

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
جامعة عمر ثلجي بالأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOAT
كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES
قسم الرياضيات
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique.
Filière : Mathématique.
Option : Analyse Mathématique.

Par :
FATAM Khaoula Mebarka.

THEME

Opérateurs de Toeplitz sur les espaces de Hardy.

Soutenu publiquement devant le jury composé de :

Mr. OUCHENANE Djamel	Pr.	Président
Mr. CHOUCHA Abdelbaki	MCB	Examineur
Mr. YAGOUB Ameur	MCA	Encadreur

Année Universitaire 2022/2023

Remerciements.

Avant de commencer la présentation de ce rapport, je profite l'occasion pour remercier du fond du couer toute personne qui a contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Je remercie le dieu en premier pour m'avoir donné la force, le courage et le temps qui m'ont été nécessaires pour que je puisse mener à bien mon travail et ainsi terminer ce mémoire.

Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pa pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de **Mr. YAGOUB Aneur**, on le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.

Mes vifs remerciements vont aux membres de jury **Mr. OUCHENANE Djamel** et **Mr. Abdelbaki CHOUCHA** pour avoir accepté de juger mon présent travail.

Je remercie également tous les professeurs de la Fculté de Mathématiques et d'Informatique de l'Université de Laghouat Ammar Téliidji pour ce qu'ils nous ont apporté au cours des cinq années, en particulier le chef du département de mathématiques **Mr. RAHMOUNE AbdelAziz**.

Un grand merci à ma mère, mon père mes frères et ma soueur, pour leur amour, leurs conseils ainsi que leur soutien inconditionnel, à la fois moral et économique, qui m'a permis de réaliser les études que je voulais et par conséquent ce mémoire.

Enfin, je voudrais exprimer ma reconnaissance envers les amis et collègues qui m'ont apporté leur soutien moral et intellectuel tout au long de ma démarache.

FATAM Khaoula Mebarka.

Dédicace .

Je dédie ce fruit de mes longues années d'études tout d'abord, mes très chers parents **Belgacem, Kheira** qui sont la lumière de ma vie, qui ont tant souffré et sacrifiés pour que je sois heureuse, pour leurs conseils et leurs encouragements, je vous remercie pour tout vos efforts fournis pour moi, que Dieu vous garde, vous protège, et vous bénisse la vie.

Et je le dédie à mes frères **Mohamed, Ibrahim**, ma soeur **Ibtissam** et son mari **Samir**, à notre premier joie **Djena Fatima Zahra** et à tous les membres de ma famille.

A tous mes amies et mes collègues avec qui j'ai partagé de très bons moments tout le long de ces années. Et à tous mes proches dont je n'ai pas cité le nom.

FATAM Khaoula Mebarka.

ملخص.

لتكن H^2 فضاء هاردي للدوال التحليلية على \mathbb{D} حيث مربع معاملات متتالية تايلور قابلة للتكامل. يعطى مؤثر توبليتز للدليل $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ بـ

$$T_\varphi(f) = P(\varphi f)$$

حيث P هو الإسقاط المتعامد لـ $L^2(\mathbb{T})$ على H^2 .
الغرض من هذا العمل هو اجراء دراسة حول الخصائص الجبرية لمؤثرات توبليتز.
مفاتيح هذه المذكرة.

فضاءات هاردي، مؤثرات الانتقال، مؤثرات الجداء، مؤثرات توبليتز.

Résumé :

Soit H^2 l'espace de Hardy des fonctions holomorphes sur le disque unité \mathbb{D} pour lesquelles la suite de coefficients de Taylor est carré-sommable. L'opérateur de Toeplitz de symbole $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$, est donné par :

$$T_\varphi(f) = P(\varphi f)$$

tel que P est la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur H^2 .

Le but de ce travail est de faire une étude large sur les propriétés algébrique d'opérateurs de Toeplitz (unitaire, isométrie, normal, auto-adjoint, positif . . .).

Mots clés :

Espaces de Hardy, opérateur de shift, opérateur de multiplication, opérateur de Toeplitz.

Abstract :

Let H^2 the Hardy space be holomorphic functions on the unit disk \mathbb{D} for which the sequence of Taylor coefficients is square-summable. The Toeplitz operator with symbol $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$, is given by :

$$T_\varphi(f) = P(\varphi f)$$

such that P is the orthogonal projection of $L^2(\mathbb{T})$ on H^2 .

In this work, we studied some classical results on the algebraic properties of Toeplitz operators (unitary, isometry, normal, self-adjoint, positive . . .).

Key words :

Hardy spaces, shift operator, multiplication operator, Toeplitz operator.

Table des matières

Notations	1
Introduction	2
1 Espaces de Hardy.	1
1.1 Espaces de Hilbert.	1
1.1.1 Définitions et Propriétés.	1
1.1.2 Orthogonalités.	2
1.1.3 Bases orthonormales.	3
1.1.4 Noyau reproduisant d'un espace de Hilbert.	3
1.2 Espaces de Lebesgue.	4
1.3 Espaces de Hardy H^2	6
1.4 Identification H^2 et l^2	10
2 Opérateurs de multiplication et Toeplitz.	14
2.1 Opérateurs sur les espaces de Hilbert.	14
2.1.1 Opérateurs bornés.	14
2.1.2 Adjoint d'un Opérateur.	16
2.1.3 Opérateur unitaire, isométrique, normal, positif et autoadjoint.	17
2.1.4 Projection Orthogonale.	17
2.1.5 Opérateur de rang 1.	20
2.2 Opérateurs de shift (décalage).	21
2.3 Opérateurs de multiplication.	23
2.4 Opérateurs de Toeplitz.	26
2.4.1 Définition et caractérisation.	26
2.4.2 Matrices de Toeplitz.	28
3 Propriétés algébriques d'opérateurs de Toeplitz sur les espaces de Hardy.	31
3.1 Propriétés élémentaires.	31
3.2 Produit et propriétés algébriques d'opérateur de Toeplitz.	33

Notations.

\mathbb{N}	l'ensemble des nombres naturels.
\mathbb{Z}	l'ensemble des nombres entiers.
\mathbb{C}	l'ensemble des nombres complexes.
\mathbb{T}	le cercle unité du plan complexe \mathbb{C} .
\mathbb{D}	le disque unité ouvert du plan complexe \mathbb{C} .
$\overline{\mathbb{D}}$	le disque unité fermé du plan complexe \mathbb{C} .
\mathcal{H}	l'espace de Hilbert.
$L^2(\mathbb{T})$	l'espace de Lebesgue usuel.
$L^\infty(\mathbb{T})$	l'espace des fonctions bornées sur \mathbb{T} .
H^2	l'espace de Hardy.
H^∞	l'espace des fonctions analytiques bornées.
dm	la mesure de Lebesgue normalisé sur le cercle unité.
$\langle . \rangle$	produit scalaire de $L^2(\mathbb{T})$.
$Hol(\mathbb{D})$	espace des fonctions holomorphe sur \mathbb{D} .
$\mathcal{L}(\mathcal{H})$	l'ensemble des opérateurs linéaires borné sur l'espace \mathcal{H} .
$span\{x_i, i \in I \subseteq \mathbb{N}\}$	le sous-espace vectoriel fermé engendré par x_i .
$\hat{f}(n)$	n-ème coefficient de Fourier de f .
f^*	la limite radiale de f sur \mathbb{T} .
P	projection orthogonale de L^2 sur H^2 .
K_λ	noyau reproduisant de H^2 .
$f \otimes g$	opérateur de rang 1 sur un espace de Hilbert (produit tensoriel).
S	opérateur de shift sur H^2 .
M_φ	opérateur de multiplication de symbole φ .
T_φ	opérateur de Toeplitz sur H^2 de symbole φ .

11

Introduction.

Cette mémoire s'inscrit dans le domaine de la théorie des opérateurs qui consiste en l'étude des quelques propriétés algébriques d'opérateurs sur divers espaces de fonctions analytiques. Cette étude sur les opérateurs de Toeplitz, leur caractérisation et leurs propriétés sur les espaces de Hardy. Les auteurs y donnent certaines propriétés algébriques de ces opérateurs notamment une condition pour que le produit de deux opérateurs de Toeplitz donne un autre opérateur de Toeplitz et une condition pour qu'ils commutent.

On note par \mathbb{T} le cercle unité du plan complexe. $dm := dm(\theta) = \frac{d\theta}{2\pi}$ la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle unité, et par $L^2 := L^2(\mathbb{T}, dm)$ l'espace de Lebesgue de fonctions carrées intégrables sur le cercle unité \mathbb{T} , il est bien connu que L^2 muni de produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} f \bar{g} dm.$$

L'espace de Hardy H^2 est l'ensemble des fonctions $f \in L^2$ tel le coefficient de Fourier négatives sont nulles.

$$H^2 = \{f \in L^2, \hat{f}(n) = 0, n < 0\},$$

où,

$$\hat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Soit P la projections orthogonal de L^2 sur H^2 . L'opérateur de Toeplitz de symboles φ sur L^2 , est défini par :

$$T_\varphi : H^2 \longrightarrow H^2 \tag{1}$$

$$f \longmapsto T_\varphi(f) = P(\varphi f). \tag{2}$$

Notre travail consiste à détailler et, si nécessaire, à redémontrer les résultats concernant les propriétés algébrique d'opérateurs de Toeplitz de symboles φ

sur L^2 (opérateurs 2), basés principalement sur une caractérisation spéciale pour connaître ces opérateurs.

Le mémoire est organisé de la manière suivante : nous commençons par rappeler les définitions et propriétés concernant les espaces de Hilbert, les espaces de Lebesgue L^2 , Hardy H^2 dans le chapitre 1.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons quelques définitions consacrées aux opérateurs linéaires bornés. Nous présentons les opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert, les opérateurs de rang 1, ensuite on introduit les opérateurs de multiplication et les opérateurs de Toeplitz.

Enfin, dans le troisième chapitre nous exposerons les résultats principaux sur les propriétés algébriques des opérateurs de Toeplitz sur les espaces de Hardy.

Chapitre 1

Espaces de Hardy.

Dans ce chapitre, nous allons présenter un rappel sur les espaces fondamentaux en analyse fonctionnelle qui contient quelques notions essentielles qui concernent espaces de Hilbert, les espaces L^2 , et les espaces de Hardy, qu'ils sont nécessaire de connaître pour aborder la suite de ce mémoire. Notre présentation est essentiellement inspirée des références [1, 3, 5, 6, 7, 9, 12, 16, 17].

1.1 Espaces de Hilbert.

1.1.1 Définitions et Propriétés.

Définition 1.1.1. Soit \mathcal{H} un espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}).

Une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$ est un produit scalaire, telle que pour tout $x, y, z \in \mathcal{H}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on ait :

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ et, si $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
3. $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$.
4. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$.
5. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

Définition 1.1.2. On appelle espace préhilbertien (hermitien) un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. On pose $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ nous verrons que cette quantité est une norme sur un espace préhilbertien \mathcal{H} .

Théorème 1.1.1. (Inégalité de Cauchy Schwarz). Soit \mathcal{H} un espace préhilbertien, pour tout $x, y \in \mathcal{H}$, on a :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Théorème 1.1.2. (Identité du parallélogramme). Soit \mathcal{H} un espace préhilbertien, pour tout $x, y \in \mathcal{H}$, on a :

$$(\|x + y\|)^2 + (\|x - y\|)^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Définition 1.1.3. Lorsqu'un espace préhilbertien \mathcal{H} muni de la norme induite par le produit scalaire est complet, on dit que \mathcal{H} est un espace de Hilbert.

Exemple 1.1. L'espace $l^2 = \{x = (x_j)_{j>0}, x_j \in \mathbb{C}, \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < +\infty\}$ muni du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}$$

est un espace de Hilbert.

1.1.2 Orthogonalités.

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert.

Définition 1.1.4. Soient x, y deux vecteurs de \mathcal{H} , on dit que x est orthogonal à y on note $x \perp y$ si : $\langle x, y \rangle = 0$.

Définition 1.1.5. Deux sous espaces F_1, F_2 de \mathcal{H} sont dits orthogonaux si : $\forall x \in F_1, \forall y \in F_2 : \langle x, y \rangle = 0$.

Proposition 1.1.1. Soit F un sous espace de \mathcal{H} , l'ensemble des vecteurs de \mathcal{H} orthogonaux à F forme un sous espace vectoriel de \mathcal{H} , noté F^\perp

$$F^\perp = \{x \in \mathcal{H} / \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in F\}.$$

Théorème 1.1.3. (Théorème de Pythagore).

Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un système de vecteurs orthogonaux si $x_i \perp x_j, i \neq j$ alors

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

Remarque 1.1.1. (Si \mathcal{H} est un espace de Hilbert réel).

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \langle x - y, x - y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\|\cos\theta; \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \end{aligned}$$

1.1.3 Bases orthonormales.

Définition 1.1.6. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert, $\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ une famille de vecteurs est dite :

1. Orthogonale si $\langle e_i, e_j \rangle = 0, i \neq j$.
2. Orthonormale si de plus $\|e_i\| = 1, \forall i \in \mathcal{I}$.

Définition 1.1.7. Un espace de Hilbert \mathcal{H} est séparable s'il possède une suite de points qui est dense dans \mathcal{H} .

Définition 1.1.8. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert séparable. On appelle base orthonormale de \mathcal{H} tout sous-ensemble fini ou dénombrable $\{e_n\}_n$ qui vérifie :

1. Orthogonale et orthonormale.
2. Le sous-espace vectoriel engendré par $\{e_n\}_n$ (par combinaisons linéaires finies) est dense dans \mathcal{H} .

1.1.4 Noyau reproduisant d'un espace de Hilbert.

Définition 1.1.9. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert de fonctions définies sur \mathbb{D} . Pour $z \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, $\mathbb{D}(z, r)$ désigne le disque ouvert centré en z de rayon r , et à valeurs dans \mathbb{C} , on note $\langle x, y \rangle$ et $\|\cdot\|$, respectivement le produit scalaire et la norme de \mathcal{H} . On dit qu'une application K de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ est un noyau reproduisant pour \mathcal{H} si :

1. Pour tout $z, w \in \mathbb{D}$, $K_z(w) = K(z, w)$ est une fonction de w qui appartient à \mathcal{H} .
2. Pour tout $z \in \mathbb{D}$ et tout $f \in \mathcal{H}$

$$f(z) = \langle f, K_z \rangle.$$

En particulier pour tout $z, w \in \mathbb{D}$,
 $K_z(w) = \langle K_z, K_w \rangle$ et $\|K_z\| = \sqrt{\langle K_z, K_z \rangle} = \sqrt{K(z, z)}$.

Théorème 1.1.4. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert de fonctions sur \mathbb{D} , alors \mathcal{H} admet un noyau reproduisant si et seulement si l'évaluation ponctuelle $f \mapsto f(z)$ est continue sur \mathcal{H} pour tout $z \in \mathbb{D}$.

1.2 Espaces de Lebesgue.

Les résultats dans cette section et ses preuves sont tirés de [9] et d'autres références. Soit dm la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle unité \mathbb{T} , c'est-à-dire $dm = \frac{d\theta}{2\pi}$ où $\theta \in [0, 2\pi[$. Pour toute fonction mesurable $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ on pose

$$\|f\| := \left(\int_{\mathbb{T}} |f(\zeta)|^2 dm(\zeta) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On appelle L^2 ou bien $L^2(\mathbb{T}, dm)$ l'ensemble de toutes les fonctions f de \mathbb{T} vers \mathbb{C} pour lesquelles $\|f\| < \infty$, dans ce cas $\|f\|$ s'appelle la norme $L^2(\mathbb{T})$ de f . On définit sur $L^2(\mathbb{T})$ le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{T}} f(\zeta) \overline{g(\zeta)} dm(\zeta).$$

Muni de ce produit scalaire et de la norme qui est définie précédemment, $L^2(\mathbb{T})$ est un espace de Hilbert.

Proposition 1.2.1. *Soit $n \in \mathbb{Z}$, on considère la fonction*

$$\begin{aligned} e_n : \mathbb{T} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \zeta &\longmapsto e_n(\zeta) = \zeta^n. \end{aligned}$$

$\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$.

Définition 1.2.1. *Soient $f \in L^2(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{Z}$. On note*

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &:= \langle f, \zeta^n \rangle \\ &= \int_{\mathbb{T}} f(\zeta) \overline{\zeta^n} dm(\zeta). \end{aligned}$$

$\hat{f}(n)$ est appelé le n -ième coefficient de Fourier de f . La série de Fourier de f est donnée par :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}.$$

Proposition 1.2.2. *On peut identifier $L^2(\mathbb{T})$ à $l^2(\mathbb{Z})$. La correspondance est donnée par*

$$f \in L^2(\mathbb{T}) \longleftrightarrow \{\hat{f}(n) : n \in \mathbb{Z}\} \in l^2(\mathbb{Z}).$$

Définition 1.2.2. *L'espace $L^\infty(\mathbb{T})$ des fonctions essentiellement bornées sur \mathbb{T} muni de la norme*

$$\|f\|_\infty = \text{ess - sup}_{\zeta \in \mathbb{T}} |f(\zeta)|,$$

est une algèbre de Banach.

Proposition 1.2.3. *Soit φ une fonction mesurable sur \mathbb{T} . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $\varphi f \in L^2(\mathbb{T})$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$.
- (ii) $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$.

Démonstration. (ii) \Rightarrow (i) On suppose que $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\varphi(e^{it})f(e^{it})|^2 dt &= \int_0^{2\pi} |\varphi(e^{it})|^2 |f(e^{it})|^2 dt \\ &\leq \int_0^{2\pi} \|\varphi\|_\infty^2 |f(e^{it})|^2 dt \\ &= \|\varphi\|_\infty^2 \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 dt \\ &= \|\varphi\|_\infty^2 \|f\|^2 \\ &< \infty. \end{aligned}$$

(i) \Rightarrow (ii) Supposons que $\varphi f \in L^2(\mathbb{T})$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$ et $\varphi \notin L^\infty(\mathbb{T})$. Alors pour tout $c \in \mathbb{R}$, $m(A(c)) > 0$ avec $A(c) = \{\zeta \in \mathbb{T} : |\varphi(\zeta)| \geq c\}$. Soit $c_1 = 1$, on choisit $c_2 \geq c_1 + 1$ tel que $B_1 := A(c_1) \setminus A(c_2)$ soit de mesure non nulle. On choisit $c_3 \geq c_2 + 1$ tel que $B_2 := A(c_2) \setminus A(c_3)$ soit de mesure non nulle. Par itération, on construit une suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'ensembles de mesures positives, deux à deux disjoints vérifiant : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\zeta \in B_n$, $|\varphi(\zeta)| \geq n$. On pose

$$f_n(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{m(B_n)}} & \text{si } \zeta \in B_n, \\ 0 & \text{si } \zeta \in \mathbb{T} \setminus B_n. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite orthonormée de

$L^2(\mathbb{T})$ et $f := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{n} \in L^2(\mathbb{T})$. Soit alors $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{T}} |\varphi f(\zeta)|^2 &\geq \int_{\mathbb{T}} |\varphi(\zeta)|^2 \left| \sum_{n=1}^N \frac{f_n}{n}(\zeta) \right|^2 dm(\zeta) \\
 &\geq \sum_{n=1}^N \int_{B_n} |\varphi(\zeta)|^2 \frac{[m(B_n)]^{-1}}{n^2} dm(\zeta) \\
 &\geq \sum_{n=1}^N \int_{B_n} n^2 \frac{[m(B_n)]^{-1}}{n^2} dm(\zeta) \quad (\text{car } |\varphi(\zeta)| \geq n) \\
 &= \sum_{n=1}^N m(B_n) [m(B_n)]^{-1} \\
 &= \frac{N(N+1)}{2},
 \end{aligned}$$

contredit le fait que $\varphi f \in L^2(\mathbb{T})$. □

1.3 Espaces de Hardy H^2 .

Dans ce paragraphe, on définit l'espace de Hardy H^2 de deux manières différentes et on montrera que ces deux définitions sont équivalentes à un isomorphisme près. Soient $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ le disque unité du plan complexe \mathbb{C} , $dA(z) = dx dy / \pi = r dr d\theta / \pi$, avec $z = x + iy = r e^{i\theta}$, la mesure plane de Lebesgue normalisé sur le disque unité \mathbb{D} .

On désigne par $Hol(\mathbb{D})$ l'ensemble de toutes les fonctions holomorphes dans \mathbb{D} .

Définition 1.3.1. *On définit deux types d'espace de Hardy, le premier est un sous-espace de $Hol(\mathbb{D})$ et le second un sous-espace de $L^2(\mathbb{T})$. Alors on a, sur \mathbb{D}*

$$\begin{aligned}
 H^2(\mathbb{D}) &= \left\{ f \in Hol(\mathbb{D}), \|f\|^2 = \sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} < \infty \right\}. \\
 H^\infty(\mathbb{D}) &= \left\{ f \in Hol(\mathbb{D}), \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| < \infty \right\}.
 \end{aligned}$$

Sur \mathbb{T} , on définit

$$\begin{aligned}
 H^2(\mathbb{T}) &= \{f \in L^2(\mathbb{T}), \hat{f}(n) = 0, n < 0\}. \\
 H^\infty(\mathbb{T}) &= \{f \in L^\infty(\mathbb{T}), \hat{f}(n) = 0, n < 0\}.
 \end{aligned}$$

ici $\widehat{f}(n)$ est le n -ème coefficient de Fourier de f .

Proposition 1.3.1. *D'après le théorème de Fatou, la limite radiale de toute fonction $f \in H^2(\mathbb{D})$, qui est une fonction définie sur \mathbb{T} par*

$$f^*(\zeta) = \lim_{r \rightarrow 1} f(r\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{T}$$

existe presque partout sur \mathbb{T} . On peut montrer que $f^ \in H^2(\mathbb{T})$, $\widehat{f}(n) = 0$ pour $n < 0$, tel que*

$$\int_{\mathbb{T}} \log |f^*| |d\zeta| > -\infty.$$

Proposition 1.3.2. *On peut identifier $H^2(\mathbb{T})$ à l'espace $H^2(\mathbb{D})$. Car l'application*

$$\begin{aligned} \chi : H^2(\mathbb{D}) &\longrightarrow H^2(\mathbb{T}) \\ f &\longmapsto f^* \end{aligned}$$

est un isomorphisme isométrique, où f^ est la limite radiale de f .*

Remarque 1.3.1. *Compte tenu de l'existence d'un isomorphisme isométrique entre $H^2(\mathbb{D})$ et $H^2(\mathbb{T})$, on note H^2 , laquelle désignera indifféremment $H^2(\mathbb{D})$ ou $H^2(\mathbb{T})$ suivant le contexte.*

Proposition 1.3.3. *Puisque $H^2(\mathbb{T})$ est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$ il est aussi un espace de Hilbert muni du produit scalaire induit par celui de $L^2(\mathbb{T})$ défini par :*

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\zeta) \overline{g(\zeta)} |d(\zeta)|.$$

Proposition 1.3.4. *On a $L^2(\mathbb{T}) = H^2 \oplus \overline{zH^2}$.*

Théorème 1.3.1. *Soit f analytique sur \mathbb{D} . Alors $f \in H^2$ si et seulement si*

$$\sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta < \infty.$$

De plus, pour $f \in H^2$,

$$\|f\|^2 = \sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Démonstration. Soit f une fonction analytique sur \mathbb{D} de série entière

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Alors, pour $0 < r < 1$,

$$|f(re^{i\theta})|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} r^{n+m} e^{i(n-m)\theta}.$$

Depuis

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \delta_{n,m},$$

intégrant l'expression ci-dessus pour $|f(re^{i\theta})|^2$ et en divisant par 2π donne

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

Si $f \in H^2$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq \|f\|^2$ pour tout r dans $[0, 1)$. Ainsi

$$\sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \|f\|^2 < \infty.$$

Inversement, supposons que le supremum ci-dessus est fini. Comme montré ci-dessus,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

Si $f \notin H^2$, le membre de droite peut être rendu arbitrairement grand en prenant r proche de 1. Cela contredirait l'hypothèse selon laquelle le supremum du membre de gauche de l'équation est fini.

Notez que ce qui précède montre également que, pour $f \in H^2$,

$$\|f\|^2 = \sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

□

Corollaire 1.1. *Pour toute fonction f analytique sur le disque, la fonction*

$$M(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

est croissante. Donc $\lim_{r \rightarrow -1} M(r) = \sup_{0 < r < 1} M(r)$, et donc la fonction f est dans H^2 si et seulement si $\lim_{r \rightarrow -1} M(r) < \infty$, auquel cas $\lim_{r \rightarrow -1} M(r) = \|f\|^2$.

Démonstration. Cela découle immédiatement de la formule

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

établie au cours de la démonstration du théorème précédent. \square

Remarque 1.3.2. *L'espace de Hardy possède un noyau reproduisant noté K_λ , donné par la formule :*

$$K_\lambda(z) = \frac{1}{1 - \bar{\lambda}z}, \quad z \in \mathbb{D},$$

et

$$f(z) = \langle f, K_z \rangle, \quad f \in H^2.$$

Proposition 1.3.5. *Soit $\lambda \in \mathbb{D}$. L'application*

$$\Phi_\lambda : f \longrightarrow f(\lambda)$$

est une forme linéaire bornée sur H^2 .

Proposition 1.3.6 (Formule de l'intégrale de Cauchy). *Soit $\lambda \in \mathbb{D}$, pour $f \in H^2$*

$$f(\lambda) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{1 - \lambda\bar{\zeta}} dm(\zeta),$$

et pour $n \geq 0$

$$\frac{d^n f}{dz^n}(\lambda) = \langle f, \frac{d^n K_\lambda}{dz^n} \rangle,$$

où $\frac{d^n K_\lambda}{dz^n}(z) = \frac{n! \bar{\lambda}^n}{(1 - \bar{\lambda}z)^{n+1}}$ la dérivée n -ième de K_λ .

Démonstration. D'après la proposition 1.3.5,

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \Phi_\lambda(f) \\ &= \langle f, K_\lambda \rangle \\ &= \int_{\mathbb{T}} f(\zeta) \overline{K_\lambda(\zeta)} dm(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{1 - \lambda\bar{\zeta}} dm(\zeta). \end{aligned}$$

Comme K_λ est analytique sur \mathbb{D} , elle est développable en série entière sur \mathbb{D} avec

$$\begin{aligned} K_\lambda(z) &= \frac{1}{1 - \bar{\lambda}z}, & (z \in \mathbb{D}) \\ &= \sum_{n \geq 0} (\bar{\lambda}z)^n, & (z \in \mathbb{D}) \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que $\frac{d^n K_\lambda}{dz^n}(z) = \frac{n! \bar{\lambda}^n}{(1 - \bar{\lambda}z)^{n+1}}$. Donc

$$\left\langle f, \frac{d^n K_\lambda}{dz^n} \right\rangle = n! \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{(1 - \lambda \bar{\zeta})^{n+1}} dm(\zeta),$$

qui n'est autre que la formule de Cauchy pour la dérivée n-ième de f . \square

1.4 Identification H^2 et l^2 .

L'espace de Hilbert le plus familier est appelé l^2 et consiste en la collection de suites sommables au carré de nombres complexes. C'est,

$$l^2 = \left\{ \{a_n\}_{n=0}^\infty : \sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

L'addition de vecteurs et la multiplication de vecteurs par des nombres complexes s'effectuent par composante. La norme du vecteur $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ est

$$\|\{a_n\}_{n=0}^\infty\| = \left(\sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

et le produit scalaire des vecteurs $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ et $\{b_n\}_{n=0}^\infty$ est

$$\langle \{a_n\}_{n=0}^\infty, \{b_n\}_{n=0}^\infty \rangle = \sum_{n=0}^\infty a_n \bar{b}_n.$$

Définition 1.4.1. *L'espace de Hardy H^2 , est constitué de toutes les fonctions analytiques ayant des représentations en série de puissances avec des coefficients complexes sommables au carré. C'est,*

$$H^2 = \left\{ f : f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n \text{ et } \sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Le produit scalaire sur H^2 est défini par

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{b}_n,$$

pour

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ et } g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

La norme du vecteur $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est

$$\|f\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'application $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est clairement un isomorphisme de l^2 sur H^2 .

Théorème 1.4.1. *Toute fonction de H^2 est analytique sur le disque unitaire ouvert.*

Démonstration. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $|z_0| < 1$, il faut montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ converge. Puisque $|z_0| < 1$, la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^n$ converge. Il existe un K tel que $|a_n| \leq K$ pour tout n (puisque $\{a_n\}$ est dans l^2). Donc $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z_0^n| \leq K \sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^n$, donc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ converge absolument. \square

Remarque 1.4.1. *Contre-exemple sur une fonction est analytique sur \mathbb{D} mais n'est pas dans H^2 . En effet : la fonction $f(z) = \frac{1}{1-z}$ est analytique sur \mathbb{D} , et puisque $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, les coefficients de f ne sont pas sommables au carré.*

Théorème 1.4.2. *Pour $z_0 \in \mathbb{D}$ et $f \in H^2$, $f(z_0) = (f, K_{z_0})$ et $\|K_{z_0}\| = (1 - |z_0|)^{-1/2}$.*

Démonstration. On a K_{z_0} sous la forme $\sum_{n=0}^{\infty} \bar{z}_0^n z^n$ donne

$$\langle f, K_{z_0} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n = f(z_0),$$

et

$$\|K_{z_0}\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\overline{z_0}|^{2n}.$$

Puisque $\sum_{n=0}^{\infty} |\overline{z_0}|^{2n} = \frac{1}{1 - |z_0|^2}$, il s'ensuit que $\|K_{z_0}\| = \frac{1}{(1 - |z_0|^2)^{1/2}}$. \square

Théorème 1.4.3. *Si $\{f_n\} \rightarrow f$ dans H^2 , alors $\{f_n\} \rightarrow f$ uniformément sur des sous-ensembles compacts de \mathbb{D} .*

Démonstration. Pour un $z_0 \in \mathbb{D}$ fixé, on a

$$|f_n(z_0) - f(z_0)| = |(f_n - f, K_{z_0})| \leq \|f_n - f\| \|K_{z_0}\|.$$

Si K est un sous-ensemble compact de \mathbb{D} , alors il existe un M tel que $\|K_{z_0}\| \leq M$ pour tout $z_0 \in K$ (M peut être pris comme le supremum de $\frac{1}{\sqrt{1 - |z_0|^2}}$ pour $z_0 \in K$). Ainsi

$$|f_n(z_0) - f(z_0)| \leq M \|f_n - f\|, \quad \text{pour tous } z_0 \in K,$$

ce qui implique clairement le théorème. \square

Corollaire 1.2. *Toute fonction dans H^∞ est dans H^2 .*

Démonstration. Ceci découle immédiatement de la caractérisation de H^2 donnée dans le théorème 1.3.1. \square

Définition 1.4.2. *L'espace $l^2(\mathbb{Z})$ est défini comme l'espace de toutes les séquences sommables au carré à deux côtés; c'est,*

$$\left\{ l^2(\mathbb{Z}) = (\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots) : \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Proposition 1.4.1. *Les polynômes sont denses dans H^2 .*

Démonstration. Si $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ appartient à H^2 , alors

$$\left\| f - \sum_{0 \leq n \leq N} a_n z^n \right\|^2 = \sum_{n \geq N+1} |a_n|^2.$$

Étant la queue d'une série convergente, cette expression tend vers zéro lorsque $N \rightarrow \infty$. Ainsi les sommes partielles de la série de Taylor de f approchent f dans la norme H^2 . \square

Corollaire 1.3. *Si $f \in H^2$ et, pour $r \in (0, 1)$, $f_r(z) = f(rz)$, alors $f_r \in H^2$ et $\|f_r - f\| \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow 1^-$.*

Démonstration. Si $f \in H^2$ alors

$$f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n, \|f\|^2 = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2,$$

Ainsi

$$\|f_r\|^2 = \left\| \sum_{n \geq 0} a_n r^n z^n \right\|^2 = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 r^{2n} \leq \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 = \|f\|^2.$$

De plus,

$$\|f_r - f\|^2 = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 (1 - r^{2n}).$$

Par le Théorème de Convergence Dominée, ce dernier terme tend vers zéro quand $r \rightarrow 1^-$. \square

Remarque 1.4.2. *On peut résumer l'identification entre H^2, l^2 et $L^2(\mathbb{T})$ comme indiqué dans le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} H^2 & \longleftrightarrow & l^2 \\ \cap & & \cap \\ L^2(\mathbb{T}) & \longleftrightarrow & l^2(\mathbb{Z}) \end{array}$$

Chapitre 2

Opérateurs de multiplication et Toeplitz.

Dans ce chapitre on va rappeler quelques définitions et résultats classiques concernant les opérateurs linéaires bornés sur les espaces de Hilbert, nous rappelons aussi des définitions et propriétés élémentaires sur les opérateurs de multiplication et Toeplitz (voir par exemple, [1, 3, 5, 8, 9, 11, 13, 14, 15, 16]).

2.1 Opérateurs sur les espaces de Hilbert.

2.1.1 Opérateurs bornés.

Soient E et F deux espaces de Hilbert sur le même corps \mathbb{K} .

Définition 2.1.1 (Opérateur). *On appelle opérateur de E dans F , toute application A défini de E dans F par :*

$$\begin{aligned} A : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto Ax. \end{aligned}$$

Définition 2.1.2 (Opérateur linéaire). *On dit que l'opérateur $A : E \longmapsto F$ est linéaire si :*

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : A(x + y) &= Ax + Ay \\ A(\lambda x) &= \lambda Ax. \end{aligned}$$

C'est un homomorphisme d'espaces vectoriels et l'on a $A(0_E) = 0_F$.

Définition 2.1.3 (Opérateur continu, borné). Soit A un opérateur linéaire défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dite **continu** au point x_0 de G si on a la propriété suivante :

Pour toute suite x_n de G converge vers x_0 , la suite Ax_n converge vers $A(x_0)$ c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = A \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) = A(x_0).$$

A est dite **borné** s'il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$\| A(x) \|_F \leq k \| x \|_E, \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Le théorème suivant caractérise la continuité d'un opérateur linéaire.

Théorème 2.1.1. Soit A un opérateur linéaire de E dans F . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) A est continu.
- (2) A est continu en 0.
- (3) il existe une constante c telle que $\| Ax \| \leq c \| x \|$ pour tout $x \in E$.

Notation :

On note par $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus entre E et F . Quand $E = F$, $\mathcal{L}(E, F)$ est noté $\mathcal{L}(E)$. Quand $F = K$, on note E' l'espace dual (topologique) de E qui est l'espace vectoriel des formes linéaires continues de E dans K . Par E'' , on note le bidual de E .

Définition 2.1.4. Soit $A : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire. On définit l'image de l'opérateur A par

$$Im(A) = \{ Ax, x \in E \}.$$

et le noyau de l'opérateur A par

$$Ker(A) = \{ x \in E : Ax = 0 \}.$$

Remarque 2.1.1. Si E est de dimension finie, alors, tout opérateur linéaire de E dans F est continu.

On définit maintenant la norme d'un opérateur linéaire continu.

Définition 2.1.5 (Norme d'un opérateur linéaire continu). Soit $A : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire continu. Le nombre $\sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, est appelé la norme de A et est noté $\|A\|$.

Remarque 2.1.2. 1. Si pour une constante c , on a $\|Ax\| \leq c\|x\|$ pour tout $x \in E$, alors A est borné et $\|A\| \leq c$. De plus, on a :

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|, \text{ pour tout } x \in E.$$

2. On vérifie que $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$ ainsi que

$$\|A\| = \inf \{c : \|Ax\| \leq c\|x\|, \text{ pour tout } x \in E\}.$$

Proposition 2.1.1 (Propriétés de la norme d'opérateur). Soient E, F et G trois espace de Hilbert.

1. Si $A \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\|A\| = 0$ si et seulement si $A = 0$.
2. Si $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $A + B \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.
3. Si $\alpha \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\alpha A \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$.
4. Si $A \in \mathcal{L}(E, F)$ et $B \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $B \circ A \in \mathcal{L}(E, G)$ et $\|B \circ A\| \leq \|B\|\|A\|$.

Notation :

La composée $A \circ B$ de deux opérateurs A et B sera souvent noté AB .

Théorème 2.1.2. Soient E un espace de Hilbert et F un espace de Banach. Alors, l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.

2.1.2 Adjoint d'un Opérateur.

Définition 2.1.6. Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Il existe une unique opérateur $A^* \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in F$, on ait :

$$\langle A(x), y \rangle = \langle x, A^*(y) \rangle$$

est appelé **adjoint** de A . De plus on a :

$$\|A^*\| = \|A\|.$$

Ce qui prouve que A^* est aussi continue.

Proposition 2.1.2. *Soit $A \rightarrow A^*$ un opérateur antilinéaire, isométrique de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(F, E)$. De plus pour tout $A \in \mathcal{L}(E, F)$ on a :*

- $(A^*)^* = A.$
- $\|A^*A\| = \|A\|^2.$

2.1.3 Opérateur unitaire, isométrique, normal, positif et autoadjoint.

Définition 2.1.7. *Soient E et F deux espaces de Hilbert.*

- (a) $U \in \mathcal{L}(E, F)$ est appelé unitaire si $U^*U = I_E$ et $UU^* = I_F.$
- (b) $U \in \mathcal{L}(E, F)$ est appelé isométrique (co-isométrique) si $U^*U = I_E$ ($UU^* = I_F$).
- (c) $N \in \mathcal{L}(E)$ est appelé normal si $NN^* = N^*N.$
- (d) $U \in \mathcal{L}(E)$ est appelé hermitien ou auto-adjoint si $U^* = U.$
- (e) $P \in \mathcal{L}(E)$ est appelé positif (notation : $P \geq 0$) si P est auto-adjoint et si pour tout $x \in E, \langle P(x), x \rangle \geq 0.$
- (f) Deux opérateurs $A : E \rightarrow E$ et $B : F \rightarrow F$ sont unitairement équivalents s'il existe un opérateur unitaire $U : E \rightarrow F$ tel que $A = U^*BU.$
- (g) $U \in \mathcal{L}(E)$ est appelé opérateur cyclique s'il existe $s \in E$ (appelée vecteur cyclique pour U) tel que $E = \text{span}\{U^n x, n \geq 0\}.$

2.1.4 Projection Orthogonale.

Théorème 2.1.3. *Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert, est soit \mathcal{H}_1 un sous espace vectoriel de \mathcal{H} **fermé**, l'application*

$$\begin{aligned} P : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H}_1 \\ x &\longmapsto Px \end{aligned}$$

est un opérateur linéaire continu et $P \circ P = P.$

Théorème 2.1.4. *Le point y est appelé projection orthogonale de x sur \mathcal{H}_1 est il noté $Px.$*

$$\begin{aligned} P : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H}_1 \\ x &\longmapsto Px = \inf_{y \in \mathcal{H}_1} \|y - x\|, \end{aligned}$$

on vient de voir que $x - Px \in \mathcal{H}_1^\perp$.

Proposition 2.1.3. *L'application qui à un point de \mathcal{H} fait correspondre sa projection orthogonale sur un sous espace fermé \mathcal{H}_1 notée $(P_{\mathcal{H}_1}(x))$, possède les propriétés suivantes :*

1. $P_{\mathcal{H}_1}(\alpha x + \beta y) = \alpha P_{\mathcal{H}_1}(x) + \beta P_{\mathcal{H}_1}(y)$.
2. $P_{\mathcal{H}_1} + P_{(\mathcal{H}_1)^\perp} = id_{\mathcal{H}_1}$.
3. $(\|x\|)^2 = (\|P_{\mathcal{H}_1}(x)\|)^2 + (\|(id - P_{\mathcal{H}_1})(x)\|)^2$.
4. $P_{\mathcal{H}_1}(x_n) \rightarrow P_{\mathcal{H}_1}(x)$ si $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.
5. $x \in \mathcal{H}_1 \Leftrightarrow P_{\mathcal{H}_1}(x) = x$.
6. $x \in \mathcal{H}_1^\perp \Leftrightarrow P_{\mathcal{H}_1}(x) = 0$.
7. $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2 \Leftrightarrow P_{\mathcal{H}_1}(P_{\mathcal{H}_2})(x) = P_{\mathcal{H}_1}(x)$.

Théorème 2.1.5. (*Décomposition de Riez*).

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et soit \mathcal{H}_1 un sous espace vectoriel **fermé** de \mathcal{H} . Alors

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1^\perp.$$

Exemple 2.1. 1. Soient \mathcal{H} un espace de Hilbert, et $x_1 \in \mathcal{H}$ avec $x_1 \neq 0$

$$\mathcal{H}_1 = \{x_1\} = \{\alpha x_1, \alpha \in \mathbb{C}\},$$

on a l'application

$$\begin{aligned} P : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H}_1 \\ x &\longmapsto Px = \lambda_1 x_1 \end{aligned}$$

on va chercher λ_1 , on a :

$$x - \lambda_1 x_1 \in \mathcal{H}_1^\perp \implies \langle x - \lambda_1 x_1, x_1 \rangle = 0 \implies \langle x, x_1 \rangle - \lambda_1 \|x_1\|^2 = 0$$

alors

$$\lambda_1 = \frac{\langle x, x_1 \rangle}{\|x_1\|^2}.$$

2. Soient \mathcal{H} espace de Hilbert, et $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$ avec $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$

$$\mathcal{H}_1 = \{x_1, x_2\} = \{\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha, \beta \in \mathbb{C}\},$$

et $x_1 \perp x_2$ on a l'application

$$\begin{aligned} P : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H}_1 \\ x &\longmapsto Px = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \end{aligned}$$

on va chercher λ_1 et λ_2 on a :

$$(a) \quad \langle x - \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, x_1 \rangle = 0 \implies \langle x, x_1 \rangle - \lambda_1 \|x_1\|^2 = 0$$

alors $\lambda_1 = \frac{\langle x, x_1 \rangle}{\|x_1\|^2}$ (on a $\lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle = 0$ car $x_1 \perp x_2$).

$$(b) \quad \langle x - \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, x_2 \rangle = 0 \implies \langle x, x_2 \rangle - \lambda_2 \|x_2\|^2 = 0$$

alors $\lambda_2 = \frac{\langle x, x_2 \rangle}{\|x_2\|^2}$ (on a $\lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle = 0$ car $x_1 \perp x_2$).

Définition 2.1.8 (Projection de Riesz). *Dans ce qui suit, on note P la projection de Riesz, la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur H^2 . En termes de série de Fourier, P est donné par la formule*

$$P \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \zeta^n \right) = \sum_{n \geq 0} \widehat{f}(n) \zeta^n.$$

La projection de Riesz renvoie la "partie analytique" d'une série de Fourier en $L^2(\mathbb{T})$. Par exemple,

$$P(1 + 2\cos\theta) = P(e^{-i\theta} + 1e^{i\theta}) = 1 + e^{i\theta} = 1 + \zeta.$$

On remarque aussi que, en projection orthogonale, l'opérateur P est auto-adjoint et donc satisfait $\langle Pf, g \rangle = \langle f, Pg \rangle$ pour tout f, g dans $L^2(\mathbb{T})$. Donc la projection orthogonale P de $L^2(\mathbb{T})$ sur H^2 définie par :

$$Pf = \langle f, K_\lambda \rangle, \quad f \in L^2(\mathbb{T}), \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

Proposition 2.1.4. *La projection de Riesz est donnée par la formule*

$$[Pf](\lambda) = \langle f, K_\lambda \rangle = \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\lambda} dm(\zeta), \quad f \in L^2, \lambda \in \mathbb{D}.$$

Démonstration. Puisque $K_\lambda = (1 - \bar{\lambda}z)^{-1}$ appartient à H^2 et vérifie la propriété de reproduction (3.2), il s'ensuit que

$$[Pf](\lambda) = \langle Pf, K_\lambda \rangle = \langle f, PK_\lambda \rangle = \langle f, K_\lambda \rangle,$$

pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$. La réécriture de l'expression $\langle f, K_\lambda \rangle$ sous forme d'intégrale donne la seconde formule. \square

2.1.5 Opérateur de rang 1.

Nous allons rappeler la définition et les propriétés élémentaires du produit tensoriel.

Définition 2.1.9. Soient \mathcal{H} un espace de Hilbert séparable, $f, g \in \mathcal{H}/\{0\}$ alors on définit l'opérateur borné de rang 1, $f \otimes g$ par :

$$\begin{aligned} f \otimes g : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ h &\longmapsto f \otimes g(h) = \langle h, g \rangle f. \end{aligned}$$

L'image de $f \otimes g$ est le sous-espace de dimension 1, $\mathbb{C}f$.

On peut voir réciproquement que tout opérateur A de rang 1 a la forme $f \otimes g$ pour certains vecteurs $f, g \in \mathcal{H}$. En effet, comme $\text{Im}A$ est de dimension 1, pour $f \in \text{Im}A$ non nul, $\text{Im}A = \mathbb{C}f$. Pour tout $h \in \mathcal{H}$, il existe $c_h \in \mathbb{C}$ tel que $Ah = c_h f$ et la forme linéaire $h \in \mathcal{H} \mapsto c_h$ est continue, par continuité de $f \otimes g$. Le Théorème de Riesz assure l'existence de $g \in \mathcal{H}$ tel que $c_h = \langle h, g \rangle$, et alors pour $h \in \mathcal{H}$,

$$Ah = \langle h, g \rangle f = f \otimes g(h).$$

Proposition 2.1.5. On a les propriétés suivantes : pour tout f, f_1, g, g_1 éventuellement non nuls, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$,

1. $A(f \otimes g) = (Af \otimes g)$ et $(f \otimes g)A = (f \otimes A^*g)$.
2. $(f \otimes g)(f_1 \otimes g_1) = \langle f_1, g \rangle (f \otimes g_1)$.
3. $(\alpha f + \beta f_1) \otimes g = \alpha(f \otimes g) + \beta(f_1 \otimes g)$ et $f \otimes (\alpha g + \beta g_1) = \bar{\alpha}(f \otimes g) + \bar{\beta}(f \otimes g_1)$.
4. $\text{Ker}(f \otimes g) = (\mathbb{C}g)^\perp$ et $\text{Im}(f \otimes g) = \mathbb{C}f$.
5. $(f \otimes g)^* = (g \otimes f)$.
6. $(f \otimes g) = (f_1 \otimes g_1)$ avec f, f_1, g, g_1 tous non nuls, si et seulement si il existe $\gamma, \lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f = \gamma f_1, g = \lambda g_1$ et $\bar{\lambda}\gamma = 1$.

Démonstration. 1. Pour tout $h \in \mathcal{H}$,

$$A(f \otimes g)(h) = \langle h, g \rangle Af = (Af \otimes g)(h)$$

et

$$(f \otimes g)(Ah) = \langle Ah, g \rangle f = \langle h, A^*g \rangle f = f \otimes (A^*g)(h).$$

2. Pour tout $h \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} (f \otimes g)(f_1 \otimes g_1)(h) &= f \otimes g \langle h, g_1 \rangle f_1 \\ &= \langle h, g_1 \rangle \langle f_1, g \rangle f \\ &= \langle f_1, g \rangle (f \otimes g_1)h. \end{aligned}$$

3. Par linéarité du produit scalaire.

4. Nous avons déjà vu la seconde affirmation. Pour la première :

$$\text{Ker}(f \otimes g) = \{h \in \mathcal{H} \mid f \otimes g(h) = 0\} = \{h \in \mathcal{H} \mid \langle h, g \rangle = 0\} = (\mathbb{C}g)^\perp.$$

5. Soient $h, k \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} \langle (f \otimes g)^*(h), k \rangle &= \langle h, f \otimes g(k) \rangle \\ &= \langle g, k \rangle \langle h, f \rangle \\ &= \langle h, f \rangle \langle g, k \rangle \\ &= \langle \langle h, f \rangle g, k \rangle \\ &= \langle g \otimes f(h), k \rangle. \end{aligned}$$

6. Si $f \otimes g = f_1 \otimes g_1$ alors ils ont mêmes images. Or $\text{Im} f \otimes g = \mathbb{C}f$ et $\text{Im} f_1 \otimes g_1 = \mathbb{C}f_1$ donc il existe $\gamma \in \mathbb{C}$ non nul tel que $f = \gamma f_1$. En considérant les adjoints de ces opérateurs, l'assertion précédente affirme que $g \otimes f = g_1 \otimes f_1$. Le raisonnement similaire au précédent affirme qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $g = \lambda g_1$. Ainsi, $\gamma f_1 \otimes \lambda g_1 = f_1 \otimes g_1$ ce qui implique $\gamma \bar{\lambda} = 1$. La réciproque se vérifie trivialement. □

2.2 Opérateurs de shift (décalage).

Les opérateurs de shift tiennent une place importante dans le monde des opérateurs sur la théorie des fonctions (voir [15]).

Définition 2.2.1. On note $S : H^2 \rightarrow H^2$ défini par $S(f) = zf$, $z \in \mathbb{T}$ l'opérateur de décalage à droite (shift), cet opérateur est borné et une isométrie de H^2 .

L'adjoint de S est l'opérateur de décalage à gauche (adjoint de Shift) noté S^* défini par :

$$S^*(f) = \frac{f(z) - f(0)}{z}.$$

En effet, pour $f, g \in H^2$, on a

$$\langle Sf, g \rangle = \langle zf, g \rangle = \langle f, \bar{z}g \rangle.$$

Soit $k \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle zf, k \rangle &= \bar{k} \langle zf, 1 \rangle \\ &= \bar{k} \langle zf, k_0 \rangle \\ &= \bar{k} (\widehat{zf})(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\langle Sf, g \rangle = \langle f, \bar{z}(g(z) - g(0)) \rangle = \langle f, \frac{g(z) - g(0)}{z} \rangle.$$

Définition 2.2.2. Sur l^2 , on définit l'opérateur de shift unilatéral S par :

$$S(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) = (0, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots),$$

pour $(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \in l^2$.

Théorème 2.2.1. (i) Le shift unilatéral est une isométrie (c'est-à-dire $\|Sf\| = \|f\|$ pour tout $f \in l^2$).

(ii) L'adjoint S^* du shift unilatéral a la forme suivante :

$$S^*(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_1, a_2, a_3, \dots),$$

pour $(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \in l^2$. (L'opérateur S^* est le shift unilatéral vers l'arrière.)

Démonstration. Pour prouver (i), il faut montrer que $\|(a_0, a_1, a_2, \dots)\| = \|(0, a_0, a_1, a_2, \dots)\|$.

Mais c'est trivial puisque $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 = |0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k-1}|^2$.

Pour prouver (ii), soit A l'opérateur défini par $A(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$. Soient $x = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ et $y = (b_0, b_1, b_2, \dots)$ deux vecteurs quelconques. Remarquez que

$$S(x, y) = ((0, a_0, a_1, a_2, \dots), (b_0, b_1, b_2, b_3, \dots)) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} \bar{b}_k,$$

et

$$(x, Ay) = ((a_0, a_1, a_2, a_3, \dots), (b_1, b_2, b_3, b_4, \dots)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{b}_{k+1}.$$

Comme ces sommes sont égales, il s'ensuit que $A = S^*$. □

Définition 2.2.3. *Le shift bilatéral est l'opérateur W sur $l^2(\mathbb{Z})$ défini par*

$$W(\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots) = (\dots, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots).$$

Théorème 2.2.2. (i) *Le shift bilatéral est un opérateur unitaire.*

(ii) *L'adjoint du shift bilatéral, appelé shift bilatéral arrière, est donné par*

$$W^*(\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots) = (\dots, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots).$$

Démonstration. Il est clair que $\|Wx\| = \|x\|$ pour tout $x \in l^2(\mathbb{Z})$, et donc W est une isométrie. Définissez l'opérateur linéaire borné A par

$$A(\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots) = (\dots, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots).$$

Évidemment, $AW = WA = I$, et donc W est une isométrie inversible ; c'est-à-dire que W est un opérateur unitaire.

Nous devons montrer que $(Wx, y) = (x, Ay)$ pour tout x et $y \in l^2(\mathbb{Z})$. Soit $x = (\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$ et $y = (\dots, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \dots)$. Remarquez que

$$(Wx, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n-1} \overline{b_n},$$

et

$$(x, Ay) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \overline{b_{n+1}}.$$

Ces sommes sont égales entre elles. Donc $A = W^*$. □

2.3 Opérateurs de multiplication.

Définition 2.3.1. *Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$. On appelle opérateur de multiplication, de symbole φ sur $L^2(\mathbb{T})$ l'opérateur défini par*

$$\begin{aligned} M_\varphi : D(M_\varphi) \subseteq L^2(\mathbb{T}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{T}) \\ f &\longmapsto M_\varphi f = \varphi f. \end{aligned}$$

où $D(M_\varphi) = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \varphi f \in L^2(\mathbb{T})\}$. Il est clair que $D(M_\varphi)$ est dense dans $L^2(\mathbb{T})$ puisqu'il contient l'espace des fonctions continues à support compact sur \mathbb{T} qui lui est dense dans $L^2(\mathbb{T})$. De plus, si $\varphi \in L^\infty$ alors M_φ est borné et $\|M_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$ en fait le théorème suivant, exposé par Arlen Brown et P. R. Halmos dans [4], montre que les seuls symboles φ pour lesquels M_φ est borné sont les fonctions bornées sur \mathbb{T} .

Théorème 2.3.1. [4] Soient $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ et M_φ opérateur de multiplication. Alors les assertions suivantes sont satisfaites :

(i) Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$.

(b) $D(M_\varphi) = L^2(\mathbb{T})$.

(c) M_φ est borné sur $L^2(\mathbb{T})$, et $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$.

(ii) Si $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ alors

(a) $M_\varphi^* = M_{\bar{\varphi}}$.

(b) M_φ est normal.

(c) M_φ est isométrie si et seulement si $|\varphi| = 1$ presque partout.

Démonstration. (i) (a) équivalent (b), voir la proposition 1.2.3.

(c) Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$ avec $\|f\| = 1$. Puisque $|\varphi(e^{i\theta})| \leq \|\varphi\|_\infty$ a.e., il s'ensuit que

$$\|M_\varphi f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(e^{i\theta})f(e^{i\theta})|^2 d\theta \leq \|\varphi\|_\infty^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Ceci implique que $\|M_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$.

On établit maintenant l'inégalité inverse. Soit $\lambda_0 = \|\varphi\|_\infty$. Si $\lambda_0 = 0$ il n'y a rien à prouver, supposons donc $\lambda_0 \neq 0$. Pour tous les nombres naturels n , le se

$$E_n = \left\{ e^{i\theta} : |\varphi(e^{i\theta})| > \lambda_0 - \frac{1}{n} \right\}$$

a une mesure positive. Si χ_n est la fonction caractéristique de cet ensemble et m est la mesure de Lebesgue normalisée sur S^1 , on a lorsque n est suffisamment grand pour que $\lambda_0 - 1/n > 0$,

$$\begin{aligned} \|M_\varphi \chi_n\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{E_n} |\varphi(e^{i\theta})|^2 d\theta. \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \int_{E_n} \left(\lambda_0 - \frac{1}{n} \right)^2 d\theta \\ &= \left(\lambda_0 - \frac{1}{n} \right)^2 m(E_n). \end{aligned}$$

Aussi, $\|\chi_n\|^2 = m(E_n)$. Il s'ensuit que si $f_n = \chi_n / \|\chi_n\|$, alors

$$\|M_\varphi f_n\| \geq \lambda_0 - \frac{1}{n}$$

pour n suffisamment grand, et donc

$$\|M_\varphi\| \geq \lambda_0 - \frac{1}{n}$$

pour n suffisamment grand. Ainsi $\|M_\varphi\| \geq \lambda_0 = \|\varphi\|_\infty$.

(ii) (a) Soient $f, g \in L^2(\mathbb{T})$, et $\varphi \in L^\infty$

$$\begin{aligned} \langle M_\varphi f, g \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \varphi(e^{i\theta}) f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(e^{i\theta}) \overline{\varphi(e^{i\theta})} \overline{g(e^{i\theta})} d\theta \\ &= \langle f, M_{\overline{\varphi}} g \rangle \\ &\Leftrightarrow M_{\overline{\varphi}} = M_\varphi^*. \end{aligned}$$

(b) On a :

$$M_\varphi M_\varphi^* f = M_\varphi M_{\overline{\varphi}} f = \varphi \overline{\varphi} f = \overline{\varphi} \varphi f = M_{\overline{\varphi}}^* M_\varphi f.$$

(c) M_φ isométrie alors $M_\varphi^* M_\varphi = I$, donc $M_{\overline{\varphi}} M_\varphi = I$ alors $\overline{\varphi} \varphi = |\varphi| = 1$ p.p. L'autre côté est évident. □

Le théorème suivant donne la première caractérisation de l'opérateur de multiplication.

Théorème 2.3.2. (Brown, Halmos [4]). *Un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{T})$ est un opérateur de multiplication si et seulement s'il commute avec M_z . A commute avec M_z si et seulement si $AM_z = M_z A$.*

Ainsi M_z est une représentation du shift unilatéral sous la forme d'un opérateur sur H^2 , nous référons souvent à M_z comme S lorsqu'aucune confusion n'est possible. Remarquez que $M_z e_k = e_{k+1}$ pour $k = 0, 1, 2, \dots$, où $e_k(z) = z^k$.

Définition 2.3.2. *Les opérateurs $M_{e^{i\theta}}$ et $M_{e^{-i\theta}}$ sont définis sur $L^2(\mathbb{T})$ par*

$$(M_{e^{i\theta}} f)(e^{i\theta}) = e^{i\theta} f(e^{i\theta}) \text{ et } (M_{e^{-i\theta}} f)(e^{i\theta}) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta}).$$

Théorème 2.3.3. *L'opérateur $M_{e^{i\theta}}$ sur $L^2(\mathbb{T})$ est unitairement équivalent au shift bilatéral W sur $l^2(\mathbb{Z})$, et l'opérateur $M_{e^{-i\theta}}$ est unitairement équivalent à W^* .*

Démonstration. Si V est l'opérateur unitaire appliquant $l^2(\mathbb{Z})$ sur $L^2(\mathbb{T})$ donné par

$$V(\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta},$$

on vérifie facilement que $VW = M_{e^{i\theta}}V$. La prise d'adjoints montre que $V^*M_{e^{-i\theta}} = W^*V^*$ et le théorème s'ensuit (puisque V^* est aussi unitaire). \square

2.4 Opérateurs de Toeplitz.

2.4.1 Définition et caractérisation.

Les opérateurs de Toeplitz sont les compressions des opérateurs de multiplication au l'espace de Hardy H^2 , définie comme suit.

Définition 2.4.1. Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, l'opérateur de Toeplitz de symbole φ sur H^2 est défini par :

$$\begin{aligned} T_\varphi : H^2 &\longrightarrow H^2 \\ f &\longrightarrow T_\varphi(f) = P(\varphi f), \end{aligned}$$

où P est la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur H^2 .

Remarque 2.4.1. Dans le cas où $\varphi \in H^\infty$, l'opérateur de Toeplitz est juste l'opérateur de multiplication M_φ c'est-à-dire $T_\varphi = M_\varphi$. Puisque $\forall \varphi \in H^\infty$ et $f \in H^2$ alors $\varphi f \in H^2$.

Proposition 2.4.1. Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, alors

$$\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty.$$

Démonstration. Pour tout $f \in H^2$, nous utilisons le fait que P est une projection orthogonale (et donc une contraction) pour voir que

$$\|T_\varphi f\| = \|P(\varphi f)\| \leq \|\varphi f\|.$$

En outre,

$$\|\varphi f\|^2 = \int_{\mathbb{T}} |\varphi f|^2 dm \leq \|\varphi\|_\infty^2 \int_{\mathbb{T}} |f|^2 dm \leq \|\varphi\|_\infty^2 \|f\|^2.$$

Ainsi

$$\|T_\varphi\| = \sup_{\|f\|=1} \|T_\varphi f\| \leq \|\varphi\|_\infty.$$

Pour la borne inférieure, notons que pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, alors le noyau reproducteur K_λ pour H^2 satisfait

$$\|K_\lambda\| = \frac{1}{\sqrt{1 - |\lambda|^2}}.$$

Définissons le noyau reproducteur normalisé $\widetilde{K}_\lambda = K_\lambda / \|K_\lambda\|$ et notons, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que

$$|\langle T_\varphi \widetilde{K}_\lambda, \widetilde{K}_\lambda \rangle| \leq \|T_\varphi \widetilde{K}_\lambda\| \|\widetilde{K}_\lambda\| \leq \|T_\varphi\| \|\widetilde{K}_\lambda\| \|\widetilde{K}_\lambda\| = \|T_\varphi\|.$$

En utilisant cette inégalité, on obtient

$$\begin{aligned} \|T_\varphi\| &\geq |\langle T_\varphi \widetilde{K}_\lambda, \widetilde{K}_\lambda \rangle| = |\langle P(\varphi \widetilde{K}_\lambda), \widetilde{K}_\lambda \rangle| = |\langle \varphi \widetilde{K}_\lambda, P \widetilde{K}_\lambda \rangle| \\ &= |\langle \varphi \widetilde{K}_\lambda, \widetilde{K}_\lambda \rangle| = \left| \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |\lambda|^2}{|\zeta - \lambda|^2} \varphi(\zeta) dm(\zeta) \right| \\ &= |P(\varphi)(\lambda)|. \end{aligned}$$

Enfin, on pose $\lambda = r\zeta$, où $\zeta \in \mathbb{T}$ et $r \in (0, 1)$, et on utilise le théorème de Fatou pour voir que $|\varphi(\zeta)| \leq \|T_\varphi\|$ pour presque tout $\zeta \in \mathbb{T}$. Cela donne la borne inférieure souhaitée $\|\varphi\|_\infty \leq \|T_\varphi\|$. \square

Théorème 2.4.1. *L'opérateur T_z sur H^2 est unitairement équivalent au shift unilatéral.*

Démonstration. Si V est l'opérateur unitaire appliquant l^2 sur H^2 donné par

$$V(a_0, a_1, a_2, \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

il est trivial de vérifier que $VS = T_z V$. \square

Théorème 2.4.2. *L'application $\varphi \mapsto T_\varphi$ est une application injective, bornée, linéaire, préservant l'adjoint (i.e., T_φ^*) de $L^\infty(\mathbb{T})$ sur l'espace des opérateurs de Toeplitz considérés comme un sous-espace de l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur H^2 .*

Démonstration. Il est clair que cette application est linéaire, et

$$\|T_\varphi\| = \|PM_\varphi\| \leq \|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty,$$

donc l'application est borné. Si T_φ et T_ψ sont égaux, alors la comparaison de leurs matrices montre que φ et ψ ont les mêmes coefficients de Fourier. L'application est donc injective.

Pour montrer que l'application préserve l'adjoint, calculez simplement comme suit : pour f et $g \in H^2$,

$$\begin{aligned} (T_\varphi^*, g) &= (f, T_\varphi g) = (f, PM_\varphi g) = (f, \varphi g) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{\varphi(e^{i\theta})} g(e^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\varphi(e^{i\theta})} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\theta \\ &= (\overline{\varphi} f, g) = (PM_{\overline{\varphi}} f, g) \\ &= (T_{\overline{\varphi}} f, g). \end{aligned}$$

Donc $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$. □

2.4.2 Matrices de Toeplitz.

Chaque opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert séparable a une représentation matricielle par rapport à chaque base orthonormée de l'espace.

Définition 2.4.2. *Si A est un opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert \mathcal{H} et $\{e_n\}_{n \in \mathcal{I}}$ est une base orthonormée de \mathcal{H} , alors la matrice de A par rapport à la base donnée est la matrice dont l'entrée en position (m, n) pour $m, n \in \mathcal{I}$ est (Ae_n, e_m) .*

On voit aisément que, tout comme dans le cas familier des opérateurs sur les espaces de dimension finie, l'effet de l'opérateur A sur $\sum_{n \in \mathcal{I}} c_n e_n$ peut être obtenu en multipliant le vecteur colonne $(c_n)_{n \in \mathcal{I}}$ à gauche par le matrice de A (voir par exemple ([12], p. 23).

Nous verrons que les opérateurs de Toeplitz ont des matrices qui s'obtiennent facilement à partir des matrices d'opérateurs de multiplication, nous commençons donc par l'étude des matrices d'opérateurs de multiplication sur $L^2(\mathbb{T})$ du cercle par rapport à la base standard $\{e^{in\theta}\}_{n=-\infty}^\infty$ pour

Donc $(AWe_n, e_m) = (W Ae_n, e_m)$. □

Théorème 2.4.5. *La matrice de l'opérateur de Toeplitz avec le symbole φ par rapport à la base orthonormée $\{e^{in\theta}\}_{n=0}^{\infty}$ de H^2 est*

$$T_{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_0 & \varphi_{-1} & \varphi_{-2} & \varphi_{-3} & & \\ \varphi_1 & \varphi_0 & \varphi_{-1} & \varphi_{-2} & \ddots & \\ \varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_0 & \varphi_{-1} & \ddots & \\ \varphi_3 & \varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix},$$

où φ_k est le k -ième coefficient de Fourier de φ .

Démonstration. Cela peut facilement être calculé de la même manière que le résultat correspondant pour les opérateurs de multiplication (théorème 2.4.3). Alternativement, puisque P est la projection sur H^2 et T_{φ} est définie sur H^2 , la matrice de T_{φ} est le coin inférieur droit de la matrice de M_{φ} . C'est-à-dire le coin inférieur droit de

$$M_{\varphi} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ \ddots & \varphi_0 & \varphi_{-1} & \varphi_{-2} & & & \\ \ddots & \varphi_1 & \varphi_0 & \varphi_{-1} & \varphi_{-2} & & \\ & \varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_0 & \varphi_{-1} & \varphi_{-2} & \\ & & \varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_0 & \varphi_{-1} & \ddots \\ & & & \varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_0 & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

donc

$$T_{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_0 & \varphi_{-1} & \varphi_{-2} & \varphi_{-3} & & \\ \varphi_1 & \varphi_0 & \varphi_{-1} & \varphi_{-2} & \ddots & \\ \varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_0 & \varphi_{-1} & \ddots & \\ \varphi_3 & \varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}.$$

□

Chapitre 3

Propriétés algébriques d'opérateurs de Toeplitz sur les espaces de Hardy.

Dans ce chapitre, on donne quelques résultats algébriques d'opérateurs de Toeplitz (voir [2, 4, 8, 10, 11]).

3.1 Propriétés élémentaires.

Quelques propriétés des opérateurs de Toeplitz sont regroupées dans la proposition suivante :

Proposition 3.1.1. *Soit $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Alors,*

1. *Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a : $T_{\alpha\varphi+\beta\psi} = \alpha T_\varphi + \beta T_\psi$.*
2. *$T_\varphi = 0$ si et seulement si $\varphi = 0$.*
3. *L'opérateur identité I de H^2 est l'opérateur de Toeplitz de symbole $\varphi = 1$, et l'opérateur nul est l'opérateur de Toeplitz de symbole 0.*
4. *Pour tous $f, g \in H^2$, on a : $\langle M_\varphi f, g \rangle = \langle T_\varphi f, g \rangle$.*
5. *$T_\varphi^* = T_{\bar{\varphi}}$.*
6. *T_φ est positif si et seulement si M_φ est positif.*
7. *T_φ est auto-adjoint si et seulement si son symbole est à valeur réelle presque partout sur \mathbb{T} .*

Démonstration. 1. Pour $f \in H^2$, on a

$$\begin{aligned} T_{\alpha\varphi+\beta\psi} f &= P((\alpha\varphi + \beta\psi)f) = P(\alpha\varphi f + \beta\psi f) \\ &= P(\alpha\varphi f) + P(\beta\psi f) = \alpha P(\varphi f) + \beta P(\psi f) \\ &= \alpha T_\varphi(f) + \beta T_\psi(f) = (\alpha T_\varphi + \beta T_\psi)(f). \end{aligned}$$

2. Si T_φ est nul, alors pour tous m et n dans \mathbb{N} , on a :

$$\begin{aligned} \langle T_\varphi z^n, z^m \rangle = 0 &\Leftrightarrow \langle P(\varphi z^n), z^m \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle \varphi z^n, z^m \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle \varphi, \bar{z}^n z^m \rangle = 0, \end{aligned}$$

mais la famille des polynômes en z, \bar{z} est dense dans H^2 donc φ est orthogonale à $\bar{z}^n z^m$, c'est à dire φ est nulle. Il est clair que si φ est nulle l'opérateur T_φ est nul.

3. Soit $f \in H^2$, $I(f) = P(1f) = T_1$, et $0 = P(0f) = T_0$.

4. Soit $f, g \in H^2$, on a :

$$\begin{aligned} \langle M_\varphi f, g \rangle &= \langle M_\varphi f, Pg \rangle \\ &= \langle P^* M_\varphi f, g \rangle \\ &= \langle PM_\varphi f, g \rangle \\ &= \langle T_\varphi f, g \rangle. \end{aligned}$$

5. Voir théorème 2.4.2.

6. Soit $f \in H^2$, on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \langle T_\varphi f, f \rangle &= \langle M_{\bar{\varphi}} f, f \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle M_z^n M_\varphi f, M_z^n f \rangle \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \langle M_\varphi M_z^n f, M_z^n f \rangle \geq 0, \text{ pour tout } f \in H^2. \end{aligned}$$

En particulier pour $f = 1$ on obtient

$$\langle M_\varphi M_z^n 1, M_z^n 1 \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle M_\varphi z^n, z^n \rangle \geq 0, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Et comme l'ensemble des polynômes \mathcal{P} est dense dans $L^2(\mathbb{T})$, il en résulte que

$$\langle M_\varphi f, f \rangle \geq 0, \forall f \in L^2(\mathbb{T}).$$

7. On a $T_\varphi^* = T_{\bar{\varphi}}$ et c'est égal à T_φ si et seulement si $\varphi = \bar{\varphi}$ presque partout. Ainsi, φ doit avoir des valeurs réelles. □

Théorème 3.1.1. *Les opérateurs de Toeplitz sur H^2 sont les opérateurs dont les matrices relatives à la base $\{e^{in\theta}\}_{n=0}^\infty$ de H^2 sont des matrices de Toeplitz .*

Théorème 3.1.2. *L'opérateur T est un opérateur de Toeplitz si et seulement si $S^*TS = T$, où S est le shift unilatéral.*

Démonstration. Notez que, pour les entiers non négatifs n et m ,

$$(S^*TSe_n, e_m) = (TSe_n, Se_m) = (Te_{n+1}, e_{m+1}).$$

Ainsi si T est un opérateur de Toeplitz, $(S^*TSe_n, e_m) = (Te_n, e_m)$ (puisque T admet une matrice de Toeplitz d'après le théorème 3.1.1), donc $S^*TS = T$.

Inversement, si $S^*TS = T$, alors une induction triviale donne

$$(Te_{n+k}, e_{m+k}) = (Te_n, e_m)$$

pour tout nombre naturel k , donc T a une matrice de Toeplitz et est donc un opérateur de Toeplitz d'après le théorème 3.1.1. \square

3.2 Produit et propriétés algébriques d'opérateur de Toeplitz.

Parmi les problèmes qui nous intéressent pour les opérateurs de Toeplitz est leur produit. Dans cette section, nous étudions le produit de deux opérateurs de Toeplitz. Bien que la somme de deux opérateurs de Toeplitz soit toujours un opérateur de Toeplitz, le résultat n'est pas vrai pour le produit, car l'ensemble des opérateurs de Toeplitz n'est pas stable par la multiplication et c'est rare où le produit de deux opérateurs de Toeplitz est aussi un opérateur de Toeplitz. Le problème sur le produit d'opérateurs de Toeplitz a été étudié par A. Brown et P. R. Halmos dans [4].

Définition 3.2.1. *On dit qu'un opérateur de Toeplitz T_φ est analytique (respectivement anti-analytique) si φ est analytique bornée (respectivement anti-analytique bornée) dans \mathbb{D} .*

Théorème 3.2.1. *Soit T_φ est un opérateur de Toeplitz sur H^2 . T_φ est analytique (respectivement anti-analytique) si et seulement s'il commute avec S (respectivement S^*).*

Démonstration. Soit T_φ est analytique c'est-à-dire φ est une fonction analytique bornée dans \mathbb{D} , et $S = M_z$, pour toute fonction $f \in H^2$, on a :

$$T_\varphi M_z(f) = T_\varphi P(zf) = P(\varphi zf) = \varphi zf = z\varphi f = M_z T_\varphi f.$$

3.2. PRODUIT ET PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES D'OPÉRATEUR DE TOEPLITZ.

Donc, $T_\varphi M_z = M_z T_\varphi$ sur H^2 , alors $T_\varphi S = S T_\varphi$.

Réciproquement, supposons que T_φ est un opérateur de Toeplitz qui commute avec M_z . Alors pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\widehat{\varphi}(-n) = \langle \varphi, \bar{\zeta}^n \rangle = \langle \varphi \zeta^n, 1 \rangle = \langle T_\varphi \zeta^n, 1 \rangle.$$

C'est-à-dire

$$\widehat{\varphi}(-n) = \langle T_\varphi \zeta^n, 1 \rangle = \langle T_\varphi T_z^n 1, 1 \rangle = \langle T_z^n T_\varphi 1, 1 \rangle = \langle T_\varphi 1, T_z^{*n} 1 \rangle.$$

Mais

$$T_z^{*n} 1 = T_{\bar{z}}^n 1 = P(\bar{\zeta}^n) = 0 \text{ car pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ on a } \langle \bar{\zeta}, \zeta^n \rangle = 0.$$

Ainsi, les coefficients de Fourier d'indice négatif de la fonction φ sont nuls c'est-à-dire φ est une fonction analytique.

Si φ est anti-analytique, $\bar{\varphi}$ est analytique. Et comme $T_\varphi^* = T_{\bar{\varphi}}$, ce qui précède donne $T_\varphi^* M_z = M_z T_\varphi^*$. Par passage à l'adjoint, on obtient $M_z^* T_\varphi = T_\varphi M_z^*$, donc $S^* T_\varphi = T_\varphi S^*$. \square

Lemme 3.1. Soient $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$, S le shift unilatéral et P la projection de $L^2(\mathbb{T})$ sur H^2 . On a :

$$S^* T_\psi T_\varphi S - T_\psi T_\varphi = P(e^{-i\theta} \psi) \otimes P(e^{-i\theta} \bar{\varphi}).$$

Démonstration. On remarque que $Id_{H^2} = SS^* + e_0 \otimes e_0$, il s'en suit que :

$$\begin{aligned} S^* T_\psi T_\varphi S &= S^* T_\psi Id_{H^2} T_\varphi S = S^* T_\psi (SS^* + e_0 \otimes e_0) T_\varphi S \\ &= S^* T_\psi SS^* T_\varphi S + S^* T_\psi (e_0 \otimes e_0) T_\varphi S \\ &= T_\psi T_\varphi + S^* T_\psi (e_0 \otimes e_0) T_\varphi S \\ &= T_\psi T_\varphi + (S^* T_\psi e_0) \otimes (S^* T_{\bar{\varphi}} e_0) \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$S^* T_\psi e_0 = (T_{\bar{\psi}} S)^* e_0 = (T_{e^{i\theta} \bar{\psi}})^* e_0 = (T_{e^{-i\theta} \psi} e_0) = P(e^{-i\theta} \psi)$$

car $S = T_{e^{i\theta}}$ et

$$S^* T_{\bar{\varphi}} e_0 = (T_\varphi S)^* e_0 = (T_{e^{i\theta} \varphi})^* e_0 = (T_{e^{-i\theta} \bar{\varphi}} e_0) = P(e^{-i\theta} \bar{\varphi}).$$

D'où le résultat. \square

Le théorème suivant de A. Brown et P. R. Halmos dans [4], donne une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux opérateurs de Toeplitz sur H^2 soit un opérateur de Toeplitz.

Théorème 3.2.2. *Soient $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Le produit $T_\psi T_\varphi$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement si T_ψ est anti-analytique ou si T_φ est analytique. Dans les deux cas on a : $T_\psi T_\varphi = T_{\psi\varphi}$.*

Démonstration. Si T_φ est analytique, $T_\varphi = M_\varphi$ et $T_\psi T_\varphi = (PM_\psi)M_\varphi = P(M_{\psi\varphi}) = T_{\psi\varphi}$.

Si T_ψ est anti-analytique alors $T_{\bar{\psi}} = T_\psi^*$ est analytique et

$$(T_\psi T_\varphi)^* = T_\varphi^* T_\psi^* = T_{\bar{\varphi}} T_{\bar{\psi}} = T_{\overline{\varphi\psi}}.$$

Et il vient $T_\psi T_\varphi = (T_\psi T_\varphi)^{**} = (T_{\overline{\varphi\psi}})^* = T_{\psi\varphi}$.

Pour la réciproque, supposons que $T_\psi T_\varphi$ est un opérateur de Toeplitz. On a :

$$S^* T_\psi T_\varphi S - T_\psi T_\varphi = P(e^{-i\theta}\psi) \otimes P(e^{-i\theta}\bar{\varphi}) = 0.$$

On en déduit que soit $P(e^{-i\theta}\psi) = 0$, soit $P(e^{-i\theta}\bar{\varphi}) = 0$.

Si $P(e^{-i\theta}\psi) = 0$ alors tous les coefficients de Fourier d'indices strictement positifs de ψ sont nuls et T_ψ est anti-analytique.

De même, si $P(e^{-i\theta}\bar{\varphi}) = 0$, alors tous les coefficients de Fourier d'indices strictement positifs de $\bar{\varphi}$ sont nuls et $T_{\bar{\varphi}}$ est anti-analytique i.e. T_φ est analytique. \square

Théorème 3.2.3. *Le produit de deux opérateurs de Toeplitz sur H^2 , est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.*

Démonstration. Supposons que $T_\psi T_\varphi = 0$. Puisque 0 est un opérateur de Toeplitz, le Théorème 3.2.2 implique que T_φ est analytique ou T_ψ est anti-analytique et que $T_\psi T_\varphi = T_{\psi\varphi} = 0$. Ainsi, $\psi\varphi = 0$.

- Si T_φ est analytique et $T_\varphi \neq 0$, le théorème de F. et M. Riesz entraîne que le sous ensemble $\{\zeta \in \mathbb{T} : \varphi(\zeta) = 0\}$ de \mathbb{T} est de mesure nulle. Ainsi, $\psi = 0$ presque partout et donc $T_\psi = 0$.

- D'une manière similaire, si T_ψ est anti-analytique et $T_\psi \neq 0$, le théorème de F. et M. Riesz entraîne que le sous ensemble $\{\zeta \in \mathbb{T} : \psi(\zeta) = 0\}$ de \mathbb{T} est de mesure nulle. Ainsi, $\varphi = 0$ presque partout et donc $T_\varphi = 0$. \square

Le théorème suivant résume les résultats sur la commutativité de deux opérateurs de Toeplitz dans H^2 .

Théorème 3.2.4. *Soient $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Alors $T_\varphi T_\psi = T_\psi T_\varphi$ si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est vraie :*

1. T_φ et T_ψ sont tous les deux analytiques.
2. T_φ et T_ψ sont tous les deux anti-analytiques.
3. il existe deux constantes a et b , non tous nuls tels que $a\varphi + b\psi$ est une fonction constante.

Démonstration. Si T_φ et T_ψ sont tous les deux analytiques alors d'après 3.2.2,

$$T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi} = T_{\psi\varphi}$$

et

$$T_\psi T_\varphi = T_{\psi\varphi}.$$

Un même calcul montre que si les deux étaient anti-analytiques, $T_\psi T_\varphi = T_\varphi T_\psi$. Donc (1) et (2) impliquent la commutativité.

Pour montrer que (3) implique la commutativité, on suppose que $a\varphi + b\psi = \lambda \in \mathbb{C}$, avec $a, b \in \mathbb{C}$ $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Si $a \neq 0$ alors $\varphi = \frac{-b}{a}\psi + \frac{\lambda}{a}$ et

$$\begin{aligned} T_\varphi &= PM_\varphi \\ &= PM_{\frac{-b}{a}\psi + \frac{\lambda}{a}} \\ &= \frac{-b}{a}T_\psi + \frac{\lambda}{a}P \\ &= \frac{-b}{a}T_\psi + \frac{\lambda}{a}Id_{H^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} T_\psi T_\varphi &= T_\psi \left(\frac{-b}{a}T_\psi + \frac{\lambda}{a}Id_{H^2} \right) \\ &= \frac{-b}{a}T_\psi T_\psi + \frac{\lambda}{a}T_\psi \\ &= \left(\frac{-b}{a}T_\psi + \frac{\lambda}{a}Id_{H^2} \right) T_\psi \\ &= T_\varphi T_\psi. \end{aligned}$$

Le cas $b \neq 0$ se montre de la même façon. Réciproquement, on a :

$$S^* T_\varphi T_\psi S - T_\varphi T_\psi = P(e^{-i\theta}\varphi) \otimes P(e^{-i\theta}\overline{\psi}).$$

et

$$S^*T_\psi T_\varphi S - T_\psi T_\varphi = P(e^{-i\theta}\psi) \otimes P(e^{-i\theta}\bar{\varphi})$$

Si $T_\psi T_\varphi = T_\varphi T_\psi$, alors

$$P(e^{-i\theta}\varphi) \otimes P(e^{-i\theta}\bar{\psi}) = P(e^{-i\theta}\psi) \otimes P(e^{-i\theta}\bar{\varphi}).$$

On va distinguer deux cas principaux : soit l'un des quatre vecteurs $P(e^{-i\theta}\varphi)$, $P(e^{-i\theta}\bar{\psi})$, $P(e^{-i\theta}\bar{\varphi})$ et $P(e^{-i\theta}\psi)$ est nul soit aucun d'entre eux n'est nul.

D'abord le cas où l'un des quatre vecteurs est égal à 0. On a quatre sous-cas :

- $P(e^{-i\theta}\varphi) = 0$, alors l'un des deux vecteurs $P(e^{-i\theta}\bar{\varphi})$ et $P(e^{-i\theta}\psi)$ est nul. Si $P(e^{-i\theta}\varphi) = P(e^{-i\theta}\psi) = 0$, tous les coefficients de Fourier d'indices strictement positifs de φ et de ψ sont nuls, donc T_φ et T_ψ sont anti-analytiques et on a (2). Si $P(e^{-i\theta}\bar{\varphi}) = P(e^{-i\theta}\varphi) = 0$, le seul coefficient de Fourier de φ non nul est celui d'indice 0 c'est à dire φ est une constante et on a (3) avec $a = 1$ et $b = 0$.
- $P(e^{-i\theta}\bar{\psi}) = 0$, alors l'un des deux vecteurs $P(e^{-i\theta}\bar{\varphi})$ et $P(e^{-i\theta}\psi)$ est nul. Si $P(e^{-i\theta}\bar{\varphi}) = P(e^{-i\theta}\bar{\psi}) = 0$, les coefficients de Fourier d'indice strictement négatifs de φ et ψ sont nuls c'est à dire T_ψ et T_φ sont analytiques. Si $P(e^{-i\theta}\psi) = P(e^{-i\theta}\bar{\psi}) = 0$, ψ est une constante et on a (3) en prenant $a = 0$ et $b = 1$.
- $P(e^{-i\theta}\psi) = 0$, alors $P(e^{-i\theta}\varphi) = 0$ ou $P(e^{-i\theta}\bar{\psi}) = 0$. Si $P(e^{-i\theta}\varphi) = P(e^{-i\theta}\psi) = 0$, T_φ et T_ψ sont anti-analytiques et on a (2). Si $P(e^{-i\theta}\psi) = P(e^{-i\theta}\bar{\psi}) = 0$ alors ψ est une constante et on a (3) avec $a = 0$ et $b = 1$.
- $P(e^{-i\theta}\bar{\varphi}) = 0$, alors $P(e^{-i\theta}\varphi) = 0$ ou $P(e^{-i\theta}\bar{\psi}) = 0$. Si $P(e^{-i\theta}\bar{\varphi}) = P(e^{-i\theta}\varphi) = 0$, φ est une constante et on a (3) avec $a = 1$ et $b = 0$. Si $P(e^{-i\theta}\bar{\varphi}) = P(e^{-i\theta}\bar{\psi}) = 0$, T_φ et T_ψ sont analytiques et on a (1).

Maintenant, on suppose que $P(e^{-i\theta}\varphi)$, $P(e^{-i\theta}\bar{\psi})$, $P(e^{-i\theta}\psi)$ et $P(e^{-i\theta}\bar{\varphi})$ sont tous non nuls. Alors il existe $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que $P(e^{-i\theta}\varphi) = bP(e^{-i\theta}\psi)$ et $P(e^{-i\theta}\bar{\varphi}) = \bar{b}P(e^{-i\theta}\bar{\psi})$. Il s'en suit que $P(e^{-i\theta}(\varphi - b\psi)) = 0$ et $P(e^{-i\theta}(\bar{\varphi} - \bar{b}\bar{\psi})) = 0$, autrement dit, la fonction $\varphi - b\psi$ est une constante ce qui donne (3). □

Corollaire 3.1. *Si deux opérateurs de Toeplitz commutent entre eux et qu'aucun des deux n'est combinaison linéaire de l'identité et de l'autre alors leur produit est un opérateur de Toeplitz.*

Démonstration. Il vient immédiatement du théorème précédent que soit le premier opérateur est analytique soit le second est anti-analytique et dans les deux cas, leur produit est un opérateur de Toeplitz d'après théorème 3.2.2. \square

Corollaire 3.2. *Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. L'opérateur de Toeplitz T_φ est normal si et seulement s'il existe $c, d \in \mathbb{C}$ et une fonction à valeurs réelles $\psi \in L^\infty$ tels que*

$$\varphi = c\psi + d \text{ p.p.}$$

Démonstration. Si $\varphi = c\psi + d$, puisque $T_\psi = T_\psi^*$ alors il est évident que $T_\varphi T_\varphi^* = T_\varphi^* T_\varphi$ et donc que T_φ est normal.

Réciproquement, supposons que T_φ est normal c'est à dire que T_φ commute avec $T_\varphi^* = T_{\bar{\varphi}}$. On a un des trois cas (1), (2), (3) du théorème 3.2.4.

Si c'est le cas (1) où le cas (2) alors φ est une constante et le résultat est immédiat.

Si c'est le cas (3), il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a\varphi + b\bar{\varphi} = k$ une constante. En prenant le conjugué, on a aussi $\bar{a}\bar{\varphi} + \bar{b}\varphi = \bar{k}$ et en ajoutant les deux équations, on a

$$2\text{Re}((a + \bar{b})\varphi) = k + \bar{k}.$$

Posons $\psi = \text{Im}((a + \bar{b})\varphi)$ (la partie imaginaire de $((a + \bar{b})\varphi)$), c'est une fonction à valeurs réelles. On a

$$(a + \bar{b})\varphi = \text{Re}((a + \bar{b})\varphi) + i\text{Im}((a + \bar{b})\varphi) = \frac{k + \bar{k}}{2} + i\psi.$$

Si $a + \bar{b} \neq 0$ alors on a le résultat en prenant $c = \frac{i}{a + \bar{b}}$ et $d = \frac{k + \bar{k}}{2(a + \bar{b})}$.

Si $a = -\bar{b}$, on aura $a\varphi - \bar{a}\bar{\varphi} = \text{Im}(a\varphi) = k$. La partie imaginaire de φ est alors une constante et on a le résultat en prenant $c = 1$, $\psi = \text{Re}(\varphi)$ et $d = i\text{Im}(\varphi)$. \square

Théorème 3.2.5. *Si T_φ est un opérateur de Toeplitz inversible sur H^2 , alors son inverse T_φ^{-1} est un opérateur de Toeplitz si et seulement si φ est anti-analytique ou si φ est analytique.*

Démonstration. Supposons que T_φ est inversible.

• Si φ est analytique, T_φ commute avec M_ζ . On a : $M_\zeta T_\varphi = T_\varphi M_\zeta$ c'est-à-dire $T_\varphi^{-1} M_\zeta T_\varphi = M_\zeta$ c'est-à-dire encore $T_\varphi^{-1} M_\zeta = M_\zeta T_\varphi^{-1}$. Alors, T_φ^{-1} est

un opérateur de Toeplitz analytique.

- Si φ est anti-analytique, on fait le même raisonnement en utilisant le fait que T_φ commute avec M_ζ^* . Et dans ce cas, T_φ^{-1} est un opérateur de Toeplitz anti-analytique.

Réciproquement, supposons que T_φ^{-1} est un opérateur de Toeplitz et notons $T_\varphi^{-1} = T_\psi$. On a :

$$T_\varphi T_\psi = T_\psi T_\varphi = I.$$

Puisque $T_\varphi T_\psi = I$, le Théorème 3.2.2 entraîne que T_ψ est analytique ou bien $T_{\bar{\psi}}$ est analytique. De même, puisque $T_\psi T_\varphi = I$, ou bien T_φ est analytique ou bien $T_{\bar{\varphi}}$ est analytique.

- Si T_φ est analytique, il n'y a rien à démontrer.
- Si $T_{\bar{\varphi}}$ n'est pas analytique, nécessairement T_ψ est analytique et non constante, ce qui implique que $T_{\bar{\psi}}$ n'est pas analytique donc T_φ est analytique. □

Corollaire 3.3. *T_φ est un opérateur de Toeplitz isométrie si et seulement si φ est analytique et de module 1.*

Démonstration. Si T_φ est un isométrie, alors $T_\varphi^* T_\varphi = I$ implique que $T_{\bar{\varphi}} T_\varphi = I$, et puisque I est un opérateur de Toeplitz de symbole 1 alors $T_{\bar{\varphi}} T_\varphi = T_1$. Ainsi le théorème 3.2.2 implique que φ est analytique. De plus $T_{\bar{\varphi}} T_\varphi = T_{\bar{\varphi}\varphi} = T_{|\varphi|^2} = T_1$, alors $|\varphi|^2 = 1$.

Inversement, si φ est une fonction antianalytique de module égal à 1, il est clair que $T_\varphi^* T_\varphi = T_{\bar{\varphi}} T_\varphi = T_{\bar{\varphi}\varphi} = T_{|\varphi|^2} = T_1 = I$. Donc T_φ est isométrie, et la preuve est achevée. □

Corollaire 3.4. *Un opérateur de Toeplitz T_φ est unitaire si et seulement si φ est une fonction constante de module 1.*

Démonstration. Si T_φ est unitaire, alors $T_\varphi^* T_\varphi = T_\varphi T_\varphi^* = I$, c'est-à-dire $T_{\bar{\varphi}} T_\varphi = T_\varphi T_{\bar{\varphi}} = T_1$. Ainsi, d'après le Théorème 3.2.2, φ doit être simultanément analytique et anti-analytique, d'où φ est constante. De plus, nous avons $\bar{\varphi}\varphi = |\varphi|^2 = 1$. Inversement, si φ est une fonction constante de module 1, alors $T_{\bar{\varphi}} T_\varphi = T_\varphi T_{\bar{\varphi}} = T_1$, d'où $T_\varphi^* T_\varphi = T_\varphi T_\varphi^* = I$. Par conséquent, T_φ est unitaire, ce qui achève la preuve. □

3.2. PRODUIT ET PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES D'OPÉRATEUR DE TOEPLITZ.

Le corollaire suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour les opérateurs normaux sur H^2 .

Corollaire 3.5. *Les seuls opérateurs de Toeplitz normaux sont les combinaisons linéaires finies d'opérateurs de Toeplitz auto-adjoints.*

Théorème 3.2.6. *Si T_φ est un opérateur de Toeplitz analytique, alors la matrice de T_φ par rapport à la base orthonormée $\{e^{in\theta}\}_{n=0}^{+\infty}$ de H^2 est :*

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \varphi_1 & \varphi_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \varphi_3 & \varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

$$\text{où } \varphi(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k e^{in\theta}.$$

Démonstration. Les coefficients de Fourier de φ avec des indices négatifs sont 0 puisque φ est dans H^2 , donc cela immédiatement. \square

Bibliographie

- [1] R.A. M. Avandan~o, P. Rosenthal, An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert Space, Grad. Texts in Math., vol. 237, Springer, New York, 2007.
- [2] S. Axler, S. Chang, et D. Sarason, Products of Toeplitz operators. Int. Equa.Op. Th., 1 :285-309, 1978.
- [3] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle. Théorie et application. Masson(1983).
- [4] A. Brown, P. R. Halmos. Algebraic properties of Toeplitz operators. J. Reine Angew. Math, 213 : 89-102, 1963/1964.
- [5] I. Chalendar, Analyse fonctionnel : Fonctions Harmoniques, Classe de Nevanlinna, Espaces de Hardy, et une introduction aux opérateurs de Toeplitz et de Hankel, 2008, math.univ-lyon1.fr.
- [6] J. B. Conway. A course in operator theory, volume 21 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [7] P. L. Duren, Theory of H^p spaces, Pure Appl. Math. Academic Press, New York-London, 1970.
- [8] C. Gu, Products of several Toeplitz operators. J. Funct. Anal., 171 : 483-587, 2000.
- [9] SR. Garcia, J. Mashreghi, WT. Ross, Introduction to model spaces and their operators, 2016, Cambridge University Press.
- [10] K. Guo, A problem on products of Toeplitz operators. Proc. Amer.Math. Soc., 124(3) :869-871, 1996.
- [11] K. Guo, et D. Zheng, Toeplitz algebra and Hankel algebra on the harmonic Bergman space. J. Math. Anal.Appl., 276 : 213 -230, 2002.
- [12] P. R. Halmos, A Hilbert Space Problem Book, second edition, Springer, New York, 1982.

- [13] D. Luecking, Trace ideal criteria for Toeplitz operators, *J. Punct. Anal.*, 73 , 345-368, (1987).
- [14] N. Nikolski, *Operators, functions, and systems : an easy reading*, vol 1. *Mathematical surveys and monographs*, vol 92. American Mathematical Society, 2002.
- [15] N. Nikolski, *Treatise on the shift operator : spectral function theory*. *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, Berlin, 1986.
- [16] M. Rosenblum, et J. Rovnyak, *Hardy classes and operator theory*. *Oxford Mathematical Monographs*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1985.
- [17] Wa. Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson, Paris, 1980. J. B. Conway. *A course in operator theory*, volume 21 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.