Définition 1.4.4.** *Une fonction  $f : (0, T) \rightarrow X$  est dite intégrable s'il existe une suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  appartenant à  $D(0, T; X)$  telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \|f_n(s) - f(s)\|_X ds = 0.$$

**Théorème 1.4.1** (Bochner). *Une fonction  $f : (0, T) \rightarrow X$  mesurable est intégrable si et seulement si l'application  $t \rightarrow \|f(t)\|_X$ , qui est définie de  $(0, T)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  soit intégrable, dans ce cas*

$$\left\| \int_0^T f(s) ds \right\|_X \leq \int_0^T \|f(s)\|_X ds.$$

**Définition 1.4.5.** *Soit  $1 \leq p < \infty$ . L'espace de Lebesgue  $L^p(0, T; X)$  est l'ensemble des classes des fonctions  $f : (0, T) \rightarrow X$  mesurables, telles que l'application  $t \rightarrow \|f(t)\|_X$  appartient à  $L^p(X)$ . L'espace  $L^p(0, T; X)$  est un espace normé muni de la norme*

$$\|f\|_{L^p(0, T; X)} = \left( \int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour  $p = \infty$ ,

$$L^\infty(0, T; X) = \{u : (0, T) \rightarrow X; \text{ mesurable et } \exists C > 0 : \|u(t)\|_X \leq C \text{ p.p.}\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \inf \{C > 0; \|u(t)\|_X \leq C \text{ p.p. } t \in (0, T)\}.$$

**Proposition 1.4.1.**

1.  $L^p(0, T; X)$  est un espace de Banach, pour  $(1 \leq p \leq \infty)$ .
2. Si  $X$  est un espace de Hilbert avec le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$ , alors  $L^2(0, T; X)$  est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

3. Pour  $1 \leq q \leq r \leq \infty$ , on a  $L^r(0, T; X) \hookrightarrow L^q(0, T; X)$  avec injection continue.

**Définition 1.4.6.** Soit  $u, w \in L^1(0, T; X)$ . La fonction  $w$  s'appelle la dérivée généralisée d'ordre  $n$  de  $u$  sur  $(0, T)$  si

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t) u(t) dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t) w(t) dt \quad \forall \varphi \in D(0, T; X).$$

**Définition 1.4.7.** L'espace de Sobolev  $H^1(0, T; X)$  est l'espace des fonctions  $u : (0, T) \rightarrow X$  telles que

$$u \in L^2(0, T; X) \quad \text{et} \quad u_t \in L^2(0, T; X).$$

L'espace  $H^1(0, T; X)$  est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{H^1(0, T; X)^2} = \left( \|u\|_{L^2(0, T; X)} + \|u_t\|_{L^2(0, T; X)} \right).$$

Étant donné un entier  $m \geq 2$ , on définit par récurrence l'espace

$$H^m(0, T; X) = \left\{ u : (0, T) \rightarrow X \mid u \in H^{m-1}(0, T; X); u_t \in H^{m-1}(0, T; X) \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{H^m(0, T; X)} = \|u\|_{L^2(0, T; X)} + \sum_{\alpha=1}^m \|(D^\alpha u)\|_{L^2(0, T; X)}.$$

**Proposition 1.4.2.** Si  $f \in L^p(0, T; X)$  et  $\frac{\partial f}{\partial t} \in L^p(0, T; X)$  avec  $(1 \leq p \leq \infty)$ , alors  $f$  est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de  $(0, T)$  continue de  $[0, T] \rightarrow X$ .

**Théorème 1.4.2** (Formule de Green). Soient  $\Omega$  un ouvert régulier de classe  $C^1$ ,  $\omega$  une fonction de  $C^1(\bar{\Omega})$  à support borné dans le fermé  $\bar{\Omega}$ . Alors elle vérifie la formule de Green

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\partial \Omega} \omega(x) \nu_i(x) ds,$$

où  $\nu_i$  est la  $i$ -ème composante de la normale extérieure unité de  $\Omega$ .

**Corollaire 1.4.1** (Formule d'intégration par parties). Soient  $\Omega$  un ouvert régulier de classe  $C^1$ ,  $u$  et  $v$  deux fonctions de  $C^1(\bar{\Omega})$  à support borné dans le fermé  $\bar{\Omega}$ . Alors elles vérifient la formule d'intégration par parties

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial \Omega} u(x) v(x) \nu_i(x) ds.$$

# Chapitre 2

## Rappels sur la géométrie différentielle

Dans ce chapitre, on donne quelques définitions fondamentales et propriétés élémentaires sur les variétés différentiables et la variétés Riemannienne, en commençant par des notions d'une variété différentiable, espace tangent et cotangent ainsi que le fibré et des applications sur leurs espaces et champ vecteur et champ de tenseur et formes différentielles. La dernière section de ce chapitre est consacré quelques définitions de base sur la géométrie Riemannienne et quelques opérateurs utiles pour étude de notre problème et on renvoie le lecteur aux ouvrages [2]et [5].

### 2.1 Variété différentiable

#### 2.1.1 Définitions

Soit  $(M, \tau)$  un espace topologique non vide (ou tout simplement  $M$ ).

**Définition 2.1.1.** *On dit que  $M$  est une variété topologique de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ , si elle vérifie les propriétés suivantes*

- 1)  $M$  est  $T_2$  séparé.
- 2)  $M$  possède une base dénombrable.
- 3) Pour tout  $p \in M$ , il existe un ouvert  $U$  voisinage de  $p$  et il existe un homéomorphisme  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$  ( $M$  est localement euclidien).

**Définition 2.1.2.** • Une carte locale sur  $M$  est un couple  $(U, \varphi)$ , où  $U$  est un ouvert de  $M$ , domaine de la carte, et  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$  est un homéomorphisme.

Pour  $p \in U$ ,  $\varphi(p) = (\varphi_1(p), \dots, \varphi_n(p)) = (x_1, \dots, x_n)$  sont les coordonnées locales de  $p$  dans la carte  $(U, \varphi)$ .

• Deux cartes  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  sur  $M$  sont différentiablement compatibles si  $U \cap V \neq \emptyset$ , et l'application  $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ , de changement de cartes (application de transition) est différentiable de classe (ou de classe  $C^k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ ).

**Définition 2.1.3.** *Un atlas différentiable sur une variété topologique  $M$  est une famille des cartes  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i), i \in I\}$  telles que*

- 1) Les ouverts  $U_i$  recouvre de  $M$  c-à-d :  $M \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ .
- 2) Toutes les cartes sont différentiablement compatibles deux a deux.

**Définition 2.1.4.** *Un atlas différentiable  $\bar{\mathcal{A}}$  est dit maximal s'il n'est pas inclus strictement dans un autre atlas différentiable sur  $M$ .*

**Lemme 2.1.1.** *Tout atlas différentiable  $M$  est contenu dans un unique atlas maximal sur  $M$  pour l'inclusion.*

**Définition 2.1.5.** *Une variété différentiable de dimension  $n$  est une variété topologique de dimension  $n$  muni d'un atlas différentiable maximal.*

**Définition 2.1.6.** *On dit qu'une variété différentiable  $M$  de dimension  $n$  est orientable, si elle admet un atlas  $\{(U_i, \varphi_i), i \in I\}$ , tel que toutes les applications de changement de cartes aient un jacobien positif.*

## 2.1.2 Espace tangent et Espace cotangent

Soit  $M$  une variété différentiable de dimension  $n$ , ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) et  $p$  un point de  $M$ . On s'intéresse aux courbes dans  $M$  qui sont différentiables et qui passent par  $p$  :

$$\begin{aligned} c : ]-\epsilon, +\epsilon[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto c(t) \quad \text{avec } c(0) = p. \end{aligned}$$

**Définition 2.1.7.** *Deux courbes  $c_1$  et  $c_2$  sont tangentes en point  $p$  si  $c_1(0) = c_2(0) = p$ , et pour toute carte locale  $(U, \varphi)$ ,  $p \in U$ , on a*

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_2)(0).$$

**Définition 2.1.8.** • *Un vecteur tangent à  $M$  en  $p$  est une classe d'équivalence des courbes tangentes en  $p$ .*

• L'espace tangent à  $M$  en  $p$ , noté  $T_p M$ , est l'ensemble des vecteurs tangents à  $M$  en  $p$ .

## 2.1.3 Dérivation

On note par  $C_p^\infty(M)$  l'ensemble des fonctions à valeurs réelles de classe  $C^\infty$  définies sur un ouvert de  $M$  contenant un voisinage de  $p$  et  $(u, \varphi)$  est une carte locale en  $p$ .

**Définition 2.1.9.** *Une dérivation en  $p$  est un opérateur linéaire*

$$D_p : C_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R},$$

*qui vérifie la règle de Leibniz. Autrement dit,  $D_p$  est une dérivation si,*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ et } \forall f, g \in C_p^\infty(M),$$

$$i) D_p(\alpha f + \beta g) = \alpha D_p f + \beta D_p g,$$

$$ii) D_p(fg) = g(p)D_p f + f(p)D_p g.$$

**Proposition 2.1.1.** *Toute dérivation de  $C_p^\infty(M)$  est localement de la forme*

$$D_p = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(p)},$$

où  $v_i = D_p(\varphi_i) = D_p(\pi_i \circ \varphi)$ , on a

$$\begin{aligned} \pi_i : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto x_i. \end{aligned}$$

On note par  $\text{Der}(C_p^\infty(M), \mathbb{R}) = \text{Der}(C_p^\infty(M))$  l'ensemble de toutes les dérivations sur  $C_p^\infty(M)$ .

**Proposition 2.1.2.** *L'ensemble des dérivations  $\text{Der}(C_p^\infty(M))$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ . Si  $(U, \varphi)$  est une carte locale en  $p$  avec coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n)$  alors  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$  est une base de  $\text{Der}(C_p^\infty(M))$ .*

On considère l'application

$$\begin{aligned} \Psi : \quad T_p M &\longrightarrow \text{Der}(C_p^\infty(M)) \\ X_p = [c] &\longmapsto \Psi(X_p), \end{aligned}$$

cette application et bien définie, elle est bijection canonique, alors on a le théorème suivante :

**Théorème 2.1.1.** *L'ensemble des vecteurs tangents  $T_p M$  s'identifie à  $\text{Der}(C_p^\infty(M))$ .*

**Corollaire 2.1.1.** *L'espace tangent  $T_p M$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ .*

**Définition 2.1.10.** *Soit  $p \in M$ , on définit l'espace cotangent en  $p$  à  $M$  par*

$$T_p^* M = \{ \alpha_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{linéaire} \}$$

*est un espace vectoriel dual de l'espace tangent  $T_p M$ .*

**Définition 2.1.11.** • *Soient  $M$  et  $N$  deux variétés différentiables de dimension  $n$  et  $k$  respectivement,  $f : M \rightarrow N$  une application différentiable (ou de classe  $C^r, r \in \mathbb{N}^*$ ) en  $p \in M$ , s'il existe une carte  $(U, \varphi)$  de  $M$  en  $p$  et une carte  $(V, \psi)$  de  $f(p) \in N$ , avec  $f(U) \subset V$ , telles que  $\bar{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^k$  l'expression locale de  $f$  lue dans les cartes  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  est une application différentiable (ou de classe  $C^r, r \in \mathbb{N}^*$ ).*

• *On dit que  $f$  est une application différentiable de  $M$  dans  $N$ , si elle est différentiable en tout point de  $M$ .*

## 2.1.4 Application tangente

Soit  $f$  une application différentiable entre deux variétés différentiables  $M$  et  $N$  de dimension  $n$  et  $k$  respectivement et soit  $p$  un point de  $M$ .

**Définition 2.1.12.** *On appelle différentielle de  $f$  en  $p$ , noté des applications tangentes en  $p$  induite par  $f$  note par  $d_p f$ , l'application*

$$\begin{aligned} d_p f : \quad T_p M &\longrightarrow T_{f(p)} N \\ X_p &\longmapsto d_p f(X_p). \end{aligned}$$

*définie par :*

$$d_p f(X_p)(h) = X_p(h \circ f), \quad \forall X_p \in T_p M, \quad \forall h \in C_{f(p)}^\infty(N).$$

**Remarque 2.1.1.** *Cette application est  $\mathbb{R}$  – linéaire.*

**Définition 2.1.13.** *Le rang de  $f$  en point  $p$  et le rang de l'application linéaire tangente, si le rang de  $f$  reste constant  $\forall p \in M$ . On le note  $\text{rang}_p f$  où  $\text{rg}_p f$*

**Définition 2.1.14.** *On dit que  $f$  est une immersion sur  $M$ , si l'application tangente  $d_p f$  est injective pour tout  $p \in M$  (autrement dit,  $\text{rg} f = \dim M$ ).*

**Définition 2.1.15.** *On dit que  $f$  est une submersion sur  $M$ , si l'application tangente  $d_p f$  est surjective pour tout  $p \in M$  (autrement dit,  $\text{rg} f = \dim N$ ).*

**Définition 2.1.16.** *On dit que  $f : M \rightarrow N$  est un plongement, si  $f$  est une immersion injective et  $f$  un homéomorphisme son unique telle que  $f(M)$  muni de la topologie induite par celle de  $\mathbb{N}$ .*

**Définition 2.1.17.** *On appelle application cotangente de  $f$  en  $p$  de  $M$ , qu'on dénote  $f_p^*$  la transposée de l'application linéaire  $d_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  définie par :*

$$f_p^* = {}^t(d_p f) : \begin{array}{ccc} T_{f(p)}^* N & \longrightarrow & T_p^* M \\ \alpha_{f(p)} & \longmapsto & \alpha_{f(p)} \circ d_p f. \end{array}$$

**Remarque 2.1.2.** *L'application cotangent est la transposée de l'application tangente.*

## 2.1.5 Fibré tangent et Fibré cotangent

**Définition 2.1.18.** *L'ensemble*

$$TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M = \{(p, X_p), p \in M, X_p \in T_p M\}$$

*est appelé fibré tangent de  $M$ .*

*On désigne par :*

$$\pi : \begin{array}{ccc} TM & \longrightarrow & M \\ (p, X_p) & \longmapsto & p, \end{array}$$

*la projection canonique*

**Définition 2.1.19.** *L'ensemble*

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p^* M = \{(p, \alpha_p), p \in M, \alpha_p \in T_p^* M\}$$

*est appelé le fibré cotangent de  $M$ . On désigne par*

$$\pi_1 : \begin{array}{ccc} T^*M & \longrightarrow & M \\ (p, \alpha_p) & \longmapsto & p, \end{array}$$

*la projection canonique*

**Théorème 2.1.2.** *Le fibré tangent  $TM$  a une structure usuelle de variété différentiable de dimension  $2n$ .*

**Définition 2.1.20.** *Soit  $f : M \rightarrow N$  une application différentiable. L'application tangente à  $f$ , notée  $Tf$ , est définie par*

$$Tf : \begin{array}{ccc} TM & \longrightarrow & TN \\ (p, X_p) & \longmapsto & (f(p), d_p f(X_p)). \end{array}$$

### 2.1.6 Champ de Vecteurs

**Définition 2.1.21.** *Un champ de vecteurs différentiable sur  $M$  est une application différentiable*

$$\begin{aligned} X : M &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto (p, X_p). \end{aligned}$$

*Autrement dit, un champ de vecteurs est application  $X : M \longrightarrow TM$  telle que  $\pi \circ X = id$ .*

On note  $\mathcal{H}(M)$  l'ensemble de tous les champs de vecteurs sur  $M$ .

**Définition 2.1.22.** *Un champ de vecteurs sur  $M$  est une dérivation sur  $C^\infty(M)$  on a*

$$\begin{aligned} D = X : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ g &\longmapsto X(g) = X.g, \end{aligned}$$

*pour tout  $p \in M : X.g(p) = X_p(g)$  d'autre terme elle est vérifiée*

1.  $X(\alpha f + \beta g) = \alpha X(f) + \beta X(g), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f, g \in C^\infty(M)$ .
2.  $X(fg) = gX(f) + fX(g)$ .

**Définition 2.1.23** (Crochet de lie). *Soient  $X, Y$  deux champs de vecteurs sur  $M$ . On définit le crochet de Lie entre  $X$  et  $Y$ , noté  $[X, Y]$ , par*

$$[X, Y] = XY - YX.$$

*avec  $f \in C^\infty(M) : [X, Y]f = X(Y(f)) - Y(X(f))$ .*

**Proposition 2.1.3.** *Le crochet de Lie est un champ de vecteurs défini par*

$$[., .] : \mathcal{H}(M) \times \mathcal{H}(M) \rightarrow \mathcal{H}(M).$$

*de plus si  $(U, \varphi)$  est une carte locale en  $p \in M$  et  $X, Y$  deux champs de vecteurs sur  $M$ . Alors*

$$[X, Y] = \sum_{i=1, j=1}^n \left( v_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - w_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j},$$

*où  $X = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  et  $Y = \sum_{j=1}^n w_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ , où  $v_i, w_j \in C^\infty(M)$ .*

**Propriétés :**  $\forall f \in C^\infty(M), \forall X, Y \in \mathcal{H}(M)$

1.  $[X, Y] = -[Y, X]$ ,
2.  $[Y, Z] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$  (identité de Jacobi),
3.  $[fX, Y] = f[X, Y] - (Y(f))X, [X, fY] = f[X, Y] - (X(f))Y$ .

### 2.1.7 Champ de Tenseurs et formes différentielles

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels réels de dimension  $p$  et  $q$  respectivement. Nous notons  $E'$  et  $F'$  leur espaces vectoriels duales.

**Définition 2.1.24.** *Si  $\{e_1, \dots, e_n\}$  est une base de  $E'$  et  $\{f_1, \dots, f_n\}$  est une base de  $F'$ , alors l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur  $E \times F$  admet pour base les  $pq$  éléments  $e_i \otimes f_j$ . Nous pouvons itérer le processus de tensorialisation et définir ainsi  $E \otimes \dots \otimes E \otimes F \otimes \dots \otimes F$ , en prenant  $F = E'$ , nous obtenons alors  $E \otimes \dots \otimes E \otimes E' \otimes \dots \otimes E'$ , où  $E$  apparaît  $s$  fois et  $E'$   $r$  fois. Un tel élément s'écrit  $T = \sum T_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_s} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r}$ , c'est un tenseur de type  $(s, r)$ .*

**Définition 2.1.25.** *Le produit tensoriel du tenseur :*

$$S = \sum S_{l_1 \dots l_p}^{k_1 \dots k_q} \otimes e_{k_1} \otimes \dots \otimes e_{k_q} \otimes e^{l_1} \otimes \dots \otimes e^{l_p}.$$

avec

$$T = \sum T_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_s} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r}$$

est le tenseur

$$S \otimes T = S_{l_1 \dots l_p}^{k_1 \dots k_q} T_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_s} \otimes e_{k_1} \otimes \dots \otimes e_{k_q} \otimes e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_s} \otimes e^{l_1} \otimes \dots \otimes e^{l_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r}.$$

Soit  $M$  une variété différentielle de dimension  $n$ , ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) et  $p \in M$ .

**Définition 2.1.26.** *Pour tout  $p \in M$ , l'espace vectoriel suivant :*

$$T_p^{s,r} M = \underbrace{T_p M \otimes \dots \otimes T_p M}_{s \text{ fois}} \otimes \underbrace{T_p^* M \otimes \dots \otimes T_p^* M}_{r \text{ fois}}$$

est l'espace des tenseurs de type  $(s, r)$  sur l'espace tangent à  $M$  en  $p$ .

**Définition 2.1.27.** *L'ensemble*

$$T^{(s,r)} M = \bigcup_{p \in M} T_p^{(s,r)} M$$

est l'ensemble des champs de tenseurs de type  $(s, r)$ .

**Définition 2.1.28.** *Un champ de tenseur de type  $(s, r)$  sur  $M$  et une application différentiable définie par*

$$\begin{aligned} T^{(s,r)} : M &\longrightarrow T^{(s,r)} M \\ p &\longmapsto T_p^{(s,r)}. \end{aligned}$$

**Expression locale**

Au voisinage de  $p \in M$  sur une carte  $(U, \varphi)$  dans une base associée à des coordonnées  $x_i$ , un tenseur de type  $(s, r)$  s'écrit

$$T_p^{(s,r)} = \sum T_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_s}(p) \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(p) \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_s}}(p) \otimes dx_{j_1}|_p \dots \otimes dx_{j_r}|_p,$$

où  $T_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_s} : U \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions lisses.

**Définition 2.1.29.** *On appelle une forme pfaff sur  $M$ , une section différentiable du fibré cotangent, c'est-à-dire une application différentiable*

$$\begin{aligned} \alpha : M &\longrightarrow T^* M \\ p &\longmapsto \alpha_p \end{aligned}$$

Tout forme de pfaff s'écrit comme  $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i$  avec  $\alpha_i \in C^\infty(M)$ .

**Remarque 2.1.3.** *Le couplage de la forme de pfaff et le champ de vecteur est une fonction de classe  $C^\infty(M)$ .*

**Définition 2.1.30.** La réunion de tous les espaces  $\Lambda_p(T_p^*M)$  des  $p$ -formes extérieures sur  $T_pM$ , c'est-à-dire

$$\Lambda_p(T^*M) = \bigcup_{p \in M} \Lambda_p(T_p^*M).$$

L'ensemble  $\Lambda_p(T^*M)$  s'identifie à l'ensemble des couples  $(p, \alpha_p)$  tels que  $p \in M$  et  $\alpha_p \in \Lambda_p(T_pM) = \Lambda_p(T_p^*M)$ , c'est à dire

$$\alpha_p : T_pM \times \dots \times T_pM \rightarrow \mathbb{R},$$

est une forme  $p$ -linéaire alternée sur  $T_pM$ . On désigne par

$$\begin{aligned} \pi : \Lambda_p(T^*M) &\longrightarrow M \\ (p, \alpha_p) &\longmapsto p \end{aligned}$$

la projection canonique .

**Définition 2.1.31.** On appelle forme différentielle de degré  $k$  ( $k \leq n$ ) sur  $M$ , où  $k$ -forme différentielle

$$\begin{aligned} \alpha : M &\longrightarrow T^*M \\ p &\longmapsto (p, \alpha_p) = \alpha_p \end{aligned}$$

On note par  $\Lambda_k(M)$  où  $\Gamma(\Lambda^k(T^*M))$   $k$ -formes différentielles.

**Définition 2.1.32.** Soit  $(U, \varphi)$  carte locale en  $p$  et  $(x_1, \dots, x_n)$  est associé  $n$  formes de Pfaff sur  $U$  pour tout point  $x$  de  $U$ , les  $p$ -formes extérieures

$$(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p})(x) = dx_{i_1}(x) \wedge \dots \wedge dx_{i_p}(x)$$

avec  $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ , est une base dans  $\Lambda_p(T_p^*M)$ .

**Définition 2.1.33.** L'image réciproque d'une  $p$ -forme  $\alpha$  sur  $N$  par  $f$  est la  $p$ -forme  $f^*\alpha$  sur  $M$  définie par

$$(f^*\alpha)_p(X_1, \dots, X_p) = \alpha_{f(p)}(df_p(X_1), \dots, df_p(X_p)).$$

**Définition 2.1.34.** On appelle produit intérieur de  $X$  par  $\alpha$ , la  $(k-1)$ -forme différentielle, on notée  $i_X\alpha$ , définie par

$$(i_X\alpha)_p = i(X_p)\alpha_p,$$

1. Si  $k = 0$  alors  $i_X\alpha = 0$ ,
2. Sinon  $(i_{X_p})\alpha_p(X_p^1, \dots, X_p^{k-1}) = \alpha_p(X, X_p^1, \dots, X_p^{k-1})$   
pour tout  $p \in M$  et  $X_p^1, \dots, X_p^{k-1} \in T_pM$

**Théorème 2.1.3.** Il existe une et une seule application linéaire  $d : \mathcal{A}(M) \rightarrow \mathcal{A}(M)$  graduée degré plus un, i.e.  $d(\mathcal{A}^k(M)) \subset \mathcal{A}^{k+1}(M)$  telle que

- 1)  $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$  pour tout  $\alpha \in \mathcal{A}^k(M)$  et  $\beta \in \mathcal{A}^l(M)$ .
- 2)  $d \circ d = 0$ .

**Définition 2.1.35.** L'application  $d\alpha$  est appelée différentielle extérieure de  $\alpha$ .

**Définition 2.1.36.** Une forme différentielle  $\omega$  sur  $M$  est dite fermée si  $d\omega = 0$ .

**Définition 2.1.37.** Une forme différentielle  $\omega$  sur  $M$  de degré  $k$  est dite exacte, s'il existe une forme différentielle  $\alpha$  sur  $M$  de degré  $k - 1$  telle que :  $\omega = d\alpha$ .

**Définition 2.1.38.** Soit  $X$  un champ de vecteurs sur  $M$  et un flot local  $(\phi_t)_{|t|<\epsilon}$  de  $X$  défini sur un voisinage ouvert  $U$  d'un point  $p \in \mathcal{A}^k(M)$ , on pose

$$(L_X\alpha)/p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\phi_t)^*\alpha_{\phi_t(p)} - \alpha_p}{t} = \frac{d}{dt}(\phi_t)_*\alpha_{\phi_t(p)}/t = 0.$$

**Définition 2.1.39.** On appelle la partition de l'unité subordonnée à  $U_i$  est un recouvrement d'ouvert d'une fonction positive ou nulle  $p_i$  sur  $M$ , à support compact dans  $U_i$ , de sorte que pour tout  $p \in M$  seuls un nombre fini parmi les nombres  $p_i(p)$  sont non nuls.  $\sum_i p_i = 1$ .

**Définition 2.1.40.** Le support d'une forme différentielle  $\alpha$  sur  $M$  est l'ensemble

$$\text{supp}(\alpha) = \mathcal{F}(\{x \in M, \alpha(x) \neq 0\}),$$

où  $\mathcal{F}$  est la fermeture topologique avec  $\alpha = f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ .

**Définition 2.1.41.** Soient  $M$  une variété différentiable de dimension  $n$  et atlas  $(U_i, \varphi_i)$  et  $\alpha$  une forme différentielle du même degré  $n$ , alors l'intégrale de  $\alpha$  sur  $M$

$$\int_M \alpha = \sum_i \int_M p_i \alpha = \sum_i \int_{\varphi_i(u_i)} (\varphi_i^{-1})^* p_i \alpha$$

avec  $p_i$  une partition de l'unité subordonnée à  $U_i$ .

**Théorème 2.1.4** (Théorème de Stokes). Soient  $M$  une variété différentiable de dimension  $n$ , orientable et avec bord,  $\omega$  une  $k - 1$ -forme différentielle à support compact sur  $M$ , et soit  $i : \partial M \rightarrow M$  l'inclusion du bord de  $M$  dans  $M$ . Alors

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^*\omega.$$

## 2.2 Variété Riemannienne

Soit  $M$  une variété différentiable de dimension  $n$ , ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) et  $p$  un point de  $M$ .

### 2.2.1 Métrique Riemannienne

**Définition 2.2.1.** Une métrique Riemannienne  $g$  sur  $M$  est une application, pour tout  $X, Y \in \mathcal{H}(M)$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathcal{H}(M) \times \mathcal{H}(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ (X, Y) & \longmapsto & g(X, Y), \end{array}$$

pour tout  $p \in M$ , on a :

$$g_p : \begin{array}{ccc} T_p M \times T_p M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X_p, Y_p) & \longmapsto & g_p(X_p, Y_p), \end{array}$$

$C^\infty(M)$  – bilinéaire, symétrique, non dégénérée et définie positive.

### Expression locale

Si  $(U, \varphi)$  est une carte locale sur  $M$ , alors

$$g = \sum_{i,j}^n g_{ij} dx_i \otimes dx_j,$$

où  $g_{ij}$  sont des fonctions différentielles sur  $U$  appelées composantes du tenseur métrique relativement à la carte  $(U, \varphi)$ .

Si  $X = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  et  $Y = \sum_{j=1}^n w_j \frac{\partial}{\partial x_j}$  sont deux champs de vecteur de  $\mathcal{H}(M)$  sur  $M$ , alors

$$g(X, Y) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} v_i w_j.$$

où  $g_{ij} = g_p \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$ .

**Définition 2.2.2.** Une variété Riemannienne est une variété différentiable munie d'une métrique Riemannienne  $g$ .

**Exemple 2.1.** Sur  $(\mathbb{R}^3, g)$  avec les coordonnées  $(x, y, z)$ , muni de la métrique euclidienne est donnée par :  $g = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$  c-à-dire

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exemple 2.2.** La variété Riemannienne  $\mathbb{R}^n$  munie de métrique euclidienne  $g$  telle que  $T_p \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ . Dans les coordonnées standards, on peut écrire :

$$g = \sum_{i=1}^n dx_i dx_i = \sum_{i=1}^n (dx_i)^2 = \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} dx_i dx_j.$$

**Proposition 2.2.1.** Soient  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  deux cartes locales en  $p$  sur  $M$ . Si  $g_{i,j}$  (respectivement  $\tilde{g}_{k,l}$ ) sont des composantes de  $g$  relativement à la carte  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$ , alors pour tout le changement de coordonnées est donnée par  $x = \varphi(p) = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow y = \psi(p) = (y_1, \dots, y_n) = (\psi \circ \varphi^{-1})(p)$  telle que

$$g_{ij} = \sum_{k,l}^n \frac{\partial y^k}{\partial x_i} \frac{\partial y^l}{\partial x_j} \tilde{g}_{kl},$$

où  $\left( \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$  et  $\left( \frac{\partial}{\partial y_1} \dots \frac{\partial}{\partial y_n} \right)$  sont les bases locales de champs de vecteurs.

### Image inverse d'une métrique

**Définition 2.2.3.** Soient  $M$  une variété Riemannienne de dimension  $m$ , et  $f$  application de  $M$  dans  $N$  est une immersion, l'image de  $h$  par  $f$  est une métrique sur  $M$ . Alors

$$f^*h : \mathcal{H}(M) \times \mathcal{H}(M) \longrightarrow C^\infty(M),$$

définie pour tout  $X, Y \in \mathcal{H}(M)$  et  $p \in M$  telle que

$$f^*h(X, Y)_p = h_{f(p)}(d_p f(X_p), d_p f(Y_p)).$$

Cette appelée métrique inverse.

### Expression locale de la métrique inverse $f^*h$

Soient  $(U, \varphi)$  une carte de  $M$  et  $(V, \psi)$  une carte sur  $N$  désignent les bases locales associées respectivement  $\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$  et  $\left(\frac{\partial}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial}{\partial y_m}\right)$  alors :

$$\begin{aligned} (f^*h)_{ij} &= f^*h\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\ &= h\left(df\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right), df\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) \\ &= \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial f_l}{\partial x_j} h\left(\frac{\partial}{\partial y_k}, \frac{\partial}{\partial y_l}\right) \circ f. \end{aligned}$$

**Définition 2.2.4.** On définit la norme d'un champ de vecteur  $X$  sur  $M$  par :

$$\|X\|_g = \sqrt{g(X, X)}.$$

Si  $X = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , alors

$$\|X\|_g^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} v_i v_j.$$

## 2.2.2 Connexion Linéaire

**Définition 2.2.5.** On dit que  $\nabla$  est une connexion linéaire sur  $M$  (ou dérivée covariante de champ de vecteurs) si l'application associée à tout champs des vecteurs  $X, Y \in \mathcal{H}(M)$

$$\begin{aligned} \nabla_X : \mathcal{H}(M) &\longrightarrow \mathcal{H}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y. \end{aligned}$$

Vérifiant les propriétés suivantes :

1/  $\nabla_X Y$  est une  $C^\infty(M)$  linéaire par rapport à  $X$  :

$$\nabla_{fX_1 + gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y \text{ avec } \forall f, g \in C^\infty(M).$$

2/  $\nabla_X Y$  est une  $\mathbb{R}$  - linéaire par rapport à  $Y$  :

$$\nabla_X (\alpha Y_1 + \beta Y_2) = \alpha \nabla_X Y_1 + \beta \nabla_X Y_2, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

3/  $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ ,  $\forall f \in C^\infty(M)$  (Règle de Leibniz).

$\nabla_X Y$  est dite la dérivée covariante de  $Y$  par rapport  $X$ .

**Définition 2.2.6.** Soit  $H$  un champ de vecteurs sur  $(M, g)$ , la différentielle covariante  $DH$  de  $H$  définie par

$$\begin{aligned} DH : \mathcal{H}(M) \times \mathcal{H}(M) &\longrightarrow \mathcal{H}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto DH(X, Y) = g(\nabla_X H, Y) \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire, où  $\nabla_X H$  désigne la dérivée covariante de  $H$  par rapport à  $X$ .

**Définition 2.2.7.** Une connexion linéaire est déterminée par les symboles de Christoffel  $(\Gamma_{ij}^k) \in C^\infty$  dans le système de coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n)$  donné par :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

**Définition 2.2.8.** • Un champ de vecteur  $Y \in \mathcal{H}(M)$  est dit parallèle par rapport à la connexion  $\nabla$ , si  $\nabla_X Y$  est nulle pour tout champ vecteurs  $Y$  ( $\nabla_X Y = 0$ ).

• La métrique  $g$  est dite compatible avec la connexion  $\nabla$  (ou parallèle) si  $\nabla g = 0$ .  
i.e  $(\nabla_X g)(Y, Z) = 0$ , où

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

pour tout  $X, Y, Z \in \mathcal{H}(M)$ .

**Définition 2.2.9.** Le tenseur de torsion associée à  $\nabla$  est une application  $C^\infty(M) -$  bilinéaire définie par

$$\begin{aligned} T : \mathcal{H}(M) \times \mathcal{H}(M) &\longrightarrow \mathcal{H}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \end{aligned}$$

**Remarque 2.2.1.** Le champ vecteur  $T(X, Y)$  est antisymétrique  $T(X, Y) = -T(Y, X)$ .

### Expression locale

Deux champs de vecteurs sur  $M$ , on a

$$T \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{k=1}^n T_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

$T$  est un champ de tenseur de type (1.2).

La connexion  $\nabla$  est dite sans torsion si  $T = 0$  alors  $T_{ij}^k = 0, \forall i, j, k = 1, \dots, n$ .

**Définition 2.2.10. (Connexion de Levi-Civita)** Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne, la connexion linéaire  $\nabla$  sur  $M$  définie par la formule de Kozul :

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) + g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z])$$

est appelé connexion de Levi-Civita.

**Théorème 2.2.1.** Si  $(M, g)$  est une variété Riemannienne, alors la connexion de Levi-Civita est l'unique connexion linéaire sans torsion et compatible avec  $g$ .

**Proposition 2.2.2.** Si  $(U, \varphi)$  est une carte sur  $M$  et  $\nabla$  la connexion de Levi-Civita alors les symboles de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  sont donné par :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m g^{kl} \left( \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right),$$

où  $g_{ij}$  sont les coordonnées de  $g$  relativement à la carte  $(U, \varphi)$ ,  $g_{ij} = g \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$ , et  $g^{kl}$  est la matrice inverse de  $g_{kl}$ .

### 2.2.3 Géodésiques

**Définition 2.2.11.** Une courbe différentiable  $c : J \rightarrow M$  est appelée une géodésique si

$$\frac{D}{dt}c'(t) = 0, \quad \forall t \in J$$

**Proposition 2.2.3. (Les équations d'une géodésique en coordonnées)** Soit  $(U, \varphi)$  une carte de la variété riemannienne  $M$  avec les champs de bases associés  $X_1, \dots, X_n$ , les symboles de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$ , soit  $J' \subset J$  un sous-intervalle de  $J$  tel que  $c(J') \subset U$ , et notons  $\varphi(c(t)) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$ ,  $t \in J'$ , telle que

$$\frac{D}{dt}c'(t) = \sum_{k=1}^n \left( c_k''(t) + \sum_{ij=1}^n c_k'(t)c_j'(t)\Gamma_{ij}^k(c(t)) \right) X_{c(t)}^k.$$

La partie  $c|_{J'}$  est donc une géodésique si et seulement si

$$c''(t) + \sum_{ij=1}^n c'(t)c_j'(t)\Gamma_{ij}^k(c(t)) = 0,$$

pour  $t \in J'$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Dans cette équation il faut lire

$$\Gamma_{ij}^k(c(t)) = \Gamma_{ij}^k(c_1(t), \dots, c_n(t)).$$

### 2.2.4 Courbures

Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne munie d'une connexion linéaire  $\nabla$ .

**Définition 2.2.12.** Le tenseur de courbure Riemannienne associée à  $\nabla$ , noté  $\mathcal{R}$  est une application

$$\mathcal{R} : \mathcal{H}(M) \times \mathcal{H}(M) \times \mathcal{H}(M) \longrightarrow \mathcal{H}(M),$$

défini par :

$$\mathcal{R}(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]}Z, \quad \forall X, Y \in \mathcal{H}(M).$$

**Définition 2.2.13.** Le tenseur de courbure du connexion Levi-Civita est appelé tenseur de courbure Riemannienne, pour tout  $X, Y, Z \in \mathcal{H}(M)$ .

**Propriétés :**  $\forall X, Y, Z, W \in \mathcal{H}(M)$

- 1)  $\mathcal{R}$  est un champ de vecteur de tenseur de type (3,1),
- 2)  $g(\mathcal{R}(X, Y)Z, W) = -g(\mathcal{R}(X, Y)W, Z)$ ,
- 3)  $g(\mathcal{R}(X, Y)Z, W) = g(\mathcal{R}(Z, W)X, Y)$ ,
- 4)  $\mathcal{R}(X, Y)Z + \mathcal{R}(Y, Z)X + \mathcal{R}(Z, X)Y = 0$ ,
- 5)  $(\nabla_X \mathcal{R})(Y, Z) + (\nabla_Y \mathcal{R})(Z, X) + (\nabla_Z \mathcal{R})(X, Y) = 0$ .

**Définition 2.2.14.** On appelle courbure sectionnelle en  $x$  de  $P$ , telle que  $P$  est un 2-plan de  $T_x M$  de base  $X, Y$  sur variétés Riemannienne  $(M, g)$  définie par

$$K_x(P) = \frac{g(\mathcal{R}(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g^2(X, Y)}.$$

**Remarque 2.2.2.** On suppose que  $X, Y$  est une base orthonormale. On peut remplacer  $X$  par  $\lambda X$  et pour  $\lambda$  non nulle et  $Y$  par  $Y - g(X, Y)X$ . Dans ce cas

$$K_x(P) = g(\mathcal{R}(X, Y)Y, X).$$

**Définition 2.2.15.** On dit que  $M$  est une variété à courbure constante s'il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  telle que pour tout  $x \in M$  et  $P$  un 2-plan de  $T_x M$ , on a

$$K(P) = C.$$

**Définition 2.2.16.** La courbure de Ricci d'une variété Riemannienne  $(M, g)$  est un tenseur de type  $(0, 2)$  défini par

$$\begin{aligned} Ric : \mathcal{H}(M) \times \mathcal{H}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longmapsto Ric(X, Y) = \mathcal{R}(\cdot, X)Y \end{aligned}$$

telle que  $Ric(X, Y) = \text{trace}(Z \rightarrow R(Z, X)Y) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i, X)Y, e_i)$

où  $\{e_i\}_{i=1}^n$  est une base orthonormale locale sur  $M$ , et

$$\begin{aligned} Ric : \mathcal{H}(M) \times \mathcal{H}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ Z &\longmapsto \mathcal{R}(Z, X)Y. \end{aligned}$$

**Remarque 2.2.3.** La courbure de Ricci est forme bilinéaire symétrique.

**Définition 2.2.17.** Le tenseur de Ricci d'une variété Riemannienne  $(M, g)$  est un tenseur de type  $(1, 1)$  défini par

$$Ricci(X) = \sum_{i=1}^n R(X, e_i)e_i,$$

où  $\{e_i\}$  une base orthonormale locale sur  $M$  et  $X \in \mathcal{H}(M)$ .

**Remarque 2.2.4.** Pour tout  $X, Y \in \mathcal{H}(M)$  sur  $(M, g)$  on a

$$Ric(X, Y) = g(Ricci(X), Y).$$

**Définition 2.2.18.** La courbure scalaire notée  $S$ , d'une variété Riemannienne  $(M, g)$  est la fonction définie sur  $M$  par

$$S = \text{trace}_g Ric = \sum_{i,j=1}^n g(R(e_i, e_j)e_j, e_i),$$

où  $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$  une base orthonormale locale sur  $M$ .

### 2.2.5 Les opérateurs sur variété Riemannienne

Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne.

**Définition 2.2.19.** *L'opérateur gradient d'une variété Riemannienne définie par*

$$\begin{aligned} \text{grad} : C^\infty(M) &\longrightarrow \mathcal{H}(M) \\ f &\longmapsto \text{grad}(f) = i(df), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} i : \wedge(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{H}(M) \\ \omega &\longmapsto i\omega \end{aligned}$$

définie par  $g(i\omega, X) = \omega(X)$ .

**Proposition 2.2.4.**  $\forall f, g \in C^\infty(M)$ , on a

$$1/ \text{grad}(f + h) = \text{grad}(f) + \text{grad}(h),$$

$$2/ \text{grad}(f, h) = f \text{grad}(h) + h \text{grad}(f),$$

$$3/ (\text{grad}(f))(h) = (\text{grad}(h))f.$$

#### Expression locale

Soit  $(U, \varphi)$  une carte locale sur  $M$  avec les champs de vecteurs de base associée  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ , alors

$$\text{grad}(f) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Pour tout  $f \in C^\infty(M)$ .

**Définition 2.2.20. (gradient d'un champ de vecteur)** Soit  $X$  un champ de vecteur sur  $M$  et  $\nabla$  la connexion de Levi-Civita, alors

$$\begin{aligned} \nabla X : \mathcal{H}(M) &\longrightarrow \mathcal{H}(M) \\ Y &\longmapsto \nabla_Y X, \end{aligned}$$

est une application  $C^\infty(M)$  – linéaire et  $\nabla X$  est un tenseur de type  $(1,1)$ .

Si  $p \in M$ , on a

$$\begin{aligned} (\nabla X)_p : T_p M &\longrightarrow T_p M \\ V_p &\longmapsto (\nabla_{V_p} X)_p, \end{aligned}$$

est une application linéaire.

**Définition 2.2.21.** La divergence d'un champ de vecteur  $X \in \mathcal{H}(M)$ , noté  $\text{div}X$  est définie par  $\text{div}X = \text{trace}_g \nabla X$ , pour tout  $p \in M$  on a

$$(\text{div}X)(p) = \text{tr}_g(\nabla X)_p.$$

#### Expression locale

En coordonnée locale, on a :

$$\text{div}X = dx_i \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X \right) = g_{ij} g \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X, \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

Si  $\{e_i\}_{i=1}^n$  est une base orthonormé sur  $M$  alors on a :

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_i).$$

**Définition 2.2.22.** Soit  $\omega \in \wedge(M)$  une 1-forme, on a

$$\begin{aligned} \nabla \omega : \mathcal{H}(M) &\longrightarrow \wedge(M) \\ Y &\longmapsto \nabla_Y \omega \end{aligned}$$

est une application  $C^\infty(M)$  – linéaire et un tenseur de type  $(0,2)$ .

**Remarque 2.2.5.** Si  $p \in M$ , alors

$$\begin{aligned} (\nabla \omega)_p : T_p M &\longrightarrow T_p^* M \\ V &\longmapsto (\nabla_V \omega)_p. \end{aligned}$$

est une application linéaire

**Définition 2.2.23.** La divergence d'une 1-forme  $\omega \in \wedge(M)$ , notée  $\operatorname{div}(\omega)$  est une fonction sur  $M$  définie par

$$\operatorname{div}(\omega) = \operatorname{tr}_g(\nabla \omega),$$

pour  $p \in M$ , on a  $(\operatorname{div}(\omega))(p) = \operatorname{tr}_g((\nabla \omega)_p)$ .

**Proposition 2.2.5.** Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne,  $\forall f, g \in C^\infty(M)$  et  $X, Y \in \mathcal{H}(M)$ ,

i)  $\operatorname{div}(X + Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y,$

ii)  $\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + X(f).$

**Proposition 2.2.6** (Expression locale du divergence). Soit  $X \in \mathcal{H}(M)$ , on a :

$$\operatorname{div} X = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \sqrt{\det(g_{ij})} X_k \right).$$

**Définition 2.2.24.** L'opérateur laplacien sur  $(M, g)$  une variété Riemannienne noté  $\Delta$  par

$$\begin{aligned} \Delta : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\longmapsto \Delta(f) = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) = \operatorname{trace}_g(\operatorname{Hess}(f)). \end{aligned}$$

**Propriétés :** Pour tout  $f, g \in C^\infty(M)$ , on a

i)  $\Delta(f + h) = \Delta(f) + \Delta(h),$

ii)  $\Delta(fh) = h(\Delta f) + f(\Delta h) + 2g(\operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(g)).$

**Expression locale**

En coordonnée locale,  $\forall f, g \in C^\infty(M)$ , on a :

$$\Delta f = \sum_{i,j,k=1}^n g_{ij} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_k^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_k} \right).$$

**Définition 2.2.25.** Soient  $(M, g)$  variété Riemannienne et  $f \in C^\infty(M)$ , la Hessienne de la fonction  $f$ , noté  $Hess(f)$  défini par

$$\begin{aligned} Hess(f) : \mathcal{H}(M) \times \mathcal{H}(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ (X, Y) &\longmapsto g(\nabla_X \text{grad}(f), Y). \end{aligned}$$

**Remarque 2.2.6.** Soient  $(M, g)$  variété Riemannienne et  $f \in C^\infty(M)$  la Hessienne de  $f$  est application bilinéaire symétrique.

**Définition 2.2.26.** On appelle opérateur de Laplace -Beltrami, noté  $\Delta$  sur  $M$  par

$$\begin{aligned} \Delta : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\longmapsto \Delta(f) = \text{div}(\text{grad}(f)) = \text{trace}_g(Hess(f)). \end{aligned}$$

**Exemple 2.3.** Soit  $\mathbb{R}^n$  muni d'une métrique euclidienne ( $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_{ij}$ ) alors pour tous fonction différentiable  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$  et  $X = (X_1, \dots, X_n)$  un champ de vecteurs sur  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ , on a

$$\begin{aligned} \text{grad}(f) &= \nabla_g f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right). \\ \text{div}(f) &= \text{div}_g f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i}. \\ \Delta(f) &= \Delta_g f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}. \end{aligned}$$

# Chapitre 3

## Contrôlabilité exacte

Le but du dernier chapitre est d'étudier la contrôlabilité exacte d'une équation d'onde soumise à des conditions Dirichlet et Neumann et sous lequel on obtient l'inégalité d'observation. Quelques exemples sont donnés à la fin.

### 3.1 Notation et position du problème

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), de frontière régulière  $\Gamma = \partial\Omega$ , supposons que  $\Gamma$  est constituée de deux parties disjointes  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$ , ( $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ ) avec  $\Gamma_0$  non vide et relativement ouvert par rapport  $\Gamma$ , soit  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$  la normal unitaire sur tout  $\Gamma$ . Soit la fonction  $u$  définie de  $\Omega \times (0, T)$  dans  $\mathbb{R}$ . On dénote par :

$$u' = u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u'' = u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Pour simplifier les notations, nous indiquons pas explicitement la dépendance de la fonction  $u$  par rapport à  $x$  (par fois par rapport à  $t$ ).

L'objet de ce chapitre est d'étudier la contrôlabilité exacte du problème mixte suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} + \mathcal{A}u = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} u = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\ u = v & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T), \end{cases} \quad (3.2)$$

où

$$\mathcal{A}u = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right).$$

La deuxième équation du (3.1) est les conditions initiales avec  $u_0, u_1$  sont des données. L'équation (3.2) représente les conditions aux limites mixtes sur  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  avec

$$v : \Gamma_0 \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$$

est une fonction contrôle.

Le but de ce chapitre est de montrer qu'il existe  $T_0 > 0$  telle que si pour tout  $T > T_0$ , pour tout  $u_0 \in L^2(\Omega), u_1 \in H^{-1}(\Omega)$ , il existe une fonction contrôle  $v \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_0))$  correspondant au solution du (3.1)-(3.2) satisfait

$$u(., T) = u_t(., T) = 0, \quad (3.3)$$

où

$$L^2(\Gamma_0) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \left( \int_{\Gamma_0} |u|^2 d\Gamma \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

munit du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{2, \Gamma_0} = \int_{\Gamma_0} u(x)v(x)d\Gamma, \text{ et d'une norme : } \|u\|_{2, \Gamma_0} = \int_{\Gamma_0} |v|^2 d\Gamma_0.$$

**Définition 3.1.1.** *Lorsque la fonction  $v$  existe, on dit que le problème (3.1)-(3.2) sur l'intervalle  $[0, T]$  dans  $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  au moyen de la fonction contrôle de Dirichlet  $v \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_0))$  est exactement contrôlable.*

Notre objectif est d'étudier ce problème de contrôlabilité exacte. Pour cela, on introduit les idées principales de la méthode d'unicité hilbertienne HUM.

### Description de la méthode HUM

La méthode du HUM est basée sur certains critères d'unicité pour le système homogène associé et la construction (par des procédés de complétion) d'espaces hilbertiens adaptés à la structure du système.

Les étapes fondamentales de l'application de la méthode HUM à la résolution du problème de la contrôlabilité exacte du système (3.1), (3.2).

#### Étape 1 :

On considère le problème homogène correspondant au (3.1)-(3.2) suivant :

$$\begin{cases} \phi_{tt} + \mathcal{A}\phi = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \phi(0) = \varphi_0; \quad \phi_t(0) = \varphi_1 & \text{dans } \Omega, \\ \phi = 0 & \text{sur } \Gamma \times (0, T). \end{cases} \quad (3.4)$$

D'après[9] le problème (3.4) admet une solution sous le théorème suivant :

**Théorème 3.1.1.** *Soit  $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\varphi_1 \in L^2(\Omega)$ , alors il existe  $T > 0$  et une unique fonction  $\varphi$  solution du problème (3.4) sur  $[0, T]$  ayant la régularité suivante :*

$\varphi \in C(0, T, H_0^1(\Omega))$ ,  $\varphi_t \in C(0, T, L^2(\Omega))$  et que  $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \in L^2(0, T, L^2(\Gamma))$  plus précisément, pour tout  $T > 0$  l'inégalité,

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right)^2 d\sigma dt \leq cT \left( \|\varphi_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\varphi_1\|_2^2 \right), \quad (3.5)$$

où  $\frac{\partial \phi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \nu_i$ .

**Étape 2 :** Soit  $\psi$  solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \psi_{tt} + \mathcal{A}\psi = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \psi(T) = \psi_t(T) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \psi|_{\Gamma_1} = 0, \quad \psi|_{\Gamma_0} = \frac{\partial \phi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}, \quad 0 < t < T, \end{cases} \quad (3.6)$$

avec  $\frac{\partial \phi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}$  est donnée par le théorème (3.1.1).

Soit  $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\varphi_1 \in L^2(\Omega)$ , on définit l'opérateur

$$\wedge : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

par :

$$\wedge \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_t(0) \\ -\psi(0) \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

on obtient

$$\left\langle \wedge \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \right\rangle = \int_0^T \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right)^2 d\sigma dt \quad (3.8)$$

*Démonstration.* En multipliant l'équation (3.6) par  $\phi$  et en intégrant sur  $\Omega \times (0, T)$ , on

$$\text{obtient } \underbrace{\int_{\Omega \times (0, T)} \psi'' \phi dxdt}_I - \underbrace{\int_{\Omega \times (0, T)} \phi \Delta \psi dxdt}_{II} = 0$$

### Analyse de la première intégrale (I)

On a  $(\psi', \phi)' = (\psi'', \phi) + (\psi', \phi')$

En intégrant sur  $(0, T)$ , on obtient

$$\langle \psi'(T), \phi(T) \rangle - \langle \psi'(0), \phi(0) \rangle = \int_{\Omega \times (0, T)} \psi'' \phi dxdt + \int_{\Omega \times (0, T)} \psi' \phi' dxdt$$

avec la condition (3.6), on trouve

$$\int_{\Omega \times (0, T)} \psi'' \phi dxdt = -\langle \psi'(0), \phi_0 \rangle - \int_{\Omega \times (0, T)} \psi' \phi' dxdt \quad (3.9)$$

d'autre part, par intégration par parties, on a

$$\int_{\Omega \times (0, T)} \psi' \phi' dxdt = (\psi(T), \phi'(T)) - (\psi(0), \phi'(0)) - \int_{\Omega \times (0, T)} \psi \phi'' dxdt$$

donc

$$\int_{\Omega \times (0, T)} \psi' \phi' dxdt = -(\psi(0), \phi_1) - \int_{\Omega \times (0, T)} \psi \phi'' dxdt \quad (3.10)$$

On substitue (3.10) dans (3.9), on obtient

$$\int_{\Omega \times (0, T)} \psi'' \phi dxdt = -\langle \psi'(0), \phi_0 \rangle + (\psi(0), \phi_1) - \int_{\Omega \times (0, T)} \psi \phi'' dxdt \quad (3.11)$$

### Analyse de la deuxième intégrale (II)

D'après formule de Green, on a

$$\int_{\Omega \times (0, T)} (\psi \Delta \phi - \phi \Delta \psi) dxdt = \int_{\Gamma \times (0, T)} \left( \psi \frac{\partial \phi}{\partial \nu} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right) d\sigma dt$$

donc

$$-\int_{\Omega \times (0, T)} \phi \Delta \psi dxdt = -\int_{\Omega \times (0, T)} \psi \Delta \phi dxdt + \int_{\Gamma \times (0, T)} \left( \psi \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) d\sigma dt \quad (3.12)$$

On ajoute (3.11) à (3.12), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times (0, T)} (\psi'' - \Delta \psi) \phi dxdt &= \int_{\Omega \times (0, T)} (\phi'' - \Delta \phi) - \langle \psi'(0), \phi_0 \rangle + \langle \psi(0), \phi_1 \rangle \\ &\quad + \int_{\Gamma \times (0, T)} \left( \psi \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) d\sigma dt = 0 \end{aligned}$$

Comme  $\phi'' - \Delta \phi = 0$  sur  $\Omega \times (0, T)$  et  $\psi'' - \Delta \psi = 0$  sur  $\Gamma \times (0, T)$ , alors on trouve

$$-\langle \psi'(0), \phi_0 \rangle + \langle \psi(0), \phi_1 \rangle + \int_{\Gamma \times (0, T)} \left( \psi \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) d\sigma dt = 0. \quad (3.13)$$

On remarque que  $\psi = \frac{\partial \phi}{\partial \nu}$  sur  $\Gamma_0 \times (0, T)$ , et  $\psi = 0$  sur  $\Gamma_1 \times (0, T)$ . Donc, de (3.13) il résulte

$$\langle \psi'(0), \phi_0 \rangle - (\psi(0), \phi_1) + \int_{\Gamma_0 \times (0, T)} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\sigma dt = 0. \quad (3.14)$$

On considère  $\langle \psi'(0), \phi_0 \rangle - (\psi(0), \phi_1)$  comme un produit scalaire de  $\{\psi'(0), -\psi(0)\}$  et  $\{\phi_0, \phi_1\}$ . Donc, d'après (3.14) nous avons

$$\langle \wedge(\phi_0, \phi_1), (\phi_0, \phi_1) \rangle = \langle \psi'(0), \phi_0 \rangle - (\psi(0), \phi_1) = \int_{\Gamma_0 \times (0, T)} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right)^2 d\sigma dt = 0 \quad \square$$

Par (3.4)-(3.8), obtenir la contrôlabilité (3.1),(3.2) sur l'espace  $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  équivalent à montrer qu'il existe des constantes  $\exists c > 0, T_o > 0$  telle que l'inégalité d'observabilité suivante est vraie pour  $T > T_0$  :

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right)^2 d\sigma dt \geq c \left( \|\varphi_0\|_{H_0^1}^2 + \|\varphi_1\|_2^2 \right),$$

pour tout  $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega), \varphi_1 \in L^2(\Omega)$ , où  $\phi$  solution du problème (3.4).

On pose

$$F_{T, \Gamma_0} = \left\{ (\varphi_0, \varphi_1) \mid (\varphi_0, \varphi_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right)^2 d\sigma dt < \infty \right\}$$

Dans l'étude, nous avons besoins de préciser quelques notations relatives du problème.

Supposons que :

**(H1)** : Les coefficients de l'opérateur  $\mathcal{A}$  sont des fonctions  $a_{ij}(x) : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  symétrique et de classe  $C^\infty$ .

De plus il existe une constante  $a > 0$  telle que pour tout  $x \in \Omega$  et  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ , on a :

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq a |\xi|^2$$

On pose par

$$G(x) = (g_{ij}(x)) = A(x)^{-1} \quad \text{où} \quad A(x) = (a_{ij}(x)). \quad (3.15)$$

Pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , on définit le produit scalaire et la norme associée sur l'espace tangent  $T_x \mathbb{R}^n = \mathbb{R}_x^n = \mathbb{R}^n$  par

$$g(X, Y) = \langle X, Y \rangle_g = \sum_{i,j} g_{ij}(x) \alpha_i \beta_j, \quad |X|_g = \sqrt{\langle X, X \rangle_g} \quad (3.16)$$

avec  $\forall X = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y = \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  sont champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}_x^n$ .

On note aussi  $X.Y = \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$  et  $|X|_0 = \sqrt{\langle X, X \rangle}$ ,

$div_0(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i(x)}{\partial x_i}$  le produit scalaire la norme associée et la divergence dans  $\mathbb{R}^n$  pour la métrique euclidienne.

## 3.2 Lemmes techniques

Soit  $H$  un champ vectoriel sur  $\mathbb{R}^n$  et  $f \in C^1(\bar{\Omega})$ . La formule de divergence pour la métrique euclidienne est donnée par

$$\operatorname{div}_0(fH) = f \operatorname{div}_0(H) + H(f), \quad (3.17)$$

et

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}_0(H) dx = \int_{\Gamma} H \cdot \nu d\sigma. \quad (3.18)$$

**Lemme 3.2.1.** Soit  $f, h \in C^1(\bar{\Omega})$  et  $H, X$  deux champs de vecteurs. Alors

1)

$$g(H(x), A(x)X(x)) \langle H(x), A(x)X(x) \rangle_g = H(x) \cdot X(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

2)

$$\operatorname{grad}_g f(x) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

3)

$$\langle \operatorname{grad}_g f, \operatorname{grad}_g h \rangle_g = \operatorname{grad}_g f(h) = \operatorname{grad}_0 f \cdot A(x) \operatorname{grad}_0 h, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

$$4) \langle \operatorname{grad}_g f, \operatorname{grad}_g(H(f)) \rangle_g = DH(\operatorname{grad}_g f \cdot \operatorname{grad}_g f)(x) + \frac{1}{2} \operatorname{div}_0(|\operatorname{grad}_g f|_g^2 H)(x)$$

$$- \frac{1}{2} \operatorname{div}_0(|\operatorname{grad}_g f|_g^2 H)(x)$$

*Démonstration.* Soit  $H(x) = \sum_{i=1}^n h_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$  et  $X(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Il résulte que

$$\langle H(x), A(x)X(x) \rangle_g = \sum_{ij=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} f_k h_j g_{ij} = \sum_{k=1}^n f_k h_k = H(x) \cdot X(x)$$

On pose

$$\operatorname{grad}_g x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (3.19)$$

$x_{ij}$  sont les coefficients de  $x_i$ .

$$\text{avec } C(x) = (x_{ij}(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.20)$$

une matrice  $n \times n$ . De (3.19), on a

$$x_{ij} = \operatorname{grad}_g x_i(x_j) = \langle \operatorname{grad}_g x_i, \operatorname{grad}_g x_j \rangle_g = \sum_{k,l=1}^n g_{kl} x_{ik} x_{jl}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (3.21)$$

Ce qui donne  $C(x) = {}^t C(x) G(x) C(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  où  ${}^t C(x)$  est la transposée de la matrice  $C(x)$  et  $G(x)$  est définie par (3.15).

On déduit que

$$C(x) = G^{-1}(x) = A(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.22)$$

De (3.19) et (3.22), on obtient

$$\begin{aligned}
 \text{grad}_g f &= \sum_{i=1}^n \text{grad}_g f(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \\
 &= \sum_{i=1}^n \text{grad}_g(x_i)(f) \frac{\partial}{\partial x_i} \\
 &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad x \in \mathbb{R}^n.
 \end{aligned}$$

Cela donne

$$\begin{aligned}
 \langle \text{grad}_g f, \text{grad}_g h \rangle_g = \text{grad}_g f(h) &= \sum_{ij=1}^n a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_j} \\
 &= \text{grad}_0 f(x) \cdot A(x) \text{grad}_0 h(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.
 \end{aligned}$$

Soit  $E_1, E_2, \dots, E_n$  de champs normal en  $X$ . Comme  $H$  est un champ de vecteurs alors ils existent  $h_1, h_2, \dots, h_n$  des fonctions de classe  $C^\infty$  au voisinage de  $x$  telle que

$$H = \sum_{i=1}^n h_i E_i. \quad (3.23)$$

De plus, pour tout  $f \in C^1(\overline{\Omega})$ , on a :

$$H(f) = \sum_{i=1}^n h_i E_i(f)$$

où  $E_i(f)$  est le différentielle covariant de  $f$  par rapport à  $E_i$  pour métrique Riemannienne  $g$ . De la différentielle covariante du champ de vecteur  $H$ , on obtient,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
 DH(E_i, E_j)(x) &= \langle D_{E_i} H(x), E_j(x) \rangle_g \\
 &= \sum_{k=1}^n \langle E_i(h_k) E_k + h_k D_{E_i} E_k, E_j \rangle_g = E_i(h_j)(x)
 \end{aligned}$$

Puisque  $\langle E_k, E_j \rangle_g = \delta_{kj}$  et  $D_{E_i} E_k(x) = 0$ . De (3.23)-(3.24) et (3.17) il résulte que,

$$\begin{aligned}
 \langle \text{grad}_g f, \text{grad}_g(H(f)) \rangle_g(x) &= \sum_{j=1}^n E_j(f) E_j(H(f)) \\
 &= \sum_{j=1}^n E_j(f) \left( \sum_{i=1}^n E_j(h_i) E_i(f) + \sum_{i=1}^n h_i E_j E_i(f) \right) \\
 &= \sum_{ij=1}^n E_j(h_i) E_i(f) + \sum_{i=1}^n h_i \left( \sum_{j=1}^n E_j(f) E_i E_j(f) \right) \\
 &= DH(\text{grad}_g f, \text{grad}_g f) + \frac{1}{2} H(|\text{grad}_g f|_g^2) \\
 &= DH(\text{grad}_g f, \text{grad}_g f) + \frac{1}{2} \text{div}_0(|\text{grad}_g f|_g^2 H)(x) \\
 &\quad - \frac{1}{2} |\text{grad}_g f|_g^2(x) \text{div}_0(H)(x),
 \end{aligned}$$

où  $E_i E_j(f)(x) = E_j E_i(f)(x)$  sont la deuxième différentiel covariant de  $f$

$$\text{grad}_g f = \sum_{i=1}^n E_i(f) E_i, \quad \text{et} \quad |\text{grad}_g f|_g^2 = \sum_{j=1}^n (E_j(f))^2. \quad (3.24)$$

□

**Proposition 3.2.1.** *Soit  $\phi$  solution du problème :*

$$\phi_{tt} + \mathcal{A}\phi = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T). \quad (3.25)$$

Supposons que  $H$  est un champ de vecteur sur  $\bar{\Omega}$ . Alors

1)

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} H(\phi) d\sigma dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} (\phi_t^2 - |\text{grad}_g f|_g^2 H \cdot \nu) d\sigma dt \\ &= (\phi_t, H(\phi))|_0^T + \int_0^T \int_{\Omega} DH(\text{grad}_g \phi, \text{grad}_g \phi) dx dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\phi_t^2 - |\text{grad}_g f|_g^2 \text{div}_0(H)) dx dt. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Soit  $P \in C^2(\bar{\Omega})$ . Alors

2)

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Gamma} P(\phi_t^2 - |\text{grad}_g f|_g^2) dx dt &= (\phi_t, P(\phi))|_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} \phi^2 \mathcal{A} P dx dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} \phi^2 \text{grad}_g P \cdot \nu d\sigma dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \phi P d\sigma dt. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Multiplions (3.25) par  $H(\phi)$  et intégrons par parties. Utilisons la formule Green et Lemme 3.2.1, parties 2- 4, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{A}\phi H(\phi) dx &= \int_{\Omega} \sum_{ij=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} (H(\phi)) dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} H(\phi) d\sigma \\ &= \int_{\Omega} \text{grad}_g \phi (H(\phi)) dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} H(\phi) d\sigma \\ &= \int_{\Omega} \langle \text{grad}_g \phi, \text{grad}_g (H(\phi)) \rangle_g dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} H(\phi) d\sigma \\ &= \int_{\Omega} \langle \text{grad}_g \phi, \text{grad}_g (H(\phi)) \rangle_g dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} H(\phi) d\sigma \\ &= \int_0^T \int_{\Gamma} DH(\text{grad}_g \phi, \text{grad}_g \phi) dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} |\text{grad}_g f|_g^2 H \cdot \nu d\sigma dt \\ &- \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} |\text{grad}_g f|_g^2 \text{div}_0(H) dx dt - \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} H(\phi) d\sigma. \end{aligned} \quad (3.27)$$

D'autre par, on obtient de l'intégration par parties de (3.17) que :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Gamma} \phi_{tt} H(\phi) dx dt &= \int_{\Omega} \phi_t H(\phi)|_0^T dx - \int_0^T \int_{\Gamma} \phi_t H(\phi_t) dt dx \\ &= (\phi_t, H(\phi))|_0^T - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} H(\phi_t^2) dx dt \\ &= (\phi_t, H(\phi))|_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} \phi_t^2 \text{div}_0(H) dx dt \\ &- \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} \phi_t^2 H \cdot \nu d\sigma dt \end{aligned} \quad (3.28)$$

Les équations (3.28) et (3.27), ainsi que (3.25), donnent (3.26) le résultat que pour partie 2. Le lemme 3.2.1, partie 2, donne

$$\mathcal{A}P = - \sum_{ij=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial P}{\partial x_j}) = -\operatorname{div}_0(\operatorname{grad}_g P). \quad (3.29)$$

A partir de (3.29) et de la formule (3.17), on obtient,  $\forall x \in \Omega$

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{grad}_g \phi, \operatorname{grad}_g(P\phi) \rangle_g(x) &= P |\operatorname{grad}_g \phi|_g^2(x) + \phi \langle \operatorname{grad}_g \phi, \operatorname{grad}_g P \rangle_g(x) \\ &= P |\operatorname{grad}_g \phi|_g^2 + \frac{1}{2} \operatorname{grad}_g P(\phi^2) \\ &= P |\operatorname{grad}_g \phi|_g^2 + \frac{1}{2} \operatorname{div}_0(\phi^2 \operatorname{grad}_g P) + \frac{1}{2} \phi^2 \mathcal{A}P. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Il découle de (3.25), (3.30), (3.18) et de la formule de Green que

$$\begin{aligned} (\phi_t, \phi P)|_0^T &= \int_0^T [(\phi_{tt}, \phi P) + (\phi_t, \phi_t P)] dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} [-\langle \operatorname{grad}_g \phi, \operatorname{grad}_g(\phi P) \rangle_g + \phi_t^2 P] dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \phi P d\sigma dt \\ &= \int_0^T \int_{\Gamma} P(\phi^2 - |\operatorname{grad}_g \phi|_g^2) dx dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} \phi^2 \operatorname{grad}_g P \cdot \nu d\sigma dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \phi^2 \mathcal{A}P dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \phi P d\sigma dt. \end{aligned} \quad (3.31)$$

L'équation (3.27) découle de (3.31).  $\square$

Soit  $\varphi$  solution du problème (3.4), on définit la fonction d'énergie par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\phi_t|_t^2 + |\operatorname{grad}_g \phi|_g^2) dx,$$

où l'énergie initial est  $E(0) = \frac{1}{2} (\|\operatorname{grad}_g \varphi_0\|_g^2 + \|\varphi_1\|_2^2)$ .

**Lemme 3.2.2.** *La fonction d'énergie  $E$  est conservé sur  $[0, T]$  c-à-d :*

$$\frac{d}{dt} E(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T]$$

.

*Démonstration.* Pour montrer la conservation de l'énergie, on multiplie l'équation (3.4) par  $\phi'$  et en intégrant sur  $\Omega$ , on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (\phi' - \operatorname{grad} \phi) \phi' dx \\ &\stackrel{\text{Théorème 1.4.2}}{=} \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{|\phi'|^2 + |\Delta \phi|\} dx \right] - \int_{\Gamma} (\Delta \phi \cdot \nu) \phi' d\Gamma \\ &= \frac{dE(t)}{dt} - \int_{\Gamma} (\Delta \phi \cdot \nu) \phi' d\Gamma \end{aligned}$$

D'après les conditions au bord dans (3.4), on obtient  $\frac{dE(t)}{dt} = 0$ ,  $\forall t \in [0, T]$  et par suite on a conservation de l'énergie.  $\square$

**Lemme 3.2.3.** *Soit  $\phi$  solution du problème (3.4). Alors*

$$|(\phi_t, H(\phi) + \frac{1}{2}P\phi)| \leq bE(0) + \frac{\sqrt{c}}{2}\|\phi_t\|\|\phi\|,$$

où

$$b = \sup_{x \in \Omega} |H|_g(x), \quad P = \operatorname{div}_0 H - a \quad (3.32)$$

$$c = \sup_{x \in \Omega} |(div_0 H)^2 - a^2 + 2H(P)|. \quad (3.33)$$

*Démonstration.* Applications de la formule de divergence il faut vérifier (3.17) et (3.18) donnent

$$\begin{aligned} \|H(\phi) + \frac{1}{2}P\phi\|^2 &= \|H(\phi)\|^2 + (H(\phi), P\phi) + \frac{1}{4}\|P\phi\|^2 \\ &= \|H(\phi)\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} PH(\phi^2) dx + \frac{1}{4}\|P\phi\|^2 \\ &= \|H(\phi)\|^2 - \frac{1}{4} \int_{\Omega} \phi^2 [(div_0 H)^2 - a^2 + 2H(P)] dx \\ &\leq \|H(\phi)\|^2 + \frac{c}{4}\|\phi\|^2, \end{aligned} \quad (3.34)$$

puisque  $\phi|_{\Gamma} = 0$ . Il résulte de (3.34) et (3.33) que

$$\begin{aligned} |(\phi_t, H(\phi) + \frac{1}{2}P\phi)| &\leq \|\phi_t\| \|H(\phi) + \frac{1}{2}P\phi\| \\ &\leq \|\phi_t\| \left( \|H(\phi)\| + \sqrt{\frac{c}{4}}\|\phi\| \right) \\ &\leq bE(0) + \frac{\sqrt{c}}{2}\|\phi_t\|\|\phi\|. \end{aligned}$$

□

Maintenant, on considère le même opérateur  $\mathcal{A}$  défini sur  $L^2(\Omega)$ , avec le domaine

$$D(\mathcal{A}) = \{u | u \in H^2(\Omega), u|_{\Gamma} = 0\},$$

Notons que cet opérateur est positif, auto-adjoint sur  $L^2(\Omega)$  et son spectre se compose de valeurs propres  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots$ , avec  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$ .

On note  $Z_k$  les espaces propres de  $\mathcal{A}$  correspondant à  $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$

**Lemme 3.2.4.** *Soit*

$$\vartheta = \sup_{x \in \Gamma_0} [(H \cdot \nu) / |\nu_{\mathcal{A}}|_g^2] \quad \text{et} \quad d = \sup_{x \in \Omega} |\mathcal{A}(\operatorname{div}_0 H)|. \quad (3.35)$$

Alors

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right)^2 d\sigma dt \geq \frac{2}{\vartheta} \left[ aT - 2b - \sqrt{\frac{c}{\lambda_m}} - \frac{d}{2\lambda_m} T \right] E(0)$$

$$\forall T > 0, \quad \varphi_0 \in H_0^1(\Omega), \quad \varphi_1 \in L^2(\Omega), \quad \varphi_0, \varphi_1 \perp Z_k, \quad 1 \leq k \leq m-1, m = 1, 2, \dots, \quad (3.36)$$

où  $\phi$  est la solution de (3.4) pour les données initiales  $(\varphi_0, \varphi_1)$ .

*Démonstration.* Tout d'abord, nous calculons les valeurs de  $|grad_g\phi|^2$  et  $H(\varphi)$  sur la frontière  $\Gamma$ , respectivement. Soit  $x \in \Gamma$ . Nous décomposons  $grad_g\phi$  en une somme directe dans  $(\mathbb{R}_x^n, g(x))$  :

$$grad_g\phi(x) = \left\langle grad_g\phi(x), \frac{\nu_{\mathcal{A}}(x)}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g} \right\rangle_g \frac{\nu_{\mathcal{A}}(x)}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g} + Y(x). \quad (3.37)$$

où  $Y(x) \in \mathbb{R}_x^n$  avec  $\langle Y(x), \nu_{\mathcal{A}} \rangle_g = 0$ . Le lemme (3.2.3), partie 1, et (3.37) donnent

$$Y(x) \cdot \nu(x) = \langle Y(x), \nu_{\mathcal{A}} \rangle_g = 0, \quad (3.38)$$

c'est-à-dire  $Y(x) \in \Gamma_x$ , (l'espace tangent de  $\Gamma$  en  $x$ ). Il résulte de (3.37) et (3.38) que

$$\begin{aligned} |grad_g\phi|_g^2 = grad_g\phi(\phi) &= \frac{1}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g^2} \langle grad_g\phi(x), \nu_{\mathcal{A}}(x) \rangle_g^2 + Y(\phi) \\ &= \frac{1}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g^2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.39)$$

puisque  $\phi|_{\Gamma} = 0$ . De même,  $H$  peut être décomposé en une somme directe

$$H = \left\langle H(x), \frac{\nu_{\mathcal{A}}(x)}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g} \right\rangle_g \frac{\nu_{\mathcal{A}}(x)}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g} + Z(x),$$

où  $Z(x) \in T_x\Gamma$ . La formule (3.2) et le lemme 3.2.3, partie 1, donnent

$$H(\phi)(x) = \frac{\langle H(x), \nu_{\mathcal{A}}(x) \rangle_g}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g^2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \right) = \frac{H(x) \cdot \nu(x)}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g^2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \right) \quad (3.40)$$

Par la proposition 3.2.1, parties 1 et 2, (3.45), (3.44), (3.39), (3.40) et le lemme 3.2.3, on trouve que,

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left( \frac{\partial\phi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \right)^2 d\sigma dt &\geq \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial\phi}{\partial\nu_{\mathcal{A}}} \right)^2 \frac{H \cdot \nu}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g^2} d\sigma dt \\ &\geq (\phi_t, H(\phi))|_0^T + \int_0^T \int_{\Omega} \langle D_{grad_g\phi} H, grad_g\phi \rangle_g dx dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\phi_t^2 - |grad_g\phi(x)|_g^2) div_0(H) dx dt \\ &\geq \frac{a}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\phi_t^2 - |grad_g\phi(x)|_g^2) dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Omega} \langle D_{grad_g\phi} H, grad_g\phi \rangle dx dt \\ &\quad - a \int_0^T \int_{\Omega} |grad_g\phi|_g^2 dx dt + (\phi_t, H(\phi))|_0^T \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\phi_t^2 - |grad_g\phi|_g^2) P dx dt \\ &\geq aTE(0) + (\phi_t, H(\phi) + \frac{1}{2}P\phi)|_0^T + \frac{1}{4} \int_0^T \int_{\Omega} \phi^2 \mathcal{A}(div_0 H) dx dt \\ &\geq aTE(0) - 2bE(0) - \sqrt{c} \|\phi_t\| \|\phi\| - \frac{d}{4} \int_0^T \|\phi\|^2 dt \\ &\geq aTE(0) - 2bE(0) - \sqrt{\frac{c}{\lambda_m}} \|\phi_t\| \|\phi\| - \frac{d}{4\lambda_m} \|grad_g\phi|_g\|^2 dt \\ &\geq \left[ aT - 2b - \sqrt{\frac{c}{\lambda_m}} - \frac{d}{2\lambda_m} T \right] E(0) \end{aligned}$$

où les inégalités  $\|\phi\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_m} \| |\text{grad}_g \phi|_g \|^2$  et (3.36) sont utilisés. Ceci complète la preuve.  $\square$

Maintenant, on considère le même opérateur  $\mathcal{A}$  définie sur  $L^2(\Omega)$  avec le domaine

$$D_0(\mathcal{A}) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid u \in H^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \Big|_{\Gamma} = 0 \right\}.$$

Notons que cet opérateur est positif, auto adjoint sur  $L^2(\Omega)$  et son spectre se compose de valeur propres  $0 = \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_k < \dots$  avec  $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = \infty$ .

On note  $Z_k^0$  les espaces propres de  $\mathcal{A}$  correspondant à  $\gamma_k$  pour  $k = 1, 2, \dots$ ,

**Lemme 3.2.5.** *Soit  $m \geq 2$  un entier positif, avec  $P$  et  $d$  comme donné en (3.32) et (3.35) respectivement. Soit*

$$e = \sup_{x \in \Omega} |P|$$

Supposons que  $\phi$  la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \phi_{tt} + \mathcal{A}\phi = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \phi(0) = \phi_0, \quad \phi_t(0) = \phi_1 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} = 0 & \text{sur } \Gamma \times (0, T). \end{cases} \quad (3.41)$$

pour tout  $(\phi_0, \phi_1) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  avec  $\phi_0, \phi_1 \perp Z_k^0$ ,  $1 \leq k \leq m-1$ , pour lequel le membre gauche de (3.32) est fini, où cette fois

$$E(0) = \frac{1}{2} \left( \|\phi_0\|_{H^1}^2 + \|\phi_1\|_2^2 \right).$$

Alors

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Gamma_0} \phi_t^2 H \cdot \nu \, d\sigma dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\text{grad}_g \phi|_g^2 H \cdot \nu \, d\sigma dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} \phi^2 \text{grad}_g(\text{div}_0(H)) \cdot \nu \, d\sigma dt \\ & \geq 2 \left[ aT - 2b - \frac{e}{\sqrt{\gamma_m}} - \frac{Td}{2\gamma_m} \right] E(0), \quad \forall T > 0, \end{aligned}$$

*Démonstration.* Puisque  $\frac{\partial \phi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \Big|_{\Gamma} = 0$  et  $H(x) \cdot \nu(x) \leq 0$  pour  $x \in \Gamma$  à partir de la proposition 3.2.1, on a,  $\forall T > 0$ ,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Gamma_0} \phi_t^2 H \cdot \nu \, d\sigma dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\text{grad}_g \phi|_g^2 H \cdot \nu \, d\sigma dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} \phi^2 \text{grad}_g P \cdot \nu \, d\sigma dt \\ & = 2aTE(0) - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \phi_t^2 H \cdot \nu \, d\sigma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_0} |\text{grad}_g \phi|_g^2 H \cdot \nu \, d\sigma dt + 2(\phi_t, H(\phi)) \Big|_0^T \\ & \quad + 2 \int_0^T \int_{\Omega} \langle D \text{grad}_g \phi H, \text{grad}_g \phi \rangle_g \, dx dt - 2a \int_0^T \int_{\Omega} |\text{grad}_g \phi|_g^2 \, dx dt + (\phi_t, \phi P) \Big|_0^T \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \phi^2 \mathcal{A} P \, dx dt \\ & \geq 2aTE(0) - 4\|\phi_t\| \|H(\phi)\| - 2\|\phi_t\| \|\phi P\| - \frac{d}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \phi^2 \, dx dt \\ & \geq 2 \left[ aT - 2b - \frac{e}{\sqrt{\gamma_m}} - \frac{Td}{2\gamma_m} \right] E(0), \end{aligned}$$

où les inégalités  $\|\phi\|^2 \leq \frac{1}{\gamma_m} \|\text{grad}_g \phi|_g\|_2^2$

$\forall (\varphi_0, \varphi_1) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  avec  $\varphi_0, \varphi_1 \perp Z_k^0$ ,  $1 \leq k \leq m-1$ , pour lesquels le membre gauche de (3.32) est fini,  $\|\text{grad}_g \phi_g\|^2 \forall (\varphi_0, \varphi_1) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ ,  $\varphi_0, \varphi_1 \perp Z_k^0$ ,  $1 \leq k \leq m-1$  sont utilisés.  $\square$

Considérons l'opérateur le même opérateur avec domaine

$D_{\Gamma_1}(\mathcal{A}) = \left\{ u \mid u \in H^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \Big|_{\Gamma_0} = 0, u \Big|_{\Gamma_1} = 0 \right\}$ , et son le spectre se compose de valeurs propres  $0 \leq \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_k < \dots$  avec  $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \infty$ .

On note  $Z_k^{\Gamma_1}$  les espaces propres correspondant à  $\beta_k$  pour  $k = 1, 2, \dots$ ,

**Lemme 3.2.6.** *Soit  $m$  un entier positif et  $e, d$  les mêmes que ceux du lemme 3.2.5 Soit  $\phi$  résoudre le problème*

$$\begin{cases} \phi_{tt} + \mathcal{A}\phi = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \phi(0) = \phi_0, \phi_t(0) = \phi_1 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial \phi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \phi = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (3.42)$$

pour tout  $(\varphi_0, \varphi_1) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  avec  $\varphi_0, \varphi_1 \perp Z_k^0$ ,  $1 \leq k \leq m-1$ , pour lequel le membre gauche de (3.43) est fini, où

$$E(0) = \frac{1}{2} (\|\phi_0\|_{H^1}^2 + \|\phi_1\|_2^2).$$

Alors

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Gamma_0} \phi_t^2 H \cdot \nu d\sigma dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} \phi^2 \text{grad}_g(\text{div}_0(H)) \cdot \nu d\sigma dt \\ & \geq 2 \left[ aT - 2b - \frac{e}{\sqrt{\beta_m}} - \frac{Td}{2\beta_m} \right] E(0), \quad \forall T > 0, \end{aligned} \quad (3.43)$$

*Démonstration.* Puisque  $\frac{\partial \phi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \Big|_{\Gamma_0} = 0$  et  $\phi \Big|_{\Gamma_1} = 0$ , on obtient, à partir de (3.39) et (3.40), et la proposition 3.2.1 :  $\forall T > 0$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Gamma_0} \phi_t^2 H \cdot \nu d\sigma dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} \phi^2 \text{grad}_g(\text{div}_0(H)) \cdot \nu d\sigma dt = \int_0^T \int_{\Gamma_0} |\text{grad}_g \phi|_g^2 H \cdot \nu d\sigma dt \\ & - \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right)^2 \frac{H \cdot \nu}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g^2} d\sigma dt + 2aTE(0) + 2 \int_0^T \int_{\Omega} \langle D \text{grad}_g \phi H, \text{grad}_g \phi \rangle_g d\sigma dt \\ & - 2a \int_0^T \int_{\Omega} |\text{grad}_g \phi|_g^2 d\sigma dt + 2(\phi_t, H(\phi)) \Big|_0^T + (\phi_t, \phi P) \Big|_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \phi^2 \mathcal{A} P dx dt \\ & \geq 2aTE(0) - 4\|\phi_t\| \|H(\phi)\| - 2\|\phi_t\| \|\phi P\| - \frac{d}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \phi^2 dx dt \\ & \geq 2 \left[ aT - 2b - \frac{e}{\sqrt{\beta_m}} - \frac{Td}{2\beta_m} \right] E(0), \end{aligned}$$

où les inégalités  $\|\phi\|^2 \leq \frac{1}{\gamma_m} \|\text{grad}_g \phi|_g\|_2^2$  pour tout  $(\varphi_0, \varphi_1) \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  avec  $\varphi_0, \varphi_1 \perp Z_k^{\Gamma_1}$ ,  $1 \leq k \leq m-1$ .  $\square$

### 3.3 Preuve du Principaux théorèmes

**Théorème 3.3.1.** *Soit  $H$  un champ de vecteur sur la variété Riemannienne  $(\mathbb{R}^n, g)$  tel que*

$$\langle D_X H, g \rangle_g \geq a|X|_g^2 \quad \forall X \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \Omega \quad (3.44)$$

pour une constante  $a > 0$ . Alors il existe  $T_0$  tel que pour tout  $T > T_0$ ,

$$F_{T, \Gamma_0} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

où

$$\Gamma_0 = \{x | x \in \Gamma, H(x) \cdot \nu(x) > 0\}, \quad (3.45)$$

$$T_0 = \frac{2}{a} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |H|_g(x). \quad (3.46)$$

*Démonstration. Cas :  $n = 1$*

Soit  $l > 0$  et  $a(\cdot) \in C^1(0, 1)$ , avec  $a(x) > 0$  pour tout  $x \in [0, l]$ . Pour le système

$$\begin{cases} \phi_{tt} = (a(x)\phi_x)_x & \text{sur } 0 < t < T, 0 < x < l, \\ \phi(t, 0) = \phi(t, l) = 0, & \text{sur } 0 < t < T, \\ \phi(0, x) = \phi_0(x), \quad \phi_t(0, x) = \phi_1(x), & \text{sur } 0 < x < l. \end{cases} \quad (3.47)$$

Multiplions la premier équation de (3.47)  $h\phi_x$ , où  $h$  est une fonction définie sur  $[0, l]$ , on obtient

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^l (ah\phi_x^2)_x dx dt = (\phi_t, h\phi_x)|_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^l h_x(\phi_t^2 + a(x)\phi_x^2) dx dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^l a_x h \phi_x^2 dx dt.$$

Soit  $h$  une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} h_x = \frac{b}{a} h + 1, \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

où  $b(x) = \max(a_x, 0)$ , par exemple

$$h(x) = e^{\int_0^x \frac{b}{a} dx} \int_0^x e^{-\int_0^s \frac{b}{a} d\tau} ds, \quad 0 \leq x \leq l.$$

On obtient, pour  $h$ , défini que :

$$a(l)h(l) \int_0^T \phi_x^2(t, l) dt \geq 2TE(0) + 2(\phi_t, h\phi_x)|_0^T, \quad T > 0$$

où  $E(0) = \frac{1}{2} \int_0^l (\phi_t^2 + a\phi_x^2) dx$ .

**Cas :  $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$**

Soit  $T_0$  est définie par (3.46) . Soit  $T > T_0$  on choisit  $m$  assez grand de sorte que

$$T - T_0 - \frac{1}{a} \sqrt{\frac{c}{\lambda_m}} - \frac{Td}{2a\lambda_m} > 0$$

D'après le lemme (3.2.4) on obtient  $\int_0^T \int_{\gamma_0} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right)^2 d\sigma dt \geq CE(0)$ ,

$$\forall \varphi_0 \in H_0^1(\Omega), \varphi_1 \in L^2(\Omega), \varphi_0, \varphi_1 \perp Z_k, 1 \leq k \leq m-1, \quad (3.48)$$

où  $\phi$  solution du (3.4) pour condition initiale  $(\varphi_0, \varphi_1)$  et

$$c(T) = \frac{2}{\vartheta} a \left( T - T_0 - \frac{1}{a} \sqrt{\frac{c}{\lambda_n}} - \frac{Td}{2a\lambda_n} \right) > 0.$$

□

**Remarque 3.3.1.** Soient  $(\mathbb{R}^n, g)$  une variété Riemannienne complet non compacte. Pour toute courbure sectionnelle positive, il existe une fonction  $h$  strictement convexe de classe  $C^\infty$  et toutes les valeurs propres de sa seconde différentielle covariante sont positif. On prend :  $H = DH$  et on a  $DH(X, X) = D^2h(X, X)$ ,  $X \in \mathbb{R}_x^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Où  $D^2h$  est le Hessein de  $h$  pour la métrique  $g$ . Il existe  $a > 0$  tel que l'inégalité (3.44) soit vérifier, puisque  $\bar{\Omega}$  est compact.

**Corollaire 3.3.1.** Soit  $(\mathbb{R}^n, g)$  une variété Riemannienne complète non compact et de courbure sectionnelle partout positif.  $h$  est une fonction de classe  $C^\infty$  strictement convexe  $C^\infty$  sur  $(\mathbb{R}^n, g)$ . Alors le champ de vecteur  $H = DH$  vérifie la condition(3.44) pour tout  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Pour  $x \in \mathbb{R}^n$ , soit  $P = \pi \subset \mathbb{R}_x^n$  un sous-espace de dimension 2. Notons par  $K_x(\pi)$  la courbure sectionnelle. Soit  $B(x_0, \gamma)$  la boule géodésique dans  $(\mathbb{R}^n, g)$  de centre  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et de rayon  $\gamma > 0$ . On pose :

$$K_B = \sup_{x \in B(x_0, \gamma), \pi \subset \mathbb{R}_x^n} K_x(\pi), \quad \rho(x) = d_g(x_0, x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

**Corollaire 3.3.2.** Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Soit  $\gamma > 0$  tel que  $B(x_0, \delta) \subset \exp_{x_0}(E)$ . Si  $\Omega \subset B(x_0, \gamma)$  tel que  $4\delta^2 K_B < \pi^2$ , alors le champ de vecteurs  $H\rho D\rho$  satisfait à la condition (3.44) avec

$$\begin{cases} a = \sqrt{K_B} \gamma \cot(\sqrt{K_B} \gamma) & \text{si } K_B > 0 \\ a = 1 & \text{si } K_B \leq 0 \end{cases}$$

**Corollaire 3.3.3.** Si  $(\mathbb{R}^n, g)$  possède une courbure sectionnelle non positive (négative). Pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , le champ de vecteur  $H = \rho D\rho$  satisfait à la condition (3.44) pour tout  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  où  $a = 1$ .

**Corollaire 3.3.4.** Supposons que

$$K \geq \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \pi \in \mathbb{R}_x^n} K_x(\pi) \geq \inf_{x \in \mathbb{R}^n, \pi \in \mathbb{R}_x^n} K_x(\pi) > 0.$$

Par le théorème de Bonnet (Cheeger et Ebin[5]), la complétude  $(\mathbb{R}^n \cup \infty, g)$  de  $(\mathbb{R}^n, g)$  est une métrique Riemannienne compact.

Si  $d_g(\Omega) \sup_{x, y \in \Omega} d_g(x, y) < \frac{1}{2} \min\left\{ \frac{\pi}{\sqrt{K}} \right\}$  la plus courte de la moitié de la longueur la plus courte fermé de  $\mathbb{R}^n$ , alors le champ de vecteur  $H = \rho D\rho$  vérifie la condition (3.44).

Passons maintenant au problème d'action de Neumann et examinons le problème (3.1) avec au lieu de condition Dirichlet dans (3.2), on considère la condition de Neumann c-à-d le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt} + \mathcal{A}u = 0 & \text{sur } \Omega \times (0, T) \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\ u = v & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} = v \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T). \quad (3.50)$$

On dit que la problème (3.1),(3.50) est contrôlablement exacte dans l'intervalle  $[0, T]$  au moyen de la fonction de contrôle  $v$  avec action de Neumann, si pour  $\varphi_0, \varphi_1$  dans certains espace Hilbert, on peut trouver  $v$  tel que solution de (3.1) satisfait (3.3).

**Théorème 3.3.2.** *Soit  $H$  un champ de vecteur sur  $(\mathbb{R}^n, g)$  satisfait la condition (3.44). Soit  $T_0$  donnée par (3.46) et  $T > T_0$ . Alors, pour toute solution  $\varphi_0 \in L^2(\Omega), \varphi_1 \in (H^1(\Omega))'$ , on peut trouver  $v$  sur  $\Gamma \times (0, T)$  tel que la solution du problème (3.1) satisfait (3.3). Le contrôle  $v$  à la structure suivante :*

$$\begin{cases} v = v_0 + \frac{\partial v_1}{\partial t} & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T) \\ v_2 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \end{cases}$$

où

$$v_0, v_1 \in L^2(\Gamma_0 \times (0, T)), v_2 \in L^2(0, T, (H^1(\Gamma_1))').$$

**Remarque 3.3.2.** *Si  $\Omega$  et  $H$  sont soumis aux conditions géométriques (Lions[11])*

$$H(x) \cdot \nu(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Gamma,$$

alors le contrôle  $v \in L^2(\Gamma \times (0, T))$

*Démonstration.*  $\Gamma$  est une sous-variété de Riemannienne  $(\mathbb{R}^n, g)$  avec la métrique Riemannienne induite  $g_{\Gamma}$  dans  $(\mathbb{R}^n, g)$ .

$$\Delta_g f = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}(x)}} \sum_{ij=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mathcal{G}(x) a_{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x_j} \right), \quad \forall f \in C^2 \in (\mathbb{R}^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.51)$$

où  $\mathcal{G}(x) = \det G(x)$ .

Par la formule de divergence pour métrique Riemannienne  $g$  et de la partie 1 du lemme 3.2.1, on a

$$\int_{\Omega} \Delta_g f d\Omega_g = \int_{\Gamma} \left\langle \text{grad}_g f, \frac{\nu_{\mathcal{A}}}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g} \right\rangle_g d\sigma_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \frac{1}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g} \text{grad}_g f \cdot \nu d\sigma_{\Gamma}, \quad \forall f \in C^2(\bar{\Omega}), \quad (3.52)$$

où  $\Omega_g$  et  $d\sigma_{\Gamma}$  sont l'élément de volume métrique et l'élément de surface métrique dans métrique Riemannienne  $g$ , respectivement. On vérifie que  $d\Omega_g = \sqrt{\mathcal{G}(x)} dx$ .

De (3.51) et de la partie 2 du lemme 3.2.1, on obtient

$$\int_{\Omega} \Delta_g f d\Omega_g = \int_{\Omega} \text{div}_0(\sqrt{\mathcal{G}(x)} \text{grad}_g f) dx = \int_{\Gamma} \sqrt{\mathcal{G}(x)} \text{grad}_g f \cdot \nu d\sigma \quad \forall f \in C^2(\bar{\Omega}). \quad (3.53)$$

Les formules (3.53) et (3.52) donnent

$$d\sigma_\Gamma = |\nu_{\mathcal{A}}|_g \sqrt{\mathcal{G}(x)} d\sigma. \quad (3.54)$$

On dénotez gradient ( $grad_\Gamma$ ), divergence ( $div_\Gamma$ ), et l'opérateur de Laplace ( $\Delta_\Gamma$ ) sur  $(\Gamma, g_\Gamma)$ ,  $\Delta_g$  l'opérateur de Laplace sur  $\mathbb{R}^n$  pour la métrique Riemannien  $g$ . on a l'application sur  $(\Gamma, g_\Gamma)$ . De plus, par le théorème de Stokes pour la variété Riemannienne  $(\Gamma, g_\Gamma)$ , on a

$$-\int_\Gamma f \Delta_\Gamma f d\sigma_\Gamma = \int_\Gamma |grad_\Gamma f|_g^2 d\sigma_\Gamma,$$

pour tout  $f \in H^1(\Gamma)$ .

Soit  $\phi$  solution le problème (3.42) pour les données initiales  $(\varphi_0, \varphi_1)$ . Alors

$$|grad_g \phi|_g^2 = \left( \frac{\partial \phi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right)^2 + |grad_\Gamma \phi|_g^2 = |grad_g \phi|_g^2, \quad \forall x \in \Gamma, \quad (3.55)$$

puisque  $\frac{\partial \phi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} = 0$  sur  $\Gamma$ . On définit  $\psi$  par

$$\begin{cases} \psi_{tt} + \mathcal{A}\psi = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \psi(T) = \psi_t(T) = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} = \begin{cases} (\phi_{tt} - \phi) |\nu_{\mathcal{A}}|_g \sqrt{\mathcal{G}(x)} & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T) \\ (\Delta_\Gamma \phi - \phi) |\nu_{\mathcal{A}}|_g \sqrt{\mathcal{G}(x)} & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \end{cases} \end{cases} \quad (3.56)$$

La solution de (3.56) est une solution faible, définie par transposition. Par conséquent, étant donné  $(\varphi_0, \varphi_1)$

$$\wedge_1(\varphi_0, \varphi_1) = (\psi_t(0), -\psi(0))$$

Alors, à partir de (3.42), (3.56), (3.55) et (3.54), on obtient, au sens de distribution

$$\langle \wedge_1(\varphi_0, \varphi_1), (\varphi_0, \varphi_1) \rangle = \int_0^T \int_{\Gamma_0} (\phi^2 + \phi_t^2) d\sigma_\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} (\phi^2 + |grad_\Gamma \phi|_g^2) d\sigma_\Gamma dt.$$

Nous définissons sur les données initiales  $(\varphi_0, \varphi_1)$

$$\|(\varphi_0, \varphi_1)\|_F = \left( \int_0^T \int_{\Gamma_0} (\phi^2 + \phi_t^2) d\sigma_\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} (\phi^2 + |grad_\Gamma \phi|_g^2) d\sigma_\Gamma dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On pose

$$\chi(T) = \left\{ (\varphi_0, \varphi_1) \mid (\varphi_0, \varphi_1) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \|(\varphi_0, \varphi_1)\|_F < \infty \right\}.$$

Alors  $\chi(T) \subset F$ . On vérifie facilement que  $\|\cdot\|_F$  est un semi-norme sur  $\chi(T)$ .

Soit  $T_0$  donné dans (3.46) et  $T > T_0$ . Supposons que  $m$  en suffisamment grand de sorte que

$$T - T_0 - \frac{e}{a\sqrt{\gamma m}} - \frac{Td}{2a\gamma m} > 0.$$

$$\epsilon = \max \left( \sup_{x \in \Gamma} \frac{|H \cdot \nu|}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g \sqrt{\mathcal{G}(x)}}, \sup_{x \in \Gamma} \frac{|\nabla_g (div_0 H) \cdot \nu|}{2|\nu_{\mathcal{A}}|_g \sqrt{\mathcal{G}(x)}} \right) \quad (3.57)$$

Soit vérifie

$$c_m = \frac{2a}{\epsilon} \left( T - T_0 - \frac{e}{a\sqrt{\gamma m}} - \frac{Td}{2a\gamma m} \right). \quad (3.58)$$

Le lemme 3.2.6, (3.54), (3.57) et (3.58) donnent

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} (\phi^2 + \phi_t^2) d\sigma_\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} (\phi^2 + |\text{grad}_\Gamma \phi|_g^2) d\sigma_\Gamma dt \geq c_m E(0),$$

$$\forall (\varphi_0, \varphi_1) \in \chi(T), \varphi_0, \varphi_1 \perp Z_k^0, 1 \leq k \leq m-1 \quad (3.59)$$

Par l'argument de la compacité, on montre que  $c(T) > 0$  tel que

$$\|(\varphi_0, \varphi_1)\|_F^2 \geq c(T)E(0) \quad \forall (\varphi_0, \varphi_1) \in \chi(T). \quad (3.60)$$

Par absurde, supposons que l'inégalité (3.60) n'est pas vérifiée, alors il existe une suite  $\{(\varphi_0^k, \varphi_1^k)\} \subset H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  avec

$$E_k(0) = \frac{1}{2} \left( \|\phi_k^0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\phi_k^1\|^2 \right) = 1 \quad (3.61)$$

pour tout  $k \geq 1$  tel que

$$\|(\varphi_k^0, \varphi_k^1)\|_F \leq \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N}^*. \quad (3.62)$$

On décompose  $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  en une somme directe :

$$H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) = \left( \left( \bigoplus_{k=1}^{m-1} Z_k^0 \right) \times \left( \bigoplus_{k=1}^{m-1} Z_k^0 \right) \right) \oplus \tilde{W}.$$

avec

$$\dim \left( \left( \bigoplus_{k=1}^{m-1} Z_k^0 \right) \times \left( \bigoplus_{k=1}^{m-1} Z_k^0 \right) \right) < \infty.$$

Soit

$$(\varphi_0^k, \varphi_1^k) = \tilde{u}_k + \tilde{w}_k, \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad (3.63)$$

où  $\tilde{u}_k \in \left( \bigoplus_{k=1}^{m-1} Z_k^0 \right) \times \left( \bigoplus_{k=1}^{m-1} Z_k^0 \right)$  et  $\tilde{w}_k \in \tilde{W}$  nous pouvons supposer que

$$\tilde{u}_k \rightarrow \tilde{u}_0 \in \chi(T) \quad \text{dans} \quad \|\cdot\|_F, \quad k \rightarrow \infty \quad (3.64)$$

Puisque  $\|\cdot\|_F$  est un semi-norme sur  $\chi(T)$ , on obtient de (3.2.5), (3.59), (3.60) et (3.63) vérifie que,  $\forall k > 1, \forall j \leq 1$  : cette

$$\sqrt{c_m} \|\tilde{w}_k - \tilde{w}_j\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \leq \|\tilde{w}_k - \tilde{w}_j\|_F \leq \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{j} \right) + \|\tilde{u}_k - \tilde{u}_j\|_F$$

Cela signifie que par (3.64),

$$(\varphi_k^0, \varphi_k^1) \rightarrow (u_0, u_1) \quad \text{dans} \quad H^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \quad k \rightarrow \infty \quad (3.65)$$

Il résulte de (3.61) et (3.65) que

$$\|(u_0, u_1)\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} = 1.$$

Soit  $\phi_0$  solution du problème (3.41) pour  $(\varphi_0, \varphi_1) = (u_0, u_1)$ . Alors  $\frac{\partial \phi_0}{\partial \nu_A} \Big|_\Gamma = 0$ .

De plus, par le théorème de trace, (3.3), et (3.62), il existe une constante  $\beta > 0$  telle que

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\phi_0\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt &\leq \int_0^T \|\phi_0 - \phi^k\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt + \int_0^T \|\phi^k\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt \\ &\leq \beta \int_0^T \|\phi_0 - \phi^k\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + \|(\varphi_0^k, \varphi_1^k)\|_F^2 \\ &\leq \beta T \|(u_0, u_1) - (\varphi_0^k, \varphi_1^k)\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{k^2}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

où  $\phi^k$  est la solution du système(3.41) avec les données initiales  $(\varphi_0, \varphi_1) = (\varphi_0^k, \varphi_1^k)$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Les expressions (3.65) et (3.66) donnent

$$\phi_0|_{\Gamma} = 0, \quad (3.67)$$

à partir de (3.67), nous pouvons appliquer l'inégalité d'observabilité à  $\phi_0$  et obtenir  $(u_0, u_1) = 0$  ce qui contredisant (3.3) par dualité que L'inégalité  $F \subset H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ ,  $T > T_0$ .

Il s'ensuit que  $(H^1(\Omega))' \times L^2(\Omega) \subset F'$ , de sorte que, si  $u_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $u_1 \in (H^1(\Omega))'$ , on peut conduire le système (3.1),(3.2) au repos T par la fonction de contrôle  $v$  donnée par

$$v = \begin{cases} (-\phi + \phi_{tt})|\nu_{\mathcal{A}}|_g \sqrt{\mathcal{G}(x)} & \text{dans } \Gamma_0 \times (0, T) \\ (-\phi + \Delta_{\Gamma}\phi)|\nu_{\mathcal{A}}|_g \sqrt{\mathcal{G}(x)} & \text{dans } \Gamma_1 \times (0, T) \end{cases}$$

Ceci complète la preuve du théorème.  $\square$

**Théorème 3.3.3.** *Soit  $H$  un champ de vecteurs dans  $(\mathbb{R}^n, g)$  tel que la condition (3.44) Soit  $T_0$  donnée en (3.46) et  $T > T_0$ . Alors pour tout  $\varphi_0 \in H^1(\Omega)$ ,  $\varphi_1 \in L^2(\Omega)$ , on peut trouver  $v \in L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$  tel que la solution de (3.1) et (3.49) satisfait (3.3).*

*Démonstration.* Soit  $T_0$  donné par (3.46) et  $T > T_0$ . Puisque

$$\Gamma_1 = \{x|x \in \Gamma, H(x).\nu(x) = 0\},$$

en commençant par le lemme 3.2.5 et en suivant la démonstration du théorème 3.3.2, on obtient l'inégalité suivante :

$$\int_0^T \int_{\Gamma} (\phi^2 + \phi_t^2) d\sigma dt \geq c_T E(0), \quad (3.68)$$

où  $c_T > 0$  est une constante. Dans ce cas, on a défini la norme de  $(\varphi_0, \varphi_1)$  par

$$\|\varphi_0, \varphi_1\|_F = \int_0^T (\phi^2 d\sigma dt)^{\frac{1}{2}}.$$

D'après (3.68), par argument similaire par celle de même Lions [11] donne

$$\int_0^T \phi^2 d\sigma dt \geq c'_T E(0).$$

Ceci complète notre preuve.  $\square$

On considérons le problème de contrôlabilité exacte suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} + \mathcal{A}u = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ u(0) = u_0 \quad u_t(0) = u_1 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} = v & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \quad (3.69)$$

**Théorème 3.3.4.** *Soit  $H$  un champ de vecteur sur la variété Riemannienne  $(\mathbb{R}^n, g)$  tel que la condition (3.44) est vérifier. Soit  $T_0$  donnée en (3.46). Alors pour tout  $T > T_0$ ,  $u_0 \in L^2$ ,  $u_1 \in (H_{\Gamma_1}^1(\Omega))'$ , on peut trouver  $v$  tel que la solution  $u$  du problème (3.69) satisfait (3.3), où*

$$v = v_0 + \frac{\partial v_1}{\partial t}, v_0, v_1 \in L^2(\Gamma_0 \times (0, T)).$$

*Démonstration.* Soit  $T_0$  donné dans (3.46) et  $T > T_0$ . Soit  $\phi$  résoudre le problème (3.42). A partir du lemme 3.2.6 et en suivant la démonstration du théorème 3.3.3, on peut obtenir  $c_T > 0$ , satisfaisant

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} (\phi^2 + \phi_t^2) d\sigma dt \geq c_T E(0), \quad (3.70)$$

on défini la norme de  $(\varphi_0, \varphi_1)$  pour tout  $(\varphi_0, \varphi_1) \in H_{\Gamma}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , et le membre de gauche de (3.70) est fini. Sur les données initiales  $(\varphi_0, \varphi_1)$ , nous définissons la norme par

$$\|(\varphi_0, \varphi_1)\|_F = \left( \int_0^T \int_{\Gamma_0} (\phi^2 + \phi_t^2) d\sigma dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

De (3.70), on a  $F \subset (\varphi_0, \varphi_1) \in H_{\Gamma}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , par dualité on trouve

Puis  $F' \subset (\varphi_0, \varphi_1) \in (H_{\Gamma}^1(\Omega))' \times L^2(\Omega)$ . Ceci complète notre preuve, où nous prenons  $v = \phi + \phi_{tt}$  sur  $\Gamma_0$   $\square$

## 3.4 Exemples

**Exemple 3.1.** Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice constante symétrique positive. Considérons l'opérateur  $\mathcal{A}$  sur  $\mathbb{R}^n$ , donné par  $\mathcal{A}u = \sum_{ij=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ . La métrique riemannienne  $(\mathbb{R}^n, g)$ , est défini par

$$g = \sum_{i,j}^n g_{ij} dx_i dx_j \quad \text{et} \quad (g_{ij}) = (a_{ij})^{-1} \quad (3.71)$$

la courbure sectionnelle est nulle.

Par corollaire 3.3.2,  $a = 1$ . Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . La fonction distance  $\rho$  satisfait

$$\rho^2(x) = d_g^2(x_0, x) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x_i - x_{i0}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.72)$$

On obtient

$$\frac{\partial h}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^n g_{ik}(x_j - x_{j0}) \quad (3.73)$$

où  $h = \frac{1}{2}\rho^2(x)$ . Il découle de (3.73) et de la partie 2 du lemme 3.2.1 que

$$\text{grad}_g h = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} \frac{\partial h}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i0}) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (3.74)$$

Cela donne

$$\sup_{x \in \Omega} |\nabla_g h|_g(x) = \sup_{x \in \Omega} \rho(x) \quad (3.75)$$

de sorte que le champ de vecteur  $H = \text{grad}_g h$  satisfait la condition (3.44) avec  $T_0 = 2 \sup_{x \in \Omega} \rho(x)$  pour tout  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

**Lemme 3.4.1.** Soient  $a_1, a_2, \dots, a_n$  des nombres positifs et  $M$  est l'hypersurface de  $\mathbb{R}^{n+1}$  donné par

$$M = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \mid x_{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 \right\} \quad (3.76)$$

muni de la métrique riemannienne induite dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Alors  $M$  possède de une courbure sectionnelle partout positif.

*Démonstration.* Soit  $p = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in M$ , alors

$$M_p = \left\{ X \mid X = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \alpha_{n+1} = \sum_{i=1}^n a_i x_i \alpha_i \right\}. \quad (3.77)$$

Soit

$$Z = \sum_{i=1}^n a_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \quad (3.78)$$

Alors  $v(p) = \frac{Z}{|Z|_0}$  est un champ de vecteur normal unitaire on  $M$ . On note par  $D_0$  la connexion du métrique plate habituelle de  $\mathbb{R}^{n+1}$  par  $D_0$ .

Soit  $X, Y$  du champs de vecteurs sur  $M$ . La second de la forme fondamentale de  $M$  est donnée par

$$S(X, Y) = -[(D_X^0 Y) \cdot \nu]. \quad (3.79)$$

Soit

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + a_i x_i \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.80)$$

Alors  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  est une base de  $\mathcal{H}(M)$ . Puisque  $D_{\frac{\partial}{\partial x_k}}^0 \frac{\partial}{\partial x_i} = 0$  pour  $1 \leq k, i \leq n+1$ , on obtient de (3.80)

$$D_{X_i}^0 X_j = X_i(a_j x_j) \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} = \frac{\partial}{\partial x_i} (a_j x_j) \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} = \Delta_{ij} a_j \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (3.81)$$

Il découle de (3.79) et (3.81) que

$$S(X_i, X_j) = \frac{\Delta_{ij} a_j}{|Z|_0} \nu_i, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} R(X, Y, X, Y) &= S(X, X) \cdot S(Y, Y) - |S(X, Y)|_0^2 \\ &= \frac{1}{|Z|_0} \left[ \left( \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n a_i \beta_i^2 \right) - \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i \beta_i \right] > 0. \end{aligned} \quad (3.83)$$

On note le tenseur de courbure de la métrique riemannienne de  $M$  par  $\mathbb{R}$ .

Soit  $\pi \subset M_p$  un sous-espace bidimensionnel et  $X, Y$  une base de  $\pi$ , où  $X = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$  et

$Y = \sum_{i=1}^n \beta_i X_i$ . À partir de (3.82) et de l'équation de Gauss

depuis  $X, Y$  sont linéairement indépendants. L'équation (3.83) complète la démonstration  $\square$

**Exemple 3.2.** Soit  $a_i > 0$  des constantes, avec  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Considérez l'opérateur sur  $\mathbb{R}^n$  défini par

$$Au = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1 + \sum_{j \neq i}^n a_j^2 x_j^2}{1 + \sum_{k=1}^n a_k^2 x_k^2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i \neq j}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{a_i a_j x_i x_j}{1 + \sum_{k=1}^n a_k^2 x_k^2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right).$$

On pose

$$A(x) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n a_k^2 x_k^2} \begin{pmatrix} 1 + \sum_{i=2}^n a_i^2 x_i^2 & -a_1 a_2 x_1 x_2 & \cdots & -a_1 a_n x_1 x_n \\ -a_2 a_n x_1 x_n & 1 + \sum_{i \neq 1}^n a_i^2 x_i^2 & \cdots & -a_2 a_n x_2 x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_n a_1 x_n x_1 & -a_n a_2 x_n x_2 & \cdots & +1 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 x_i^2 \end{pmatrix} \quad (3.84)$$

Alors

$$G(x) = A^{-1}(x) = \begin{pmatrix} 1 + a_1^2 x_1^2 & a_1 a_2 x_1 x_2 & \cdots & a_1 a_n x_1 x_n \\ a_2 a_n x_1 x_n & 1 + a_2^2 x_2^2 & \cdots & a_2 a_n x_2 x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n a_1 x_n x_1 & a_n a_2 x_n x_2 & \cdots & 1 + a_n^2 x_n^2 \end{pmatrix} \quad (3.85)$$

Considérons la variété riemannienne  $(\mathbb{R}^n, g)$ , où la métrique riemannienne  $g$  est déterminée par

$$g = \sum_{i,j=1}^n (\delta_{ij} + a_i a_j x_i x_j) dx_i dx_j. \quad (3.86)$$

pour  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  Alors

$$\sum_{i,j=1}^n (\delta_{ij} + a_i a_j x_i x_j) \xi_i \xi_j \geq |\xi|_0^2 \quad \forall x, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (3.87)$$

On vérifie facilement à partir de (3.87) que  $(\mathbb{R}^n, g)$  est une variété Riemannienne non compacte complète.

Soit  $M$  l'hypersurface de  $\mathbb{R}^{n+1}$  donnée par le lemme 3.4.1 avec la métrique riemannienne induite dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ . On vérifie facilement à partir de (3.86) et (3.77) que la carte

$\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , défini par

$$\Phi(p) = x \quad \forall p = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in M \quad (3.88)$$

est une isométrie. D'après le lemme 3.2.1,  $(\mathbb{R}^n, g)$  est de courbure sectionnelle partout positive. Par le corollaire 3.3.1,  $H = Dh$  vérifie la condition (3.44) pour tout  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , où  $h$  est une fonction strictement convexe sur  $(\mathbb{R}^n, g)$ .

**Exemple 3.3.** on pose  $\mathcal{A}$  défini sur  $\mathbb{R}^n$  par

$$\begin{aligned} Au &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1 + y^6}{1 + x^2 + y^6} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{xy^3}{1 + x^2 + y^6} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{xy^3}{1 + x^2 + y^6} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1 + x^2}{1 + x^2 + y^6} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.89)$$

Soit

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1 + y^6}{1 + x^2 + y^6} & \frac{xy^3}{1 + x^2 + y^6} \\ \frac{xy^3}{1 + x^2 + y^6} & \frac{1 + x^2}{1 + x^2 + y^6} \end{pmatrix} \quad (3.90)$$

Alors

$$G(x, y) = (g_{ij}) = A^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + x^2 & -xy^3 \\ -xy^3 & 1 + y^6 \end{pmatrix} \quad (3.91)$$

Considérons la variété riemannienne  $(\mathbb{R}^2, g)$ , où la métrique riemannienne  $g$  est définie dans le système de coordonnées usuelle  $(x, y)$  par

$$g = (1 + x^2)dxdx - xy^3dxdy - xy^3dydx + (1 + y^6)dydy. \quad (3.92)$$

Soit la surface  $M$  de  $\mathbb{R}^3$  donnée par

$$M = \left\{ (x, y, z) \mid z = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}y^4 \right\}.$$

avec la métrique riemannienne induite dans  $\mathbb{R}^3$ . Alors l'application  $\Phi(x, y, z) = (x, y)$ , pour toute  $(x, y, z) \in M$ , détermine une isométrie de  $M$  à  $(\mathbb{R}^2, g)$ . La courbure de Gauss de  $(\mathbb{R}^n, g)$  en  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  est donnée par

$$k(x, y) = \frac{3y^2}{(1 + x^2 + y^6)^2} \leq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ Soit } (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2.$$

Par le corollaire 3.3.3, le champ vectoriel  $H = \rho D\rho$  satisfait la condition (3.44) pour tout  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  avec  $a = 1$ , où  $\rho$  est la fonction de distance de  $(x_0, y_0)$  à  $(x, y)$  pour la métrique  $g$ .

**Remarque 3.4.1.** Ce n'est pas une tâche facile de calculer la courbure de sectionnelle d'une variété riemannienne en général. Pour plus de commodité, nous donnons un lemme.

**Lemme 3.4.2.** Soit  $\mathbb{R}^2$  la métrique  $g = g_1dxdx + g_2dydy$ , où  $g_1 > 0$ ,  $g_2 > 0$  sont des fonctions  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Alors la courbure gaussienne est

$$k = \frac{1}{4g_1^2g_2^2} \left[ g_2 \frac{\partial g_1}{\partial x} \frac{\partial g_2}{\partial x} + g_1 \frac{\partial g_1}{\partial y} \frac{\partial g_2}{\partial y} + g_1 \left( \frac{\partial g_2}{\partial x} \right)^2 + g_2 \left( \frac{\partial g_1}{\partial y} \right)^2 - 2g_1g_2 \left( \frac{\partial^2 g_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g_2}{\partial x^2} \right) \right]. \quad (3.93)$$

*Démonstration.* Soit  $X = \frac{1}{\sqrt{g_1}} \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $Y = \frac{1}{\sqrt{g_2}} \frac{\partial}{\partial y}$ . Alors  $X, Y$  est une base orthonormée sur  $(\mathbb{R}^2, g)$ . Nous avons donc

$$k = \langle R_{XY}X, Y \rangle = \frac{1}{g_1g_2} \left\langle R_{\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle, \quad (3.94)$$

où  $R_{XY}X = -D_X D_Y X + D_Y D_X X + D_{[X, Y]} X$  et  $R$  est le tenseur de courbure. Laisser  $\Gamma_{ij}^k$  les coefficients de connexion  $D$ . Alors

$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2g_1} \frac{\partial g_1}{\partial y}$ ,  $\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2g_2} \frac{\partial g_1}{\partial y}$ ,  $\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2g_2} \frac{\partial g_2}{\partial x}$ , à partir des propriétés de connexion, nous avons

$$D_{\frac{\partial}{\partial x}} D_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x} = D_{\frac{\partial}{\partial x}} (\Gamma_{12}^1 \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial}{\partial y}) \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} &= (\dots) \frac{\partial}{\partial x} \Gamma_{12}^1 D_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \Gamma_{12}^2 D_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} \\ &= (\dots) \frac{\partial}{\partial x} + (\Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x} + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2) d \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \left\langle D_{\frac{\partial}{\partial x}} D_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle_g &= \left( \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x} + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 \right) g_2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_2}{\partial x^2} - \frac{1}{4g_1} \left( \frac{\partial g_1}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{4g_2} \left( \frac{\partial g_2}{\partial x} \right)^2, \end{aligned} \quad (3.97)$$

depuis  $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle_g = 0$ . On calcul même à (3.97) donné

$$\left\langle D_{\frac{\partial}{\partial x}} D_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle_g = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_1}{\partial y^2} + \frac{1}{4g_1} \frac{\partial g_1}{\partial x} \frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{1}{4g_2} \frac{\partial g_1}{\partial y} \frac{\partial g_2}{\partial y}. \quad (3.98)$$

Les équations (3.97) et (3.98), ainsi que (3.94), donnent (3.93).  $\square$

**Exemple 3.4.** Soit  $\mathcal{A}$  l'opérateur

$$\mathcal{A}u = -\frac{\partial}{\partial x} \left( e^{x^3+y^3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( e^{x^3+y^3} \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (3.99)$$

Alors la variété riemannienne  $(\mathbb{R}^2, g)$  est avec une métrique

$$g = e^{-x^3-y^3} (dx^2 + dy^2). \quad (3.100)$$

D'après le lemme 3.4.2, nous avons

$$k(x, y) = 3(x+y)e^{x^3+y^3}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.101)$$

Par (3.101), on obtient  $\sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} k(x, y) = \infty$ . Prendre

$$H = -e^{-x} \frac{\partial}{\partial x} - e^{-y} \frac{\partial}{\partial y}, \quad (3.102)$$

et on obtient par calcul

$$\langle D_X H, X \rangle_g = \sum_{i,j=1}^2 h_{ij} X_i X_j \quad \forall X = X_1 \frac{\partial}{\partial x} + X_2 \frac{\partial}{\partial y}, \quad (3.103)$$

où

$$(h_{ij}) = \begin{pmatrix} he^{-x} + \frac{3}{2} (x^2 h e^{-x} + y^2 h e^{-y}) & \frac{3}{2} (x^2 e^{-y} - y^2 e^{-x}) h \\ \frac{3}{2} (x^2 e^{-y} - y^2 e^{-x}) h & h e^{-y} + \frac{3}{2} (x^2 h e^{-x} + y^2 h e^{-y}) \end{pmatrix} \quad (3.104)$$

$$h = e^{-x^3-y^3}.$$

Il découle de (3.104) et (3.103) que

$$\begin{aligned} \langle D_X H, X \rangle_g &= \left[ h e^{-x} + \frac{3}{2} (x^2 e^{-x} - y^2 e^{-y}) \right] X_1^2 + \left[ h e^{-y} + \frac{3}{2} (x^2 e^{-x} - y^2 e^{-y}) \right] X_2^2 \\ &\geq a h (X_1^2 + X_2^2) = a |X|_g^2, \quad X = X_1 \frac{\partial}{\partial x} + X_2 \frac{\partial}{\partial y} \in \mathbb{R}_{(x,y)}^2, (x, y) \in \bar{\Omega}, \end{aligned}$$

où  $a = \min_{x \in \bar{\Omega}} \left\{ e^{-x} + \frac{3}{2} (x^2 e^{-x} + y^2 e^{-y}), e^{-y} + \frac{3}{2} (x^2 e^{-x} + y^2 e^{-y}) \right\}$ . Alors le champ de vecteur  $H$ , donné par (3.102), satisfait à la condition (3.44) pour tout  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . De plus,  $H$  n'est le Hessien d'aucune fonction sur  $\mathbb{R}^2$  en métrique Riemannienne  $g$  puisque la matrice  $(h_{ij})$ , donnée par (3.103), n'est pas symétrique.

### 3.5 Conditions nécessaire de contrôlabilité exacte et contre-exemples

Étant donné l'opérateur différentiel partiel linéaire  $P$  par

$$Pu = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathcal{A}u.$$

On pose  $f_\alpha = e^{i\alpha(x.\zeta+t\tau)}$  et

$$p(x, t, \zeta, \tau) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} [\bar{f}_\alpha P(f_\alpha)](x, t) = \sum_{ij=1}^n a_{ij}(x) \zeta_i \zeta_j - \tau^2 \quad (3.105)$$

La fonction  $p$  est le symbole principal de  $P$ .

Soit  $(x_0, t_0, \zeta_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n / 0$ ,  $(x(s), t(s), \zeta(s), \tau(s))$  est une bicaractéristique nulle courbe passant par  $(x_0, t_0, \zeta_0)$  si elle satisfait le système (hamiltonien) de équations différentiel ordinaire

$$x' = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial \zeta}, t' = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial \tau}, \zeta' = -\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{et} \quad \tau' = -\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.106)$$

avec  $(x(0), t(0), \zeta(0)) = (x_0, t_0, \zeta_0)$  et  $\tau(0)$  choisis tels que  $p(x_0, t_0, \zeta_0, \tau(0)) = 0$ .

La projection d'une courbe bicaractéristique s'appelle un rayon.

**Lemme 3.5.1.** *Soit  $x(t)$  une géodésique sur variété riemannienne  $(\mathbb{R}^n, g)$  avec  $x(0) = x_0$  paramétré par la longueur de l'arc. Puis*

$$(x(t), \pm t, \zeta(t), \pm 1)$$

sont des courbes bicaractéristiques passant par  $(x_0, 0, \zeta_0)$ , où

$$\zeta(t) = \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n g_{ij}(x(t)) x'_j(t) \right] \frac{\partial}{\partial x_i}, \zeta_0 = \zeta(0). \quad (3.107)$$

*Démonstration.* Il suffit de vérifier (3.106), à partir de (3.107), on obtient

$$x'_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x(t)) \zeta_j(t) \quad (3.108)$$

Il découle de (3.105) et (3.108) que

$$x'(t) = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\zeta}$$

De plus, nous obtenons

$$\sum_{l=1}^n \frac{\partial g_{lp}}{\partial x_i} a_{lk} = - \sum_{l=1}^n g_{lp} \frac{\partial a_{lk}}{\partial x_i}$$

puisque  $\sum_{l=1}^n g_{lp} a_{lk} = \delta_{pk}$ . Puisque  $x(t)$  est une géodésique, nous avons

$$x''_i + \sum_{lp=1}^n \Gamma_{lp}^i x'_l x'_p = 0$$

Où  $\Gamma_{lp}^i$  sont les coefficients de la connexion Levi-Civita, donnés par

$$\Gamma_{lp}^i = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n a_{ih} \left( \frac{\partial g_{hl}}{\partial x_p} + \frac{\partial g_{hp}}{\partial x_l} - \frac{\partial g_{lp}}{\partial x_h} \right).$$

Il découle des equations précédant que

$$\begin{aligned} \zeta'_i(t) &= \left( \sum_{j=1}^n g_{ij}(x(t)) x'_j(t) \right)' \\ &= \sum_{kj=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} x'_k x'_j + \sum_{j=1}^n g_{ij}(x(t)) x''_j(t) \\ &= \sum_{kj=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} x'_k x'_j - \sum_{jlp} g_{ij} \Gamma_{lp}^j x'_l x'_p \\ &= \frac{1}{2} \sum_{lp} \frac{\partial g_{lp}}{\partial x_i} x'_l x'_p \\ &= \frac{1}{2} \sum_{lpkj} g_{lp} \frac{\partial a_{lk}}{\partial x_i} a_{pj} \zeta_k \zeta_j = -\frac{1}{2} \sum_{kj} \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} \zeta_k \zeta_j = -\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

où  $\zeta'(t) = -\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x}$ . De plus, donnent également

$$p(x(t), \pm t, \zeta(t), \pm 1) = \sum_{ijkl} a_{ij} g_{ik} g_{jl} x'_k x'_l - 1 = \sum_{kl} g_{kl} x'_k x'_l - 1 = 0$$

puisque  $x(t)$  est paramétré par la longueur de l'arc. Ceci complète notre preuve.  $\square$

**Théorème 3.5.1.** *S'il existe une géodésique fermée contenue dans  $\Omega$ , alors le système dans (3.1,3.2) n'a pas de contrôlabilité exacte où  $\Gamma_0 = \Gamma$ , c'est-à-dire pour tout  $T > 0$ .*

$$F_{T,\Gamma} \neq H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

**Exemple 3.5.** *Considérez l'opérateur*

$$Au = -\frac{\partial}{\partial x} \left( (1+x^2+y^2)^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( (1+x^2+y^2)^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

La métrique riemannienne  $g$  sur  $\mathbb{R}^2$  est

$$g = \frac{dx dx + dy dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

Soit  $B_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ ,  $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ . Nous avons les conclusions suivantes :

- (1) Si  $\bar{\Omega} \subset B_1$  ou  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 - B_1 \cup S$  alors le théorème 3.3.1 est vrai.
- (2) Si  $S \subset \Omega$ , alors le système en (3.1)-(3.2) n'a pas de contrôlabilité exacte, pour tout  $T > 0, F_{T,\Gamma} \neq H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ .

*Démonstration.* D'après du lemme 3.4.2, nous obtenons  $k(x, y) = 4$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .  $(\mathbb{R}^2, g)$  est alors une forme d'espace de courbure constante 4. Soit  $M$  la sphère de rayon  $\frac{1}{2}$  et de centre  $(0, 0, \frac{1}{2})$  dans  $\mathbb{R}^3$ , donné par

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_3\}$$

avec la métrique riemannienne induite dans  $\mathbb{R}^3$ . Alors  $(\mathbb{R}^2 \cup \infty, g)$  est isométrique à  $M$  avec isométrie  $\phi : M \rightarrow (\mathbb{R}^2 \cup \infty, g)$  défini par

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right), \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in M. \quad (3.109)$$

On vérifie facilement que  $\sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} d_g(0, (x, y)) = \frac{\pi}{2}$ ,  $\sup_{x^2+y^2=1} d_g(0, (x, y)) = \frac{\pi}{4}$ . Cela montre que nous pouvons obtenir une boule géodésique  $B((x_0, y_0), \gamma)$  dans  $(\mathbb{R}^2 \cup \infty, g)$  telle que  $\bar{\Omega} \subset B((x_0, y_0), \gamma)$  et  $\gamma < \frac{\pi}{4}$  lorsque  $\bar{\Omega} \subset B_1$  ou  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 - B_1 \cup S$ . La partie 1 découle alors du corollaire 3.3.2.

Afin de prouver la partie 2, il suffira du théorème 3.5.1 de prouver que l'unité le cercle  $S$  est une géodésique fermée sur  $(\mathbb{R}^2, g)$ .

$C = \left\{ (x_1, x_2, \frac{1}{2}) | x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{4} \right\}$  est une géodésique fermée sur la sphère  $M$ . De plus, elle est vérifiée facilement ça  $S = \Phi(C)$  où  $\Phi$  est donné par (3.109). Cela donne notre résultat souhaité puisque  $\Phi$  est une isométrie de  $M$  à  $(\mathbb{R}^2, g)$ .  $\square$

# Conclusion

Dans ce mémoire , nous avons considéré une equation d'onde avec coefficients variables avec des conditions aux limites mixtes. On a étudié la contrôlabilité exacte en utilisant la méthode de Lions et la méthode de géométrie Riemannienne. Ensuite, un certain nombre d'exemples et un contre-exemple sont donnés pour vérifier l'inégalité d'observabilité.

# Bibliographie

- [1] A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] Y. Boukhatem, *Introduction à la géométrie différentielle*, édition universitaire européenne, 2021
- [3] P. Buser / EPFL, *Notes "inofficielles" du cours Géométrie Riemannienne* automne 2010
- [4] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Halsted Press, 1983
- [5] J. Cheeger and D. Ebin, *Comparison Theorem in Riemannian Geometry*, North Holland, Amsterdam, 1975.
- [6] M. Djaa, *Introduction à la géométrie riemannienne et l'analyse harmonique sur les variétés*, 2017
- [7] Grégoire Allaire - François Alouges, *Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles. Polycopié du cours MAP 431 2015 - 2016*
- [8] V. Komornik, *Exact Controllability and Stabilization*, RAM Res. Appl. Math., Masson/John
- [9] I. Lasiecka, J. L. Lions, and R. Triggiani, Nonhomogeneous boundary value problems for second-order hyperbolic operators, *J. Math. Pures Appl.*, 65, pp. 149-192, (1981)
- [10] I. Lasiecka and R. Triggiani, *Exact controllability of the wave equation with Neumann boundary control*, *Appl. Math. Optim.*, 19 (1989), pp. 243-290.
- [11] J. L. Lions, *Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems*, *J. von Neumann Lecture, SIAM Rev.*, 30 (1988), pp. 168
- [12] H. Wu, C. L. Shen, and Y. L. Yu, *An Introduction to Riemannian Geometry*, University of Beijing, 1989 (in Chinese)
- [13] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry II*, 2nd ed., Publish or Perish, Berkeley, CA, 1979
- [14] P. F. Yao, *On the observability inequality for exact controllability of wave equation with variable coefficients*