الجـــــمهورية الـــــجـزائريـــــة الديمــــــــــقراطيـــــــــة الشعبيـــــة

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعـليـــم العـالـــــــــــتي و البــــــحــــــث العلــــــــمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جـــــامعة عمــــــــار ثليـــــــــجي بالأغـــــــــواط

UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كـليـــــة العلـــوم

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUE ET INFORMATIQUE

Mémoire de MASTER

Domaine : Mathématique informatique (MI)

Filière : Mathématique

Option : Analyse mathématique

Présenté par :

BENGHIA Fatima Zohra

THEME

Méthode variationnelle pour un problème elliptique

Soutenu publiquement, le 28/09/2013, devant le jury composé de :

Encadreur : BENABDERRAHMANE Benyattou

Co-Encadreur: NOUIRI Brahim

Président : ALLAOUI Salaheddine

Examinateur : BOUKHATEM Yamna

Examinateur : RAHMOUNE Abita

Année universitaire 2012-2013

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :
Ma grand – mère.
Mes parents.
Qui porte le nom Benghia ou Atig.
Mes professeurs Messaoudi Hamza et Nbeg Bachir.
Mes amies que j'ai connu dans ma vie.
Toi le lecteur.

Remerciement

Je tien *à* adresser mes remerciements les plus vifs *à*
DIEU, tout puissant pour ce qu'il nous donne comme volonté santé ; et surtout patience.

Mes premiers et profonds remerciements vont *à* mes chers parents.

Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire d'Informatique et de Mathématiques (LIM) *à* l'université de Laghouat sous la direction de Monsieur BENABDERRAHMANE Benyattou, Professeur *à* l'université de M'sila.

Mes remerciements s'adressent a Monsieur NOUIRI Brahim ; Co-encadreur et chef d'équipe de Mathématiques Appliquées d'avoir disponibilité tous les moyens de laboratoire durant la période de la préparation de ce mémoire.

Je remercie les membres du Jury pour leurs acceptations d'examiner ce mémoire.

Aussi, je remercie tout mes collègues et aux qui m'ont aidé de près ou de loin en vue de réaliser ce mémoire.

Table des matières

Introduction générale

Ce travail concerne essentiellement l'étude d'un problème aux limites avec conditions aux limites de Dirichlet gouverné par des équations aux dérivées partielles elliptiques. En se basant sur la formulation de ce problème considéré sous forme d'un problème d'optimisation sans contraintes, quelques résultats d'analyse convexe nous permettent d'analyser la question d'existence d'une solution faible. En suite, nous étudierons l'unicité, la régularité, ainsi que la stabilité de la solution. Le but de ce mémoire est de résoudre l'équation $-\Delta u = f \ sur \ \Omega$, pour y parvenir, nous commencerons par faire des rappels sur l'analyse fonctionnelle et l'analyse convexe, en démontrant deux théorèmes importants d'existence d'un minimum d'une fonctionnelle J sous certaines hypothèses sur J et l'espace en question.

Le deuxième chapitre sera consacré à l'étude des espaces de Lebesgue et leurs propriétés fondamentales afin de pouvoir introduire dans un troisième chapitre une définition importante en mathématique « la notion d'espace de Sobolev » , en donnant leurs propriétés qui sont des conséquences des propriétés des espaces de Lebesgue (grâce aux théorème de densité et l'isomorphisme ...) ensuite nous démontrerons le théorème d'injection de Sobolev et nous terminerons ce chapitre par quelques notions utiles (inégalité du Poincaré, formule de Green, théorème de la trace) dans la formulation variationnelle de Poisson avec condition aux limites de Dirichlet dans un quatrième chapitre « pour quoi une formulation variationnelle ! » , parce que la formulation classique consiste à chercher u suffisamment régulier pour que l'égalités ($-\Delta u = f \ sur \ \Omega$ et $u = 0 \ sur \ \partial\Omega$) aient un sens . Si on suppose que f est continue alors pour que $-\Delta u = f \ sur \ \Omega$ ait un sens on doit avoir $u \in C^2(\Omega)$, et pour que $u = 0 \ sur \ \partial\Omega$ ait un sens on doit avoir $u \in C(\partial\Omega)$, la formule classique est donc de trouver $u \in C^2(\Omega) \cap C(\partial\Omega)$ mais cette vision ne suffit pas pour d'écrire la réalité physique.

Nous terminerons ce modeste travail par donner une conclusion et quelques perspectives.

Chapitre 1

Rappels sur l'analyse fonctionnelle et l'analyse convexe

1.1 Analyse fonctionnelle

1.1.1 Définitions et premières propriétés

Définition (I.1) : Un espace topologique (E, T) est dit séparé si et seulement si

$$\forall x \neq y \; x, y \in E \;\; \exists V_x, \; \exists V_y \; tel \; que \; V_x \cap V_y = \oslash.$$

Théorème (I.1) : Tout espace métrique est un espace séparé.

Démonstration du théorème : En effet, Soit E un espace métrique et soient x et y deux points distincts de E. Alors, si on pose

$$\delta = d(x, y) > 0, V_x = B(x, \frac{\delta}{2}) \; et \; V_y = B(y, \frac{\delta}{2}),$$

alors V_x et V_y sont disjoints, car si $z \in V_x \bigcap V_y$, on aurait

$$\delta = d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

ce qu'est impossible.

Théorème (I.2) : Dans un espace topologique, une partie X de E est dite ouverte si et seulement si elle est voisinage de chacun de ces points.

Démonstration du théorème : Par définition un ouvert est un voisinage de chacun de ces points.

Inversement, si X est un voisinage de chacun de ces points, alors il existe pour tout $x \in X$

un voisinage U_x contenant x et inclu dans X. Alors $X = \bigcup_{x\in X} U_x$ est un ouvert (par définition).

Définition (I.2) : Une famille V de parties d'un espace topologique E est appelée base de voisinage d'un point a si elle est formée de voisinage de a et si tout voisinage de a contient un élement v de V.

Remarque (I.1) : Les boules centrées en a dans un espace métrique forment une base de voisinage de a. On peux définir une topologie T sur un ensemble E en associant à chaque point a de E une famille V_a de partie de E en sorte que V_a soit une base de voisinage de a. Les ouverts pour T seront alors les ensembles U tels que pour tout x de U, il existe un $v \in V_x$ tel que $V \subset U$ c'est-à-dire des ensembles qui sont voisinages de chacun de leurs points. Pour cela on doit avoir les deux conditions suivantes :

1) $\forall a \in E, \quad \forall V \in V_a \quad a \in V.$

2) $\forall a \in E, \ \forall V \in V_a \ , \quad \exists W \in V_a, \quad \forall x \in W, \quad \exists V_1 \in V_x \quad V_1 \subset V.$

1.1.2 Espace de Banach et espace de Hilbert

Définition (I.3) : On appelle norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, toute application qui associe à chaque vecteur $x \in E$ le réel $\|x\|$ vérifiant, pour tout $x, y \in E \ et \ \lambda \in \mathbb{K}$, les axiomes suivants :

a) $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

b) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|.$

c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

On dit alors que $(E, \|.\|)$, ou tout simplement E, est un espace vectoriel normé et sera noté :"e.v.n".

Définition (I.4) : Étant donné l'espace normé $(E, \|.\|)$, on définit une distance d sur E par :

$$\forall x, y \in E, \ d(x, y) = \|x - y\|.$$

Un espace vectoriel normé sera muni de la distance et de la topologie associée à la norme.

Exemples : De nombreux espaces fonctionnels sont des espaces normés. Par exemple :

1. Si $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in E = \mathbb{R}^m$ (ou $\mathbb{C}^m$), on définit les trois normes usuelles sur E :

1) $\|x\|_{\infty} = \sup_{1\leq i\leq m} |x_i|$.

2) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$.

3) $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2}$ (La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^m$).

2. l'ensemble $C([a,b])$ des fonctions continues sur $[a,b]$, sur lesquelles on peut définir de nombreuses normes, la plus classique étant la norme dite **norme uniforme** définie par :

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Définition (I.5) : On appelle espace de Banach tout espace normé et complet pour la distance associé a la norme.

Définition (I.6) : Un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est défini par une forme $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie positive, bilinéaire et symétrique.
On note : $\varphi(x,y) = \langle x,y\rangle$.

a) **Bilinéarité :**

$$\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle,\ \ \langle x, y_1 + y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle.$$

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle, \text{ et } \quad \langle x, \mu y\rangle = \mu\langle x, y\rangle, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

b) **Symétrie :** $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$.

c) **Définie-positivité :** $\langle x,x\rangle \geq 0$ et $(\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_E)$.

Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel les propriétés de linéarité et de symétrie sont remplacées par la sesquilinéarité et l'hermicité :

a) **Sesquilinéarité :**

$$\text{Si } \lambda, \mu \in \mathbb{C} : \langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle \text{ et } \langle x, \mu y\rangle = \overline{\mu}\langle x,y\rangle.$$

b) **Hermiticité :** $\overline{\langle x,y\rangle} = \langle y,x\rangle$.

c) **Définie-positivité :** Comme précédemment.

Définition (I.7) : On appelle espace préhilbertien E tout espace vectoriel muni d'une norme associée à un produit scalaire $\langle ., . \rangle$. On notera $(E, \langle ., . \rangle)$ l'espace préhilbertien.
Sa norme $\| \, . \, \|$ (dite norme hilbertienne) est définie par :

$$\text{Pour tout } x \text{ appartenant à } E, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Définition (I.8) : Un espace de Hilbert est un espace **préhilbertien complet**.
Proposition (I.1) :(Identité du parallélogramme)
Pour qu'un espace normé E soit un espace préhilbertien il faut et il suffit que sa norme vérifie l'identité du parallélogramme.

$$\forall x, y \in E, \| \, x \, \|^2 + \| \, y \, \|^2 = \frac{1}{2}(\| \, x + y \, \|^2 + \| \, x - y \, \|^2).$$

1.1.3 Espace réflexif, uniformément convexe et espace séparable

Définition (I.9) : Une forme linéaire continue sur un $\mathbb{K}-$espace vectoriel topologique E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$, continue pour la topologie de E et celle de $\mathbb{K}$. On note E' l'espace vectoriel constitué de ces formes.

$$E' = \{ \quad f \; : \quad X \longrightarrow \mathbb{K} \;\; \textit{linéaire et continue} \quad \}.$$

Lemme de Zorn(I.1) : Tout ensemble ordonné, inductif, non vide admet un élément maximal.
Théorème (I.3) :(de Hahn-Banach)
Soit $p : E \to \mathbb{R}$ une application vérifiant

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall x \in E \;\; et \;\; \forall \lambda > 0, \tag{1.1}$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E. \tag{1.2}$$

Soit d'autre part, $G \subset E$ un sous espace vectoriel et soit $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire
Telle que $\quad g(x) \leq p(x) \quad \forall x \in G,$
Alors il existe une forme linéaire f définie sur E qui prolonge g, ie.

$$g(x) = f(x) \quad \forall x \in G,$$

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E.$$

Démonstration du théorème de Hann Banach : On considère l'ensemble

$$P = \{\ h\ tel\ que\ \ h : D(h) \subset E \to \mathbb{R}\ \ avec\ D(h)\ un\ sous-espace\ vectoriel\ de\ E.$$

$$h\ linéaire,\ G \subset D(h),\ h\ prolonge\ g\ et\ h(x) \leq p(x)\ \ \forall x \in D(h).$$

P est muni de la relation d'ordre :

$$(h_1 \leq h_2) \Leftrightarrow (D(h_1) \in D(h_2)\ \ et\ h_2\ prolonge\ h_1)\,,$$

il est claire que P n'est pas vide puisque $g \in P$. D'autre part, P est inductif.
En effet soit $Q \subset P$ un sous ensemble totalement ordonné ; On note $Q = (h_i)_{i\in I}$. On définit

$$D(h) = \bigcup_{i\in I} D(h_i)\ \ et\ \ h(x) = h_i(x)\quad si\ x \in D(h_i).$$

On vérifie que cette définition a bien un sens, que $h \in P$ et que h est un majorant de Q. Il résulte du lemme de Zorn que P admet un un élement maximal noté f.
Prouvons que $D(f) = E$. Raisonnons par absurde et supposons que $D(f) \neq E$.
Soit $x_0 \notin D(f)$; posons $D(h) = D(f) + \mathbb{R}x_0$ et ultérieurement de manière à ce que $h \in P$. On doit donc s'assurer que

$$f(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0)\qquad \forall x \in D(f),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Grace à (1) il suffit de vérifier que

$$f(x) + \alpha \leq p(x + x_0)\quad \forall x \in D(f),$$

$$f(x) - \alpha \leq p(x - x_0)\quad \forall x \in D(f).$$

Autrement dit, il faut choisit α tel que

$$\sup_{y\in D(f)} \{f(y) - p(y - x_0)\} \leq \alpha \leq \inf_{x\in D(f)} \{p(x + x_0) - f(x)\}\,.$$

Un tel choix est possible puisque

$$f(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - f(x_0)\qquad \forall x \in D(f),\ \forall y \in D(f);$$

En effet on notera que

$$f(x) + f(y) \leq p(x + y) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0),$$

grace a (2),
On conclut que f est majorée par h et que $f \neq h$, ceci contredit la maxima-lité de f.
Théorème (I.4) : (Hahn Banach forme géométrique) Soit E, un espace espace vectoriel topologique localement convexe ; A et B deux convexes non vides disjoints de E, A étant compact et B étant fermé, alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.

1.1.3.1 Espace réflexif

Définition (I.10) : Soit E un espace de Banach et soit j l'injection continué de E dans E''. On dit que E est réflexif si :

$$j(E) = E''.$$

Proposition (I.2) : Soit E un espace de Banach réflexif et soit $M \subset E$ un sous espace vectoriel fermé. Alors M muni de la norme induite par E est réflexif.
Théorème (I.5) Soit E un espace de Banach .
Alors E est réflexif si seulement si E' est réflexif.

1.1.3.2 Espace uniformément convexe

Définition (I.11) : On dit qu'un espace de Banach E est uniformément convexe si $\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0$ tel que :

$$x, y \in E, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \ \ et \ \ \|x - y\| > \epsilon \implies \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta.$$

Théorème de Helly (I.6) Soient $f_i, \ 1 \leq i \leq n$ des formes linéaires sur E, Soit $\gamma > 0$, et α_i n nombres complexes.
Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe, pour tout $\epsilon > 0$, un élément $x_\epsilon \in E$ tel que, pour tout $i \in [1, n]$:

$$f_i(x_\epsilon) = \alpha_i, \ avec \ \|x_\epsilon\|_E \leq \alpha + \epsilon,$$

et que, quel que soit le $n-uplet$ $(\beta_i) \in \mathbb{R}^n$, on ait

$$\left| \sum_{1\leq i\leq n} \beta_i \alpha_i \right| \leq \gamma \left\| \sum_{1\leq i\leq n} \beta_i f_i \right\|_{E'} .$$

1.1.3.3 Espace séparable

Définition (I.12) : On dit qu'un espace métrique est séparable s'il existe un sous ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense.

Théorème (I.7) : Soit E un espace métrique séparable et soit F un sous ensemble de E. Alors F est séparable.

Démonstration : Soit (u_n) une suite dénombrable dense dans E.

Soit (r_m) une suite de réel positifs avec $r_m \to 0$.

On choisit (arbitrairement) $a_{m,n} \in B(u_n, u_m) \cap F$ lorsque cet ensemble non vide. Il est clair que la suite $(a_{m,n})$ constitue un ensemble dénombrable dense dans F.

Corolaire (I.1) : Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe et F un sous espace vectoriel de E, Si $\bar{F} = E$ il existe $f \in E'/\{0\}$ telle que $f \equiv 0$ sur F.

Démonstration du corolaire (I.1) :

Si $x \in E$ et $x \notin \bar{F}$, le théorème de Hahn Banach (forme géométrique) appliqué à $\{x\}$ et $\bar{F}$ fournit l'existence d'un $f \in E'/\{0\}$ et d'un $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) < \alpha \leq f(y)$, pour tout $y \in F$ ceci implique que $f \equiv 0$ sur F.

Proposition (I.3) : Soit E un espace de Banach tel que E' soit séparable alors E est séparable.

Démonstration : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E'$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $x_n \in E$ tel que $\|x_n\| = 1$ et

$$f_n(x_n) \geq \frac{1}{2} \|f_n\| .$$

Soit F l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Q}$ de $\{\ x_n,\ n \in \mathbb{N}\ \}$.

Notons que F est dénombrable, montrons maintenant que F est dense dans E.

Pour cela, comme F est dense dans $G := vect\{\ x_n,\ n \in \mathbb{N}\ \}$ il suffit de montrer que G est dense dans E.

D'après le corolaire (I.1) il suffit de montrer que si $f \in E'$ vérifie $f(x) = 0$ pour tout $x \in G$ alors $f \equiv 0$. Soit donc f vérifiant la propriété précédente $\epsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - f_n\| \leq \frac{\epsilon}{3}$, on a alors

$$\|f\| \leq \frac{\epsilon}{3} + \|f_n\| \leq \frac{\epsilon}{3} + 2f_n(x_n) = \frac{\epsilon}{3} + 2(f_n - f)(x_n) \leq \frac{\epsilon}{3} + 2\|f_n - f\| ,$$

comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit bien que $f \equiv 0$.
Remarque (I.2) : Pour montrer qu'un sous espace vectoriel F est dense dans E il suffit que toute forme linéaire continué sur E nulle sur F est identiquement nulle sur E.

1.1.4 Convergence faible et convergence faible étoile

Définition(I.13) : Soit E un $e.v.n$,
Une suite $(u_n)_n \in E$ converge au sens de la topologie faible vers u dans E si :

$$\forall f \in E' \quad \langle f, u_n - u \rangle \to 0.$$

Une suite $(f_n)_n \in E'$ converge au sens de la topologie faible étoile vers f dans E' si :

$$\forall x \in E' \quad \langle f_n - f,\ x \rangle \to 0.$$

1.2 Quelques résultats sur l'analyse convexe

1.2.1 Ensemble convexe

Définition(I.14) : Soit C un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$, on dit que l'ensemble C est convexe si :

$$\forall (x, y) \in \ C^2\ , \quad \forall \lambda \in]0,1[\ , \lambda x + (1-\lambda) y \in C,$$

c'est a dire que si x et y sont deux éléments de C, alors le segment qui relie x à y est inclus dans C.
Stabilité de la convexité

1. Si C_1 et C_2 sont convexes de $\mathbb{R}^n$, il en est de même $C_1 + C_2$;
2. Si C_1 est un convexe de $\mathbb{R}^p$ et C_2 convexe de $\mathbb{R}^q$, alors $C_1 \times C_2$ est convexe de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$,
3. Si $(c_i)_{i\in I}$ est une collection de convexes, alors $\bigcap_{i\in I} C_i$ est encore convexe.

1.2.2 Fonction convexe

On rappelle que l'épigraphe de J est la partie de l'espace produit $E \times \mathbb{R}$ qui est au dessus de son graphe

$$epiJ = \{(x, \alpha) \in E \times \mathbb{R} : J(x) \leq \alpha\}\ .$$

quant à l'épigraphe stricte, il est obtenu en prenant l'inegalité stricte ci-dessus. On le note

$$epi_s J = \{(x, \alpha) \in E \times \mathbb{R} : J(x) < \alpha\} \ .$$

Définition(I.15) : On dit que une fonction $J : E \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est convexe si son épigraphe (ou épigraphe stricte) est convexe dans $E \times \mathbb{R}$.
On dit que J est concave si $-J$ est convexe.
Remarque (I.3) : Le domaine d'une fonction convexe doit être convexe.
Proposition (I.4) : Une fonction $J : E \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est convexe si et seulement si : $\forall x, y \in domJ$ et $\forall t \in]0, 1[$ on a

$$J((1-t)x + ty) \leq (1-t)J(x) + tJ(y).$$

Démonstration : Supposons que f soit convexe ,
Soient $x, y \in domf \ tel \ que \ t \in]0, 1[$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \ tel \ que \ \alpha > f(x), \beta > f(y)$. Comme (x, α) et (y, β) sont dans l'épigraphe de J qui est convexe, il en est de même

$$(1-t)(x, \alpha) + t(y, \beta) = ((1-t)x + ty, (1-t)\alpha + t\beta).$$

Ce qui ce traduit par

$$J((1-t)x + ty) \leq (1-t)\alpha + t\beta.$$

Comme $\alpha > f(x)$, $\beta > f(y)$ sont arbitraires on obtient

$$J((1-t)x + ty) \leq (1-t)J(x) + tJ(y).$$

Supposons que J vérifie

$$J((1-t)x + ty) \leq (1-t)J(x) + tJ(y),$$

pour tout $x, y \in domJ$ et $\forall t \in]0, 1[$

$$J((1-t)x - ty) \leq (1-t)\alpha + t\beta,$$

donc

$$(1-t)(x, \alpha) + t(y, \beta) = ((1-t)x + ty, (1-t)\alpha + t\beta) \in epiJ \ \ ;$$

C'est bien que $epiJ$ est convexe.
Définition (I.16) : On dit que $J : E \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est strictement convexe si et seulement si pour

tout $x, y \in domJ$ avec $x \neq y$ et pour tout $t \in]0,1[$ on a

$$J((1-t)x+ty) < (1-t)J(x)+tJ(y).$$

Définition (I.17) : On dit qu'une fonction J définie sur un ensemble K convexe, est fortement convexe si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$J(\frac{u+v}{2}) \leq \frac{J(v)+J(u)}{2} - \frac{\alpha}{8}\|u-v\|^{\,2}.$$

On dit aussi dans ce cas que J est $\alpha-$convexe.
Remarque (I.4) : Dans la définition (I.17), la forte convexité de J n'est restée que pour des combinaisons convexes de points $t = \frac{1}{2}$. Cela n'est pas une restriction pour les fonctions continues comme le montre la propriété suivante :
Si J est continue et $\alpha-$convexe, alors pour tout $\theta \in [0,1]$, on a :

$$J(\theta u+(1-\theta)v) \leq \theta J(u)+(1-\theta)J(v) - \frac{\alpha\theta(1-\theta)}{2}\|u-v\|^2.$$

Définition (I.18) : Soit J définie sur E, à valeur dans $\bar{\mathbb{R}}$ elle est dite semi-continue inférieurement $(s.c.i)$ en x si $\forall(x_n)$ tel que x_n converge vers x on a :

$$J(x) \leq \lim_{n\to+\infty} J(x_n).$$

Cette propriété peut s'exprimer sous la forme équivalente

$$\forall\lambda \in \mathbb{R} \;\; \lambda < J(x) \Rightarrow \{y : \; J(y) > \lambda\} \;\; \textit{est un ouvert contenant } x.$$

On dit que J définie sur E est $(s.c.i)$ sur E si elle est $(s.c.i)$ en tout point de E.
Proposition (I.6) : La fonction J est $s.c.i$ sur E si et seulement si son épigraphe défini par :

$$\{(x,y) \in E \times \mathbb{R} \; y \geq J(x)\} \;\; est\ fermé\ .$$

Définition (I.19) : Une fonctionnelle J de E dans $\bar{\mathbb{R}}$ est dite propre si elle n'est pas identiquement égale à $+\infty$ et ne prend pas la valeur $-\infty$.

1.2.3 Sous différentiel et Gâteaux différentiel

Le sous-différentiel est un substitut de la notion de gradient pour les fonctions convexes non différentiables . Ce n'est plus un vecteur de E comme le gradient, mais un sous-ensemble de E qui n'est réduit à un point qu'en cas de Gâteaux différentiabilité.
E désigne un espace de Banach, et E' son dual topologique.
Définition (I.20) : On appelle sous différentiel de J en E le sous ensemble de E'

$$\partial J(x) = \{ \ \alpha \in E' \ tel \ que \ \forall y \in dom(J), \ \langle \alpha, \ y - x \rangle \leq J(y) - J(x) \ \}.$$

Si J est convexe, $\partial J(x)$ est un convexe de E', ce sous ensemble peut $\hat{e}$tre vide
Si J est différentiable au sens (de Fréchet) de dérivée notée $DJ(x)$ en x $\partial J(x) = \{DJ(x)\}$;
On dit qu'une fonction J est sous différentiable si son sous différentiel est non vide.

Définition (I.21) : Une fonctionnelle J convexe sur E, est dite Gâteaux-différentiel en u élément de E si pour tout $w \in E$, $w \longrightarrow J(u, w)$ est un élément de X' qui est alors noté $J'(u)$. Ainsi pour tout $v \in X$, on a :

$$\begin{aligned} J'(u, v - u) = \langle J'(u), \ v - u \rangle &= \lim_{t \to 0, \ t > 0} \frac{J((1 - t)u + tv) - J(u)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0, \ t > 0} \frac{J(u + t(v - u)) - J(u)}{t}. \end{aligned}$$

1.2.4 Résultat d'existence et d'unicité d'un optimum

Théorème (I.8) : Si J est une fonction convexe sur un ensemble convexe K, alors tout point de minimum local de J sur $\mathbb{K}$ est un minimum global et l'ensemble des points de minimum est un ensemble convexe.
Si J est une fonction strictement convexe, alors il existe au plus un point de minimum.

Démonstration : Soit u un minimum local de J sur $\mathbb{K}$. Puisque u est un minimum local de J dans K, nous pouvons écrire

$$\exists \delta > 0, \ \forall w \in \mathbb{K}; \|w - u\| < \delta \Rightarrow J(w) \geq J(u).$$

Soit $v \in K$. Pour $\theta \in]0, 1[$ suffisamment petit, $w_\theta = \theta v + (1 - \theta)u$ vérifier $\|w_\theta - u\| < \delta$ et $w_\theta \in \mathbb{K}$ puisque $\mathbb{K}$ est convexe. Donc, $J(w_\theta) \geq J(u)$ d'aprés (9.10), et la convexité de J

implique que

$$J(u) \leq J(w_\theta) \leq \theta J(v) + (1-\theta)J(u),$$

ce qui montre bien que

$$J(u) \leq J(v),$$

c'est-*à*-dire que u est un minimum global sur K.
D'autre part, si u_1 et u_2 sont deux minimas et si $\theta \in [0,1]$, alors $w = \theta u_1 + (1-\theta)u_2$ est un minimum puisque $w \in K$ et que

$$\inf_{v \in K} J(v) \leq J(w) \leq \theta J(u_1) + (1-\theta)J(u_2) = \inf_{v \in K} j(v)$$

Le même raisonnement avec $\theta \in]0,1[$ montre que, si J est strictement convexe, alors nécessairement $u_1 = u_2$.

1.2.4.1 Existence d'un minimum cas d'une fonction convexe

Définition(I.22) : Une fonctionnelle J définie sur un espace de Banach séparable X est dite coercive si : $\lim_{\|x\|_X \to +\infty} J(x) = +\infty$.
Proposition (I.5) : S'il existe une solution $u \in X$ au problème $\inf_{u \in X} J(u)$ et si J Gâteaux-différentiable en ce point u alors $\partial J(u) = \{J'(u)\}$ est réduit en 0.
Si J est convexe et Gâteaux-différentiable en u avec $J'(u) = 0$ alors u est un minimum pour J.
Théorème (I.9) Soit X un espace de Banach séparable et réflexif, U un convexe fermé de X et J une fonctionnelle convexe propre coercive et *s.c.i.* Alors il existe au moins une solution au problème $\inf J(u)$.
Démonstration : Montrons que l'infimum est fini. Sinon, il vaut $-\infty$ et il existe alors $\{u_n\} \in U$, telle que $J(u_n) \to -\infty$. Si $\{u_n\}$ était bornée, alors on peut extraire une sous$-$suite (u_{n_k}) tel que

$$u_{n_k} \longrightarrow u \ faiblement\ ,$$

comme J est *s.c.i.*, alors

$$J(u) = -\infty,$$

ce qui est absurde.
Donc (u_n) est non bornée. Il existe donc une sous-suite $\|u_{\sigma(n)}\|_X \to +\infty$ et en utilisant la coercivité de J, $J(u_{\sigma(n)}) \to +\infty$. Ce qui constitue une contradiction.

Finalement

$$m = \inf_{u \in U} J(u) > -\infty.$$

Soit (u_n) une suite minimisante du problème. Alors, $J(u_n) \to m$ et en particulier u_n est bornée (sinon il existerait une sous$-$suite de (u_n), notée $u_{\sigma(n)}$ qui tendrait vers l'infini, et donc telle que $J(u_{\sigma(n)}) \to \infty$).
Puisque X est réflexif, et que u est faiblement séquentiellement fermé, on peut extraire de (u_n) une sous-suite qui converge faiblement vers u dans U. Puisque J est convexe et *s.c.i*, elle est aussi faiblement *s.c.i.*, d'o*ù* :

$$J(u) \leq \liminf_{n \to \infty} J(u_n) = m,$$

ce qui prouve que u est une solution. Le reste du théorème résulte des définitions de la dérivée directionnelle et du sous-différentiel.

1.2.4.2 Existence d'un minimum cas fortement convexe

Lemme (I.2) : (de séparation d'un point et d'un convexe)
Soit k une partie convexe non vide et fermée d'un espace de Hilbert V, et $x_0 \notin K$. Alors il existe un hyperplan fermé de V qui sépare strictement x_0 et K, c'est$-$à$-$dire qu'il existe une forme linéaire $L \in V'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$L(x_0) < \alpha < L(x) \quad \forall x \in K.$$

Proposition (I.6) : Si J est convexe continue sur un ensemble K convexe non vide, alors il existe une forme linéaire continue $L \in V'$ et une constante $\delta \in \mathbb{R}$ telles que

$$J(u) \geq L(v) + \delta \ \ \forall v \in K. \tag{1.3}$$

Si de plus J est fortement convexe sur $\mathbb{K}$ alors il existe deux constantes : $\gamma > 0$ et $\delta \in \mathbb{R}$ telles que

$$J(u) \geq \gamma \left\| u \right\|^2 - \delta \ \ \forall v \in K. \tag{1.4}$$

Démonstration : Prouvons d'abord (I.3).
Si J est convexe continue (ou simplement semi-continue inférieurement) sur un ensemble K convexe fermé non vide, alors son épigraphe $Epi(J)$ est convexe fermé non vide.
Soit $v_0 \in K$ et $\lambda_0 < J(v_0)$.
Puisque $(\lambda_0, v_0) \notin Epi(J)$, nous déduisons du lemme (I.2) de séparation d'un point et d'un

convexe l'existence de $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ et d'une forme linéaire continue $L \in V'$ tels que

$$\beta\lambda + L(v) > \alpha > \beta\lambda_0 + L(v_0) \quad \forall(\lambda, v) \in Epi(J). \tag{1.5}$$

Comme, pour v fixé, on peut prendre λ arbitrairement grand dans le membre de gauche (I.5), il est clair que $\beta \geq 0$; de plus, comme on peut prendre $v = v_0$ dans le membre de gauche de (I.5), β ne peut être nul. On a donc $\beta > 0$, et on déduit de (I.5) que

$$J(v) + \frac{L(v)}{\beta} > \frac{\alpha}{\beta} \quad \textit{pour tout } v \in k,$$

ce qui prouve (I.3) .
Prouvons maintenant (I.4).
Soit encore $v_0 \in K$ fixé.
Pour tout $v \in K$, la définition (I.17) et (I.3) impliquent que

$$\frac{J(v)}{2} + \frac{J(v_0)}{2} \geq J(\frac{v+v_0}{2}) + \frac{\alpha}{8}\|v - v_0\|^2 \geq \frac{L(v) + L(v_0)}{2} + \frac{\alpha}{8}\|v - v_0\|^2 + \delta.$$

On ne déduit

$$J(v) \geq \frac{\alpha}{4}\|v\|^2 - \frac{\alpha}{2}\langle v, v_0\rangle + L(v) + C_1,$$

avec $C_1 = (\frac{\alpha}{4})\|v_0\|^2 + L(v_0) - J(v_0) + 2\delta$.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée *à* $\langle v, v_0\rangle$ et la continuité de L,

$$|L(v)| \leq \|L\|_{V'}\,\|v\| \quad \textit{il vient}$$

$$J(v) \geq \frac{\alpha}{4}\|v\|^2 - (\|L\|_{V'} + \frac{\alpha\|v_0\|}{2})\|v\| + C_1 \geq \frac{\alpha}{2}\|v\|^2 - C,$$

pour $C \in \mathbb{R}$.
Théorème (I.10) Soit K un convexe fermé non vide d'un Hilbert V et J une fonction $\alpha-$ *convexe* continue sur K. Alors, il existe un unique minimum u de J sur K et on a :

$$\|v - u\|^2 \leq \frac{4}{\alpha}[J(v) - J(u)] \quad \forall v \in K.$$

En particulier, toute suite minimisante de J sur K converge vers u.
Démonstration : Soit (u_n) une suite minimisante de J sur K. d'après la proposition précédente

, J est minorée sur K et, pour $n, m \in \mathbb{N}$ la définition (I,17) de forte convexité entraine que

$$\frac{\alpha}{8}\left\|u_n+u_m\right\|^2+J(\frac{u_n+u_m}{2})-\inf_{v\in K}J(v)\leq\frac{1}{2}(J(u_n)-\inf_{v\in K}J(v))$$

$$+\frac{1}{2}(J(u_m)-\inf_{v\in K}J(v)),$$

Ce qui montre que la suite (u_n) est de Cauchy, et donc converge vers une limite u, qui est nécessairement un minimum de J sur K puisque J est continue et K fermé .
L'unicité du point du minimum a été montrée dans le théorème (I.8) .
Enfin, si $v \in K$, $\frac{(u+v)}{2} \in K$ car k est convexe, d'o$\grave{u}$, toujours gr$\hat{a}$ce à la définition (I.17).

$$\frac{\alpha}{8}\left\|u-v\right\|^2\leq\frac{J(u)}{2}+\frac{J(v)}{2}-J(\frac{u+v}{2})$$

$$\leq\frac{J(v)J(u)}{2},\quad car\ J(\frac{u+v}{2})\geq J(u).$$

Chapitre 2

Espaces de Lebesgue et leurs propriétés

2.1 Définition et propriétés élémentaires

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx, et

$$F = \{ \ f : \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \ f \ \textit{mesurable et intégrable} \ \}.$$

l'application

$$N \ : \ F \longrightarrow \mathbb{R}^+,$$

$$f \longrightarrow \|f\| = \int_\Omega |f(x)| \, dx$$

est une semi$-$norme mais n'est pas une norme, en effet

$$f \in F \ et \ N(f) = 0 \ \Leftrightarrow \ f(x) = 0 \quad p.p. \ \ en \ x \in \Omega.$$

Donc $N(f) = 0$ n'implique pas que $f = 0$ partout sur Ω.
On définit la relation d'équivalence sur F par :

$$f, g \in F \quad f \approx g \ \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x) \ \ p.p.$$

Posons $F/\approx$ l'ensemble des classes d'équivalence.
On note par

$$L^1 = \left\{ \ \dot{f}, \ tel \ que \ f \in F \ \right\}.$$

Pour toute la suite, on note un élément de L^1 par f au lieu de $\dot{f}$.
Soit $\varphi \in L^1$, la quantité $\int f dx$ est la même pour tout représentant de φ $(\varphi = \dot{f})$, enfin on pose $N'(\varphi) =^{def} \int |\varphi| \, dx = \int |f| \, dx$ définissant ainsi une norme puisque $f = 0 \ \ p.p. \Leftrightarrow \dot{f} = 0_{L^1}$

l'espace L^1 muni de la norme
$$\left\|\dot{f}\right\| = \int_E |f(x)|\, dx.$$
est un espace vectoriel normé.

Définition (II.1) : les espaces L^p $1 < p < \infty$ sont définis comme suit

$$L^p(\Omega) = \left\{ \ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \ f \ mesurable \ et \ |f|^p \in L^1 \ \right\},$$

que l'on muni de la norme
$$\|f\|_p = [\int_\Omega |f(x)|^p\, dx]^{\frac{1}{p}}.$$
Lorsque $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) = \{ \ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \ f \ mesurable \ et \ |f| < c \ p.p. \ \},$$

dont la norme est définie par :

$$\|f\|_\infty = \inf \{ \ \ c \ : \ |f(x)| \leq c \quad p.p. \ \}.$$

Théorème (II.1) :(Inégalité de Hölder)
Soient $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$, tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, alors $fg \in L^1$ et

$$\int |f.g| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Pour $p = 2$ on trouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Démonstration : La conclusion est évidente si $p = 1$ ou $p = \infty$ supposons donc $1 < p < \infty$.
Par concavité de log on a pour a et b strictement positifs

$$\log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}\right) \geq \log(ab),$$

et donc
$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'},$$
cette inégalité est évidente pour $a = 0$ ou $b = 0$.

On a donc (en supposant f et g non nulles, ce qui est le cas où l'inégalité de Hölder n'est pas triviale) :

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}} \leq \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_{L^p}^p} + \frac{1}{p'}\frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{L^{p'}}^{p'}},$$

on en déduit que $fg \in L^1$ et on obtient en intégrant l'inégalité précédente :

$$\int_\Omega \frac{|fg|}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}} \leq 1.$$

Théorème (II.2) : Soit $p \in [1,\ \infty]$, $L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel normé.

Démonstration : A nouveau, la conclusion est évidente si $p = 1$ ou $p = \infty$ supposons donc $1 < p < \infty$.

Soit donc f et g dans L^p on a par convexité de $t \mapsto t^p$:

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2^{p-1}\left(|f(x)|^p + |g(x)|^p\right),$$

de sorte que $f + g \in L^p$. Pour montrer que $\|.\|_{L^p}$ est une norme sur L^P, il nous suffit de montrer l'inégalité triangulaire. Soit f et g dans L^p, on a

$$\|f+g\|_{L^p}^p = \int |f+g|^{p-1}|f+g| \leq \int |f+g|^{p-1}|f| \int |f+g|^{p-1}|g|,$$

et comme $|f+g|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}} = L^{P'}$, il résulte de l'inégalité de Hölder que

$$\|f+g\|_{L^p}^p \leq (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p})\left(\int |f+g|^p\right)^{\frac{(p-1)}{p}}$$

$$= (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p})\|f+g\|_{L^p}^{p-1},$$

de sorte que l'on a bien

$$\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Théorème (II.3) :(Théorème de convergence monotone de Beppo Levi)

Soit (f_n) une suite croissante de fonctions de L^1 telle que $\sup_n \int f_n < \infty$.

Alors $f_n(x)$ converge *p.p.* sur Ω vers une limite finie notée $f(x)$, de plus

$$f \in L^1 \ et \ \|f_n - f\|_{L^1} \to 0.$$

Théorème (II.4) :(de la convergence dominée de Lebesgue)
On suppose que $p \neq \infty$. Soit (f_n) une suite de fonctions mesurable telle que

a) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *p.p. sur* Ω,

b) il existe une fonction $g \in L^p$ telle que pour chaque n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ *p.p. sur* Ω.

Alors $f \in L^p(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^p} \longrightarrow 0$.

Théorème (II.5) : l' espace L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Démonstration :
1) Supposons d'abord que $p = \infty$. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^∞.
Étant donné un entier $k \geq 1$ il existe N_k tel que :

$$\|f_m(x) - f_n(x)\| \leq \frac{1}{k} \quad pour \quad m, n \geq N_k.$$

Donc il existe E_k négligeable tel que

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \ \ \forall x \in \Omega/E_k, \ m, n \geq N_k$$

Enfin, posant $E = \bigcup_k E_k$ (E est négligeable), on voit que pour tout $x \in \Omega \ /E$ la suite $f_n(x)$ est de Cauchy (dans $\mathbb{R}$). Soit $f_n(x) \to f(x)$ pour $x \in \Omega/E$.
Passant à la limite quand $m \to \infty$ on obtient

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega/E, \ \forall n \geq N_k.$$

Donc $f \in L^\infty$ et

$$\|f - f_n\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{k} \quad \forall n \geq N_k.$$

Par conséquent $\|f - f_n\|_{L^\infty} \to 0$.
2) Supposons maintenant que $1 \leq p < \infty$.
Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^p. Pour conclure il suffit de montrer qu'une sous−suite extraite converge dans L^p.
On extrait une sous−suite (f_{n_k}) telle que

$$\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_{L^P} \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq 1.$$

On procède comme suit : il existe n_1 tel que $\|f_m - f_n\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k}$ pour $m, n \geq n_2$, etc..
On va montrer que f_{n_k} converge dans L^p. Pour simplifier les notations on écrit f_k au lieu de

f_{n_k}, de sorte que l'on a

$$\|f_{k+1} - f_k\|_{L^P} \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq 1.$$

Posons

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \|f_{k+1} - f_k\|,$$

il vient

$$\|g_n\|^p \leq 1.$$

On déduit du théorème de convergence monotone que *p.p.* sur Ω, $g_n(x)$ converge vers une limite finie notée $g(x)$ avec $g \in L^p$.
D'autre part, on a pour $m \geq n \geq 2$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + ... |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x).$$

Il en résulte que *p.p.* sur Ω, $(f_n(x))$ est de Cauchy et converge vers une limite notée $f(x)$. On a *p.p.* sur Ω

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x) \quad pour \quad n \geq 2.$$

Il en résulte que $f \in L^p$.
Enfin $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$; en effet on a $|f_n(x) - f(x)|^p \to 0$ *p.p.* et $|f_n(x) - f(x)|^p \leq g^p(x)$ majorante intégrable. On conclut grâce au théorème de Lebesgue.

Remarques (II.1) : Si $p = 2$, nous avons à faire à un espace de Hilbert car la norme provient d'un produit scalaire La fonction

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int f.gdx$$

a effectivement toutes les propriétés requises d'un produit scalaire sur un espace vectoriel réel.

Définition (II.2) : On appelle suite régularisante, toute suite $(p_n)_{n\geq 1}$ des fonctions telles que

$$p_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}),\ Supp\ p_n \subset B(0,1),\ \int p_n = 1,\ p_n \geq 0\ sur\ \mathbb{R}.$$

Corollaire (II.1) : Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors

$$p_n * f \to f \quad dans \quad L^p(\mathbb{R}^N).$$

Théorème (II.6) : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert quelconque. Alors pour tout $1 \leq p < \infty$ l'espace $C_c^\infty(\Omega)$, o*ù* $C_c^\infty(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions C^∞ à support compact, est dense dans l'espace normé L^p.

Démonstration : Soient $f \in L^p(\Omega),\ \epsilon > 0$ et $f_1 \in C_c(\Omega)$ tels que

$$\|f - f_1\|_{L^p(\Omega)} < \epsilon.$$

On considère la fonction $\bar{f}_1$ définie par

$$\bar{f}_1(x) = \begin{cases} f_1(x) & si \quad x \in \Omega \\ 0 \quad si & x \in \mathbb{R}^N \,|\Omega \end{cases}$$

de sorte que $\bar{f}_1 \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et(corolaire (II.1))

$$\left\|p_n * \bar{f}_1 - \bar{f}_1\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to 0.$$

D'autre part

$$Supp(p_n * \bar{f}_1) \subset B(0, \frac{1}{n}) + Supp\, f_1 \ \subset \Omega \ pour\ n\ assez\ grand.$$

Soit $u_n = (p_n * \bar{f}_1)$. Alors, pour n assez grand, $u_n \in C_c(\Omega)$ et de plus $\|u_n - f_1\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. Donc, pour n assez grand, $\|u_n - f\|_{L^p(\Omega)} < 2\epsilon$.

Proposition (II.1) : (Inégalité d'inclusion) Si $m(\Omega) < \infty$ alors :

$$1 \leq p \leq q < +\infty \Rightarrow L^q \subset f \in L^p, \ \ de\ plus\ les\ injections\ canonique\ sont\ continues.$$

Démonstration : Si $q = +\infty$ et $1 \leq p < \infty$, on a

$$\int |f|^p\, dx \leq \|f\|_\infty^p\, m(\Omega) < \infty,$$

donc $f \in L^p$ et

$$\|f\|_p \leq m(\Omega)^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty .$$

Supposons maintenant $q < +\infty$ et soit p tel que $1 \leq p \leq q$. Si $f \in L^q$ alors $|f|^p \in L^{\frac{q}{p}}$.
on appliquant l'inégalité de Hölder aux fonctions $|f|^p$ et 1 avec les exposants conjugués

$$\alpha = \frac{q}{p} \text{ et } \beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1} = \left(1 - \frac{p}{q}\right)^{-1} \text{ on obtient :}$$

$$\int |f|^p \leq \left(\int |f|^q\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int 1\right)^{1-\frac{p}{q}} = \|f\|_q^p \, m(E)^{1-\frac{p}{q}} < \infty,$$

donc $f \in L^p$ et $\|f\|_p \leq m(\Omega)^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_q$, cette dernière inégalité prouve la continuité de l'injection canonique $i : \ L^q \hookrightarrow L^p$.

2.2 Étude des espaces de Lebesgue

2.2.1 la convexité uniforme dans les espaces de Lebesgue

Lemme (II.1) :(Inégalité de Clarkson)
Soit p tel que $2 \leq p < \infty$, pour tout f et g dans L^p on a :

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2}(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p).$$

Démonstration :
On commence par remarquer que $t \mapsto (t^2+1)^{\frac{p}{2}-t^p-1}$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et donc

$$(t^p + 1) \leq (t^2+1)^{\frac{p}{2}} \quad \forall t \geq 0,$$

(en remplaçant t par $\frac{t}{s}$ dans l'inégalité précédente) il en résulte que

$$t^p + s^p \leq (t^2 + s^2)^{\frac{p}{2}} \quad \forall t \geq 0 \quad \forall s \geq 0,$$

et donc pour tout $(f, g) \in \mathbb{R}^2$:

$$\left|\frac{f+g}{2}\right|^p + \left|\frac{f-g}{2}\right|^p \leq \left(\frac{f^2}{2} + \frac{g^2}{2}\right)^{\frac{p}{2}}.$$

En utilisant la convexité de $t \mapsto t^{\frac{p}{2}}$ pour $p \geq 2$, il vient donc

$$\left|\frac{f+g}{2}\right|^p + \left|\frac{f-g}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}\left|f\right|^p + \frac{1}{2}\left|g\right|^p.$$

et l'inégalité recherchée en découle immédiatement.

Notons que $p=2$ est un cas limite dans lequel l'inégalité de Clarkson est une égalité (c'est l'identité du parallélogramme).

Proposition (II.2) ; (Inégalité de Jensen) Si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ alors $f \in L^r(\Omega)$ quelque soit $r \in [p,q]$ et

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{\alpha} \|g\|_{L^q}^{1-\alpha} \quad avec$$
$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \; pour\ un\ certain\ 0 \leq \alpha \leq 1$$

Proposition (II.3) : l'espace L^p est uniformément convexe pour tous $2 < p < \infty$.

Démonstration :

soit $\epsilon > 0$, f et g dans L^p avec $\|f\|_{L^p} \leq 1$, $\|g\|_{L^p} \leq 1$ et $\|f-g\|_{L^p} \geq \epsilon$, il resulte du lemme précédent que

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^2} \leq 1-\delta,\ avec\ \delta := 1 - \left(1 - \frac{\epsilon^p}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ce qui prouve que L^p est uniformément convexe.

Lemme (II.2) : (Inégalité de Hanner)

Soit $2 < p \leq 2$, pour tout f et g dans L^p, on a :

$$(\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p})^p + |\|f\|_{L^p} - \|g\|_{L^P}|^p \leq \|f+g\|_{L^p}^p + \|f-g\|_{L^p}^p.$$

Démonstration : On commence par remarquer que la fonction

$$F:\ (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mapsto F(x,y) = \left(x^{\frac{1}{p}} + y^{\frac{1}{p}}\right)^p + \left|x^{\frac{1}{p}} - y^{\frac{1}{p}}\right|^p$$

est convexe par l'inégalité de Jensen :

$$F\left(\int |f|^p,\ \int |g|^p\right) \leq \int F\left(|f|^p,\ |g|^p\right),$$

c'est à dire :

$$(\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p})^p + |\|f\|_{L^p} - \|g\|_{L^p}|^p \leq \int (|f|+|g|)^p + \int ||f|-|g||^p,$$

on conclut en remarquant (en distinguant le cas o$\grave{u}$ f et g ont même signe de celui o$\grave{u}$ f et g sont de signes opposés) que l'on a

$$(|f|+|g|)^p + ||f|-|g||^p = |f+g|^p + |f-g|^p .$$

Proposition(II.4) : L'espace L^p est uniformément convexe pour $1 < p \leq 2$.
Démonstration : Soit $\epsilon > 0$, f et g dans L^p avec $\|f\|_{L^p} \leq 1$, $\|g\| \leq 1$ et $\|f-g\|_{L^p} \geq \epsilon$. Appliquant l'inégalité de Hanner à$(f+g)/2$ et $(f-g)/2$, il vient

$$\left(\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p} + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{L^p}\right)^p + \left|\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p} - \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{L^p}\right|^P \leq \|f\|^p_{L^p} + \|g\|^p_{L^p} \leq 2. \tag{2.1}$$

Posons $\varphi(t) = t^p$ pour tout $t > 0$m soit $a > b > 0$, la formule de Taylor avec reste intégrale donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\varphi(a+b) + \frac{1}{2}\varphi(a-b) &= \varphi(a) + \frac{b^2}{2}\int_0^1 (1-t)(\varphi''(a+tb) + \varphi''(a-tb))dt \\ &= a^p + p(p-1)b^2 \int_0^1 (1-t)\frac{1}{2}((a+tb)^{p-2} + (a-tb)^{p-2})dt\end{aligned}$$

utilisant le fait que $s \mapsto s^{p-2}\ avec\ s > 0,\ p \leq 2$ est convexe, il vient donc que pour $a > b > 0$, on a :

$$\frac{1}{2}(a+b)^p + \frac{1}{2}(a-b)^p \geq a^p + \frac{p(p-1)b^2a^{p-2}}{2}. \tag{2.2}$$

Dans le cas o$\grave{u}$ $\|f+g\|_{L^p} \geq \|f-g\|_{L^p}$, avec (II.1) et (II.2), il vient donc

$$1 \geq \left\|\frac{f+g}{2}\right\|^p_{L^p} + \frac{p(p-1)}{2}\left\|\frac{f-g}{2}\right\|^2_{L^p}\left\|\frac{f+g}{2}\right\|^2_{L^p}$$

en multipliant par $\left\|\frac{f+g}{2}\right\|^{2-p}_{L^p}$ on obtient

$$1 \geq \left\|\frac{f+g}{2}\right\|^{2-p}_{L^P} \geq \left\|\frac{f+g}{2}\right\|^2_{L^P} + \frac{p(p-1)}{2}\left\|\frac{f-g}{2}\right\|^2_{L^p},$$

de sorte que

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|^2_{L^P} \leq 1 - \frac{p(p-1)\epsilon^2}{8}.$$

Dans le cas o$\grave{u}$ $\|f+g\|_{L^p} \leq \|f-g\|_{L^p}$, on tire immédiatement de (II.1) que

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^P}^p \leq 2^{1-p},$$

ce qui achève la démonstration.

– Les espaces L^1 et L^∞ ne sont pas uniformément convexe.

2.2.2 La réflexivité dans les espaces de Lebesgue

Théorème (II.7) : Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.
Remarques(II.2) Il est surprenant qu'une propriété de nature Géométrique (La convexité uniforme) entra$\hat{i}$ne une propriété de nature topologique (réflexivité).
La convexité uniforme est souvent un outil commode pour prouver qu'un espace est réflexif mais cette méthode ne marche pas toujours : il existe des espaces réflexifs qui ne possède aucune norme équivalente uniformément convexe.
Les espaces pré-hilbertiens sont Uniformément convexes ; cela résulte aisément de l'identité du parallélogramme. La preuve du théorème nécessite le théorème de Helly qui est lui-même une conséquence du théorème de Hahn-Banach.
Démonstration du théorème (II.7) : Soit $x'' \in E''$ avec $\|x''\|_{E''} = 1$. Par définition de la norme, pour tout n il existe f_n dans E' avec $\|f_n\|_{E'} = 1$ tel que :

$$x''(f_n) \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

Soient $\alpha_i = x''(f_i)$, pour $i < n$. Quel que soit le n-uplet de réels β_i, on a

$$\left|\sum_1^n \alpha_i\beta_i\right| = \left|\sum_1^n \beta_i x''(f_i)\right| \leq \|x''\|_{E''} \left\|\sum_1^n \beta_i(f_i)\right\|_{E'}.$$

Donc, par le théorème de Helly avec $\epsilon = \frac{1}{n}$, il existe $x_n \in E$ tel que

$$\|x_n\|_E \leq 1 + \frac{1}{n} \quad et \quad f_i(x_n) = \alpha_i = x''(f_i).$$

On remarque que la suite $\|x_n\|_X$ tend vers 1.
En effet, en utilisant $i = n$:

$$1 - \frac{1}{n} \leq x''(f_n) \leq f_n(x_n) \leq \|f_n\|_{E'} \|x_n\|_E \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

On montre que la suite (x_n) est de Cauchy avec la convexité uniforme. Sinon, pour tout $\epsilon > 0$, il existe des suites $n_k < m_k < n_{k+1} < ...$ avec :

$$\|x_{n_k} - x_{m_k}\| \geq \epsilon.$$

Par la convexité uniforme, il existe $\delta(\epsilon) > 0$ tel que

$$\|x_{n_k} - x + m_k\| \leq 2(1 - \delta(\epsilon)).$$

Alors, puisque $m_k > n_k$, on a :

$$2(1 - \frac{1}{n_k}) \leq f_{n_k}(x_{n_k}) + f_{n_k}(x_{m_k}) \leq$$

$$\|x_{n_k} - x + m_k\| \leq 2(1 - \delta(\epsilon)).$$

On aboutit ainsi à une contradiction. La suite x, converge donc vers un point x_0. Par passage à la limite on a

$$\|x_0\| = 1 \;\; et \;\; \forall i, \quad f_i(x_0) = x''(f_i).$$

Montrons que x_0 est unique. Supposons $y_0 \in E, y_0 \neq x_0$, qui vérifie les mêmes égalités. Par l'uniforme convexité, $\|x_0 + y_0\| < 2$. On a aussi

$$\|x_0 + y_0\|_E \geq f_i(x_0 + y_0) = 2x''(f_i) \geq 2(1 - \frac{1}{i}),$$

ce qui est absurde en faisant tendre i vers l'infini. Soit $f_0 \in E'$.
On doit montrer que

$$f_0(x_0) = x'(f_0).$$

En raisonnant comme précédemment il existe $z_0 \in E$ tel que

$$\|z_0\|_E = 1 \quad et \quad \forall i, \; f_i(z_0) = x''(f_i).$$

En particulier, par l'unicité, on doit avoir $z_0 = x_0$, et le théorème est démontré.
Théorème (II.8) : L^p est un espace réflexif pour tout p, $1 < p < \infty$.
Démonstration : Grâce au théorème (II.7), l'espace de Banach est réflexif L^p pour $1 < p < \infty$.

Lemme(II.3) : Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ alors $\{f\} = 0$ dans $D'(\Omega)$ si et seulement si $f = 0$ $p.p.$.
Théorème (II.9) : Les espaces de Lebesgue L^1 et L^∞ ne sont pas réflexifs.

Démonstration : Comme $(L^1)' = L^\infty$, en vertu du théorème (I.5), il nous suffit de montrer que L^1 n'est pas réflexif c'est à dire que $L^1 \neq (L^\infty)'$. Soit $x_0 \in \Omega$ et φ et φ la forme linéaire sur $C_c(\Omega)$ définie par

$$\langle \varphi, f \rangle := f(x_0) \quad \forall f \in C_c(\Omega),$$

comme $\langle \varphi, f \rangle \leq \|f\|_{L^\infty}$, $\forall f \in C_c(\Omega)$, grâce au théorème de Hahn-Banach, on peut prolonger φ en un élément de $(L^\infty)'$ (qu'on notera encore φ).
S'il existerait $u \in L^1$ représentant φ, on aurait en particulier $\{u\} = 0$ dans $D'(\Omega \,/\, \{x_0\})$ ce qui avec lemme (II.3) entrainerait $f = 0$ $p.p.$ sur $\Omega / \{x_0\}$ et donc aussi $f = 0$ $p.p.$ sur Ω, on aurait alors $\varphi = 0$ ce qui est absurde.

2.2.3 Dualité dans les espaces de Lebesgue

Le résultat de représentation suivante montre que si $1 < p < \infty$, on peut identifier $(L^P)'$ à $L^{p'}$:

Théorème (II.10) : (Théorème de représentation de Riesz)
Soit $p : 1 < p < \infty$ et soit $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ alors il existe un unique $u \in L^{p'}$ tel que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega uf, \quad \forall f \in L^p(\Omega),$$

de plus on a

$$\|\varphi\|_{(L^p)'} = \|u\|_{L^{p'}} .$$

Démonstration : Définissons $T : \ L^{p'} \to (L^p)'$ par

$$\langle Tu, f \rangle := \int_\Omega uf, \quad \forall u \in L^{p'}, \ \forall f \in L^p.$$

Il résulte de l'inégalité de Hölder que T est continue et de plus précisément :

$$\|Tu\|_{(L^p)'} \leq \|u\|_{L^{p'}} , \ \forall u \in L^p.$$

Soit $u \in L^{p'}, \ u \neq 0$, alors $f := |u|^{p'-2} u$ appartient à L^p et donc

$$\|Tu\|_{(L^p)'} \geq \frac{\int fu}{\|f\|_{L^P}} = \|u\|_{L^P} .$$

On en déduit donc que T est une isométrie de $L^{p'}$ dans $(L^p)'$. en particulier, T est injective, ce qui montre l'unicité.

Pour l'existence il s'agie de montrer que T est surjective, $T(L^p)$ étant fermé, il suffit de montrer que $T(L^{p'})$ est dense dans $(L^p)'$.
Soit $h \in (L^p)''$ tel que $h \equiv 0$ sur $T(L^{p'})$ comme L^p est réflexif, on peut identifier h à un élément (encore noté h) de L^p, en prenant $u := |h|^{p-2}\, h \in L^{p'}$, on a alors

$$\langle Tu, h\rangle = 0 = \int |h|^p = 0,$$

et donc $h = 0$ ce qui montre que $T(L^{p'})$ est dense dans $(L^p)'$.

Remarque (II.3) : Pour $p = \infty$:
Le dual de L^∞ contient L^1 et il est strictement plus grand que L^1, autrement dit il existe des formes linéaires continues sur L^∞ qui ne sont pas de type $\langle \varphi f\rangle = \int uf \quad \forall\, u \in L^\infty \;\; avec\; u \in L^1$.

2.2.4 Séparabilité dans les espaces de Lebesgue

Théorème (II.12) : L^p est séparable pour $1 \leq p < \infty$.

Démonstration : On désigne par $(R_i)_i$ la famille (dénombrable) des pavés R de la forme

$$R = \prod_{k=1}^{N} (a_k, b_k) \quad avec\; a_k, b_k \in \mathbb{Q}\; et\; R \subset \Omega.$$

On désigne par E l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré par les fonctions 1_{R_i} ; de sorte que E est dénombrable.
Montrons que E est dense dans $L^p(\Omega)$.
Soit $f \in L^p(\Omega)$ et soit $\epsilon > 0$ fixés. Soit $f_1 \in C_c(\Omega)$ tel que $\|f - f_1\|_{L^p} < \epsilon$.
Soit Ω' un ouvert borné tel que $Suppf_1 \subset \Omega' \subset \Omega$. Comme $f_1 \in C_c(\Omega')$ on construit aisément une fonction $\Omega f_2 \in E$ telle que

$$Suppf_2 \subset \grave{\Omega}\; et\; que\; |f_2(x) - f_1(x)| \leq \frac{\epsilon}{\left|\grave{\Omega}\right|^{\frac{1}{p}}} \;\; p.p.\; sur\; \grave{\Omega}\; ,$$

(On commence par recouvrir $Suppf_1$ par un nombre fini de pavés R_i sur lesquels l'osciation de f_1 est inférieure à $\frac{\epsilon}{|\grave{\Omega}|^{\frac{1}{p}}}$.
Il en résulte que $\|f_2 - f_1\|_{L^p} \leq \epsilon$ et donc $\|f - f_2\|_{L^p} \leq 2\epsilon$.

lemme (II.4) : Soit E un Banach, on suppose qu'il existe une famille $(O_i)_{i\in I}$ telle que .

1. Pour tout $i \in I \quad O_i$ est un ouvert non vide de E.
2. $O_i \cap O_j = \emptyset \quad i \neq j$.
3. I n'est pas dénombrable. Alors E n'est pas séparable.

Démonstration : Raisonnons par l'absurde et supposons que E est séparable.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans E. Pour chaque $i \in I$, $O_i \cap (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on choisit $n(i)$ tel que $u_{n(i)} \in O_i$. L'application $i \mapsto n(i)$ est injective ; en effet si $n(i) = n(j)$ alors $u_{n(i)} = u(n(j)) \in O_i \cap O_j$ et donc $i = j$.
Par suite I est dénombrable ce qui est contraire à (3).

Chapitre 3

Espaces de Sobolev et théorème d'injection

3.1 Rappels sur les distributions

Les espaces de Sobolev requièrent quelques notions clés et techniques de la théorie des distributions de Schwartz. Sans entrer trop dans les détails, nous introduirons le concept de dérivé au sens des distributions ainsi que les espaces de distributions (au sens de Schwartz).
Dans tout ce chapitre, Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Par simplicité, les fonctions considérées seront toujours à valeurs réelles.
Définition (III.1) : (L'espace des fonctions tests)
L'espace des fonction tests $D(\Omega)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions C^∞ sur Ω à support compact inclus dans Ω.
On dit que φ_n converge vers 0 dans $D(\Omega)$ si les deux conditions ci-dessous sont satisfaites :

a) Il existe un compact K de Ω tel que $supp\varphi_n \subset K$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

b) Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la suite $D^\alpha \varphi_n$ converge vers 0 uniformément vers 0 sur K, autrement dit

$$\sup_{x\in\Omega} |D^\alpha \varphi_n(x)| \to 0, \ lorsque \ n \to \infty.$$

Définition (III.2) : (Distribution de L.Schwartz)
$D'(\Omega)$ est le dual topologique de $D(\Omega)$, c'est-à-dire $D'(\Omega)$ est l'ensemble des formes linéaires continues sur $D(\Omega)$.
Dès lors, $T \in D'(\Omega)$ si et seulement si $T : \ D(\Omega) \to \mathbb{R} : \ \varphi \to \langle T, \ \varphi \rangle$ satisfait :

a) T est une application linéaire,

b) T est continue, i.e. si $\varphi_n \to 0$ dans $D(\Omega)$, alors $\langle T, \varphi_n \rangle \to 0$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple : (Le delta Dirac)
Si $a \in \Omega$ est un point fixé de Ω, alors on appelle le delta Dirac la distribution :

$$\delta_a : \ D(\Omega) \to \mathbb{R} :$$

$$\varphi \to \varphi(a)$$

Définition (III.3) : (Distributions tempérées)
On définit l'espace $S(\mathbb{R}^n)$, comme suit :

$$S(\mathbb{R}^n) := \left\{ \ \varphi : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ ou \ \mathbb{C} / \ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) / \ \forall m \geq 0, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad \lim_{|x| \to +\infty} (|x|^m \, |\partial^\alpha \varphi(x)|) = 0 \right\}$$

Les éléments $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ sont dits des bonnes fonctions ou (fonction à décroissance rapide).
On dit qu'une suite (φ_n) de $S(\mathbb{R}^n)$ converge vers 0 si et seulement si
$\forall m \geq 0 \ \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad |x|^m \, \partial^\alpha \varphi_n(x) \to 0 \ uniformément.$
Définition (III.4) :
Soit $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, la transformée de Fourier de φ notée $\hat{\varphi}$ est donnée par :

$$\hat{\varphi}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-ix\xi} dx; \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Définition (III.5) : (Dérivée faible ' au sens des distributions')
Soit α un multi-indice, supposant que $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, et

$$\int_\Omega u(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Alors v est appelée la dérivée partielle faible (au sens des distributions) de u .
Si u est suffisamment régulière pour avoir la continuité $\partial^\alpha u$, on peut intégrer par partie

$$\int_\Omega u(x) \varphi(x) dx = \int_\Omega (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha u(x) \varphi(x) dx.$$

Par conséquent, les dérivées classiques et les dérivées faibles coïncident.
Théorème (III.1) : Soit $u_m \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $u_m \to^{m \to \infty} u$ dans $L^1_{loc}(\Omega)$. Supposant que les dérivées faibles existent $\partial^\alpha u \in L^1_{loc}$ et $\partial^\alpha u_m \to^{m \to \infty} v$ dans $L^1_{loc}(\Omega)$.
Alors $v = \partial^\alpha u$.
Démonstration : D'après la définition précédente, pour $\partial^\alpha u_m$ on a

$$\int_\Omega u_m \partial^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \partial^\alpha u_m \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Lorsque m tend ves l'infini

$$\int_\Omega u \partial^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in D(\Omega),$$

$$\Rightarrow v = \partial^{\alpha} u \ dans\ le\ sens\ de\ la\ d\acute{e}finition\ (III.4).$$

3.2 Définitions et première propriété des espaces de Sobolev

Définition (III.6) : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Pour $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, l'espace de Sobolev, noté $W^{m,p}(\Omega)$, est constitué des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre m, au sens des distributions, s'identifient à des fonctions de $L^p(\Omega)$.

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ \ u \in L^p(\Omega) \ |\forall \alpha \in \mathbb{N}^N, \ |\alpha| \leq m, \ D^{\alpha} u \in L^p(\Omega) \right\}.$$

Lemme (III.1) : La fonction $\|.\|_{W^{m,p}(\Omega)} : \ W^{m,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left(\int_{\Omega} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} u\|_{L^p}^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad si \ \ 1 \leq p < \infty.$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} u\|_{L^{\infty}} \quad si \ p = \infty.$$

est une norme sur l'espace vectoriel $W^{m,p}(\Omega)$.
La preuve de ce lemme est relativement simple, en se souvenant que la fonction $\|.\|_{L^p(\Omega)}$ définit une norme sur l'espace fonctionnel $L^p(\Omega)$.

La fonction $\|.\|_{m,p} : \ W^{m,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\|u\|_{m,p} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} u\|_{L^p} \quad si \ \ 1 \leq p < \infty.$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} u\|_{L^{\infty}} \quad si \ p = \infty.$$

est une norme équivalente à la précédente. L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ a donc les mêmes propriétés quelle que soit la norme utilisée.
Définition (III.7) : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, borné ou non. On note $W_0^{m,p}(\Omega)$ l'adhérence de l'espace $D(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ au sens de la norme $\|.\|_{W^{m,p}}$.
Théorème (III.2) : L'espace de Sobolev $W^{m,p}$ muni de la norme $\|.\|_{W^{m,p}}$ est un espace de Banach.
Démonstration Soit $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans l'espace fonctionnel $W^{m,p}(\Omega)$.

Alors, pour tout multi-indice α d'ordre inférieure ou égale à m, la suite $\{D^\alpha u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^P(\Omega)$.
Rappelons alors que l'espace $L^P(\Omega)$ est complet et de ce fait, il existe des fonctions u et u_α pour tout multi-indice α, $0 \leq |\alpha| \leq m$, telles que u_n, $D^\alpha u_n$ convergent vers u, respectivement vers u_α dans $L^P(\Omega)$ et ceci pour tout multi-indice.
De plus, $L^P(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, chacune des fonctions u_n détermine une distribution $T_{u_n} \in D'(\Omega)$.
Ainsi, pour toute fonction $\phi \in D(\Omega)$, on a

$$|T_{u_n}(\phi) - T_u(\phi)| \leq \int_\Omega |u_n(x) - u(x)|\, |\phi(x)|\, dx \leq \|\phi\|_{L^{p'}(\Omega)} \|u_n - u\|_{L^P(\Omega)},$$

grâce à l'inégalité de Hölder.
Ainsi,

$$T_{u_n}(\phi) \longrightarrow T_u(\phi) \; pour\ toute\ fonction\ \phi \in D(\Omega)\ lorsque\ n \to \infty.$$

Par un même raisonnement, $T_{D^\alpha u_n}(\phi) \to T_{u_\alpha}(\phi)$ pour toute fonction $\phi \in D(\Omega)$ et tout multi-indice α d'ordre compris entre 0 et m. il en découle

$$T_{u_\alpha}(\phi) = \lim_{n\to\infty} T_{D^\alpha_{u_n}}(\phi) = \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} T_u(D^\alpha \phi) = D^\alpha(T_u)(\phi),$$

pour toute fonction $\phi \in D(\Omega)$.
Ainsi, $u_\alpha = D^\alpha u$ au sens des distributions pour tout multi-indice α vérifiant $0 \leq |\alpha| \leq m$.
Finalement, vu que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = 0,$$

l'espace fonctionnel $W^{m,p}(\Omega)$ est complet.

Remarque (III.1) : Pour $p = 2$, il est d'usage de remplacer la notation $W^{m,2}(\Omega)$ par $H^m(\Omega)$, on le muni du produit scalaire suivant.

$$\langle u, v\rangle_{H^m} = \sum_{\alpha:|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2}.$$

La formule proposée au produit scalaire est effectivement bilinéaire, symétrique, définie positive et pour $u = v$ donne la racine de la norme.

Proposition (III.1) : L'espace $D(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

Démonstration : Soit $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, et $n \in (\mathbb{N}^*)$.

Soit φ une fonction de $D(B(0,2))$, qui vaut 1 sur $B(0,l)$ et telle que $0 \leq \varphi \leq 1$.
Soit $\varphi_n(x) = \varphi(x/n)$.
Alors la suite u_n, définie par $u_n(x) = \varphi(x/n)u(x)$, converge vers u dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.
En effet, puisque $|u|^p \in L^1$:

$$\|u - u_n\|_p^p = \|(1-\varphi_n)u\|_p^p \leq \int_{|x|\geq n} |u(x)|^p \, dx \to 0.$$

D'autre part, la formule de Leibniz de dérivation d'un produit d'une fonction C^∞ par une distribution entraine que, si $|\alpha| = m$, alors $D^\alpha(\varphi_n u)$ est la somme de $\varphi_n D^\alpha u$ et d'expressions de la forme

$$(\frac{1}{n})^j D^{\alpha_1}\varphi(x/n) D^{\alpha_2}u, \ où \ |\alpha_1| + |\alpha_2| = m \ et \ |\alpha_1| = j \geq 1.$$

On peut majorer la norme dans L^p de ces expressions par :

$$\frac{1}{n^j} |D^{\alpha_1}\varphi|_\infty \left(\int_{|x|\geq n} |D^{\alpha_2}u(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

qui tend vers 0 puisque $j \geq 1$. On en déduit que :

$$|D^\alpha(\varphi_n u) - D^\alpha u|_p \leq |D^\alpha(\varphi_n u) - \varphi_n D^\alpha u|_p + |\varphi_n D^\alpha u - D^\alpha u|_p$$

est la somme de deux quantités qui tendent vers 0.
On utilise ensuite une régularisation. Si p est une fonction régularisante, on lui associe $p_n(x) = n^N p(nx)$ et $u_n = p_n * ((\varphi_n u)$. Alors, $\{u_n\}$, suite de fonctions appartenant à $D(\mathbb{R}^N)$ converge vers u dans $W^{1,p}$.
Proposition (III.2) : Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N$. Alors le sous espace $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.

3.3 Séparabilité, réflexivité et la convexité uniforme dans les espaces de Sobolev

Nous appliquerons les deux propriétés suivantes. Soient X un espace de Banach et Y un sous espace fermé de X ou le produit X^N, alors :
(a) Y est séparable si X est séparable.
(b) Y est uniformément convexe si X est uniformément convexe. (Y est muni de la norme du X.)

Proposition (III.3) :

1. L'espace de Sobolev $W^{m,p}$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$,
2. L'espace de Sobolev $W^{m,p}$ est uniformément convexe et réflexif pour $1 < p < \infty$.

Démonstration :

Par $V^{m,p}(\Omega)$, Nous noterons l'espace linéaire de toutes les fonctions à valeurs vectorielles $v = \{v_\alpha\}_{|\alpha|} \leq m$ avec $v_\alpha \in L^p(\Omega)$. Nous introduisons la norme $\|.\|_{V^{m,p}}$ dans $V^{m,p}(\Omega)$:

$$\|v\|_{V^{m,p}} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|v_\alpha\|_{L^P} .$$

Alors $V^{m,p}$ est le produit d'un nombre fini (égal au nombre de multi-indices α avec $|\alpha| \leq m$ de $L^p(\Omega)$ Nous savons que $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach séparable si $1 \leq p < \infty$ et uniformément convexe si $1 < p < \infty$. Il en est de $V^{m,p}(\Omega)$.
Maintenant, considérons la transformation J de $W^{m,p}$ (muni de la norme $\|u\|_{m,p} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^P}$) à $V^{m,p}$

$$J \ : \ W^{m,p}(\Omega) \to V^{m,p}(\Omega), J(u) = \{\partial^\alpha u\}_{|\alpha| \leq m} .$$

Alors J est un opérateur linéaire, il préserve la norme :

$$\|Ju\|_{V^{m,p}} = \|u\|_{W^{m,p}}$$

et J est injectif. Un tel opérateur est appelé une isométrie.
L'image de $J(W^{m,p}) = \tilde{V}^{m,p}$ est un ensemble linéaire de $V^{m,p}(\Omega)$ Consistant en fonctions de valeurs vectorielles v de la forme $v = \{\partial^\alpha u\}, u \in W^{m,p}$.
D'après le théorème (III.1), il en résulte que $\tilde{V}^{m,p}$ est un sous-espace fermé de $V^{m,p}(\Omega)$.
Par conséquent, $\tilde{V}^{m,p}$ est séparable en même temps que $V^{m,p}(\Omega)$.
Puisque J est isométrique, nous pouvons identifier $W^{m,p}(\Omega)$ avec $V^{m,p}(\Omega)$.
finalement, l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est séparable si $1 \leq p < \infty$ et uniformément convexe donc il est réflexif si $1 < p < \infty$.

3.4 Théorème d'injection de Sobolev

Théorème (III.3)(d'injection de Sobolev). On suppose $p \geq 1$ et $m \in \mathbb{N}$. Alors :

(1) Si $N > mp$, pour tout q tel que $p \leq q \leq Np/(N - mp)$, on a la propriété :

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N).$$

L'inégalité d'injection continue peut être précisée comme suit. Sous les conditions énoncées, il existe une constante C telle que :

$$\forall \varphi \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N), \quad \|\varphi\|_{L^q} \leq C \|\varphi\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} .$$

(2) Pour $p = 1$, on a : $W^{N,1}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b(\mathbb{R}^N)$.

(3) Si $N = mp$ et $p > 1$, alors, pour tout q tel que $p \leq q < \infty$, on a la propriété :

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N).$$

(4) Si $p > N$, alors :

$$0 < \Lambda \leq 1 - N/p \Longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b^{0,\Lambda}(\mathbb{R}^N.$$

(5) Si $mp > N$ lorsque $N/p \notin \mathbb{N}$ et si j est tel que $(j-1)p < N < jp$ alors :

$$0 < \Lambda \leq j - N/p \Longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b^{m-j,\Lambda}(\mathbb{R}^N).$$

Si $N/p \in \mathbb{N}$ et $m \geq j = N/p + 1$ alors $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b^{m-N/p-1,\Lambda}(\mathbb{R}^N)$. pour tout $\Lambda < 1$.

Remarque(III.2)
D'après la proposition (III.1), il suffit de prouver les affirmations du théorème pour les fonctions de $D(\mathbb{R}^N)$.

Remarque(III.3)
Si les propriétés sont prouvées dans les cas critiques, c'est-à-dire, pour l'affirmation (1), dans le cas : $q = Np\,(N - mp)$et, alors la propriétés (1) du théorème (III.3) en résultent.

3.4.1 Organisation de la démonstration du théorème de Sobolev

– *É*tape A. On établit, pour les fonctions φ de $D(\mathbb{R}^N)$, l'inégalité :

$$\|\varphi\|_{L^{N/(N-1)}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\varphi\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^N)} .$$

Il en résultera, par la remarque (III.2), l'affirmation (1) du théorème dans le cas $p = m = 1$.

– *É*tape B. On établit, dans le cas $p < N$, pour les fonctions φ de $D(\mathbb{R}^N)$, l'inégalité :

$$\|\varphi\|_{L^{Np/(N-p)}}((\mathbb{R}^N)) \leq C \|\varphi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} .$$

– *É*tape C. On établit, par récurrence, pour les fonctions φ de $D(\mathbb{R}^N)$, dans les cas $m \geq 2$ et $mp < N$, l'inégalité :

$$\|\varphi\|_{L^{Np/(N-mp)}}((\mathbb{R}^N)) \leq C \|\varphi\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

À l'issue de ces trois étapes, l'affirmation (1), grâce aux remarques (III.2) et (III.3), sera prouvée.

– *É*tape D. On établit, pour les fonctions φ de $D(\mathbb{R}^N)$ l'inégalité :

$$\|\varphi\|_\infty \leq \|\varphi\|_{W^{N,1}(\mathbb{R}^N)}.$$

En utilisant la densité des fonctions régulières, on en déduira l'affirmation (2) du théorème.

– *É*tape E. On prouve l'affirmation (3) du théorème, en commençant par le cas $m = 1$, $p = N$ et en poursuivant avec $m \geq 2$ et $Np = m$.

3.4.2 Démonstration du théorème de Sobolev

Preuve concernant l'étape A. Il faut prouver :

$$\exists C, \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^N), \ \|\varphi\|_{L^{N/(N-1)}} \leq C \|\varphi\|_{W^{1,1}}. \tag{3.1}$$

Soit $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$. Alors, pour tout indice $i \in [1, N]$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \ \varphi(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \partial^i \varphi(x + (s - x_i)e_i)ds.$$

On en déduit :

$$|\varphi(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left|\partial^i \varphi(x + (s - x_i)e_i)\right| ds. \tag{3.2}$$

On remarque que l'intégrale du membre de droite de (III.2) ne dépend pas de la composante x_i de x. Le $(N-1)-$uplet $(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_N)$ est noté $\breve{x}_i{}^{(N)}$. On définit, sur $\mathbb{R}^{N-1}$, la fonction φ_i à support compact, par la formule :

$$\varphi_i(\breve{x}_i{}^{(N)}) = \int_{\mathbb{R}} \left|\partial^i \varphi(x + (s - x_i)e_i)\right| ds.$$

les inégalités (III.2) s'écrivent donc :

$$\forall i \in [1, N], \ \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad |\varphi(x)| \leq \varphi_i(\breve{x}_i{}^{(N)}).$$

Comme le bute est l'étude de $\|\varphi\|_{L^{N/(N-1)}}$, on note ici que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^N,\ |\varphi(x)|^{N/(N-1)} \leq \prod_{1}^{N} \left[\varphi_i(\breve{x}_i{}^{(N)})\right]^{1/(N-1)}.$$

On utilise alors le lemme :

Lemme(III.2) : Soient $N \geq 2$ et N fonctions F_i, chacune appartenant à $L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$. Alors, on a :

$$\prod_{1 \leq i \leq N} F_i(\breve{x}_i{}^{(N)}) \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

et on a l'inégalité :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \prod_i \left|F_i(\breve{x}_i{}^{(N)})\right| dx \leq \prod_i \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left|F_i(\breve{x}_i{}^{(N)})\right|^{N-1} d\breve{x}_i{}^{(N)}\right)^{1/(N-1)} .(3.3)$$

Terminons l'étape A. On applique le lemme (III.2) aux fonctions $F_i = |\varphi_i|^{1/(N-1)}$.
L'inégalité $|\varphi(x)| \leq \prod_{1 \leq i \leq N} |\varphi_i(\breve{x}_i)|^{1/(N-1)}$ fournit alors pour la norme $\phi = \|\varphi\|_{L^{N/(N-1)}}$:

$$\phi \leq \left[\int_{\mathbb{R}^N} \prod_{1 \leq i \leq N} F_i(\breve{x}_i) dx\right]^{(N-1)/N}$$

$$\leq \prod_{1 \leq i \leq N} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_i(\breve{x}_i)|\, d\breve{x}_i\right]^{1/N}$$

$$= \left[\prod_{1 \leq i \leq N} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}} \left|\partial^i (x + s e_i) ds d\breve{x}_i\right|\right]^{1/N}$$

$$\left[\prod_{1 \leq i \leq N} \left\|\partial^i \varphi\right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\right]^{1/N}$$

$$\leq \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \left\|\partial^i \varphi\right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{N} \|\varphi\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^N)}.$$

On a ainsi la propriété d'injection continue $W^{1,1}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \hookrightarrow L^{N/(N-1)}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ et, par la remarque (III.2), l'affirmation (1) du théorème est prouvée dans le cas $p = m = 1$.

Remarque (III.4) On fait, la dernière inégalité, qui traduit la continuité de l'injection, s'écrit ici plus précisément :

$$\|\varphi\|_{N/(N-1)} \leq C \|\nabla \varphi\|_1 . \tag{3.4}$$

Preuve concernant l'étape B .

– On suppose maintenant $m = 1$ et $p < N$.

On considère, pour $u \in D(\Omega)$. La fonction $v = |u|^{p(N-1)/(N-P)-1} u$, où l'exposant est positif ou nul puisque $p \geq 1$. Par la définition $|u|^{\alpha} = exp(\alpha ln(|u|))$, la dérivée partielle $\partial^i v$ s'écrit :

$$\partial^i v = \frac{p(N-1)}{N-p} |u|^{p(N-1)/(N-p)-1} \partial^i u.$$

En outre, la remarque précédente et l'utilisation de Hölder fournissent :

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v(x)|^{N/(N-1)}\, dx\right)^{(N-1)/N}$$
$$\leq C \int_{\mathbb{R}^N} \frac{p(N-1)}{N-p} |u(x)|^{p(N-1)/(N-p)-1} |\nabla u(x)|$$
$$\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{Np/(N-p)}\right)^{1-1/p}.$$

Le membre de gauche n'est autre que $\|u\|_{Np/(N-p)}^{(N-1)p/(N-p)}$. Donc, en divisant par $\|u\|_{Np/(N-p)}^{(N-1)p/(N-p)}$, on obtient l'inégalité :

$$\|u\|_{_{Np/(N-p)}} \leq C \, \|\nabla u\|_p \, . \tag{3.5}$$

On a ainsi démontrer l'affirmation (1) du théorème pour $m = 1$ et $1 < p < N$.

Preuve concernant l'étape C. On fait maintenant une preuve par récurrence sur m.
Supposons $m \geq 2$ et $mp < N$. On a donc : $(m-1)p < N$ et $p < N$.
Par injection $W^{m-1,p} \hookrightarrow L^{Np/(N-(m-1)p)}$ supposée démontrée, on a, D désignant un opérateur différentiel d'ordre 1 : $Du \in W^{m-1,p}$, donc $Du \in L^{Np/(N-(m-1)p)}$. Puisque $u \in W^{m,p}$, on a $u \in W^{m-1,p}$, donc aussi $u \in L^{Np/(N-(m-1)p)}$.
Finalement, en posant $q = Np/(N-(m-1)p)$, on a $u \in W^{1,q}$. D'après le théorème d'injection pour $m = 1$ et puisque $q < N$, on obtient, en remarquant que $q/(N-q) = p/(N-mp)$, l'appartenance :

$$u \in L^{Nq/(N-q)} = L^{Np/(N-mp)},$$

ce qui achève la preuve pour l'étape C.
Nous avons donc démontré l'affirmation (1) du théorème.

Preuve concernant l'étape D.

– On passe à la preuve de l'affirmation (2) en montrant que : $W^{N,1} \hookrightarrow L^{\infty}$. L'utilisation de la densité des fonctions régulière entrainera ensuite la propriété d'injection : $W^{N,1} \hookrightarrow C_b(\mathbb{R}^N)$.

On déj*à* montrer, dans la preuve de la propriété (1) (cf.(III.2)) que, si $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$, alors :

$$\forall x' \in \mathbb{R}^{N-1},\ \|u\|_\infty (x', .) \leq \int_{\mathbb{R}} \left|\partial^N u(x', t)\right| dt.$$

Faisons d'autre part l'hypothèse de récurrence suivante. Si $v \in W^{N-1,1}(\mathbb{R}^{N-1})$, alors $v \in L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})$ et :

$$\|v\|_\infty \leq \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{N-1},\ |\alpha|\leq N-1} \int |D^\alpha v(x')|\, dx'.$$

On applique cette inégalité à la fonction $\partial^N u(x', x_N)$, pour x_N fixé. on obtient

$$\sup_{x'\in\mathbb{R}^{N-1}} \left|\partial^N u(x', x_N)\right| \leq \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{N-1}|\alpha|\leq N-1} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left|D^\alpha(\partial^N u)\right| (x', x_N) dx'.$$

On intègre ensuite par rapport à x_N.

$$\sup_{x'\in\mathbb{R}^{N-1} x_N\in\mathbb{R}} |u(x', x_N)| \leq \int_{\mathbb{R}} \sup_{x'} \left|\partial^N u(x', x_N)\right| dx_N$$

$$\leq \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{N-1},\ |\alpha|\leq N-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left|D^\alpha(\partial^N u)\right| (x', x_N) dx' dx_N.$$

$$\leq \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{N},\ |\alpha|\leq N} \int_{\mathbb{R}^N} |D^\alpha u| (x) dx.$$

On a ainsi obtenu $W^{N,1} \hookrightarrow L^\infty$.
Retournons à l'affirmation (2). Soit $u \in W^{N,1}(\mathbb{R}^N)$ et $\{u_n\}$ une suite de $D(\mathbb{R}^N)$ telle que $\|u_n - u\|_{W^{N,1}(\mathbb{R}^N)} \to 0$. D'après ce qui précède, on en déduit $\|u_n - u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \to 0$, ce qui signifie que $\{u_n\} \to u$ uniformément sur $\mathbb{R}^N$.
Ainsi u est continue sur $\mathbb{R}^N$. Comme $u \in L^\infty$, il en résulte que $u \in C_b(\mathbb{R}^N)$.
De plus, l'inégalité $\|u_n\|_{L^\infty} \leq C \|u\|_{W^{N,1}}$ fournit :

$$\forall u \in W^{N,1}(\mathbb{R}^N),\quad \|u\|_{W_{N,1}}.$$

Cela termine l'étape D de la preuve de l'affirmation (2).
Preuve concernant l'étape E. Supposons que $mp = N$.
– On commence par le cas $m = 1$, $p = N > 1$.
  Soit donc $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$. On montre que u appartient à L^q quel que soit $q \geq N$. On commence par montrer que $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ s'injecte contin*û*ment dans L^q pour tout $q \in [N, N^2/(N-1)]$. Pour cela, on remarque que si $u \in W^{1,N}$, alors $u^N \in W^{1,1}$. Ceci

résulte de $\nabla(u^N) = Nu^{N-1}\nabla u$ et de l'inégalité de Hölder :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla u^N\right| \leq N \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| \left|u^{N-1}\right| dx$$

$$\leq N \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla u^N\right| dx\right)^{1/N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^N\right)^{(N-1)/N}.$$

Par injection de Sobolev de $W^{1,1}$ dans $L^{(N-1)/N}$, on en déduit l'appartenance de u à $L^{N^2/(N-1)}$. Pour ce faire, on remarque que q peut alors s'écrire $q = q'N/(N-1)$, avec $q' > N$. Considérons, φ étant une fonction régulière approchant u dans $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$:

$$A = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left|\varphi^{q'N/(N-1)}\right| dx\right)^{(N-1)/N} = \left\|\varphi^{q'}\right\|_{L^{N/(N-1)}}.$$

En utilisant $\nabla\left(|\varphi|^{q'}\right) = q'\,|\varphi|^{q'-2}\,\varphi\nabla\varphi$, la remarque (III.4), c'est-à-dire la majoration (III.4), puis l'inégalité de Hölder, on obtient pour A les majorations :

$$A \leq q'C \int_{\mathbb{R}^N} \left|\varphi^{q'-1}\right| |\nabla\varphi|\, dx \leq q'C \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left|\varphi^{(q'-1)N/(N-1)}\right| dx\right)^{(N-1)/N} \left(\left|\int_{\mathbb{R}^N} \nabla\varphi dx\right|^N\right)^{1/N}. \tag{3.6}$$

On voit que $(q'-1)N/(N-1) \in [N,\ q'N/(N-1)[$. Il existe donc un nombre $\theta \in [0,1]$, à savoir $\theta = 1/(q'+1-N)$ tel que :

$$\frac{(q'-1)N}{(N-1)} = \theta N + (1-\theta)\frac{q'N}{(N-1)}.$$

Par suite, en utilisant encore l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(x)|^{(q'-1)N/(N-1)}\, dx$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(x)|^{q'N/(N-1)}\, dx\right)^{1-\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(x)|^N\, dx\right)^{\theta}.$$

En reportant dans l'inégalité précédente (3.6), on obtient :

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^{q'N/(N-1)(x)}\, dx\right)^{(N-1)/(Nq')}$$

$$\leq Cq'^{(q'-N+1/q')} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(x)|^N\, dx\right)^{(N-1)/(Nq')} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi(x)|^N\, dx\right)^{(q'-N+1)/(Nq')}.$$

On a ainsi établi (cf.remarque (III.2)) l'appartenance $u \in L^{q'N/(N-1)}$.

Notons qu'on ne peut pas en déduire que $u \in L^\infty$ car la suite de scalaires $q'^{(q'-N+1)/q'}$ n'est pas bornée.

– Supposons $m \geq 2$, et $mp = N$.

Alors $(m-1)p < N$. De $u \in W^{m,p}$, On déduit $u \in W^{(m-1),p}$ et, pour tout j, $\partial^j u \in W^{(m-1),p}$. Donc, d'après l'affirmation (1) du théorème, on sait que u et $\partial^j u$ appartiennent à L^r avec $r = Np/(N-(m-1)p)$.

De $mp = N$, on déduit que $r = N$; on a donc $u \in W^{1,r}$, ce qui implique, d'après ce qui précède, $u \in L^q$ pour tout q, et achève la preuve pour l'étape E.

Théorème (III.4)(de Rellich) : Si Ω est un ouvert borné régulier de classe C^1, alors de toute suite bornée de $H^1(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$.

3.5 Théorème de la Trace

Lorsqu'on résout un problème elliptique sur un domaine borné, on doit imposer des conditions aux limites sur le bord du domaine Ω, noté $\partial\Omega$, par exemple en fixant la valeur de la fonction.

Mais, lorsqu'une fonction n'est définie que presque partout, comment définir sa valeur sur $\partial\Omega$ qui est un ensemble de mesure nulle sur le $\partial\Omega$?.

Nous allons voir que pour une fonction u de $W^{1,p}(\Omega)$ on sait définir la valeur de u sur le bord du domaine. Avant cela, on commence par définir la régularité d'un ouvert.

Définition (III.8) : Une partition de l'unité de classe C^∞ subordonnée à un recouvrement ouvert $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de l'ouvert Ω est un ensemble de fonctions φ_j vérifiant :

(1) Pour tout j, la fonction φ_j est dans $C^\infty(\Omega)$, positive et à support contenu dans A_j.

(2) Sur tout compact K de Ω, un nombre fini seulement de fonctions Ψ_j ne sont pas identiquement nulles sur K.

(3) $\forall x \in \Omega,\ \ \sum_{j\in\mathbb{N}} \varphi_j(x) = 1$.

Définition (III.9) : On dit que Ω est un ouvert lipschitzien uniforme si :

(1) I1 existe un recouvrement ouvert $(\Omega_i)_{i\geq 0}$ de Ω tel que $d(\Omega_0, \partial\Omega) > 0$ et, pour tout $i \geq 1$, Ω_i est borné avec $\Omega_i \cap \partial\Omega \neq \oslash$ et, ou bien la famille $\{\Omega\}_i$ a un cardinal fini, ou bien :

$$\exists k \geq 2,\ \ |i-j| \geq k\ \Rightarrow \Omega_i \cap \Omega_j = \oslash.$$

(2) I1 existe un ouvert borné O'_i de $\mathbb{R}^{N-1}$, une fonction a_i lipschitzienne sur O'_i ; et un système de coordonnées tel que, quitte à renuméroter ces coordonnées :

$$\Omega_i \cap \Omega \subset \{(x', x_N) | x' \in O'_i, x_N > a_i(x')\},$$

$$\Omega_i \cap \partial\Omega \subset \{(x', a_i(x')) | x' \in O'_i\}.$$

(3) I1 existe une partition de l'unité $(\varphi_i)_i$, subordonnée au recouvrement de Ω par les Ω_i et des constantes C_1 et C_2 tels que :

$$\forall i, \ \ \|\varphi_i\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)} \leq C_1 et \ \ \|a_i\|_{W^{1,\infty}(O'_i)} \leq C_2.$$

Définition (III.10) : On dit qu'un ouvert est de classe C^1-uniforme s'il est lipschitzien uniforme avec des fonctions a_i de classe C^1.

Corolaire (III.1) : Soit $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, ce qui signifie que, pour toute fonction $\varphi \in D(\Omega)$, on a $\varphi u \in W^{1,p}(\Omega)$, Soit x_0 le point $(x'_0, t) \in \Omega$ où $x'_0 \in \mathbb{R}^{N-1}$ et $t \in \mathbb{R}$. On désigne par $B'(x'_0, r)$ une boule ouverte dans $\mathbb{R}^{N-1}$ et par $B^*(x_0, r)$ le cylindre ouvert $B'(x'_0, r) \times]-r, r[$, dont l'adhérence, pour r assez petit, est incluse dans Ω. Alors, pour presque tous les couples (x', t) et (x', t') d'éléments de $B^*(x_0, r)$, on a :

$$u(x', t) - u(x', t') = \int_{t'}^{t} \partial^N u(x', s) ds. \tag{3.7}$$

Théorème (III.5) : Soit Ω un ouvert C^1-uniforme dans $\mathbb{R}^N$. Alors, il existe une application linéaire et continué γ_0, dite application trace, de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\partial\Omega)$ telle que si $u \in C(\bar{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$, l'image γ_0 est la fonction $x \mapsto u(x)$ bien définie sur $\partial\Omega$.

Démonstration : Supposons que $u \in C^\infty \cap W^{1,p}(\Omega)$. En utilisant la partition de l'unité et les coordonnées locales, on commence par définir la trace de $v_i = \varphi_i u$.

Cette dernière, qui appartient à $W^{1,p}(\Omega_i)$ peut être prolongée par 0 hors de sont support dans l'ouvert $O'_i \times \{x_N > a_i(x')\}$. En utilisant le corolaire (III.1), on écrit pour $n > 0$ entier et $y > 0$ l'égalité :

$$v_i(x', a_i(x') + 1/n) - v_i(x', a(x') + y) = -\int_{1/n}^{y} \partial^N(v_i)(x', a_i(x') + t) dt. \tag{3.8}$$

Posons : $u_n(x') = v_i(x', a_i(x') + 1/n)$. On déduit de (III.8), que, pour tout couple (n,m) d'entiers non nuls, on a :

$$|(u_n(x') - u_m(x'))| \leq \left| \int_{1/m}^{1/n} \left| \partial^N(v_i)(x', a_i(x') + t) \right| dt \right|.$$

En utilisant Hölder dans cette inégalité puis, en élevant à la puissance p et en intégrant par rapport à $x' \in O'_i$, après avoir multiplié à gauche par l'élément d'aire $d\sigma_i$, on prouve que $A_{n,m} = \|u_n - u_m\|_{L^p(O'_i, d\sigma_i)} \mapsto 0$:

$$A_{n,m} \leq \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|^{1-1/p} . \left[\int_{O'_i} \sqrt{1 + |\nabla a_i(x')|^2} \left(\int_{\{a_i(x')-1/m \leq x_N \leq a_i(x')-1/n\}} \left|\partial^N v_i(x)\right|^p\right)\right]^{1/p},$$

d' o$\grave{u}$ l'on déduit :

$$A_{n,m} \leq \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|^{1-1/p} \sqrt{1 + \|\nabla a_i\|_\infty^2} \left\|\partial^N v_i\right\|_{L^p(\Omega_i)}. \tag{3.9}$$

Ceci, en utilisant la condition (III.10), exprimant notamment que $|\nabla a_i(x')|$ est majoré. Lorsque $p > 1$ et lorsque n et m tendent vers $+\infty$, le membre de droite tend vers zéro, donc le membre de gauche aussi. Lorsque $p = 1$, le membre de droite tend encore vers zéro par définition des fonctions de L^1. Dans tous les cas, la suite (u_n) est de Cauchy dans l'espace $L^p(O'_i, d\sigma_i)$, espace de Lebesgue pour la mesure bornée $d\sigma_i$, donc complet. Cette suite est donc convergente dans $L^p(O'_i, d\sigma_i)$ vers une fonction $w_i \in L^p(O'_i, d\sigma_i)$.

De plus, il existe une sous-suite $\left\{u_{\eta(n)}\right\}$ de $\{u_n\}$ qui converge *p.p.* dans O'_i vers $w_i(x')$. Or, dire que $\lim (\varphi_i u)(x', a(x') + 1/(\eta(n)))$ existe *p.p.* revient à dire qu'on peut définir la fonction $x' \mapsto \varphi_i u(x', a(x')) = w_i(x')$.
Ce prolongement w_i de $\varphi_i u$ sur $\partial\Omega \cap \Omega_i$, est la trace cherchée. On pose donc $\gamma_0(\varphi_i u) = w_i$. D'après ce qui précède, cette fonction est dans l'espace $L^p(O'_i, d\sigma_i)$, donc dans l'espace $L^p(\partial\Omega \cap \Omega_i)$. De plus, par un passage à la limite dans (*) en prenant y assez grand pour que $v_i(x', a_i(x') + y) = 0$, on obtient

$$p.p.\ x' \in O'_i,\ \gamma_0(\varphi_i u)(x') = -lim\left[\int_{1/\eta(n)}^{+\infty} \partial^N(v_i)(x', a_i(x') + t)dt\right] = -\int_0^{+\infty} \partial^N(\varphi_i u)(x', a_i(x') + t)dt \tag{3.10}$$

Il s'agit maintenant de définir la trace de u par recollement.
On définit $\gamma_0(u)$ par $\gamma_0 u = \sum_i (\gamma_0 \varphi_i u)$. Cette somme est localement finie et, d'après la condition (1) de la définition (III.9), on peut conclure à $\gamma_0(u) \in L^p(\partial\Omega)$. On peut montrer aussi que la trace ainsi définie ne dépend pas du choix des éléments de la définition (III.9). Si nous supposons que $u \in C^1(\bar{\Omega})$, les arguments précédents peuvent être repris. En particulier, l'égalité (III.10) nous fournit $\gamma_0(\varphi_i u)(x', a_i(x')) = \varphi_i \tilde{u}(x', a_i(x'))$. On en déduit que $\gamma_0(u)$ est, alors, le prolongement par continuité de u sur le bord $\partial\Omega$. Il reste à prouver la continuité de l'application

γ_0. Pour cela, on fait àpartir de l'égalité (III.10) les mêmes calculs que pour obtenir à (III.9). On obtient :

$$\|\gamma_0(\varphi_i u)\|_{L^p(O'_i,d\sigma_i)} \leq C\sqrt{1+\|\nabla a_i\|_\infty^2}\left\|\partial^N(\varphi_i u)\right\|_{L^p(\Omega_i)}.$$

On en déduit, grâce à la condition (3) de la définition (III.9) :

$$\begin{aligned}\|\gamma_0 u\|_{L^p(\partial\Omega)} &\leq C\sup_i\left(\sqrt{1+\|\nabla a_i\|_\infty^2}\right)\sum_i\|\nabla(\varphi_i u)\|_{L^p(\Omega_i)}\\ &\leq C'\sum_i\|u\nabla\varphi_i+\varphi_i\nabla u\|_{L^p(\Omega_i)}.\\ &\leq C'\sup_i\left\{\|\varphi_i\|_\infty,\left\|\partial^N\varphi_i\right\|_\infty\right\}\sum_i\|u\|_{W^{1,p}(\Omega_i)}.\end{aligned}$$

À l'aide de la condition (III.10), on en déduit qu'il existe une constante C^*, qui ne dépend pas des éléments de la définition (III.9), tels que :

$$\forall u\in C^\infty(\Omega)\cap W^{1,p}(\Omega),\quad \|\gamma_0 u\|_{L^p(\partial\Omega)}\leq C^*\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

On a ainsi défini la trace de u lorsque $u\in C^\infty(\Omega)\cap W^{1,p}(\Omega)$. Pour $u\in W^{1,p}(\Omega)$, on approche u grâce à la densité de la proposition (III.3) par $u_n\in C^\infty(\Omega)\cap W^{1,p}(\Omega)$. La formule (2.89) donne finalement, par passage à la limite $\gamma_0 u = -\int_0^{+\infty}\partial^N(\varphi_i u)(x',a_i(x')+t)dt$ et il en résulte que $\gamma_0 u_n\to\gamma_0 u$ dans $L^p(\partial\Omega\cap\Omega_i)$. on justifie ainsi la continuité, à savoir :

$$\forall u\in W^{1,p},\ \|\gamma_0 u\|_{L^p(\partial\Omega)}\leq\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Proposition (III.4) : Si Ω un ouvert borné régulier de classe C^1. L'espace $H_0^1(\Omega)$ coïncide avec le sous-espace de $H^1(\Omega)$ constitué des fonctions qui s'annulent sur le bord $\partial\Omega$.

Définition (III.11) : Soit un réel $p>1$ et un entier $N\geq 2$. L'espace de Sobolev $W^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})$ est le sous espace de $L^p(\mathbb{R}^{N-1})$ caractérisé par :

$$W^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})=\left\{u\in L^p(\mathbb{R}^{N-1}),\ \int_{\mathbb{R}^{N-1}}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{p+N-2}}dxdy<\infty\right\}. \tag{3.11}$$

Théorème (III.6) : Soit Ω un ouvert de classe C^1. Alors, l'image de l'application trace sur $W^{1,p}(\Omega)$ satisfait à :

$$\gamma_0(W^{1,p}(\Omega))=W^{1-1/p,p}(\partial\Omega).$$

3.6 Formule de Green

La formule de Green est un outil fondamental pour la résolution des EDP. elle coïncide, en dimension 1, avec la formule d'intégration par parties.
Théorème (III.6) : (Formule d' Ostrogradsky) Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 et Γ sont bord. Soit F une fonction de $C^1(\bar{\Omega})$ à valeur dans $\mathbb{R}^N$. Alors

$$\int_\Omega div(F(x))(x)dx = \int_\Gamma F(x).n(x)d\Gamma.$$

Remarque (III.5) : Dans cette formule, $n(x)$ est le vecteur unitaire normal à Γ au point x, dirigé vers l'extérieur de Ω.
Démonstration : Pour tout $x \in \Gamma$, il existe un ouvert $Q(\delta, \delta')$, un repère R et une fonction φ. Dautre part, il est toujours possible de définir des ouverts U de $\mathbb{R}^N$ et O de g
Proposition(III.5) :(Formule de Green) Soit Ω un ouvert borné de classe C^1. Alors pour toutes fonctions $u \in C^2(\bar{\Omega})$ et $v \in C^1(\bar{\Omega})$ on a :

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x)dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x)d\Gamma - \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx,$$

où $\partial u(x)/\partial n(x) := \nabla u(x).n(x)$ (dérivée normale de u).
Démonstration : Il suffit d'appliquer la formule d'Ostrogradsky avec $F(x) := v(x)\nabla u(x)$ et de remarquer que

$$div(v(x)\nabla u(x)) = v(x)\Delta u(x) + \nabla u(x).\nabla v(x).$$

3.7 Inégalité du Poincaré

L'inégalité de Poincaré est un outil fondamental que nous utiliserons dans l'application (chapitre 04). Mais auparavant, nous avons besoin des résultats suivants :
Lemme(III.3) : Soit v une fonction de $L^2(\Omega)$ dérivable au sens faible et telle que toutes ses dérivées partielles faibles, pour $1 \leq i \leq N$, sont nulles. Alors, pour chaque composante connexe de Ω, il existe une constante C telle que $v(x) = C$ presque partout dans cette composante connexe.
Définition (III.12) : Un ouvert Ω est dit borné dans une direction s'il existe un vecteur unitaire $d \in \mathbb{R}$ et une constante $A > 0$ tels que

$$\Omega \subset \Big\{ x \in \mathbb{R}^N \ : \ -A \leq x.d \leq A \Big\}.$$

Proposition (III.6) (inégalité de Poincaré) : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné dans au moins une direction de l'espace. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega |v(x)|^2\,dx \leq C \int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,dx,$$

ou bien

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Démonstration : On procède par contradiction.
S'il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que, pour tout fonction $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega |v(x)|^2\,dx \leq C \int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,dx,$$

cela veut dire qu'il existe une suite $v_n \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$1 = \int_\Omega |v_n(x)|^2\,dx > n \int_\Omega |\nabla v_n(x)|^2\,dx. \tag{3.12}$$

En particulier (III.12) implique que la suite v_n est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Par application du théorème de Rellich, il existe une sous-suite $v_{n'}$ qui converge dans $L^2(\Omega)$.
De plus (III.12) montre que la suite $\nabla v_{n'}$ converge vers zéro dans $L^2(\Omega)$. Par conséquent, $v_{n'}$ est une suite de Cauchy dans $H_0^1(\Omega)$, qui est un espace de Hilbert, donc elle converge dans $H_0^1(\Omega)$ vers une limite v. comme on a

$$\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |\nabla v_n(x)|^2\,dx < \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

on en déduit, en vertu du lemme (III.3), que v est une constante dans chaque composante connexe de Ω. Mais comme v est nulle sur le bord $\partial\Omega$ (en vertu de la remarque (III.5)), v est identiquement nulle dans tout Ω. Par ailleurs,

$$\int_\Omega |v(x)|^2\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |v_n(x)|^2\,dx = 1,$$

ce qui est une contradiction avec le fait que $v = 0$.
Montrons maintenant que L^∞ n'est pas séparable.
Pour tout $a \in \Omega$ on fixe $r_a < dis(a, C\Omega)$; on pose $u_a = 1_{B(a,r_a)}$ et

$$O_a = \{f \in L^\infty \;;\; \|f - u_a\|_{L^\infty}\}.$$

On vérifie aisément que la famille $(O_a)_{a\in\Omega}$ satisfait (1), (2) *et* (3).

Chapitre 4

Application au problème elliptique de Dirichlet

Quand on cherche la solution d'une EDP, on peut être confronter aux problèmes suivants :

– La solution de EDP peut ne pas $\hat{e}$tre assez régulière pour donner un sens classique à l'équation .

– La solution peut $\hat{e}$tre régulière mais l'espace en question n'a pas les bonnes propriétés pour obtenir directement l'existence de la solution dans cet espace.

On va donc essayer de donner un sens plus faible à la notion de la solution, sans perdre de vue si possible les notions les plus naturelles. Donner un sens faible à une EDP signifie :

1. Chercher une solution dans un espace de régularité plus faible que souhaité.
2. Établir, en générale de fonction tests et d'intégration par partie " formelle", en série d'équation que doit vérifier cette solution.

Les difficultés d'une telle approche sont nombreuses :

– Le choix de l'espace fonctionnel dans lequel on va chercher la solution est crucial pas toujours unique et par fois non trivial.

– Si on affaiblit trop la notion de solution il sera apriori plus facile de démontrer l'existence mais les propriétés de l'unicité seront plus difficiles à obtenir .

– Si on n'affaiblit pas suffisamment l'équation, l'existence sera ardu à prouver mais l'unicité sera plus simple il s'agit donc de trouver un juste équilibre.

4.1 Position du problème

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ de classe C^1 :

$$\begin{cases} -\Delta\, u \;=\; f \quad dans\; \Omega; \\ \quad u \;=\; 0\; sur\; \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

s'appelle l'équation de Poisson. Cette équation intervient dans de nombreux domaines des mathématiques et de ses applications. Par exemple, pour $n = 3$, si f représente une densité de charge électrique présente dans Ω, alors $-u$ est le potentiel électrique dans Ω quand le bord de Ω est parfaitement conducteur. Le gradient de $-u$ est le champ électrique. Plus généralement, ce problème intervient dans les questions relatives au potentiel newtonien.
Mais il y a bien d'autres interprétations. Ainsi, si f représente une densité de sources de chaleur, alors u est la température à l'équilibre dans Ω si l'on maintient $\partial\Omega$ à 0^0. Il existe également une interprétation probabiliste de ce problème aux limites. Par exemple, si $f = 2$, alors $u(x)$ est l'espérance du premier temps de sortie de Ω d'un mouvement brownien partant de x, c'est−à−dire en *très*, *très* gros, le temps moyen que met une particule partant de x et se déplaçant au hasard dans Rn pour arriver à la frontière de Ω. La proche variationnelle pour étudier (4.1) est constitué de trois étapes que nous détaillons.

4.1.1 Formulation variationnelle

Le but de cette première étape est seulement de trouver la formulation variationnelle (4.2) on vérifiera l'équivalence précise avec (4.1) au cours de deuxième étape .
Dans un premier temps, il faut proposer une formulation variationnelle pour $f \in L^2(\Omega)$ du problème au limite (4.1), c'est à dire qu'il faut trouver une forme bilinéaire $a(.,.)$, une forme linéaire $L(.)$ et un espace de Hilbert V tels que (4.1) soit équivalente à :

$$Trouver: \ u \in V \quad tel\ que \quad a(u,v) = L(v)\ pour\ tout\ v \in V \tag{4.2}$$

Pour trouver la formulation variationnelle on multiple (4.1) par une fonction du test régulière v et on intégré par partie sur Ω a l'aide de la formule de Green (III.4) on trouve :

$$\int_\Omega fvdx = -\int_\Omega \Delta u.v\ dx = \int_\Omega \nabla u.\nabla v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\ ds \tag{4.3}$$

Comme u doit satisfaire une condition de limite de Dirichlet $u = 0 \quad sur \quad \partial\Omega$, on choisit un espace de Hilbert tel que toute fonction $v \in V$ vérifie aussi $v = 0$ sur $\partial\Omega$. Dans ce cas l'égalité (4.3) devient :

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)\ dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx, \tag{4.4}$$

pour que le terme de gauche (4.4) ait un sens il suffit que ∇u et ∇v appartiennent à $L^2(\Omega)$ (composante par composante), et pour que le terme de droit (4.4) ait aussi un sens il suffit que v appartienne à $L^2(\Omega)$ (on a supposé que $f \in L^2(\Omega)$). Par conséquent, un choix raisonnable

pour l'espace de Hilbert est $V = H_0^1(\Omega)$, le sous espace $H^1(\Omega)$ dont les éléments s'annulent sur le bord $\partial\Omega$.
En conclusion, la formulation variationnelle proposé pour (4.1) est :

$$Trouver \;\; v \in H_0^1(\Omega) \;\; telque \quad \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \tag{4.5}$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v, \quad L(v) = \int_\Omega f v dx.$$

4.1.2 Équivalence avec l'équation

La deuxième étape consiste à vérifier qu'en résolvant la formulation variationnelle (4.5) on a bien résolu le problème au limite (4.1) et à préciser dans quel sens la solution (4.5) est une solution de (4.1), en d'autre terme, il s'agit d'interpréter la formulation et de retourner à l'équation. Pour cela on procédé aux même intégrations aux partie qu'on conduit à la formulation variationnelle mais en sens inverse ; et on les justifiant soigneusement.
Cette justification est très facile si l'on suppose que la solution de la formulation variationnelle est régulière (précisément dans $H^1(\Omega)$) et que l'ouvert Ω est aussi régulier, ce que nous faisons dans un premier temps, en effet il suffit d'invoqué la formule de Green pour

$$v \in H_0^1(\Omega) \quad \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx = \int_\Omega v \Delta u dx$$

Puisque $v = 0$ sur le bord $\partial\Omega$, on en déduit alors

$$\int_\Omega (\Delta u + f) v dx = 0 \;\; \forall\, v \in D(\Omega),$$

Lemme (IV.1) : Soit $f \in L^2(\Omega)$. Si pour tout fonction $\Phi \in D(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega f(x)\Phi(x) dx = 0,$$

$$alors \;\; f(x) = 0 \;\; p.p. \;\; sur \;\Omega.$$

Ce ci implique en vertu du lemme (IV.1) que $-\Delta\, u \;=\; f$ dans $L^2(\Omega)$ et on a l'égalité.

$$-\Delta\, u \;=\; f \;\; p.p. \;\; dans \;\Omega.$$

De plus :si Ω est un ouvert borné de classe C^1 alors le théorème de la trace affirme (plus précisément la proposition (III.4)) que toute fonction de H_0^1 a une trace sur $\partial\Omega$ nulle dans

$L^2(\Omega)$. on en déduit en particulier que :

$$u = 0 \ \ p.p. \ \ sur \ \ \partial\Omega.$$

On a bien bien retrouver l'équation de la condition au limite de (4.1).

4.1.3 Formulation énergie

Si $a(.,.)$ est symétrique au lieu d'adopter la formulation variationnelle (4.5) on peut aussi chercher $u \in V$ comme fonction minimisante une énergie . On pose :

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - \int_\Omega fv dx.$$

Pour $v \in V$ la formulation énergie devient à chercher u appartient a V tel que :

$$J(u) \ \leq \ J(v) \tag{4.6}$$

Ce que l'on exprime aussi en disant que u est solution du problème d'optimisation :

$$\inf_{v \in V} \ J(v). \tag{4.7}$$

Proposition (IV.1) : Une fonction u est solution de la formulation variationnelle (4.5) si et seulement si u est solution de la formulation énergie (4.6).
Démonstration : On développe $J(u + \theta v)$ où θ est un paramètre réel et v est une fonction teste appartient à V.
On suppose que u est solution du problème énergie on a :
et par intégration sur le domaine Ω il vient :

$$|\nabla(u + \theta v)|^2 = |\nabla u|^2 + 2\theta\nabla u.\nabla v + \theta^2 |\nabla v|^2 , \tag{4.8}$$

et par intégration sur le domaine Ω, il vient :

$$J(u + \theta v) = J(u) + \frac{\theta^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx + \{a \langle u, v\rangle - L(v)\rangle . \tag{4.9}$$

On écrit maintenant l'hypothèse sous la forme suivante :

$$J(u) \leq J(u + \theta v) \tag{4.10}$$

En tenant compte la relation (4.10) il vient :

$$[a(u,v)) - L(v)] \cdot \theta + \frac{1}{2}\left[\int_\Omega |\nabla v|^2\, dx\right]\theta^2 \geq 0, \tag{4.11}$$

cette relation est vraie quel que soit θ appartient à $\mathbb{R}$ le polynôme de second degré au membre de gauche de la relation (4.11) est nul en zéro et reste toujours positif, donc sa dérivée en zéro est nulle ce qui exprime très exactement la relation (4.5) l'implication $ENR \Rightarrow FV$ est donc établie.
Réciproquement ; si u solution de la formulation variationnelle on a :

$$J(v) - J(v) = \{a(u, v-u) - L(v-u)\} + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u-v)|^2\, dx.$$

Le terme entre accolade est nulle car u est solution du problème FV (la fonction test $u-v$ au lieu de v) et le terme complémentaire est intégrale d'un carré, donc est positif, la relation (4.7) est donc satisfaite, ce qui achève la démonstration.

4.2 Existence et unicité de la solution

4.2.1 Existence d'une solution

Montrons que les hypothèses du théorème (I.9) sont vérifiées :

1) L'espace H_0^1 muni de la norme de H^1 est un espace de Banach, car par définition (III.7) H_0^1 est un sous espace fermé de H^1 qui est un espace de Banach (Théorème (III.2)).
2) L'espace de Banach H_0^1 est séparable et réflexif, car est un sous espace fermé de H^1 qui est séparable et réflexif (proposition (III.3)).
3) la fonctionnelle J est convexe, propre et s.c.i.
   a) J est convexe : pour $t \in]0,1[$

$$J(tv + (1-t)u) = \frac{1}{2}\left[\int_\Omega |\nabla(tv + (1-t)u)|^2\, dx\right] + \int_\Omega f(tv + (1-t)u)dx;$$

$$J(tv + (1-t)u) \leq tJ(v) + (1-t)J(u) + (t^2 - t)\int_\Omega (|\nabla v| - |\nabla u|)^2 dx;$$

$$J(tv + (1-t)u) \leq tJ(v) + (1-t)J(u).$$

   b) J est propre : car, $v \in H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ donc $v,\ \nabla v \in L^2(\Omega)$ mais Ω est fini donc v et f sont dans $L^1(\Omega)$ (proposition (II.1)) ; donc $|J(v)| \neq +\infty$, d'après la définition (I.19) J est propre.

c) J est continue.

4) La fonctionnelle J est coercive car :
En utilisant la constante C de l'inégalité du Poincaré (proposition(III.6)) :

$$\left|\int_\Omega fu\right| \leq \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\|u\|_{H^1},$$

$$\leq C^2\|f\|_{L^2}^2 + \frac{1}{C_P^2}\|u\|_{H^1}^2 ;$$

Puisque $J(u) \geq 1/4C_P^2\|u\|_{H^1}^2 - \|f\|_{L^2}^2$, on en déduit la coercivité .

Comme J est Gâteaux-différentiable en tout point $u \in H^1(\Omega)$, avec

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_\Omega \nabla u.\nabla v - \int_\Omega fv,$$

il en résulte que, si u est un minimum, alors la condition (proposition (I.5)) $\langle J'(u), v\rangle = 0$ nous donne, avec $v \in D(\Omega)$, le résultat $-\Delta u = f$.

4.2.2 Unicité de la solution

Supposons que u et v dans $H_0^1(\Omega)$ qui vérifient toutes deux l'équation .
Par différence $u - v$ vérifie :

$$\Delta(u - v) = 0 \tag{4.12}$$

en multipliant par $u - v$, en intégrant sur Ω et en utilisant la formule de Green généralisée vue au chapitre deux, on obtient :

$$\int_\Omega |\nabla(u - v)|^2\, dx = 0 \qquad d'\breve{o}\breve{u} \;\; u - v = Cte \tag{4.13}$$

Comme $u - v = 0$ sur le bord, on obtient le résultat.

4.3 L'indépendance continué par rapport aux données

Pour que le problème aux limite (4.1) soit bien posé (au sens de Hadamard), il faut en plus de l'existence et l'unicité de la solution montrer que la solution dépend contin$\hat{u}$ement des données.

Proposition (IV.2) : Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et soit $f \in L^2(\Omega)$ l'application qui à $f \in L^2(\Omega)$ fait correspondre la solution unique de la FV de (4.1) est linéaire et continué de $L^2(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ .En particulier il existe une constante $C \geq 0$telle que $f \in L^2(\Omega)$.

$$On\ a\ \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Démonstration : La linéarité de $f \to u$ est évidente. Pour obtenir la contin$\hat{u}$té on prend $v = u$ dans la formulation variationnelle.

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \int_\Omega f u dx.$$

On majore le terme de droite à l'aide de l'inégalité de Cauchy Schwartz, et on minore celui de gauche par la coercivité de la forme bilinéaire .

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

d'$\grave{o}u$ en déduit le résultat.

Remarques : L'inégalité (4.8) ce qu'on appelle une estimation d' énergie, elle garantit que l'énergie de la solution est contrôlée par celle de la donnée.

Les estimations d'énergie sont très naturelles d'un point de vue physique st très utiles d'un point de vue mathématique .

La fonctionnelle J est fortement convexe, donc on peut obtenir directement l'existence et l'unicité gr$\hat{a}$ce au théorème (I.10).

4.4 Problème Fortement elliptique

4.4.1 Énoncé du problème

Soit Ω un domaine de classe C^1 et borné et f un élément de $L^2(\Omega)$. Soit $A = A_{ij} \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^{N \times N})$ telle que : (1) pour tous i et j dans $[1, N]$, on a $Aij = Aji$;
(2) il existe $\alpha \geq\neq 0$ tel que :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}^N, \sum_{ij} A_{ij} x_i x_j \geq \alpha \left|x\right|^2 . \tag{4.14}$$

Cette dernière propriété est dite uniforme ellipticité de A. On cherche u solution du problème :

$$\begin{cases} -\sum_{ij} \partial_i(A_{ij}\partial_j u\,) = \ f \quad dans\ \Omega; \\ \qquad\qquad u \ = \ 0\ sur\ \partial\Omega \end{cases} \tag{4.15}$$

4.4.1.1 Remarque

Ce problème s'écrit $-div(A(x)\nabla u) = f$, donc comme une EDP (cf. préambule) sous forme divergence. Un avantage, entre autres, à l'existence de cette écriture, est d'obtenir une formulation sous forme variationnelle du problème. Ce problème est une généralisation du Laplacien :, puisqu'il suffit de choisir $A_{ij} = \delta_{ij}$: pour l'obtenir. Existence et unicité d'une solution. 11 suffit de suivre les mêmes arguments, aussi bien pour l'unicité que pour l'existence, que ceux utilisés dans le problème précédent. La fonctionnelle J que l'on associe à ce problème s'écrit :

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla u(x)dx - \int_\Omega f(x)u(x)dx. \tag{4.16}$$

où $A(x)X.Y$ désigne le scalaire $A_{ij}(x)X_iY_j$. La formulation variationnelle de est ainsi :

$$inf_{u\in H_0^1(\Omega)}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla u(x)dx - \int_\Omega f(x)u(x)dx.\right\} \tag{4.17}$$

On prouve les hypothèse du théorème :

- On démontre la convexité et la continuité de J comme le cas précédent.
- La coercivité est une conséquence de l'inégalité de Poincaré et de l'uniforme ellipticité de A.

La fonctionnelle J est Gâteaux-différentiable, sa dérivée étant définie par :

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla u(x)dx - \int_\Omega f(x)u(x)dx. \tag{4.18}$$

4.5 Régularité de la solution

On s'intéresse maintenant *à* la régularité des solutions des problèmes $[Dr]$ précédents.

Théorème (IV.1) : Soit Ω un, domaine borné de classe C^2 et f un élément de $L^2(\Omega)$. Soit A vérifiant les hypothèses précédentes. Alors, si u est la solution dans $H_0^1(\Omega)$ de (4.15), elle appartient $H^2(\Omega)$.

Démonstration : On donne seulement l'idée de la démonstration, en utilisant une partition de l'unité φ_i attachée au recouvrement de classe C^1 de Ω, on se ramène à montrer que chaque

$\varphi_i u$ est dans $H^2(\Omega)$.

En effet si $\varphi_i u$ est dans $D(\mathbb{R}^n)$, elle vérifie aussi une équation.

$$div(A(x)\nabla(\varphi_k u)) \ \in \ L^2(\Omega),$$

car le second membre de l'expression :

$$div(A(x)\nabla(\varphi_k u)) = \sum_i [\partial_i(A_{ij}\partial_j\varphi_k u) + A_{ij}(\partial_{ij}\varphi_k)u + A_{ij}(\partial_j\varphi_k\partial_i u)] + \varphi_k div(A(x)\nabla u)$$

appartient $à$ $L^2(\Omega)$. Dans le cas de $K = 0$, puisque $\varphi_0 u$ est $à$ support compact dans Ω. elle satisfait une équation de la forme

$$div(A(x)\nabla(\varphi_0 u)) \ \in \ L^2(\mathbb{R}^N).$$

ce qui justifie une première étape, $à$ savoir :

– Étape 1. On commence par montrer le résultat sur $\mathbb{R}^N$, autrement dit : si $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ $à$ support compact et satisfait $à$ l'équation

$$-div(A(x)\nabla u) = f, avecf \in L^2(\mathbb{R}^N)$$

et A symétrique, lipschitzienne et coercive, alors, $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$. Pour les autres fonctions $\varphi_k u$, on doit donc montrer que si u est $à$ support compact dans un ouvert de la forme $\Omega_k \cap \ \overline{\Omega}$, avec la condition au bord $\varphi_k u(x', a(x')) = 0$ et satisfait par ailleurs $à$

$$div(A(x)\nabla\varphi_k u) \in L^2, \ alors \ \varphi_k u \in H^2.$$

Outre le fait que a peut être la fonction nulle et donc que le bord est localement droit, on peut par un changement de cartes, comme on le montre plus loin, se ramener $à$ ce cas. Par conséquent. cette remarque justifie une deuxième étape, $à$ savoir :

– Étape 2. On étend le résultat obtenu $à$ la première étape $à$ l'ouvert $\mathbb{R}^{N-1}\times]0, +\infty[$ avec la condition $u = 0$ sur $x_N = 0$. La démonstration se terminera par :

– Étape 3. On étend $à$ l'aide de cartes locales et de partitions de l'unité, le résultat au cas de Ω . Ici la difficulté provient du fait qu'en changeant de cartes,$A(x)$ est modifiée. Cette difficulté sera surmontée en remarquant que $A(x)$ est remplacée par une matrice $B(x)$, elle aussi uniformément elliptique. On pourra donc conclure en utilisant les résultats déj$à$ obtenus sur $\mathbb{R}^{N-1}\times]0, +\infty[$.

Conclusion générale et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons considéré un problème aux limites gouverné par des équations aux dérivées partielles de type elliptiques. Notre objectif est de démontrer l'existence, l'unicité, la régularité et la stabilité de la solution en se basant sur quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle et d'analyse convexe.

Comme perspective, nous voulons généraliser cette étude en appliquant cette technique variationnelle pour étudier d'autres problémes plus généraux, tels que le problème fortement elliptique avec des conditions aux limites non classiques, d'une part. Et d'autre part, de proposer quelques algorithmes numériques convenables qui nous permettent l'obtention de la solution approchée.

Bibliographie

[1] Francoise et Gilbert. les espaces fonctionnels.ISSN0989-3334, EDP science 2007.

[2] Jean-Baptiste Hiriart-Urruty, Optimisation et analyse numérique ISBN : 978-2-7598-0373-6, 2009.

[3] J.L. Lions. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications volume 1, 2 et 3, Dunod, 1968.

[4] J.C. Nedelec, Notion sur les techniques d'éléments finis, Ellipses, 1991.

[5] J. Necas, Les Méthodes Directes en Théorie des équations Elliptiques, Masson, Paris, 1967.

[6] J.-M. Bony, Cours d'analyse, éditions de l'école Polytechnique, Palaiseau, 2001.

[7] P.A. Raviart J.M. Thomas, Introduction *à* l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson, 1988.

[8] H. BREZIS - Analyse fonctionnelle, Collection Mathématiques Appliquées, Masson, Paris, 1983 ;

[9] Lars Diening, Petteri Harjulehto, Peter Hasto, Michael Ruzicka.An introd. Lebesgue and Sobolev spaces. R. A. ADAMS - Sobolev spaces, Pure and Applied Mathematics, vol. 65, Academic Press, New York-London, 1975.

[10] M.H. Vignal, Cours *é*quations aux dériv*é*es partielles elliptiques et paraboliques en Master 1 Mathématiques fondamentales.

Dans ce travail, nous avons considéré un problème aux limites elliptique. Nous avons démontré que ce problème est équivalent à un problème variationnel, et par conséquent une formulation énergie. Notre objectif est de démontrer l'existence et l'unicité de la solution en se basant sur quelques résultats d'analyse convexe. Nous avons terminé ce mémoire par étudier la régularité, ainsi que la stabilité de la solution.

Mots clés : Espace de Sobolev ; Formulation variationnelle ; Théorème de Trace ; Problème elliptique ; Théorèmes d'injection de Sobolev.

In this work, we consider the elliptic boundary value problem. We have shown that this problem is equivalent to a variational problem and therefore an energy formulation. Our goal is to demonstrate the existence and uniqueness of the solution based on some results of convex analysis. We finished this memoir by studying the regularity and stability of the solution.

Keywords : Sobolev space ; Variational formulation ; Trace theorem ; elliptic problem ; Sobolev Imbedding theorems.