الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي بالاغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Par : CHOUCHA Omar

THÈME

Familles normales de fonctions analytiques

Soutenu publiquement devant le jury composé de :

• **Mr. Belabbaci Youcef**	M.C.A	**Président**
• **Mr. BELACEL Amar**	M.C.A	**Examinateur**
• **Mme. BELABBACI Chafika**	M.C.B	**Encadreur**

Année Universitaire 2019/2020

Remerciements

Je remercie Allah le tout puissant de m'avoir donné le courage, la volonté et la patience de mener a terme ce présent travail.

Je tiens tout d'abord a exprimer mes sincères remerciements a mon encadreur **Dr. Chafika Belabbaci** pour ces orientations est tous ses efforts consentis dans la préparation de ce travail.

Je remercie vivement mon ami **M. Bouhali M'hammed** pour toute la documentation qu'il m'a fournie, ses conseils judicieux, son aide précieuse et les efforts qu'il a déployés pour l'accomplissement de ce travail.

Un très grand merci aux professeurs : **Belabbaci Youcef**, **Belacel Amar**, qui ont accepté de participer à mon jury de ce mémoire.

Un très grand merci a mes parents et toute ma famille sans oublier tous mes chers en enseignants pour les efforts qu'ils ont fournis pour avoir participer notre formation.

Enfin, mes meilleurs et vifs remerciements s'adressent a tous mes amis et tous ceux qui m'on aidé de prés ou de loin a la réalisation de ce modeste travail.

Dédicace

Je dédie ce travail a celle qui ma donné la vie, le symbole de tendresse qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, a ma mère.
A mon père, école de mon enfance qui a été mon ombre durant toutes les années des études qui a veillé tout au long de ma vie a m'encourager me donner de l'aide et a me protéger.
A mes frères et mes sœurs.
A toute ma famille ma grand-mère, mes oncles, mes tentes, mes cousins et mes cousines.
A mes amis.
A tous mes enseignants qui m'ont enseigné le long de mon parcours éducatif,

Je dédie ce travail .

الملخص

يهدف هذا العمل إلى دراسة الخصائص الهامة و النظريات الأساسية حول العائلة الطبيعية من الدوال التحليلية وكذا الدوال الناطقة المعرفة على مجموعة مفتوحة من فضاء الأعداد المركبة.

الكلمات المفتاحية : نظرية مونتال، نظرية مارتي

Abstract

In this work we study fundamental properties and results on the normal families of analytic and meromorphic functions defined on an open set in $\mathbb{C}$.

Key words : Normal families, uniformly bounded, locally bounded , equicontinuity, Montel, Marty.

Résumé

L'objet de ce travail est l'étude des propriétés fondamentales et les principaux théorèmes sur les familles normales de fonctions analytiques définies dans un ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$. Les familles normales de fonctions méromorphes sont aussi étudiées.

Mots clés : Famille normale, uniformément bornée, localement uniformément bornée, equicontinues, Montel, Marty.

Table des matières

Notations

$d(f,g)$	Distance entre f et g.
D	Un ouvert du plan complexe.
$A(D)$	Espace de fonctions analytiques dans D.
$M(D)$	Espace de fonctions méromorphes dans D.
$C(D)$	Espace de fonctions continues dans D.
$\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$	Les nombres complexes, rationnels.
$\widehat{\mathbb{C}}$	Plan complet $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
D_s	Disque unité ouvert.
$D(z_0, r)$	Disque ouvert de centre z_0 et de rayon r.
$\overline{D(z_0, r)}$	Disque fermé de centre z_0 et de rayon r.
K	Ensemble compact.
$\overset{\circ}{K}$	Intérieur d'un ensemble compact.
ϑ_{z_O}	Voisinage d'un point z_0.
$f^{(n)}$	Dérivées n-ème d'une fonction f.
$(f_n)_n$	Suite de fonctions.
$\{f_n\}$	Famille de fonctions.
$f\|_k$	Restriction d'une fonction f dans k.
$\overline{\lim}$	Limite supérieure.
0_f	La fonction nulle.
$L(\gamma)$	Longueur du chemin γ.
$C(E,F)$	Ensemble des applications continues définie de E dans F.

Introduction

Le concept d'une famille normale fut d'abord introduit par P. Montel en 1907 (un mathématicien français et un membre de l'académie française des sciences) dans un article intitulé "Sur les suites infinies de fonctions". Cela a jeté les bases d'un nouveau domaine mathématiques, connu sous le nom de la théorie des familles normales de fonctions. Le nom d'une famille normale de fonctions apparaît dans son ouvrage " Sur l'indétermination d'une fonction uniforme dans le voisinage de ses points essentiels", publié en 1911. Or, il fallut attendre quelques années pour que l'intérêt envers la théorie des familles normales se fît sentir dans la communauté mathématique de l'époque. En 1917, le mathématicien français P. Fatou utilisa les résultats de Montel sur les familles normales dans une série de travaux portant sur l'itération des fonctions complexes.

Le mathématicien français Henri Milloux a dit sur l'importance de la théorie des familles normales des fonctions " La théorie des familles normales de fonctions doit être considérée comme l'une des découvertes les plus belles, et les plus importantes par sa fécondité, de cette première moitié du siècle XXe siècle"

La sincérité des paroles de Milloux est réitérée par le fait que la théorie de la familles normales de fonctions a trouvé une larges applications dans de nombreuses disciplines mathématiques comme la théorie classique d'une fonction d'une variable complexe (dans la preuve du théorème de Picard sur la frontière comportement des fonctions analytiques en leurs points singuliers, etc., voir ([1] , [9], [12]), la théorie des ensembles bornées [1], analyse fonctionnelle (théorèmes de compacité dans les espaces fonctionnels métriques, théorème d'Arzela-Ascoli (voir [1],[20]), la théorie des itérations avec des fonctions rationnelles, etc.

Ce mémoire est consacré essentiellement à l'étude des familles normales de fonctions analytiques définies dans un ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$. On s'intéresse à l'étude du théorème de Montel qui nous donne un critère simple pour déterminer la normalité d'une famille de fonctions analytiques. Ainsi le critère fondamental de normalité, qui est un résultat également développé par Paul Montel.

Ce mémoire est composé de trois chapitres, de cette introduction, une conclusion et une bibliographie.
Le premier chapitre porte sur tous les rappels indispensables pour les chapitres suivants.
Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des familles de fonctions analytiques définies dans un ouvert D du plan complexe $\mathbb{C}$. On étudie les différents modes de convergence d'une suite de fonctions analytiques et les propriétés fondamentales des espaces des fonctions continues $C(D)$ et les fonctions analytiques $A(D)$.
Le chapitre trois est consacré à l'étude des principaux théorèmes et résultats sur les familles normales de fonctions analytiques définie dans un ouvert D du plan complexe $\mathbb{C}$, le théorème de Montel et ses conséquences, le critère fondamental de Montel, le théorème d'Ascoli Arzéla, ...
Ainsi, on étudie dans ce chapitre le théorème de Montel et le théorème de Marty

pour les familles normales de fonctions méromorphes. A la fin de ce chapitre, on présente les résultats de Pavićević žarko, voir l'article [7], qui a utilisé la notion d'une famille normale pour redémontré le théorème de Liouville et le petit théorème de Picard.

Chapitre 1

Rappels et compléments

Ce chapitre porte sur les notions préliminaires nécessaires et indispensables pour traiter les autres chapitres. Plus précisément rappelons les principaux notions des fonctions analytiques, des espaces topologiques et les espaces compacts. Les principaux ouvrages utilisés pour la rédaction de ce chapitre sont [4], [10] et [11].

1.1 Rappels sur les fonctions analytiques

Nous pouvons considérer un nombre complexe comme étant de la forme $x + iy$, où x et y sont réels et i, appelé l'unité imaginaire, a la propriété $i^2 = -1$.
Si $z = x + iy$, alors x est appelée la partie réelle de z et y la partie imaginaire de z, ces parties réelle et imaginaire sont respectivement notées $Re(z)$ et $Im(z)$.
Un symbole tel que z qui peut remplacer n'importe quel élément d'un ensemble de nombres complexes est appelé une variable complexe.
Si à chaque valeur que peut prendre une variable complexe z, il correspond une ou plusieurs valeurs d'une variable complexe w, nous dirons que w est une fonction de z et écrirons $w = f(z)$.

Fonction uniforme. Fonction multiforme

Dans toute la suite de ce chapitre, désignons par soit D un domaine du plan complexe $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.1. *Une fonction f est dite uniforme si une seule valeur de w correspond à chaque valeur de z.*

Définition 1.1.2. *Une fonction f est dite multiforme si plusieurs valeurs de w correspondent à chaque valeur de z.*

Définition 1.1.3. *Soit $z_0 \in \mathrm{D}$. On dit que f est dérivable (ou différentiable) en z_0 si $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe sur n'importe quel chemin qui lie les points z et z_0.*

Une fonction dérivable en tout point z_0 d'un domaine D est appelée fonction analytique dans D. Une fonction est analytique dans un domaine D si elle est analytique en tout point du domaine D. Notons par $A(D)$ l'espace des fonctions analytiques définie dans un domaine D.

Proposition 1.1.1. *Si $f(z)$ est analytique en z_0, alors elle est continue en z_0.*

Définition 1.1.4. *Un point en lequel une fonction $f(z)$ cesse d'être analytique est appelé un point singulier ou une singularité de $f(z)$.*

Il existe plusieurs types de singularités. Définitions de quelques types.

Définition 1.1.5. *On dit qu'un point z_0 est un point singulier isolé de $f(z)$ s'il existe un voisinage de z_0 ne contenant pas de singularité autre que z_0.*

Définition 1.1.6. *On dit qu'un point z_0 est un pôle d'ordre n de $f(z)$ si*

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = c \neq 0.$$

Pour $n = 1$, on dit que z_0 est un pôle simple de f.

Définition 1.1.7. *Le point singulier z_0, est appelé singularité apparente de $f(z)$ si $\lim\limits_{z \longrightarrow z_0} f(z)$ existe.*

Définition 1.1.8. *Une singularité qui n'est ni un pôle, ni une singularité apparente est appelée singularité essentielle.*

Remarque 1.1.1. *Si une fonction est uniforme et possède une singularité, celle-ci ne peut être qu'un pôle ou une singularité essentielle.*

Formule Intégrale de Cauchy

Théorème 1.1.1 (*Formule de Cauchy*). *Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un domaine* D *simplement connexe et soit $z_0 \in \mathrm{D}$. Alors*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

où C est une courbe fermée quelconque entourant le point z_0.

Théorème 1.1.2. *Soit f une fonction analytique dans un domaine* D *admet en tout point intérieur à* D *une dérivée d'ordre n et soit $z \in \mathrm{D}$. Alors*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

où C est une courbe fermée quelconque entourant le point z.

Théorème 1.1.3 (*Théorème de Liouville.*). *Soit $f(z)$ une fonction analytique et bornée. Alors $f(z)$ est constante.*

Théorème 1.1.4 (*Théorème de Rouché.*). *Si $f(z)$ et $g(z)$ sont analytiques dans et sur une courbe fermée simple C et si $|g(z)| < |f(z)|$ sur C, alors $f(z) + g(z)$ et $f(z)$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur de C.*

Définition 1.1.9. *On dit qu'une fonction $f(z)$ est méromorphe dans un domaine D si elle est analytique dans D sauf en un nombre fini de points qui sont des pôles de f.*

Rappelons les principaux théorèmes de la convergence d'une suite.

Théorème 1.1.5. *Toute suite convergente est bornée.*

Théorème 1.1.6 (*Bolzano Weierstrass*). *Toute suite bornée contient une sous-suite convergente.*

Théorème 1.1.7. *Un point l est un point limite d'un ensemble A si et seulement s'il y a une suite de points distincts dans A convergeant vers l.*

Théorème 1.1.8 (*Bolzano Weierstrass*). *Tout ensemble infini bornée admet une limite (point limite).*

Démonstration. Soit E un ensemble infini borné. Choisissez n'importe quelle suite de points distincts dans l'ensemble E. Alors d'après le Théorème (1.1.6) cette suite contient une sous-suite convergente et d'après le Théorème (1.1.8), la limite de cette sous-suite convergente est un point limite de l'ensemble E. □

Définition 1.1.10 (*Critère de Cauchy uniforme*). *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies dans un domaine D. On dit qu'elle vérifie le critère de Cauchy uniforme si :*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \geq N, \quad \forall z \in D, \quad |f_p(z) - f_q(z)| < \epsilon.$$

Théorème 1.1.9. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies dans un domaine D. Si la suite vérifie le critère de Cauchy uniforme, alors elle converge uniformément.*

1.2 Rappels sur les espaces topologiques

Soit X un ensemble non vide, une famille τ de parties de X est une topologie sur X si et seulement si τ vérifie les axiomes suivants :

(1) Les ensembles X et $\oslash$ appartiennent à τ.
(2) La réunion d'une famille quelconques des parties de τ appartient à τ.
(3) L'intersection de deux parties quelconques de τ appartient à τ.

Les éléments de τ sont appelés ensembles ouverts et le couple (X, τ) est appelé un espace topologique.

Définition 1.2.1. *On dit qu'un sous-ensemble V de X est un voisinage du point $p \in X$, s'il existe un ouvert G vérifiant : $p \in G \subset V$.*

Définition 1.2.2. *La famille de tous les voisinages de $p \in X$ est appelée un système de voisinages de p.*

1.3 Rappels sur les espaces compacts

Compacité et compacité relative

Soit $A = \{R_i\}$ une famille de parties de X telle que $B \subset \bigcup_i R_i$ pour un certain $B \subset X$.
Rappelons que A est alors appelée un recouvrement de B. Un recouvrement est ouvert si chacun des R_i est ouvert. En outre, si une sous-famille finie de A est également un recouvrement de B, c'est-a-dire si

$$\exists \quad R_{i_1}, \ldots, R_{i_m} \text{ tels que } B \subset R_{i_1} \cup \cdots \cup R_{i_m}$$

alors on dit qu'on peut extraire de A un sous recouvrement fini ou que A contient un sous-recouvrement fini.
Soient X un ensemble non vide, τ une famille de partie de X et soit (X, τ) est un espace topologique.

Définition 1.3.1 (*Heine-Borel*). *Une partie A d'un espace topologique X est compacte si de tout recouvrement ouvert de A, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Une partie $A \subset X$ est dite relativement compacte si sa fermeture est un espace compact, pour la métrique induite. Rappelons ici les résultats fondamentaux sans démonstration sur la compacité.

Théorème 1.3.1. *Soit X un espace métrique. Les propositions suivantes sont alors équivalentes :*

1. *X est compact.*
2. *Toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de X contient une sous–suite convergente.*
3. *Toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de X admet un point d'accumulation.*
4. *X est complet et, pour tout $\varepsilon > 0$, X admet un ε–réseau fini c'est à dire qu'il existe une partie finie $R \subset X$ telle que $\forall x \in X, \exists a \in \mathbb{R} \quad d(x, a) < \varepsilon$, d étant la distance sur X.*

Comme conséquences de ce théorème, on obtient des critères de compacité relative. On énonce ces critères sous forme de théorème.

Théorème 1.3.2. *Soit X un espace métrique et A une partie de X. Les propositions suivantes sont alors équivalentes :*

1. *A est relativement compacte.*
2. *Toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de A contient une sous–suite convergente dans X.*
3. *Toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de A admet un point d'accumulation dans X.*

Espace séquentiellement compact

Définition 1.3.2. *Soit A une partie de X. On dit que A est séquentiellement compacte si toute suite de A contienne une sous-suite convergente vers un point de A.*

En général, il existe des ensembles compacts qui ne sont pas séquentiellement compacts et vice versa, bien que dans les espaces métriques, comme nous allons le montrer ultérieurement, il y ait équivalence entre les deux notions.

Théorème 1.3.3. *Soit A un sous-ensemble d'un espace métrique X, Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) A est compact.
(ii) A est séquentiellement compact.

Espace précompact

Considérons maintenant A une partie d'un espace métrique X, $\epsilon > 0$ et E un ensemble fini de points.

Définition 1.3.3. *On dit que E est un réseau de maille ϵ pour A si, pour tout point p de A, il existe un point $e \in E$ tel que $d(p, e) < \epsilon$ où $d(p, e)$ désigne la distance entre les points p et e.*

Définition 1.3.4. *Une partie A d'un espace métrique X est précompacte si A possède un réseau de maille ϵ pour tout $\epsilon > 0$.*

Proposition 1.3.1. *Un ensemble précompact est borné.*

Proposition 1.3.2. *Les ensembles séquentiellement compacts sont précompacts.*

Définition 1.3.5 (*suite exhaustive de compacts*)**.** *On appelle suite exhaustive de compacts une suite croissante de compacts $K_i \subset D$ ($K_i \subset K_{i+1}$) telle que tout compact K contenu dans D soit contenu dans l'un des compacts K_i.*

Compacité dans l'espace fonctionnel C(E,F)

Théorème 1.3.4 (*Théorème d'Ascoli*)**.** *Soient E un espace métrique séparable, F un espace métrique et Soit $(f_n)_n \subseteq C(E; F)$. On suppose que les hypothèses suivantes sont ver-fies.*

1. *Pour tout $z \in E$, l'ensemble $\{f_n(z); n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans F.*
2. *La suite $(f_n)_n$ est équicontinue.*

Alors $(f_n)_n$ possède une sous-suite converge uniformément sur tout compact vers une fonction continue f.

Chapitre 2

Familles de fonctions analytiques

Ce chapitre est consacré à l'étude des familles de fonctions analytiques définies dans un ouvert D du plan complexe $\mathbb{C}$. Plus précisément, on étudie les différents modes de convergence d'une suite de fonctions analytiques, puis on étudie l'espace vectoriel de toutes les fonctions continues $C(D)$ en introduisant une métrique sur $C(D)$ avec la propriété de la convergence uniforme sur tout les compacts de D. L'espace vectoriel de toutes les fonctions analytiques $A(D)$ est ainsi étudié dans ce chapitre afin de caractériser les sous ensembles compacts de cet espace. Les principaux ouvrages utilisés sont [2], [3], [4], [8] et [11].

2.1 Convergence d'une suite de fonctions analytiques

Étudions les différents modes de convergence d'une suite de fonctions analytiques.

Définition 2.1.1. *Soient I un ensemble et $A(D)$ l'espace de fonctions analytiques. On appelle famille de fonctions analytiques indexée par I, notée $\{f_n\}_{n\in I}$, toute application*

$$n \in I \longrightarrow f_n \in A(D).$$

L'ensemble de départ I est appelé ensemble des indices de la famille.
Lorsque I est un ensemble fini (respectivement infini), on dit que $\{f_n\}_{n\in I}$ est une famille finie (respectivement infinie).

Convergence simple

Définition 2.1.2. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions, on dit que $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur D si pour tout $z \in D$, la suite $(f_n(z))_n$ converge vers $f(z)$.*

$$f(z) = \lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(z).$$

Autrement dit :

$$\forall z \in D,\, \forall \epsilon > 0,\, \exists n_0 \in \mathbb{N},\, \forall n > n_0 \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \epsilon.$$

Si une suite $(f_n)_n$ converge pour tout point z d'un domaine D, alors on dit que D est le domaine de convergence.
Une suite de fonctions $(f_n)_n$ qui n'est pas convergente est dite divergente.

Convergence uniforme

Définition 2.1.3. *On dit que la suite des fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur D si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier $n_0 = n_0(\epsilon)$ tel que, pour tout $z \in D$, $\ |f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ pour tout $n > n_0$.*

Remarque 2.1.1. *La convergence uniforme implique la convergence simple mais la réciproque est fausse.*

Soit la suite de fonction définie par $f_n(z) = \dfrac{1}{nz}$, $n \in \mathbb{N}^*$ converge simplement vers la fonction nulle cependant, elle ne converge pas uniformément.
En effet, soit $\epsilon > 0$, on a $|f_n(z) - 0| = \left|\dfrac{1}{nz}\right| < \epsilon$ alors $n > \dfrac{1}{\epsilon|z|}$, il suffit de pendre $n_0 > \dfrac{1}{\epsilon|z|}$. Il est clair que $n_0 = n_0(\epsilon, z)$ dépend à ϵ et z.
Supposons que cette suite converge uniformément vers la fonction nulle, donc il existe un entier n_0 tel que l'inégalité suivante $\left|\dfrac{1}{nz}\right| < \left|\dfrac{1}{n_0 z}\right| < \epsilon < 1$ est vraie pour tous les nombres complexes z qui appartient au disque unité D_s, mais pour $z = \dfrac{1}{n_0}$, avec $n_0 > 1$ l'inégalité est fausse.
Pour $z = \dfrac{1}{n}$, on a :

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| = 1 < \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Contradiction car $\epsilon < 1$.

Convergence normale

Définition 2.1.4. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dans D. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact si pour tout compact $K \subset D$, la suite des restrictions $(f_n|_K)_n$ converge uniformément.*

Définition 2.1.5. *On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge normalement dans D si seulement si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de D.*

Exemple : Soit la suite de fonctions définie comme suite :

$$f_n(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n.$$

Comme $f_n(z)$ est une série géométrique, alors elle peut s'écrire comme suite :

$$f_n(z) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

On étude la convergence normale sur le disque unité. Pour tout z dans le disque unité, il existe un nombre r tel que $|z| \leq r < 1$, on a :

$$\begin{aligned}\left| f_n(z) - \frac{1}{1-z} \right| &= \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} \\ &\leq \frac{r^{n+1}}{1-r}.\end{aligned}$$

Si $r^{n+1} < \epsilon(1-r)$, alors on a :

$$\begin{aligned} r^{n+1} < \epsilon(1-r) &\Rightarrow (n+1)\ln(r) < \ln(\epsilon(1-r)) \\ &\Rightarrow n > \frac{\ln(\epsilon(1-r)) - \ln(r)}{\ln(r)}.\end{aligned}$$

Pour tout r fixée, il suffit de poser $n_0(\epsilon) = \frac{\ln(\epsilon(1-r)) - \ln(r)}{\ln(r)}$. Il est évident que $n_0(\epsilon)$ indépendant de z dans le disque unité, et tout sous-ensemble compact du disque unité peut être considère un sous-ensemble de $|z| \leq r < 1$ pour r fixé.
D'autre part, supposons que pour tout ϵ, il existe un nombre $n_0(\epsilon)$ indépendant de z dans le disque unité tel que :

$$\left| f_n(z) - \frac{1}{1-z} \right| < \epsilon, \quad \forall n > n_0(\epsilon). \tag{2.1}$$

Soit x définie comme suite

$$n_0 + 1 = \frac{\ln(\epsilon(1-x)) - \ln(x)}{\ln(x)} \quad \text{ou} \quad \frac{x^{n_0+2}}{1-x} = \epsilon.$$

Pour tout $0 \leq x < 1$, on a $\frac{x^{n_0+2}}{1-x}$ est une fonction positive, croissante, continue et elle prendre toutes les valeurs entre 0 et ∞.
Par conséquent, pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $n_0(\epsilon)$, il existe z dans $|z| < 1$. C'est une contradiction avec (2.1). Donc la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers $\frac{1}{1-z}$ dans le disque unité.

2.2 Espace des fonctions continues

Définition 2.2.1. *Soit f une fonction définie dans D. La fonction $f(z)$ est dite continue en un point $z = z_0 \in D$ si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.*

Autrement dit,

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \quad |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

La fonction f est dite continue dans D si elle est continue en tout point de D.
Notons par $C(D)$ l'espace des fonctions continues dans un domaine D.

Théorème 2.2.1. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies et uniformément convergente sur D vers f. Si les fonctions f_n sont toutes continues sur D, alors la fonction limite f est aussi continue sur D.*

Démonstration. On va procéder par définition équivalente de chaque notion.
Sachant que les fonctions f_n sont continues en tout point $z_1 \in D$, alors par définition on a

$$\forall \epsilon_1 > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall z \in D : |z - z_1| < \alpha \Rightarrow |f_n(z) - f_n(z_1)| < \epsilon_1.$$

D'autre part, la suite de fonctions $(f_n)_n$ est uniformément convergente vers f sur D ce qui équivaut a

$$\forall \epsilon_2 > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in D, \quad \forall n > n_0 \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \epsilon_2.$$

Ceci reste vrai en particulier même pour $z = z_1$, c'est-a-dire que

$$\forall \epsilon_2 > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall z \in D, \quad \forall n > n_0 \Rightarrow |f_n(z_1) - f(z_1)| < \epsilon_2.$$

Pour montrer que la fonction limite f est continue sur D, il suffit de montrer qu'elle est continue en tout point $z_1 \in D$. Ce qui est équivalent, par définition, à :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall z \in D : |z - z_1| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_1)| < \epsilon.$$

En effet, on a bien :

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(z_1)| &= |f(z) - f_n(z) + f_n(z) - f_n(z_1) + f_n(z_1) - f(z_1)| \\
&\le |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_1)| + |f_n(z_1) - f(z_1)| \\
&< \epsilon_2 + \epsilon_1 + \epsilon_2 = \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Ainsi, il suffit de prendre $\delta = \alpha$ pour que :

$$\forall \epsilon > 0, \forall z \in D : |z - z_1| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_1)| < \epsilon.$$

Ce qui traduit bien la continuité de la fonction limite f en tout point $z_1 \in D$. □

2.2.1 Topologie de l'espace C(D)

Il est évident que l'espace $C(D)$ est un espace vectoriel. On va maintenant définir une topologie sur l'espace vectoriel $C(D)$.
Pour tout couple (K, ϵ) formé d'un compact $K \subset D$ et d'un nombre $\epsilon > 0$, considérons le sous-ensemble, noté par $V(K, \epsilon)$, de $C(D)$ défini par :

$$V(K, \epsilon) = \{f, \quad \forall z \in K \quad ; |f(z)| \leq \epsilon\}.$$

Pour qu'une suite des fonctions $(f_n)_n \subset C(D)$ converge vers f uniformément sur tout compact il faut et il suffit que :

$$\forall K > 0, \forall \epsilon > 0, \, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \, \forall z \in K, \, \forall n > n_0 \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \epsilon.$$

Autrement dit, pour tout compact K et $\epsilon > 0$, on a :

$$(f - f_n) \in V(K, \epsilon) \quad \textit{pour } n \textit{ assez grand.} \tag{2.2}$$

Maintenant, on recherche une topologie de $C(D)$ pour laquelle les ensembles $V(K, \epsilon)$ forment un système fondamental de voisinages de 0. La formule (2.2) exprime que la suite des fonctions $(f_n)_n \subset C(D)$ a pour limite le point f dans cette topologie (les voisinages d'un point f étant alors définis en effectuant la translation f sur les voisinages de 0).

Lemme 2.2.1. *Il existe dans l'espace D une suite exhaustive de compacts.*

Démonstration. Considérons les disques compacts contenus dans D dont le centre a des coordonnées rationnelles et dont le rayon est rationnel, comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$ alors les disques sont des recouvrements de D, de plus est dénombrable. Ils forment un ensemble dénombrable, que l'on peut ranger en une suite $D_1, D_2, \ldots$.
Posons

$$K_i = \bigcup_{n \leq i} D_n.$$

et montrons que les compacts K_i forment une suite exhaustive. Tout d'abord, on remarque $K_i \subset K_{i+1}$ et les intérieurs des disques D_n forment un recouvrement ouvert de D, et par conséquent tout compact K contenu dans D est contenu dans un K_i. □

L'existence d'une topologie sur $C(D)$ est étudié dans le théorème suivant.

Théorème 2.2.2. *Il existe sur l'espace $C(D)$ une topologie (invariante par translation) dans laquelle les ensembles $V(K, \epsilon)$ forment un système fondamental de voisinages de 0. Cette topologie est unique et peut être définie par une distance invariante par translation.*

Démonstration. L'unicité de la topologie est évidente, parce qu'on connaît un système fondamental de voisinages de 0, donc par translation, un système fondamental de voisinages de chaque point de l'espace $C(D)$. Il reste à trouver une distance invariante par translation et telle que les $V(K, \epsilon)$ forment un système fondamental de voisinages de 0_f dans la topologie définie par cette distance.
Soit $(K_i)_i$ une suite exhaustive de compacts pour D. Pour chaque $f \in C(D)$ et pour tout compact $K \subset D$, posons

$$\|f\|_{K_i} = \sup_{z \in K_i} |f(z)|.$$

On définit alors $d : C(D) \times C(D) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ par :

$$d(f, g) = \sum_{i \geq 1} 2^{-i} \inf(1, \|f - g\|_{K_i})$$

Pour tout f et g dans $C(D)$ alors $d(f, g)$ est fini, parce que :

$$d(f, g) = \sum_{i \geq 1} 2^{-i} \inf(1, \|f - g\|_{K_i}) \tag{2.3}$$

$$\leq \sum_{i \geq 1} 2^{-i} < \infty. \tag{2.4}$$

On vérifie sans difficulté majeure que d est bien une distance sur $C(D)$, car :
La première condition est facile,

$$d(f, 0_f) = \sum_{i \geq 1} 2^{-i} \inf(1, \|f\|_{K_i}) = 0 \Longrightarrow \inf(1, \|f\|_{K_i}) = 0 \Longrightarrow \|f\|_{K_i} = 0,$$

donc pour tout i on a

$$\|f\|_{K_i} = 0,$$

et comme

$$K_i \subset K_{i+1},$$

alors f est identiquement nulle sur D.
Si f est identiquement nulle donc

$$\|f\|_{K_i} = 0,$$

et par conséquence

$$d(f, 0_f) = 0.$$

Pour l'inégalité triangulaire, on utilise le fait que la fonction $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) = \inf(1; t)$$

est croissante et sous additive, c'est a dire :

$$\varphi(s + t) \leq \varphi(s) + \varphi(t),$$

ce qui par sommation entraîne l'inégalité triangulaire, et par conséquence $d(f,g)$ définie une distance, cette distance est une métrique ($C(D)$ est un espace métrique) satisfaisant à l'inégalité du triangle.
On pose $\delta(f,g) = d(f-g)$, on remarque que $\delta(f+h, g+h) = \delta(f,g)$ pour toutes $f,g,h \in C(D)$. Donc cette métrique est invariante par translation.
Elle définit sur l'espace $C(D)$ une topologie séparée, invariante par translation.
Pour achever la démonstration du théorème, il reste à prouver que les ensembles $V(K,\epsilon)$ forment un système fondamental de voisinages de 0 dans la topologie définie par la distance $d(f-g)$.
Tout d'abord, prouvons l'inégalité suivante.

$$\begin{aligned} 2^{-i}\inf(1, \|f\|_{K_i}) &\leq d(f) \\ &\leq \|f\|_{K_i} + 2^{-i}. \end{aligned}$$

Car

$$2^{-i}\inf(1, \|f\|_{K_i}) > 0 \Rightarrow 2^{-i}\inf(1, \|f\|_{K_i}) \leq d(f),\ \forall i \in \mathbb{N}.$$

D'autre part,

$$\forall j \leq i,\ K_j \subset K_i \Rightarrow \|f\|_{K_j} \leq \|f\|_{K_i}.$$

Par suite (2.3) entraîne

$$d(f, 0_f) \leq \sum_{j\geq i} 2^{-j}\|f\|_{K_i} + \sum_{j>i} 2^{-j} \tag{2.5}$$

— Tout ensemble $V(K,\epsilon)$ est un voisinage de 0_f, en effet, K et ϵ étant donnés, avec $\epsilon < 1$, soit i tel que :

$$K \subset K_i \Rightarrow d(f, 0_f) \leq 2^{-i}\epsilon.$$

Entraîne $f \in V(K,\epsilon)$, à cause de la première inégalité (2.5).
— Tout voisinage de 0_f de la forme $d(f,0_f) < \epsilon$ contient un ensemble de la forme $V(K,\epsilon')$. En effet, ϵ étant donné, choisissons l'entier i de façon que $2^{-i} < \dfrac{\epsilon}{2}$; alors $f \in V(K_i, \frac{\epsilon}{2})$ entraîne $d(f,0_f) \leq \epsilon$, en vertu de l'inégalité (2.5).

□

Le théorème suivant simplifie le théorème précédent (2.2.2) et donne un autre concept de la topologie de l'espace $C(D)$.

Théorème 2.2.3. *Il existe une distance d sur $C(D)$ vérifiant la propriété suivante : une suite $(f_n)_n \subset C(D)$ converge vers une fonction f pour la distance d si et seulement si f_n tend vers f uniformément sur tout compact.*

Démonstration. Soit $(K_i)_i$ une suite exhaustive de compacts sur D et d la distance précédemment définie.
Soit $(f_n) \subset C(D)$ une suite convergente vers $f \in C(D)$ au sens de la distance d.

Si K est un compact de D, alors $K \subset K_j$, donc on précise deux cas :
Si $\inf(1; \|f_n - f\|_K) = 1$, alors

$$\inf(1; \|f_n - f\|_K) = 1, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

$$\inf(1; \|f_n - f\|_K) \leq 2^j d(f_n - f), \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

$$\inf(1; \|f_n - f\|_K) \leq 2^j \sum_{i \geq 1} 2^{-i}, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

$$\inf(1; \|f_n - f\|_K) \leq 2^j, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Si $\inf(1; \|f_n - f\|_K) = \|f_n - f\|_K$, donc il y a deux cas :

— Si $\inf(1; \|f_n - f\|_{K_i}) = \|f_n - f\|_{K_i}$ alors :

$$\begin{aligned}\inf(1; \|f_n - f\|_K) &= \|f_n - f\|_K \\ &\leq 2^j d(f_n - f) \\ &\leq 2^j \sum_{i \geq 1} 2^{-i} \|f_n - f\|_{K_i}.\end{aligned}$$

Si on pose $j \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$2^j \sum_{i \geq 1} 2^{-i} \|f_n - f\|_{K_i} \geq 1.$$

— Si $\inf(1; \|f_n - f\|_{K_i}) = 1$, alors

$$\inf(1; \|f_n - f\|_K) = 1, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned}\inf(1; \|f_n - f\|_K) &\leq 2^j d(f_n - f), \quad \forall j \in \mathbb{N}. \\ &\leq 2^j \sum_{i \geq 1} 2^{-i}, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \\ &\leq 2^j, \quad \forall j \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Pour un certain $j \in \mathbb{N}$, on a donc

$$\inf(1; \|f_n - f\|_K) \leq 2^j d(f_n - f), \quad \forall n.$$

Donc $\inf(1; \|f_n - f\|_K)$ tend vers 0, et par conséquent

$$\|f_n - f\|_K \to 0.$$

Ainsi, f_n tend vers f uniformément sur tout compact.
Inversement, soit $(f_n)_n \subset C(D)$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction $f \in C(D)$. Pour $\epsilon > 0$ donnée, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{i>N} 2^{-i} < \epsilon$ (car $\sum_{i\geq 1} 2^{-i}$ est une série convergente donc le reste tend vers 0), on a alors

$$d(f_n, f) = \sum_{i=1}^{N} 2^{-i} \inf(1, \|f_n - f\|_{K_i}) + \sum_{i>N} 2^{-i} \inf(1, \|f_n - f\|_{K_i})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N} 2^{-i} \inf(1, \|f_n - f\|_{K_i}) + \sum_{i>N} 2^{-i}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N} 2^{-i} \inf(1, \|f_n - f\|_{K_i}) + \epsilon$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme la somme figurant au membre de droite tend vers 0 quand n tend vers l'infini (c'est une somme finie de termes tendant vers 0), on en déduit $\overline{\lim_{n\longrightarrow\infty}} d(f_n - f) \leq \epsilon$, pour tout $\epsilon > 0$, et donc $\lim_{n\longrightarrow\infty} d(f_n - f) = 0$. □

Remarque 2.2.1. *Toutes les distances sur $C(D)$ vérifiant la conclusion du théorème précédent définissent la même topologie sur $C(D)$. Pour des raisons évidentes, cette topologie est appelée la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.*

Proposition 2.2.1. *L'espace $C(D)$ est complet pour toute distance invariante par translation compatible avec sa topologie*

Démonstration. Soit δ une telle distance, et soit $(f_n)_n \subset D$ une suite de Cauchy pour δ. Il s'agit de montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact, et pour ce faire, il suffit de vérifier que $(f_n)_n$ est uniformément de Cauchy sur tout compact, fixons un compact $K \subset D$.
Supposons que la suite $(f_n)_n$ ne vérifie pas le critère de Cauchy uniforme sur K. On peut alors trouver $\epsilon > 0$ et deux sous-suites (f_{p_k}) et (f_{q_k}) telles que $\|f_{p_k} - f_{q_k}\|_K \geq \epsilon$ pour tout K, Mais $(f_n)_n$ est de Cauchy pour d, donc $\delta(f_{p_k}; f_{q_k})$ tend vers 0. Comme δ est invariante par translation, il revient au même de dire que $\delta(f_{p_k} - f_{q_k}; 0)$ tend vers 0, autrement dit que $f_{p_k} - f_{q_k}$ tend vers 0 pour δ.
Par conséquent, $f_{p_k} - f_{q_k}$ tend vers 0 uniformément sur tout compact, et on obtient donc une contradiction. □

2.3 Espace de fonctions analytiques A(D)

2.3.1 Théorèmes classiques des fonctions analytiques

Étudiants quelques théorèmes classiques importants de l'espace $A(D)$.

Théorème 2.3.1 (*Théorème de Weierstrass*)**.** *Soit $\{f_n\}$ une famille de fonctions analytiques sur un domaine D qui converge uniformément sur tout compact de D vers une fonction f. Alors f est analytique dans D.*
De plus, la famille de dérivées d'ordre k converge uniformément sur les compacts de D vers la dérivée d'ordre k de la fonction limite f.

Démonstration. Soit z_0 un point arbitraire dans D, choisissions le disque $D(z_0; r) \subseteq D$, et notons par $C_r = \{z : |z - z_0| = r\}$.
Soit $\varepsilon > 0$, par hypothèse f_n converge uniformément vers f. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a :

$$|f_n(\xi) - f(\xi)| < \varepsilon, \forall \xi \in C_r.$$

Pour tout $z \in D\left(z_0; \dfrac{r}{2}\right)$ définitions les fonctions $F_k(z)$ par

$$F_k(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{C_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi,\ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Alors pour $n \geq n_0$, on a :

$$\begin{aligned}
|F_k(z) - f_n^k(z)| &\leq \frac{k!}{2\pi} \int\limits_{C_r} \frac{|f(\xi) - f_n(\xi)|}{|\xi - z|^{k+1}} |d\xi| \\
&\leq \frac{k!}{2\pi} \int\limits_{C_r} \frac{\varepsilon}{|\xi - z|^{k+1}} |d\xi| \\
&\leq \frac{k!}{2\pi} \frac{2\pi r \varepsilon}{|\xi - z|^{k+1}}
\end{aligned}$$

Puisque $z \in D(z_0; \frac{r}{2})$ et $\xi \in C_r$, alors on a :

$$\begin{aligned}
|\xi - z| &= |\xi - z_0 + z_0 - z| \\
&\leq |\xi - z_0| + |z_0 - z| \\
&\leq r + \frac{r}{2}.
\end{aligned}$$

D'où

$$|F_k(z) - f_n^k(z)| \leq \frac{k! \varepsilon 2^{k+1}}{r^k}.$$

Par conséquent, $f_n^k(z)$ converge uniformément vers $F_k(z)$ sur $D\left(z_0; \dfrac{r}{2}\right)$ pour tout k.
Pour $k = 0$, on voit que $f_n(z)$ converge uniformément vers $f(z)$ et $f_n(z)$ converge uniformément vers $F_0(z)$. Donc on voit que $f(z) = F_0(z)$ qui est une fonction analytique dans $D\left(z_0; \dfrac{r}{2}\right)$.
Comme z_0 est arbitrairement choisi, alors $f(z)$ est analytique dans D. Par conséquent, (f_n^k) converge uniformément vers f^k dans $D\left(z_0; \dfrac{r}{2}\right)$. ◻

Théorème 2.3.2 (*Théorème de Hurwitz*)**.** *Soit $\{f_n\}$ une famille de $A(D)$ converge uniformément sur tout compact de D vers une fonction analytique non constante $f(z)$. Si $f(z_0) = 0$ pour un certain $z_0 \in D$, alors pour tout $r > 0$ suffisamment petit, il existe $n_0 = n_0(r)$, tel que pour tout $n > n_0$, $f_n(z)$ et f ont le même nombre de zéros dans $D(z_0; r)$.*

Démonstration. Soit $D(z_0; r)$ un disque très petit tel que $f(z)$ ne s'annule pas dans $\overline{D(z_0; r)}$ sauf au point z_0. Alors d'après la continuité de f pour un certain $m > 0$, on a $|f(z)| > m$ sur $|z - z_0| = r$. Comme f_n converge uniformément vers f sur $|z - z_0| = r$, donc pour tout n suffisamment grand, sur $|z - z_0| = r$ on a

$$|f_n(z) - f(z)| < m < |f(z)|.$$

On déduit d'après le théorème de Rouché (1.1.4) que $f_n(z)$ et f ont le même nombre de zéros. □

Comme conséquence de ce théorème, on a le résultat suivant :
Conséquence : Si $\{f_n\}$ est une famille de fonctions analytiques injectives dans un domaine D converge uniformément sur tout compact de D vers une fonction analytique non constante f, alors f est injective dans D.

Démonstration. Faisons une démonstration par absurde, soient z_1 et z_2 deux points distincts de D tels que $f(z_1) = f(z_2)$.
Considérons les fonctions

$$g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_1), \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Puisque $f_n(z)$ converge uniformément vers $f(z)$, alors la fonction limite $g(z) = f(z) - f(z_1)$ s'annule en z_2.
D'après le théorème de Hurwitz (2.3.2) on voit que $g_n(z)$ admet un zero au voisinage du point z_2, pour tout n suffisamment grand. Donc $g_n(z_2) = f_n(z_2) - f_n(z_1) = 0$. Par conséquent, on obtient $f_n(z_1) = f_n(z_2)$ et comme f_n sont injectives donc $z_1 = z_2$. Contradiction avec l'hypothèse. □

2.3.2 Topologie de l'espace A(D)

Il est facile de vérifier que l'espace $A(D)$ est un sous espace vectorielle de $C(D)$. On munit l'espace $A(D)$ de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de l'espace $C(D)$.

Remarque 2.3.1. *On peut appliquer aux l'espaces $C(D)$ et $A(D)$ les propriétés connues des espaces métriques, par exemple (pour qu'un sous-ensemble F d'un espace métrique E soit fermé, il faut et il suffit que chaque point de E qui est limite d'une suite de points de F appartienne à F).*

Théorème 2.3.3. *L'espace $A(D)$ est un sous-espace fermé de $C(D)$. Si $f \in A(D)$, alors $f' \in A(D)$ et l'application $f \longmapsto f'$ est continue sur $A(D)$.*

Démonstration. Soit $(f_n)_n$ une suite de $A(D)$ converge uniformément sur tout compact de D vers f. Alors d'après le théorème de Weierstrass (2.3.1), f est analytique dans D et d'après la formule intégrale de Cauchy, f' est analytique dans D. Utilisons une autre fois le théorème de Weierstrass (2.3.1), on voit que f_n' converge vers f'. Par conséquent, l'application $f \longmapsto f'$ est continue sur $A(D)$. □

Caractérisons les parties compactes de l'espace $A(D)$. Pour une fonction $f \in A(D)$ et un compact $K \subset D$, posons

$$\|f\|_K = \sup\{|f(z)|; \quad z \in K\}.$$

Définition 2.3.1. *Une partie A de l'espace $A(D)$ est dite bornée dans $A(D)$ si pour tout compact $K \subset D$, il existe une constante C_K finie telle que $\|f\|_K \leq C_K$ pour toute fonction f dans $A(D)$.*

Bien entendu, on dira qu'une suite $(f_n)_n \subset A(D)$ est bornée dans $A(D)$ si l'ensemble $\{f_n; \quad n \in \mathbb{N}\}$ est borné.

Théorème 2.3.4. *Si $(f_n)_n$ est une suite bornée dans $A(D)$, alors $(f_n)_n$ possède une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction f dans $A(D)$.*

La démonstration de ce théorème passe par le lemme suivant.

Lemme 2.3.1. *Si D_1 et D_2 sont deux disques ouverts tels que $\overline{D_1} \subseteq D_2 \subseteq \overline{D_2} \subseteq D$, alors on peut trouver une constante C dépend du choix des disques D_1 et D_2 vérifiant la propriété suivante : pour toute fonction $f \in A(D)$, on a*

$$\|f\|_{\overline{D_1}} \leq C\|f\|_{\overline{D_2}}.$$

Démonstration. L'application $f \longmapsto f'$ est continue de $A(D)$ dans lui-même, donc l'application $f \longmapsto f'|_{\overline{D_1}}$ est continue de $(C(\overline{D_2}) \cap A(D_2), \|.\|_\infty)$ dans $(C(\overline{D_1}), \|.\|_\infty)$. Comme cette application est linéaire, cela donne directement la conclusion du lemme. □

Démontrons maintenant le théorème (2.3.4).

Démonstration. Soit $(f_n)_n$ une suite bornée dans $A(D)$. Pour tout point $z \in D$, on peut trouver deux disques ouverts D_z et D_z' de centre z tel que

$$\overline{D_z} \subseteq D_z' \subseteq \overline{D_z'} \subseteq D.$$

D'après le lemme (2.3.1) et l'inégalité des accroissements finis, toutes les fonctions f_n sont C_z-lipschitziennes sur D_z, pour une certaine constante C_z dépend du choix des disques D_z et D_z'. Par conséquent, la suite $(f_n)_n \subseteq C(D)$ est équicontinue en tout point $z \in D$. Comme D est un espace métrique séparable, on peut donc appliquer le théorème d'Ascoli (1.3.4). Ainsi, la suite $(f_n)_n$ possède une sous-suite $(f_{n_k})_k$ qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction f et d'après le théorème de Weierstrass (2.3.1), f est analytique. □

Théorème 2.3.5. *Une partie de $A(D)$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.*

Démonstration. Considérons A une partie fermée et bornée de $A(D)$, alors d'après le théorème (2.3.4), toute partie bornée de $A(D)$ est relativement compacte, donc toute partie fermée bornée est compacte.
Inversement, si A est une partie compacte de $A(D)$, alors A est fermée dans $A(D)$. De plus, pour tout compact $K \subseteq D$, l'ensemble $A_K = \{f|_K; \quad f \in A\}$ est un compact de $C(K)$ car l'application $f \longmapsto f|_K$ est continue de $A(D)$ dans $C(K)$. En particulier, A_K est bornée dans $C(K)$ pour tout compact $K \subseteq D$, donc A est bornée dans $A(D)$. $\square$

Chapitre 3

Familles normales

L'objet de ce chapitre est l'étude des familles normales de fonctions analytiques définie dans un ouvert D du plan complexe $\mathbb{C}$. On présente les différents concepts en lien avec les familles normales tels le concept de famille de fonctions localement bornée et celui d'équicontinuité. Ensuite, on présente les familles normales de fonctions analytiques puis de fonctions méromorphes en traitant dans les deux cas les principaux théorèmes et les propriétés fondamentales illustrés par des exemples. Le théorème de Montel et le critère fondamental de normalité ont été également étudiés dans ce chapitre. Les ouvrages suivants [1], [5], [6], [7] ,[8], [9] et [12] ont été utilisés.

3.1 Famille uniformément bornée, localement uniformément bornée et équicontinue

Famille uniformément bornée

Définition 3.1.1. *Une famille de fonctions F est dite uniformément bornée sur D, s'il existe un nombre réel M tel que :*

$$|f(z)| \leq M, \quad \textit{pour toute } f \in F \textit{ et pour tout } z \in D.$$

Exemple 3.1.1. *Soit F la famille de fonctions définies par*

$$f_n(z) = \frac{z}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

On voit que les membres de la suite $f_n(z)$ sont bornés dans le disque $D = \{z, |z| \leq r\}$, on a :

$$|f_n(z)| \leq \frac{|z|}{n} \leq \frac{r}{n} \leq r = M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Donc la famille F est uniformément bornée, on a :

$$|f_n(z)| \leq M = r, \quad \forall f \in F, \quad \forall z \in D.$$

Remarque 3.1.1. *Tous les membres d'une famille uniformément bornée sont bornés. La réciproque, en général, est fausse. Autrement dit, si tous les membres sont bornés ceci n'est pas forcement que la famille F soit uniformément bornée.*

Considérons le contre exemple suivant :

Exemple 3.1.2. *Soit la famille $F = \{f_n\}$ où $f_n(z) = nz$.*

Les fonctions de la famille $\{f_n\}$ des fonctions sont bornées dans le disque $D = \{z, |z| \leq r\}$ car

$$|f_n(z)| \leq n|z| \leq nr.$$

Comme $(M = rn, n = 1, 2, 3, \dots)$ donc la limite n'existe pas, pour chaque membre de la famille.

Famille localement uniformément bornée

Définition 3.1.2. *On dit qu'une famille F de fonctions est localement uniformément bornée sur D, si pour tout $z \in D$, il existe un voisinage ϑ_z dans lequel la famille F soit uniformément bornée :*

$$|f_n(z)| \leq M, \quad \forall f \in F, \quad \forall z \in D \cap \vartheta_z.$$

Notons d'une famille localement uniformément bornée n'est pas forcément une famille uniformément bornée, voir l'exemple suivant.

Exemple 3.1.3. *Soit F la famille de fonctions définie par*

$$f_n(z) = \frac{1}{1 - z^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

On voit que la suite $(f_n(z))_n$ n'est pas uniformément bornée dans le disque unité D_s car :

$$|f_n(z)| = \left|\frac{1}{1 - z^n}\right|, \quad \forall z \in D_s$$

$$\leq \frac{1}{||1| - |z|^n|}, \quad \forall z \in D_s.$$

Quand on approche des frontières du disque D_s, $|z|$ rapproche à 1 alors que $f_n(z)$ approche à l'infinie. Mais pour tout $z \in D_s$, il existe un voisinage de z tel que

$|z| \leq r < 1$ et $r \in \mathbb{R}^+$ on a :

$$|f_n(z)| = \left| \frac{1}{1 - z^n} \right|, \quad \forall z \in D_s \cap \vartheta_z$$

$$\leq \frac{1}{|\,|1| - |z|^n\,|}, \quad \forall z \in D_s \cap \vartheta_z$$

$$\leq \frac{1}{|\,|1| - |r|^n\,|}, \quad \forall z \in D_s \cap \vartheta_z$$

$$\leq M, \quad \forall z \in D_s \cap \vartheta_z.$$

Alors la suite $(f_n(z))_n$ est localement uniformément bornée dans le disque D_s.
Le théorème suivant donne une caractérisation d'une famille localement uniformément bornée.

Théorème 3.1.1. *Une famille F de fonctions est localement uniformément bornée dans un domaine D si et seulement si F est uniformément bornée sur tout compact de D.*

Démonstration. Soit F une famille de fonctions localement uniformément bornée et soit K est un sous-ensemble compact de D. Pour chaque point de K, choisissons un voisinage dans lequel F est uniformément bornée. Cela fournit un recouvrement ouvert pour K. D'après la propriété de Heine-Borel (1.3.1), il existe un sous-recouvrement fini de K.
Autrement dit, il existe un nombre fini des z_i dans K et $\varepsilon_i > 0$ tels que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} R(z_i, \varepsilon_i), \quad |f(z)| \leq M_i,$$

pour toute $f \in F$ et pour tout $z \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} R(z_i, \varepsilon_i)$.
Alors F est uniformément bornée sur K, ayant pour $M = \max\{M_1, M_2, ..., M_n\}$.
La réciproque est immédiate du fait que la fermeture d'un voisinage d'un point est un ensemble compact. C'est-à-dire :
La famille F est uniformément bornée sur chaque compact de D.

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall f \in F, \quad \forall z \in D \cap K.$$

Donc

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall f \in F, \quad \forall z \in D \cap \overset{\circ}{K}.$$

Alors F est localement uniformément bornée. □

Étudions les propriétés d'une famille localement uniformément bornée quand les membres de cette famille sont des fonctions analytiques dans un domaine D.

Théorème 3.1.2. *Soit $F \subset A(D)$ localement uniformément bornée dans un domaine D, Alors la famille des dérivées n^{ieme} de toutes les fonctions de la famille F, $F^n = \{f^n, f \in F\}$ est localement uniformément bornée dans D.*

Démonstration. Démontrons ce théorème pour $n = 1$ (la dérivée première), supposons que pour un certain z_0 dans D que $|f(z)| \leq M$, pour tout $f \in F$, pour tout $z \in D(r, z_0) \subset D$.
Alors pour z dans le petit disque $|z - z_0| \leq \frac{r}{2}$ et d'après formule intégrale de Cauchy (1.1), on a :

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$$

Comme $|\xi - z| \geq |\xi - z_0| - |z - z_0| \geq r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}$ et

$$\int_C |f(\xi)||d\xi| \leq ML(c) = 2M\pi.$$

Alors on déduit que

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi(\frac{r}{2})^2} \int_C |f(\xi)||d\xi| \leq \frac{4M}{r}.$$

Cela montre que la famille F' est localement uniformément bornée au point z_0.
Puisque z_0 est arbitrairement choisi, donc la famille F' est localement uniformément bornée dans D.
Faisons une démonstration analogue pour n quelconque. □

Remarque 3.1.2. *La réciproque du théorème (3.1.2) est fausse.*

En effet, soit F la famille des constantes définie comme suite $F = \{n, n \in \mathbb{N}^*\}$.
La famille de dérivée d'ordre n est donnée par

$$F^{(n)} = \{0_f, \qquad f \in F\}.$$

Alors

$$\forall f \in F, \quad \forall z \in D \Rightarrow |f(z)| = 0 \leq M. \tag{3.1}$$

D'après formule (3.1), la famille $F^{(n)}$ est localement uniformément bornée. Mais

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall f \in F \quad, \forall z \in D \cap \vartheta_z.$$

Donc $(M = n, n = 1, 2, 3 \ldots)$ quand n tend vers l'infini, M n'existe pas. Par conséquent, la famille des fonctions analytiques F n'est pas localement uniformément bornée.

Théorème 3.1.3. *Soit F une famille de fonctions analytiques sur D telle que la famille des dérivées F' est localement uniformément bornée et supposons qu'il existe $z_0 \in D$ tel que $|f(z_0)| \leq M < \infty$, pour toute f dans F. Alors la famille F est localement uniformément bornée.*

Démonstration. Soit $z \in D$ et soit $\gamma \subseteq D$ un chemin quelconque de a z. Puisque la famille F' est localement uniformément bornée, alors il existe $M_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$|f'(z)| \leq M_1, \quad f \in F, \quad \forall z \in D \cap \vartheta_z.$$

D'où

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| + \int_\gamma |f'(\xi)| d\xi \leq M + M_1 L(\gamma), \quad \forall f \in F.$$

Le résultat suit ensuite en considérant une inégalité analogue dans un disque quelconque sur le point z et l'intégration sur tout chemin dans le disque quelconque. □

Famille équicontinue

Définition 3.1.3. *Une famille F de fonctions définies sur un domaine D est dite équicontinue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ pour toute $f \in F$ et pour tout point $z_1, z_2 \in D$ vérifiant $|z_1 - z_2| < \delta$.*

Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0; |z_1 - z_2| < \delta \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon, \quad \forall f \in F, \quad \forall z_1, z_2 \in D.$$

Il est claire que tous les membres d'une famille équicontinue sont uniformément continues. En effet, pour une famille équicontinue, on peut trouver un delta qui dépend de epsilon $\delta = \delta(\epsilon)$ pour tous les points du domaine D et toutes les fonctions de la famille.
La réciproque est fausse, c'est à dire il peut être que les membres de la famille sont uniformément continues mais la famille elle même n'est pas équicontinue.

Exemple 3.1.4. *Considérons $F = \{f_n\}$ la famille des fonctions $f_n(z) = nz$.*

Pour tout n, la fonction $f_n(z)$ est uniformément continue sur le disque défini par $D = \{z, |z| \leq r\}$ car

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| < n|z_1 - z_2| < \varepsilon \Rightarrow |z_1 - z_2| < \frac{\varepsilon}{n} = \delta.$$

Par contre, on ne peut pas choisir un δ pour tout n $\left(\delta = \frac{\varepsilon}{n}, n = 1, 2, 3 \ldots\right)$.
D'où la famille $\{nz\}$ n'est pas équicontinue.

Pour une famille des fonctions analytiques dans D, il existe une relation entre une famille localement uniformément bornée et une famille équicontinue. On a le théorème suivant.

Théorème 3.1.4. *Soit $F \subset A(D)$ localement uniformément bornée dans un domaine D, alors F est équicontinue sur tout compact de D.*

Démonstration. Démontrons ce théorème dans le cas particulier où le compact K de D est un disque fermé.
Supposons que la famille F est localement uniformément bornée.Alors d'après le théorème (3.1.2), la famille F' des dérivées de fonctions de F est localement uniformément bornée et d'après le théorème (3.1.1) la famille F' est uniformément bornée sur tout compact de D. C'est-à-dire :

$$|f'(z)| \leq M, \quad \forall f \in F, \quad \forall z \in K.$$

Par suite, pour $z_0, z_1 \in K$, on a :

$$|f(z_1) - f(z_0)| = \left| \int_{z_0}^{z_1} f'(z)dz \right| \leq M|z_1 - z_0| < \varepsilon \Rightarrow |z_1 - z_0| < \frac{\varepsilon}{M} = \delta.$$

Choisissons $\frac{\epsilon}{M} = \delta$, on voit que la famille F est équicontinue sur K.
Pour la démonstration du cas général, soit K est un sous-ensemble compact de D, pour chaque point de K. Cela fournit un recouvrement ouvert pour K. Alors d'après la propriété de Heine-Borel (1.3.1), il existe un sous-recouvrement fini de K et d'après le théorème (3.1.2), la famille F' des dérivées de fonctions de F est localement uniformément. Appliquons maintenant le théorème (3.1.1), alors la famille F' est uniformément bornée sur tout recouvrement de K et utilisons la démonstration du théorème (3.1.1) avec $M = \max\{M_i, i = 1, 2 \ldots\}$ alors on déduit que la famille F est équicontinue sur K. □

La réciproque du théorème (3.1.4) n'est pas vraie. Voici un contre exemple.

Exemple 3.1.5. *Soit $F = \{f_n\}$ la famille de fonctions définie par $f_n(z) = z + n$.*

La famille F est équicontinue sur tout compact du disque unité D_s, mais elle n'est pas localement uniformément bornée.
En effet, soit z_1, z_2 dans D_s, alors on a $f_n(z_1) - f_n(z_0) = z_1 - z_0$, pour tout n. Il suffit de prendre $\delta = \varepsilon$. Donc la famille F est équicontinue.
La famille F n'est pas uniformément bornée dans le disque unité D_s car :

$$|f_n(z)| = |z + n| \leq 1 + n = M.$$

Les fonctions $f_n(z)$ ne sont pas bornées puisque $(M = 1 + n, n = 1, 2, 3, \ldots)$.

3.2 Famille normale de fonctions analytiques

3.2.1 Définition. Propriétés fondamentales

Définition 3.2.1. *Soit $F \subset A(D)$, on dit que F est normale dans D, si toute suite $(f_n)_n$ de F contient une sous suite $(f_{n_k})_k$ converge uniformément sur tout compact de D.*

Définition 3.2.2. *On dit qu'une famille F est normale au point $z_0 \in D$, si elle est normale au voisinage du point z_0.*

Exemple 3.2.1. *Soit la famille $F = \{f_n\}$ de fonctions définie comme suit :*

$$f_n(z) = z^n, \quad \forall z \in \mathbb{N}.$$

On a

$$|f_n(z)| = |z^n|$$
$$|f_n(z)| \leq |z|^n < 1.$$

On voit que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur le disque unité D_s. Par conséquent, la famille F est normale sur D_s.

Définition 3.2.3. *On dit qu'une famille de fonctions analytiques F est normale à ∞ si la famille $\left\{h(z) = f\left(\frac{1}{z}\right), f \in F\right\}$ est normale en $z = 0$. Ainsi, on peut étendre la définition de famille normale et considérer un domaine $D \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.*

Remarque 3.2.1. *Dans certaines références, la définition (3.2.1) est formulée sous la forme suivante :*
Une famille F de fonctions analytiques sur un domaine D est normale dans D si pour chaque suite de fonctions $(f_n)_n \subset F$, il existe soit une sous-suite qui converge uniformément sur chaque compact de D vers une fonction $f \neq \infty$, soit une sous suite qui converge uniformément sur chaque compact de D vers ∞.
Dans le cas où la sous-suite (f_{n_k}) converge uniformément vers ∞, cela signifie que pour chaque compact K de D et pour chaque constante $M > 0$, il existe $\vartheta_{(M,K)}$ tel que si $k > N$, alors $|f_{n_k}(z)| > M$ pour tout $z \in K$.
Dans le cas où la sous suite converge vers une fonction $f \neq \infty$, le théorème de Weierstrass nous assure que la fonction f est également analytique.

La fonction limite de la suite convergente d'une famille normale n'appartient pas nécessairement à la même famille.

Exemple 3.2.2. *Soit la famille de fonctions analytiques $\{z^n, n \in \mathbb{N}\}$.*

La suite $(z^n)_n$ converge vers 0 sur le disque unité car :
On a $|z^n| = |z|^n < 1$, lorsque n tend vers l'infini, $|z|^n$ tend vers 0 et par conséquente toute suite extraite $(z_{n_k})_k$ converge uniformément vers 0 sur le disque unité. D'où $\{f_n\}$ est une famille normale et 0_f n'appartient pas à la famille $\{f_n\}$.

Tout comme une suite bornée peut contenir différentes sous-suites qui convergent à des limites différentes, une famille normale peut contenir différentes suites qui convergent uniformément sur des sous-ensembles compacts vers différentes fonctions.

Exemple 3.2.3. *Soit la famille des fonctions définie comme suit :*

$$f_n(z) = \begin{cases} z^n & \text{si } n \text{ impair} \\ 1 - z^n & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

La fonction z^n est analytique sur $\mathbb{C}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ car z^n est une fonction polynomiale. Donc $\{f_n(z)\}$ est une famille de fonctions analytiques (la fonctions polynomiale est une fonction analytique puisque dérivable partout dans $\mathbb{C}$).
La sous-suite $(f_{2n+1})_n$ converge uniformément vers 0 sur tous les sous-ensembles compacts du D_s car $f_{2n+1}(z) = z^{2n+1}$ et on a

$$\begin{aligned} |f_{2n+1}(z)| &= |z^{2n+1}| = |z|^{2n+1} \\ &< 1^{2n+1}. \end{aligned}$$

Lorsque n tend vers l'infinie, $|z|^n$ tend vers 0.
La sous-suite $(f_{2n})_n$ converge uniformément vers 1 sur tous les sous ensembles compacts du D_s car $f_{2n}(z) = 1 - z^{2n}$ et on a

$$\begin{aligned} |f_{2n}(z) - 1| &= |z^{2n}| = |z|^{2n} \\ \\ &< 1 \end{aligned}$$

Lorsque n tend vers l'infinie, $|z|^n$ tend vers 0.
Étudions le cas général d'une famille de fonctions polynomiales.

Exemple 3.2.4. *Soit la famille de fonctions définie par*

$$f_n(z) = az^n + bz^{n-1} + \cdots + c \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

et a,b,c des valeurs réels finies.
La famille $\{f_n\}$ est normale sur le disque unité D_s.

En effet, on a

$$|f_n(z)| = |a||z|^n + |b||z|^{n-1} + \cdots + |c|.$$

Lorsque n tend vers l'infinie, $|z|^n \to 0$ et $|z|^{n-1} \to 0$. Il existe alors $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $f_n(z)$ converge uniformément vers M sur le disque unité D_s.

Théorème 3.2.1. *Une famille $F \subset A(D)$ est normale dans D si et seulement si elle est normale en tout point de D.*

Démonstration. Il est évident que si la famille F est normale dans un domaine D, alors elle est normale en tout point de D.
Réciproquement, supposons que la famille F est normale en tout point z de D et choisissons un ensemble $\{z_n = x_n + y_n\}$ dénombrable dense dans D où x_n et y_n des nombres rationnels. Désignons par $D(z_n, r_n)$ le plus grand disque sur z_n pour lequel la famille F soit normale.
Si une sous suite $(z_{nk})_k$ converge vers $\xi \in D$, alors $\xi \in D(z_{nk}, r_{nk})$ pour k assez grand puisque r_{nk} converge vers 0 et comme $(z_{nk})_k$ est un sous ensemble de $(z_n)_n$ et $(z_n)_n$ est dense dans D alors $(z_{nk})_k$ converge vers ξ et ξ appartient à la frontière de D.
Il en résulte que $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} D(z_n, r_n)$ est un recouvrement de D, puisque F est normale sur

$D(z_n, r_n)$ alors pour toute suite $(f_n) \subseteq F$, on peut extraite une sous-suite $(f^1_{nk})_k$ qui converge uniformément dans $D\left(z_1, \frac{r_1}{2}\right)$ vers une fonction analytique, de celle-ci une suite $(f_{nk})_k$ converge uniformément en $D\left(z_2, \frac{r_2}{2}\right)$.
Répétez le même travaille jusqu'à k cela donne la suite diagonal du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
f^1_{n1}(z), & f^1_{n2}(z), & \ldots, & f^1_{nn}(z), & \ldots \\
f^2_{n1}(z), & f^2_{n2}(z), & \ldots, & f^2_{nn}(z), & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
f^k_{n1}(z), & f^k_{n2}(z), & \ldots, & f^k_{nn}(z), & \ldots
\end{array}$$

Par conséquent, la suite $(f_{nk})_k$ converge uniformément dans $D\left(z_n, \frac{r_n}{2}\right)$ vers une fonction analytique. □

Si la famille F n'est pas normale dans un domaine D, alors d'après le théorème (3.2.1), il existe un point $z_1 \in D$ tel que F n'est pas normale en z_1, on a l'exemple suivant.

Exemple 3.2.5. *Soit la famille F de fonctions analytiques définies par :*

$$F = \{f_n(z) = nz; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Il est clair que F est une famille de fonctions analytiques. Étudions cette famille F dans les deux cas :

— Pour $z = 0$, la suite $f_n(0) = 0$ converge uniformément vers 0. Donc la famille F n'est pas normale au point 0 puisque F n'est pas normale au voisinage du point 0.
— Pour $z \neq 0$, la suite $(f_n(z))_n$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Par conséquent, la famille F ne peut pas être normale dans n'importe quel domaine contenant le point 0 (l'origine).

Lemme 3.2.1. *Soit $\{f_n\} \subset A(D)$ localement uniformément bornée dans D. Si $\{f_n\}$ converge en tout point d'un sous-ensemble dense de D, alors $\{f_n\}$ converge uniformément sur tout compact de D.*

Démonstration. Soit K compact contenu dans D, il faut démontrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur le compact K.
D'après théorème(3.1.4), on voit que la famille $\{f_n\}$ est équicontinue sur K, c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$|z - z^{'}| < \delta \Longrightarrow |f_n(z) - f_n(z^{'})| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall z, z^{'} \in K. \tag{3.2}$$

Comme K est compact, il existe un recouvrement finie tel que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} D\left(z_i, \frac{\delta}{2}\right)$.
Pour tout recouvrement, choisissons des points z_i, $(i = 1, \ldots, p)$ tel que z_i soit dans le sous-ensemble dense de K, à qui $\{f_n\}$ convergent. Ensuite, choisissons n et m assez grands pour que

$$|f_n(z_i) - f_m(z_i)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, p. \tag{3.3}$$

Donc d'après la formule (3.2) et pour tout $z \in K$, il existe $z_i \in K$ tel que :

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq |f_n(z) - f_n(z_i)| + |f_n(z_i - f_m(z_i))| + |f_m(z_i) - f_m(z)| < \varepsilon$$

D'où la famille $\{f_n(z)\}$ est uniformément de Cauchy (voir la définition(1.1.10)) sur K. Appliquons le théorème (1.1.9), on en déduit alors que la famille $\{f_n(z)\}$ converge uniformément sur K. □

3.2.2 Principaux théorèmes d'une famille normale

Théorème d'Ascoli Arzéla

Le point de départ de l'étude des familles normales de fonctions analytiques est le célèbre résultat suivant, connu sous le nom de théorème d'Arzelà Ascoli :

Théorème 3.2.2. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues à valeurs dans un espace métrique E. La famille $\{f_n\}$ est normale dans D si et seulement si les propriétés suivantes sont vérifiées :*
(i) F est équicontinue sur tout compact $K \subset D$.
(ii) Pour tout $z \in D$, l'ensemble des valeurs $\{f(z),\, f \in F\}$ est inclus dans un ensemble compact de E.

Démonstration. Faisons une démontrons par absurde pour démontrer la nécessité de (i), supposons que la famille F n'est pas équicontinue. C'est à dire il existe un $\epsilon > 0$, des suites de points $(z_n)_n$, $(z_n^{'})_n$ dans K et fonctions $f_n \in F$ tel que $|z_n - z_n^{'}|$ tend vers 0 mais $|f_n(z_n) - f_n(z_n^{'})| \geq \epsilon$, pour tout n.
Comme K est compact, on peut choisir deux suites (z_n), et $(z_n^{'})$ convergeant vers la même limite $z^{''} \in K$. Puisque F est normale, alors il existe une sous-suite de la suite $(f_n)_n$ converge uniformément dans K.
Il est claire que nous pouvons choisir les trois sous-suite de même indice n_k, soit $(f_{nk})_k$ une sous-suite converge uniformément vers f dans K, donc on peut trouver k tel que

$$|f_{nk}(z_{nk}) - f(z_{nk})| + |f(z_{nk}) - f(z_{nk}^{'})| + |f(z_{nk}^{'}) - f_{nk}(z_{nk}^{'})| \leq \epsilon.$$

Par conséquent, $|f_{nk}(z_{nk}) - f_{nk}(z_{nk}^{'})| < \epsilon$ contradiction avec $|f_n(z_n) - f_n(z_n^{'})| \geq \epsilon$, pour tout n.
Inversement, pour démontrer la nécessité (ii), on démontre que la fermeture de l'ensemble des valeurs $f(z)$ avec $f \in F$ est un compact.

Soit $(w_n)_n$ une suite dans la fermeture de l'ensemble formé par les valeurs des fonctions $f \in F$. Pour tout w_n, on détermine $f_n \in F$ de sorte que $|f_n(z) - w_n| < \frac{1}{n}$.
D'après la normalité de F, il existe une sous-suite $(f_{nk}(z))_k$ convergente, et la suite $(w_{nk})_k$ converge vers la même limite.
La suffisance de (i) et (ii) est prouvée par la processus du diagonal de Cantor. Pour tout ensemble dense il existe une suite de points $\xi_k = u_k + iv_k$ avec $u_k \in \mathbb{Q}$, $v_k \in \mathbb{Q}$ dense dans D.
Soit $(f_n)_n$ une suite, on peut extraire une sous-suite convergente en ξ_k. Pour trouver une sous-suite qui converge en un point est possible d'après la deuxième assertion. On peut donc trouver un diagramme d'indices suivant :

$$\begin{array}{cccccc}
n_{11} <, & n_{12} <, & n_{13} <, & \ldots, & n_{1j} <, & \ldots \\
n_{21} <, & n_{22} <, & n_{23} <, & \ldots, & n_{2j} <, & \ldots \\
n_{31} <, & n_{32} <, & n_{33} <, & \ldots, & n_{34} <, & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
n_{k1} <, & n_{k2} <, & n_{k3} <, & \ldots, & n_{kj} <, & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Toute line est contenue dans la ligne précédente et tel que la limite de $f_{n_{kj}}(\xi_k)$ lorsque j tend vers l'infinie existe pour tout k.
La suite diagonale $(n_{jj})_j$ est strictement croissante, c'est une sous-suite de chaque line du diagramme précédent.

Par conséquent $(f_{n_{jj}})$ est une sous-suite de la $(f_n)_n$ qui converge pour tout point ξ_k. Remplaçons n_{jj} par n_j pour simplifier les notations.

Considérons maintenant un compact $K \subset D$ et supposons que F est équicontinue dans K, donc il faut montrer que f_{n_j} converge uniformément sur K.
Soit $\epsilon > 0$, choisissons $\delta > 0$ tel que pour tout z,$z^{'} \in K$ et $f \in F$ on a $|z - z^{'}| < \delta$ implique que $|f(z) - f(z^{'})| < \frac{\epsilon}{3}$. Comme K est compact, il existe un recouvrement finie de rayon $\frac{\delta}{2}$ et choisissons un point ξ_k dans chaque ensemble de ce recouvrement.
Alors il existe un i_0 tel que pour $i, j > i_0$ implique

$$|f_{n_i}(\xi_k) - f_{n_j}(\xi_k)| < \frac{\epsilon}{3} \text{ pour tout } \xi_k.$$

Pour tout $z \in K$, on a $|z - \xi_k| < \delta$. Par conséquent,

$$|f_{nj}(z) - f_{nj}(\xi_k)| < \frac{\epsilon}{3} \text{ et } |f_{n_i}(z) - f_{n_i}(\xi_k)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

D'après les trois inégalités précédente, on voit que $|f_{n_i}(z) - f_{n_j}(z)| < \epsilon$. Comme toutes les valeurs $f(z)$ appartient à sous-ensemble compact et par conséquent un sous-ensemble complet de E, alors $(f_{n_j})_j$ converge uniformément sur D. $\square$

Théorème de Montel et résultats associés

Énonçons le théorème de Montel.

Théorème 3.2.3 (*Théorème de Montel*). *Soit $F \subseteq A(D)$ une famille localement uniformément bornée dans D, alors F est une famille normale dans D.*

Démonstration. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dans F. Démontrons qu'il existe une sous-suite de la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur les compacts de D.
Choisissons une suite de points (z_k) dense dans D, d'après lemme (3.2.1), il suffit de construire une sous-suite de la suite $(f_n)_n$ converge en tout point de la suite (z_k).
Par hypothèse, la suite $(f_n(z_1))_n$ est bornée. Donc d'après le théorème Bolzano-Weierstrass (1.1.8), il existe une sous-suite $(f_{n,1})_n$ de $(f_n)_n$ converge en z_1.
Mais la suite $(f_{n,1}(z_2))$ est bornée, donc il existe une sous-suite $(f_{n,2})$ de $(f_{n,1})$ converge en z_2 et comme $(f_{n,2})$ est une sous-suite de la suite $(f_{n,1})$ alors elle doit converge en z_1.
Faisons un raisonnement analogue m fois, on obtient une sous-suite $(f_{n,m})$ de (f_n) telle que : $(f_{n,m})$ converge en $z_1, z_2, \ldots, z_m$.
Le diagramme suivant explique bien la sous-suite extraite $(f_{n,m})$:

$$\begin{array}{cccccc}
f_{1,1}(z), & f_{2,1}(z), & f_{3,1}(z), & \ldots, & f_{m,1}(z), & \ldots \\
f_{1,2}(z), & f_{1,2}(z), & f_{3,2}(z), & \ldots, & f_{m,2}(z), & \ldots \\
f_{1,3}(z), & f_{2,3}(z), & f_{3,3}(z), & \ldots, & f_{m,3}(z), & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
f_{1,m}(z), & f_{2,m}(z), & f_{3,m}(z), & \ldots, & f_{m,m}(z), & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

La sous-suite $(f_{n,m}(z))$ converge z_m et tous les $z_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$ dans $(z_k)_k$.
Considérons maintenant la suite $(f_{n,n})_n$ qui présente la diagonale du diagramme précédent.
Pour tout m fixé et $n \geq m$, la suite $(f_{n,n}(z_m))$ est une sous-suite de la suite convergente $(f_{n,m}(z_m))$ et donc elle est convergente. Par conséquent, $(f_{n,n}(z))$ est une sous-suite de la suite $(f_n(z))$ qui converge en tout point de la suite de (z_k). $\square$

Remarque 3.2.2 ([9], *P36*). *1. Le domaine D dans le théorème de Montel (3.2.3) peut également être le plan complexe $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.*

2. *Le théorème de Montel (3.2.3) est aussi valide pour tout ensemble ouvert du plan complexe* $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

La réciproque du théorème de Montel (3.2.3) est fausse en général. Il suffit de considérer par exemple la famille $F = \{f_n(z) = n\}$ qui est normale sur $\mathbb{C}$ mais pas localement uniformément bornée. Néanmoins, on a le résultat suivant :

Théorème 3.2.4. *Soit F une famille de fonctions analytiques dans D telle que toute suite de fonctions de F admet une sous-suite converge uniformément sur tout compact de D vers une fonction analytique. Alors F est localement uniformément bornée et donc équicontinue sur les compacts de D.*

Démonstration. Faisons une démonstration par l'absurde, supposons que F n'est pas localement uniformément bornée. Alors il existe un disque fermé $\overline{D(z;r)} \subseteq D$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction $f_n \in F$ et un point $z_n \in \overline{D(z;r)}$, avec $|f_n(z_n)| > n$.
Or, on peut extraire une sous-suite $(f_{nk})_k$ converge uniformément sur $\overline{D(z;r)}$ vers une fonction analytique f.
Ainsi, pour un $k_0 \in \mathbb{N}$ et $k \geq k_0$, on a :

$$|f_{nk}(z) - f(z)| \leq 1, \quad \forall z \in \overline{D(z;r)}.$$

D'autre part,

$$|f_{nk}(z) - f(z)| \geq |f_{nk}(z)| - |f(z)|.$$

Posons $m = \max\limits_{z \in \overline{D(z;r)}} |f(z)| < \infty$, alors

$$|f_{nk}(z)| < 1 + |f(z)| < 1 + \max_{z \in \overline{D(z;r)}} |f(z)| = 1 + M.$$

Donc tout z dans $\overline{D(z;r)}$, on a

$$|f_{nk}(z)| \leq 1 + M.$$

Ce qui contredit le fait que $f_{nk}(z_{nk})$ tend vers l'infini quand k tend vers l'infini. $\square$

En combinant la définition d'une famille normale et le théorème (3.2.4) pour rendre les hypothèses du théorème (3.2.4) plus utile, elles ont été formulés de cette façon.

Corollaire 3.2.1. *Soit F une famille normale de fonctions analytiques sur un domaine D. Si pour un $z_0 \in D$, et une constante M finie $|f(z_0)| \leq M$, pour toute f dans F, alors F est localement uniformément bornée.*

Le corollaire suivant est une conséquence du théorème de Montel.

Corollaire 3.2.2. *Soit F une famille de fonctions analytiques dans D. Si pour un point $z_0 \in D$ tel que $|f(z_0)| \leq M$ pour toute f dans F où M est une constante finie. Alors la famille des dérivées $F^{'} = \{f^{'}, f \in F\}$ est localement uniformément bornée et normale dans D.*

Démonstration. Soit F une famille de fonctions analytiques dans D et soit un point $z_0 \in D$ tel que $|f(z_0)| \leq M$ pour toute f dans F où M est une constante finie. Alors d'après le corollaire (3.2.1), la famille F localement uniformément bornée et d'après le théorème (3.1.2), la famille des dérivées $F^{'}$ est localement uniformément bornée. Appliquons le théorème de Montel (3.2.3), on voit que la famille des dérivées $F^{'}$ est normale. □

Notons que la famille des dérivées $F^{'}$ de fonctions analytiques ne soit pas nécessairement normale lorsque la famille F est normale, on a l'exemple suivant :

Exemple 3.2.6. *Considérons la famille définie par*

$$F = \left\{ \frac{nz^2}{2} + n; \qquad n = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

Montrons que cette famille F est normale sur le disque unité.

Posons $\psi_n(z) = \dfrac{nz^2}{2} + n$ et soit $z \in D_s$. Alors on a

$$\begin{aligned} |\psi_n(z)| &= \left| \frac{nz^2}{2} + n \right| \\ &\geq n - \left| \frac{nz^2}{2} \right| \\ &\geq \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\frac{n}{2} \leq \left| \frac{nz^2 + n}{2} \right|, \qquad \text{pour } n = 1, 2, 3 \dots.$$

Lorsque n tend vers l'infinie, $|\psi_n(z)|$ tend vers l'infinie, pour tout $z \in D$. D'où la famille F est normale. Mais la famille des dérivées $F^{'} = \{nz; \qquad n = 1, 2, 3, \dots\}$ n'est pas normale (voir l'exemple 3.2.1).

Parfois pour démontrer qu'une famille de fonctions analytiques F est normale, il suffit de démontrer que la famille des dérivées $F^{'}$ est localement uniformément borné, on a le théorème suivant.

Théorème 3.2.5. *Soit $F \subset A(D)$, si la famille des dérivées $F^{'} = \{f^{'}, f \in F\}$ est localement uniformément bornée, alors F est normale dans D.*

Démonstration. Soit $(f_n)_n \subseteq F$ et considérons la suite des dérivées $(f^{'}_n)_n \subset F^{'}$. Comme $(f^{'}_n)$ est localement bornée alors elle admet une sous-suite $(f^{'}_{nk})_k$ converge normalement vers une fonction analytique $g(z)$ dans D.
Désignons par $\overline{D(z; r)} \subseteq D$ le disque fermé et soit un point fixé $z_0 \in \overline{D(z; r)}$, on a :

$$f_{nk}(z) = f_{nk}(z_0) + \int_{z_0}^{z} f^{'}_{nk}(\xi) d\xi, \quad z \in \overline{D(z; r)}.$$

On distingue alors deux cas :

(i) Si $\sup\limits_k |f_{nk}(z_0)| = M_1 < \infty$, alors

$$|f_{nk}(z)| \leq |f_{nk}(z_0)| + \int\limits_{z_0}^{z} |f'_{nk}(\xi)|d\xi.$$

Puisque $(f'_n)_n$ est localement bornée, alors la sous-suite (f'_{nk}) est bornée sur $\overline{D(z;r)}$. Posons

$$\sup_k |f'_{nk}(\xi)| = M_2 < \infty.$$

Par suite, on obtient

$$\begin{aligned}
|f_{nk}(z)| &\leq |f_{nk}(z_0)| + \int\limits_{z_0}^{z} |f'_{nk}(\xi)|d\xi \\
&\leq \sup_k |f_{nk}(z_0)| + \int\limits_{z_0}^{z} \sup_k |f'_{nk}(\xi)|d\xi \\
&\leq M_1 + (z - z_0)M_2 = M.
\end{aligned}$$

Pour tout $z \in \overline{D(z;r)}$, la suite (f_{nk}) est bornée et donc la sous-suite (f_p) de la sous-suite (f_{nk}) converge.

$$f_p(z) = f_p(z_0) + \int\limits_{z_0}^{z} f'_p(\xi)d\xi \tag{3.4}$$

Par passage la limite, on obtient

$$\lim_{p\to\infty} f_p(z) = \lim_{p\to\infty} f_p(z_0) + \lim_{p\to\infty} \int\limits_{z_0}^{z} f'_p(\xi)d\xi. \tag{3.5}$$

Comme l'intégrale est continue et (f'_{nk}) converge normalement vers $g(z)$, alors $f'_p(z)$ est converge fonction limite $g(z)$, on a la résultat suivant :

$$\lim_{p\to\infty} \int\limits_{z_0}^{z} f'_p(\xi)d\xi = \int\limits_{z_0}^{z} \lim_{p\to\infty} f'_p(\xi)d\xi = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{z_0}^{z} f'_{nk}(\xi)d\xi = \int\limits_{z_0}^{z} g(\xi)d\xi,$$

et d'après l'équation (3.4), on a :

$$\lim_{p\to\infty} f_p(z) = \lim_{p\to\infty} f_p(z_0) + \int\limits_{z_0}^{z} g(\xi)d\xi = \psi(z).$$

Donc la sous-suite $f_p(z)$ converge vers $\psi(z)$. Par conséquent, la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\overline{D(z;r)}$ vers $\psi(z)$ qui est analytique d'après le théorème de Weierstrass.

(ii) Si $\sup_k |f_{nk}(z_0)| = \infty$, alors on voit que (f_{nk}) tend vers l'infinie lorsque n tend vers l'infinie. Par conséquent, la sous-suite (f_p) de la suite (f_{nk}) converge uniformément vers l'infinie sur $\overline{D(z;r)}$. $\square$

Le théorème suivant caractérise les ensembles compacts de l'espace $A(D)$.

Corollaire 3.2.3. *Tout ensemble fermé et localement uniformément bornée de $A(D)$ est compact.*

Démonstration. Soit $F \subseteq A(D)$ une famille localement uniformément bornée et fermé dans la topologie de la convergence uniforme. Alors d'après le théorème de Weierstrass (2.3.1), la limite de convergence est une fonction analytique sur D donc analytique sur les compact de D. Puisque F est localement uniformément, alors d'après théorème de Montel (3.2.3), la famille F est normale et donc de toute suite possède au moins une sous-suite converge uniformément. Par conséquent, la famille F est séquentiellement compact. De plus, $A(D)$ est un espace métrique et donc F est compacte. $\square$

Théorème 3.2.6. *Soient f une fonction continue sur $\mathbb{C}$, $G(\mathbb{C})$ un ensemble défini par $G(\mathbb{C}) = \{az + b \quad a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$ et $F = \{(f \circ g)(z),\ g \in G(\mathbb{C})\}$ une famille normale dans $\mathbb{C}$, alors f est une constante.*

La preuve de ce théorème est traité dans [7].

3.3 Critères fondamentaux de Montel

Énonçons tous d'abord le critère fondamental de normalité. Notons que lorsque l'on dit qu'une valeur a est prise par une fonction f , c'est qu'il existe au moins un point du domaine qui envoie f sur a. Lorsque l'on dit qu'une valeur a n'est pas prise par une famille de fonctions F, c'est que a n'est prise par aucune fonction f de F.

Théorème 3.3.1. *Soit F une famille de $A(D)$ qui ne prend pas deux valeurs fixes a et b dans $\mathbb{C}$, alors F est normale dans D.*

Pour la preuve de ce théorème, voir [6].

Théorème 3.3.2. *Soit F une famille de $A(D)$ qui ne prend pas une valeur a dans $\mathbb{C}$ et qui prennent la valeur b dans $\mathbb{C}$ au plus p points, alors la famille F est normale dans D.*

Démonstration. Soit $F \subset A(D)$, on peut supposer que $a = 0$ et $b = 1$. Pour chaque $f \in F$ définissons la fonction g par

$$g(z) = \sqrt[p+1]{f(z)}.$$

Comme chaque $f \in F$ ne s'annule pas sur D, chaque fonction g est analytique sur D et ne s'annule pas non plus.

Soit $w_1, w_2, \ldots, w_{p+1}$ les $(p+1)$ ièmes racines de l'unité ($w_i^{p+1} = 1, \quad 1 \leq i \leq p+1$). On suppose que pour $z_i \in D, g(z_i) = w_i,$ pour $i = 1, 2, \ldots, p+1$, alors

$$f(z_i) = g(z_i)^{p+1} = 1, \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, p+1.$$

Ceci est contradictoire avec le fait que $f(z)$ prendre la valeur 1 au plus de p points. Par suite, chaque fonction g ne prend pas une des valeurs w_i pour un $i = 1, 2, \ldots, p+1$. Par conséquent, les fonctions $h(z) = \dfrac{g(z)}{w_i}$ ne prennent pas les valeurs 0 et 1 et forment donc une famille normale, d'après théorème (3.3.1). Ceci entraîne que les fonctions $f(z) = (w_i h(z))^{p+1} = (g(z))^{p+1}$ forment également une famille normale. $\square$

3.4 Normalité d'une famille de fonctions méromorphes

La normalité des familles de fonctions méromorphes est généralement étudiée en utilisant la distance cordale (la métrique sphérique), une approche qui permet de traiter plus facilement les pôles des fonctions. Certains résultats concernant les familles normales de fonctions méromorphes sont tout simplement des extensions naturelles des théorèmes précédant, tandis que d'autres constituent des nouveautés très intéressantes.

Notons par $M(D)$ la famille des fonctions méromorphes définies dans un ouvert D du plan complexe $\mathbb{C}$.

Définition 3.4.1. *Une suite de fonctions $(f_n)_n$ converge χ-uniformément vers f dans D si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que si $n > n_0$, alors*

$$\chi(f(z), f_n(z)) = \frac{|f(z) - f_n(z)|}{\sqrt{1 + |f(z)|^2}\sqrt{1 + |f_n(z)|^2}} < \varepsilon \text{ pour tout } z \in D.$$

où χ désigne la distance cordale (la métrique sphérique) voir [9].

Remarque 3.4.1. *Dans les définitions d'une famille localement uniformément bornée, famille équicontinue,...en remplaçant le module par la distance χ on obtient respectivement les définitions d'une famille localement χ-uniformément bornée, famille χ-équicontinue,...*

Définition 3.4.2. *On dit que la famille $F \subset M(D)$ est normale dans D, si chaque suite $(f_n)_n$ de F possède une sous-suite qui converge χ-uniformément sur tout compact de D.*

La différence entre la définition de famille normale de fonctions analytiques et celle de famille normale de fonctions méromorphes réside dans la métrique qui est utilisée. En effet, dans le cas des familles de fonctions analytiques, la sous-suite est uniformément convergente sur les sous-ensembles compacts alors qu'elle est χ-uniformément convergente dans le cas des familles de fonctions méromorphes.

Théorème 3.4.1. *Soit* $\{f_n\} \subset M(D)$*, alors* $\{f_n\}$ *converge* χ*-uniformément sur tout compact de* D *vers* f *si et seulement si pour tout point* $z_0 \in D$*, il existe un disque fermé* $\overline{D(z_0, r)}$ *dans lequel* f_n *converge uniformément vers* f *ou* $\dfrac{1}{f_n}$ *converge uniformément vers* $\dfrac{1}{f}$*.*

Démonstration. On suppose que f_n converge uniformément vers f ou $\dfrac{1}{f_n}$ converge uniformément vers $\dfrac{1}{f}$ sur $\overline{D(z_0, r)}$, comme $\chi(f_n - f) \leq |f_n - f|$ et $\chi(f_n - f) \leq |\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f}|$, alors $\{f_n\}$ converge χ-uniformément sur tout compact de D vers f.

Supposons que $\{f_n\}$ converge χ-uniformément sur tout compact de D. Comme $\overline{D(z_0, r)}$ est compact de D, alors $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} |f_n - f| \longrightarrow 0$. On distingue deux cas :

i) Si $f(z_0) \neq \infty$, alors d'après [9, Proposition 1.6.2] $f(z)$ est χ-continue dans D. Par conséquent, il existe un disque fermé $\overline{D(z_0; r)}$ pour lequel $f(z)$ est borné. Utilisons maintenant [9, Théorème 1.2.2], on obtient alors f_n converge uniformément vers f sur $\overline{D(z_0; r)}$. De plus, $f(z)$ est analytique sur $\overline{D(z_0; r)}$.

ii) Si $f(z_0) = \infty$, alors on peut trouver un disque fermé $\overline{D(z_0; r)}$ pour lequel $\dfrac{1}{f(z)}$ est bornée, on a :

$$\left|\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f}\right| = \left|\frac{f - f_n}{f_n f}\right| \leq |f - f_n| \left|\frac{1}{f_n f}\right|, \quad \forall z \in \overline{D(z_0; r)}.$$

Par passage à la limite

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left|\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f}\right| \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} |f - f_n| \left|\frac{1}{f_n f}\right|, \quad \forall z \in \overline{D(z_0; r)}.$$

Comme f_n converge uniformément vers f et $\dfrac{1}{f(z)}$ est bornée, alors $\dfrac{1}{f_n}$ converge uniformément vers $\dfrac{1}{f}$ dans $\overline{D(z_0; r)}$.

□

Corollaire 3.4.1. *Soit* $\{f_n\} \subset M(D)$ *converge* χ*-uniformément sur tout compact de* D *vers* f*, alors ou bien* f *est une fonction méromorphe sur* D *ou bien identiquement à* ∞*.*

Démonstration. Supposons que $f \neq \infty$, alors pour certain $z_0 \in D$, $f(z) \neq \infty$ et f est analytique dans le voisinage de tout point ou elle est finie. D'autre part, si $f(z_0) = \infty$ avec $f \neq \infty$ alors z_0 est un point isolée singulier sinon dans le cas contraire, soit $(z_n)_n$ une suite dans D telle que z_n converge vers z_0 et $f(z_n) = \infty$. D'après le deuxième cas du théorème (3.4.1), $\dfrac{1}{f}$ est analytique sur $\overline{D(z_0; r)}$. Alors

$\dfrac{1}{f(z_n)} = 0$, pour tout n ceci implique que $\dfrac{1}{f(z)} = 0$ dans $\overline{D(z_0;r)}$. C'est a dire, $f = \infty$ sur $\overline{D(z_0;r)}$.
Considérons S l'ensemble

$$S = \{z \in D,\ f(z) = \infty\} = f^{-1}(\infty)$$

Comme $z_0 \in S$ alors $S \neq \phi$. De plus, S est un ensemble ouvert.
Soit $(z_m)_m \subset S$ et z_m converge vers z_1 et $f(z_m) = \infty$, d'après le deuxième cas du théorème (3.4.1), $\dfrac{1}{f}$ est analytique donc

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \frac{1}{f(z_m)} = \frac{1}{f(z_1)} = 0 \Rightarrow f(z_1) = \infty.$$

D'où $z_1 \in S$. Par conséquent, S est un ensemble fermé et d'après la connexité de D on voit que $S = D$. C'est une contradiction puisque $f \neq \infty$. Donc z_0 doit être un point singulier isolée et f est une fonction méromorphe dans D. □

Le corollaire (3.4.1) reste valable pour une famille de fonctions analytiques. Le résultat suivant est l'analogue du théorème de Montel pour les familles de fonctions méromorphes.

Théorème 3.4.2. *Une famille F de fonctions méromorphes sur un domaine D est normale sur D si et seulement si F est χ-équicontinue sur D.*

Démonstration. Faisons une démonstration par absurde. Supposons que F est une famille normale mais elle n'est pas χ-équicontinue. Alors il existe un point $z_0 \in D$, $\epsilon > 0$, une suite $(z_n)_n \subset D$ qui converge vers z_0 et une suite de fonctions $(f_n)_n \subset F$ vérifiant

$$\chi\left(f_n(z_0), f_n(z_n)\right) > \varepsilon, \qquad n = 1, 2, 3, \dots. \tag{3.6}$$

D'après la normalité de la famille F, il existe une sous-suite $(f_{nk})_k$ converge χ-uniformément sur tout compact de D. En particulier, dans un compact de D contenant la suite $(z_n)_n$. Utilisons [9, proposition 1.6.2], alors la sous-suite $(f_{nk})_k$ est χ-équicontinue au point z_0. Par conséquent, F est χ-équicontinue.
Réciproquement, soit $(z_p)_p$ une suite de point de D tel que tout point de D est un point limite de la suite $(z_p)_p$. Soit $(f_n)_n \subset F$ et considérons la suite de points $(f_n(z_1))_n$ de $\widehat{\mathbb{C}}$, alors il existe une sous-suite $(f_{\alpha_j}(z_1))_j$ de la suite $(f_n(z_1))_n$ qui converge vers $w_1 \in \widehat{\mathbb{C}}$.
De même, il existe une sous-suite $(f_{\beta_i}(z_2))_i$ de la suite $(f_{\alpha_j}(z_2))_j$ qui converge vers $w_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ et ainsi de suite. Choisissons maintenant la suite diagonale, $(f_{n_k})_k$, qui est une sous-suite de la suite $(f_n(z))_n$ telle que, pour tout $p \geq 1$, on a

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} |f_{n_k}(z_p) - w_p| = 0, \qquad w_p \in \widehat{\mathbb{C}}. \tag{3.7}$$

Montrons que la suite $(\phi_k(z))_k = (f_{nk}(z))_k$ converge χ-uniformément sur tout compact de D.
On considère le disque $\overline{D(z_0, r)} = \{z \in D; |z - z_0| \leq r,\, r > 0\}$ dans D, il suffit de démontrer que pour $\epsilon > 0$, il existe k tel que pour tout $m > k$, $m^{'} \geq k$ et $z \in \overline{D}$, on a :

$$|\phi_m(z) - \phi_{m'}(z)| < \epsilon.$$

Pour cela, soit un point $z_* \in \overline{D}$. Puisque la famille F est χ-équicontinue dans D et donc χ-équicontinue au point z_*, alors il existe un disque C_{z_*} dans D tel que pour toute $f \in F$, l'inégalité suivante est satisfaite dans C_{z_*}

$$|f(z) - f(z_*)| < \frac{\epsilon}{6}.$$

Soit $\xi_p \in C_{z_*}$, d'après (3.7) il existe un entier $m_{z'}$, tel que pour $m \geq m_{z'}$, $m^{'} \geq m_{z'}$ on a :

$$|\phi_m(\xi_p) - \phi_{m'}(\xi_p)| < \frac{\epsilon}{6}.$$

Par conséquent, pour tout $m \geq m_{z'}$, $m^{'} \geq m_{z'}$ et $z \in C_{z_*}$ on a :

$$\begin{aligned}
|\phi_m(z) - \phi_{m'}(z)| &= |\phi_m(z) - \phi_{m'}(z) + \phi_m(z^*) - \phi_m(z^*) + \phi_m(\xi_p) - \phi_m(\xi_p) \\
&\quad + \phi_{m'}(\xi_p) - \phi_{m'}(\xi_p) + \phi_{m'}(z^*) - \phi_{m'}(z^*)| \\
&\leq |\phi_m(z) - \phi_m(z^*)| + |\phi_m(z^*) - \phi_m(\xi_p)| + |\phi_m(\xi_p) - \phi_{m'}(\xi_p)| \\
&\quad + |\phi_{m'}(\xi_p) - \phi_m(z^*)| + |\phi_{m'}(z^*) - \phi_{m'}(z)| \\
&\leq \frac{5}{6}\epsilon < \epsilon.
\end{aligned}$$

Ceci pour tout point $z^* \in \overline{D}$ correspondre un disque C_{z_*} et $m_{z'}$. Comme $\widehat{\mathbb{C}}$ est compact, alors il existe un recouvrement fini. On peut trouver un nombre fini de point z_j tel que $\overline{D} \subset \bigcup_{j=1}^{k} I_{z_j}$. D'autre part, posons $m = \max m_{z_j}$ avec $1 \leq j \leq k$. □

Le critère fondamental de normalité a lui aussi son analogue pour les fonctions méromorphes.

Théorème 3.4.3 (*Critère de normalité*). *Soit $F \subset M(D)$ une famille qui ne prend pas trois valeurs distinctes a, b, c dans $\mathbb{C}$, alors F est normale dans D.*

Démonstration. Considérons G la famille définie par :

$$G = \left\{ g(z) = \frac{c-a}{c-b} . \frac{f(z)-b}{f(z)-a}; \qquad f \in F \right\}.$$

Alors G est une famille de fonctions analytiques dans D qui ne prend pas les valeurs 0 et 1. Par conséquent, d'après le critère de normalité théorème (3.3.1), G est normale pour la métrique usuelle et donc elle normale pour la métrique cordale. D'où la normalité de la famille F dans D. □

Étudions un autre critère, appelé critère de Marty, pour déterminer la normalité d'une famille de fonctions méromorphes :

Théorème 3.4.4 (*Théorème de Marty*)**.** *Une famille F de fonctions méromorphes dans D est normale si et seulement si pour tout compact $K \subseteq D$, il existe une constante C dépend de K telle que :*

$$g(z) = \frac{|f'(z)|}{(1+|f(z)|^2)} \leq C, \quad \forall z \in K, \quad \forall f \in F.$$

Autrement dit, F est normale si et seulement si la famille $\{g : f \in F\}$ est localement uniformément bornée.

Démonstration. Supposons que $g(z)$ est uniformément borné sur les compacts de D. Choisissons un point z_0 dans D et un disque fermé $\overline{D(z_0, r)}$ dans D. Pour tout $z \in \overline{D(z_0, r)}$ soit γ un chemin de z à z_0 dans D, alors on a

$$\chi(g(z_0), g(z)) \leq \int_{\gamma} g(\zeta)\,|d\zeta|\,.$$

Par conséquent, pour une certaine constante (qui dépend de z_0) on a

$$\chi(g(z_0), g(z)) \leq C\,|z_0 - z|\,, \qquad f \in F.$$

On conclue que F est χ-équicontinue. D'où la famille F est normale dans D.

Réciproquent, supposons que la famille F est normale mais que la famille définie par $\{g : f \in F\}$ n'est pas localement uniformément bornée. Alors il existe un compact $K \subseteq D$, une suite de points $(z_n) \subset K$ et une suite de fonctions $(f_n) \subseteq F$ telle que $g_n(z_n)$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini. Or, la normalité de F implique l'existence d'une sous-suite (f_{n_k}) qui converge localement χ-uniformément sur D vers f. D'après le théorème (3.4.1) qu'autour de chaque $z_0 \in$, il existe un disque fermé $\overline{D(z_0, r)}$ dans D sur lequel on a f_{n_k} converge uniformément vers f ou $\frac{1}{f_{n_k}}$ converge uniformément vers $\frac{1}{f}$.

Dans le premier cas, f est analytique sur $D(z_0, r)$ et bornée sur $\overline{D(z_0, r)}$. Par suite que les f_{n_k} sont analytiques sur $D(z_0, r)$ pour k suffisamment grand. Alors g_{n_k} converge uniformément sur $D(z_0, r)$ vers g. Comme g est bornée sur $D(z_0, r)$, alors les g_{n_k} sont aussi bornées.

Dans le seconde cas, il suffit de remplacer f_{nk} et f par $\frac{1}{f_{nk}}$ et $\frac{1}{f}$ respectivement.

Finalement, comme K est compact, on peut trouver un recouvrement fini de disques sur chacun desquels les g_{n_k} sont bornées. En prenant le maximum de ces bornes, on déduit que les g_{n_k} sont bornées sur K, ce qui est une contradiction. $\square$

Citons les résultats suivants dont la démonstration est traité dans [9].

Théorème 3.4.5. *Soit $F \subset M(D)$ telle que pour tout compact K de D, il existe un fonction monotone croissante h_K telle que :*

$$|f^{'}(z)| \leq h_k(|f^{'}(z)|),\ \forall f \in \mathcal{F},\ \forall z \in K.$$

Alors la famille F est normale dans D.

Théorème 3.4.6. *Soit $F \subset M(D)$ tel que pour tout point $z_0 \in D$, il existe un voisinage $\vartheta_{z_0} \subseteq D$ et une constante M dépend de z_0 , $M(z_0)$, tel que soit*

$$|f(z)| < M(z_0) \quad soit \quad \frac{1}{|f(z)|} < M(z_0), \quad \forall z \in \vartheta_{z_0}, \quad \forall f \in F.$$

Alors F est une famille normale dans D.

Théorème 3.4.7. *[9] Une famille F de fonctions méromorphes est normale dans D si et seulement si elle F est normale en tout point de D.*

Démonstration. La nécessité est évidente et la suffisance ce découle aisément du théorème de Marty (3.4.4) via un argument de compacité. En effet, supposons que F est une famille normale de fonctions méromorphes dans D. Alors d'après le théorème (3.4.2), pour tout point $z_0 \in D$, il existe un voisinage $\vartheta_{z_0} \subset D$ tel que :

$$|f(z) - f(z_0)| < c < 1.$$

Donc pour toute $f \in F$ et pour tout $z \in \vartheta_{z_0}$, si $|f(z_0)| \leq 1$ alors $|f(z)| < c < 2$. Sinon $|f(z_0)| > 1$ alors $|f(z_0)| > \dfrac{1}{c} > \dfrac{1}{2}$ et par conséquent si $z \in \vartheta_{z_0}$, $|f(z)| < c$ ou $\dfrac{1}{|f(z)|} < c, \quad \forall f \in F.$
Réciproquement, si cette dernière condition est vérifiée dans ϑ_{z_0} alors F peut être exprimé comme l'union des deux familles suivantes :

$$G = \{f \in F : |f(z)| < c,\ z \in \vartheta_{z_0}\}.$$

$$H = \{f \in F : |f(z)| > \frac{1}{c},\ z \in \vartheta_{z_0}\}.$$

Il s'ensuit que G et H sont normaux en z_0, de sorte que l'union est normale en z_0 donc F est normale en z_0. □

3.5 Applications et étude de quelques exemples

Applications

Dans cette partie, on utilise la notion de la normalité d'une famille de fonctions analytiques, afin de démontrer quelques théorèmes.
En 2018, Pavićević žarko a redémontré dans l'article [7] les théorèmes suivants.

Théorème 3.5.1 (*Théorème de Liouville*)**.** *Soit $f(z)$ une fonction analytique et bornée sur $\mathbb{C}$, alors $f(z)$ est constante.*

Démonstration. Considérons $h(z) = (f \circ g)(z)$ où $g \in G(\mathbb{C})$ et (voir théorème (3.2.6)) donc h est bornée puisque $|h(z)| = |f(g(z))| \leq M$. Par conséquence, la famille

$$F = \{(f \circ g)(z),\, g \in G(\mathbb{C})\}$$

est une famille bornée de fonctions analytiques dans $\mathbb{C}$. D'après le théorème de Montel (3.2.3), F est une famille normale de fonctions analytiques dans $\mathbb{C}$ et d'après le théorème (3.2.6) la fonction $f(z)$ est une constante. □

Démontrons maintenant le petit théorème de Picard.

Théorème 3.5.2 (*Petit théorème de Picard*)**.** *Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique non constante, alors il existe au plus $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) \neq z_1$.*

Démonstration. Supposons le contraire, c'est à dire il existe une fonction analytique non constante $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui prend toute valeur dans $\mathbb{C}$ sauf au moins deux points fixées dans $\mathbb{C}$.
Considérons la famille

$$F = \{(f \circ g)(z),\, g \in G(\mathbb{C})\}.$$

Les fonctions de la famille F ne prend pas deux valeurs fixée dans $\mathbb{C}$. Par conséquent, il résulte du théorème (3.3.1) que la famille F est une famille normale de fonctions analytiques sur $\mathbb{C}$. Appliquons maintenant le théorème (3.2.6) on obtient, f est une constante sur $\mathbb{C}$, ce qui contredit notre hypothèse. □

Étudions le petit théorème de Picard pour les fonctions méromorphes.

Théorème 3.5.3. *Si $f : \mathbb{C} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ est une fonction analytique non constant. Alors il existe au plus deux valeurs $z_1 \in \widehat{\mathbb{C}}$, $z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ tel que : $f(z) \neq z_1,\ f(z) \neq z_2$*

Démonstration. Faisons un raisonnement analogue à la démonstration du théorème (3.5.2). Supposons que le théorème est faux. c'est à dire il existe une fonction analytique non constante $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui prend toute valeur dans $\mathbb{C}$ sauf au moins deux points fixées dans $\mathbb{C}$.
Considérons la famille

$$F = \{(f \circ g)(z),\, g \in G(\mathbb{C})\}.$$

Les fonctions de la famille F ne prend pas deux valeurs fixée dans $\mathbb{C}$. Par conséquent, il résulte du théorème (3.4.3) que la famille F est une famille normale de fonctions analytiques sur $\mathbb{C}$. Appliquons maintenant le théorème (3.2.6) on obtient, f est une constante sur $\mathbb{C}$, ce qui contredit l'hypothèse. □

Étude de quelques exemples

Étudions la normalité des familles suivantes

Exemple 3.5.1. *Soit la famille définie par*

$$F = \{f_n(z) = z^n, n = 1, 2, 3 \dots\}.$$

On étudie la normalité dans :

— Le disque unité, $z \in D_s$, on a :

$$|f_n(z)| = |z^n| = |z|^n < 1. \tag{3.8}$$

D'après la formule (3.8) la famille F est uniformément bornée sur D_s. D'après le théorème de Montel (3.2.3), F est une famille normale sur D_s. On voit que la famille F n'est pas compacte car $0_f \notin F$.

— L'extérieur du disque unité, $z \in U : |z| > 1$, on a :

$$|f_n(z)| = |z^n| = |z|^n > 1.$$

Par passage à la limite

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(z)| = \lim_{n\to\infty} |z^n| = \lim_{n\to\infty} |z|^n > 1$$

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(z)| = \infty.$$

Alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers ∞ sur tout compact de U, donc F est une famille normale dans U.

Par conséquent, F est une famille normale dans $\mathbb{C}$.

Exemple 3.5.2. *Soit la famille suivante :*

$$F = \left\{ f_n(z) = \frac{z}{n}, \qquad n = 1, 2, 3 \dots \right\}.$$

On a :

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(z)| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n} = 0.$$

Donc $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 dans $\mathbb{C}$. D'où F est une famille normale dans $\mathbb{C}$.

Exemple 3.5.3. *Soit la famille de fonctions analytiques et bornées dans D*

$$F = \{f \in A(D); |f| \leq M\}.$$

Montrons que F est une famille normale et compacte.

La famille F et donc localement uniformément bornée, alors d'après le théorème de Montel (3.2.3) F est une famille normale dans D. De plus, montrons que la limite de toute suite $(f_n)_n$ de la famille F est dans F. En effet, soit $(f_n)_n \subset F$. On a

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(z)| \leq M.$$

Comme $(f_n)_n \subset F$ donc $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction g alors :

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(z)| = |g(z)| \leq M.$$

Par conséquent, la famille F est fermée. D'après le théorème (3.2.3), la famille F est compacte.

Exemple 3.5.4. *Considérons la famille :*

$$F = \left\{ f_\alpha \in A(D_s); \qquad f_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(\alpha)} z^n, |C_n^{(\alpha)}| \leq M \right\}.$$

Pour tout $z \in D_s$, on a

$$\begin{aligned}
|f_\alpha(z)| &\leq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} |C_n^{(\alpha)} z^n| \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} |C_n^{(\alpha)}||z^n| \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} |C_n^{(\alpha)}||z|^n \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} |C_n^{(\alpha)}|r^n \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} Mr^n \\
&\leq \frac{M}{1-r}.
\end{aligned}$$

D'où pour tout z vérifiant $|z| \leq r < 1$, $f_\alpha(z)$ et donc localement uniformément bornée. Il résulte du théorème de Montel (3.2.3) que la famille F est normale dans D_s.

Exemple 3.5.5. *Soit la famille de fonctions suivante :*

$$f_n = \frac{n}{z}, \; n = 1, 2, \ldots.$$

La suite $(f_n)_n$ de fonctions est analytiques dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, alors (f_n) est une suite de fonctions méromorphes.
De plus, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = \infty$ et donc la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers ∞. Par conséquent, la famille $\{f_n\}$ est une famille normale de fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}$.

Exemple 3.5.6. *Soit la suite de fonctions suivante :*

$$f_n = \frac{n^2}{1 - n^2 z^2} = \frac{1}{\frac{1}{n^2} - z^2},\ n = 1, 2, \dots .$$

La suite $(f_n)_n$ est une suite de fonctions analytiques sur $\mathbb{C} \setminus \{S\}$ qui converge vers $f(z) = -\dfrac{1}{z^2}$ avec

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C},\ z^2 = \frac{1}{n^2}, \qquad n \in \mathbb{N} \right\}.$$

De plus, S est un ensemble des points séparée, alors $(f_n(z))_n$ est une suite fonctions méromorphes qui converge uniformément vers $f(z)$. Par conséquent, la famille $\{f_n\}$ est une famille normale de fonctions méromorphes.

Conclusion

L'étude de la normalité d'une famille de fonctions analytiques est un vaste sujet utilisé dans plusieurs disciplines mathématiques.
Dans ce mémoire, on a présenté le concept des familles normales de fonctions analytiques définie dans un ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$. Les principaux résultats étudiés dans ce mémoire sont le théorème de Montel et ses conséquences, le théorème d'Arzela-Ascoli pour une une famille normale et le théorème de Marty.

Bibliographie

[1] L. V. Ahlfors. *Complex analysis : an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable.* McGraw-Hill, 1953.

[2] H. Cartan and R. Takahashi. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes.* Hermann Paris, 1961.

[3] W.D. John. *Applied complex variables.* Macmillan, New York, 1967.

[4] S. Lipschutz. *Theory and problems of general topology.* McGraw-HILL Book company, 1965.

[5] L A. Markushevich and A V. William. A second course in complex analysis. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 24(3) :249–250, 1969.

[6] P. Montel. *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*, volume 271. American Mathematical Soc., 1974.

[7] Ž. Pavićević. Normal families, theorems of Liouville and Picard and bloch principle. *Math. Montis*, 43 :5–9, 2018.

[8] S. Ponnusamy and H. Silverman. *Complex variables with applications.* Springer Science & Business Media, 2007.

[9] Joel L Schiff. *Normal families.* Springer Science & Business Media, 2013.

[10] M. R. Spiegel. *Variables complexes.* McGraw-Hill, 1973.

[11] P. Tauvel. *Analyse complexe pour la licence 3 : cours et exercices corrigés.* Dunod, 2006.

[12] Jussi Väisälä. *On Normal Quasiconformal Functions.* Suomalainen Tiedeakatemia, 1959.