

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT



FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUE ET INFORMATIQUE

Mémoire de MASTER

Option : Analyse mathématiques

Thème :

***Etude des semi-groupes analytiques
dans une algèbre de Banach***

Présenté par : NAHOUI Chaima

Soutenu publiquement devant le jury composé de :

Mme. Y. BOUKHATEM	M.A.A	Université de Laghouat	Présidente
Mme. Z. BENDAOU	M.C.A	Université de Laghouat	Examinatrice
Mr. Y. BELABBACI	M.C.A	Université de Laghouat	Examineur
Mr. A. MOKHTARI	Professeur	Université de Laghouat	Encadreur

Année universitaire 2011-2012

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu, le Bon Dieu, le Tout Puissant, de m'avoir donné la volonté, le courage et la patience pour atteindre ce but.

Mes remerciements au professeur Abd Elkader Mokhtari qui a dirigé ce travail, et qui m'a soutenu tout au long de ce mémoire de Master .

Madame Y.Boukhatem me fait un grand honneur en acceptant de présider ce Jury.

Je lui exprime mes vifs remerciements.

J'exprime mes vifs remerciements à Madame Z.Bendaoud maître de conférences ,et Monsieur Y.Belabbaci maître de conférences à L'Université A.Telidji Laghouat qui m'ont fait l'honneur d'accepter de juger ce travail.

Mes remerciements à toutes les personnes de l'université de Amar Telidji Laghouat enseignements, administrateurs, et plus particulièrement, ceux du département de Mathématiques et Informatique.

Un grand merci à ma famille et surtout mes parents, mes soeurs, mes frères, mes proches et mes amis pour leurs encouragement.

RÉSUMÉ

Dans ce travail nous présentons une étude concernant les propriétés spectrales des semi-groupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés dans une algèbre de Banach.

Mots-clés: Algèbre de Banach, semi-groupes, propriétés spectrales, semi-groupes uniformément continus.

ABSTRACT

In this work we present a study concerning the spectral properties of the uniform continuous semi-groups of linear bounded operators on a Banach algebra.

Keywords and phrases: Banach algebras, semi-groups, spectrales propriétés, uniforme continuous semi-groups.

المخلص

في هذا العمل نقوم بدراسة خصائص الطيفية لنصف الزمر على جبر بناخ وبخاصة نصف الزمر المستمرة بانتظام ذات المؤثرات الخطية المحدودة.

الكلمات المفتاحية : جبر بناخ , نصف الزمر , خصائص الطيفية , نصف الزمر المستمرة بانتظام.

Table des matières

1	Théorie générale	5
1.1	Espaces vectoriel normés	5
1.2	Espaces vectoriel complet	6
1.2.1	Espace de Hilbert	6
1.3	Les opérateurs	8
1.3.1	opérateur adjoint, auto-adjoint	14
1.3.2	Spectre d'un opérateur	15
1.3.3	Opérateur compact	16
1.3.4	Convergences dans $\mathcal{L}(E,F)$	18
2	Algèbres de Banach	19
2.1	Quelques définitions et résultats utiles	19
2.1.1	Fonctions holomorphes	20
2.1.2	Adjonction d'une unité	21
2.1.3	Unité approchée bornée	22
2.2	Morphismes des algèbres	24
2.3	Propriétés fondamentales du spectre	26
2.3.1	Ensemble de tous les éléments inversibles $O(E)$	26
2.3.2	Diviseurs de zéro et diviseurs de zéro généralisés	28
2.3.3	Spectre et ensemble résolvant	29
2.3.4	Rayon spectral et les éléments nilpotents et quasi nil- potents	34
2.4	Idéaux	39
3	Semi-groupe d'opérateurs	41
3.1	Semi-groupe dans une algèbre de Banach	41
3.1.1	A-Module de Banach	42
3.1.2	Théorème de Sinclair	46
3.1.3	continuité des semi-groupes dans une algèbre de Ba- nach commutative séparable.	50
3.2	Semi-groupe d'opérateurs bornés	53

3.2.1	Définitions	53
3.2.2	Semi-groupes uniformément continus	54
3.3	Propriétés spectrales des semi-groupes uniformément continus.	60
	Bibliographie.	67

Introduction

Ce travail est basé essentiellement sur l'étude d'une part des semi-groupes dans les algèbres de Banach, en particulier des semi-groupes analytiques, d'autre part les propriétés spectrales des semi-groupes uniformément continus.

Notre travail a été effectué selon le plan suivant:

Le premier chapitre est une présentation de la théorie générale, et les notions qui seront utilisées dans ce mémoire de Master 2.

Le deuxième chapitre présente la théorie des algèbres de Banach commutative, plus particulièrement les propriétés fondamentales du spectre, le théorème de Gelfand-Mazur, les morphismes d'algèbres, et les idéaux.

Le troisième chapitre présente d'une part

- 1) La théorie des semi-groupes dans une algèbre de Banach où on expose le théorème de Sinclair qui assure l'existence d'un semi-groupe analytique dans une algèbre de Banach commutative à unité approchée bornée.
- 2) d'autre part la théorie des semi-groupes d'opérateurs bornés en particulier les semi-groupes uniformément continus, on expose qu'un opérateur A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu si et seulement si A est un opérateur linéaire borné. De plus on a les résultats suivants:

Lemme(3.2.1):

Soit $A \in \mathcal{L}(E)$, alors $(e^{At})_{t>0}$ est un semi-groupe uniformément continu d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ dont le générateur infinitésimal est A .

Lemme(3.2.2):

Soit A un opérateur borné $A \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique semi-groupe uniformément continu $(T(t))_{t \geq 0}$ tel que

$$T(t) = e^{At}, \forall t \geq 0.$$

Théorème(3.2.1):

Un opérateur $A : E \longrightarrow E$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu si et seulement si $A \in \mathcal{L}(E)$.

Enfin nous exposons les propriétés spectrales des semi-groupes uniformément continus,

Théorème(3.3.1):

Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu et A son générateur infinitésimal, si $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re\lambda > \|A\|$, alors l'application

$$\begin{aligned} R_\lambda : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto R_\lambda x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) x dt. \end{aligned}$$

définit un opérateur linéaire borné, $\lambda \in \rho(A)$ et

$$R_\lambda x = (\lambda Id - A)^{-1} x \text{ pour tout } x \in E.$$

Théorème(3.3.2)(Riez-Dunford):

Soit A un générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu $(T(t))_{t \geq 0}$, si Γ_A est un contour de Jordan A -spectral, alors on a

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_A} e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda \quad \forall t \geq 0.$$

Théorème(3.3.3):

Soit A générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu $(T(t))_{t \geq 0}$. Alors

$$e^{t\sigma(A)} = \sigma(T(t)) \quad \forall t \geq 0.$$

Chapitre 1

Théorie générale

1.1 Espaces vectoriel normés

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Définition 1.1.1 Une application qui associe à chaque vecteur $x \in E$ le réel $\|x\|$ est une norme sur E si et seulement si elle vérifie pour tout $x, y \in E$, et $\lambda \in \mathbb{K}$ les axiomes suivants:

1. $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

On dit alors que $(E, \|\cdot\|)$ ou tout simplement E est un espace vectoriel normé et sera noté: "e.v.n".

Définition 1.1.2 Etant donné l'espace normé $(E, \|\cdot\|)$, on définit une distance d sur E par:

$$\forall x, y \in E, d(x, y) = \|x - y\|.$$

Exemple:

De nombreux espaces fonctionnels sont des espaces normés. Par exemple:

1. Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E = \mathbb{R}^m$ (ou \mathbb{C}^m), on définit les trois normes usuelles sur E :

a) $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq m} |x_i|$;

$$\text{b) } \|x\|_1 = \sum_{i=1}^m |x_i|;$$

$$\text{c) } \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m |x_i|^2} \text{ (La norme euclidienne sur } \mathbb{R}^m \text{).}$$

2. l'ensemble $C([a,b])$ des fonctions continues sur $[a,b]$, sur lequel on peut définir de nombreuses normes, la plus classique étant la norme dite de la convergence uniforme définie par:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

1.2 Espaces vectoriel complet

Définition 1.2.1 *Un espace métrique E est complet si toute suite de Cauchy de E est converge dans E .*

Définition 1.2.2 *Un espace vectoriel normé complet est dit **espace de Banach**.*

Remarque

Si F est un sous espace vectoriel fermé d'un espace de Banach E il est lui aussi complet pour la norme induite par celle de E , donc F est un espace de Banach.

Exemple:

1. $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach;
2. $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach $1 \leq p \leq +\infty$.

1.2.1 Espace de Hilbert

Définition 1.2.3 *Un produit scalaire sur le \mathbb{R} -espace vectoriel E est défini par une forme $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie positive, bilinéaire et symétrique.*

On note: $\varphi(x,y) = \langle x,y \rangle$.

- **bilinéarité:**

$$\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle, \quad \langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle.$$

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \text{ et } \langle x, \mu y \rangle = \mu \langle x, y \rangle, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- **symétrie:** $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

- **définie-positivité:** $\langle x, x \rangle \geq 0$ et $(\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_E)$.

Si E est un \mathbb{C} -espace vectoriel les propriétés de linéarité et de symétrie sont remplacées par la sesquilinearité et l'hermiticité:

- **sesquilinearité:**

$$\text{Si } \lambda, \mu \in \mathbb{C} : \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \text{ et } \langle x, \mu y \rangle = \bar{\mu} \langle x, y \rangle.$$

- **hermiticité:** $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$.

- **définie-positivité:** Comme précédemment.

Définition 1.2.4 On appelle espace préhilbertien E tout espace vectoriel muni d'une norme associée à un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On notera $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ l'espace préhilbertien.

Sa norme $\| \cdot \|$ (dite norme hilbertienne) est définie par:

$$\text{Pour tout } x \text{ appartenant à } E, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Définition 1.2.5 Un espace de Hilbert est un espace pré-hilbertien complet.

Théorème 1.2.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit E un espace préhilbertien alors:

$$\forall x, y \in E, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Théorème 1.2.2 (Identité du parallélogramme)

Soit E un espace préhilbertien alors:

$$\forall x, y \in E, \|x\|^2 + \|y\|^2 = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2).$$

Théorème 1.2.3 :

Pour qu'un espace normé E soit un espace préhilbertien il faut et il suffit que sa norme vérifie l'identité du parallélogramme.

Définition 1.2.6 Un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme est induite par un produit scalaire.

Quelques espaces de Hilbert classiques:

i) **L'espace euclidien** $E_n = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \text{ où } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ et } y = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

- ii) **L'espace des séries réelles (resp. complexes) de carré sommable**, noté $l^2(\mathbb{R})$ (resp. $l^2(\mathbb{C})$), et muni de produit scalaire: $\langle u, v \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n v_n$ (resp. $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \bar{v}_n$) où $u = (u_n)_n$ et $v = (v_n)_n$.
- iii) **L'espace des fonctions de carré intégrable** noté $L^2(\mathbb{R})$ (resp. $L^2(\mathbb{C})$) muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot g(t) dt$ (resp. $\int_{\mathbb{R}} f(t) \bar{g}(t) dt$).

1.3 Les opérateurs

Définition 1.3.1 Soient E, F deux espaces vectoriels sur un corps \mathbb{K} . On appelle opérateur toute application A définie de E dans F par:

$$\begin{aligned} A : D(A) \subset E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto A(x) = y \end{aligned}$$

L'ensemble $D(A)$ est de tous les $x \in E$ pour les quels l'opérateur A est définie, s'appelle domaine de définition de l'opérateur A .

Définition 1.3.2 On dit que l'opérateur A est linéaire si on a pour tous $x_1, x_2 \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$;

$$A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda A x_1 + \mu A x_2.$$

Définition 1.3.3 On désigne par $R(A)$ l'image de l'opérateur A ;

$$R(A) = \text{Im} A = \{y \in F, \exists x \in D(A) : y = Ax\}.$$

On appelle noyau de A , le sous-espace de E , noté $\ker A$ définie par:

$$\ker A = \{x \in D(A) : A(x) = 0_F\}.$$

Remarques

1. Si $E = F$ il s'agit d'un opérateur linéaire A dans l'espace E .
2. Dans le cas particulier si $F = \mathbb{K}$ on retrouve les fonctionnelles linéaires.

Définition 1.3.4 L'opérateur A est dit inversible si $\forall y \in R(A)$, $A(x) = y$ admet une et une seule solution, ou encore A est bijectif. On note l'inverse d'un opérateur A par A^{-1} .

Théorème 1.3.1 L'opérateur $A^{-1} : F \rightarrow E$ inverse d'un opérateur linéaire $A : E \rightarrow F$ est aussi linéaire.

Preuve

Soient $y_1, y_2 \in R(A)$. il suffit de vérifier qu'on a l'égalité

$$A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha A^{-1}y_1 + \beta A^{-1}y_2.$$

Soit $Ax_1 = y_1$ et $Ax_2 = y_2$. En vertu de la linéarité de A , on a

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2. \quad (*)$$

D'après la définition de l'opérateur inverse, on peut écrire:

$$A^{-1}y_1 = x_1, \quad A^{-1}y_2 = x_2.$$

En multipliant ces deux égalités respectivement par α et β et en les additionnant membre à membre, on obtient

$$\alpha A^{-1}y_1 + \beta A^{-1}y_2 = \alpha x_1 + \beta x_2$$

D'autre part, de l'égalité (*) et de la définition de l'opérateur inverse il résulte que

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2)$$

En comparant cette égalité avec la précédente, on obtient:

$$A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha A^{-1}y_1 + \beta A^{-1}y_2.$$

□

Proposition 1.3.1 *Un opérateur linéaire A admet un inverse si $Ax = 0$ n'admet que la solution nul ($x = 0$).*

Exemple

1. Soit E un espace vectoriel et soit Id un opérateur linéaire tel que

$$Idx = x \text{ pour tous } x \in E.$$

Cet opérateur est appelé *opérateur identique*.

2. Soient E, F deux espaces vectoriels et soit A un opérateur linéaire défini par:

$$Ax = 0_F \text{ pour tous } x \in E.$$

Alors A s'appelle *opérateur nul*.

Définition 1.3.5 (Opérateur continu)

On dit que l'opérateur A est continu s'il continu en tout point $x \in D(A)$

Définition 1.3.6 (Opérateur borné)

Un opérateur linéaire A de E dans F est dit borné s'il est définie partout dans E et transforme tout ensemble borné de E en ensemble borné de F .

Définition 1.3.7 Un opérateur linéaire A de E dans F est dit borné s'il existe une constante $c \geq 0$ tel que $\|Ax\|_F \leq c\|x\|_E$ pour tout $x \in E$.

$$A \text{ est borné} \Rightarrow \exists c \geq 0, \forall x \in E : \|Ax\|_F \leq c\|x\|_E.$$

Le plus petit des nombres c vérifiant cette inégalité s'appelle norme de l'opérateur A et se note $\|A\|$.

$$\|A\| = \inf \{c \geq 0, \forall x \in E : \|Ax\|_F \leq c\|x\|_E\}.$$

Pour tout opérateur borné on a :

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Ax\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E}.$$

On note par $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaire bornés, si $E = F$ alors $\mathcal{L}(E,F)$ est noté par $\mathcal{L}(E)$.

Théorème 1.3.2 Soient E et F des espaces normés. soit A un opérateur linéaire de E dans F alors :

$$A \text{ est continu sur } E \Leftrightarrow A \text{ est borné.}$$

Théorème 1.3.3 de Banach-Steinhaus (ou de la borne uniforme) :
Soit E un espace de Banach et F un espace normé, soit $\{A_i\}_{i \in I}$ une famille d'opérateurs linéaires et continus de E dans F . On suppose que

$$\sup \|A_i x\|_F < +\infty, \text{ pour chaque } x \in E.$$

Alors

$$\sup_{i \in I} \|A_i\| < +\infty.$$

Corollaire 1.3.1 Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs linéaires et continus de E dans F tels que pour chaque $x \in E$, $A_n x$ converge quand n tend vers $+\infty$ vers une limite notée Ax , alors

i)

$$\sup_n \|A_n\| < +\infty.$$

ii)

$$A \in \mathcal{L}(E, F).$$

iii)

$$\|A\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|A_n\|.$$

Preuve:

d'après le théorème de Banach-Steinhaus il résulte (i), donc il existe une constante c telle que

$$\|A_n x\| \leq c \|x\| \quad \forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}.$$

A la limite on obtient

$$\|Ax\| \leq c \|x\| \quad \forall x \in E.$$

et puisque A est linéaire d'où (ii). D'autre part on a

$$\|A_n x\| \leq \|A_n\| \|x\| \quad \forall x \in E.$$

D'où en déduit (iii).

□

Définition 1.3.8 Soient E, F deux espaces normés, et soit A une application linéaire de E dans F , on dit que A est ouverte s'il existe $\delta > 0$ tel que $B_F(0, \delta) \subset A(B_E(0, 1))$.

Théorème 1.3.4 (de l'application ouverte)

Soient E et F deux espaces de Banach. Si A est un opérateur linéaire continu et surjectif, alors A est une application ouverte.

Corollaire 1.3.2 Soient E et F deux espaces de Banach, et soit A un opérateur linéaire continu et bijectif de E sur F . Alors A^{-1} est continu de F dans E .

Preuve

D'après le théorème de l'application ouverte il existe $c > 0$ tel que

$$A(B_E(0, 1)) \supset B_F(0, c).$$

D'où, pour tout $x \in E$ tel que $\|Ax\| < c$, alors $\|x\| < 1$;
donc

$$\|x\| \geq 1 \implies \|Ax\| \geq c.$$

Soit $x \in E$ et $x \neq 0$, on a $\frac{x}{\|x\|} \in E$ et $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$;

Alors $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| \geq c$. Par suite

$$\|x\| \leq \frac{1}{c} \|Ax\|.$$

Donc A^{-1} est continu.

□

Définition 1.3.9 Soient E, F deux espaces de Banach, Le graphe $\mathcal{G}(A)$ de l'opérateur A est le sous-ensemble de $E \times F$ défini par:

$$\mathcal{G}(A) = \{(x, y) \in E \times F, y = Ax\}.$$

La linéarité de A implique que $\mathcal{G}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $E \times F$.

Définition 1.3.10 Soient E, F deux espaces de Banach, soit A un opérateur linéaire de E dans F . On dit que A est fermé si son graphe est un sous-espace fermé de $E \times F$.

Corollaire 1.3.3 Si A^{-1} existe on a:

$$A \text{ est fermé} \Leftrightarrow A^{-1} \text{ est fermé (car: } \mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(A^{-1}) \text{)}.$$

Théorème 1.3.5 (théorème du graphe fermé) Supposons que:

1. E et F deux espaces de Banach;
2. $A : E \rightarrow F$ est linéaire;
3. $\mathcal{G}(A)$ est fermé dans $E \times F$;

Alors $A \in \mathcal{L}(E, F)$.

Théorème 1.3.6 (Hahn-Banach)

Soient E un espace vectoriel normé, F un sous-espace vectoriel de E et $f : F \rightarrow \mathbb{C}$ une application linéaire continue, alors il existe une application linéaire continue

$$\tilde{f} : E \rightarrow \mathbb{C};$$

telle que

$$\|\tilde{f}\| = \|f\|, \tilde{f}|_F = f.$$

Applications du théorème de Hahn-Banach

Corollaire 1.3.4 Soient E un espace vectoriel normé et x_0 un élément non nul de E , alors il existe une application $\tilde{f} : E \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\|\tilde{f}\| = 1 \text{ et } \tilde{f}(x_0) = \|x_0\|.$$

Corollaire 1.3.5 Soient E un espace vectoriel normé et E' le dual topologique de E , si pour tout f de E' , on a $f(x) = 0$, alors $x = 0$.

Définition 1.3.11 Soient A et B deux opérateurs linéaires de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F . On appelle somme $A+B$ de ces opérateurs l'opérateur S qui à un élément $x \in E$ fait correspondre l'élément

$$y = Ax + Bx \in F.$$

L'opérateur $S = A + B$ est un opérateur linéaire continu si A et B sont continus.

Remarque

Si E et F sont des espaces normés et les opérateurs A et B sont bornés, l'opérateur $S = A + B$ est aussi borné et

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

En effet, Pour tout x on a:

$$\|(A + B)x\|_F = \|Ax + Bx\|_F \leq \|Ax\|_F + \|Bx\|_F \leq (\|A\| + \|B\|)\|x\|_E.$$

Définition 1.3.12 Soient A et B deux opérateurs linéaires, A de E dans F et B de F dans G . On appelle produit AB de ces opérateurs l'opérateur linéaire P qui à un élément $x \in E$ fait correspondre l'élément:

$$Px = (AB)x = A(Bx).$$

On dit que l'opérateur P est continu si A et B sont continus.

Remarque

Si A et B sont des opérateurs bornés dans des espaces normés, alors l'opérateur $P = AB$ est aussi borné et

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

En effet, Pour tout x on a:

$$\|A(Bx)\|_G \leq \|A\|_E \cdot \|Bx\|_G \leq \|A\|_E \cdot \|B\|_F \cdot \|x\|_E.$$

Définition 1.3.13 On appelle produit kA d'un opérateur A par un scalaire k l'opérateur qu'à un élément x l'élément kAx .

Remarque

L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ de tous les opérateurs linéaires bornés constitue un espace vectoriel.

Si E et F sont des espaces normés, alors $\mathcal{L}(E,F)$ est aussi un espace normé.

1.3.1 opérateur adjoint, auto-adjoint

Définition 1.3.14 Soient E et F deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors il existe un et un seul opérateur linéaire borné $A^* \in \mathcal{L}(F,E)$ vérifiant pour tout $x \in E, y \in F$:

$$\langle Ax, y \rangle_F = \langle x, A^*y \rangle_E.$$

L'opérateur A^* est appelé adjoint de A .

Propriétés fondamentales de A^* :

Soit H un espace de Hilbert, pour tout A, B de $\mathcal{L}(E)$ on a les propriétés suivantes:

1. A^* est linéaire.
2. $(A + B)^* = A^* + B^*$.
3. $(\lambda A)^* = \bar{\lambda}A^*$.
4. $(A \circ B)^* = A^* \circ B^*$.
5. $I^* = I$.
6. $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.
7. $(A^*)^* = A$.
8. $\|A^*\| = \|A\|$.

Définition 1.3.15 Si A est un opérateur d'un espace de Hilbert H , alors:

1. A est dit normal si:

$$AA^* = A^*A.$$

2. A est dit auto-adjoint ou hermitien si:

$$A^* = A.$$

3. A est dit positif si:

$$\langle Ax, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in H.$$

4. A est unitaire si

$$AA^* = A^*A = I.$$

1.3.2 Spectre d'un opérateur

Proposition 1.3.2 Soit E un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(E)$ avec $\|A\| < 1$. Alors $(I - A)$ est inversible et on a la formule suivante (dite série de Neumann):

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

Définition 1.3.16 Soit E un espace normé, et $A \in \mathcal{L}(E)$. Un nombre complexe λ est dit valeur propre de A s'il existe $x \in E$ non nul, tel que $Ax = \lambda x$, autrement dit si $A - \lambda Id$ n'est pas injectif.

Cette solution est un vecteur propre associé à la valeur propre λ . L'ensemble des vecteurs propres constitue un sous-espace propre.

On dit que λ est une valeur spectral de A si $A - \lambda Id$ n'est pas inversible (ou, de façon équivalente, pas bijectif).

L'ensemble des valeurs spectrales de A est noté $\sigma(A)$ et est appelé le spectre de A . L'ensemble des valeurs propres est noté $\sigma_p(A)$ et est appelé le spectre ponctuel de A . Les autres valeurs sont dites valeurs réguliers de A .

Remarque

$\sigma_p(A) \subseteq \sigma(A)$, et il y a égalité si E est de dimension finie. En dimension infinie, ce n'est plus vrai car A peut être injectif sans être surjectif.

Exemples

1. L'opérateur $Id \in \mathcal{L}(E)$ admet une seule valeur propre $\lambda = 1$.

2. Soit $E = l^2(\mathbb{R})$ et A un opérateur défini par:

$$A(x) = (0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \text{ avec } x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

Alors $\sigma(A) = \{0\}$ et $\sigma_p(A) = \emptyset$.

1.3.3 Opérateur compact

Définition 1.3.17 Soient E, F deux espaces de Banach et $A : E \rightarrow F$ un opérateur. On dit que A est compact ou complètement continu, si l'image de chaque borné Q de E est précompact (relativement compact) dans F c.à.d $A(Q)$ compact dans F .

Remarques

1. Dans un espace de dimension finie tout opérateur linéaire est compact.
2. Dans un espace de dimension infinie la compacité d'un opérateur est une condition beaucoup plus forte que la condition d'être simplement continu. par exemple dans un espace de Hilbert l'opérateur identique I est continu mais n'est pas compact, car il transforme la boule unité en elle-même, i.e. en un ensemble qui n'est pas précompact.

Opérations sur les opérateurs compacts

- i. La somme $A_1 + A_2$ de deux opérateurs compacts A_1 et A_2 et un opérateur compact.

En effet,

soient $Q \in E$ un ensemble borné et $\{x_n\}$ une suite de points de Q . L'opérateur A_1 étant compact, on peut extraire de la suite de $\{x_n\}$ une sous-suite $\{x'_n\}$ de façon que $\{A_1 x'_n\}$ soit une suite de Cauchy, puis on peut extraire une sous-suite encore $\{x''_n\}$ de façon que $\{A_2 x''_n\}$ soit une suite de Cauchy, alors $\{(A_1 + A_2)x''_n\}$ est une suite de Cauchy.

- ii. Le produit d'un opérateur compact par n'importe quel opérateur borné B est un opérateur compact.

En effet,

soit $Q \in E$ un ensemble borné; alors BQ est borné également, donc ABQ est précompact; ainsi, l'opérateur AB est compact.

D'autre part, l'opérateur B transforme toute suite de Cauchy en une suite

de Cauchy et, par conséquent, l'ensemble précompact AQ en un ensemble précompact; l'opérateur BA est donc compact lui aussi.

iii. En particulier, si l'opérateur compact A est inversible l'espace E est de dimension finie.

En effet,

l'opérateur $I = AA^{-1}$ est compact d'après *ii* et l'on peut appliquer la remarque (b).

Proposition 1.3.3 *Si E, F sont des espaces de Banach, l'ensemble des opérateurs compacts $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un sous-espace vectoriel fermé.*

Définition 1.3.18 *Un opérateur linéaire A est dit de rang fini si $\text{Im}A$ est de dimension finie: $\dim A(E) < \infty$.*

Théorème 1.3.7 *Tout opérateur de rang fini de $\mathcal{L}(E, F)$ est compact.*

Preuve

Soit B un borné de E , A est continu car $A \in \mathcal{L}(E, F)$, alors AB est borné, l'image $A(E)$ est un sous-espace vectoriel de F de dimension finie, et $\overline{A(E)}$ est borné et fermé du sous-espace vectoriel $A(E)$ de dimension finie, donc il est compact.

□

Proposition 1.3.4 *L'adjoint de tout opérateur compact est compact.*

Proposition 1.3.5 *Soit A un opérateur d'un espace de Hilbert H . Alors*

1. *A est auto-adjoint ssi $\langle Ax, x \rangle$ est réel pour tout $x \in H$.*
2. *AA^* est un opérateur positif.*
3. *Les valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint A dans H sont réelles.*
4. *Les vecteurs propres d'un opérateur auto-adjoint A dans H associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.*
5. *Si A est unitaire et $\lambda \in \sigma(A)$, alors $|\lambda| = 1$.*

1.3.4 Convergences dans $\mathcal{L}(E, F)$

soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés et $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des opérateurs linéaires continus de E dans F .

Définition 1.3.19 Soient la suite $(A_n)_n \subset \mathcal{L}(E, F)$ et $A \in \mathcal{L}(E, F)$

a) La suite $(A_n)_n$ converge en norme, ou uniformément vers A si:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Et nous écrivons $A_n \xrightarrow{\|\cdot\|} A$.

b) La suite $(A_n)_n$ converge simplement vers A si:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n x = Ax, \quad \forall x \in E.$$

Et nous écrivons $A_n \xrightarrow{S} A$.

c) La suite $(A_n)_n$ converge faiblement vers A si:

$$f(A_n x) \longrightarrow f(Ax), \quad \text{pour tout } f \in F' \text{ et pour tout } x \in E.$$

Et nous écrivons $A_n \xrightarrow{W} A$.

Proposition 1.3.6 On a

$$1. A_n \xrightarrow{\|\cdot\|} A \implies A_n \xrightarrow{S} A.$$

$$2. A_n \xrightarrow{S} A \implies A_n \xrightarrow{W} A.$$

Proposition 1.3.7 On a

$$(A_n \xrightarrow{\|\cdot\|} A) \Leftrightarrow (A_n x \longrightarrow Ax) \text{ uniformément sur l'ensemble } \{x : \|x\|_E \leq 1\} \subset E.$$

Chapitre 2

Algèbres de Banach

2.1 Quelques définitions et résultats utiles

Définition 2.1.1 Soit E un espace vectoriel, muni d'une loi de multiplication

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow E \\ (x,y) &\longmapsto xy. \end{aligned}$$

On dit que E est une algèbre si les conditions suivantes sont vérifiées:

- i) $x(yz) = (xy)z, \quad \forall x,y,z \in E;$
- ii) $(x+y)z = xz + yz, \quad \forall x,y,z \in E;$
- iii) $x(y+z) = xy + xz, \quad \forall x,y,z \in E;$
- iv) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y), \quad \forall x,y \in E, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}.$

- En général, la multiplication peut ne pas être commutative. Si $xy = yx, \quad \forall x,y \in E$ alors l'algèbre E est commutative.
- On dira que l'algèbre E est unitaire s'il existe un élément $e \in E$ s'appelle unité de l'algèbre E tel que

$$xe = ex = x, \quad \forall x \in E.$$

De plus, un élément $x \in E$ est dit inversible s'il admet un inverse dans E , c'est-à-dire s'il existe un élément $x^{-1} \in E$ satisfaisant à:

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e.$$

Notons que si $x \in E$ admet un inverse, il est unique.

En effet, si $yx = e = xz$, alors

$$y = ye = y(xz) = (yx)z = ez = z.$$

Définition 2.1.2 On appelle algèbre normée E tout espace vectoriel normé satisfaisant les axiomes:

1. E est unitaire.
2. $\|e\| = 1$.
3. $\forall x, y \in E \quad \|xy\| \leq \|x\|\|y\|$.

Remarque

Si E admet un élément unité e , alors e est unique.
En effet, Soit e, e' deux éléments unités, alors

$$e' = ee' = e'e = e.$$

Remarque

L'inégalité $\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \quad \forall x, y \in E$ montre que l'application

$$\begin{aligned} H : E \times E &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned}$$

est continue pour les deux variables x, y puisque si $x_n \longrightarrow x$ et $y_n \longrightarrow y$ alors $x_n y_n \longrightarrow xy$ car

$$x_n y_n - xy = (x_n - x)(y_n - y).$$

En particulier si $x_n \longrightarrow x$ et $y_n \longrightarrow y$ alors $x_n y \longrightarrow xy$ et $x y_n \longrightarrow xy$.

Définition 2.1.3 Soit E une algèbre sur le corps \mathbb{K} . un sous espace vectoriel $G \subseteq E$ est appelé sous algèbre de E si

$$\forall x, y \in G \implies xy \in G.$$

2.1.1 Fonctions holomorphes

Définition 2.1.4 Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} , et une fonction complexe $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est holomorphe au point $z_0 \in \Omega$, si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{existe dans } \mathbb{C}.$$

si cette limite existe, elle sera notée $f'(z_0)$.

f est dite holomorphe dans Ω si elle est holomorphe en chaque point de Ω .

Théorème 2.1.1 (Cauchy)

Soient E un espace vectoriel normé, D un domaine dans \mathbb{C} et une application $f : D \rightarrow E$. Si f est holomorphe dans D alors, pour toute courbe fermée γ dans D on a

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0_E.$$

Théorème 2.1.2 (Formule intégrale de Cauchy)

Soient f une fonction holomorphe dans un domaine D de \mathbb{C} et γ une courbe fermée dans D , alors pour tout point μ à l'intérieur de γ on a

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz.$$

Plus généralement:

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Théorème 2.1.3 (Liouville)

Soient E un espace vectoriel normé et $f : \mathbb{C} \rightarrow E$ une application, si

1. f est holomorphe dans \mathbb{C} .
2. f est borné dans \mathbb{C} , c-à-d il existe $K \in \mathbb{R}$:

$$\|f(z)\| \leq K < +\infty, \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}$$

alors, f est constante dans \mathbb{C} .

Remarque

Si $\|e\| \neq 1$, on obtient $\|e'\| = 1$ en posant la norme initiale

$$\|x\|' = \sup_{y \neq 0} \frac{\|xy\|}{\|y\|}.$$

2.1.2 Adjonction d'une unité

on peut ramener le cas non unitaire au cas unitaire par une opération standard dite adjonction d'une unité.

Définition 2.1.5 Soit E une algèbre, on munit l'ensemble $E^{\sharp} = E \times \mathbb{C}$ des opérations suivants: $x, y \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

1. $(x, \lambda) + (y, \mu) = (x + y, \lambda + \mu)$.
2. $\alpha(x, \lambda) = (\alpha x, \alpha \lambda)$.
3. $(x, \lambda)(y, \mu) = (xy + \lambda y + \mu x, \lambda \mu)$.

E^{\sharp} est une algèbre admettant un élément unité $e = (0, 1)$.

2.1.3 Unité approchée bornée

Définition 2.1.6 Soit E une algèbre de Banach commutative. On dit que E possède une unité approchée bornée s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $a_1, a_2, \dots, a_k \in E$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$ avec

$$\|x\| \leq M : \|xa_i - a_i\| < \varepsilon, \quad \text{pour tout } i.$$

Remarque

Il suffit pour avoir une unité approchée bornée que la condition ci-dessus soit vérifiée pour $k = 1$.

Exemples

1. L'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} est le plus simple exemple d'algèbre de Banach, muni des opérations habituelles la somme et la multiplication, pour tout les éléments de \mathbb{C} , excepté zéro, est définie la division, c-à-d l'opération inverse de la multiplication, et muni de la norme

$$\|z\| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (z = x + iy).$$

2. Soit K un espace compact non vide; l'espace de Banach $C(K)$ des fonctions continues sur K à valeurs complexes muni du produit usuel:

$$(fg)(z) = f(z)g(z) \quad z \in K,$$

et de la norme:

$$\|f\| = \sup_{z \in K} |f(z)|.$$

Est une algèbre de Banach commutative unitaire, l'élément unité est la fonction constante 1.

3. Soit $\mathcal{L}(E)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés sur l'espace de Banach E dans lui-même, muni des opérations linéaires habituelles, ainsi que le produit de deux opérateurs (la composition) défini par:

$$\begin{array}{ccccc} \text{BA: } E & \xrightarrow{A} & E & \xrightarrow{B} & E \\ x & \longmapsto & Ax & \longmapsto & B(Ax). \end{array}$$

qui est non commutatif, et de la norme:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_E = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_E}{\|x\|_E}.$$

Qui vérifié, d'après la définition de la norme

$$\|BA\| \leq \|B\|\|A\|,$$

c-à-d que la composition de deux opérateurs de $\mathcal{L}(E)$ est continue.

L'élément unité de $\mathcal{L}(E)$ est l'opérateur identique Id_E .

Si $E \neq \{0\}$, $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre de Banach unitaire.

4. Soit T un espace topologique de Hausdorff compact non vide. Désignons par C_T l'espace des fonctions complexes continues $f(t)$ définies sur T , muni des opérations habituelles la somme de deux fonctions et le produit d'une fonction par un nombre, ainsi que de la norme,

$$\|f\| = \max_{t \in T} |f(t)|.$$

L'espace C_T est une algèbre de Banach commutative ayant pour unité la fonction constante 1.

5. Soit $L^1(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions intégrables sur \mathbb{R}

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

muni de la norme:

$$\|f\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$$

et du produit de convolution

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt.$$

Vérifions que le produit est continu c-à-d

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

on a

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |(f * g)(x)| dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt \right| dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)||g(x-t)| dt \right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)||g(x-t)| dx \right] dt \quad (\text{d'après Fubini}) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x-t)| dx \right] dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)| dy \right] dt \quad (\text{en posant } y = x - t \text{ pour } t \text{ fixé}) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)| dy \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt.
\end{aligned}$$

alors

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

L'espace $L^1(\mathbb{R})$ est une algèbre de Banach commutative non unitaire, et par adjonction d'une unité, on munit l'ensemble

$$L^{1\sharp} = L^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{C} = \{(f, \alpha) / f \in L^1(\mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

de la norme

$$\|(f, \alpha)\| = \|f\|_1 + |\alpha|.$$

l'algèbre obtenue $L^{1\sharp}$ est une algèbre de Banach commutative et unitaire.

2.2 Morphismes des algèbres

Définition 2.2.1 Soient E, F deux algèbres sur le même corps \mathbb{K} . une application $f : E \rightarrow F$ s'appelle morphisme (homomorphisme) de E dans F , si elle vérifie les conditions suivantes:

- 1) $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.
- 2) $f(xy) = f(x)f(y)$.

- Si de plus f est bijective, on dit alors que E et F sont isomorphes.
- Dans le cas où E et F sont des algèbres normées, alors on dit que E et F sont isométriques, s'il existe une application bijective $f : E \rightarrow F$ vérifiant la condition 1) et telle que

$$\|f(x)\|_F = \|x\|_E.$$

Proposition 2.2.1 :

Si f est un homomorphisme complexe sur une algèbre complexe E , ayant un élément unité e , alors $f(e) = 1$ et $f(x) \neq 0$ pour tout x inversible dans E .

Preuve

Puisque f est non identiquement nulle, il existe $y \in E$ tel que

$$f(y) \neq 0.$$

Comme $f(y) = f(ye) = f(y)f(e)$ donc $f(e) = 1$.

Si x est inversible, alors

$$f(x)f(x^{-1}) = f(xx^{-1}) = f(e) = 1.$$

Par conséquent, $f(y) \neq 0$.

□

Théorème 2.2.1 :

Soit E une algèbre de Banach, et $x \in E$ tel que $\|x\| < 1$. Alors

- i) $e - x$ est inversible et $(e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.
- ii) $\|(e - x)^{-1} - e - x\| \leq \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}$.
- iii) $|f(x)| < 1$ pour tout homomorphisme complexe f sur E .

Preuve

puisque $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ et $\|x\| < 1$, les éléments

$$S_n = e + x + x^2 + \dots + x^n \quad (1)$$

forment une suite de Cauchy dans E .

Puisque E est complète, il existe $S \in E$ tel que $S_n \rightarrow S$.

Puisque $x^n \rightarrow 0$ et

$$S_n(e - x) = e - x^{n+1} = (e - x)S_n.$$

D'après (1) on a

$$\|S - e - x\| = \|x^2 + x^3 + \dots\| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \|x\|^n = \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}.$$

Finalement, supposons que $\lambda \in \mathbb{C}$ et $|\lambda| \geq 1$. D'après (i) l'élément $e - \lambda^{-1}x$ est inversible et d'après la proposition précédente on a

$$1 - \lambda^{-1}f(x) = f(e - \lambda^{-1}x) \neq 0.$$

Donc $f(x) \neq \lambda$. Ainsi pour tout homomorphisme complexe f sur E

$$|f(x)| < 1.$$

□

Définition 2.2.2 On appelle caractère d'une algèbre normée E un homomorphisme d'algèbre non nul de E dans \mathbb{C} . On notera \widehat{E} l'ensemble des caractères χ de E , et

$$\widehat{E}^\# = \widehat{E} \cup \chi_0$$

où

$$E = \ker \chi_0.$$

2.3 Propriétés fondamentales du spectre

2.3.1 Ensemble de tous les éléments inversibles $O(E)$

Définition 2.3.1 Soit E une algèbre de Banach, et soit $O(E)$ l'ensemble de tous les éléments inversibles de E . Si $x, y \in O(E)$ alors $y^{-1}x$ est l'inverse de $x^{-1}y \in E$.

Remarque

Soit E une algèbre de Banach. Alors

1. La boule unité $\mathring{B}(e, 1) = \{x \in E : \|e - x\| < 1\}$ est incluse dans $O(E)$.
2. L'application $x^{-1} \rightarrow x$ est continue pour $x = e$.

Théorème 2.3.1 Soit E une algèbre de Banach et soit $x \in O(E), \Delta x \in E$. Si

$$\|\Delta x\| < \|x^{-1}\|^{-1}.$$

Alors

$$x + \Delta x \in O(E).$$

preuve

Puisque $x + \Delta x = x(e + x^{-1}\Delta x)$ et $\|x^{-1}\Delta x\| \leq 1$

la remarque précédente implique que $(e + x^{-1}\Delta x)$ est inversible, et puisque $x \in O(E)$, alors

$$x + \Delta x \in O(E).$$

(produit de deux éléments inversible).

□

Théorème 2.3.2 *Si E est une algèbre de Banach et x un élément de E . Alors*

1. $O(E)$ est un sous ensemble ouvert de E .
2. L'application $x \rightarrow x^{-1}$ est continue sur $O(E)$.

preuve

1. D'après le théorème précédent l'ensemble $O(E)$ est ouvert.
2. Soit $a \in O(E)$ et $\|x\| < \|a^{-1}\|^{-1}$. Alors la série $\sum_{i=0}^{\infty} (xa^{-1})^i$ est convergente dans E et

$$\begin{aligned} (a - x)^{-1} &= a^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} (xa^{-1})^i \\ \|(a - x)^{-1} - a^{-1}\| &= \|a^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} (xa^{-1})^i\| \\ &\leq \|a^{-1}\| \sum_{i=1}^{\infty} \|x\|^i \|a^{-1}\|^i \\ &= \frac{\|x\| \|a^{-1}\|^2}{1 - \|x\| \|a^{-1}\|}. \end{aligned}$$

donc

$$(a - x)^{-1} \longrightarrow a^{-1} \text{ pour } \|x\| \longrightarrow 0.$$

□

Lemme 2.3.1 *Soit E une algèbre de Banach, $x_n \in O(E)$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$, x un élément non inversible (un point du bord de $O(E)$) et $x_n \rightarrow x$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Alors $(x_n^{-1})_n$ n'est pas bornée, c'est-à-dire:*

$$\|x_n^{-1}\| \rightarrow \infty \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

preuve

Si la conclusion était fausse,
Supposons que $\exists k < \infty$ tel que (x_n^{-1}) est bornée par k c-à-d $\|x_n^{-1}\| < k$

$$\begin{aligned} \|x_n^{-1} - x_m^{-1}\| &= \|x_n^{-1}(e - x_m^{-1}x_n)\| \\ &= \|x_n^{-1}(x_m - x_n)x_m^{-1}\| \\ &\leq \|x_n^{-1}\| \|x_n - x_m\| \|x_m^{-1}\| \\ &\leq k^2 \|x_n - x_m\| \leq k^2 \varepsilon \sim \varepsilon \end{aligned}$$

donc (x_n^{-1}) est de Cauchy alors (x_n^{-1}) est converge car E est une algèbre de Banach. Supposons que $(x_n^{-1}) \rightarrow y$ quand $n \rightarrow \infty$ et on va montrer que $yx = e$ c-à-d $y = x^{-1}$, on a:

$$\begin{aligned} xy &= \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^{-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n x_n^{-1} \\ &= e \end{aligned}$$

de même manière on trouve $yx = e$. Alors $xy = yx = e$ implique que x est inversible et sont inverse est y , contradiction. □

2.3.2 Diviseurs de zéro et diviseurs de zéro généralisés

Définition 2.3.2 Un élément x d'une algèbre de Banach commutative E est dit diviseur de zéro si

$$xa = 0, \text{ pour un élément non nul } a \in E.$$

Définition 2.3.3 Soit E une algèbre de Banach, on dit que un élément $x \in E$ est un diviseur généralisé de Zéro s'il existe une suite (y_n) de E avec $\|y_n\| \geq c > 0$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n x \rightarrow 0.$$

Théorème 2.3.3 Soit x un élément d'une algèbre de Banach commutative E . Alors si x est inversible alors x n'est pas diviseur généralisé de zéro.

preuve

Soit x un élément inversible. Supposons que x est un diviseur généralisé de zéro, c'est-à-dire

$$\exists (y_n) \in E \text{ telle que } y_n x \rightarrow 0,$$

donc

$$y_n x x^{-1} \longrightarrow 0 x^{-1} = 0.$$

Alors

$$y_n \longrightarrow 0$$

mais $\|y_n\| \geq c > 0$ contradiction, donc x n'est pas diviseur généralisé de zéro. \square

Remarque

Chaque point du bord de l'ensemble de tous les éléments inversibles $O(E)$ est un diviseur généralisé de zéro.

En effet,

Soit x un point frontière de $O(E)$, alors $\exists (x_n)$ de $O(E)$, telle que $x_n \longrightarrow x$

Posons (y_n) une suite de E telle que $y_n = \frac{x_n^{-1}}{\|x_n^{-1}\|}$ où $\|y_n\| = 1$ Donc

$$y_n x = \frac{x_n^{-1} x}{\|x_n^{-1}\|} = \frac{x_n^{-1} (x - x_n + x_n)}{\|x_n^{-1}\|}$$

Alors

$$\begin{aligned} \|y_n x\| &\leq \frac{\|x_n^{-1} (x - x_n)\|}{\|x_n^{-1}\|} + \frac{\|x_n^{-1} x_n\|}{\|x_n^{-1}\|} \\ &\leq \|x - x_n\| + \frac{1}{\|x_n^{-1}\|} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

2.3.3 Spectre et ensemble résolvant

Dans ce paragraphe l'algèbre E n'est pas nécessairement commutative, mais possède un élément unité.

Définition 2.3.4 Soit x un élément d'une algèbre de Banach. On appelle spectre de x l'ensemble suivant:

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda e - x)^{-1} \text{ n'existe pas}\}.$$

Théorème 2.3.4 Soit E une algèbre de Banach et soit x un élément de E ,

$$\lambda \in \sigma(x) \implies |\lambda| \leq \|x\|.$$

Ainsi, $\sigma(x)$ est inclus dans le disque fermé de centre 0 et de rayon $\|x\|$.

$$\sigma(x) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq \|x\|\}.$$

Preuve

On a

$$(\lambda e - x)^{-1} = [\lambda(e - \frac{x}{\lambda})]^{-1} = \frac{1}{\lambda}(e - \frac{x}{\lambda})^{-1}$$

le théorème (2.2.1) il résulte que $(e - \frac{x}{\lambda})^{-1}$ n'existe pas implique

$$\|\frac{x}{\lambda}\| \geq 1$$

donc

$$|\lambda| \leq \|x\|.$$

□

Remarque

Si $\lambda \in \sigma(x)$ alors $\lambda^n \in \sigma(x^n)$.

Preuve

Soit $\lambda \in \sigma(x)$ alors $(\lambda e - x)$ n'est pas inversible. On a $(\lambda^n e - x^n) = (\lambda e - x)y$ tel que

$$y = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \lambda^{n-k-1}.$$

Supposons que $(\lambda^n e - x^n)$ est inversible et d'inverse z donc

$$(\lambda e - x)yz = z(\lambda e - x)y = e.$$

D'autre part, on a

$$(\lambda e - x)yz = yz(\lambda e - x) = e.$$

Alors $(\lambda e - x)$ est inversible et d'inverse yz

contradiction avec l'hypothèse donc $(\lambda^n e - x^n)$ n'est pas inversible.

□

Définition 2.3.5 :

1. On appelle ensemble résolvant de x le complémentaire de $\sigma(x)$ dans \mathbb{C} , et noté par $\rho(x)$,

$$\rho(x) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda e - x) \in O(E)\}.$$

c'est-à-dire $\rho(x) = \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$.

2. La fonction $R_x : \rho(x) \rightarrow E$ définie par:

$$R_x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}.$$

est appelée la résolvante de x .

Proposition 2.3.1 :

Soit E une algèbre unitaire et x un élément de E , la résolvante de x a les propriétés suivantes, $\forall \lambda, \mu \in \rho(x)$:

i) $R_x(\lambda)R_x(\mu) = R_x(\mu)R_x(\lambda)$.

ii) $R_x(\lambda) - R_x(\mu) = (\mu - \lambda)R_x(\lambda)R_x(\mu)$ (égalité de Hilbert).

iii) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $|\lambda| > \|x\|$, alors $\lambda \in \rho(x)$ et on a:

$$R_x(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}.$$

preuve

i) on a

$$\begin{aligned} R_x(\lambda)R_x(\mu) &= (\lambda e - x)^{-1}(\mu e - x)^{-1} = [(\mu e - x)(\lambda e - x)]^{-1} \\ &= [(\lambda e - x)(\mu e - x)]^{-1} = (\mu e - x)^{-1}(\lambda e - x)^{-1} \\ &= R_x(\mu)R_x(\lambda). \end{aligned}$$

ii) En vertu de (i) et de la définition de $R_x(\lambda), R_x(\mu)$, on a

$$R_x(\lambda) = (\mu e - x)R_x(\lambda)R_x(\mu).$$

$$R_x(\mu) = (\lambda e - x)R_x(\mu)R_x(\lambda).$$

donc

$$R_x(\lambda) - R_x(\mu) = (\mu - \lambda)R_x(\lambda)R_x(\mu).$$

iii) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > \|x\|$, donc $\|\frac{x}{\lambda}\| < 1$, d'où

$$(e - \frac{x}{\lambda}) \in O(E).$$

D'après le théorème (2.2.1) on a:

$$(e - \frac{x}{\lambda})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x}{\lambda})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^n}.$$

Par conséquent

$$R_x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \left(e - \frac{x}{\lambda} \right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}.$$

□

Théorème 2.3.5 *Soit E une algèbre de Banach complexe. L'application résolvante R_x est une fonction holomorphe.*

Preuve

la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \setminus \sigma(x) &\longrightarrow O(E) \\ \lambda &\longmapsto (\lambda e - x) \end{aligned}$$

est continue car

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |\lambda - \lambda_0| < \delta \Rightarrow \|(\lambda e - x) - (\lambda_0 e - x)\| = \|(\lambda - \lambda_0)e\| = |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$$

il suffit de prendre $\delta = \varepsilon$, alors la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \setminus \sigma(x) &\longrightarrow O(E) \longrightarrow O(E) \\ \lambda &\longmapsto (\lambda e - x) \longmapsto (\lambda e - x)^{-1} \end{aligned}$$

est continue, donc

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{R_x(\lambda + h) - R_x(\lambda)}{h} &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{h \cdot R_x(\lambda + h) R_x(\lambda)}{h} \\ &= R_x \left(\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} (\lambda + h) \right) \cdot R_x(\lambda) \\ &= R_x^2(\lambda). \end{aligned}$$

alors, la fonction R_x est holomorphe, et $R'_x(\lambda) = R_x^2(\lambda)$.

□

Théorème 2.3.6 *Soit E une algèbre de Banach, et soit $x \in E$, alors le spectre de x , $\sigma(x)$ n'est pas vide et compact.*

Preuve

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, si $\lambda > \|x\|$ alors

$$(e - \lambda^{-1}x) \in O(E).$$

D'après le théorème (2.2.1). Il en est de même pour $\lambda e - x$. d'où l'on déduit que le spectre $\sigma(x)$ est borné.

Pour démontrer que $\sigma(x)$ est fermé. Montrons que le complémentaire du spectre de x , est ouvert. Soit λ un élément régulier.

Montrons qu'il existe une boule ouverte $\mathring{B}(\lambda, \delta)$ telle que:

$$\forall \mu \in \mathring{B}(\lambda, \delta); \quad \mu \text{ est régulier.}$$

$$\begin{aligned} (\mu e - x) &= (\mu e - x - \lambda e + \lambda e) \\ &= [(\lambda e - x) + (\mu - \lambda)e] \text{ est inversible si} \end{aligned}$$

$$|\mu - \lambda| < \frac{1}{\|(\lambda e - x)^{-1}\|}.$$

il suffit de prendre $\delta = \frac{1}{\|(\lambda e - x)^{-1}\|}$,

donc le spectre de x , $\sigma(x)$ est fermé.

Finalement, Montrons que $\sigma(x)$ n'est pas vide.

Supposons que $\sigma(x) = \emptyset$, alors la fonction

$$\begin{aligned} R_x : \mathbb{C} &\longrightarrow O(E) \\ \lambda &\longmapsto (\lambda e - x)^{-1} \end{aligned}$$

est holomorphe dans \mathbb{C} tout entier.

On va montrer que $R_x(\lambda)$ est bornée, on a

$$\begin{aligned} R_x(\lambda) &= (\lambda e - x)^{-1} \\ &= \frac{1}{\lambda} \left(e - \frac{x}{\lambda} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{\lambda} \right)^n. \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\|R_x(\lambda)\| &= \frac{1}{|\lambda|} \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n \right\| \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{+\infty} \left\| \frac{x}{\lambda} \right\|^n \\ &= \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \left\| \frac{x}{\lambda} \right\|} \text{ car } \lambda \notin \sigma(x) \text{ alors } \left\| \frac{x}{\lambda} \right\| < 1.\end{aligned}$$

puisque la norme est continue on a

$$0 \leq \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \|R_x(\lambda)\| = \left\| \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} R_x(\lambda) \right\| \leq \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \left\| \frac{x}{\lambda} \right\|} = 0.$$

alors

$$\left\| \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} R_x(\lambda) \right\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} R_x(\lambda) = 0.$$

donc la fonction résolvante R_x est bornée dans le plan \mathbb{C} , d'après le théorème de Liouville

$$\begin{aligned}R_x(\lambda) \text{ est constante} &\Rightarrow 0 = R'_x(\lambda) = R_x^2(\lambda) \\ &\Rightarrow R_x(\lambda) = 0 \\ &\Rightarrow (\lambda e - x)^{-1} = 0.\end{aligned}$$

contradiction, donc le spectre de x , $\sigma(x)$ n'est pas vide.

□

2.3.4 Rayon spectral et les éléments nilpotents et quasi nilpotents

Définition 2.3.6 Soit E une algèbre de Banach, et soit x un élément de E . On appelle rayon spectral de x le nombre $r(x)$ défini par:

$$r(x) = \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda|.$$

Le sup est atteint (et fini) car le $\sigma(x)$ est compact.

Lemme 2.3.2 :

Soit $(S_n)_n$ une suite de \mathbb{R} telle que:

$$S_{n+m} \leq S_n \cdot S_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Alors la suite $\{(S_n)^{1/n}\}_n$ est convergente, et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^{1/n} = \inf_n S_n^{1/n}.$$

Preuve

posons $\inf S_n^{1/n} = t$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad S_{n_0}^{1/n_0} < t + \varepsilon$$

$$\forall n \geq n_0 \text{ on a } n = kn_0 + r, \quad 0 \leq r \leq n_0 - 1$$

Alors

$$S_n = S_{kn_0+r} \leq S_r \cdot S_{kn_0} \leq \max\{S_0, S_1, \dots, S_{n_0-1}\} \cdot S_{kn_0}.$$

on a

$$S_{kn_0} \leq \underbrace{S_{n_0} \times S_{n_0} \times \dots \times S_{n_0}}_{k \text{ fois}} \leq (S_{n_0})^k.$$

et

$$S_{n_0}^{1/n_0} < t + \varepsilon.$$

donc

$$S_{n_0} < (t + \varepsilon)^{n_0}.$$

Alors

$$S_n \leq \max\{S_0, S_1, \dots, S_{n_0-1}\} (t + \varepsilon)^{kn_0}.$$

$$S_n^{1/n} \leq [\max\{S_0, S_1, \dots, S_{n_0-1}\}]^{1/n} (t + \varepsilon)^{\frac{kn_0}{n}}.$$

Si $n \rightarrow +\infty$ alors $\frac{kn_0}{n} \rightarrow 1$ car $\frac{kn_0}{n} = 1 - \frac{r}{n}$.

Donc

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} (S_n^{1/n}) \leq t + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Si $\varepsilon = \frac{1}{n}$ alors

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} (S_n^{1/n}) \leq t.$$

donc

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} (S_n^{1/n}) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} (S_n^{1/n}).$$

mais on a

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} (S_n^{1/n}) \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} (S_n^{1/n}).$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n^{1/n}) = \inf_n (S_n^{1/n}).$$

□

Théorème 2.3.7 Soit E une algèbre de Banach, et $x \in E$, alors:

$$r(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_n \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Preuve

Puisque

$$\|x^{n+m}\| \leq \|x^n\| \|x^m\| \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

d'après le Lemme précédant, la suite $(\|x^n\|^{\frac{1}{n}})_n$ est convergente et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_n \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ donc

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \frac{1}{|\lambda|} < 1 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n \right\|^{\frac{1}{n}} < 1 \\ &\Rightarrow \sum_n \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n \text{ est convergente et } \sum_n \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n = \left(e - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} \\ &\Rightarrow \lambda \notin \sigma(x). \end{aligned}$$

alors

$$|\lambda| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

donc

$$r(x) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}. \quad (2.3.1)$$

D'autre part pour $\lambda \neq 0$ on a $(x - \frac{x}{\lambda})^{-1}$ existe pour $|\frac{1}{\lambda}| > r(x)$ donc $|\lambda| < \frac{1}{r(x)}$ et on a

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\lambda}(x - e)\right]^{-1} &= -\lambda(e - \lambda x)^{-1} \\ &= -\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda x)^n. \end{aligned}$$

donc

$$\limsup_n \left\| (\lambda x)^n \right\|^{\frac{1}{n}} < 1 \quad (\text{critère de Cauchy car } \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda x)^n \text{ est convergent}).$$

alors

$$|\lambda| < \frac{1}{\lim_n \sup_n \|x^n\|^{\frac{1}{n}}}.$$

donc

$$\frac{1}{r(x)} \leq \frac{1}{\lim_n \sup_n \|x^n\|^{\frac{1}{n}}}.$$

alors

$$r(x) \geq \lim_n \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \quad (2.3.2)$$

d'après les équations (2.3.1) et (2.3.2) on a alors

$$r(x) = \lim_n \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

□

Exemples

1. Si l'algèbre de Banach E est l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} , alors tous les éléments, sauf l'élément nul, sont inversibles.
2. Si $E = C_T$, pour l'inversibilité de $x \in C_T$, il faut et il suffit que la fonction $x(t) \neq 0$ partout. Le spectre $\sigma(x)$ coïncide avec l'ensemble des valeurs de $x(t)$, la résolvante est

$$R_x(\lambda) = \frac{1}{\lambda - x(t)}.$$

et le rayon spectral est

$$r(x) = \|x\| = \max_t |x(t)|.$$

3. Si $E = \mathcal{L}(X, X)$ est l'algèbre des opérateurs bornés, les éléments inversibles sont les opérateurs inversibles, le spectre et la résolvante dans ce cas coïncide avec le spectre et la résolvante d'un opérateur.

Théorème 2.3.8 (*Guelfand-Mazur*)

Soit E une algèbre de Banach dans laquelle tout élément non nul de E est inversible, alors E est isométriquement isomorphe au corps des complexes \mathbb{C} .

Preuve

Soit l'application:

$$\begin{aligned} \omega : E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \lambda \quad \text{où} \quad \lambda e = x. \end{aligned}$$

On a $\sigma(x) \neq \emptyset$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $(\lambda e - x)^{-1}$ n'existe pas, alors

$$\lambda e - x = 0 \implies \lambda e = x.$$

Donc l'application ω est bien définie et bijective puisque il existe un unique λ qui vérifie $\lambda e - x = 0$.

Alors ω est un isomorphisme de E sur \mathbb{C} , qui est aussi une isométrie car

$$|\omega(x)| = |\lambda| = \|x\|, \quad \forall x \in E.$$

□

Théorème 2.3.9 Soit E une algèbre de Banach, s'il existe une constante $M < \infty$ tel que

$$\|x\|\|y\| \leq M\|xy\| \quad \forall x, y \in E.$$

Alors E est isométriquement isomorphe à \mathbb{C} .

Preuve

Soit y un élément de la frontière de $O(E)$. alors $\exists \{y_n\} \in O(E)$ telle que $y_n \rightarrow y$. D'après le lemme(2.3.1),

$$\|y_n^{-1}\| \rightarrow \infty.$$

Par Hypothèse,

$$\|y - y_n\|\|y_n^{-1}\| \leq M\|y_n y_n^{-1}\| \leq M\|e\|.$$

Donc $\|y_n\| \rightarrow 0$ et, par suite, $y = 0$.

Soit l'application:

$$\begin{aligned} \omega : E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \lambda \quad \text{où} \quad \lambda e = x. \end{aligned}$$

On a si $x \in E$, chaque élément de la frontière du $\sigma(x)$ correspond à un élément frontière $\lambda e - x$ de $O(E)$. Ainsi $x = \lambda e$ Alors ω est un isomorphisme de E sur \mathbb{C} , qui est aussi une isométrie car

$$|\omega(x)| = |\lambda| = \|x\|, \quad \forall x \in E.$$

□

Définition 2.3.7 (élément quasi-nilpotent)

Soit E une algèbre unitaire. Un élément x de E est dit quasi-nilpotent si $(r(x) = 0$ c'est-à-dire $\sigma(x) = \{0\}$).

Définition 2.3.8 (élément nilpotent)

Soit E une algèbre unitaire. Un élément x de E est dit nilpotent si $x^n = 0$ pour certain $n \in \mathbb{N}$.

On note par $\mathfrak{J}(E)$ l'ensemble des éléments quasi-nilpotent de E .

Proposition 2.3.2 *Soit E une algèbre unitaire et $x \in E$. On a*

$$\text{si } x \text{ est nilpotent alors } x \in \mathfrak{J}(E).$$

Preuve

D'après le théorème (2.3.7) on a

$$r(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Mais $x^m = 0$, donc

$$r(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|x^m x^k\|^{\frac{1}{m+k}} = 0.$$

□

2.4 Idéaux

Définition 2.4.1 *Soit E une algèbre de Banach, un sous espace vectoriel $J \subset E$ est dit un idéal de E si*

$$xy \in J, \quad \forall x \in E \quad \forall y \in J.$$

- Dans toute algèbre E , il existe deux idéaux triviaux: l'un composé d'un seul élément nul est appelé idéal nul, $J = \{0\}$ et l'autre qui est identique à toute l'algèbre E , $J = E$. Tous les autres idéaux sont appelés idéaux propres.
- Un idéal maximal est un idéal propre qui n'est contenu dans aucun autre idéal propre.

Théorème 2.4.1 *Soit E une algèbre de Banach commutative. Alors*

- i) *Si J est un idéal propre de E , alors son adhérence \bar{J} est aussi un idéal propre.*
- ii) *Tout idéal propre de E est contenu dans un idéal maximal de E .*
- iii) *Tout idéal maximal de E est fermé.*

Lemme 2.4.1 *(lemme de Zorn)*

Soit M un ensemble ordonné, si toute chaîne de M admet un majorant, alors tout élément de M précède un élément maximal.

Preuve de théorème 2.4.1

i) Soit J un idéal propre de E , alors $J \cap O(E) = \emptyset$. D'après le théorème (2.2.1) on a

$$d(e_E, J) \geq 1.$$

Puisque les éléments de la boule ouverte $B(e_E, 1)$ sont inversible, donc

$$e_E \notin J \text{ car } \overline{J} = \{x, d(x, J) = 0\}.$$

Alors \overline{J} est un idéal propre.

ii) Soit Γ la famille de tous les idéaux propres de E contenant J . Γ est un ensemble ordonné par la relation d'inclusion des ensembles. Soit H un sous ensemble totalement ordonné de Γ tel que

$$H = \{J_\alpha\}_{\alpha \in J}.$$

Et soit

$$M = \bigcup_{\alpha \in J} J_\alpha.$$

M est un sous espace vectoriel puisque H est totalement ordonné, M est un idéal maximal de E . Ainsi Γ est inductif.

D'après le lemme de Zorn, Γ admet un élément maximal J_m .

iii) supposons que

$$\overline{M} = E.$$

d'après le théorème(2.3.3) on a

$$M \cap O(E) \neq \emptyset.$$

Mais ceci est contraire à

$$M \neq E.$$

Ainsi, $M = \overline{M}$ puisque M est maximal.

□

Corollaire 2.4.1 *Si l'algèbre E n'est pas un corps, elle contient un idéal maximal. De plus, tout élément non inversible, autre que l'élément nul, appartient à un idéal maximal.*

Chapitre 3

Semi-groupe d'opérateurs

3.1 Semi-groupe dans une algèbre de Banach

Définition 3.1.1 Soit A une algèbre de Banach, un semi-groupe de A est une famille $(T(t))_{t>0}$ d'éléments de A vérifiant pour tout couple s, t de réels strictement positifs la condition

$$T(t + s) = T(t)T(s).$$

On notera A_T la sous algèbre fermée de A engendré par le semi-groupe $(T(t))_{t>0}$. On dira qu'un semi-groupe $(T(t))_{t>0}$ est continu en norme si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|T(t + h) - T(t)\| = 0 \text{ pour tout } t > 0.$$

et on dira que $(T(t))_{t>0}$ admet une limite en norme à l'origine s'il existe $J \in A$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - J\| = 0.$$

Notons que si le semi-groupe $(T(t))_{t>0}$ admet une limite en norme J à l'origine alors J est un idempotent de A , et l'algèbre de Banach A_T est unitaire d'unité J .

Posons $W = \{z \in \mathbb{C} \operatorname{Re} z > 0\}$, on la définition d'un semi-groupe analytique suivante.

Définition 3.1.2 Soient A une algèbre de Banach et $(T(t))_{t \in W}$, une famille des éléments de A est dite semi-groupe analytique si l'application

$$\begin{aligned} W &\longrightarrow A \\ t &\longmapsto T(t) \end{aligned}$$

est analytique et vérifie $T(t + s) = T(t)T(s) \quad t, s \in W$.

3.1.1 A-Module de Banach

Définition 3.1.3 Soit A une algèbre de Banach, E un espace de Banach et

$$\begin{aligned} A \times E &\longrightarrow E \\ (a, x) &\longmapsto ax \end{aligned}$$

une application. On dit que E est A -module de Banach, s'il existe une constante k ($k > 0$) telle que

$$\|ax\| \leq k\|a\|\|x\| \text{ pour tout } a \in A, \text{ et tout } x \in E.$$

Remarques

1. Soit E un A -module de Banach si A est non unitaire et A^\sharp l'algèbre obtenir par l'adjonction d'une unité on pose:

$$(a + \lambda e)x = ax + \lambda x \quad (a \in A, x \in E, \lambda \in \mathbb{C}).$$

On a

$$\|(a + \lambda e)x\| = \|ax + \lambda x\| \leq k(\|a\| + |\lambda|)\|x\|.$$

donc E est un A^\sharp -module.

2. Soit E un A -module de Banach. On peut toujours renormer E pour obtenir $k = 1$ on pose

$$\| \|x\| \| = \sup_{\substack{b \in A^\sharp \\ \|b\| \leq 1}} \|bx\|.$$

alors

$$\| \|x\| \| \leq \| \|x\| \| \leq k \| \|x\| \|.$$

Par suite $\| \| \cdot \| \|$ est équivalente à la norme $\| \cdot \|$, et

$$\| \|bx\| \| \leq \| \|b\| \| \|x\| \| \quad \forall x \in A, \forall b \in E.$$

On supposera donc dans la suite que E est un A -module de Banach et que

$$\|ax\| \leq \|a\|\|x\| \text{ pour } a \in A, x \in E.$$

On pose

$$F = A.E = \{y = ax, a \in A, x \in E\}.$$

et $G = A_F$ l'algèbre engendré par F .

Lemme 3.1.1 *Soit A une algèbre de Banach commutative, et soit $(e_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée de borne M . Pour $k \in \mathbb{N}$ et $a \in A$ tel que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} ae_n = a$$

on a:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|a^k + (e_n - e)^k - (a + e_n - e)^k\| = 0.$$

Preuve

$$\begin{aligned} (a + e_n - e)^k &= \sum_{p=0}^k C_p^k a^p (e_n - e)^{k-p} \\ &= \sum_{p=1}^{k-1} C_p^k a^p (e_n - e)^{k-p} + (e_n - e)^k + a^k \\ (a + e_n - e)^k - (e_n - e)^k - a^k &= \sum_{p=1}^{k-1} C_p^k a^p (e_n - e)^{k-p} \\ &= a(e_n - e) \sum_{p=1}^{k-1} C_p^k a^{p-1} (e_n - e)^{k-p-1}. \\ \|(a + e_n - e)^k - (e_n - e)^k - a^k\| &\leq \|a(e_n - e)\| \sum_{p=1}^{k-1} C_p^k \|a\|^{p-1} \|e_n - e\|^{k-p-1} \\ &\leq \|a(e_n - e)\| \sum_{p=1}^{k-1} C_p^k \|a\|^{p-1} (M + 1)^{k-p-1}. \end{aligned}$$

Comme $\|ae_n - a\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ et comme

$$\sum_{p=1}^{k-1} C_p^k \|a\|^{p-1} (M + 1)^{k-p-1} < +\infty.$$

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|a^k + (e_n - e)^k - (a + e_n - e)^k\| = 0.$$

□

Lemme 3.1.2 *Soit $(e_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée de A de borne M . Soit K un compact de \mathbb{C} , soit $x \in E$ et soit $u \in A^\sharp$ on pose*

$$v = u - \chi_0(u)e$$

1. Si $xe_n \rightarrow x$ quand $n \rightarrow +\infty$, on a $\exp(t(e_n - e)) \rightarrow x$ quand $n \rightarrow +\infty$ uniformément sur K .
2. Si $ve_n \rightarrow v$ quand $n \rightarrow +\infty$, alors

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{t \in K} \left\{ \begin{array}{l} \|\exp(tu) \exp t(e_n - e) - \exp(tu)\| \\ - \exp[Re(t\chi_0(u))][\exp |t|(M+1) - 1] \end{array} \right\} \right) \leq 0.$$

Preuve

1. On a

$$\begin{aligned} \|\exp t(e_n - e)x - x\| &= \left\| \sum_{k=1}^{+\infty} t^k \frac{(e_n - e)^k}{k!} x \right\| \\ &= \|(e_n - e)x \sum_{k=1}^{+\infty} t^k \frac{(e_n - e)^{k-1}}{k!}\| \\ &\leq \|e_n x - x\| \left\| \sum_{k=1}^{+\infty} |t|^k \frac{(M+1)^{k-1}}{k!} \right\|. \end{aligned}$$

Comme la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |t|^k \frac{(M+1)^{k-1}}{k!}$$

est convergente, on a $\|\exp t(e_n - e)x - x\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ uniformément sur K .

- 2.

$$\begin{aligned} \|\exp(tu) \exp t(e_n - e) - \exp(tu)\| &= \|\exp t(v + \chi_0(u)e) \exp t(e_n - e) - \exp t(v + \chi_0(u)e)\| \\ &= \|\exp(t\chi_0(u)e)[\exp t(v + e_n - e) - \exp(tv)]\| \\ &= \|\exp(t\chi_0(u)e) \sum_{k=1}^{+\infty} t^k \frac{(v + e_n - e)^k - v^k}{k!}\| \\ &\leq \exp[Re(t\chi_0(u))] \sum_{k=1}^{+\infty} |t|^k \left\| \frac{(v + e_n - e)^k - v^k}{k!} \right\| \end{aligned}$$

D'autre part on a $v \in A$. Donc d'après le lemme précédent on a

$$\sum_{k=1}^m L^k \frac{\|(v + e_n - e)^k - v^k - (e_n - e)^k\|}{k!} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow 0.$$

Pour tout $m \geq 1$ ou $L = \sup_{t \in K} |t|$.

De plus

$$\left\| \sum_{k=1}^m t^k \frac{(e_n - e)^k}{k!} x \right\| \leq \sum_{k=1}^m |t|^k \frac{(M+1)^k}{k!} \leq \exp(|t|(M+1)) - 1.$$

On a alors pour tout $m \geq 1$ et pour tout $t \in K$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{+\infty} t^k \frac{(v + e_n - e)^k - v^k}{k!} \right\| &\leq \sum_{k=1}^m \frac{|t|^k}{k!} \|(v + e_n - e)^k - v^k - (e_n - e)^k\| + \exp |t|(M+1) - 1 \\ &\quad + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{|t|^k \|v\|^k}{k!} + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{|t|^k (1 + M + \|v\|)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Par suit

$$\| \exp tu \exp t(e_n - e) - \exp tu \| - \exp[Re(t\chi_0(u))] [\exp |t|(M+1) - 1]$$

$$\begin{aligned} &\leq \exp[Re(t\chi_0(u))] \left\{ \begin{aligned} &\sum_{k=1}^m \frac{|t|^k}{k!} \|(v + e_n - e)^k - v^k - (e_n - e)^k\| \\ &+ \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{|t|^k \|v\|^k}{k!} + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{|t|^k (1 + M + \|v\|)^k}{k!} \end{aligned} \right\} \\ &\leq \exp(\alpha) \left\{ \begin{aligned} &\sum_{k=1}^m \frac{|L|^k}{k!} \|(v + e_n - e)^k - v^k - (e_n - e)^k\| \\ &+ \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{L^k}{k!} \|v\|^k + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{L^k}{k!} (1 + M + \|v\|)^k \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

ou $\alpha = \sup_{t \in K} [Re(t\chi_0(u))]$. Donc

$$\begin{aligned} &\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{t \in K} \left\{ \begin{aligned} &\| \exp(tu) \exp t(e_n - e) - \exp(tu) \| \\ &- \exp[Re(t\chi_0(u))] [\exp |t|(M+1) - 1] \end{aligned} \right\} \right) \\ &\leq \exp(\alpha) \left\{ \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{L^k}{k!} \|v\|^k + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{L^k}{k!} (1 + M + \|v\|)^k \right\}. \end{aligned}$$

Comme cette inégalité est vérifiée pour tout $m \geq 1$, on a bien

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{t \in K} \left\{ \begin{aligned} &\| \exp(tu) \exp t(e_n - e) - \exp(tu) \| \\ &- \exp[Re(t\chi_0(u))] [\exp |t|(M+1)] - 1 \end{aligned} \right\} \right) \leq 0.$$

□

Lemme 3.1.3 Soit A une algèbre de Banach commutative à unité approchée bornée de borne M , et soit $G = A_F$.

Alors pour tout couple $(a, y) \in A \times G$, il existe une suite $(e_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de A telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|e_n y - y\| + \|e_n a - a\| = 0 \quad \text{avec} \quad \sup_{n \geq 1} \|e_n\| \leq M.$$

Preuve

Soit $G = A_F$ implique que pour tout $n \geq 1, \exists b_1, b_2, \dots, b_p \in A, y_1, y_2, \dots, y_p \in E$ tels que

$$\|y - \sum_{i=1}^p b_i y_i\| < \frac{1}{n(1+M)},$$

$\exists e_n \in A : \|e_n\| \leq M, \|e_n a - a\| \leq \frac{1}{n}$ et tel que

$$\|e_n b_i - b_i\| \leq \frac{2^{-i}}{n(1+\|y_i\|)} \quad 1 \leq i \leq p.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \|e_n y - y\| &\leq M \|y - \sum_{i=1}^p b_i y_i\| + \|e_n \left(\sum_{i=1}^p b_i y_i \right) - \sum_{i=1}^p b_i y_i\| + \left\| \sum_{i=1}^p b_i y_i - y \right\| \\ &\leq \frac{M}{n(1+M)} + \sum_{i=1}^p \frac{2^{-i}}{n} + \frac{1}{n(1+M)} \\ &\leq \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|e_n a - a\| = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|e_n y - y\| = 0 \text{ quand } .$$

□

3.1.2 Théorème de Sinclair**Théorème 3.1.1** (*Théorème de Sinclair*)

Soit A une algèbre de Banach commutative à unité approchée bornée $(e_n)_{n \geq 0}$ de borne M . Pour tout $x \in G$, il existe un semi-groupe analytique $(b^t)_{\text{Ret} > 0}$ dans A tel que

- i) $\{\|b^t\|\}$ est borné pour $|t| \leq 1$ et $\text{Ret} > 0$.
- ii) $x \in b^t G$ pour tout $t \in \mathbb{C}$ avec $\text{Ret} > 0$.
- iii) $b^t x \rightarrow x$ quand $t \rightarrow 0$ tel que $\text{Ret} > 0$.

Preuve

Par récurrence on va définir une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de A telle que si on pose

$$\begin{aligned} b_n &= \exp(-ne + f_1 + f_2 + \dots + f_n) \\ b_n^t &= \exp(-tne + tf_1 + tf_2 + \dots + tf_n) \text{ pour } t \in \mathbb{C} \\ b_0^t &= b_0 = e \text{ pour } t \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

On ait

$$\|f_n\| \leq M, \|(b_n^t - b_{n-1}^t)x\| \leq 2^{-n} \text{ pour } |t| \leq 1. \quad (1)$$

$$\|(b_n^t - b_{n-1}^t)\| \leq 2^{-n} + \exp[-(n-1)Ret][\exp(|t|(M+1))]. \quad (2)$$

Pour $|t| \leq n$ et ceci pour tout $n \geq 1$.

Pour $n = 1$ on veut que

$$\|\exp t(f_1 - e)x - x\| \leq \frac{1}{2} \text{ pour } |t| \leq 1.$$

et

$$\|e - \exp t(f_1 - e)\| \leq \frac{1}{2} + \exp |t|(M+1) - 1 \text{ pour } |t| \leq 1.$$

Ceci résulte des deux lemmes précédents avec $u = 0$, $K = \overline{D(0,1)}$, $f_1 = e_n$ avec n assez grand.

Supposons qu'on a construit f_1, f_2, \dots, f_{n-1} .

On pose $u = f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} - (n-1)e$, $K = \overline{D(0,1)}$. Alors

$$\exp(tu) = b_{n-1}^t$$

On cherche f_n avec

$$\|f_n\| \leq M, \|\exp(tu)x - \exp t(u + f_n - e)x\| < 2^{-n}.$$

et

$$\|\exp(tu) - \exp(tu + t(f_n - e))\| < 2^{-n} + [\exp |t|(M+1) - 1] \exp[-(n-1)Ret].$$

pour tout $t \in K$

L'existence de f_n résulte des deux lemmes précédents. Donc on peut construire la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ par récurrence.

Soit K un compact de $\Upsilon = \{t \in \mathbb{C}, Ret > 0\}$.

$$\exists L > 0, \delta > 0 : Ret > \delta, \forall t \in K, \text{ et } |t| \leq L, \forall t \in K$$

Pour $n \geq L$ on obtient

$$\|b_n^t - b_{n-1}^t\| \leq 2^{-n} + \exp[-(n-1)\delta] \exp L(M+1) - 1.$$

donc la suite $(b_n^t)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur tout compact K de Υ vers une limite b^t . On a donc:

$$\begin{aligned} b^{t+s} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n^{t+s} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp[(t+s)(-ne + f_1 + f_2 + \dots + f_n)] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp t(f_1 + f_2 + \dots + f_n - ne) \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp s(f_1 + f_2 + \dots + f_n - ne) \\ &= b^t b^s \text{ pour } t, s \in \Upsilon. \end{aligned}$$

Donc $(b^t)_{Ret > 0}$ est un semi-groupe.

L'application $t \rightarrow b_n^t$ est continue sur Υ pour tout n , donc

l'application $t \rightarrow b^t$ est aussi continue car b^t est limite uniforme sur tout compact K de Υ d'applications continues.

Soit l une forme linéaire continue sur A^\sharp .

Donc on a

$$\|l(b_n^t) - l(b_{n-1}^t)\| \leq \|l\| \|b_n^t - b_{n-1}^t\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty \text{ pour tout } t \in K.$$

donc la suite $(l(b_n^t))$ converge uniformément sur tout compact K de Υ vers une limite $l(b^t)$. Comme l'application $t \rightarrow l(b^t)$ est analytique sur Υ pour tout l alors $(b^t)_{Ret > 0}$ est analytique.

Pour $|t| < 1$, $Ret > 0$ on a:

$$\begin{aligned} \|b^t - e\| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n \|b_p^t - b_{p-1}^t\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n [\exp(-(p-1)Ret)(\exp(|t|(M+1)) - 1)] + 1 \\ &= [\exp |t|(M+1) - 1] \sum_{p=1}^n \exp[-(p-1)Ret] + 1 \\ &= [\exp |t|(M+1) - 1] \sum_{p=1}^n [\exp(-Ret)]^p \exp(Ret) + 1 \\ &= [\exp |t|(M+1) - 1] \frac{1}{1 - \exp(-Ret)} + 1. \end{aligned}$$

D'où

$$\sup_t \|b^t\| \leq \sup_t \|b^t - e\| + 1 \leq +\infty.$$

Le semi-groupe $(b^t)_{Ret>0}$ est dans A car

$$\chi_0(b_n^t) = \exp(-nt).$$

et

$$|\chi_0(b_n^t)| = \exp(-nRet) \longrightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Donc $\chi_0(b^t) = 0 \forall t \in \Upsilon, b^t \in A$ pour $t \in \Upsilon$

La suite (xb_n^t) converge uniformément sur tout compact de \mathbb{C} vers une fonction $\psi(t)$ continue de \mathbb{C} dans G d'après (1). Pour $t \in \Upsilon$, on a

$$xb_n^{-t}b_n^t = x, \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} xb_n^{-t}b_n^t = \psi(-t)b^t = x.$$

D'où

$$x \in b^tG, \forall t \in \Upsilon.$$

Comme ψ est continue, on a quand $t \rightarrow 0$ et $t \in \Upsilon$

$$\psi(t) \longrightarrow \psi(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} xb_n^0 = x.$$

Alors

$$xb^t \longrightarrow x \text{ pour } t \rightarrow 0 \text{ et } t \in \Upsilon.$$

□

(voir[6]).

Remarque

1. Si l'unité approchée bornée est bornée par 1, on peut supposer que

$$\|b^t\| \leq 1 \text{ pour tout } t > 0.$$

- 2.

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t > 0}} \|yb^t - y\| = 0 \text{ pour tout } y \in [xG]^-.$$

Preuve

1. Si $M = 1$, on a

$$\begin{aligned} \|b_n^t\| &= \|\exp[t(e_1 + e_2 + \dots + e_n - ne)]\| \\ &= \exp[-nRet] \|\exp[t(e_1 + e_2 + \dots + e_n)]\| \\ &\leq \exp[-nRet] \exp(nt) = 1 \text{ pour tout } t > 0. \end{aligned}$$

D'où

$$\|b^t\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|b_n^t\| \leq 1 \text{ pour tout } t > 0.$$

2. Posons $\lambda = \sup_{0 < t \leq 1} \|b^t\|$, et soit $z \in G$; on a

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ t > 0}} \|yb^t - y\| &\leq \limsup_{t \rightarrow 0^+} \{ \|yb^t - xzb^t\| + \|xzb^t - xz\| + \|xz - y\| \} \\ &\leq (1 + \lambda) \|y - xz\|. \end{aligned}$$

Comme $y \in [xG]^-$, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|yb^t - y\| = 0.$$

□

Corollaire 3.1.1 (*Théorème de factorisation de Cohen*)

L'ensemble

$$F = AE = \{y = ax, a \in A, x \in E\}$$

est un sous espace vectoriel fermé de E .

Preuve

C'est une conséquence immédiate de résultat du théorème de Sinclair (ii) pour $F = G$.

□

3.1.3 continuité des semi-groupes dans une algèbre de Banach commutative séparable.

Théorème 3.1.2 *Soit A une algèbre de Banach commutative séparable et soit $(a^t)_{t>0}$ un semi-groupe dans A . Alors il existe deux suites (r_n) et (s_n) de terme positive telle que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 0.$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|a^{t+r_n} - a^t\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|a^{t-s_n} - a^t\| = 0 \text{ pour tout } t > 0.$$

Preuve

Soit t_0 fixé, $t_0 > 0$ et supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\inf_{0 < h \leq \alpha} \|a^{t_0} - a^{t_0+h}\| > 0.$$

On peut supposer que $\alpha < t_0$ et on pose

$$\delta(t) = \inf_{0 < h \leq \alpha} \|a^t - a^{t+h}\|.$$

et comme

$$\|a^{t_0} - a^{t_0+h}\| \leq \|a^{t_0-t}\| \|a^t - a^{t+h}\| \quad (t < t_0, h > 0).$$

On a

$$\delta(t_0) \leq \|a^{t_0-t}\| \delta(t) \text{ pour tout } t < t_0.$$

Si $m \in \mathbb{N}$ on pose

$$\Lambda_m = \{t \in [t_0 - \alpha, t_0[, \|a^{t_0-t}\| \leq m\}.$$

Alors

$$[t_0 - \alpha, t_0[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n.$$

ainsi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que Λ_n est non dénombrable. On a

$$\forall t \in \Lambda_n, \quad \delta(t) \geq \frac{\delta(t_0)}{\|a^{t_0-t}\|} \geq \frac{\delta(t_0)}{n}.$$

Posons

$$\zeta = \frac{\delta(t_0)}{2n}, \text{ et pour tout } t > 0, \quad B_t = \{x \in A, \|x - a^t\| < \zeta\}.$$

Si $t, t_0 \in \Lambda_n$ et $t < t'$ on a

$$0 < t - t' < \alpha \text{ et } \|t - t'\| \geq \delta(t) > 2\zeta$$

Ainsi $B_t \cap B_{t'} = \emptyset$ et la famille $(B_t)_{t \in \Lambda_n}$ est une famille non dénombrable disjointe de boules ouvertes. Ce qui contredit la séparabilité de A , par conséquent

$$\inf_{0 < h \leq \alpha} \|a^{t+h} - a^t\| = 0 \text{ pour tout } t > 0 \text{ et tout } \alpha > 0.$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on peut choisir $r_n \in]0, \frac{1}{n}[$ tel que

$$\|a^{\frac{1}{n}+r_n} - a^{\frac{1}{n}}\| < \frac{1}{n} \inf_{m < n} \left\{ \left(1 + \|a^{\frac{1}{m}} - a^{\frac{1}{n}}\| \right)^{-1} \right\}.$$

On obtient

$$\|a^{\frac{1}{m}+r_n} - a^{\frac{1}{m}}\| < \frac{1}{n} \text{ pour tout } m \in \mathbb{N}, \text{ et pour tout } n > m,$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|a^{\frac{1}{m} + r_n} - a^{\frac{1}{m}}\| = 0 \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Si $t > 0$ il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{m} < t$ et

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|a^{t+r_n} - a^t\| \leq \|a^{t-\frac{1}{m}}\| \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|a^{\frac{1}{m} + r_n} - a^{\frac{1}{m}}\| = 0.$$

De la même manière on peut construire une suite (s_n) tel que $s_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|a^{t-s_n} - a^t\| = 0, \quad \text{et pour tout } t > 0.$$

□

Corollaire 3.1.2 *Soit A une algèbre de Banach commutative séparable, il existe un idéal I , $I \neq \{0\}$, dans A possédant une unité approchée bornée si et seulement si A possédant un semi-groupe borné $(a^t)_{t>0}$.*

Preuve

\implies) Soit I un idéal dans A , $I \neq \{0\}$, possédant une unité approchée bornée, alors I est séparable et d'après le théorème de Sinclair, il existe un semi-groupe analytique $(a^t)_{t>0}$ dans I tel que

$$\sup_{t>0} \|a^t\| < +\infty \quad \text{et} \quad I = [a^t I]^- \quad \text{pour tout } t > 0.$$

\impliedby) Supposons maintenant que A possédant un semi-groupe borné $(a^t)_{t>0}$, on pose

$$M = \sup_{t>0} \|a^t\|, \quad I = [\bigcup_{t>0} a^t A]^-$$

Soit (t_n) une suite vérifiant le théorème précédent. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x a^{t_n} = x \quad \text{pour tout } x \in \bigcup_{t>0} a^t A.$$

Et puisque

$$\|a^{t_n}\| \leq M \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x a^{t_n} = x \quad \text{pour tout } x \in I.$$

Ainsi I possédant une unité approchée bornée.

□

3.2 Semi-groupe d'opérateurs bornés

3.2.1 Définitions

Soit E un espace de Banach sur le corps \mathbb{C} et soit $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés sur E .

Définition 3.2.1 On appelle *semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach E* la famille $(T(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(E)$ vérifiant les propriétés suivantes:

1. $T(0) = Id$ (Id l'élément unité d'algèbre $\mathcal{L}(E)$).
2. $T(s+t) = T(s)T(t)$, $\forall s, t \in \mathbb{R}_+$.
3. $\lim_{t \rightarrow 0} \|T(t) - Id\| = 0$.

La notion la plus importante associée à un semi-groupe est son générateur.

Définition 3.2.2 On appelle *générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu $(T(t))_{t \geq 0}$* l'opérateur linéaire A défini par:

$$A : E \longrightarrow E$$

$$A = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t) - Id}{t}.$$

Définition 3.2.3 On appelle *C_0 -semi-groupe (ou semi-groupe fortement continu) d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach E* la famille $(T(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(E)$ vérifiant les propriétés suivantes:

1. $T(0) = Id$ (Id l'élément unité d'algèbre $\mathcal{L}(E)$).
2. $T(s+t) = T(s)T(t)$, $\forall s, t \geq 0$.
3. $\lim_{t \rightarrow 0} \|T(t)x - x\| = 0$, $\forall x \in E$.

Définition 3.2.4 On appelle *générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$* l'opérateur linéaire A défini sur l'ensemble:

$$D(A) = \left\{ x \in E, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

par

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{dT(t)x}{dt} \right|_{t=0} \text{ pour tout } x \in D(A).$$

Remarque

Puisque:

$$\|T(t)x - x\| \leq \|T(t) - Id\| \|x\| \quad \text{pour tout } x \in E \text{ et tout } t \geq 0.$$

il en résulte que les semi-groupes uniformément continus sont C_0 -semi-groupes.

3.2.2 Semi-groupes uniformément continus

Dans la suite nous présenterons quelques problèmes concernons les semi-groupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach.

Le semi-groupe $(e^{At})_{t>0}$, $A \in \mathcal{L}(E)$.

Lemme 3.2.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$, alors $(e^{At})_{t>0}$ est un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur E dont le générateur infinitésimal est A .*

Preuve

Soit $A \in \mathcal{L}(E)$, et une application T définie par:

$$\begin{aligned} T : [0, +\infty[&\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ t &\longmapsto T(t) = e^{At} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!}. \end{aligned}$$

$T(t)$ est linéaire d'après la linéarité de A , et pour $t \geq 0$ fixe on a

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} = \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \|A\|^n = e^{t\|A\|} < +\infty.$$

puisque A est borné. De plus

$$T(0) = e^{0A} = I$$

et

$$\begin{aligned} T(t+s) &= e^{tA} e^{sA} \\ &= \sum_n \frac{(tA)^n}{n!} \sum_n \frac{(sA)^n}{n!} \\ &= T(t)T(s). \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\|T(t) - Id\| &= \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| \\
&= \|tA \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!}\| \\
&\leq t\|A\| \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| \\
&= t\|A\| e^{t\|A\|}.
\end{aligned}$$

par suite

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - Id\| \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} t\|A\| e^{t\|A\|}.$$

On trouve

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|T(t) - Id\| = 0.$$

Ainsi la famille $(T(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu.

Il reste à montrer que A est un générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{T(t) - Id}{t} - A \right\| &= \left\| \frac{1}{t} (e^{tA} - Id - tA) \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{t} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!} - Id - tA \right) \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{t} \left(Id + tA + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!} - Id - tA \right) \right\| \\
&\leq \frac{1}{t} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} \\
&= \frac{1}{t} \left(Id + t\|A\| + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} - Id - t\|A\| \right) \\
&= \frac{1}{t} (e^{t\|A\|} - 1 - t\|A\|) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{e^{t\|A\|} - 1}{t\|A\|} \|A\| - \|A\| \right) = 0.
\end{aligned}$$

nous obtenons:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t) - Id}{t} = A.$$

Le semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ admet donc pour générateur infinitésimal l'opérateur A .

□

(voir[7]).

Lemme 3.2.2 *Soit A un opérateur borné $A \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique semi-groupe uniformément continu $(T(t))_{t \geq 0}$ tel que*

$$T(t) = e^{At}, \forall t \geq 0.$$

Preuve

Soit $A \in \mathcal{L}(E)$, alors il existe un semi-groupe uniformément continu $(S(t))_{t \geq 0}$ engendré par A ,

Si $(T(t))_{t \geq 0}$ est un autre semi-groupe uniformément continu engendré par A , alors nous avons

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t) - Id}{t} = A.$$

et

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t) - Id}{t} = A.$$

Par conséquent

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{T(t) - S(t)}{t} \right\| = 0.$$

Comme $(T(t))_{t \geq 0}$ et $(S(t))_{t \geq 0}$ sont deux semi-groupes uniformément continus, nous voyons que les applications

$$t \longmapsto \|T(t)\|.$$

et

$$t \longmapsto \|S(t)\|.$$

sont continues.

Pour $\alpha \in]0, +\infty[$ nous considérons l'intervalle $I_\alpha =]0, \alpha[$.

Il existe $c \in [1, +\infty[$ tel que

$$\sup_{t \in I_\alpha} \{\|T(t)\|, \|S(t)\|\} \leq c.$$

Si $\zeta > 0, \exists t_0 \in I_\alpha, t_0 > 0$ tel que

$$\left\| \frac{T(t) - S(t)}{t} \right\| \leq \frac{\zeta}{\alpha c^2}, \forall t \in]0, t_0[. \quad (1)$$

Soit $t \in I_\alpha$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{t}{n} \in [0, t_0[$, on a

$$\begin{aligned}
T(t) - S(t) &= \left[T\left(\frac{t}{n}\right) \right] - \left[S\left(\frac{t}{n}\right) \right] \\
&= T\left(\frac{t}{n}\right) S\left(0\frac{t}{n}\right) - T\left((n-1)\frac{t}{n}\right) S\left(1\frac{t}{n}\right) \\
&+ T\left((n-1)\frac{t}{n}\right) S\left(1\frac{t}{n}\right) - T\left((n-2)\frac{t}{n}\right) S\left(2\frac{t}{n}\right) \\
&+ T\left((n-2)\frac{t}{n}\right) S\left(2\frac{t}{n}\right) - \dots - T\left(0\frac{t}{n}\right) S\left(n\frac{t}{n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left[T\left((n-k)\frac{t}{n}\right) S\left(k\frac{t}{n}\right) - T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) S\left((k+1)\frac{t}{n}\right) \right] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) \left[T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right) \right] S\left(k\frac{t}{n}\right).
\end{aligned}$$

Et d'après l'inégalité(1) nous obtenons

$$\left\| T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right) \right\| \leq \frac{\zeta}{\alpha c^2} \frac{t}{n}.$$

par suite

$$\|T(t) - S(t)\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} c \frac{\zeta}{\alpha c^2} c \frac{t}{n} < \zeta, \forall t \in I_\alpha.$$

il en résulte

$$T(t) = S(t), \forall t \in [0, +\infty[.$$

□

(voir[11]).

Présentons maintenant la condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu.

Théorème 3.2.1 *Un opérateur $A : E \longrightarrow E$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu si et seulement si $A \in \mathcal{L}(E)$.*

Pour démontrer le théorème en utilise le résultat du lemme suivante:

Lemme 3.2.3 *Soit E un espace de Banach, et soit $\varphi : [a, b] \longrightarrow E$ une fonction continue. Alors*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_a^{a+t} \varphi(s) ds = \varphi(a).$$

Preuve

\implies Soit $A : E \rightarrow E$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu $(T(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(E)$, alors

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|T(t) - Id\| = 0.$$

L'application

$$\begin{aligned} T : [0, +\infty[&\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ t &\longmapsto T(t), \end{aligned}$$

est continue et par suite

$$\int_0^t T(s) ds \in \mathcal{L}(E).$$

Et d'après le lemme précédent on voit que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s) ds = T(0) = Id.$$

Il existe donc $r > 0$ tel que

$$\left\| \frac{1}{r} \int_0^r T(t) dt - Id \right\| < 1.$$

Donc d'après le théorème(2.2.1) l'élément $\frac{1}{r} \int_0^r T(t) dt$ est inversible d'où il s'ensuit que $\int_0^r T(t) dt$ est inversible. Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - Id}{h} \int_0^r T(t) dt &= \frac{1}{h} \left[\int_0^r T(t+h) dt - \int_0^r T(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \int_r^{r+h} T(u) du - \int_0^h T(u) du. \end{aligned}$$

et d'après le lemme précédent on obtient:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h) - Id}{h} \int_0^r T(t) dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \int_r^{r+h} T(u) du - \int_0^{h+0} T(u) du \right] \\ &= T(r) - Id. \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h) - Id}{h} = [T(r) - Id] \left[\int_0^r T(t) dt \right]^{-1}.$$

Par conséquent, le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu $(T(t))_{t \geq 0}$ est l'opérateur

$$A = [T(r) - Id] \left[\int_0^r T(t) dt \right]^{-1} \in \mathcal{L}(E).$$

\Leftarrow Réciproquement, si $A \in \mathcal{L}(E)$.

D'après les lemmes précédents A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu.

□

Corollaire 3.2.1 *Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu et A son générateur infinitésimal, alors*

i) $\exists \omega \geq 0$ tel que $\|T(t)\| \leq e^{\omega t} \quad \forall t \geq 0$;

ii) *L'application*

$$\begin{aligned} T : [0, +\infty[&\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ t &\longmapsto T(t) \end{aligned}$$

est différentiable et

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A, \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve

i) On a

$$\|T(t)\| = \|e^{tA}\| \leq e^{t\|A\|} \quad \forall t \geq 0.$$

Pour $\omega = \|A\|$ on obtient l'inégalité

$$\|T(t)\| \leq e^{\omega t} \quad \forall t \geq 0.$$

ii) On a

$$A = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t) - Id}{t}$$

donc l'application considérée est dérivable au point $t = 0$.

Soit $t > 0$ et $h > 0$, alors

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t+h) - T(t)}{h} - AT(t) \right\| &\leq \left\| \frac{T(h) - Id}{h} - A \right\| \|T(t)\| \\ &\leq \left\| \frac{T(h) - Id}{h} - A \right\| e^{t\|A\|}. \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{T(t+h) - T(t)}{h} - AT(t) \right\| = 0.$$

Par conséquent, l'application

$$\begin{aligned} T : [0, +\infty[&\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ t &\longmapsto T(t) \end{aligned}$$

est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et on a

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t), \quad \forall t \geq 0.$$

De plus

$$AT(t) = T(t)A, \quad \forall t \geq 0.$$

□

3.3 Propriétés spectrales des semi-groupes uniformément continus.

Théorème 3.3.1 *Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu et A son générateur infinitésimal, si $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} \lambda > \|A\|$, alors l'application*

$$\begin{aligned} R_\lambda : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto R_\lambda x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) x dt. \end{aligned}$$

définit un opérateur linéaire borné, $\lambda \in \rho(A)$ et

$$R_\lambda x = (\lambda Id - A)^{-1} x \text{ pour tout } x \in E.$$

Preuve

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} \lambda > \|A\|$, d'après le corollaire précédente on a

$$\|e^{-\lambda t} T(t) x\| \leq e^{-(\operatorname{Re} \lambda - \|A\|)t} \|x\| \quad \forall x \in E.$$

et

$$\int_0^{+\infty} \|e^{-(\operatorname{Re} \lambda - \|A\|)t} dt\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda - \|A\|}.$$

Donc l'application R_λ est borné. Pour $x \in E$ on a

$$\begin{aligned} R_\lambda Ax &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) Ax dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{dT(t)}{dt} x dt \\ &= -x + \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) x dt \\ &= -x + \lambda R_\lambda x. \end{aligned}$$

d'où

$$x = R_\lambda(\lambda Id - A)x \quad \forall x \in E.$$

Par conséquent

$$R_\lambda(\lambda Id - A) = Id.$$

De même, on a

$$\begin{aligned} AR_\lambda x &= A \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) x dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} AT(t) x dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) Ax dt \\ &= R_\lambda Ax, \quad \forall x \in E. \end{aligned}$$

Par suite, on a

$$AR_\lambda x = R_\lambda Ax = -x + \lambda R_\lambda x, \quad \forall x \in E.$$

Il en résulte que

$$(\lambda Id - A)R_\lambda = Id.$$

Par conséquent

$$\lambda \in \rho(A) \text{ et } R_\lambda = (\lambda Id - A)^{-1} = R(\lambda, A).$$

□

Remarque

L'opérateur définit par:

$$R_\lambda : E \longrightarrow E$$

$$x \longmapsto R_\lambda x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) x dt, \quad \lambda \in \mathbb{C} \text{ et } \operatorname{Re} \lambda > \|A\|$$

s'appelle la transformée de Laplace du semi-groupe uniformément continu $(T(t))_{t \geq 0}$ ayant pour générateur infinitésimal l'opérateur A .

Pour obtenir des représentations de type Riesz-Dunford, on a besoin d'une classe spéciale de contours de Jordan.

Définition 3.3.1 *Un contour de Jordan lisse et fermé qui entoure $\sigma(A)$, s'appelle un contour de Jordan A -spectral s'il est homotope avec un cercle C_r de centre zéro et de rayon $r > \|A\|$.*

Théorème 3.3.2 (Riesz-Dunford)

Soit A générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu $(T(t))_{t \geq 0}$, si Γ_A est un contour de Jordan A -spectral, alors on a

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_A} e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve

D'après le théorème de Cauchy, on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_A} e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda \quad \forall t \geq 0.$$

et d'après la proposition (2.3.1) on a

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \text{ pour } \lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| > \|A\|\}.$$

et puisque $r > \|A\|$, particulièrement sur le cercle C_r . On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} e^{\lambda t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} d\lambda \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^{n+1}} A^n d\lambda. \end{aligned}$$

On applique la formule de Cauchy avec la fonction $f(\lambda) = e^{\lambda t}$ on obtient

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^{n+1}} d\lambda = \frac{t^n}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_A} e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = e^{At} = T(t) \quad \forall t \geq 0.$$

□

(voir[5]).

Théorème 3.3.3 Soit A générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu $(T(t))_{t \geq 0}$. Alors

$$e^{t\sigma(A)} = \sigma(T(t)) \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve

Montrons que

$$e^{t\sigma(A)} \subset \sigma(T(t)) \quad \forall t \geq 0.$$

Soit $\mu \in \sigma(A)$. Pour $\lambda \in \rho(A)$, l'application

$$\phi_\mu(\lambda) = \frac{e^{\mu t} - e^{\lambda t}}{\mu - \lambda}$$

est analytique dans un voisinage de $\sigma(A)$. D'après le théorème du Riez-Dunford on voit que

$$e^{\mu t} Id - e^{At} = (\mu Id - A)\phi_\mu(A).$$

Si $e^{\mu t} \in \rho(T(t))$, alors il existe

$$S = [e^{\mu t} Id - T(t)]^{-1} \in \mathcal{L}(E).$$

Par conséquent

$$Id = (\mu Id - A)\phi_\mu(A)S.$$

d'où il résulte que $\mu \in \rho(A)$, ce qui est absurde. Donc $e^{\mu t} \in \sigma(T(t))$ et par suite $e^{t\sigma(A)} \subset \sigma(T(t))$.

Montrons que

$$e^{t\sigma(A)} \supset \sigma(T(t)).$$

Soit $\mu \in \sigma(T(t))$ et supposons que $\mu \notin e^{t\sigma(A)}$. Alors pour $\lambda \in \rho(A)$ l'application $\psi(\lambda) = (\mu - e^{\lambda t})^{-1}$ est définie sur un voisinage de $\sigma(A)$ donc:

$$\psi(\lambda)(\mu - e^{A t}) = 1.$$

et il en résulte que $\mu \in \rho(T(t))$ et cela est absurde. Par suite $\mu \in e^{t\sigma(A)}$, d'où

$$e^{t\sigma(A)} \supset \sigma(T(t)).$$

Finalement on voit que

$$e^{t\sigma(A)} = \sigma(T(t)).$$

□

Conclusion

Compte tenu de la remarque simple que la fonction exponentielle réalise, en outre, l'isomorphisme fondamental algébrique et topologique entre le groupe topologique additif des nombres réels et le groupe topologique multiplicatif des nombres réels strictement positifs, on peut constater que la fonction $t \mapsto e^{ta}$, $a \in \mathbb{R}$ est une solution réelle continue de l'équation fonctionnelle de Cauchy $f(t+s) = f(t)f(s)$ avec la condition $f(0) = 1$. Cette équation a été étudiée par beaucoup de mathématiciens commençant avec Cauchy même. D'autre part, il est très bien connu que la fonction exponentielle $t \mapsto e^{ta}$ est la solution unique sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $x' = ax$ avec la condition initiale $x(0) = 1$. L'importance des fonctions exponentielles a connu une grande croissance après l'année 1888, quand le grand mathématicien GIUSEPPE PEANO a eu l'inspiration d'écrire la solution du problème de Cauchy vectoriel

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = I \end{cases}$$

où A est une matrice quadratique, sous la forme

$$t \mapsto e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

Ce résultat a été étendu aux équations différentielles opérationnelles $X' = AX$, où A est un opérateur linéaire borné dans un espace de Banach E qui a pour solution fondamentale la fonction exponentielle $t \mapsto e^{tA}$, $A \in \mathcal{L}(E)$. Ces extensions de la fonction exponentielle admettent un modèle général dans le cadre des algèbres de Banach abstraites. Plus précisément, si $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre de Banach avec l'unité I et $a \in \mathcal{L}(E)$, alors la fonction

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{ta} \in \mathcal{L}(E)$$

$$e^{ta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n a^n}{n!}$$

est dérivable et elle est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = I. \end{cases}$$

Compte tenu de l'unicité des solutions du problème de Cauchy, il en résulte que la fonction $f(t) = e^{ta}$ satisfait sur \mathbb{R} à l'équation fonctionnelle de Cauchy. Le problème réciproque de savoir si les solutions de l'équation fonctionnelle de Cauchy sont des solutions pour les équations différentielles linéaires de premier ordre $x' = ax$, s'est avéré être plus difficile, mais il a été résolu par Yosida [14]. Donc la double caractérisation de la fonction exponentielle par l'équation fonctionnelle de Cauchy et par l'équation différentielle linéaire de premier ordre a été établie pour le cas général des algèbres de Banach abstraites. Ces caractérisations importantes ont suggéré l'idée d'étudier les équations différentielles linéaires du premier ordre par des extensions adéquates de la fonction exponentielle. De cette manière est apparu la nécessité de considérer les équations différentielles vectorielles de premier ordre $x' = Ax$ où A n'est pas un opérateur de l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés $\mathcal{L}(E)$ mais un opérateur linéaire non-borné dans un espace de Banach E . La définition d'une fonction exponentielle comme une solution de cette équation a été réalisée par l'introduction des semi-groupes de classe C_0 . Mais, dans ce cas-là, l'équation fonctionnelle de Cauchy se réfère aux fonctions

$$[0, \infty) \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(E)$$

avec $T(0) = I$, satisfaisant la relation $T(t + s) = T(t)T(s)$ et qui sont fortement continues, c'est-à-dire ayant la propriété

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x$$

pour tout $x \in \mathcal{L}(E)$. Les résultats fondamentaux pour les semi-groupes de classe C_0 dans les espaces de Banach ont été obtenus par Hille [7], Yosida [14], Miyadera [10], qui ont créé la théorie des C_0 -semi-groupes et de leurs générateurs. Le célèbre théorème de Hille-Yosida-Miyadera rétablit le lien entre l'équation fonctionnelle de Cauchy $T(t + s) = T(t)T(s)$ et l'équation différentielle $x' = Ax$ où A est un opérateur non-borné fermé et densément défini dans un espace de Banach $\mathcal{L}(E)$. Dans ce cas-là, $T(t)$ représente dans un certain sens la fonction exponentielle. Beaucoup de résultats intéressants concernant l'engendrement, la représentation, les propriétés spectrales et de convergence peuvent être trouvés dans les excellentes monographies de Pazy [11].

Bibliographie

- [1] G. Auliac, J. Yves Caby, *Topologie et analyse*, Dunod. Paris, 2005.
- [2] Z. Bendaoud, *Comportement à l'origine de la distance entre élément d'un semi-groupe fortement continu et inégalités dans les algèbres de Banach*, Thèse Université Bordeaux I Université Essenia Oran, 2008.
- [3] J. Charles, M. Mbekhta, H. Queffélec, *Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs*, Dunod. Paris, 2010.
- [4] G. Chilov, *Analyse mathématique, Tome II, Fonctions d'une variable*, Mir. Moscou, 1973.
- [5] N. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear operators, Part I*, Interscience Publishers. Inc New York, Wiley, 1967.
- [6] J. Esterle, A. Mokhtari, *Distance entre éléments d'un semi-groupe dans une algèbre de Banach*, Journal of functional analysis 195(2002)167-189.
- [7] E. Hille, R.S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, American Mathematical Society, Providence, R.I, 1974. third printing of the revised edition of 1957. American Mathematical Society Colloquium Publication, Vol XXXI.
- [8] A. Kolmogorov, S. Fomine, *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*, Mir. Moscou, 1977.
- [9] P. Lévy, Bruhl, *Introduction à la théorie spectral*, Dunod. Paris, 2003.
- [10] I. Miyadera, S. Oharu, N. Okazawa, *Generation theorems of semi-groups of linear operators*, Rims. Kyoto univ 8(1972/73)509-555.
- [11] A. Pazy, *Semi-groups of linear operators and applications to partial differential equation*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [12] W. Rudin, *Analyse fonctionnelle*, Ediscience international. Paris, 1995.
- [13] C. Tisseron, *Notions de topologie, introduction aux espaces fonctionnelles*, Hermann, 1985.
- [14] K. Yosida, *On the differentiability and the representation of one-parameter semi-groups of linear operators*, J. Math. Soc. Japan, 1(1948), 15-21.