الجمـــهوريـــة الجـــزائريـــة الديـمقـراطيـــــــة الشـــعبيـــــة
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعـلـيـم الـعـالـــي و الـبـحـث الـعـلـمـي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جـامـعـة عمّـــار ثـلـيـــجـــي بالأغـــواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كـلـيـــــة الـعـلـــــوم
**FACULTE DES SCIENCES**
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

# *Mémoire de MASTER*

**Domaine :** Mathématiques et Informatique
**Filière :** Mathématiques
**Option :** Analyse Mathématique

**Par**:
M$^{lle}$ : Boussen Halima

**THEME**

---

# Théorème de Radon-Nikodym

---

*Soutenu publiquement devant le jury composé de:*

| | | |
|---|---|---|
| *Mr Belacel Amar* | *M.C.(A)* | *Président* |
| *Mr Boukehila Ahcen* | *M.C.(B)* | *Examinateur* |
| *MMe Bendaouid Zohra* | *M.C.(A)* | *Examinateur* |
| *Mr Belabbaci Youcef* | *M.C.(A)* | *Encadreur* |

***Année Universitaire 2016/2017***

# Remerciements

Je remercie Dieu le tout miséricordieux pour ses grâces qui m'ont aidée et permettre de vivre un tel évènement grand et heureux. Je suis reconnaissante de toutes les personnes pour leurs conseils qu'ils ont pu me prodiguer au cours de mes études.

Nos vifs remerciements à notre encadreur Mr. Belabbaci Youssef ,docteur en Mathématiques à l' Université de Laghouat our les moyens qu'il nous à procuré afin d'élaborer ce mémoire.

Nous songeons plus particuliérement Mrs Belacel Amar et Boukehila Ahcen et MMe Bendaouid Zohra .

Nos remerciements vont également à Mr. Messelmi Mohamed, chef de département de mathématique , ainsi que tout les personnes de la bibliothéque de l'université de Laghouat, qui ont tenu à notre disposition tous les moyens et livres ; sans oublier tout le personnel et les étudiants du département Maths et informatique de l'université de Laghouat. Un grand remerciement à toutes les personnes qui ont participé de prés ou de loin pour atteindre notre objectif.

# Dédicaces

Au nom de Allah le Clément et le Miséricordieux, Je dédie ce modeste travail

Ma mère Tu es pour moi un tout et un bijou auquel ,j'attache un précieux prix en vertu ton affection digne d'une mère résolue acquise

Mon père Ce travail est le fruit de tes sacrifices ton éducation , tes conforts moral et matériel que tu m'as apporté

Ma grande famille Boussen et Saadaoui

Mes frères : Ibrahim , Bilale , Mouhamed

Mes sœurs : Reqiya , Fatima

A Mes très chères copines Amina Sakina wafa Fatima Houda Amina fadila souad Reqiya Sabrina

Aux étudient système de Mathématique 2016/2017

A tous mes professeurs du Département De Maths Informatique

# Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions le théorème de Radon-Nikodym et décompositions de Hahn et de Jordan.

Comme application on étudie la théorie de la probabilité .

**Les mots clés:** mesure , $\sigma-$algébrique , mesure absolument continue , Décompositions de Hahn et Jordan , Théorème de Radon-Nikodym , probabilité.

# Abstract

In this memoir we consider The theorem of Radon-Nikodym and Hahn and Jordan decompositions .

we will see some applications in theory of probability .

**Keywords:** measurement , $\sigma-$algebric ,absolutely continued measurement , Signed measurment, Hahn and Jordan decompositions , the theorem of Radon-Nikodym , probability .

gg

mmmmmmmmmmmmmmmmmmmmmm

# Table des matières


**1 Rappels** **4**
- 1.1 Ensembles mesurables . . . 5
- 1.2 Fonctions mesurables . . . 7
- 1.3 Les fonctions étagées . . . 8
- 1.4 Définition de l ' intégrale d ' une fonction étagée positif . . . 8
- 1.5 Le théorème de La convergence monotone . . . 9
- 1.6 fonctions intégrables à valeurs dans $\mathbb{R}$ . . . 10
- 1.7 Fonctions à variation bornée . . . 10

**2 Théorème de Radon-Nikodym** **12**
- 2.1 Mesure absolument continue . . . 12
- 2.2 Les fonctions additives et la décomposition de Jordan . . . 13
- 2.3 Mesures signées . . . 14
- 2.4 Décompositions de Hahn et de Jordan . . . 17
  - 2.4.1 Théorème de décomposition de Hahn . . . 19
  - 2.4.2 Théorème de décomposition de Jordan . . . 21
  - 2.4.3 Théorème de décomposition de Hahn − Jordan . . . 21
- 2.5 Intégrale par rapport à une mesure signée . . . 22
- 2.6 Théorème de Radon-Nikodym . . . 23

**3 Applications des théorème de Radon-Nikodym** **26**
- 3.1 Intégrale de Lebesgue- Stieltjes . . . 26
- 3.2 Quelques applications de l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes en théorie des probabilités. . . . 27
  - 3.2.1 Espérance , moments d'une v.a.r . . . 29
  - 3.2.2 Moments, inégalités de moments . . . 30
  - 3.2.3 Quelques lois classiques . . . 30
- 3.3 Mesures à variation finie . . . 31

**Conclusion** **33**

**Bibliographie** **34**

# Introduction

Le théorème de Radon-Nikodym fait partie de la théorie de la mesure.

Dans ce mémoire, nous étudions cette théorème et quelques applications de ce théorème .

Dans le premier chapitre on rappelle la notion de mesure :

- les fonctions mesurables
- espace mesurable
- $\sigma-$algébrique et $\sigma-$additive
- les fonctions a variation bornée

le deuxième chapitre Consacré a la notion de mesure absolument continue , mesure signée. on va étudier Décompositions de Hahn et Jordan et Théorème de Radon-Nikodym

Et enfin dans le troisième chapitre on va voir quel que Applications de Théorème de Radon-Nikodym .

# Notation

- **Intersection :** $A \cap B$ est l'intersection des ensembles $A$ et $B$, i.e. l'ensemble des points appartenant à la fois à $A$ et à $B$.

- **Réunion :** $A \cup B$ est la réunion des ensembles $A$ et $B$, i.e. l'ensemble des points appartenant à au moins l'un de ces deux ensembles.

- **Complémentaire :** si $A \subset E$ sont complémentaire (dans $E$) est l'ensemble des points de $E$ n'appartenant pas à $A$, on le note $A^c$ , ou parfois $E \setminus A$.

- **Différence symétrique :** $A \triangle B$ est l'ensemble des points appartenant à l'un des deux ensembles $A$ ou $B$, mais pas aux deux , on a donc $A \triangle B = (A \setminus (A \cap B)) \cup B \setminus (A \cap B))$.

- **Ensemble vide :** $\varnothing$. C'est l'ensemble ne contenant aucun point
  Les ensembles suivants seront utilisés sans cesse :

- $\mathbb{N}$ = ensemble des entiers naturels : $0, 1, 2, ...$

- $\mathbb{N}^*$ = ensemble des entiers naturels non nuls : $1, 2, ...$

- $\mathbb{R}$ = ensemble des réels $= ]-\infty, +\infty[$

- $\mathbb{R}^d$ = espace euclidien réel de dimension $d$ (donc $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$)

- $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$

# Chapitre 1

# Rappels

- **Ensembles disjoints :** Les ensembles $A$ et $B$ sont des disjoints si $A \cap B = \varnothing$.

- **Anneau :** Une famille d'ensembles non vide $\mathcal{A}$ est appelée anneau, si elle possède la propriété que $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$ impliquent $A \triangle B \in \mathcal{A}$ et $A \cap B \in \mathcal{A}$.
  Comme pour deux ensembles arbitraires $A$ et $B$ on a toujours
  $$A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$$
  et
  $$A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$$
- **Ensemble positif par rapporte à $\nu$ :** une mesure définie sur une $\sigma-$algèbre $\mathcal{A}$ de sous-ensembles de l'espace $X$. Un ensemble $E \subset \mathcal{A}$ est dit positif par rapport à $\nu$ si $\nu(E \cap F) \geq 0$ pour tout $F \in \mathcal{A}$ .

- **Ensemble négatif par rapporte à $\nu$ :** une mesure définie sur une $\sigma-$algèbre $\mathcal{A}$ de sous-ensembles de l'espace $X$. Un ensemble $E \subset \mathcal{A}$ est dit négatif par rapport à $\nu$ si $\nu(E \cap F) \leq 0$ pour tout $F \in \mathcal{A}$ .

- **Fonction caractéristique d'un ensemble :** Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soit $A \in \mathcal{A}$. On appelle fonction caractéristique de l' ensemble $A$, et on note $1_A$ la fonction définie par : $1_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $1_A(x) = 0$ si $x \in A^c$

## 1.1 Ensembles mesurables

**Définition 1.1.** ($\sigma-$ algèbre) Soit $X$ un ensemble. On appelle $\sigma-$ algèbre sur $X$ tout ensemble $\mathcal{A}$ de parties de $X$ tel que :

1. $X \in \mathcal{A}$
2. si $A \in \mathcal{A}$ alors $A^c \in \mathcal{A}$
3. si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d' éléments de $\mathcal{A}$, alors $\cup_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{A}$ (stabilité par union dénombrable) Le couple $(X, \mathcal{A})$ est alors appelle espace mesurable.

**Définition 1.2.** (espace mesurable) On appelle espace mesurable un couple $(X, \mathcal{A})$, où $\mathcal{A} \subset P(X)$ est une $\sigma$-algèbre. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés parties mesurables, ou parfois $\mathcal{A}-$mesurables s ' il n 'y a pas d'ambiguité. On dit que $(X, \mathcal{A})$ est un espace mesurable.

Enonçons quelques conséquences de la définition :

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$
2. Si $A \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$
3. Puisqu ' on peut toujours prendre $A_n = \varnothing$ pour $n$ assez grand, la propriété (3) entraîne que $\mathcal{A}$ est stable par réunions finies (et de meme par intersection finies).

**Exemple 1.1.**
- $\mathcal{P}(X)$ est une $\sigma-$ algèbre.
- $\mathcal{A} \subset X \mid A$ ou $A^c$ est au plus de $n$. est une $\sigma-$ algèbre.

**Probleme 1.1.** *si $(\mathcal{A}_i)i \in I$ est une famille de $\sigma-$ algèbre de $X$ alors $\cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ est une $\sigma-$ algèbre.*

**Définition 1.3.** Soit $\mu$ une mesure sur $(X, \mathcal{A})$. On dit que
- $\mu$ est finie si $\mu(X) < \infty$.
- $\mu$ est $\sigma$-finie si il existe une suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de mesurables telle que $X = \cup_{n\geqslant 0} A_n$ et $\mu(A_n) < \infty$ pour tout $n \geqslant 0$.

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable

**Définition 1.4.** Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On appelle mesure positif sur $X$ une application $\mu$ définie sur $\mathcal{A}$, à valeurs dans $[0, +\infty]$ et vérifiant la propriété de $\sigma$-additivité , pour toute famille dénombrable $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d ' ensembles mesurables disjoints deux à deux :

$$\mu[\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k] = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu[A_k]$$

Le triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est alors appelé un espace mesuré.
Par abus de notation, on dira souvent que $(X, \mu)$ est un espace mesuré, la $\sigma-$ algèbre $\mathcal{A}$ étant alors implicite, ou même que $X$ est un espace mesuré, la $\sigma-$ algèbre $\mathcal{A}$ et la mesure $\mu$ étant alors implicites.

**Définition 1.5.** ($\sigma-$ additivité. ) La mesure $\mu$ est dite dénombrablement additive ou $\sigma-$additive, si quels que soient les ensembles $A, A_1, A_2, \cdots A_n, \cdots$ appartenant à son domaine de définition $\mathcal{A}_\mu$ et vérifiant les conditions

$$A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_i \cap A_j = \varnothing$$

pour $i \neq j$ on a l'égalité

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

**Proposition 1.1.** 1. **Croissance :** Une mesure $\mu$ est une application croissante : Si $A, B \in \mathcal{A}$ avec $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$
En effet $A = B \cup (A \setminus B)$ comme l'union est disjointe, par additivité, on a

$$\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B)$$

et $\mu(A \setminus B) > 0$ .

2. **Additivité :** Si $A, B \in \mathcal{A}$ et $\mu(A \cap B) = \varnothing$,

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B)$$

.

3. **Différence propre :** $A \ , B \ \in \mathcal{A} \ \ , \ \ A \subset B$ et $\mu(A) < +\infty$ , alors $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$ En effet, cela vient de la décomposition $A = B \cup (A \setminus B)$ union disjointe.
4. **Croissance séquentielle :** Si $A_n \in \mathcal{A}$ et $A_n \subset A_{n+1}$ pour $n \geq 1$ alors

$$\mu(\cup_{n\geq 1} A_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \uparrow \mu(A_n)$$

En effet, on note que $\cup_{k=1}^{n} A_k = A_n$ Soit $C_n = A_n \setminus A_{n-1} \ \ , \ \ n \geq 1$ (avec $A_0 = \varnothing$). On montre facilement que : $\cup_{k=1}^{n} C_k = \cup_{k=1}^{n} A_k$ une inclusion vient de ce que $C_k \subset A_k$ pour tout $k$, l'autre de ce que si $x \in \cup_{k=1}^{n} A_k$ alors en notant k le plus petit entier , tel que $x \in A_k$ alors on a , $x \in C_k$ car $x \notin A_{k-1}$ et donc $x \in \cup_{k=1}^{n} C_k$ De plus les $C_k \ \ k \geq 1$ sont deux à deux disjoints : si $x \in C_k$ alors $x \notin A_{k-1}$ , et donc $x \notin C_l$ pour $l < k$ Comme les $C_k$ sont disjoints, on a :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(A_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(\cup_{k=1}^{n} A_k) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(\cup_{k=1}^{n} C_k) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(C_k)$$

(additivité) :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(C_k) = \mu(\cup_{k=1}^{+\infty} C_k)$$

$\sigma-$ additivité :

$$= \mu(\cup_{k=1}^{+\infty} A_k)$$

5. **Décroissance séquentielle :** si $A_n \in \mathcal{A}$ et $A_n \supset A_{n+1} \ \ n \geq 1$ et si $\mu(A_1) < +\infty$, alors

$$\mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \downarrow \mu(A_n)$$

Comme $\mu(A_1) < +\infty$, on peut passer aux complémentaires dans $A_1$ : en notant $B_i = A_1 \setminus A_i$ la suite $B_i, i \geq 1$ est croissante et d' après le cas précédent

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(B_n) = \mu(\cup_{n\geq 1} B_n)$$

Comme $\mu(A_1) < +\infty$ on a $\mu(B_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n)$ et $\cup_{n\geq 1} B_n = A_1 \setminus \cap_{n\geq 1} A_n$ de mesure $\mu(\cup_{n\geq 1} B_n) = \mu(A_1) - \mu(\cap_{n\geq 1} A_n)$ on a donc

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} (\mu(A_1) - \mu(A_n)) = \mu(A_1) - \mu(\cap_{n\geq 1} A_n)$$

et il suffit de retrancher $\mu(A_1) < +\infty$ (et changer le signe) pour conclure. Contre-exemple pour la décroissance sans hypothèse de finitude sur la mesure : sur $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$ soit $A_n = ]n, +\infty[$ on a $\cap_{n=1}^{+\infty} A_n = \varnothing$ de mesure nulle tandis que $\lim_{n \longrightarrow \infty} \lambda(A_n) = +\infty$.

6. $\mu$ **est sous-additive :** Si $A_n \in \mathcal{A}$ pour $n \geq 1$

$$\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n)$$

(sous-additivité).
En effet, il suffit de prouver $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ la preuve se complété ensuite par :

$$\mu(\cup_{n=1}^{m} A_i) \leq \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n)$$

puis par croissance :

$$\mu(\cup_{n\geq 1} A_n) = \lim_{m\longrightarrow+\infty} \mu(\cup_{n=1}^{m} A_n) \leq \lim_{m\longrightarrow+\infty} \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$$

On utilise la décomposition $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ en ensembles disjoints, par additivité :

$$\begin{aligned}\mu(A \cup B) &= \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A)\\ &= \mu(A) + \mu(B \setminus A)\\ &\leq \mu(A) + \mu(B)\end{aligned}$$

**Définition 1.6.** Une fonction d'ensembles $\mu(A)$ s'appelle mesure, si :

1. le domaine de définition $A_\mu$ de la fonction $\mu(A)$ est un semi- anneau d'ensembles .
2. les valeurs de la fonction $\mu(A)$ sont réelles et non négatifs .
3. la fonction $\mu(A)$ est additive, c.-à-d. pour toute décomposition d'un ensemble $A \in A_\mu$ en réunion finie :

$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$$

d'ensembles (deux à deux disjoints) $A_n \in A_\mu$ on a l'égalité :

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n)$$

## 1.2 Fonctions mesurables

**Définition 1.7.** Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. On dit que $f : X \to Y$ est mesurable si :

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

**Proposition 1.2.** Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables. Alors $f + g$, $fg$, $min(f, g)$ et $max(f, g)$ sont mesurables.

**Proposition 1.3.** Si $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable, alors $f_+$ , $f_-$ et $\mid f \mid = f_+ + f_-$ sont mesurables.

**Proposition 1.4.** Si $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable, et si $f(x) \neq 0$ , $\forall x \in X$ , alors $g$ définie par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ est mesurable.

## 1.3 Les fonctions étagées

**Définition 1.8.** Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On dit qu ' une application mesurable $f : X \to \mathbb{R}$ est étagée si $f$ ne prend qu ' un nombre fini de valeurs.
En notant $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ les valeurs de $f$ et $A_i = f^{-1}(\alpha_i)$ pour $i = 1 \cdots n$ on a donc :

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$$

**Proposition 1.5.** Soit $f : (X, \mathcal{A}) \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Alors il existe une suite croissante de fonctions (mesurables) étagées qui converge ponctuellement vers $f$.

## 1.4 Définition de l ' intégrale d ' une fonction étagée positif

On suppose à présent que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré.

**Définition 1.9.** Soit $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow [0, +\infty[$ une fonction (mesurable) étagée. On appelle intégrale de $f$ (pour la mesure positif $\mu$) la quantité

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$$

où $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$ est l ' écriture canonique de $f$.

notant $\varepsilon_+$ l'ensemble des fonctions (mesurables) étagées sur $X$ a valeurs dans $[0, +\infty[$. L 'application

$$I : \varepsilon_+ \longrightarrow [0, +\infty[$$
$$f \longrightarrow \int f d\mu$$

possède les propriétés suivantes :

1. **Additivité :**

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu \quad \forall f, g \in \varepsilon_+$$

2. **Homogénéité :**

$$\int \lambda f d\mu = \lambda \int f d\mu \quad \forall f \in \varepsilon_+, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+$$

3. **Monotonie :** Si $f$ et $g \in \varepsilon_+$ et si $f \leq g$ alors

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu$$

## 1.5 Le théorème de La convergence monotone

**Définition 1.10.** Soit $f : X \longrightarrow [0, +\infty[$ une fonction mesurable. On appelle intégrale de $f$ sur $X$ pour la mesure $\mu$, la quantité :

$$\int f d\mu = sup\{\int h d\mu \mid h \in \varepsilon_+, h \leq f\} \in [0, +\infty[$$

Si $E \subset X$ est une partie mesurable, on note aussi :

$$\int_E f d\mu = \int_E f 1_E d\mu$$

Cette intégrale possède la propriété de la monotonie :

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu$$

si $f \leq g$.

**Théorème 1.1.** *( la convergence monotone – **Beppo-Levi**) Soit $f_n : X \longrightarrow [0, +\infty[$ une suite croissante des fonctions mesurables positives, et soit :*

$$f = \lim_{n \longrightarrow \infty} f_n$$

*la limite ponctuelle des $f_n$. Alors, $f$ est mesurable et*

$$\int f d\mu = \lim_{n \longrightarrow \infty} f_n d\mu$$

**Remarque 1.1.**

1. *Si $f_n$ est une suite décroissante de fonctions mesurables positifs, et si :*

$$\int f_n d\mu < \infty$$

*alors on a*

$$\int f d\mu = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

*ou*

$$f = \lim_{n \longrightarrow \infty} f_n$$

2. *On rappelle que si $f : X \to [0, +\infty[$ est mesurable, il existe une suite croissante $f_n \leq f_{n+1}, f_n \in \varepsilon_+$ telle que $f_n(x) \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} f(x), \forall x \in X$ Alors*

$$\int f d\mu = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

**Corollaire 1.1.** *Soit $(f_n)$ une suite des fonctions mesurables positives et soit :*

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \ , \ f : X \longrightarrow [0, +\infty[.$$

*Alors f est mesurable et*

$$\int f d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\mu$$

*C'est la propriété " d ' additivité dénombrable ".*

**Proposition 1.6.** Soit $f : X \longrightarrow [0, +\infty[$ une fonction mesurable

1. $\forall a > 0 \;\; \mu(\{x \in X \mid f(x) \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int f d\mu.$

2. $\int f d\mu = 0 \quad \Leftrightarrow f = 0$ presque partout .

3. Si $\int f d\mu < \infty$, alors $f < \infty$ presque partout .

4. Si $f$ et $g : X \longrightarrow [0, +\infty[$ sont mesurables, alors :

$$f = g \text{ presque partout } \int f d\mu = \int g d\mu.$$

## 1.6 fonctions intégrables à valeurs dans $\mathbb{R}$

**Définition 1.11.** Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On dit que $f$ est intégrable (ou sommable) par rapport à $\mu$ si :

$$\int \mid f \mid d\mu < \infty$$

Dans ce cas, on pose

$$\int f d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu$$

où $f_+ = max(f, 0)$ et $f_- = max(-f, 0)$.
On note $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ l ' espace des fonctions intégrables sur $X$.

## 1.7 Fonctions à variation bornée

on considérer la classe des fonctions qui peuvent être représentées sous la forme des différences de fonctions monotones.

**Définition 1.12.** Une fonction $f$, définie sur le segment $[a, b]$, s'appelle fonction à variation bornée, s'il existe une constante $C$ telle que pour toute subdivision du segment $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$$

on ait

$$\sum_{k=1}^{n} \mid f(x_k) - f(x_{k-1}) \mid \leq C.....(1)$$

Toute fonction monotone est à variation bornée, car la somme figurant au premier membre de l'inégalité (1) pour une telle fonction ne dépend pas du choix de la subdivision et vaut toujours $\mid f(b) - f(a) \mid$ .

**Définition 1.13.** Soit $f$ une fonction à variation bornée. La borne supérieure des sommes (1) pour toutes les subdivisions finies possibles du segment $[a, b]$ , s'appelle variation totale de la fonction $f$ sur le segment $[a, b]$ . et se note $V_a^b[f]$ Ainsi,

$$V_a^b[f] = sup \sum_{k=1}^{n} \mid f(x_k) - f(x_{k-1}) \mid$$

**Remarque 1.2.** *Une fonction $f$ définie sur toute la droite numérique s'appelle fonction à variation bornée, si les nombres*

$$V_a^b[f] \quad a \ \ et \ \ b \in \mathbb{R}.$$

*forment un ensemble borné Dans ce cas la limite :*

$$\lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} V_a^b[f]$$

*s'appelle variation totale de la fonction $f$ sur la droite $-\infty < x < \infty$ et se note $V_{-\infty}^{\infty}[f]$. les propriétés fondamentales de la variation totale d'une fonction.*

1. *Pour toute constante $\alpha$ on a :*

$$V_a^b[\alpha f] = \mid \alpha \mid V_a^b[f]$$

2. *Si $f$ et $g$ sont des fonctions à variation bornée, $f + g$ est aussi une fonction à variation bornée et :*

$$V_a^b[f + g] \leq V_a^b[f] + V_a^b[g]$$

3. *Si $a < b < c$, alors :*

$$V_a^b[f] + V_b^c[f] = V_a^c[f]$$

4. *La fonction :*

$$v(x) = V_a^x[f]$$

*est monotone non décroissante.*

Soit $f$ une fonction quelconque à variation bornée, définie sur le segment $[a, b]$, et soit $v$ sa variation totale sur $[a, x]$. Considérons la différence :

$$\Phi = v - f$$

Cette différence est une fonction monotone non décroissante. En effet, soit $x^{'} \leq x^{"}$ Alors

$$\Phi(x^{"}) - \Phi(x^{'}) = [v(x^{"}) - v(x^{'})] - [f(x^{"}) - f(x^{'})]$$

D'autre part, on a toujours :

$$\mid f(x^{"}) - f(x^{'})) \mid \leq v(x^{"}) - v(x^{'})) = V_{x'}^{x^{"}}[f]$$

donc son premier membre également, est non négatif.

**Théorème 1.2.** *Toute fonction à variation bornée est différence de deux fonctions monotones non décroissantes.*

# Chapitre 2

# Théorème de Radon-Nikodym

Dans ce chapitre on va étudier le Théorème de Radon-Nikodym .

ainsi que quelque définitions et résultats classiques concernant la mesure absolument continue et signée .

## 2.1 Mesure absolument continue

**Définition 2.1.** Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0, \infty[$ une application $\mathcal{A}-$mesurable. Soit $\nu$ l'application définie comme suit

$$\nu \ : \ \mathcal{A} \ \to \ [0, \infty[ \quad \nu(A) \ \mapsto \ \int_A f d\mu.$$

L'application $f$ est appelée une densité de $\nu$ par rapport à $\mu$. On note parfois $\nu = f \cdot \mu$ .

**Définition 2.2.** Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $\mu$, $\nu$ deux mesures sur $(X, \mathcal{A})$. La mesure $\nu$ est absolument continue par rapport à $\mu$ , si tout ensemble $A \in \mathcal{A}$ satisfaisant $\mu(A) = 0$ satisfait aussi $\nu(A) = 0$ .

Si $\nu$ est absolument continu par rapport à $\mu$, on écrit $\nu \ll \mu$ Une mesure est absolument continue si elle est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesurée et $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ une application positive. on a vu que $f \cdot \mu$ est une mesure sur $\mathcal{A}$ ( cf définition (2.1) ) si $A \in \mathcal{A}$ est un ensemble $\mu(A) = 0$ , $f\chi_A$ est égal à 0 $\mu$ -presque partout et donc $f \cdot \mu(A) = 0$ . Ainsi, $f \cdot \mu$ est mesure absolument continu par rapport à $\mu$ . on a voir que si $\mu$ est une mesure $\sigma-$finie toute mesure absolument continue par rapport à $\mu$ est de ce type.

**Proposition 2.1.** Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable $\mu$ une mesure sur $(X, \mathcal{A})$ et $\nu$ une mesure finie sur $(X, \mathcal{A})$ . on a $\nu \ll \mu$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ , il existe $\sigma > 0$ tel que chaque ensemble $A \in \mathcal{A}$ vérifiant $\mu(A) < \sigma$ vérifie $\nu(A) < \varepsilon$ .

**preuve 2.1.** *Supposons d'abord que pour chaque $\varepsilon > 0$ , il existe $\sigma > 0$ vérifiant l' énonce et soit $A \in \mathcal{A}$ un ensemble vérifiant $\mu(A) = 0$ . On a ainsi $\mu(A) < \sigma$ quel que soit $\sigma$ et donc $\nu(A) < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon$ . Ceci entraîne $\nu(A) = 0$ et l'absolue continuité de $\nu$ par rapport à $\mu$ .*

*Montre que s'il n'existe pas de couple $(\varepsilon, \sigma)$ vérifiant l' énoncé, alors $\nu$ n'est pas absolument continu par rapport à $\mu$. Supposons donc qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall\ \sigma > 0$ , il existe $A_\sigma \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A_\sigma) < \sigma$ et $\nu(A_\sigma) \geq \varepsilon$ . Pour chaque $k$, soit donc $A_k \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A_k) < 1/2^k$ et $\nu(A_k) \geq \varepsilon$ On a :*

$$\mu(\cup_{j=k}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \mu(A_j) < 1/2^{k-1}$$

*et*

$$\nu(\cup_{j=k}^{\infty} A_j) \geq \nu(A_k) \geq \varepsilon$$

*pour tout k. Ainsi, par la continuité des mesures, l'ensemble* $A = \cap_k \cup_{j=k}^{\infty} A_j$ *vérifie* $\mu(A) = \lim_k \mu(\cup_{j=k}^{\infty} A_j) = 0$ *et* $\nu(A) = \lim_k \nu(\cup_{j=k}^{\infty} A_j) \geq \varepsilon$ .

*Au final,* $\nu$ *n'est pas une mesure absolument continue par rapport à* $\mu$.

**Un exemple de mesure absolument continue**
Si $f$ est mesurable positive , la mesure $\nu = f \cdot \mu$ définie par :

$$\nu(A) = \int_A f(x) d\mu \tag{2.1}$$

est absolument continue par rapport à $\mu$ .

## 2.2 Les fonctions additives et la décomposition de Jordan

Soit $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ définie sur une algèbre $\mathcal{A}$ d'ensembles est une fonction définie additive si

$$\forall\, A, B \in \mathcal{A} : \quad A \cap B = \varnothing \quad \Rightarrow \quad \nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B) \tag{2.2}$$

**Définition 2.3.** (Variations supérieures / inférieures) Soit $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ définie par une classe de sous-ensembles $\mathcal{A}$ d'un ensemble $X$.

$$\mu^+(A) := sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subset A\} \tag{2.3}$$

est appelée variation supérieure de $\mu$ sur A

$$\mu^-(A) := sup\{-\mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subset A\} \tag{2.4}$$

est appelée variation inférieure de $\mu$ sur $A$.

**Lemme 2.1.** *Si* $\mu$ *est une fonction additive sur une algèbre* $\mathcal{A}$*, alors* $\mu^+$ *et* $\mu^-$ *sont des fonctions additives sur* $\mathcal{A}$*. En outre,* $\mu^{\pm}(A) > 0$ *pour tout* $A \in \mathcal{A}$ .

**Démonstration 2.1.** *Soit* $A$ *et* $B$ *disjoints si* $E \subset A \cup B$ *avec* $E \in \mathcal{A}$ *alors* $A \cap E$ *et* $B \cap E$ *sont disjoints et d' après l'additivité finie de* $\mu$

$$\mu(E) = \mu(A \cap E) + \mu(B \cap E) \leqslant \mu^+(A) + \mu^+(B) \tag{2.5}$$

*Il s'ensuit que :*

$$\mu^+(A \cup B) \leqslant \mu^+(A) + \mu^+(B) \tag{2.6}$$

*De même, si* $E \subset A$ *et* $F \subset B$ *et* $E, F \in A$*, alors* $E \cup F \subset A \cup B$ *et* $E \cap F = \varnothing$ *et donc*

$$\mu^+(A \cup B) \geqslant \mu(E \cup F) \geqslant \mu(E) + \mu(F) \tag{2.7}$$

*Prendre du côté droit sur tout* $E$ *et* $F$ *donnent*

$$\mu^+(A \cup B) \geqslant \mu^+(A) + \mu^+(B) \tag{2.8}$$

*donc* $\mu^+$ *est additif. parce que* $\varnothing \subset A$ *et* $\varnothing \in \mathcal{A}$*, alors* $\mu^+(A) \geqslant \mu(\varnothing) = 0$*. La preuve pour* $\mu^-$ *est la même.*

*La décomposition suivante, qui est analogue à la décomposition d'une fonction à variation bornée la différence de deux fonctions décroissantes.*

**Proposition 2.2.** (Théorème de décomposition de Jordan des fonctions additives) Supposons que $\mu$ une fonction additive sur une algèbre $\mathcal{A}$. si $A \in \mathcal{A}$ on a $min\{\mu^+(A), \mu^-(A)\} < \infty$, alors :

$$\mu(A) = \mu^+(A) - \mu^-(A) \tag{2.9}$$

La même chose s'applique à tous les $B \in \mathcal{A}$ avec $B \subset A$.

**Démonstration 2.2.** *Supposons que $\mu^+(A) < \infty$ . Choisir sous $B \in \mathcal{A}$ avec $B \subset A$. Alors*

$$\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B) \tag{2.10}$$

*on a supposant $\mu(A \setminus B) \leq \mu^+(A)$ donc*

$$\mu(A) \leq \mu(B) + \mu^+(A) \ \ , \forall B \in \mathcal{A} \ \ B \subset A \tag{2.11}$$

*Depuis $\mu^+(A) < \infty$, toutes les quantités dans cette expression ne sont pas $+\infty$. On peut prendre au maximum en $B$ on obtient $\mu(A) \leq -\mu^-(A) + \mu^+(A)$*

*Pour l'autre partie, on a supposant $\mu(A \setminus B) \geq -\mu^-(A)$ d'obtenir*

$$\mu(A) \geq \mu(B) - \mu^-(A) \ \ , \forall B \in \mathcal{A} \ \ B \subset A \tag{2.12}$$

*Encore une fois, depuis $\mu(B)$ est bornée ci-dessus par un nombre positif, On peut prendre maximum on obtenir $\mu(A) \leq \mu^+(A) - \mu^-(A)$. Pour l'obtenir pour tous les $B \subset A$, on note que $\mu^+(A) < \infty$ implique $\mu^+(B) < \infty$ pour tous $B$.*

## 2.3 Mesures signées

**Définition 2.4.** Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable . Une application $\nu$ définie sur $\mathcal{A}$ et à valeurs sur la droite étendue $\mathbb{R} \cup \pm\infty$ est une mesure signée sur $\mathcal{A}$ si :

1. $\nu(\emptyset) = 0$
2. si $(\mathbf{A}_k)_k \subset \mathcal{A}$ disjoints alors

$$\nu(\cup_k \mathbf{A}_k) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n} \nu(\mathbf{A}_k)$$

Une mesure signée est finie si $\nu(\mathbf{A}) \in \mathbb{R}$ quel que soit $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$
où la somme à droite est significative (c'est−à−dire n'ayant pas les deux $\pm\infty$ présents) et la limite existe dans $\mathbb{R} \cup \pm\infty$ .

**Exemple 2.1.** Montrer que si $\nu(A) = \int_A f d\mu$ est défini, alors $\nu$ est mesure Signée .
solution :
soit $\int_A f^+ d\mu < \infty$ ou $\int_A f^- d\mu < \infty$ dans définition 1− et 2− est trivial . soit $A_i$ est suit d'ensembles disjoint de $\mathcal{A}$ en écrit

$$\nu^+(A) \ = \ \int_A f^+ d\mu \ , \ \nu^- \ = \ \int_A f^- d\mu$$

Alors $\nu^+$ et $\nu^-$ sont des mesures alors nous ne pouvons pas obtenir

$$\nu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \nu^+(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) - \nu^-(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu^+(A_i) - \sum_{i=1}^{\infty} \nu^-(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$$

**Remarque 2.1.** *Soit $\mu$ une mesure signée sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ Un sous-ensemble $B$ de $X$ est un ensemble positif pour $\mu$ si $B \in \mathcal{A}$ et tout sous-ensemble $\boldsymbol{A} \in \mathcal{A}$ de $B$ vérifie $\mu(\boldsymbol{A}) \geq 0$. De la même manière, un ensemble $B$ est un ensemble négatif pour $\mu$ si $B \in \mathcal{A}$ et tout sous-ensemble $\boldsymbol{A} \in \mathcal{A}$ de $B$ vérifie $\mu(\boldsymbol{A}) \leq 0$ .*

**Lemme 2.2.** *Si $\nu$ est une mesure signée sur $\mathcal{A}$,Alors :*

1. *$\nu$ est une fonction additif sur $\mathcal{A}$*
2. *$\nu$ prend au plus une des valeurs $\pm\infty$ et $\mid \nu(A) \mid < \infty$ implique $\mid \nu(B) \mid < \infty$ pour tous les $B \subset A$*
3. *$\forall \{A_i\} \subset \mathcal{A}$ disjoint*

$$\mid \nu(\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \mid \; < \; \infty \; \Rightarrow \; \sum_{i\in\mathbb{N}} \mid \nu(A_i) \mid \; < \; \infty \tag{2.13}$$

4. *(Convergence monotone Croissant pour les ensembles)*

$$\forall \; \{A_i\} \; \subset \; \mathcal{A} \; \; A_n \uparrow A \; \Rightarrow \; \nu(A_n) \to \nu(A) \tag{2.14}$$

5. *(Convergence monotone décroissant pour les ensembles)*

$$\forall \{A_i\} \; \subset \; \mathcal{A} \quad A_n \downarrow A \mid \nu(A_1) \mid \; < \; \infty \Rightarrow \nu(A_n) \to \nu(A) \tag{2.15}$$

**Démonstration 2.3.** *Puisque $\nu(\varnothing) = 0$, l'additivité dénombrable implique une additivité finie. Donc $\nu$ est fonction additive . Cela montre $(1-2)$ Pour 3) on note si la mesure de l'union est finie la limite des sommes partielles doit être inchangée .Comme on le sait, cela se produit si et seulement si la série est absolument convergente. Pour prouver (4), soit $A_n \uparrow A$ avec $A_n \in \mathcal{A}$ alors*

$$A_n = \cup_{k=1}^{n} (A_k \setminus A_{k-1}) \quad et \quad A = \cup_{k\in\mathbb{N}} (A_k \setminus A_{k-1}) \tag{2.16}$$

*Avec la condition $A_0 = \varnothing$. Puisque $\{(A_k \setminus A_{k-1}) : k \in \mathbb{N}\}$ sont disjoints, la Définition 2.5 (2) implique*

$$\nu(A) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} \nu(A_k \setminus A_{k-1}) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \nu(A_n) \tag{2.17}$$

*Pour obtenir (5) on note $A_n \downarrow A$ implique $A_1 \setminus A_n \uparrow A_1 \setminus A$. Depuis $\nu(A_1)$ est fini, on a*

$$\nu(A_1) - \nu(A_n) = \nu(A_1 \setminus A_n) \quad et \quad \nu(A_1) - \nu(A) = \nu(A_1 \setminus A) \tag{2.18}$$

**Définition 2.5.** Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $\mu$ une mesure signée sur $(X, \mathcal{A})$ La décomposition de la mesure signée $\mu$ en deux mesures $\mu^+$ et $\mu^-$, $\mu = \mu^+ - \mu^-$ est appelée la décomposition de Jordan de la mesure signée $\mu$ La mesure $\mu^+$ est appelée la partie positif de $\mu$ et $\mu^-$ la partie négatif de $\mu$.

**Lemme 2.3.** *Si $\nu$ est une mesure signée alors $\nu^+$ et $\nu^-$ sont des mesures ( non signée )*

**Définition 2.6.** Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $\mu$ une mesure signée sur $(X, \mathcal{A})$ . La variation de $\mu$ est la plus petite des mesures $\nu$ telles que $\mid \mu(A) \mid \leq \nu(A)$ quel que soit $A \in \mathcal{A}$

**preuve 2.2.** *Soit $\nu$ une mesure telle que $\mid \mu(A) \mid \leq \nu(A) \; \forall A \in \mathcal{A}$ , et $(P, N)$ une décomposition de Hahn de la mesure signée $\mu$. Montrons que $|\mu|(A) \leq \nu(A) \; \forall A \in \mathcal{A}$ . si $A \subset P \; |\mu|(A) = \mu^+(A) = \mid \mu(A) \mid \leq \nu(A)$ . si $A \subset N \; |\mu|(A) = \mu^-(A) = \mid \mu(A) \mid \leq \nu(A)$ si $\forall A \in \mathcal{A}$ . on a $A = A_1 \cup A_2$ et*

$$\mid \mu \mid (A) = \mu^+(A_1) + \mu^-(A_2) \leq \nu(A_1) + \nu(A_2) = \nu(A) \tag{2.19}$$

**Lemme 2.4.** *(Continuité des mesures signées) Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $\mu$ une mesure signée sur $(X, \mathcal{A})$ . Si $(\boldsymbol{A}_k)_k$ est une suite croissante d'ensembles de $\mathcal{A}$ alors*

$$\mu(\lim_k \boldsymbol{A}_k) = \mu(\cup_k \boldsymbol{A}_k) = \lim_k \mu(\boldsymbol{A}_k) \tag{2.20}$$

*si $(\boldsymbol{A}_k)_k$ est une suite décroissante d'ensembles de $\mathcal{A}$ telle que $\mu(\boldsymbol{A}_{k_0})$ est fini pour un indice $k_0$, alors*

$$\mu(\lim_k \boldsymbol{A}_k) = \mu(\cap_k \boldsymbol{A}_k) = \lim_k \mu(\boldsymbol{A}_k). \tag{2.21}$$

**Lemme 2.5.** *Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable, $\mu$ une mesure signée sur $(X, \mathcal{A})$ et $\boldsymbol{A} \in \mathcal{A}$ un sous-ensemble de $X$ tel que $-\infty < \mu(\boldsymbol{A}) < 0$ . Il existe un ensemble négatif $B$ inclus dans $\boldsymbol{A}$ satisfaisant $\mu(B) \leqslant \mu(\boldsymbol{A})$ .*

**Théorème 2.1.** *A Une union dénombrable d'ensembles positifs par rapport à une mesure signée $\nu$ est un ensemble positif.*

**Démonstration 2.4.** *pour prouver ce théorème on utilisé le théorème ( soit $\{A_i\}$ et $\{B_i\}$ sont disjoint pour chaque $i$ on a $B_i \subseteq A_i$ et $\cup_{i=1}^N A_i = \cup_{i=1}^N B_i$ alors $\cup_{i=1}^\infty A_i = \cup_{i=1}^\infty B_i$ pour chaque $N$) donc :*
*Soit $\{A_n\}$ une suite d'ensembles positifs.*

$$\cup_{i=1}^\infty A_n = \cup_{i=1}^\infty B_n \tag{2.22}$$

*ou se trouve $B_n \in \mathcal{A}$ , $B_n \subseteq A_n$ et $B_n \cap B_m = \varnothing$ si $m \neq n$*
*soit $A \subseteq \cup_{n=1}^\infty A_n$ alors $A = \cup_{n=1}^\infty (A \cap B_n)$ donc*

$$\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A \cap B_n) \geq 0 \tag{2.23}$$

*comme $A \cap B_n$ est un ensemble positif pour chaque $n$.*

**Corollaire 2.1.** *Une union dénombrable d'ensembles négatifs ou d'ensembles nuls est respectivement , un négatif Ou un ensemble nul.*

**Théorème 2.2.** *Soit $\nu$ une mesure signée sur $(X, \mathcal{A})$. Soient $A \in \mathcal{A}$ et $\nu(A) > 0$.*
*Alors il existe $E$ un ensemble positif par rapport à $\nu$, tel que $E \subseteq A$ et $\nu(E) > 0$ .*

**Démonstration 2.5.** *Si $A$ ne contient aucun ensemble négatif de $\nu$-mesure, alors $A$ est un ensemble positif et $A = E$ donne le résultat. Sinon il existe $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe $B \in \mathcal{A}$, $B \subset A$ et $\nu(B) < -\dfrac{1}{n}$ . Soit $n_1$ le plus petit tel entier et $A_1$ a correspondant Mesurable de $A$ avec $\nu(A_1) < -\dfrac{1}{n_1}$ Soit $n_k$ le plus petit positif . Entier tel que il existe un sous-ensemble mesurable $A_k$ de $A - \cup_{i=1}^\infty A_i$ avec $\nu(A_k) < -\dfrac{1}{n_k}$ . A partir de la construction, $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \cdots$ et on a une correspondance Séquence $\{A_i\}$ des sous-ensembles disjoints de $A$. Si le processus s'arrête, à $n_m$ dire, et $c = A - \cup_{i=1}^m A_i$ , alors $C$ est un ensemble positif, et $\nu(C) > 0$ , pour $\nu(C) = 0$ impliquerait que $\nu(A) = \sum_{i=1}^m \nu(A_i) < 0$ donc $C$ est l'ensemble désiré. Si le processus ne s'arrête pas, mettre $E = A - \cup_{k=1}^\infty E_k$ on vent montrer que $E$ est un ensemble positif. on a :*

$$\nu(A) = \nu(E) + \nu(\cup_{k=1}^\infty A_k) \tag{2.24}$$

*Mais $\nu$ ne peut prendre à la fois les valeurs $+\infty$ , $-\infty$ , $\nu(A) > 0$ et $\nu(\cup_{k=1}^\infty A_k) = \sum_{k=1}^\infty \nu(A_k) < 0$ , de sorte que le second terme sur le côté droit de $(2, 1)$ est finite comme*

$\sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k) > -\infty$ *et* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} < \infty$ *en particulier* $\lim_{k\longrightarrow\infty} n_k = \infty$ , *et* $n_k > 1$ *pour* $k > k_0$ *c- à -d soit* $B \in \mathcal{A}$ , $B \subseteq E$ *et* $k > k_0$ *alors* $B \subseteq A - \cup_{i=1}^{k} A$ *tel que*

$$\nu(B) \geq -\frac{1}{n_k - 1} \tag{2.25}$$

*par la définition de* $n_k$ *mais* (2.25) *pour* $k > k_0$ *comme* $k \to \infty$ *on a* $\nu(B) \geq 0$ *et donc* $E$ *est un ensemble positif. Comme précédemment,* $\nu(E) = 0$ *implique* $\nu(A) < 0$ *donc* $\nu(E) > 0$ *est nécessaire .*

## 2.4 Décompositions de Hahn et de Jordan

**Proposition 2.3.** Si $\nu$ est une mesure signée sur $\mathcal{A}$ alors pour tout $A \in \mathcal{A}$ ,

1. $\mu^+(A) = \infty \quad \Rightarrow \quad \mu(A) = \infty.$
2. $\mu^-(A) = \infty \quad \Rightarrow \quad \mu(A) = -\infty.$

Ainsi, en particulier $\min\{\mu^+(A), \mu^-(A)\} < \infty$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ et donc :

$$\mu(A) = \mu^+(A) - \mu^-(A) \;\; A \in \mathcal{A} \tag{2.26}$$

**Démonstration 2.6.** *soit* $A \in \mathcal{A}$ *on Supposant* $\mu^+(A) = \infty$ *Pour montrer* $\mu(A) = \infty$ *est suffisant (par additivité finie) à Démontrer un ensemble* $B \subset A$ *avec* $\mu(B) = \infty$ *on va utiliser les Structure des ensembles* $\{A_n\}, \{B_n\} \subset \mathcal{A}$ *Avec les propriétés suivantes vrai pour tous* $n \in \mathbb{N}$

$$B_n \subset A_n,\; A_{n+1} \subset A_n \; \mu^+(A_n) = \infty;\; et \;\; \mu(B_n) \geqslant n \tag{2.27}$$

*on Alternative :*

$$\begin{cases} A_{n+1} = A_n \quad et \quad B_{n+1} \subset B_n \qquad si \quad \mu^+(B_n) = \infty \\ A_{n+m} \cap B_n = \varnothing \quad et \quad B_{n+m} \cap B_n = \varnothing \quad \forall m \in \mathbb{N} \text{ , } si \quad \mu^+(B_n) < \infty. \end{cases} \tag{2.28}$$

*Initialement on a défini* $A_1 := A$ *Par hypothèse* $\mu^+(A_1) = \infty$ *, et donc il existe* $B_1 \subset A_1$ *tel que* $\mu(B_1) \geqslant 1$ *donc les parties pertinentes de* (2.27) *étant donné que* $A_n$ *et* $B_n$ *sont définis pour un* $n \in \mathbb{N}$ *comme* (2.27)

$$A_{n+1} := \begin{cases} A_n, \quad si \;\; \mu^+(B_n) = \infty \\ A_n \setminus B_n \quad sinon \end{cases} \tag{2.29}$$

*Pour déterminer* $B_{n+1}$ *, en notant que si* $\mu^+(B_n) < \infty$ *, alors* $\mu^+(A_n) = \infty$ *implique* $\mu^+(A_n \setminus B_n) = \infty$ *. et donc* $\mu^+(A_{n+1}) = \infty$ *dans les deux cas ci-dessus. Cela nous permet de choisir* $B_{n+1} \subset A_{n+1}$ *pour* $\mu(B_{n+1}) \geqslant n + 1$ *et même* $B_{n+1} \subset B_n$ *si* $\mu^+(B_n) = \infty$ *Les conditions de* (2.28) *sont maintenant facilement vérifiées évidemment, le caractère des séquences* $\{A_n\}$ *et* $\{B_n\}$ *change en fonction de laquelle des deux Des alternatives dans* (2.29) *s'appliquent*

$$S := \{n \in \mathbb{N} : A_{n+1} = A_n \setminus B_n\} \tag{2.30}$$

*on a deux cas pour* $S$ *:*

1. $S$ *est infini, dans ce cas on énumère* $S$ *par une séquence croissante* $\{n_k\}$

2. *S est fini, dans ce cas il y a* $n^* \in \mathbb{N}$ *tel que* $\{n^*, n^*+1....\} \cap S = \varnothing$.
*Dans le cas* (1), (2.27) *et la ligne inférieure en* (2.28), *assure que* $\{B_{n_k}\}$ *est une famille infinie disjointe Des ensembles mesurables avec* $\mu(B_{n_k}) \geqslant n_k$ *et donc*

$$\mu(\cup_{k\in\mathbb{N}} B_{n_k}) = \lim_{k\longrightarrow\infty} \sum_{l=1}^{k} \mu(B_{n_l}) = \lim_{k\longrightarrow\infty} \sum_{l=1}^{k} n_l = \infty \tag{2.31}$$

*alors* $B := \cup_{k\in\mathbb{N}} B_{n_k}$ *on a* $\mu(B) = \infty$ .
*Cqfd .*

*Dans le cas* (2), *la ligne supérieure dans* (2.28) *montre que* $B_{n^*} \supset B_{n^*+1} \supset ...$ *Ainsi, si on avait* $\mu(B_{n^*}) < \infty$ , *Alors le théorème de convergence monotone décroissante pour les ensembles (et le fait que* $\mu(B_{n^*}) > n^* > -\infty$*)*

$$\mu(\cap_{n\geqslant n^*} B_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(B_n) \geqslant \lim_{n\longrightarrow\infty} infn = \infty \tag{2.32}$$

*Une contradiction (par additivité finie) avec* $\mu(B_{n^*}) < \infty$ *Par conséquent* $B := B_{n^*}$ *alors* $\mu(B) = \infty$ *et La revendication* (1) *pour* $\mu^+$ *réside ainsi dans les deux Alternative Précèdent. La revendication* (2) *pour* $\mu^-$ *suit en considérant* $-\mu$ *au lieu de* $\mu$ . *Etant donné que* (1) *et* (2) *impliquent que* $min\{\mu^+(A), \mu^-(A)\} < \infty$ (2.26) *est Conséquence de proposition* 2.2 *perce que* $\mu$ *est fonction additive .*

**Définition 2.7.** Soit $\mu$ une mesure signe de $\mathcal{A}$ est $\sigma-$algébrique $A \in \mathcal{A}$ on dit que positif , avec la notation $A \geq 0$ par rapport $\mu$ si

$$\forall B \quad \in \quad B \subset A \quad \Rightarrow \quad \mu(B) \geq 0. \tag{2.33}$$

De même, un ensemble $A \in \mathcal{A}$ est considéré comme négatif, avec la notation $A \leq 0$ par rapport $\mu$ si

$$\forall B \quad \in \quad B \subset A \quad \Rightarrow \quad \mu(B) \leq 0. \tag{2.34}$$

on dit qu'un ensemble $A \in \mathcal{A}$ est un ensemble $\mu-$null si $A \geq 0$ et $A \leq 0$ par rapport $\mu$. Voici quelques conséquences simples de la définition :

**Lemme 2.6.** *Soit* $\mu$ *une mesure signée sur une* $\sigma-$*algèbre sur* $\mathcal{A}$ *alors :*

1. *Si* $A \geq 0$ *par rapport* $\mu$ *alors, nécessairement* $\mu^-(A) = 0$. *De même* $A \leq 0$ *par rapport* $\mu$ *implique* $\mu^+(A) = 0$.
2. *Si* $A \geq 0$ *par rapport* $\mu$ *alors , quel mesurable* $B \subset A$ *donc* $B \geq 0$ *De même, si* $A \leq 0$ *par rapport* $\mu$ *alors quel mesurable* $B \subset A$ *donc* $B \leq 0$ .

### 2.4.1 Théorème de décomposition de Hahn

**Définition 2.8.** Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $\mu$ une mesure signée sur $(X, \mathcal{A})$ .Une décomposition de Hahn de la mesure $\mu$ est un couple $(P, N)$ d'ensembles disjoints de $X$ tels que $P$ est un ensemble positif par rapport $\mu$ , $N$ est un ensemble négatif par rapport $\mu$ et $P \cup N = X$.

**Théorème 2.3.** *(Théorème de décomposition de Hahn) soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $\mu$ une mesure signée sur $(X, \mathcal{A})$ . Il existe deux sous-ensembles disjoints $P$ et $N$ de $X$ tels que :*

1. *$X = P \cup N$ et $P \cap N = \varnothing$.*
2. *$P \geq 0$ et $N \leq 0$ par rapport $\mu$.*

*de plus si $P^{'}$ , $N^{'}$ est une autre paire de ensemble alors $P \triangle P^{'} = N \triangle N^{'}$ sont des ensembles $\mu$-null .*

**Démonstration 2.7.** *Par la proposition 2.3, on sait que $min\{\mu^+(X), \mu^-(X)\} < \infty$ on Suppose que $\mu^+(X) < \infty$ alors, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il y a $B_n \in \mathcal{A}$ tel que :*

$$\mu(B_n) \geq \mu^+(X) - 2^{-n} \tag{2.35}$$

*avec $\mu^+(B_n) < \infty$ par (2.26) , on a donc :*

$$\mu^-(B_n) = \mu^+(B_n) - \mu(B_n) \leq \mu^+(X) - [\mu^+(X) - 2^{-n}] \leqslant 2^{-n} \tag{2.36}$$

*Mais $\mu^-$ est une mesure, donc, par sous-adduction dénombrable :*

$$\mu^-(\cup_{k\geq n} B_k) \leq \sum_{k\geq n} \mu^-(B_k) \leq \sum_{k\geq n} 2^{-k} = 2^{-n+1}. \tag{2.37}$$

*Le théorème de convergence monotone pour les ensembles montre alors :*

$$\mu^-(\cap_{n\geq 1} \cup_{k\geq n} B_k) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu^-(\cup_{k\geq n} B_k) \leqslant \lim_{n\longrightarrow\infty} 2^{-n+1} = 0 \tag{2.38}$$

*D'autre part, (2.37) donne :*

$$\begin{aligned} \mu^+(X) \geq \mu(\cup_{k\geq n} B_k) = & \quad \mu^+(\cup_{k\geq n} B_k) - \mu^-(\cup_{k\geq n} B_k) \\ \geq & \quad \mu^+(B_n) - 2^{-n+1} \\ \geq & \quad \mu(B_n) - 2^{-n+1} \geq \mu^+(X) - 2^{-n+2} \end{aligned} \tag{2.39}$$

*Et donc (depuis $\mu^+(X) < \infty$)*

$$\mu^+(\cap_{n\geq 1} \cup_{k\geq n} B_k) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu^+(\cup_{k\geq n} B_k) = \mu^+(X) \tag{2.40}$$

*pour théorème de convergence monotone décroisant pour les ensembles .*
*dénoter $P := \cap_{n\geq 1} \cup_{k\geq n} B_k$ on a donc :*

$$\mu^-(P) = 0 \quad et \quad \mu^+(X) = \mu(P) \tag{2.41}$$

*Par la décomposition de Jordan, la première conclusion implique $P \geq 0$. Soit maintenant $N := X \setminus P$. Puis le deuxième conclusion*

$$\mu^-(X) = \mu^+(X) - \mu(X) = \mu^+(X) - \mu(P) - \mu(N) = -\mu(N) \tag{2.42}$$

*Et donc* $\mu^-(P) = 0$ *donne :*

$$\mu^+(N) = \mu(N) + \mu^-(N) = \mu(N) + \mu^-(X) = 0. \tag{2.43}$$

*Cela implique* $N \leq 0$ *par rapport* $\mu$ *et donc* $P, N$ *vérifie* $(1-2)$ *dans ce cas.*
*si* $P^{'}, N^{'}$ *est une autre paire satisfaisant* $(1-2)$ *ci-dessus, alors* $P^{'} \geq 0$ *et* $N^{'} \leq 0$ *donnent* $\mu^-(P^{'} \geq 0)$ *et* $\mu^+(N^{'}) = 0$ *Puisque aussi* $P \triangle P^{'} = N \triangle N^{'}$ *par le fait que* $P, N$ *et* $P^{'}, N^{'}$ *sont des partitions de* $X$*, donc*

$$\mu^+(P \triangle P^{'}) = \mu(P \triangle P^{'}) = \mu(N \triangle N^{'}) = -\mu^-(N \triangle N^{'}) \tag{2.44}$$

*Le côté gauche n'est pas négatif tandis que le côté droit n'est pas positif D'où les quatre quantités Doit être nul et* $P \triangle P^{'} = N \triangle N^{'}$ *est* $\mu-$ *nulle .*

*on remarque que d'autres preuves de la décomposition de Hahn*
*Quitte à considérer* $-\mu$ *on peut supposer que* $\mu$ *ne prend pas la valeur* $-\infty$*.*
*soit :*

$$\sigma = inf\,\{\mu\ (\boldsymbol{A}) : \boldsymbol{A} \text{ est un ensemble négatif pour } \mu\}$$

*L'ensemble intervenant dans le membre de droite n'est pas vide, puisqu'il contient* $\mu(\emptyset)$ *soient* $(\boldsymbol{A}_k)_k$ *une suite d'ensembles négatifs pour* $\mu$ *tels que* $\lim_k \mu(\boldsymbol{A}_k) = \sigma$ *et* $N = \cup_k \boldsymbol{A}_k$*. L'ensemble* $N$ *est un ensemble négatif pour* $\mu$ *Ainsi* $\sigma \leqslant \mu(N) \leqslant \mu(\boldsymbol{A}_k)$ *pour tout* $k$ *et donc* $\sigma = \mu(N)$ *puisque* $\mu(N)$ *ne peut prendre la valeur* $-\infty$ *,* $\mu(N)$ *est fini .*
*soit* $P = N^c$ *, montrons que* $P$ *est un ensemble positif. Supposons qu'il existe un sous-ensemble* $A \in \mathcal{A}$ *de* $P$ *tel que* $\mu(A) \leq 0$*.un sous-ensemble négatif* $B$ *et* $A$ *Dés lors,* $N \cup B$ *est un ensemble négatif tel que* $\mu(N \cup B) = \mu(N) + \mu(B) < \mu(N) = \sigma$ *, ce qui contredit la définition de* $\sigma$ *. L'ensemble* $P$ *est donc un ensemble positif,ce qui termine la démonstration.*

### 2.4.2 Théorème de décomposition de Jordan

**Définition 2.9.** ( Mesures singulières) Soit $\nu, \mu$ mesures sur $(X, \mathcal{A})$ . Alors $\nu$ et $\mu$ sont mutuellement singulier on note $\nu \perp \mu$ si pour certains $A \in \mathcal{A}$ on écrit :

$$\nu(X \setminus A) = 0 \quad et \quad \mu(A) = 0 \tag{2.45}$$

pour utilise décomposition de Hahn , on sait que $\mu^+ \perp \mu^-$ pour toute mesure signée $\mu$ maintenant on indique l' existantes et unicité dans :

**Théorème 2.4.** *Soit $\mu$ une mesure signée sur une $\sigma-$algèbre de l' ensemble $\mathcal{A}$ , Alors $\mu(A) = \mu^+(A) - \mu^-(A)$ pour chaque $A \in \mathcal{A}$ , En outre, si $\alpha, \beta$ sont des mesures sur $\mathcal{A}$ telles que :*

$$\alpha \perp \beta \quad et \quad \mu(A) = \alpha(A) - \beta(A) \quad A \in \mathcal{A} \tag{2.46}$$

*avec $\alpha = \mu^+$ et $\beta = \mu^-$ .*

**Démonstration 2.8.** *Soit $\mu = \mu^+ - \mu^-$ ait été prouvé dans la Proposition (2.3) soit $\alpha, \beta$ sont des mesures tells que l ' équation (2.46) , par $\alpha \perp \beta$ il y a $\boldsymbol{P} \in \mathcal{A}$ tel que, pour $N := X \setminus \boldsymbol{P}$ on a :*

$$\beta(P) = 0 \quad et \quad \alpha(N) = 0 \tag{2.47}$$

*alors $\mu = \alpha - \beta$ implique $P \geq 0$ et $N \leq 0$( et $P, N$ est une décomposition Hahn de $X$, c'est-à-dire une paire conséquence aux conditions du théorème de décomposition de Hahn*

$$\mu^-(P) = 0 = \mu^+(N) \tag{2.48}$$

*Par conséquent $\alpha(A) = \alpha(A \cap N)$ et $\beta(A) = \beta(A \cap P)$ et de même pour $\mu^\pm$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, et donc*

$$\alpha(A) = \mu(A \cap P) = \mu^+(A) \quad et \quad \beta(A) = -\mu(A \cap N) = \mu^-(A) \tag{2.49}$$

*cqfd.*

### 2.4.3 Théorème de décomposition de Hahn − Jordan

**Proposition 2.4.** Soit $\mu$ une mesure sur un espace mesurable (X,$\mathcal{A}$). Alors il existe $B \in \mathcal{A}$ ( non unique en général) tel que :

$$\forall A \in \mathcal{A} \qquad \mu(A \cap B^c) \geqslant 0 \qquad et \qquad \mu(A \cap B) \leq 0$$

$\mu^+$ et $\mu^-$ définies sur $\mathcal{A}$ par

$$\mu^+(A) = \mu(A \cap B^c) \qquad et \qquad \mu^-(A) = -\mu(A \cap B)$$

Sont deux mesures positives vérifiant $\mu = \mu^+ - \mu^-$ .
De plus $\mu^-$ bornée et le couple $(\mu^+, \mu^-)$ est indépendant de B.
Le triplet $(B, \mu^+, \mu^-)$ est appelé *décomposition de Hahn-Jordan* de $\mu$.

## 2.5 Intégrale par rapport à une mesure signée

Si $\mu$ est une mesure signée sur $(X, \mathcal{A})$ , de décomposition de Jordan $\mu = \mu_+ - \mu_-$ l'intégrale par rapport a $\mu$ s'exprime comme la différence des intégrales par rapport à $\mu_+$ et $\mu_-$ pour les fonctions $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu_+) \cap \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu_-)$ :

$$\int f d\mu = \int f d\mu_+ - \int f d\mu_- = \int f^+ d\mu_+ - \int f^- d\mu_+ - \int f^+ d\mu_- + \int f^- d\mu_- \qquad (2.50)$$

Comme $\mid \mu \mid = \mu_+ + \mu_-$, on a pour toute fonction mesurable

$$\int \mid f \mid d \mid \mu \mid = \int \mid f \mid d\mu_+ - \int \mid f \mid d\mu_- \qquad (2.51)$$

Lorsque $f$ est mesurable mais $f \notin \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mid \mu \mid)$, on peut avoir $\int f d\mu = \infty$ lorsque les deux termes négatifs dans la définition (2.3) de $\int f d\mu$ sont finis et un des termes positifs est $+\infty$ Autrement dit,$\int f d\mu = +\infty$ quand $f_- \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu_+)$ , $f_+ \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu_-)$ et $f_+ \notin \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu_+)$ ou $f_- \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu_-)$ De même pour avoir $\int f d\mu = -\infty$ L'intégrale par rapport à une mesure signée vérifié des propriétés analogues à celle de l'intégrale par rapport à une (vraie) mesure.

**Théorème 2.5.** *1. Si $\mu$ est une mesure signée et $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ alors*

$$\mid \int f d\mu \mid \leqslant \int \mid f \mid d \mid \mu \mid \qquad (2.52)$$

*2. (Convergence dominée) Soit $\mu$ une mesure signée et $(f_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mid \mu \mid)$ et $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mid \mu \mid)$ avec $\mid f_n \mid \leqslant g \mid \mu \mid -p.p.$ pour tout $n \geqslant 1$ Si $f$ est mesurable telle que $f_n \to f \mid \mu \mid -p.p$ alors $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mid \mu \mid)$ et*

$$\int \mid f_n - f \mid d \mid \mu \mid \to 0 \ , \ \int f_n d\mu \to \int f d\mu \ , \ n \to +\infty \qquad (2.53)$$

## 2.6 Théorème de Radon-Nikodym

**Théorème 2.6.** *Soit $\mu$ une mesure positive (finie) $\sigma$-additive, définie sur une $\sigma$-algèbre de sous-ensembles de $X$ , et soit $\nu$ une mesure absolument continue par rapport à $\mu$ et définie sur la même $\sigma$-algèbre. Alors il existe une fonction $f$, définie sur $X$ et sommable par rapport à $\mu$, telle que*

$$\nu(A) = \int_A f(x)d\mu \tag{2.54}$$

*pour tout ensemble mesurable $A$. Cette fonction appelée dérivée de la mesure $\nu$ par rapport à la mesure $\mu$, est définie de façon unique à la $\mu$-équivalence près.*

**Démonstration 2.9.** *Toute mesure peut être représentée sous la forme d'une différence de deux mesures non négatifs , de plus toute mesure absolument continue peut être représentée sous la forme d'une différence de deux mesures non négatifs absolument continues. Pour cette raison il suffit de démontrer le théorème pour des mesures non négative c-à-d pour des mesures.*

*Soit donc $\nu$ une mesure absolument continue par rapport à la mesure donnée $\mu$. Démontrons le lemme suivant :*

**Lemme 2.7.** *Soit $\nu$ une mesure absolument continue par rapport à $\mu$ et non identiquement nulle.*
*Alors il existe un entier naturel $n$ et un ensemble mesurable $B$ tels que $\mu(B) > 0$ et $B$ est positif relativement à la mesure $\nu - \frac{1}{n}\mu$.*

**Démonstration 2.10.** *( démonstration du lemme) soit $X = A_n^- \cup A_n^+$ la décomposition de Hahn pour la mesure $\nu - \frac{1}{n}\mu, n = 1, 2\cdots$ , et soit*

$$A_0^- = \cap_{n=1}^{\infty} A_n^- \ , \ A_0^+ = \cup_{n=1}^{\infty} A_n^+ \tag{2.55}$$

*Alors*

$$\nu(A_0^-) \leq \frac{1}{n}\mu(A_0^-) \tag{2.56}$$

*pour tous les $n$ c.-à-d $\nu(A_0^-) = 0$ par conséquent $\nu(A_0^+) > 0$ et donc $\mu(A_0^+) > 0$ (en vertu de la continuité absolue de $\nu$ par rapport à $\mu$). Pour cette raison, il existe $n$ tel que $\mu(A_n^+) > 0$ . Ce nombre $n$ et l'ensemble $B = A_n^+$ vérifient les conditions du lemme.*

**preuve 2.3.** *Passons maintenant à la démonstration du théorème. Soit $K$ l'ensemble des fonctions $f$ sur $X$ possédant les propriétés suivantes :*
*elles sont non négatifs, intégrables par rapport à $\mu$ et*

$$\int_A f(x)d\mu \leq \nu(A) \tag{2.57}$$

*pour tout ensemble mesurable $A$ Soit*

$$M = sup\{\int_X f(x)d\mu : f \in K\} \tag{2.58}$$

*Considérons une suite $\{f_n\}$ de fonctions de $K$ telles que :*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_X f_n(x)d\mu = M \tag{2.59}$$

*posons :*

$$g_n(x) = max(f_1(x), f_2(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)). \tag{2.60}$$

*Montrons que $g_n \in K$ c-à-d que pour tout ensemble mesurable $E$ on a :*

$$\int_E g_n(x)d\mu \leq \nu(E) \tag{2.61}$$

*En effet, $E$ peut être mis sous la forme :*

$$E = \cup_{k=1}^{n} E_k \tag{2.62}$$

*où $E_k$ sont des ensembles disjoints et $g_n(x) = f_k(x)$ sur $E_k$ par conséquent*

$$\int_E g_n(x)d\mu \ = \ \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f_k d\mu \leqslant \sum_{k=2}^{n} \nu(E_k) = \nu(E) \tag{2.63}$$

*posons :*

$$f(x) = sup\{f_n(x)\} \tag{2.64}$$

*Il est clair qu'alors $f(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} g_n(x)$ et donc d'après le théorème de* ***B. Levi*** *on a :*

$$\int_X f(x)d\mu = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_X g_n d\mu = M \tag{2.65}$$

*Montrons maintenant que :*

$$\nu - \int_E f(x)d\mu \ = \ 0 \tag{2.66}$$

*D'après la construction, la fonction d'ensemble*

$$\lambda(E) = \nu(E) - \int_E f(x)d\mu \tag{2.67}$$

*est non négatif et jouit de toutes les propriétés d'une mesure Elle est en outre, absolument continue par rapport à $\mu$ si $\lambda \neq 0$ d'après le lemme il existe $\varepsilon > 0$ et $B$ tels que $\mu(B) > 0$ et*

$$\varepsilon\mu(E \cap B) \leq \lambda(E \cap B) \tag{2.68}$$

*pour tout ensemble mesurable $E$, Alors en posant $h(x) = f(x) + \varepsilon\chi_B(x)$ , oú $\chi_B$ est la fonction caractéristique de l'ensemble $B$, on obtiendrait pour tout ensemble mesurable $E$*

$$\int_E h(x)d\mu = \int_E f(x)d\mu + \varepsilon\mu(E \cap B) \leq \int_{E\setminus B} f(x)d\mu + \nu(E \cap B) \leq \nu(E) \tag{2.69}$$

*Cela signifier que la fonction $h$ appartient à l'ensemble $K$ défini plus haut, Mais d'autre part :*

$$\int_X h(x)d\mu = \int_X f(x)d\mu + \varepsilon\mu(B) > M, \tag{2.70}$$

*ce qui contredit la définition de $M$. Ainsi l'existence de la fonction $f$ telle que :*

$$\nu(A) = \int_A f(x)d\mu \tag{2.71}$$

*est démontrée. on démontre l'unicité de cette fonction Si pour tous les $\wp$ ( $\wp : \sigma-$algèbre d'ensembles )*

$$\nu(A) = \int_A f_1(x)d\mu = \nu(A) = \int_A f_2(x)d\mu \tag{2.72}$$

*alors quel que soit $n$ pour :*

$$A_n = \{x : f_2(x) - f_1(x) > \frac{1}{n}\} \tag{2.73}$$

*on a :*

$$\mu(A_n) \leqslant n \int_{A_n} (f_1(x) - f_2(x)) d\mu = 0. \tag{2.74}$$

*De même pour :*

$$B_m = \{x : f_1(x) - f_2(x) > \frac{1}{m}\} \tag{2.75}$$

*on a :*

$$\mu(B_m) = 0. \tag{2.76}$$

*comme :*

$$\{\ x :\ f_1(x)\ \neq\ f_2(x)\ \} =\ (\cup_n\ A_n\ )\ \cup\ (\ \cup_m\ B_m\ ), \tag{2.77}$$

*on en déduit que :*

$$\mu\{\ x :\ f_1(x)\ \neq\ f_2(x)\} \ =\ 0 \tag{2.78}$$

*Cela signifie que* $f_1(x)\ =\ f_2(x)$ *presque partout.*

**Corollaire 2.2.** *Le théorème de* ***Radon-Nikodym*** *peut être étendu au cas où* $\nu$ *est Mesure signé .*

**Corollaire 2.3.** *Le théorème* ***Radon-Nikodym*** *peut être étendu pour permettre à* $\mu$ *est Mesure signé , où par :*

$$\int_E f d\mu$$

*nous voulons dire :*

$$\int_A f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

*, à condition que La différence n'est pas indéterminée. Deux quelconques de ces fonctions* $f$ *et* $g$ *sont égales ie* $(|\ \mu\ |)$.

# Chapitre 3

# Applications des théorème de Radon-Nikodym

## 3.1 Intégrale de Lebesgue- Stieltjes

*Soit $\mu_F$ une mesure sur le segment $[a, b]$, engendrée par une fonction monotone $F$. Pour cette mesure on définit comme d'habitude la classe des fonctions sommables et la notion d'intégrale de Lebesgue :*

$$\int_a^b f(x)d\mu_F$$

*Une telle intégrale, prise par rapport à la mesure $\mu_F$ engendrée par la fonction $F$, s'appelle intégrale de Lebesgue-Stieltjes et se note :*

$$\int_a^b f(x)d\mu_F$$

*Considérons quelques cas particuliers.*

1. *1. Si $F$ est une fonction des sauts (c.-à-d. si $\mu_F$ est une mesure discrète), l'intégrale*

   $$\int_a^b f(x)d\mu_F$$

   *se réduit, évidemment à la somme*

   $$\sum_i f(x_i)h_i$$

   *où $x_i$ sont les points de discontinuité de la fonction $F$ et $h_i$ sont les sauts de $F$ en ces points.*

2. *Si $F$ est une fonction absolument continue, l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes*

   $$\int_a^b f(x)d\mu_F$$

   *est égale à*

   $$\int_a^b f(x)F'(x)dx$$

   *c-à-d. à l'intégrale de $f(x)F'(x)$, prise par rapport à la mesure habituelle de Lebesgue. En effet, si $f(x) = const$ sur un ensemble mesurable $A \subset [a, b]$ et $f(x) = 0$ en dehors de $A$, l'égalité*

   $$\int_a^b f(x)d\mu_{F(x)} = \int_a^b f(x)F'(x)dx \tag{3.1}$$

*est une conséquence de l'égalité :*

$$\mu_F(A) = \int_A f(x)dx.$$

*En vertu de l'additivité dénombrable des intégrales, l'égalité* (3.1) *s'étend également aux fonctions simples sommables pour la mesure* $\mu_F$ *Soit maintenant* $\{f_n\}$ *une suite de fonctions simples convergeant uniformément vers* $f$*. On peut supposer que la suite* $\{f_n\}$ *est non décroissante. Alors* $\{f_n(x)\}$ *est une suite non décroissante presque partout convergent vers* $f(x)F'(x)$ *et, en vertu du théorème de* ***B****. Levi, dans l'égalité :*

$$\int_a^b f_n(x)d\mu_{F(x)} = \int_a^b f_n(x)F'(x)dx$$

*on peut passer à la limite pour* $n \longrightarrow \infty$*.*
*D'après ce qui précède il est clair que si* $F$ *est somme d'une fonction des sauts et d'une fonction absolument continue l'intégrale de Lebesgue- Stieltjes pour la mesure* $\mu_F$ *se réduit à une série (ou somme finie) et une intégrale par rapport à la mesure habituelle de Lebesgue. Si* $F$ *contient en outre une composante singulière, une telle réduction est impossible.*
*La notion d'intégrale de Lebesgue-Stieltjes peut être étendue de façon naturelle, en passant des fonctions monotones à des fonctions arbitraires à variation bornée. Soit* $\Phi$ *une telle fonction. Mettons-la sous la forme d'une différence de deux fonctions monotones*

$$\Phi = v - g$$

*où* $v$ *est la variation totale de la fonction* $\Phi$ *sur le segment* $[a, x]$*. Définissons maintenant l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes par rapport à* $\Phi$ *en posant*

$$\int_a^b f_n(x)d\Phi(x) = \int_a^b f_n(x)dv(x) - \int_a^b f_n(x)dg(x)$$

*On vérifie sans peine que si* $\Phi$ *est représentée d'une autre façon par une différence "de deux fonctions monotones, soit*

$$\Phi = w - h$$

*alors*

$$\int_a^b f_n(x)dv(x) - \int_a^b f_n(x)dg(x) = \int_a^b f_n(x)dw(x) - \int_a^b f_n(x)dh(x)$$

*Autrement dit, pour calculer l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes par rapport à une fonction donnée* $\Phi$*, on peut se servir de n'importe quelle représentation de cette fonction par une différence de deux fonctions monotones.*

## 3.2 Quelques applications de l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes en théorie des probabilités.

*L'intégrale de Lebesgue-Stieltjes est employée non seulement en analyse, mais aussi dans beaucoup de questions des mathématiques appliquées. En particulier cette notion est largement utilisée en théorie des probabilités. Rappelons qu'on appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire* $\xi$ *la fonction* $F$*, définie pour chaque* $x$ *par l'égalité*

$$F(x) = P(\xi < x)$$

*c.-à-d. $F(x)$ est la probabilité pour que la variable aléatoire $\xi$ prenne une valeur inférieure à $x$. Il est évident que chaque fonction de répartition est monotone non décroissante, continue à gauche et vérifie les conditions*

$$F(-\infty) = 0 \ , \ \ F(\infty) = 1$$

*Réciproquement, toute fonction possédant ces propriétés peut être considérée comme fonction de répartition d'une variable aléatoire.*
*Les caractéristiques essentielles d'une variable aléatoire sont son espérance mathématique*

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) \tag{3.2}$$

*et sa variance*

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 dF(x) \tag{3.3}$$

*Parmi les variables aléatoires on distingue habituellement celles que l'on appelle respectivement discrètes et continues. Une variable aléatoire est dite discrète, si elle ne peut prendre qu'un nombre fini on une infinité dénombrable de valeurs*

$$x_1, x_2, ..., x_n, ...$$

*(par exemple, le nombre d'appels à un central téléphonique pendant un certain intervalle de temps est une variable aléatoire discrète). si $P_1, P_2, ..., P_n, ...$ sont les probabilités avec lesquelles la variable $\xi$ prend les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ la fonction de répartition de $\xi$ est, évidemment une fonction des sauts. Pour une telle fonction les intégrales* (3.2) *et* (3.3) *se réduisent respectivement aux sommes*

$$M\xi = \sum_i x_i P_i$$

*et*

$$D\xi = \sum_i (x_i - a)^2 P_i (a = M\xi)$$

*Une variable aléatoire $\xi$ est dite continue, si sa fonction de répartition $F$ est absolument continue La dérivée $F^{'}$ de cette fonction s'appelle densité de répartition des probabilités de la variable aléatoire $\xi$ Conformément à ce qui a été dit au numéro précédent, pour une variable aléatoire continue les intégrales de Lebesgue-Stieltjes exprimant son espérance mathématique et sa variance se réduisent aux intégrales suivantes, prises par rapport à la mesure habituelle de Lebesgue :*

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xP(x)dx$$

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 P(x)dx$$

*où $P = F^{'}$ est la densité de répartition des probabilités de $\xi$ et $a = M\xi$.*
*Dans les cours élémentaires de théorie des probabilités on se borne habituellement aux variables aléatoires discrètes et continues qui sont pratiquement les seules que l'on rencontre dans les questions des mathématiques appliquées. Toutefois la fonction de répartition d'une variable aléatoire peut contenir encore une composante singulière, de sorte que les variables aléatoires discrètes et continues ne sont pas en général, les seules composantes d'une variable aléatoire arbitraire.*
*Soient $\xi$ une variable aléatoire $F$ sa fonction de répartition et $\eta = \phi(\xi)$ une autre variable*

*aléatoire, fonction borélienne de la première. L'espérance mathématique $M\eta$ de la variable $\eta$ peut s'écrire, par définition, sous la forme*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\Phi(x)$$

*où $\Phi$ est la fonction de répartition de $\eta$. Mais l'essentiel est que si la fonction $\phi$ est sommable pour la mesure engendrée sur la droite par la fonction $F$, l'espérance mathématique de la variable $\eta$ peut s'exprimer aussi par la fonction de répartition $F$ de la variable $\xi$ :*

$$M\eta = M\phi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) d\mu_{F(x)}$$

*En effet la fonction $y = \phi(x)$ définit une application de la droite $(-\infty < x < \infty)$ avec la mesure $\mu_F$ (engendrée par $F$) dans la droite $(-\infty < y < \infty)$ avec la mesure $\mu_\Phi$, transformée de $\mu_F$ par l'application $y = \phi(x)$ et si $(X, \mu)$ et $(Y, \nu)$ sont deux espaces mesurés, $\phi$ est une application de $(X, \mu)$ dans $(Y, \nu)$ conservant la mesure (c.-à-d. telle que $\nu(A) = \mu(\phi^{-1}(A))$ et $f$ est une fonction sommable sur $(Y, \nu)$, alors :*

$$\int_Y f(y) d\nu = \int_x f(\phi(x)) d\mu$$

*(changement de variable dans l'intégrale de Lebesgue). En posant ici $f(y) = y$, $\mu = \mu_F$ et $\nu = \mu_\Phi$ ,on obtient l'égalité désirée. Ainsi, pour calculer l'espérance mathématique (et bien sûr la variance) d'une fonction de la variable $\xi$, il suffit de connaître seulement la fonction de répartition de cette variable.*

### 3.2.1 Espérance , moments d'une v.a.r

***Espérance d'une v.a.r***

**Définition 3.1.** (Espérance) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ On dit que $X$ est intégrable si $\int \mid X(\omega) \mid dP(\omega) < \infty$ On note alors

$$\int X(\omega) dP(\omega)$$

appelée espérance de $X$.

**Remarque 3.1.**
1. *La définition s' étend à $X$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ en calculant l' espérance coordonnées par coordonnées.*
2. *On note $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l' ensemble des variables aléatoires intégrables définies à p.p. Lorsque $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sera fixé, on notera souvent $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$*
3. *Dans le contexte probabiliste $P(\Omega) = 1$ et on utilise l' expression à la place de presque partout Presque surement veut donc dire avec probabilité 1.*
4. *Si $X$ est une v.a.r. presque positif, on peut alors toujours calculer son espérance qui peut valoir $+\infty$ le cas échéant.*

**Proposition 3.1.** (Changement de variable) Soit $X$ une variable aléatoire à valeur dans $E$ (muni d'une $\sigma-$ algèbre $\varepsilon$) et $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ mesurable tel que $f \geq 0$ p.p ou $E(\mid f(X) \mid) < \infty$ Alors on a

$$E(f(X)) = \int f(\chi) dP_X(\chi)$$

**Remarque 3.2.** *La proposition montre que la donnée de la loi $P_X$ permet de calculer toutes les espérance des fonctions dépendant de $X$ sans avoir besoin de connaître $\Omega$ et $P$.*

**Démonstration 3.1.** *Il suffit de montrer le résultat pour $f \geq 0$, le cas général s'obtenant par décomposition $f = f^+ - f^-$ .*
*Si $f = 1_{\mathcal{A}}$ pour $\mathcal{A} \in \varepsilon$ , Alors*

$$E(f(X)) = P(X \in \mathcal{A}) = P_X(\mathcal{A}) = \int 1_{\mathcal{A}}(\chi) dP_X(\chi) = \int f(\chi) dP_X(\chi)$$

*Par linéarité c'est vrai pour $f$ étagée. Pour $f \geq 0$ mesurable quelconque, il existe une suite croissante $f_n$ de fonctions étagées telle que $f = \lim f_n$. Par convergence monotone, on obtient le résultat.*

### 3.2.2 Moments, inégalités de moments

**Définition 3.2.** (Moments d'ordre $p$) soit $P \in \mathbb{N}^*$ et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. Si $E(\mid X \mid^P) < \infty$ on dit que $X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (abrégé en $X \in \mathcal{L}^P$) et on appelle moment d'ordre $p$ la quantité $E(X^P)$.

**Remarque 3.3.** *Dans le cas des mesures finies (c'est évidemment le cas ici), nous savons que les espaces $\mathcal{L}^P$ sont emboîtés ie $\mathcal{L}^\infty \subset ... \subset \mathcal{L}^1$.*

**Définition 3.3.** Soit $X \in \mathcal{L}^2$ On appelle variance de $X$ notee $\mathbf{V}(X)$ la quantité

$$\mathbf{V}(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2.$$

On appelle écart-type, $\sigma = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

*L' écart type est une mesure de dispersion autour de l'espérance. On établit ici une inégalité souvent extremement utile :*

**Théorème 3.1.** *(Inégalité de Jensen) Soit $X \in \mathcal{L}^1$ et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe telle que $E(\mid \phi(X) \mid) < \infty$ Alors $\phi(E(X)) < E(\phi(X))$*

**Proposition 3.2.**

1. Soit $X \geq 0$ p.s. une variable aléatoire. Alors pour tout $\alpha > 0$ on a
$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha} \quad (Inegalite\ \ de\ \ Markov).$$
2. Soit $X \in \mathcal{L}^2$ et $m = E(X)$ Alors pour tout $\alpha > 0$, on a
$$P(\mid X - m \mid \geq \alpha) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{\alpha}^2 \quad (Inégalité\ \ deBienaymé\ -\ Chebyshev).$$

### 3.2.3 Quelques lois classiques

Les distributions ou lois classiques des variables aléatoires sont organisées en lois discrètes et lois continues.

– Une loi discrète est associée à une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans un ensemble dénombrable $E$. On note souvent alors $P_\chi = P(X = \chi)$ pour tout $\chi \in E$ et on a :
$$P_X = \sum_{\chi \in E} P_\chi \sigma_\chi$$
C'est le cadre des probabilités dites discrètes. L' espérance de $g(X)$ se calcule alors par la sommation :
$$E(g(X)) = \sum_{X \in E} P_\chi g(\chi)$$

– Le cas des lois continues (on devrait plutot dire absolument continues) correspond aux lois sur $\mathbb{R}^d$ absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda_d$. Il existe alors par le théorème de **Radon-Nikodym** une dérivée $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ telle que $P_X = f\lambda_d$ appelée densité de la loi. On a alors pour tout $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ positif tel que $E(\mid g(X) \mid) < \infty$ :

$$E(g(X)) = \int_\Omega g(X(\omega))dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} g(\chi)f(\chi)d\lambda.$$

## 3.3 Mesures à variation finie

*on sait qu'il existe une bijection entre l'ensemble des mesures finies sur* $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ *et l'ensemble des fonctions sur* $\mathbb{R}$ *croissantes bornées et continues à droite satisfaisant* $\lim_k F(-k) = 0$. *on va étendre cette correspondance en une bijection entre les mesures signées finies sur* $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ *et un sous-ensemble des fonctions sur* $\mathbb{R}$. *Cela nous mènera à une caractérisation des mesures signées finies sur* $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ *absolument continues (par rapport à la mesure de Lebesgue).*

**Définition 3.4.** Soit $F : A \to \mathbb{R}$ une fonction dont le domaine de définition $A$ contient l'intervalle $[a, b]$ et $C_{[a,b]}$ la collection des suites finies $(a_k)_{k=0}^N$ telles que $a_0 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leq b$ La variation de $F$ sur $[a, b]$, notée $V_F[a, b]$ est définie comme suit

$$V_F[a; b] = \sup\{\sum_k \mid F(a_{k+1}) - F(a_k) \mid : (a_k)_k \in C_{[a,b]}\}$$

La fonction $F$ est dite à variation finie ou à variation bornée sur $[a, b]$ si $V_F[a, b]$ est fini.

On définit de la même maniére la variation de $F$ sur $]-\infty, b]$, notée $V_F]-\infty, b]$ et la variation de $F$ sur $\mathbb{R}$, $V_F\mathbb{R}$. Bien sûr, $F$ est à variation finie sur $]-\infty, b]$ si $V_F]-\infty, b]$ est fini. La fonction $F$ est à variation finie si $V_F\mathbb{R}$ est fini. Dans ce dernier cas, la variation de $F$ est la fonction

$$V_F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto V_F(x) = V_F]-\infty, x]$$

Nous dirons qu'une fonction $F$ s'annule en $-\infty$ si :

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} F(x) = 0.$$

Si $\mu$ est une mesure signée finie sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, soit $F_\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$F_\mu(x) = \mu(]-\infty, x]). \tag{3.4}$$

si $(a_k)_{k=0}^N$ est une suite croissante, alors :

$$\sum_k \mid F_\mu(a_k) - F_\mu(a_{k-1}) \mid = \sum_k \mid \mu(]a_k, a_{k+1}]) \mid \leq \mid \mu \mid (\mathbb{R})$$

Dés lors $V_F\mathbb{R} \leq \mid \mu \mid (\mathbb{R})$ ce qui implique que $F_\mu$ est à variation finie. on applique la fonction définie par $F(x) = \mu(]-\infty, x])$. La fonction $F$ est bornée croissante et continue à droite. Qui plus est :

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} F(x) = 0.$$

aux mesures $\mu^+$ et $\mu^-$ permet d'affirmer que $F_\mu$ est continu à droite et s'annule en $-\infty$ Nous allons montrer que toute fonction à variation finie continue à droite et s'annulant en $-\infty$ peut être construite à partir d'une mesure signée finie. Si $F_\mu$ est définie par la relation (3.4)

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} F_\mu(x) - F_\mu(x - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \mu(]x - \varepsilon, x]) = \mu(\{x\}).$$

Par la continuité des mesures. La fonction $F_\mu$ est donc continue si et seulement si $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x$ . Dans ce cas, si $a < b$

$$\mu(]a,b[) = \mu([a,b]) = \mu([a,b[) = \mu(]a,b]) = F_\mu(b) - F_\mu(a)$$

**Lemme 3.1.** *Si $F$ est une fonction à variation finie, alors*
- *$V_F$ est borné et non décroissant .*
- *$V_F$ s'annule en $-\infty$.*
- *si $F$ est continu à droite, alors $V_F$ est continu à droite.*

**Proposition 3.3.** Si $F$ est une fonction à variation finie sur $\mathbb{R}$, alors il existe deux fonctions croissantes et bornées telles que $F = F_1 - F_2$.

**Démonstration 3.2.** *Les fonctions $F_1 = (V_F + F)/2$ et $F_2 = (V_F - F)/2$ conviennent (si $x < y$, $V_F(y) - F(y) \geq V_F(x) - F(x)$ si et seulement si $V_F(y) - V_F(x) \geq F(y) - F(x)$ Ou, on a $V_F(y) - V_F(x) = V_F[x,y] \geq F(y) - F(x)$).*

*Soit $F$ une fonction à variation finie et $F_1$, $F_2$ les deux fonctions si $F$ est continu à droite, alors $F_1$ et $F_2$ le sont aussi. De plus, si $F$ s'annule en $-\infty$ $F_1$ et $F_2$ s'annulent également en $-\infty$*

**Proposition 3.4.** L'equation (3.4) définit une bijection $\mu \to F_\mu$ entre l'ensemble des mesures signées finies sur $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ et l'ensemble des fonctions continues à droite à variation finie s'annulant en $-\infty$.

**Démonstration 3.3.** *Soit $F_\mu$ est une fonction continue à droite s'annulant en $-\infty$ . $\mu, \nu$ si sont deux mesures signées finies telles que $F_\mu = F_\nu$ alors $F_{\mu^+} - F_{\mu^-} = F_{\nu^+} - F_{\nu^-}$ Dés lors, $F_{\mu^+} + F_{\nu^-} = F_{\mu^-} + F_{\nu^+}$ implique $\mu^+ + \nu^- = \mu^- + \nu^+$ c'est-à-dire $\mu = \nu$.*

# Conclusion

*Dans la théorie intégration mais un théorème très important qu'aura répercutions en particulier des coutés de la théorie de la probabilité c 'est le théorème de Radon-Nikodym qui est théorème de décomposition je vais apparaitre deux mesures $\nu$ et $\mu$ essai relier une a l'autre par une décomposition la premier l'une partie que appel absolument continu .*

*Donc dans ce travail, nous avons étudié Le Théorème de Radon-Nikodym et plus particulièrement la décomposition de Hahn et la décomposition de Jordan et quelque applications.*

# Bibliographie


*[1]* *A.Kolmogorov,S.Fomine.* Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. *deuxième édition,Mir-moscou,* 1973.

*[2]* *Bouziad Calbrix Jcsih.* Théorie De La Mesure et De L'intégration. *publications de l'université de Rouen* 1993 .

*[3]* *Edgar Asplund , lutz Bungart* A First Course In Integration . *Rinehart and Winston, Inc All Rights Reserved Library of Congress Catalog Card Number* $66-10122\ 20550-0116$ *Printed in the United States of America* 1966 .

*[4]* *Jacques Faraut .* Calcul Intégral. *EDP Sciences ,* 17*, avenue du Hoggar Parc d'activités de Courtaboeuf, BP* 112 91944 *Les Ulis Cedex A, France* 2006 .

*[5]* *Jaroslav Lukes , Jan Maly* Measure And Integral *ISBN* $80-86732-68-1$ *ISBN* $80-85863-06-5$ *( First Edition) ,* 2005

*[6]* *Amaury LAMBERT , Jean JACOD* Théorie De La Mesure Et Intégration *Informations complémentaires et nouvelle version actualisée du polycopié spécifique a l'UE LM*364 *:* `http://www.proba.jussieu.fr/ pageperso /amaury/index.html` *,* 2010

*[7]* A Primer Of Lebesgue Integration *Second Edition ,Department of Mathematics University of Hawaii at Manoa Honolulu, Hawaii ,* 2002

*[8]* *Henri Buchwalter* Le Calcul Intégral En Licence De Mathématiques *edition marketing , editeur des preparations grandes ecoles medecine* 32*, rue Bargue* 75015 *paris ISBN* $2-7298-4129-6$ *,* 1991 .

*[9]* *Krishna B. Athreya , Soumendra N. Lahiri* Measure Theory and Probability Theory *Printed in the United States of America. (MVY)* 987654321 *springer.com ,* 2006

*[10]* *G. De Barra , Ph.d* Measure Theory and Integration *Department Of Mathematics royal holloway college , university of london ,* 2000

# ملخص

تطرقنا في هذه المذكرة الى دراسة نظرية **Radon-Nikodym** و كذا تفكيك هان و جوردن .

بعض تطبيقاتها خاصة في جانب النظري للاحتمالات .

كلمات المفتاحية :

$\delta$- جبري, و كذلك $\delta$- تجميعي, و قياسات مستمرة احتمالات .....