République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministére de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Amar Telidji-Laghouat
Faculté des Sciences
Département de Sciences de la Matière

Polycopié de Cours

Domaine : Sciences de la Matière

Filière : Physique

FONCTION DE LA VARIABLE COMPLEXE

Destiné aux étudiants de la 2^{eme} année LMD physique de l'université de Laghouat

Présenté par : Dr. Abdelbaki CHOUCHA

Année : 2023

Table des matières

Préface

Ce polycopié est un ensemble de cours en analyse complexe pour les étudiants de deuxième année (Sciences de la Matière) système LMD pour l'université Ammar Teledji de Laghouat. Il couvre le programme de module fonction de la variable complexe (Maths 4) de quatrième semestre, pour le domaine sciences de la Matière filière physique (2eme Physique).
Le mode de l'exposé adopté vise à rester aussi direct et simple que possible. C'est pour cette raison qu'il évite d'inclure les démonstrations des résultats. Nous avons inclus des exemples illustratifs pour chaque concept.
Enfin, nous avons joint des Exercices et solutions courtes pour chaque chapitre de ce polycopié, et nous avons également présenté un examen avec la solution.

Contenu du Cours

1. Les nombres complexes.
2. Fonctions holomorphes.
3. Fonctions élémentaires.
4. Théorèmes fondamentaux sur les fonctions holomorphes.
5. Intégration dans le domaine complexe, Théorème de Cauchy.
6. Théorèmes des résidus et applications au calcul d'intégrales.
7. Applications.

Chapitre 1

Nombres Complexes

Définition 1.0.1. *Un nombre complexe est une paire ordonnée* (x,y) *de nombres réels. Et nous écrivons* $z=(x,y)$.
Nous désignons l'ensemble des nombres complexes par le symbole $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{C} := \{z=(x,y)/\ \ (x,y)\in\mathbb{R}^2)\}.$$

Nous muni l'ensemble $\mathbb{C}$ avec les opérations addition $(+)$ et multiplication $(.)$ suivantes , $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} z_1+z_2 &:= (x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2), \\ z_1.z_2 &:= (x_1,y_1).(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1). \end{aligned}$$

Le triplet $(\mathbb{C},+,.)$ forme un corps, où $(0,0)$ et $(1,0)$ sont respectivement les éléments neutres des opérations $(+)$ et $(.)$.
D'autre part, on note $i=(0,1)$. Ce nombre complexe vérifie la propriété remarquable :

$$i^2=(0,1).(0,1)=(-1,0)=-1.$$

1.1 Écriture cartesienne

Avec les notations introduites précédemment, on a $\forall z=(x,y)\in\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} z=(x,y) &= (x,0)+(0,y) \\ &= (x,0)+(y,0)(0,1)=x+iy. \end{aligned}$$

C'est ce qu'on appelle l'écriture cartésienne de z . Le nombre réel x, qui est aussi l'abscisse du point d'affixe z, est appelé partie réelle de z et le nombre réel y, qui est aussi l'ordonnée du point d'affixe z, est appelé partie imaginaire de z . On note géneralement :

$$Re(z) = x, \quad Im(z) = y.$$

Si la partie réelle nulle ($Re(z) = 0$), $z = iy$ est dit imaginaire pur.

1.2 Conjugaison

Définition 1.2.1. *Quel que soit le nombre complexe $z = x + iy$ avec x et y réels, on appelle conjugué de z le nombre complexe*

$$\overline{z} = x - iy.$$

Interprétation géométrique : Le point d'affixe $\overline{z}$ est symétrique du point d'affixe z par rapport á l'axe $(0x)$. On a les formules :

$$Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

De plus on a :

— $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$,

— $z \in \daleth\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$.

Proposition 1.2.2. *Pour tous nombres complexes z_1 et z_2,*

1. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$,
2. $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$,
3. $\overline{(\frac{z_1}{z_2})} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \ z_2 \neq 0$,
4. $\overline{\overline{z}} = z$,
5. $z.\overline{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}_+$.

Démonstration 1.2.3. *Par la définition de $(+)$, $(.)$ et $(\overline{z})$. On prouve toutes les relations, par exemple :*

1.

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} \\ &= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) \\ &= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\overline{z_1.z_2} &= \overline{(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2)}\\ &= (x_1x_2-y_1y_2)-i(x_1y_2+y_1x_2)\\ &= (x_1-iy_1).(x_2-iy_2)=\overline{z_1}.\overline{z_2}.\end{aligned}$$

1.3 Module

Définition 1.3.1. *Pour tout nombre complexe z, on appelle module de z le nombre réel positif*

$$|z|=\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

En particulier, si $z=x$ est réel, son module $|z|$ est égal á la valeur absolue $|x|$ de x .

Interprétation géométrique : Si M est le point d'affixe z, on a

$$|z|=\|\overrightarrow{OM}\|.$$

Propriétés 1.3.2. *Pour tous nombres complexes z, z_1 et z_2, on a :*

1. $|z|\geq 0$,
2. $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$,
3. $|z_1.z_2|=|z_1|.|z_2|$,
4. $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ *(Inégalité triagulaire),*
5. $||z_1|-|z_2||\leq|z_1-z_2|$.

1.4 Argument

L'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe des abscisse (Ox) est appelé angle ou argument de $z=x+iy$, et on noté par : $\theta=arg(z)$, qui verifie

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{Re(z)}{|z|}=\frac{x}{|z|},\\ \sin\theta &= \frac{Im(z)}{|z|}=\frac{y}{|z|}.\end{aligned}$$

La valeur de $\theta=arg(z)$ n'est pas unique car si θ_0 est une solution
alors $\theta=\theta_0+2k\pi; k\in\mathbb{Z}$, sont toutes des solutions de $arg(z)$.

Propriétés 1.4.1. *Pour tous nombres complexes z, z_1 et z_2, on a :*

1. $arg(z) = \theta \Leftrightarrow arg(\frac{1}{z}) = -\theta, \quad z \neq 0,$
2. $arg(z_1.z_2) = arg(z_1) + arg(z_2),$
3. $arg(\frac{z_1}{z_2}) = arg(z_1) - arg(z_2), \; z_2 \neq 0,$
4. $arg(\overline{z}) = 2\pi - arg(z),$
5. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|,$ ***et*** $arg(z_1) = arg(z_2) + 2\pi k, \; k \in \mathbb{Z}.$

1.5 Forme trigonométrique

On peut décrire un vecteur dans le plan complexe en coordonnés polaires. On désigne par $(r = |z|, \theta)$ les coordonées polaires du point . Le nombre complexe $z = x + iy$ et le couple (x, y) représentent le même point dans le plan.

$$x = |z|\cos\theta \;\; et \;\; y = |z|\sin\theta,$$

alors

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta \\ &= |z|(\cos\theta + i\sin\theta), \end{aligned}$$

c'est l' écriture trigonométrique de nombre complexe z.

1.5.1 Argument principal

L'argument de z posséde une infinité de valeurs possibles, cependant il y a une valeur unique de θ dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$. Cette valeur est appelée l'argument principal de z et on la note $Arg(z)$.

Èvidement $arg(z) = Arg(z) + 2k\pi; \;\; k \in \mathbb{Z}$.

Pour trouver $Arg(z)$ on doit résoudre les équations

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|} \quad et \quad \sin\theta = \frac{y}{|z|} \quad avec \quad \theta \in]-\pi;\pi]$$

$$Arg(z) = \begin{cases} arctan(\frac{y}{x}) & si\ x > 0 \\ \\ arctan(\frac{y}{x}) + \pi & si\ x < 0\ et\ y \geq 0 \\ \\ \frac{\pi}{2} & si\ x = 0\ et\ y \geq 0 \\ \\ arctan(\frac{y}{x}) - \pi & si\ x < 0\ et\ y \leq 0 \\ \\ -\frac{\pi}{2} & si\ x = 0\ et\ y \leq 0. \\ \end{cases}$$

Exemple 1.5.1. *Trouver la forme trigonométrique de nombres complexes suivantes :* $z_1 = \sqrt{3} + i$. *et* $z_2 = 1 - i$.

Solution 1.5.2. .

1. *On a*

$$|z_1| = \sqrt{3+1} = 2$$
$$\sin\theta = \frac{1}{2}, \quad et \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc

$$Arg(z_1) = \frac{\pi}{6}, \quad et \quad arg(z_1) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$
$$z_1 = \sqrt{3} + i = 2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})).$$

2. *Et pour* z_2, *on a*

$$|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad et \quad \sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

Donc

$$Arg(z_2) = -\frac{\pi}{4}, \quad et \quad arg(z_2) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{1.5.1}$$
$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) - i\sin(\frac{\pi}{4})). \tag{1.5.2}$$

1.6 Forme exponentielle

1.6.1 Formule d'Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Ainsi un nombre complexe peut s'écrire aussi sous la forme exponentielle

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta}.$$

Donc si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, alors e^z est défini par :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

On donne ci-dessous quelques propriétés.

Proposition 1.6.1. *Pour tout θ, θ_1 et $\theta_2 \in \mathbb{R}$.*

1. $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
2. $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$
3. $e^{i(\theta+2\pi)} = e^{i\theta}$
4. $|e^{i\theta}| = 1.$

Exemple 1.6.2. *Voici quelques nombres complexes fondamentaux et leurs formes exponentielles.*

$$\begin{aligned} 1 = e^{i0} = e^{i2\pi}, \quad & i = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad 1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm i\frac{\pi}{4}}, \\ -1 = e^{i\pi}, \quad & -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}, \quad -1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm i\frac{3\pi}{4}}, \end{aligned}$$

1.6.2 Formule de Moivre

Si

$$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),$$
$$z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$

alors

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right\}, \tag{1.6.1}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right\}.$$

Une généralisation de (1.6.1) conduit á

$$z_1 z_2 ... z_n = r_1 r_2 ... r_n \Big\{ \cos(\theta_1+\theta_2+...+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+...+\theta_n) \Big\},$$

ce qui, si $z_1 = z_2 = ... = z_n = z$, conduit á

$$z^n = \Big\{ r(\cos\theta + i\sin\theta) \Big\}^n = r^n \Big\{ \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \Big\}.$$

Si $|z| = 1$, on a

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (cos(n\theta) + i\sin(n\theta)),$$

qui est appelée formule de de Moivre.

Exemple 1.6.3. *Calculer* $A = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})^3$ *et* $B = (1 - i\sqrt{3})^6$.

Solution 1.6.4.

$$\begin{aligned}
A = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})^3 &= (\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}))^3 = \cos(\frac{3\pi}{6}) + i\sin(\frac{3\pi}{6}) \\
&= \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) = i, \\
B = (1 - i\sqrt{3})^6 &= 2^6 e^{-i\frac{6\pi}{3}} = 2^6 e^{-i2\pi} \\
&= 2^6(\cos 2\pi - \sin 2\pi) = 2^6 = 64.
\end{aligned}$$

1.7 Racines n-iéme d'un nombre complexe

Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

On appelle racine n-ieme de z tout nombre complexe $\omega = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ tel que $z = \omega^n$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
\omega^n = z \quad &\Leftrightarrow \quad \rho^n(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\
&\Leftrightarrow \quad \rho^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)) = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\
&\Leftrightarrow \quad \rho^n = r \quad \text{et} \quad n\alpha = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad \rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n},\ \ k \in \{0,1,2,...,n-1\}.
\end{aligned}$$

En donnant á k les valeurs $0,1,2,...,n-1$, nous trouvons n valeurs différentes de la racine n-ieme de z :

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\Bigg(\cos(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}) \Bigg), \quad k \in \{0,1,2,...,n-1\}.$$

De plus elles verifients la propriété :

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} \omega_k = 0.$$

Exemple 1.7.1. *Calculer les racines 6-ieme de $z_1 = 1$ et Calculer les racines cub de $z_2 = 1+i$.*

Solution 1.7.2. .

1) Les racines de cette équations sont appelées les 6-ieme racines de l'unité. On a $|z_1| = 1$, et $arg(z_1) = 0 + 2k\pi$.

$$\begin{aligned} \omega^6 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad |\omega| = 1 \ \ et \ \ 6\alpha = 0 + 2ik\pi, \ \ k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad \omega_k = e^{2ik\pi/6}, \ \ k \in \{0,1,2,3,4,5\}, \end{aligned}$$

1. *pour $k = 0 \Rightarrow \omega_0 = 1$,*
2. *pour $k = 1 \Rightarrow \omega_1 = e^{i\pi/3} = 1/2 + i\sqrt{3}/2$,*
3. *pour $k = 2 \Rightarrow \omega_2 = e^{i2\pi/3} = -1/2 + i\sqrt{3}/2$,*
4. *pour $k = 3 \Rightarrow \omega_3 = e^{i\pi} = -1$,*
5. *pour $k = 4 \Rightarrow \omega_4 = e^{i4\pi/3} = -1/2 - i\sqrt{3}/2$,*
6. *pour $k = 5 \Rightarrow \omega_5 = e^{i5\pi/3} = 1/2 - i\sqrt{3}/2$.*

2) On a

$$1 + i = \sqrt{2}\Big(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\Big),$$

donc

$$\begin{aligned} \omega^3 = 1 + i \quad &\Leftrightarrow \quad \omega = \Big\{\sqrt{2}\Big(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\Big)\Big\}^{\frac{1}{3}} \\ &\Leftrightarrow \quad \omega = \sqrt{2}^{\frac{1}{3}}\Big(\cos(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3})\Big), \ \ k \in \{0,1,2\} \end{aligned}$$

- *pour $k = 0 \rightarrow \ \omega_0 = \sqrt[6]{2}\Big\{\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12})\Big\}$,*
- *pour $k = 1 \rightarrow \ \omega_1 = \sqrt[6]{2}\Big\{\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})\Big\}$,*
- *pour $k = 2 \rightarrow \ \omega_2 = \sqrt[6]{2}\Big\{\cos(\frac{17\pi}{12}) + i\sin(\frac{17\pi}{12})\Big\}$.*

1.8 Equations Algebriques

Nous avons souvent dans la pratique á chercher des solutions d'équations algébriques de la forme

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n = 0, \tag{1.8.1}$$

oú $a_0 \neq 0, a_1, a_2, , ..., a_n$, sont des nombres complexes donnés et n un entier positif appelé le degré de l'équation. De telles solutions sont aussi appelées zéros du polynôme figurant dans le premier membre de (1.8.1) ou racines de l'équation (1.8.1).
Un théoréme trés important appelé théoréme fondamental de l'algébre établit que toute équation algébrique de la forme (1.8.1) a au moins une racine complexe. De lá nous pouvons déduire qu'il y a en fait n racines complexes, certaines d'entre elles pouvant être confondues.
Si $z_1, z_2, ..., z_n$, sont les n racines, l'équation (1.8.1) peut être écrite sous la forme

$$a_0(z-z_1)(z-z_2).........(z-z_n)=0, \tag{1.8.2}$$

qui est appelée la forme factorisée de l'équation. Réciproquement, si nous pouvons écrire (1.8.1) sous la forme (1.8.2) nous pourrons aisément en déterminer les racines.

Exemple 1.8.1. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :*

1. $z^2-3iz-2=0,$

   on a $\Delta=-1=i^2$ *et les solutions* $z_1=\frac{3i+i}{2}=2i,\ \ z_2=\frac{3i-i}{2}=i.$

2. $z^3+(2-i)z^2+(1-3i)z+2-2i=0$ *(l'équation admet une solution réel).*

   La solution réel particulier $z_1=x\in\mathbb{R}$*, alors*

$$x^3+(2-i)x^2+(1-3i)x+2-2i=(x^3+2x^2+x+2)+i(-x^2-3x-2)=0$$

$$\Rightarrow (x^3+2x^2+x+2)=0,\ \ et\ \ (-x^2-3x-2)=0 \Rightarrow x_1=-1.$$

   En suite, on a

$$(z+1)(z^2+(1-i)z+2-2i)=0,$$

   et les solutions $z_1=-1,\ \ z_2=2i,\ \ z_3=-1-i.$

1.9 Ensembles de points

Toute famille de points du plan complexe est appelée un ensemble de points (de dimension deux), et tout point de cette famille est appelé un élé ment de l'ensemble. Les définitions fondamentales qui suivent sont donné es ici pour servir de référence.

1. **La distance entre deux points :** Soit M et M_0 deux points du plan complexe d'affixes $z=x+iy$ et $z_0=x_0+iy_0$ respectivement. La distance entre M et M_0 est donnée par

$$|z-z_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

2. **Cercle :** Un cercle de centre z_0 et de rayon $r > 0$ est l'ensemble de points donné par

$$C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = r\}.$$

3. **Disque ouvert :** Un disque ouvert de centre z_0 et de rayon $r > 0$ est l'ensemble de points donné par

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}.$$

4. **Disque fermé :** Un disque fermé de centre z_0 et de rayon $r > 0$ est l'ensemble de points donné par

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq r\}.$$

5. **Couronne :** Une couronne est l'ensemble des points vérifiant

$$r < |z - z_0| < R.$$

6. **Ensembles bornés :** On dit qu'un ensemble $A \subset \mathbb{C}$ est borné s'il existe un nombre réel $r > 0$ tel que $|z| < r, \forall z \in A$.

7. **Voisinages :** Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Une partie $V \subset \mathbb{C}$ est dit voisinage de z_0 s'il existe $r > 0$ tel que $D(z_0; r) \subset V$.

8. **Ensembles ouverts et ensembles fermés :** Un ensemble $A \subset \mathbb{C}$ est dit ouvert (resp. fermé) si et seulement si $\forall z \in A; \exists r > 0; D(z; r) \subset A$ (resp. $\mathbb{C} - A$ est un ensemble ouvert). Autrement dit un ensemble A est un ouvert s'il est voisinage de tout ses points.

9. **Ensembles connexes :** Un ensemble $D \subset \mathbb{C}$ est dit connexe si deux points quelconques de D peuvent être joints par un chemin appartenant à D. (si z_1 et z_2 sont deux points de D, on appelle chemin d'origine z_1 et d'extrémité z_2 toute application continue $\gamma : [0; 1] \longrightarrow D$ telle que $\gamma(0) = z_1$ et $\gamma(1) = z_2$.)

10. **Domaines :** On dit qu'un ensemble $D \subset \mathbb{C}$ est un domaine si D est un ouvert connexe dans $\mathbb{C}$.

11. **Segments :** Le segment de droite reliant deux points complexes z_0 et z_1 est l'ensemble des points

$$\{z \in \mathbb{C}/z = (1-t)z_0 + tz_1, \quad t \in [0;1]\}.$$

12. **Courbes :** En général, une courbe $y = f(x); x \in [a;b]$ oú f est une fonction continue, correspond á l'ensemble de points

$$\{z \in \mathbb{C}/z = x + if(x), \quad x \in [a;b]\}.$$

Exemple 1.9.1. *Trouver les lieux géométriques suivants :*

(a) Point $z = 1-2i$ | *(b) droit* $|z+1+i| = |z-1-i|$

(c) Cercle |z - 1 - i| = 1 | *(d) Disque* $|z-1-i| < 1$

(e) Ellipse $|z+i| + |z+2i| = 2$ | *(f) Couronne* $1 \leq |z+3| \leq 2$

(g) Bande $3 < Rez < 5$ | *(h) Rayon* $Argz = -3\pi/4$

Solution 1.9.2. *On a* $z = x+iy$

(a) $z = 1-2i$ *est un point* $A(1,-2)$.

(b) droit $|z+1+i| = |z-1-i|$,

$$\begin{aligned} |z+1+i| = |z-1-i| &\Leftrightarrow |x+iy+1+i| = |x+iy-1-i| \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \\ &\Leftrightarrow y = -x. \end{aligned}$$

L'ensemble (b) des points est une droite dont l'équation est $y = -x$.

(c) Cercle $|z-1-i| = 1$,

$$\begin{aligned} |z-1-i| = 1 &\Leftrightarrow |x+iy-1-i| = 1 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1. \end{aligned}$$

L'ensemble (c) des points est une cercle de centre $z_0 = 1+i$ *et de rayon 1.*

(d) Disque $|z-1-i| < 1$,

$$\begin{aligned} |z-1-i| < 1 &\Leftrightarrow |x+iy-1-i| < 1 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 < 1. \end{aligned}$$

L'ensemble (d) des points c'est le disque ouvert dont le centre $z_0 = 1+i$ *et de rayon 1.*

(e) Ellipse $|z+i|+|z+2i| = 2$,

L'ensemble (e) des points C'est ellipse de foyers $z_0 = -i$ *et* $z_1 = -2i$ *oú la longueur du grand axe égale 2.*

(f) Couronne $2 \leq |z+1| \leq 3$,

$$2 \leq |x+iy+1| \leq 3 \Leftrightarrow 4 \leq (x+1)^2 + y^2 \leq 9.$$

L'ensemble (f) des points c'est la couronne entre les deux cercles de centre $z_0 = -1(-1,0)$ *et de rayons* 2 *et* 3.

(g) secteur du plan $3 < Rez < 5$. *L'ensemble des points est le secteur du plan entre les droites* $x = 3$ *et* $x = 5$.

(h) Rayon $Argz = -3\pi/4$. *L'ensemble des points est la demi- droite* $[OM)$ *dont l'équation est* $y = x$ *et* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}) = \dfrac{-3\pi}{4}$.

1.10 Exercices

Exercice 1.10.1. *Ècrire sous forme* $a+ib$ *les nombres complexes suivants*

1. $A = (1+i\sqrt{3})^6$, *réponse :* $A = 64$.
2. $B = \dfrac{2+i}{1-i} + \dfrac{2i}{1+i}$, *réponse :* $B = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$.
3. $C = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5$, *réponse :* $C = -i$.
4. $D = \frac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1+\cos\theta - i\sin\theta}$, *réponse :* $D = \cos\theta + i\sin\theta$.

Exercice 1.10.2. *Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :*

1. $a = 1+i$, *réponse :* $a = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
2. $b = 1-i\sqrt{3}$, *réponse :* $b = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
3. $c = -\sqrt{3}+i$, *réponse :* $c = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.
4. $d = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$, *réponse :* $d = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 1.10.3. *Calculer les valeurs de l'expression suivante :*

$$w = (-1+i\sqrt{3})^{\frac{3}{4}},\ \textit{réponse}\ w_k = \sqrt[4]{8}, -\sqrt[4]{8}, i\sqrt[4]{8}, -i\sqrt[4]{8}.$$

Exercice 1.10.4. *Déterminer l'ensemble des points du plan complexe défini par :*

1. $|\overline{z}-4+i|=1$, *réponse : L'ensemble de points est le cercle* $C(4+i;1)$.
2. $Re(1-z)<\frac{1}{2}$, *réponse : L'ensemble de points est le demi-plan* $x>\frac{1}{2}$.
3. $\left|\frac{z-3}{z-5}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$, *réponse : L'ensemble de points est le cercle* $C(1,2\sqrt{2})$.
4. $|2z-1|=|z-i|$, *réponse : L'ensemble de points est le cercle*

$$C(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}i,\frac{\sqrt{5}}{3}).$$

5. $|z-1|+|z+1|=4$, *réponse : L'ensemble de points est l'ellipse*

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.$$

6. $|z+i|=Im(z+2i)$, *réponse : L'ensemble de points est La parabole*

$$y=\frac{1}{2}(x^2-3).$$

Chapitre 2

Fonctions holomorphes

2.1 Fonction d'une variable complexe à valeur complexe

Définition 2.1.1. *Soient A et B deux ensembles non vides dans $\mathbb{C}$. Si à chaque valeur $z \in A$, il correspond une ou plusieurs valeurs $w \in B$, on dit que w est une fonction de z et on écrit $w = f(z)$ ou*

$$\begin{aligned} f :& A \longrightarrow B \\ & z \longmapsto w = f(z) \end{aligned}$$

$$z = x + iy \in A, \quad f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$

avec $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont respectivement partie réelle et imaginaire de $f(z)$.

La fonction $w = f(z)$ définie une correspondance entre deux plans complexes.

Exemple 2.1.2.

$$\begin{aligned} f :& \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C} \\ & z \longmapsto f(z) = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

On a $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ et $v(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$.

Si $f(z) = z^2$, alors

$$f(x+iy) = (x+iy)^2 = (x^2-y^2) + i(2xy).$$

Donc

$$u(x,y) = x^2 - y^2 = Re(f) \text{ et } v(x,y) = 2xy = Im(f).$$

Si on utilise la forme polaire de z, on obtient

$$f(re^{i\theta}) = (re^{i\theta})^2 = r^2e^{i2\theta} = r^2cos(2\theta) + ir^2sin(2\theta).$$

Donc

$$u(r,\theta) = r^2cos(2\theta) = Re(f) \ et \ v(r,\theta) = r2sin(2\theta) = Im(f).$$

Lorsque le domaine d'une fonction complexe n'est pas explicitement énoncé, nous supposons le domaine étant l'ensemble de tous les nombres complexes z pour lesquels $f(z)$ est défini. Cet ensemble est parfois appelé le domaine naturel de f. Par example, les fonctions $f(z) = z^2 - (2+i)z$ et $g(z) = z + 2Re(z)$ dans l'exemple 1 sont défini pour tout nombre complexe z, et donc, $Dom(f) = \mathbb{C}$ et $Dom(g) = \mathbb{C}$. La fonction complexe $h(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$

En tant que n'est pas défini en $z = i$ et $z = -i$ car le dénominateur $z^2 + 1$ est égal á 0 lorsque $z = \pm i$. Donc $Dom(h)$ est l'ensemble de tous les nombres complexes sauf i et $-i$.

2.1.1 Fonctions uniformes et multiformes

Définition 2.1.3. .

• *Si une seule valeur de w correspond á chaque valeur de z on dira que w est une fonction uniforme de z ou que $f(z)$ est uniforme.*

• *Si plusieurs valeurs de w correspondent á chaque valeur de z, on dira que w est une fonction multiforme de z.*

Exemple 2.1.4. *Si l'on considére la fonction $w = f(z) = \sqrt{z}$, á chaque valeur de z correspondent deux valeurs de w. Donc $f(z) = \sqrt{z}$ est une fonction multiforme de z.*

2.2 Limites et continuité

2.2.1 Limite d'une fonction complexe

Définition 2.2.1. *Soit f une fonction complexe á une variable complexe, on dit que f admet une limite l en $z_0 = x_0 + iy_0$, et on note $\lim_{z \to z_0} f(z) = l$, si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0; \exists \delta > 0 \ \ tel \ que \ \ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - l| < \epsilon$$

Remarque 2.2.2. .

1. *f a une limite si elle tend vers la même limite suivant toutes les directions du plan.*

2. *Pour prouver que f n'admet pas de limite en un point, il suffit de trouver deux directions d'approches de ce point donnant deux limites différentes.*

3. *Lorsque $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ on pose $l = l_1 + il_2$, où l_1 et l_2 sont deux nombres complexes, alors*

$$|f(z) - l| = |u(x,y) - l_1 + i(v(x,y) - l_2)| \leq |u(x,y) - l_1| + |v(x,y) - l_2|.$$

D'autre part, on a :

$$|u(x,y) - l_1| \leq \sqrt{(u(x,y) - l_1)^2 + (v(x,y) - l_2)^2} = |f(z) - l|,$$
$$|v(x,y) - l_2| \leq \sqrt{(u(x,y) - l_1)^2 + (v(x,y) - l_2)^2} = |f(z) - l|,$$

ce qui montre que $\lim_{z \to z_0} f(z) = l$, si et seulement si

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = l_1 \text{ et } \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = l_2$$

Proposition 2.2.3. .

1. $\lim_{z \to z_0} (af(z) + bg(z)) = a \lim_{z \to z_0} f(z) + b \lim_{z \to z_0} g(z)$.
2. $\lim_{z \to z_0} (f(z)g(z)) = (\lim_{z \to z_0} f(z))(\lim_{z \to z_0} g(z))$.
3. $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \to z_0} f(z)}{\lim_{z \to z_0} g(z)}$.

Exemple 2.2.4.
1) Si $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ avec $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$, alors $\lim_{z \to 0} f(z)$ n'existe pas.
Soit $z = x + iy$, lorsque $y = 0$ et $x \to 0$, on a

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{x + i0}{x - i0} = 1,$$

lorsque $x = 0$ et $y \to 0$, on a

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{0 + iy}{0 - iy} = -1.$$

On a trouvé deux directions d'approche du point $z_0 = 0$, telles que la fonction ne tend pas vers la même limite, ce qui prouve que f n'admet pas de limite en $z_0 = 0$.
2) Trouver les limites suivantes $\lim_{z \to 2} \frac{z^2 + 3}{iz}$ et $\lim_{z \to i} \frac{z^2 + 1}{z^4 - 1}$.
On a

$$\lim_{z \to 2} \frac{z^2 + 3}{iz} = \lim_{z \to 2} \frac{\lim_{z \to 2}(z^2 + 3)}{\lim_{z \to 2}(iz)} = \frac{7}{2i} = -\frac{7i}{2},$$

et

$$\lim_{z\to i}\frac{z^2+1}{z^4-1}=\lim_{z\to i}\frac{z^2+1}{(z^2-1)(z^2+1)}=\lim_{z\to i}\frac{1}{(z^2-1)}=-\frac{1}{2}$$

Définition 2.2.5.

- *On dit que f admet une limite l lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$ si et seulement si*

$$\forall\varepsilon>0:\exists A>0 \text{ tel que } |z|>A\Rightarrow|f(z)-l|<\epsilon$$

- *On dit que* $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=+\infty$ *si et seulement si*

$$\forall A>0:\exists\delta>0 \text{ tel que } |z-z_0|<\delta\Rightarrow|f(z)|>A$$

- *On dit que* $\lim\limits_{z\to+\infty}f(z)=+\infty$ *si et seulement si*

$$\forall A>0:\exists B>0 \text{ tel que } |z|>B\Rightarrow|f(z)|>A$$

Remarque 2.2.6. *Nous définissons*

$$\lim_{z\to\infty}f(z):=\lim_{z\to 0}f\left(\frac{1}{z}\right)$$

Exemple 2.2.7.

$$1)\ \lim_{z\to\infty}\frac{iz^2-z}{z^2-1}=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{i}{z^2}-\frac{1}{z}}{\frac{1}{z^2}-1}=\lim_{z\to 0}\frac{i-z}{1-z^2}=i$$

$$2)\ \lim_{z\to\infty}\frac{z^2+iz}{z^3+1}=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{1}{z^2}+\frac{i}{z}}{\frac{1}{z^3}+1}=\lim_{z\to 0}\frac{z+iz^2}{1+z^3}=0$$

$$3)\ \lim_{z\to\infty}\frac{z^2+1}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{1}{z^2}+1}{\frac{1}{z}}=\lim_{z\to 0}(\frac{1}{z}+z)=\infty$$

2.2.2 Continuité d'une fonction complexe

Définition 2.2.8. *Soit $D\subset\mathbb{C}$ un domaine, $z_0\in D$ et $f:D\longrightarrow\mathbb{C}$, on dit que la fonction f est continue au point z_0 de D si*

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0).$$

On dit que f est continue dans un domaine D si f si elle est continue en tout point z_0 de D.

Remarque 2.2.9. $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$ *veut dire que :*

— *f admet une limite finie en z_0,*

— *f est définie en z_0,*

— *la limite doit être égale à la valeur de la fonction $f(z_0)$.*

Proposition 2.2.10.

(1) Si f et g sont deux fonctions continues en z_0, alors les fonctions :
Les fonctions $(f+g)$, (fg), $(f\circ g)$ et $\dfrac{f}{g}$ si $g(z_0)\neq 0$ sont continues en z_0.
(2) $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ est continue en $z_0=(x_0,y_0)$ si et seulement si les fonctions réelles $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont continues en (x_0,y_0).

Exemple 2.2.11. .

(1) La fonction $f(z)=\overline{z}=x-iy$ est continue sur $\mathbb{C}$ car les fonction $u(x,y)=x$ et $v(x,y)=-y$ sont continues en tout point $z_0=(x_0,y_0)\in\mathbb{C}$.
(2) Les fonctions $z\longrightarrow z^2$, $z\longrightarrow Re(z)$ et $z\longrightarrow Im(z)$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{C}$.
(3) La fonction $f(z)=\dfrac{z}{1+z^2}$ est continue en tout point z_0 de $\mathbb{C}$ sauf en $z_0=\pm i$.

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^2+1}{z-i}, & si\ \ z\neq i,\\ \\ 4i, & si\ \ z=i.\end{cases}$$

On a

$$\lim_{z\to i}f(z)=\lim_{z\to i}\frac{z^2+1}{z-i}=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)(z+i)}{z-i}=\lim_{z\to i}(z+i)=2i\neq f(i).$$

Donc la fonction f est discontinue en $z_0=i$.

2.3 Fonction holomorphes

2.4 Dérivée de la fonction complexe

Définition 2.4.1. *(**Application $\mathbb{C}$-linéaire**) : Pour un nombre complexe c fixé, considérons la fonction*

$$w=f(z)=cz.$$

Elle est $\mathbb{C}$-linéaire, c-á-d., elle satisfait

$$f(c_1z_1+c_2z_2)=c_1f(z_1)+c_2f(z_2),\quad \forall c_1,c_2\in\mathbb{C},\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}.$$

Définition 2.4.2. *(**Application $\mathbb{R}$-linéaire mais pas $\mathbb{C}$-linéaire**) : Considérons la fonction*

$$w=f(z)=(0.3-i)z-(1.1+0.5i)\overline{z}.$$

Elle n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire, car $f(i) \neq if(1)$. Par contre, elle est $\mathbb{R}$-linéaire c-á-d., elle satisfait

$$f(c_1z_1+c_2z_2)=c_1f(z_1)+c_2f(z_2), \quad \forall c_1,c_2\in\mathbb{R},\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}.$$

Définition 2.4.3. *($\mathbb{C}$**-différentiabilité**) : La fonction $f : D \to \mathbb{C}$ est dite $\mathbb{C}$-différentiable en $z_0 \in \mathbb{C}$, s'il existe une constante $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ et une fonction $r(z)$, continue en z_0 et satisfaisant$r(z_0) = 0$, telle que*

$$f(z) = f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+r(z).|z-z_0|. \tag{2.4.1}$$

La constante $f'(z_0)$ est la dérivée de $f(z)$ en z_0. Cette fois, la fonction $f(z)-f(z_0)$ est approchée par une fonction $\mathbb{C}$-linéaire.

D'une manière équivalente, la fonction $f : D \to \mathbb{C}$ est dite $\mathbb{C}$-différentiable en $z_0 \in \mathbb{C}$, si la limite suivante existe dans $\mathbb{C}$,

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0).$$

Dans cette limite, z peut se rapprocher arbitrairement de z_0.

Aussi d'une manière équivalente :

Définition 2.4.4. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine, $z_0 \in D$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$.*

On dit que f est dérivable (au sens complexe) au point $z_0 \in D$ si et seulement si la limite suivante

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.$$

existe et finie. On note $f'(z_0)$.

Posons $\Delta z = z - z_0$ alors,

f est dérivable en $z_0 \Leftrightarrow \displaystyle\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$, existe et finie.

Exemple 2.4.5.

1. *L'exemple le plus simple d'une fonction non holomorphe est : la fonction $f = Re(z)$ est différentiable par rapport á $x = Re(z)$ et $y = Im(z)$ mais n'est pas holomorphe. En effet,*

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{x-x_0}{(x-x_0)+i(y-y_0)},$$

si $y = mx$ / $m \in \mathbb{R}^*$, alors

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{(x-x_0)(1+im)}=\frac{1}{1+im}.$$

Et c'est une limite qui n'est pas unique car m est variable, et donc f n'est pas holomorphe car la limite n'existe pas.

2. $f(z)=3z^2+2z$ *est dérivable en tout point* z_0 *de* $\mathbb{C}$. *En effet,*

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} &= \lim_{z\to z_0}\frac{3z^2+2z-3z_0^2-2z_0}{z-z_0}\\ &= \lim_{z\to z_0}(3(z+z_0)+2)=6z_0+2=f'(z_0).\end{aligned}$$

3. *La fonction* $f(z)=\overline{z}$ *n'est pas dérivable en tout point* $z_0\in\mathbb{C}$. *Puisque,*

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\begin{cases}+1 & si\ \Delta y=0\\ \\ -1 & si\ \Delta x=0\end{cases}$$

Proposition 2.4.6. *Soient* $f,g:D\longrightarrow\mathbb{C}$ *deux fonctions dérivables sur l'ouvert* $D\subset\mathbb{C}$ *et* $c\in\mathbb{C}$, *une constante. Alors on a*

1. $(c)'=0$
2. $(cf)'=cf'$
3. $(f\pm g)'=f'\pm g'$
4. $(fg)'=f'g+fg'$
5. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-g'f}{g^2}$, *quand* $g(z)\neq 0$
6. $(f\circ g)'=[f(g)]'=f'(g)g'$.
7. $(z^n)'=nz^{n-1}$, n *un entier.*
8. $(f^n)'=nf'f^{n-1}$, n *un entier.*

La démonstration est similaire à celle du cas réel.

Exemple 2.4.7. *Trouver les dérivées des fonctions suivantes :*
(a) $f(z)=z^3-3z^2+4z+i\Rightarrow f'(z)=3z^2-6z+4$
(b) $f(z)=\dfrac{z^2}{6z-1}\Rightarrow f'(z)=\dfrac{6z^2-2z}{(6z-1)^2}$
(c) $f(z)=(2iz^4+5z^2)^6\Rightarrow f'(z)=6(8iz^3+10z)(2iz^4+5z^2)^5$.

Théorème 2.4.8. *Si* f *est dérivable en un point* z_0 *dans un domaine* D, *alors* f *est continue à* z_0.

Démonstration. .
Les limites $\lim_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ et $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)$ existe et est égal à $f'(z_0)$ et 0, respectivement, nous pouvons écrire la limite suivante d'un produit comme produit des limites :

$$\lim_{z\to z_0}(f(z)-f(z_0))=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.(z-z_0)$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.\lim_{z\to z_0}(z-z_0)=f'(z_0).0=0,$$

de $\lim_{z\to z_0}(f(z)-f(z_0))=0$ nous concluons que $\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$, f est continue en z_0. □

2.4.1 Régle de l'Hôpital

Soit f et g deux fonctions holomorphes dans un domaine contenant le point z_0 et supposons que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ avec $g'(z_0) \neq 0$. Alors la règle de L'Hôpital permet d'affirmer que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Dans le cas oú $f'(z_0) = g'(z_0) = 0$, on peut utiliser cette régle à nouveau.

Exemple 2.4.9. *Calculer* $\lim\limits_{z \to 2+i} \dfrac{z^2 - 4z + 5}{z^3 - z - 10i}$

Solution 2.4.10. *Si nous identifions $f(z) = z^2 - 4z + 5$ et $g(z) = z^3 - z - 10i$, vous devrait vérifier que $f(2+i) = 0$ et $g(2+i) = 0$. La limite donnée a le forme indéterminée $0/0$. Maintenant, puisque f et g sont des fonctions polynomiales, les deux les fonctions sont nécessairement analytiques à $z_0 = 2+i$. En utilisant $f'(z) = 2z - 4$, $g'(z) = 3z^2 - 1$, $f'(2+i) = 2i$, $g'(2+i) = 8 + 12i$, Alors la régle de L'Hôpital permet d'affirmer que*

$$\lim_{z \to 2+i} \frac{z^2 - 4z + 5}{z^3 - z - 10i} = \frac{f'(2+i)}{g'(2+i)} = \frac{2i}{8+12i} = \frac{3}{26} + \frac{1}{13}i.$$

2.4.2 Conditions de Cauchy-Riemann

Supposons que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ soit dérivable en un point $z = x + iy$. Alors en z les dérivées partielles du premier ordre de u et v existent et satisfont les équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \;\; et \;\; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

Démonstration. La dérivée de f au point z est donnée par

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

En supposant que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ et $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, alors on a

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x; y + \Delta y) - u(x,y) - iv(x,y)}{\Delta x + i\Delta y}$$

Puisque la limite est supposée exister, Δz peut s'approcher de zéro á partir de n'importe quel direction.

Ainsi, nous avons deux cas.

1) En particulier, si l'on choisit de laisser $\Delta z \to 0$ le long d'une horizontale droite, alors $\Delta y = 0$

et $\Delta z = \Delta x$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) + iv(x+\Delta x, y) - u(x,y) - iv(x,y)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y) + i[v(x+\Delta x, y) - iv(x,y)]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[v(x+\Delta x, y) - iv(x,y)]}{\Delta x} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.
\end{aligned}$$

2)$\Delta z \to 0$ avec $\Delta x = 0$ et $\Delta z = i\Delta y$: On a

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) + iv(x, y+\Delta y) - u(x,y) - iv(x,y)}{i\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y) + i[v(x, y+\Delta y) - iv(x,y)]}{i\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y)}{\Delta y} - u(x,y) + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[v(x, y+\Delta y) - iv(x,y)]}{i\Delta y} \\
&= -i \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Puisque la limite de $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ est unique suivant toutes les directions, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ \textit{et} \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

□

Théorème 2.4.11. *Soit $f : G \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ / \ f = u + iv$, on a*

$$f \ \textit{ est dérivable au } \ z_0 = (x_0, y_0) \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\textit{Les dérivées partielles } u_x(x_0,y_0), \\ \ u_y(x_0,y_0), v_x(x_0,y_0) \textit{ et } v_y(x_0,y_0) \\ \ \textit{sont existent et continues} \\ 2)\textit{Les équations de Cauchy-Riemann} \\ \ \ \textit{sont vérifiés.} \end{cases}$$

Si elle est vérifiée en tout point z_0 de G on dit que f est dérivable sur l'ensemble G.

2.5 Fonctions holomorphes ou analytiques

Définition 2.5.1. *(Les opérateurs $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, d', d''$) :*

On va retrouver et interpreter la condition de Cauchy d'une autre farcon.

1. *Pour toute fonction $f : D \to \mathbb{C}$ différentiable au point z_0, on a*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \tag{2.5.1}$$

Les fonctions $z = x+iy$ et $\overline{z} = x-iy$ sont différentiables en tout point de $\mathbb{C}$ et $dz = dx+idy$; $dz = dx-idy$, d'oú $dx = \frac{1}{2}(dz+d\overline{z})$; $dy = \frac{i}{2}(dz-d\overline{z})$; alors

$$df = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(dz+d\overline{z}) + \frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(dz-d\overline{z}).$$

On définit les deux opérateurs différentiels $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ par

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

alors (2.5.1) s'écrit

$$df = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial z}d\overline{z}. \tag{2.5.2}$$

Si f est $\mathbb{C}$-différentiable en z_0, d'aprés (2.4.1), on a : $df = f'(z_0)dz$, d'oú

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'(z_0), \tag{2.5.3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0. \tag{2.5.4}$$

La relation (2.5.3) exprime que, si f est $\mathbb{C}$-différentiable en z_0, $\frac{\partial}{\partial z}$ est la dérivation complexe ; la relation (2.5.4) est la condition de Cauchy.
Dans le cas oú f est seulement différentiable (au sens reel), $\frac{\partial}{\partial z}$ (resp. $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$) n'est pas la dérivation partielle par rapport a la variable complexe z (resp. $\overline{z}$).

2. *On pose $d'f = \frac{\partial f}{\partial z}$ et $d''f = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$; les conditions (2.5.3) et (2.5.4) peuvent s'énoncer comme suit :*

Proposition 2.5.2. *Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathbb{R}$-différentiable en un point z_0 de $\mathbb{U}$; alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) f est $\mathbb{C}$-différentiable en z_0 ;
(ii) en z_0 on a : $d'f = df$;
(iii) en z_0, on a : $d''f = 0$.

Définition 2.5.3. ***Fonctions holomorphes :*** *Une fonction $f : D \to \mathbb{C}$ qui est $\mathbb{C}$-différentiable dans un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ s'appelle **holomorphe** dans D. On dit qu'une fonction est holomorphe en un point z_0 si elle est holomorphe dans un voisinage $D_\varepsilon(z_0)$.*

Proposition 2.5.4. *Soit $f : D \to \mathbb{C}$, alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) f est holomorphe dans D ;

(ii) $d' f = df$ sur D ;

(iii) $d'' f = 0$ sur D.

D'une manière équivalente :

Définition 2.5.5.

• *f est dite* ***holomorphe*** *ou* ***analytique*** *en un point z_0 dans un domaine D si elle est dérivable aussi bien au point z_0 lui-même que dans un certain voisinage de ce point.*

• *On dit aussi que f est analytique en z_0 si elle est développable en une série entière au voisinage de z_0.*

• *f est entière si elle est analytique en tout point $z \in \mathbb{C}$.*

On note l'ensemble des fonctions analytiques sur G par le symbole $H(G)$, c'est-á-dire que

$$f \in H(G) \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \; f \text{ est dérivable sur } G, \\ 2) \; G \text{ une partie ouverte de } \mathbb{C}. \end{cases}$$

Théorème 2.5.6. *Soit $f : G \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} \; / \; f = u + iv$, on a*

$$f \in H(G) \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \text{ Les dérivées partielles } u_x(x_0, y_0), \\ \quad u_y(x_0, y_0), v_x(x_0, y_0) \text{ et } v_y(x_0, y_0) \\ \quad \text{sont existent et continues} \\ 2) \text{ Les équations de Cauchy-Riemann} \\ \quad \text{sont vérifiés,} \\ 3) \; G \text{ une partie ouverte de } \mathbb{C}. \end{cases}$$

Remarque 2.5.7. *Tous les théorèmes concernant la dérivation des fonctions dans $\mathbb{R}$ restent valables pour les fonctions complexes, et se prouvent de la même manière.*

Exemple 2.5.8. *Les fonctions suivantes sont-elles holomorphes (analytiques)*

Exemple 2.5.9.

(a)*Les polynômes $f(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$, $a_0; ...a_n \in \mathbb{C}$ sont des fonctions entiéres.*

(b) *Si $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ où p et q sont des polynômes, alors f est analytique dans tout domaine D ne contenant aucun zéro du polynôme q. Les zéros de q sont tous des singularités isolées de f.*

Exemple 2.5.10.

1) Montrer que la fonction $f(z) = z^2 + z$ est analytique pour tout $z \in \mathbb{C}$.

2) Montrer que la fonction complexe $f(z) = 2x^2 + y + i(y^2 - x)$ n'est pas analytique à n'importe quel moment.

Solution :

1) On peut s'écrire $f(z)$ sous la forme $f(z) = x^2 - y^2 + x + i(2xy + y)$. Ainsi, $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$ et $v(x,y) = 2xy + y$. Pour tout point (x,y) dans le plan complexe, nous voyons que les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1 = \frac{\partial v}{\partial y} \ et \ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

2) On identifie $u(x,y) = 2x^2 + y$ et $v(x,y) = y^2 - x$. De

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x \ et \ \frac{\partial v}{\partial y} = 2y \ et \ \frac{\partial u}{\partial y} = 1 \ et \ \frac{\partial v}{\partial x} = -1,$$

on voit que $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ mais que l'égalité $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ est satisfaite uniquement sur la ligne $y = 2x$. Cependant, pour tout point z sur la ligne, il n'y a pas voisinage ou disque ouvert autour de z dans lequel f est dérivable en tout point. Nous concluons que f n'est nulle part analytique.

Réciproque des equations de Cauchy-Riemann : Supposons que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ soit défini dans une région ouverte D contenant z_0. Si $u(x,y)$ et $v(x,y)$ et leurs premières dérivées partielles existent et sont continues en z_0 (c'est-á-dire $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont $\mathscr{C}^1$ en (x_0,y_0)) et satisfont les équations de Cauchy-Riemann en z_0, alors $f(z)$ est dérivable en z_0. Par conséquent, si $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont $\mathscr{C}^1$ et satisfont le Cauchy-Riemann équations en tout point de D alors $f(z)$ est analytique dans D.

Démonstration. Soit $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ étant supposées continues

$$\begin{aligned}
\Delta u &= u(x+\Delta x; y+\Delta y) - u(x;y) \\
&= u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y+\Delta y) + u(x, y+\Delta y) - u(x,y) \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x + \epsilon_1}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y + \epsilon_2}\right)\Delta y \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y.
\end{aligned}$$

De même

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \eta_1 \Delta x + \eta_2 \Delta y.$$

D'où

$$\Delta w = \Delta u + i\Delta v = \Big(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\Delta x + \Big(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\Big)\Delta y$$
$$+(\epsilon_1 + i\eta_1)\Delta x + (\epsilon_2 + i\eta_2)\Delta y,$$

où $\epsilon_1 + i\eta_1 \to 0$ et $\epsilon_2 + i\eta_2 \to 0$ quand $\Delta x \to 0$ et $\Delta x \to 0$.

D'aprés les équations de Cauchy-Riemann

$$\Delta w = \Big(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\Delta x + \Big(-\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}\Big)\Delta y + \epsilon\Delta x + \eta\Delta y$$
$$\Big(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\Big)(\Delta x + i\Delta y) + \epsilon\Delta x + i\eta\Delta y.$$

D'où, en divisant par $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ et faisant tendre Δz vers 0, on voit que

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Il s'ensuit alors que $f(z)$ est analytique. □

Exemple 2.5.11. *Soit* $f(z) = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$,
les fonctions réelles $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ *et* $v(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$ *sont continus sauf au point où* $x^2+y^2 = 0$*, c'est-á-dire en* $z = 0$*.*

De plus, les quatre premiers partiels du premier ordre dérivés

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{x^2+y^2},\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{x^2+y^2},$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{x^2+y^2},\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{x^2+y^2},$$

sont continues sauf en $z = 0$*. Enfin, on voit par*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{x^2+y^2},\ et\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-2xy}{x^2+y^2},$$

que les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites sauf en $z = 0$*.*

Ainsi on conclure que f *est analytique dans tout domaine* D *qui ne contiennent le point* $z = 0$*.*

Théorème 2.5.12. *Soit f une fonction de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur un domaine* D *(en tant que fonction des deux variables* x *et* y*), alors*
f *est dérivable au point* $z_0 \in D \Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$*.*

Exemple 2.5.13. *Ètudier la dérivabilité de la fonction :*

1) $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$*, où* $f(z) = \frac{1}{z} + zRe(z)$*.*

2) La fonction $h(z) = z^2$*.*

Solution :

1) On a : $f(z) = \frac{1}{z} + zRe(z) = \frac{1}{z} + z(\frac{z+\overline{z}}{2})$ et donc $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{z}{2} \neq 0$.
pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

Ce qui montre que f n'est pas dérivable sur $\mathbb{C}^*$.

2) car $\frac{\partial h}{\partial \overline{z}} = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ alors h est entière.

Proposition 2.5.14. *Soit $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ une fonction holomorphe sur un ouvert D connexe de $\mathbb{C}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est constante,*
2. *$u(x,y)$ est constante,*
3. *$v(x,y)$ est constante,*
4. *$|f|$ est constante,*
5. *$f' = 0$.*

Démonstration. .

(1) ⇒ (2) : il est clair que si f est une fonction constante, alors les parties réelle et imaginaire sont constantes.

(2) ⇒ (3) : si $u(x,y) = constante$, alors $u_x = v_y = 0$ ce qui implique que
$v_x = v_y = 0$, et par conséquent $v(x,y) = constante$.

(3) ⇒ (4) : la preuve est similaire á celle de (2) ⇒ (3) .

(4) ⇒ (1) : on a $|f|^2 = u^2 + v^2 = constante$. En dérivant par rapport á x puis á y ; et en utilisant les conditions de Cauchy Riemann, on trouve

$$uu_x - vu_y = 0 \text{ et } vu_x + uu_y = 0.$$

La résolution de ce système donne

$$|f|^2 u_x = 0 \text{ et } |f|^2 u_y = 0.$$

Comme $|f| \neq 0$, il en résulte $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$, ce qui prouve que $u(x,y) = v(x,y) = constante$.
D'où f est constante. □

2.5.0.1 Conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires

Proposition 2.5.15. *Soit f une fonction analytique en z_0. Alors les équations de Cauchy Riemann en coordonnées polaires s'écrivent sous la forme :*

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \text{ et } \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Preuve. Posons $z = re^{i\theta}$ où $x = rcos\theta$, $y = rsin\theta$, on a donc $\theta = \arg z$ et $|z| = r$.

D'autre part, il est clair que pour $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cos\theta,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cos\theta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cos\theta.$$

En utilisant maintenant conditions de Cauchy-Riemann, on trouve

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Leftrightarrow \Big(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\Big)\cos\theta - \Big(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\Big)\sin\theta = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Leftrightarrow \Big(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\Big)\sin\theta + \Big(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\Big)\cos\theta = 0.$$

La résolution de ce système nous donne exactement

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \ et \ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

□

Exemple 2.5.16. *Supposons que la fonction $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ est différentiable en un point z dont les coordonnées polaires sont (r,θ).*

Résolvez les deux équations pour u_x et puis résolvez les 2 équations pour v_x.

Montrer ensuite que la dérivée de f en (r,θ) est

$$f'(z) = (\cos\theta - i\sin\theta)\Big(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\Big) = e^{-i\theta}\Big(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\Big).$$

Remarque 2.5.17. *Si $f(z) = f(re^{i\theta}) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$, la forme polaire de $f'(z)$ devient*

$$f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = \frac{1}{r}e^{-i\theta}(v_\theta - iv_\theta)$$

2.5.1 Fonctions harmoniques

nous verrons que lorsqu'une fonction complexe $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ est analytique en un point z, alors toutes les dérivées de f : $f'(z)$, $f''(z)$, $f'''(z)$, ... sont aussi analytiques á z. En conséquence de ce fait remarquable, nous pouvons conclure que toutes les dérivées partielles des fonctions réelles $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont continues en z. De la continuité du dérivées partielles, nous savons alors que les dérivées partielles mixtes du second ordre sont égales. c'est à dire $u_{xy} = u_{yx}$ et $v_{xy} = v_{yx}$. La combinaison de ce fait et les équations de Cauchy-Riemann sera utilisée dans cette section pour démontrer l'existence d'un lien entre les parties réelles et imaginaires d'une fonction analytique $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ et ses dérivées partielles du second ordre.

Proposition 2.5.18. *Soit φ une application de $D \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, est dite de classe $\mathscr{C}^2$ sur D , (on note $\varphi \in (\mathscr{C}^2)$), si $\forall (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$, existent et sont continues .*

Définition 2.5.19. *Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2(D,\mathbb{R})$. On dit que φ est harmonique dans D si pour tout $(x,y) \in D$ on a :*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Notation *La fonction $\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ est appelée le Laplacien de φ.*
On peut le noter aussi par $\Delta\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy}$ où $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \varphi_{xx}$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \varphi_{yy}$.

Exemple 2.5.20.
1) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$, on a

$$u_x = 3x^2 - 3y^2 \Rightarrow u_{xx} = 6x \text{ et } u_y = -6xy \Rightarrow u_{yy} = -6x.$$

D'où

$$\Delta u(x,y) = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 6x - 6x = 0.$$

Le laplacien de u est bien nul, c'est donc une fonction harmonique.
2)

$$\begin{aligned} \varphi :& \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y) \longmapsto \varphi(x,y) = e^x \cos y. \end{aligned}$$

Il est facile de verifier que φ est de classe $\mathscr{C}^2$, dans $D = \mathbb{R}^2$ On a alors :

$$\varphi_x(x,y) = e^x \cos y \Rightarrow \varphi_{xx}(x,y) = e^x \cos y,$$

et

$$\varphi_y(x,y) = -e^x \sin y \Rightarrow \varphi_{yy}(x,y) = -e^x \cos y.$$

D'où

$$\Delta\varphi(x,y) = \varphi_{xx}(x,y) + \varphi_{yy}(x,y) = e^x \cos y - e^x \cos y = 0,$$

Le laplacien de φ est bien nul, c'est donc une fonction harmonique.

Proposition 2.5.21. *Soit $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ une fonction holomorphe sur $D \subset \mathbb{C}$. Alors les fonctions réelles $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont harmoniques.*

Démonstration. La fonction f est holomorphe, donc les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites

$$u_x = v_y \Rightarrow u_{xx} = v_{xy} \text{ et } u_y = -v_x \Rightarrow u_{yy} = -v_{xy},$$

et donc $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$. Ce qui prouve que la fonction réelle $u(x,y)$ est harmonique. Pour montrer que $v(x,y)$ est harmonique on procède exactement de la même manière. □

2.5.2 Conjuguée harmonique

Nous venons de montrer que si un la fonction $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ est analytique dans un domaine D, alors son réel et les parties imaginaires u et v sont nécessairement harmoniques dans D. Supposons maintenant $u(x,y)$ est une fonction réelle donnée connue pour être harmonique dans D. Si elle est possible de trouver une autre fonction harmonique réelle $v(x,y)$ telle que u et v satisfassent les équations de Cauchy-Riemann dans tout le domaine D, puis la fonction $v(x,y)$ est appelé un conjugué harmonique de $u(x,y)$. En combinant les fonctions comme $u(x,y) + iv(x,y)$ on obtient une fonction analytique dans D.

Définition 2.5.22. *Un couple de fonctions $u(x,y)$, $v(x,y)$ harmoniques dans un domaine D et y satisfaisant aux conditions de Cauchy-Riemann est appelé* ***couple des fonctions harmoniques conjuguées****. L'ordre que les fonctions occupent dans le couple est essentiel.*

Exemple 2.5.23. .
1)Soit la fonction définie par $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$; $x, y \in \mathbb{R}$.
Trouver une fonction $v(x,y)$pour que la fonction $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ soit holomorphe, et exprimer $f(z)$ en termes de z.
2) Soit $P : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ définie par $P(z) = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y$.
Déterminer toutes les fonctions $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ telles que $f = P + iQ$ soit holomorphe sur $\mathbb{C}$.
Solution :
1) On a

$$u_x = 2x + 1 \Rightarrow u_{xx} = 2 \text{ et } u_y = -2y \Rightarrow u_{yy} = -2.$$

Alors $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 = 0$, ce qui montre que u est harmonique.
Pour trouver une fonction v pour que $f = u + iv$ soit holomorphe, on utilise les conditions de

Cauchy-Riemann.

Ces conditions s'écrivent sous la forme

$$v_y = u_x = 2x+1 \tag{2.5.5}$$

et

$$v_x = -u_y = 2y \tag{2.5.6}$$

En intégrant l'équation (2.5.5) par rapport á y, il vient

$$v = 2xy+y+C_1(x), \tag{2.5.7}$$

où $C_1(x)$ est une fonction réelle de x.

Par substitution de (2.5.7) dans (2.5.6) on obtient

$$2y+C_1'(x) = 2y \Rightarrow C_1(x) = 0 \Rightarrow C_1(x) = c,$$

où c désigne une constante dans $\mathbb{R}$. D'où de (2.5.7), $v = 2xy+y+c$.

Donc

$$f(z) = u+iv = (x^2-y^2+x)+i(2xy+y+c).$$

On a

$$f(x+iy) = (x^2-y^2+x)+i(2xy+y+c),$$

pour $y=0$ on a $f(x) = (x^2+x)+ic$, alors on mettre z á la place de x on trouvera $f(z) = z^2+z+ic, c \in \mathbb{R}$.

2) On a $\Delta P = 0$, donc P est harmonique et on peut trouver Q.

Les conditions de Cauchy-Riemann donnent :

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial y} & = \frac{\partial P}{\partial x} & = 2x-2y-2 \\ \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & = -\frac{\partial P}{\partial y} & = 2y+2x+3 \end{cases}$$

De la deuxième équation, on déduit que $Q(x,y) = 2xy+x^2-3x+\varphi(y)$, où φ est différentiable sur $\mathbb{R}$ et avec la première, on déduit que $\varphi'(y) = -2y-2$. On a donc $Q(x,y) = 2xy+x^2-3x-y^2-2y+c$, où c est une constante réelle et :

$$\begin{aligned} f(z) &= x^2-y^2-2xy-2x+3y+i(2xy+x^2-3x-y^2-2y)+ic \\ &= (x+iy)^2+i(x+iy)^2-2(x+iy)-3i(x+iy)+ic \\ &= (1+i)z^2-(2+3i)z+ic. \end{aligned}$$

Exemple 2.5.24. *Supposons que $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ est analytique dans un domaine D ne contenant pas l'origine. Utilisez les équations de Cauchy-Riemann sous la forme $ru_r = v_\theta$ et $rv_r = -u_\theta$ pour montrer que $u(r,\theta)$ satisfait l'équation de Laplace en coordonnées polaires :*

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

2.6 Transformations holomorphiques

Si $w = u + iv$ (où u et v sont réels) est une fonction uniforme de $z = x + iy$ (où $x, y \in \mathbb{R}$) nous pouvons écrire $u + iv = f(x + iy)$. En égalant les parties imaginaires et les parties réelles ceci est équivalent á

$$u = u(x,y), \;\; v = v(x,y). \tag{2.6.1}$$

Ainsi étant donné un point (x,y) dans le plan de la variable z, tel que P, il lui correspond un point (u,v) noté P', du plan de la variable w. L'ensemble des équations (2.6.1) [ou ce qui est équivalent, $w = f(z)$] est appelè une transformation.

Nous dirons que le point P est transformé en P' par cette transformation et appellerons P' l'image de P.

Exemple 2.6.1. *Si $w = z^2$, alors $u + iv = (z + iy)z = x^2 - y^2 + 2izy$ et la transformation est définie par $u = x^2 - y^2, v = 2xy$. L'image du point $(1,2)$ du plan de la variable z est le point $(-3,4)$ du plan de la variable w.*

En général un ensemble de points tel que l'arc de courbe PQ est transformè en un ensemble de points, appelé l'image, tel que l'arc $P'Q'$.

Les particularités de l'image dépendent naturellement du type de fonction $f(z)$ utilisée. Si $f(z)$ est multiforme, un point (ou une courbe) du plan de la variable z est appliqué en général sur plus d'un point (ou d'une courbe) du plan de la variable w.

Exemple 2.6.2. *Déterminer sous la transformation $w = z + \frac{1}{z}$ l'image du cercle $|z| = a, a > 0$.*

Solution :

Si $a \neq 1$, ellipse $\frac{u^2}{(a+\frac{1}{a})^2} + \frac{v^2}{(a-\frac{1}{a})^2} = 1$, et si $a = 1$, segment $-2 \leq u \leq 2$.

Exemple 2.6.3. *Trouver une transformation de la forme $w = \frac{az+b}{cz+d}$, telle que l'image des points $1, i, 1+i$ soit donnée par les points $i, 2, 0$.*

Solution :

$$w = \frac{4z-4(1+i)}{-(1+i)z+i-3}.$$

Exemple 2.6.4. *Sous la transformation* $w=\frac{1}{z}$*, trouver l'image :*

1) de la bande horizontale infinie $1<y<2$*.*

2) de la bande verticale infinie $0<x<1$*.*

3) du cercle $|z|=a, a>0$*.*

4) du cercle $|z-a|=|a|, a\in\mathbb{C}$*.*

Solution :

1) Région extérieure au cercle $u^2+(v+\frac{1}{4})^2=\frac{1}{16}$ dans demi-plan $v<0$.

2) Région extérieure au cercle $(u-\frac{1}{2})^2+v^2=\frac{1}{4}$ dans demi-plan $u>0$.

3) Cercle $|w|=\frac{1}{a}$.

4) Droite $Re(wa)=\frac{1}{2}$.

Exemple 2.6.5. *Sous la transformation* $w=\frac{z}{1-z}$*, trouver l'image :*

1) du demi-plan $x>0$*.*

2) du demi-plan $y>0$*.*

3) du disque $|z|<a, a>0$*.*

4) de la droite $x=2$*.*

4) de la droite $y=1$*.*

Solution :

1) Disque $|w|<1$.

2) Demi-plan $Im(w)>0$.

3) Demi-plan $Re(w)<0$.

4) Cercle $|w-\frac{2}{3}|=\frac{1}{3}$.

5) Cercle $|w-i-1|=1$.

2.7 Primitive d'une fonction holomorphe

Soit $f : G \to \mathbb{C}$ une fonction continue définie sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Rappelons qu'une fonction $F : G \to \mathbb{C}$ est une primitive de f lorsque F est holomorphe, de dérivée $F' = f$.
On constate d'emblée que, dans le domaine complexe, les seules fonctions qui ont une chance d'admettre une primitive sont les fonctions holomorphes.

Remarque 2.7.1. *Soit $f : G \to \mathbb{C}$ une fonction continue, admettant une primitive $F : G \to \mathbb{C}$. La fonction F , holomorphe, est donc analytique. Il suit que sa dérivée $f = F'$ est également analytique... ou, de facon équivalente, holomorphe.*
Ainsi, seule une fonction holomorphe peut espérer avoir une primitive !

2.8 Exercices

Exercice 2.8.1. *Calculer les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1-\cos z}{z}$, *réponse :* $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1-\cos z}{z} = 0.$
2. $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{z^2+1}{z^4-1}$, *réponse :* $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{z^2+1}{z^4-1} = -\dfrac{1}{2}.$
3. $\lim\limits_{z\to \infty} \dfrac{z+1}{2z+1}$, *réponse :* $\lim\limits_{z\to \infty} \dfrac{z+1}{2z+1} = \dfrac{1}{2}.$
4. $\lim\limits_{z\to \infty} \dfrac{z^2+1}{z}$, *réponse :* $\lim\limits_{z\to \infty} \dfrac{z^2+1}{z} = \infty.$
5. $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{Im(z)}{z}$, *réponse :* $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{Im(z)}{z}$ *n'existe pas.*
6. $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{Im(z)}{z}$, *réponse :* $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{Im(z)}{z}$ *n'existe pas.*
7. $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{|z|^2}{z}$, *réponse :* $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{|z|^2}{z} = 0.$
8. $\lim\limits_{z\to -\frac{\pi}{2}i} \dfrac{e^{2z}+1}{e^z+i}$, *réponse :* $\lim\limits_{z\to -\frac{\pi}{2}i} \dfrac{e^{2z}+1}{e^z+i} = 2i.$
9. $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{2y^2}{x^2} - \dfrac{x^2-y^2}{y^2}$, *réponse :* $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{2y^2}{x^2} - \dfrac{x^2-y^2}{y^2}$ *n'existe pas.*

Exercice 2.8.2. *Les fonctions suivantes sont-elles analytiques(holomorphes) ?*

1. $f_1(z) = 2z^2 - iz + 1,$
2. $f_2(z) = \frac{1}{z},$
3. $f_3(z) = f_3(x,y) = |z|,$

4. $f_4(z) = f_4(x,y) = \overline{z}$,
5. $f_5(z) = e^z$.

Solution :

1. Pour la 1er fonction, on a

$$f_1(z) = 2z^2 - iz + 1 = \underbrace{(2x^2 - 2y^2 + y + 1)}_{u(x,y)} + i\underbrace{(4xy - x)}_{v(x,y)}, \ (x,y) \in \mathbb{C}.$$

D'abord

$$u_x = 4x, \qquad v_x = 4y - 1,$$
$$u_y = -4y + 1, \qquad v_y = 4x,$$

les dérivées partielles existent et sont continues sur $\mathbb{C}$.

Deuxièmement, les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifient $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$ sur $G = \mathbb{C}$.

Alors, la fonction f_1 est dérivable sur $G = \mathbb{C}$, de plus, le domaine $G = \mathbb{C}$ est un ouvert.

Donc la fonction f_1 est holomorphe sur $G = \mathbb{C}$.

2. Pour la 2eme fonction, on a

$$f_2(z) = \frac{1}{z} = \underbrace{\frac{x}{x^2 + y^2}}_{u(x,y)} + i\underbrace{\frac{-y}{x^2 + y^2}}_{v(x,y)}, \ (x,y) \in \mathbb{C}^*.$$

D'abord

$$u_x = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad v_x = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$
$$u_y = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad v_y = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 - y^2)^2},$$

les dérivées partielles existent et sont continues sur $\mathbb{C}^*$.

Deuxièmement, les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifient $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$ sur $G = \mathbb{C}^*$.

Alors, la fonction f_2 est dérivable sur $G = \mathbb{C}^*$, de plus, le domaine $G = \mathbb{C}^*$ est un ouvert dans $\mathbb{C}$.

Donc la fonction f_2 est holomorphe sur $G = \mathbb{C}^*$.

3. Pour la 3eme fonction, on a

$$f_3(z) = |z|^2 = \underbrace{x^2+y^2}_{u(x,y)} + i \underbrace{0}_{v(x,y)}, \quad (x,y) \in \mathbb{C}.$$

D'abord

$$u_x = 2x, \qquad v_x = 0$$
$$u_y = 2y, \qquad v_y = 0,$$

les dérivées partielles existent et sont continues sur $\mathbb{C}$.

Deuxièmement, les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifient $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$ sur $G = \{(0,0)\}$.

Alors, la fonction f_3 est dérivable sur G, de plus, le domaine $G = \{(0,0)\}$ est un fermé (point) dans $\mathbb{C}$. Donc la fonction f_3 n'est pas holomorphe sur $G = \{(0,0)\}$.

4. Pour la 4eme fonction, on a

$$f_4(z) = \overline{z} = \underbrace{x}_{u(x,y)} + i \underbrace{-y}_{v(x,y)}, \quad (x,y) \in \mathbb{C}.$$

D'abord

$$u_x = 1, \qquad v_x = 0$$
$$u_y = 0, \qquad v_y = -1,$$

les dérivées partielles existent et sont continues sur $\mathbb{C}$.

Deuxièmement, les conditions de Cauchy-Riemann

$u_x \neq v_y$ et $u_y = -v_x$. Alors, la fonction f_4 n'est pas dérivable.

Donc la fonction f_4 n'est pas holomorphe sur $G = \{(0,0)\}$.

5. Pour la 5eme fonction, on a

$$f_5(z) = e^z = \underbrace{(e^x \cos y)}_{u(x,y)} + i \underbrace{(e^x \sin y)}_{v(x,y)}, \quad (x,y) \in \mathbb{C}.$$

D'abord

$$u_x = e^x \cos y, \qquad v_x = e^x \sin y,$$
$$u_y = -e^x \sin y, \qquad v_y = e^x \cos y,$$

les dérivées partielles existent et sont continues sur $\mathbb{C}$.

Deuxièmement, les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifient $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$ sur

$G = \mathbb{C}$.

Alors, la fonction f_5 est dérivable sur $G = \mathbb{C}$, de plus, le domaine $G = \mathbb{C}$ est un ouvert.

Donc la fonction f_5 est holomorphe sur $G = \mathbb{C}$.

Exercice 2.8.3. *Trouver la fonction holomorphe $f = u + iv$, et écrire $f(z)$ en fonction de z dans chaque cas :*

1.

$$\begin{aligned} u(x,y) &= 2y + x \\ f(i) &= 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} v(x,y) &= x^3 - 3xy^2 - 2x \\ f(0) &= i \end{aligned}$$

Solution :

1. la fonction $f = u + iv$ est holomorphe donc les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifient

$$u_x = v_y = 1 \quad ...(1)$$
$$u_y = -v_x = 2...(2),$$

d'apres la resolution de l'équation (1), on obtient

$$(1) \Leftrightarrow v = \int 1dy \Leftrightarrow v = y + C(x),$$

Substituez le résultat dans l'équation (2), nous obtenons

$$(2) \Leftrightarrow C'(x) = -2 \Rightarrow C(x) = -2x + k(k \in \mathbb{C}),$$

alors

$$v(x,y) = y - 2x + k, \;\; k \in \mathbb{C}.$$

Donc

$$\begin{aligned} f(x,y) = u + iv &= (2y + x) + i(y - 2x + k) \\ &= (2y - 2ix) + (x + iy) + ik \\ &= (1 - 2i)z + ik, \end{aligned}$$

la condition initial donne

$$f(i) = 1 \Leftrightarrow (1-2i)i + ik = 1 \Leftrightarrow k = -1 + i.$$

Finalement, on a

$$f(z) = (1-2i)z - (1+i).$$

2. la fonction $f = u + iv$ est holomorphe donc les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifient

$$\begin{aligned} u_x &= v_y = -6xy \qquad ...(1) \\ u_y &= -v_x = -(3x^2 - 3y^2 - 2)...(2), \end{aligned}$$

d'apres la resolution de l'équation (1), on obtient

$$(1) \Leftrightarrow u = \int (-6xy)dx \Leftrightarrow u = -3x^2y + C(y),$$

Substituez le résultat dans l'équation (2), nous obtenons

$$(2) \Leftrightarrow -3x^2 + C'(y) = -3x^2 + 3y^2 + 2 \Rightarrow C(y) = y^3 + 2y + k(constante),$$

alors

$$u(x,y) = -3x^2y + y^3 + 2y + k, \;\; k \in \mathbb{C}.$$

Donc

$$\begin{aligned} f(x,y) = u + iv &= (-3x^2y + y^3 + 2y + k) + i(x^3 - 3xy^2 - 2x) \\ &= i(x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3) - 2i(x + iy) + k \\ &= iz^3 - 2iz + k, \end{aligned}$$

la condition initial donne

$$f(0) = i \Leftrightarrow k = i.$$

Finalement, on a

$$f(z) = iz^3 - 2iz + i.$$

Chapitre 3

Fonctions élémentaires

Les fonctions complexes sont un prolongement naturel des fonctions réelles sur le plan des nombres complexes $\mathbb{C}$. Par un tel prolongement, ces fonctions s'enrichissent de nouvelles propriétés. Par exemple, la fonction exponentielle d'une variable complexe e^z devient périodique, les fonctions $sinz$ et $cosz$ cessent d'être bornées, le logarithme des nombres négatifs (et, en général, de tout nombre complexe non nul) prend un sens. Dans cette section nous étudierons les propriétés principales des fonctions élémentaires complexes.

3.1 Fonction homographique

En mathématiques, plus précisément en analyse et en géométrie, une fonction homographique est une fonction qui peut être représentée sous la forme d'un quotient de deux fonctions affines. C'est donc un cas particulier de fonction rationnelle où les polynômes au numérateur et au dénominateur sont de degré un.
La fonction inverse d'une fonction homographique est également une fonction homographique.

3.1.1 Les fonctions polynômiales

Les fonctions polynômiales sont définies par

$$f(z) = P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ...a_2 z^2 + a_1 z + a_0;$$

où $a_n \neq 0$, $a_0, a_1, ...a_n$ sont des constantes complexes et n un entier positif appelé le degré du polynôme $P(z)$.

3.1.2 Les fractions rationnelles

Les fractions rationnelles sont définies par

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

où P et Q sont des polynômes.

3.2 Les fonctions exponentielles

Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, où x et y sont des réels, on défini la fonction exponentielle complexe par la relation

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Les fonctions exponentielles complexes ont des propriétés analogues à celles des fonctions exponentielles réelles.

Propriétés :

1. $|e^z| = e^x$ et $arg(z) = y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2. $\forall z, z' \in \mathbb{C}, e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

3. $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow z_1 = z_2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.

4. $\forall z \in \mathbb{C}, \frac{1}{e^z} = e^{-z}$.

5. $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}$, $e^{z+2k\pi i} = e^z$ (La fonction e^z est périodique de période $2\pi i$).

6. $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

3.3 Fonctions trigonométriques et hyperboliques

3.3.1 Fonctions trigonométriques

Tout comme nous avons étendu la fonction exponentielle réelle, nous étendons maintenant les fonctions trigonométriques réelles aux fonctions trigonométriques complexes.

En utilisant la formule d'Euler $e^{it} = \cos t + i \sin t$, on défini le *sinus* et *cosinus* d'une variable complexe z par les formules :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \ \ z \in \mathbb{C},$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ \ z \in \mathbb{C}.$$

Aussi on définit les fonctions

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}, \ \ z \in \mathbb{C} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}, \ \ z \in \mathbb{C} - \pi\mathbb{Z}.$$

La plupart des propriétés des fonctions trigonométriques réelles sont encore valables dans le cas complexe. Ainsi par exemple

$$sin^2 z + cos^2 z = 1, \ \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

.

3.3.2 Fonctions hyperboliques

Les fonctions hyperboliques sont définies comme suit :

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \ \ z \in \mathbb{C},$$

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{i} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ \ z \in \mathbb{C}.$$

Aussi on définit les fonctions

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}, \ \ z \in \mathbb{C} - \left\{ \frac{2k+1}{2}\pi i, \ k \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1}, \ \ z \in \mathbb{C} - \pi i\mathbb{Z}.$$

Les propriétés suivantes sont encore vérifiées :

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1,\ \sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$$

Propriétés :

Les relations entres les fonctions trigonométriques et hyperboliques sont étroites comme on le constate dans les formules suivantes :

$$\begin{array}{ll} \sinh(iz) = i\sin z, & \sin(iz) = i\sinh z, \\ \cosh(iz) = \cos z, & \cos(iz) = \cosh z, \\ \tan(iz) = i\tanh z, & \cot(iz) = -i\coth z, \\ |\sinh z|^2 = \sinh^2 z + \sin^2 y, & |\cosh z|^2 = \sinh^2 z + \cos^2 y. \end{array}$$

Exemple 3.3.1.

1)Montrer que $\overline{\sin z} = \sin \overline{z}$.

2)Calculer la limite $\lim\limits_{z\longrightarrow\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos(2z)}{ch(iz)+ish(iz)}$.

Solution :

1)On a $z = x + iy$, *alors*

$$\begin{aligned} \overline{\sin z} &= \overline{\sin(x+iy)} \\ &= \overline{\sin(x)\cos(iy)+\sin(iy)\cos(x)} \\ &= \overline{\sin(x)\cosh(y)+i\sinh(y)\cos(x)} \\ &= \sin(x)\cosh(y) - i\sinh(y)\cos(x) \\ &= \sin(x)\cos(iy) - \sin(iy)\cos(x) \\ &= \sin(x-iy) \\ &= \sin(\overline{z}). \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \lim_{z\longrightarrow\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2z)}{ch(iz)+ish(iz)} &= \lim_{z\longrightarrow\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2z)}{\cos(z)-\sin(z)} \\ &= \lim_{z\longrightarrow\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(z)-\sin(z)}{\cos(z)-\sin(z)} \\ &= \lim_{z\longrightarrow\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos(z)-\sin(z))(\cos(z)+\sin(z))}{\cos(z)-\sin(z)} \\ &= \lim_{z\longrightarrow\frac{\pi}{4}} (\cos(z)+\sin(z)) \\ &= \cos(\frac{\pi}{4})+\sin(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Remarque 3.3.2.

1. *Les fonctions* $\cos(z)$ *et* $\sin(z)$ *sont* 2π*-périodiques.*
2. *Les fonctions* $\cosh(z)$ *et* $\sinh(z)$ *sont* $2\pi i$*-périodiques.*
3. *Les zéros de* $\sin z$ *et* $\cos z$ *sont tous réels.*
   — *Les zéros de* $\sin z$ *sont* $z = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$
   — *Les zéros de* $\cos z$ *sont* $z = (n + \frac{1}{2})\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$
4. *Les zéros de* $\sinh z$ *et* $\cosh z$ *sont tous imaginaires.*
   — *Les zéros de* $\sinh z$ *sont* $z = n\pi i$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$
   — *Les zéros de* $\cosh z$ *sont* $z = (n + \frac{1}{2})\pi i$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$
5. *Les fonctions* $\sin z$ *et* $\cos z$ *ne sont pas bornées.*
   * $\cos(iy) = \dfrac{e^{i^2 y} + e^{-i^2 y}}{2} = \dfrac{e^{-y} + e^{y}}{2}$, $|\cos(iy)| \to \infty$ *quand* $y \to \infty$

   * $\sin(iy) = \dfrac{e^{i^2 y} - e^{i^2 y}}{2i} = \dfrac{e^{-y} - e^{y}}{2i}$, $|\sin(iy)| \to \infty$ *quand* $y \to \infty$,

et en général les équations $\sin z = a$ *et* $\cos z = a$ *sont toujours des solutions pour tout* a *dans* $\mathbb{C}$.

3.3.3 Fonctions logarithmiques

Si $z = e^w$, nous écrirons $w = \log z$ appelé le logarithme népérien de z. La fonction $\log z$ est donc l'inverse de la fonction exponentielle et peut être définie par

$$\log z := \ln r + i\theta + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

où $z = re^{i\theta} = re^{(\theta + 2k\pi)}$, On remarque que $\log z$ est une fonction multiforme (cette fonction posséde une infinité de déterminations). La détermination principale ou valeur principale de $\log z$ est souvent définie par $\ln r + i\theta$ où $0 < \theta < 2\pi$. Cependant tout autre intervalle d'amplitude 2π peut être utilisé, par exemple $-\pi < 0 < +\pi$ etc. La fonction logarithme peut être définie pour d'autres bases réelles que e. Ainsi pour $z = a^w$ on a $w = \log_a z$ avec $a > O$ et $a \neq 0, 1$. Dans ce cas $z = e^{w \log a}$ et donc $w = \frac{\log z}{\log a}$.

Exemple 3.3.3. *Ècrire les nombres suivants sous la forme* $a + ib$ *:*

$$(a) \log 3, \qquad (b) \log(-1), \qquad (c) \log(\sqrt{3} + i).$$

Solution :

(a) $\log 3 = \ln 3 + i\arg(3) = \ln 3 + i2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

(b) $\log(-1) = \ln 1 + i\arg(-1) = i(2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

(c) $\log(\sqrt{3}+i) = \ln|\sqrt{3}+i| + i\arg(\sqrt{3}+i) = \ln 2 + i\dfrac{\pi}{6} + 2ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Proposition 3.3.4.

* $\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$
* $\log(z_1 - z_2) = \log(z_1) - \log(z_2)$
* $e^{\log z} = z$
* $\log(e^z) = z + i2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

• La détermination principale de $\log z$ est définie par

$$\log z := \ln|z| + i\theta_0,\ z \neq 0, -\pi < \theta_0 \leq \pi,$$

où $Argz = \theta_0$ est évidement la détermination principale de $\arg z$.

La fonction $\log z$ est uniforme sur la région fondamentale $R = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 0, -\pi < \theta_0 \leq \pi\}$, mais elle est discontinue sur l'axe réel négatif $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) \leq 0, Im(z) = 0\}$.

Exemple 3.3.5.

1) Calculer la détermination principale du logarithme complexe $\log z$ *pour :*

(a)$\log(-2)$, $\quad$ $(b)\log(i)$, $\quad$ $(c)\log(-1-i)$.

2)Trouver la valeur principale de la puissance complexe $(2i)^{1-i}$

3) Trouvez toutes les solutions de l'équation $\sin z = 5$.

Solution :

1)

(a) $\log(-2) = \ln|-2| + iArg(-2) = \ln 2 + i\pi.$

(b) $\log(i) = \ln|i| + iArg(i) = i\dfrac{\pi}{2}.$

(c) $\log(-1-i) = \ln|-1-i| + iArg(-1-i) = \ln 2 + i\dfrac{5\pi}{4}.$

2) On a $|z| = 2$ *et* $Arg(z) = \dfrac{\pi}{2}$, *et donc* $\log 2i = \ln 2 + i\dfrac{\pi}{2}$,

alors

$$(2i)^{1-i} = e^{\log(2i)^{1-i}} = e^{(1-i)\log(2i)} = e^{(1-i)(\ln 2 + i\frac{\pi}{2})},$$

d'ou

$$(2i)^{1-i} = e^{(\ln 2 + \frac{\pi}{2}) - i(\ln 2 - \frac{\pi}{2})}.$$

Nous approximons cette valeur

$$\begin{aligned}(2i)^{1-i} &= e^{(\ln 2+\frac{\pi}{2})}\Big[\cos(\ln 2-\frac{\pi}{2})-i\sin(\ln 2-\frac{\pi}{2})\Big]\\ &\approx 6.1474+7.4008i.\end{aligned}$$

3) l'équation $\sin z = 5$ *est équivalente à l'équation*

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=5.$$

En multipliant cette équation par e^{iz} *et en simplifiant on obtient*

$$e^{2iz}-10ie^{iz}-1=0.$$

Cette équation est quadratique en e^{iz}*. C'est-à-dire.*

$$e^{2iz}-10ie^{iz}-1=(e^{iz})^2-10i(e^{iz})-1=0.$$

Les solutions sont données par

$$e^{iz}=\frac{10i\pm\sqrt{-96}}{2}=(5\pm\sqrt{6})i.$$

► *Si* $e^{iz}=(5+\sqrt{6})i$*, on a* $\arg(5+\sqrt{6})i=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$*,*
alors

$$z=\frac{(4k+1)\pi}{2}-iln(5+\sqrt{6}),\ k\in\mathbb{Z}.$$

► *Si* $e^{iz}=(5-\sqrt{6})i$*, on a* $\arg(5-\sqrt{6})i=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$*,*
alors

$$z=\frac{(4k+1)\pi}{2}-iln(5-\sqrt{6}),\ k\in\mathbb{Z}$$

Remarque 3.3.6. *En général*

$$\log(z_1z_2)\neq\log(z_1)+\log(z_2).$$

Si $z_1=z_2=-1$ *alors,*

∘ $\log(z_1)=\log(z_2)=\log(-1)=\ln|-1|+iArg(-1)=i\pi$,

∘ $\log(z_1z_2)=Log(1)=\ln|1|+iArg(1)=0$, *et*

∘ $\log(z_1)+\log(z_2)=2i\pi$.

3.4 Fonctions puissances

Si $z \neq 0$ et $w \in \mathbb{C}$, on définit

$$z^w = e^{w \log z}.$$

Puisque $\log z$ est multiforme, z^w le serra aussi. La valeur principale de z^w sera $e^{w(\ln|z|+i\theta)}$, où θ est l'argument principale de z. Les autre valeurs sont obtenues par

$$z^w = e^{w(\ln|z|+i\theta+2\pi ki)}, \ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Si w n'est pas un nombre rationnel, z^w aura un nombre infini de valeurs.
En effet, supposons que z^w a un nombre fini de valeurs, alors pour un certain n et un certain m $(n \neq m)$, on aura

$$\begin{aligned} z^w &= e^{w(\ln|z|+i\theta+2\pi ni)} \\ &= e^{w(\ln|z|+i\theta+2\pi mi)}, \end{aligned}$$

d'où

$$e^{w2\pi ni} = e^{w2\pi mi} \Rightarrow w2\pi ni - w2\pi mi = 2\pi ki.$$

Donc

$$w = \frac{k}{n-m}, \ \ \text{un nombre rationnel.}$$

Ce qui contredit le choit de w.

Exemple 3.4.1.

$$\begin{aligned} i^i &= e^{i\log i} = e^{i[\ln 1 + i\frac{\pi}{2} + 2\pi ki]} \\ &= e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi k}. \\ i^{-i} &= e^{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}. \\ (1+i)^i &= e^{i\log(1+i)} = e^{i[\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + 2\pi ki]} \\ &= e^{-\frac{\pi}{4} - 2\pi k + i\ln\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Propriétés :

Si $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, et $w, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, alors

1. $z^{w_1} z^{w_2} = z^{w_1+w_2}$.
2. $(z_1 z_2)^w = z_1^w z_2^w e^{2i\pi k_1 w}, \quad k_1 \in \{-1, 0, 1\}$.

3. $(\frac{z_1}{z_2})^w = \frac{z_1^w}{z_2^w} e^{2i\pi k_2 w}, \quad k_2 \in \{-1,0,1\}$.
4. $\log z^w = w \log z + 2i\pi k_3, \ \ k_3 \in \mathbb{Z}$.

5. $(z^w)^\lambda = z^{\lambda w} e^{2i\pi k_4 \lambda}, \ \ k_4 \in \mathbb{Z}$.

Démonstration.

* Pour 1), on a

$$\begin{aligned} z^{w_1} z^{w_2} &= e^{w_1 \log z} e^{w_2 \log z} \\ &= e^{(w_1+w_2)\log z} = z^{w_1+w_2}. \end{aligned}$$

* Pour 2) et 3), on a

$$\begin{aligned} (z_1 z_2)^w &= e^{w \log(z_1 z_2)} = e^{w[\log z_1 + \log z_2 + 2i\pi k_1]} \\ &= e^{w \log z_1} e^{w \log z_2} e^{2i\pi k_1 w]} = z_1^w z_2^w e^{2i\pi k_1 w]}. \end{aligned}$$

* Pour 4) et 5), les valeurs k_3 et k_4 sont des entiers pris de facon à ramener l'angle entre $-\pi$ et $+\pi$.

□

3.5 Fonctions inverses

Si $w = f(z)$, nous pouvons aussi considérer z comme fonction de w, ce qui peut s'écrire sous la forme $z = g(w) = f^{-1}(w)$. La fonction f^{-1} est souvent appelée la fonction inverse de f. Ainsi $w = f(z)$ et $w = f^{-1}(z)$ sont des fonctions inverses l'une de l'autre.

3.5.1 Fonctions trigonométriques inverses

On commence d'abord par la fonction $f(z) = \arctan z = \tan^{-1} z$:

Si $z = \tan w$ alors $w = \arctan z$ est appelée la fonction inverse de $\tan z$. On a

$$\begin{aligned} z = \tan w \ &\Leftrightarrow \ z = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{-i \sinh iw}{\cosh iw} \\ &\Leftrightarrow \ z = -i \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}} \\ &\Leftrightarrow \ e^{2iw} = \frac{(i-z)}{(i+z)} \\ &\Leftrightarrow \ 2iw = \log(\frac{i-z}{i+z}) \\ &\Leftrightarrow \ w = \arctan z = \frac{1}{2i} \log(\frac{1+iz}{1-iz}), \quad z \neq \pm i. \end{aligned}$$

De la même facon on peut définir d'autres fonctions trigonométriques inverses $\arccos z, \arcsin z$, et $arcotgz$. Ces fonctions qui sont multiformes peuvent être exprimées au moyen de la fonction logarithme. Dans les formul qui suivent nous avons omis la constante $2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$, du logarithme.

$$\begin{aligned}
\sin^{-1} z &= \arcsin z := -i\ln[iz+\sqrt{(1-z^2)}], \\
\cos^{-1} z &= \arccos z := -i\ln[z+\sqrt{(z^2-1)}], \\
co\tan^{-1} z &= arcotgz := \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right), \quad z \neq \pm i.
\end{aligned}$$

Exemple 3.5.1. *Calculer :* $\arcsin i$.

Solution :

On a

$$\arcsin(z) = -i\ln(iz+\sqrt{1-z^2}),$$

donc

$$\arcsin(i) = -i\ln(-1+\sqrt{1-i^2}) = -i\ln(-1+\sqrt{2}).$$

3.5.2 Fonctions hyperboliques inverses

Si $z = shw$ alors $w = sh^{-1}z = argshz$ est la fonction inverse du sinus hyperbolique de z. De la même facon nous pouvons définir d'autres fonctions inverses des fonctions hyperboliques : $argchz, argthz$, et $argcoth$. Ces fonctions qui sont multiformes peuvent être exprimèes au moyen de la fonction logarithme. Dans les formules qui suivent, nous avons omis la constante $2ki\pi, k \in \mathbb{Z}$, du logarithme

$$\begin{aligned}
sh^{-1}z &:= \ln[z+\sqrt{(1+z^2)}], \\
ch^{-1}z &:= \ln[z+\sqrt{(1-z^2)}], \\
th^{-1}z &:= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \quad z \neq \pm 1. \\
coth^{-1}z &:= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right), \quad z \neq \pm 1.
\end{aligned}$$

3.6 Exercices

Exercice 3.6.1. *Trouver toutes les valeurs de nombres suivants :*

1. $\ln(-1+i)$, *réponse :* $\ln(-1+i) = \ln\sqrt{2} + i(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. $(1+i)^i$, *réponse :* $(1+i)^i = e^{-(8k+1)\frac{\pi}{4} + i\frac{\ln 2}{2}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. $(1+i)^i$, *réponse :* $(1+i)^i = e^{-(8k+1)\frac{\pi}{4}+i\frac{\ln 2}{2}}$, $k \in \mathbb{Z}$.
4. $\left[(1+i)^{1-i}\right]^{1+i}$, *réponse :* $\left[(1+i)^{1-i}\right]^{1+i} = 2i$.

Exercice 3.6.2. *Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :*

1. $e^{2z+4} = 3\sqrt{3}+3i$, *réponse :* $z = \frac{1}{2}ln(6) - 2 + i\frac{\pi}{12} + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. $\sin z = 2$, *réponse :* $z = \pi(2k+\frac{1}{2}) - i\ln(2\pm\sqrt{3})$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. $\cos z = i$, *réponse :* $z = -\frac{\pi}{2} + 2\pi ki - i\ln(\sqrt{2}\pm 1)$, $k \in \mathbb{Z}$.
4. $2i\sin z + e^{iz} = 1+i$, *réponse :* $z = -i\ln(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4}$.
5. $\cosh z = 0$, *réponse :* $z = (2k+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2} \pm i\ln(2+\sqrt{3})$, $k \in \mathbb{Z}$.
6. $e^{e^z} = 1$, *réponse :* $z = \ln[2\pi(k+1)] + \frac{i\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Chapitre 4

Théorèmes fondamentaux sur les fonctions holomorphes

4.1 Intégration curviligne

4.1.1 Courbes et Chemins dans le plan complexe

Définition 4.1.1. ***(Courbe)***
Soit le domaine $G \subseteq \mathbb{C}$, et la fonction

$$\begin{aligned} \gamma : \quad [a,b] \subset \mathbb{R} \quad & \to G \\ t \quad & \to \gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t) \end{aligned}$$

γ est appelé un courbe dans G ssi ($\Leftrightarrow$) γ continue sur $[a,b]$ (c'est-á-dire que γ_1, γ_2 sont continues sur $[a,b]$).

* *On dit que γ est un courbe lisse ssi γ et γ' sont continues sur $[a,b]$.*
* *On dit que γ est un courbe lisse par morcaux ssi γ continue sur $[a,b]$ et γ' continue sur les intervalles $[t_{k-1}, t_k] \subseteq [a,b], 1 \leq t \leq n$.*

Définition 4.1.2. ***(Courbe à variation bornée)***
On dit que $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ à variation bornée sur $[a,b]$
ssi $\exists M > 0, \forall P\{a = t_0 < t_1 < t_2 < ...... < t_n = b\}$ une partition de $[a,b]$, alors

$$L(\gamma, P) = \sum_{k=1}^{k=n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \leq M.$$

Définition 4.1.3. ***(Chemin)***
On dit un chemin toute fonction γ (courbe) à variation bornée (γ de longueur bornée).

Remarque 4.1.4.

D'une autre manière :

Un chemin est défini comme étant une fonction continue d'un intervalle réel $[a,b]$, $a<b$, *vers le plan complexe.*

$$\begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & z(t)=x(t)+iy(t). \end{array}$$

Ses points initial et final sont $z_0=z(a)$ *et* $z_1=z(b)$. *La fonction* $t\mapsto z(t)$ *est souvent notée* $t\mapsto\gamma(t)$. $\gamma(a)$ *est appele l'origine du chemin et* $\gamma(b)$ *son extremite.*

L'image $C=\{z(t)\in\mathbb{C}, t\in[a,b]\}$ *s'appelle courbe dans le plan complexe paramétrée par la fonction* $t\mapsto z(t)$.

Théorème 4.1.5.

Si $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ *(courbe lisse à variation bornée sur* $[a,b]$*),*

alors γ *est un chemin, de plus on a :*

$$L(\gamma)=\int_a^b|\gamma'(t)|dt, \quad \textit{la longueur de } \gamma.$$

Exemple 4.1.6.

1. *Le cercle de centre* z_0 *et de rayon* r *est un chemin, car est une courbe de longueur bornée*

$$\begin{aligned} |z-z_0|=r &\Leftrightarrow \gamma(t)=z_0+re^{it}, \quad t\in[0,2\pi] \\ &\Leftrightarrow \gamma(t)=z_0+r(\cos t+i\sin t),\ 0\le t\le 2\pi, \\ &\Leftrightarrow \gamma(t)=\gamma_1(t)+i\gamma_2(t), \end{aligned}$$

on a :

$$\gamma_1=x_0+r\cos t, \quad \gamma_1'=-r\sin t,$$
$$\gamma_2=y_0+r\sin t, \quad \gamma_2'=r\cos t,$$

sont continues sur $[0,2\pi]$, *alors* γ *est un courbe lisse sur un intervalle borné donc à variation bornée (*γ *est un chemin),*

et de longueur :

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi}|\gamma'(t)|dt=\int_0^{2\pi}|ire^{it}|dt=\int_0^{2\pi}rdt=rt]_0^{2\pi}=2\pi r.$$

2. le chemin est un segment de droite d'extrémités $A(z_0)$ et $B(z_1)$ noté $AB = [z_0, z_1]$ est une courbe paramétrée par la fonction

$$\gamma(t) \quad = \quad z_0 + t(z_1 - z_0), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

De la même facon, on a un segment de droite qui forme une courbe de longueur finie, c'est donc un chemin dont la longueur est :

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 |\gamma'(t)|dt = \int_0^1 |(z_1 - z_0)|dt = |z_1 - z_0|.t]_0^1 \\ &= |(z_1 - z_0)| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}. \end{aligned}$$

Remarque 4.1.7.

* *Soit $\gamma : I = [a, b] \to \mathbb{C}$ une application définie par $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$.*

* *Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, on dit que est un chemin fermé ou bien est un **lacet**.*

* *γ est dit chemin différentiable si $\gamma_1(t)$ et $\gamma_2(t)$ sont continûment différentiables sur $[a, b]$.*

* *Un lacet est dit simple si $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ quand $t_1 \neq t_2$ et $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

* *Toute courbe fermée et simple, est appelée courbe de Jordan.*

* *On appelle chemin oppose a γ, et on note $-\gamma$ le chemin :*

$$-\gamma : t \mapsto \gamma(a + b - t).$$

On a

$$-\gamma(a) = \gamma(b), \text{ et } -\gamma(b) = \gamma(a).$$

$-\gamma$ est le chemin γ parcouru en sens inverse.

* *Etant donnés deux chemins :*

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [a, b] &\to \mathbb{C} \\ \gamma_2 : [c, d] &\to \mathbb{C}, \end{aligned}$$

et tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$.

On appelle juxtaposition de γ_1 *et de* γ_2 *et on note* $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ *le chemin :*

$$\gamma : [a, b + d.c] \to \mathbb{C},$$

tel que :

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \gamma_1(t), \qquad\qquad \textit{pour}\, t \in [a,b] \\ \gamma(t) &= \gamma_2(t - b + c)\ \textit{pour}\, t \in [b, b + d - c]. \end{aligned}$$

On a $\gamma(a) = \gamma_1(a)$ *et* $\gamma(b + d - c) = \gamma_2(d)$.

* *Soient* $\gamma : I_1 = [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *et* $\gamma_2 : I_2 = [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ *deux chemins.*

On dit que γ_1 *et* γ_2 *sont equivalents s'il existe une bijection croissante*

$\varphi : I_2 \longrightarrow I_1$, *continue et continument derivable par morceaux, ainsi que la fonction reciproque* φ^{-1}, *telle que* $\gamma_2(t) = \gamma(\varphi(t))$ *dans* I_2.

$\gamma_1(I_1)$ *et* $\gamma_2(I_2)$ *sont alors les mêmes. Les origines et les extremites de* γ_1 *et* γ_2 *sont les mêmes.*

Définition 4.1.8. *Soit* $f(t) = u(t) + iv(t)$, $a \leq t \leq b$, *avec* u *et* v *deux fonctions réelles continues. On définit l'intégrale de* f *de* a *à* b *par*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$$

Exemple 4.1.9.

$$\int_0^1 (2t + i)^2 dt = \int_0^1 (4t^2 - 1)dt + i\int_0^1 4tdt = \frac{1}{3} + 2i.$$

4.2 Intégration complexe

On s'intéresse maintenant aux intégrales des fonctions f à valeurs complexes de la variable complexe z. Une telle intégrale est définie à l'aide des valeurs $f(z)$ le long d'un contour donné allant d'un point z_1 à un point z_2 dans le plan complexe. C'est donc une intégrale curviligne, dont la valeur dépend en général aussi bien du contour que de la fonction f.

4.2.1 Intégration bornée

Soit une courbe $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, et une fonction f á valeurs bornées ($|f(t)| \leq k$), et $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ une partition de $[a,b]$, tel que :

$$S_P = \sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_i)|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|, \ \ \xi_i \in [t_i, t_{i-1}].$$

On dit que f est intégrable par rapport a γ sur $[a,b]$ ssi ($\Leftrightarrow$) la limite $\lim_{n\to\infty} S_P = l$ existe et bornée. Et nous écrivons

$$\int_a^b f d\gamma = \int_a^b f(t) d\gamma(t).$$

Théorème 4.2.1. *Si $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, alors f est intégrable par rapport a γ sur $[a,b]$. ce qui signifie qu'il $int_a^b f(t)d\gamma(t)$ existe.*

Théorème 4.2.2. *Si $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une courbe lisse (ou lisse par morcaux) et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, alors f est intégrable par rapport a γ sur $[a,b]$. ce qui signifie qu'il*

$$\int_a^b f(t)d\gamma(t) = \int_a^b f(t)\gamma'(t)dt, \quad \textit{existe (intégrale réel simple).}$$

4.2.2 Intégration complexe (Curviligne)

Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une courbe et $f : \{\gamma\} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, alors $f \circ \gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue et d'aprés le théorème precedence $f \circ \gamma$ est intégrable par rapport a γ sur $[a,b]$. de plus on a :

$$\int_a^b (f\circ\gamma)(t)d\gamma(t) = \int_a^b f(\gamma(t))d\gamma(t), \quad \text{existe.}$$

Et l'on dit intégrale curviligne (complexe) sur le courbe γ, est noté par

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))d\gamma(t), \quad \gamma(t) = z.$$

Si γ est une courbe lisse, alors

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Le sens inverse des aiguilles d'une montre est aussi appelé le sens positif ou sens direct.

*/ Si la courbe (le chemin) est fermée et orientée dans le sens direct on note

$$\oint_\gamma f(z)dz.$$

Théorème 4.2.3. *Si $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une courbe commence par α et se termine par β, et $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et admet une primitive $F(F'(z) = f(z))$, alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\beta) - F(\alpha).$$

Si γ est un chemin fermé ($\alpha = \gamma(a) = \gamma(b) = \beta$), alors

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0.$$

Exemple 4.2.4. *Calculer les intégrales suivantes :*

1) $\int_\gamma (z+3)dz$ *où* γ *est* $\gamma(t) = 2t + i(4t-1)$, $1 \leq t \leq 3$.

2) $\int_\gamma (2\overline{z} - z)dz$ *où* γ *est ,* $\gamma_1(t) = -t$ *et* $\gamma_2(t) = t^2 + 2$ *et* $0 \leq t \leq 2$.

3) $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ *où* $\gamma : t \longrightarrow e^{it}$ *et* $0 \leq t \leq 2\pi$.

4) $\int_\gamma z^2 dz$, γ *est le segment allant de* 0 *à* $2+i$.

Solution

1)$\int_\gamma (z+3)dz$ *où* γ *est* $z(t) = 2t + i(4t-1)$, $1 \leq t \leq 3$, $z'(t) = 2 + 4it$,

alors

$$\int_\gamma (z+3)dz = \int_1^3 (2t + i(4t-1))(2+4it)dt$$
$$= \int_1^3 ((2+4i)t - i)(2+4it)dt = -28 + 84i.$$

2) $\int_C (2\overline{z} - z)dz$ *où* C *est ,* $x = -t$ *et* $y = t^2 + 2$ *et* $0 \leq t \leq 2$, $z'(t) = -1 + 2it$,

alors

$$\int_C (2\overline{z} - z)dz = \int_0^2 (2(-t - it^2 - 2i) + t - it^2 - 2i)(-1+2i)dt$$
$$= \int_0^2 (2(-t - it^2 - 2i) + t - it^2 - 2i)(-1+2i)dt$$

3) $\oint_\gamma \frac{dz}{z}$ *où* $\gamma : t \longrightarrow e^{it}$ *et* $0 \leq t \leq 2\pi$, $z(t) = e^{it} \Rightarrow z'(t) = ie^{it}$,

alors

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z} = \oint_0^{2\pi} i\frac{e^{it}}{e^{it}} dt = 2\pi i.$$

4) $\int_C z^2 dz$, C *est le segment allant de 0 à* $2+i$.

L'équation de C *est l'équation de la droite passant par le point* $(0,0)$ *et* $(2,1)$. *Cette équation est* $y = \frac{1}{2}x$. *. Elle est représentée par :*

$z(t) = t + it^2$, $0 \leq t \leq 2$ *comme* $z'(t) = 1 + \frac{i}{2}$ *alors*

$$\int_C z^2 dz = \int_0^2 (t + i\frac{t}{2})^2 (1 + \frac{i}{2})dt$$
$$= (1+\frac{i}{2})\int_0^2 (1 + i - \frac{1}{4})t^2 dt = (\frac{1}{4} + \frac{11i}{8})\int_0^2 t^2 dt = \frac{2+11i}{3}.$$

4.2.3 Propriétés

Soit γ une courbe dans le plan complexe, on a $-\gamma$ la courbe oppose de γ. Si f et g sont intégrables le long de γ, alors

* $\int_\gamma (f(z) + g(z))dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\gamma g(z)dz$

* $\displaystyle\int_\gamma \alpha f(z)dz = \alpha \int_\gamma f(z)dz$ où α est une constante dans $\mathbb{C}$.
* $\displaystyle\int_{-\gamma} \alpha f(z)dz = -\int_\gamma \alpha f(z)dz$.
* $\displaystyle|\int_\gamma f(z)dz| \leq \max_{z\in\gamma}|f(z)|.L(\gamma)$.

On suppose que $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ (ou $\gamma_1 + \gamma_2$) avec le point final de la courbe γ_1 coïncide avec le point initial de la courbe γ_2, on a :

* $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$.

Exemple 4.2.5. *Evaluer* $\displaystyle\int_C (x^2+iy^2)dz$
où C *est le contour illustré á la figure.*

Solution :

On a

$$\int_C (x^2+iy^2)dz = \int_{C_1}(x^2+iy^2)dz + \int_{C_2}(x^2+iy^2)dz.$$

Puisque la courbe C_1 *est définie*

par $y = x$*, il est logique*

d'utiliser $x = t$ *comme paramètre.*

Par conséquent, $z(t) = t+it$, $z'(t) = 1+i$

$f(z) = t^2+it^2$, $f(z(t)) = t^2+it^2$, *et*

$$\int_{C_1}(x^2+iy^2)dz = (1+i)\int_0^1 (t^2+it^2)dt = (1+i)^2\int_0^1 t^2dt = \frac{(1+i)^2}{3} = \frac{2}{3}i.$$

La courbe C_2 *est définie par* $x = 1$, $1 \leq y \leq 2$. *Si nous utilisons* t *comme paramètre, alors* $z(t) = 1+it$, $1 \leq t \leq 2$ *alors* $z'(t) = i$, $f(z(t)) = 1+it^2$, *et*

$$\int_{C_2}(x^2+iy^2)dz = i\int_1^2 (1+it^2)dt = i[t+i\frac{t^3}{3}]_1^2 = -\frac{7}{3}+i.$$

Alors

$$\int_C (x^2+iy^2)dz = \frac{2}{3}i - \frac{7}{3} + i = -\frac{7}{3}+\frac{5}{3}i.$$

Proposition 4.2.6. *Si* $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ *et* $\gamma :\ z(t) = x(t)+iy(t),\ t \in [a,b]$ *l'intégrale* $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$ *peut être exprimée sous la forme suivante :*

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_\gamma (u+iv)(dx+idy) = \int_\gamma (udx - vdy) + i(vdx+udy)\\ &= \int_a^b \Big\{u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t)\Big\}dt\\ &\quad +i\int_a^b \Big\{v(x(t),y(t))x'(t) + u(x(t),y(t))y'(t)\Big\}dt.\end{aligned}$$

Exemple 4.2.7.

1) Calculer $\int_\gamma f(z)dz$*, où* $f(z) = i\overline{z}$ *et* $\gamma = \left\{(t^2, \frac{3}{2}t) \in \mathbb{R}^2,\ t \in [-1,2]\right\}$.

2) Evaluer $\int_\gamma \overline{z}dz$ *de* $A(z=0)$ *á* $B(z=4+2i)$ *le long de la courbe* γ *définie par* $\gamma(t) = t^2 + it$.

Solution :

1) On a $x(t) = t^2, y(t) = \frac{3}{2}t$ *et* $dz = dx + idy = (x'(t) + iy'(t))dt = (2t + \frac{3}{2}i)dt$.

Alors

$$\int_C f(z)dz = \int_{-1}^{2} (y(t) + ix(t))(x'(t) + iy'(t))dt$$

$$\int_{-1}^{2} (t + it^2)(2t + \frac{3}{2}i)dt = \int_{-1}^{2} (\frac{1}{2}t^2 + i(2t^3 + \frac{3}{2}t))dt$$

$$= [\frac{1}{6}t^3 + i(\frac{1}{2}t^4 + \frac{3}{4}t^2)]_{-1}^{2} = \frac{3}{2} + \frac{39}{4}i.$$

2) L'intégrale donnée s'écrit

$$\int_C \overline{z}dz = \int_C (x - iy)(dx + idy) = \int_C xdx + ydy + i\int_C xdy - ydx.$$

Les équations paramétriques de C *sont* $x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$, $y = t \Rightarrow dy = dt$ *de* $t = 0$ *à* $t = 2$, *l'intégrale curviligne a donc pour valeur*

$$\int_C \overline{z}dz = \int_0^2 (t^2)(2tdt) + (t)(dt) + i\int_0^2 (t^2)(dt) + (t)(2tdt)$$

$$\int_0^2 (2t^3 + t) + i\int_0^2 (-t^2)dt = 10 - \frac{8i}{3}.$$

4.3 Théorèmes de Cauchy

Dans le cas général, l'intégrale $\int_\gamma f(z)dz$ dépend aussi bien de la fonction à intégrer $f(z)$ que du contour d'intégration . Cependant, si une fonction est analytique dans un domaine simplement connexe contenant un contour γ , son intégrale ne dépend que de la position des extrémités de γ et ne dépend pas de la forme du contour γ.

4.3.1 Domaines simplement ou multiplement connexes

Un domaine D du plan complexe est dit simplement connexe si toute courbe fermée simple de D peut être réduite par déformation continue à un point sans quitter D. Dans le cas contraire D est dit multiplement connexe.

Intuitivement, un domaine sans trous est simplement connexe mais s'il possède au moins un seul trou il est multiplement connexe.

Un domaine qui n'est pas simplement connexe est appelé un domaine multiples connexe, c'est-à-dire qu'un domaine multiples connexe a des (trous) dedans. voir sur la figure, que si la courbe γ_2 entourant le (trou) ètait rétrécie en un point, la courbe devrait éventuellement quitter D. Nous appelons un domaine avec un (trou) doublement connexe, un domaine avec deux (trous) triplement connexe, et ainsi de suite. Le disque ouvert défini par $|z| < 2$ est un domaine simplement connexe, la circulaire ouverte anneau défini par $1 < |z| < 2$ est un domaine doublement connexe.

En 1825, le mathématicien francais Louis-Augustin Cauchy a démontré l'un des théorèmes les plus importants dans l'analyse complexe.

Théorème 4.3.1. *(Théorème de Cauchy) Supposons que f est une fonction analytique dans un domaine simplement connexe $D \subset \mathbb{C}$, que f' est continue sur D et soit γ un lacet dans D, alors*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0.$$

Ce théorème fondamental est souvent appelé théorème de Cauchy, il est à la fois valable pour des domaines simplement connexes ou multiplement connexes.

Démonstration. Supposons que f' est continue dans le domaine D.
Alors si $f = u + iv$ et $dz = dx + idy$, on sait que les dérivées partielles sont continues.
D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma f(z)dz &= \int_\gamma [u(x,y) + iv(x,y)]d(x+iy) \\
&= \int_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_\gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy \\
&= \int\int_D \Big(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\Big)dxdy + i\int\int_D \Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big)dxdy.
\end{aligned}$$

Puisque la fonction f est analytique dans D, alors les fonctions u et v vérifient les conditions de Cauchy-Riemann dans tout point de D. Ceci implique que

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0.$$

□

Exemple 4.3.2.

1. $\oint_\gamma z^2 dz = 0$, *pour n'importe quel lacet γ car z^2 est entière.*

2. $\oint_{|z|=1} e^z dz = 0$, *puisque* $f(z) = e^z$ *est entière et que* $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *est lacet dans* $\mathbb{C}$.

3. $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z}{z^2+1} dz = 0$, *La fonction* $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$ *est analytique partout sauf au point* $z = i$, *donc, en particulier, à l'intérieur du cercle* $|z| = \frac{1}{2}$.

Remarque 4.3.3. *L'importance du théorème de Cauchy réside dans le fait que nous n'avons pas besoin de savoir si* f *a une primitive sur* D. *Si* f *avait une primitive sur* D *alors le résultat suit immédiatement du théorème fondamental de l'intégration sur un contour. Toute fois, possédant une primitive est une hypothèse extrêmement forte sur* f.

En 1883, le mathématicien francais Edouard Goursat a montré que l'hypothèse de la continuité de f' n'était pas nécessaire pour arriver á la conclusion du théorème de Cauchy. La version modifiée résultant du théorème de Cauchy est connu aujourd'hui sous le nom du théorème de Cauchy-Goursat.

Théorème 4.3.4. *(Théorème de Cauchy-Goursat) Supposons que* f *est une fonction analytique dans un domaine simplement connexe* $D \subset \mathbb{C}$, *soit* γ *un lacet dans* D, *alors*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0.$$

Exemple 4.3.5.
Èvaluer $\oint_\gamma \frac{dz}{z^2}$, *où le contour* γ *est l'ellipse* $(x-2)^2 + \frac{1}{4}(y-5)^2 = 1$.
La fonction rationnelle $f(z) = \frac{1}{z^2}$ *est analytique partout sauf à* $z = 0$.
Mais $z = 0$ *n'est pas un point intérieur á ou sur la contour fermée simple* γ.
Ainsi, on a que $\oint_\gamma \frac{dz}{z^2} = 0$

Corollele 4.3.6. *Soit* γ *et* γ_1 *des contours fermés simples orientés positivement, où* γ_1 *est intérieur à* γ. *Si une fonction* f *est analytique dans la région fermée constituée de ces contours et tous les points entre eux, alors*

$$\oint_\gamma f(z)dz = \oint_{\gamma_1} f(z)dz$$

Exemple 4.3.7.
Èvaluer $\oint_\gamma \frac{dz}{z-i}$, *où* γ *est le contour représenté sur la figure.*
Solution :

Nous choisissons le contour circulaire γ_1 plus pratique dessiné sur la figure. En prenant le rayon du cercle $r=1$, nous sommes assurés que γ_1 se trouve dans γ. En d'autres termes, γ_1 est le cercle $|z-i|=1$, peut être paramétré par $z=i+e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. De $z-i=e^{it}$ et $dz=ie^{it}dt$ on obtient

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z-i} = \oint_{\gamma_1} \frac{dz}{z-i} = \int_0^{2\pi} i\frac{e^{it}}{e^{it}}dt = 2\pi i.$$

Théorème 4.3.8. *(Généralisation du théorème de Cauchy)*

Supposons $\gamma, \gamma_1, ..., \gamma_n$ sont des courbes fermées simples avec une orientation positive tel que $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ sont intérieurs à C mais les régions intérieures à chacun γ_k, $k=1,2,...,n$, n'ont aucun point commun. Si f est analytique sur chaque contour et en chaque point intérieur à γ mais extérieur à tous les γ_k, $k=1,2,...,n$, alors

$$\oint_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)dz.$$

Exemple 4.3.9. *Èvaluer $\oint_\gamma \dfrac{dz}{z^2+1}$, où γ est le cercle $|z|=3$.*
Dans ce cas, le dénominateur des facteurs d'intégrande est

$$z^2+1=(z-i)(z+i).$$

Par conséquent,
l'intégrande $\dfrac{1}{(z^2+1)}$ n'est pas analytique à $z=i$ et en $z=-i$.
Ces deux points se trouvent à l'intérieur du contour γ.
Utilisation partielle décomposition de fraction une fois de plus, nous avons

$$\frac{1}{(z^2+1)} = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i} - \frac{1}{2i}\frac{1}{z+i},$$

et

$$\oint_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)} = \frac{1}{2i}\oint_\gamma [\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}]dz.$$

On entoure maintenant les points $z=i$ et $z=-i$ par les contours circulaires γ_1 et γ_2, respectivement, qui se trouvent entiérement dans γ. Plus précisément, le choix $|z-i|=\dfrac{1}{2}$ pour γ_1 et $|z+i|=\dfrac{1}{2}$ pour γ_2 suffira. Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)} &= \frac{1}{2i}\oint_\gamma [\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}]dz \\
&= \frac{1}{2i}\oint_{\gamma_1} [\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}]dz + \frac{1}{2i}\oint_{\gamma_2} [\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}]dz \\
&= \frac{1}{2i}\oint_{\gamma_1} \frac{dz}{z-i} - \frac{1}{2i}\oint_{\gamma_1} \frac{dz}{z+i} + \frac{1}{2i}\oint_{\gamma_2} \frac{dz}{z-i} - \frac{1}{2i}\oint_{\gamma_2} \frac{dz}{z+i}.
\end{aligned}$$

Parce que $\dfrac{1}{z+i}$ *est analytique sur* γ_1 *et en chaque point de son intérieur et parce que* $\dfrac{1}{z-i}$ *est analytique sur* γ_2 *et en chaque point de son intérieur, que les deuxième et troisième intégrales sont nulles, il résulte que*

$$\oint_{\gamma_1} \frac{dz}{z-i} = 2\pi i \text{ et } \oint_{\gamma_2} \frac{dz}{z+i} = 2\pi i.$$

Ainsi

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{(z^2+1)} = \pi - \pi = 0.$$

4.4 Primitives et intégration

Si f et F sont holomorphes dans un domaine connexe D et telles que $F'(z) = f(z)$, alors F est appelée intégrale indéfinie ou anti-dérivée ou primitive de f et est notée $F(z) = \int f(z)dz$.

Exemple 4.4.1. *On a* $\dfrac{d}{dz}(3z^2 - 4\sin z) = 6z - 4\cos z$*, alors*

$$\int (6z - 4\cos z)dz = 3z^2 - 4\sin z + c, \quad c \in \mathbb{C}.$$

La fonction $z \longrightarrow 3z^2 - 4\sin z$ *est une primitive de* $z \longrightarrow 6z - 4\cos z$.

Théorème 4.4.2. *(Théorème fondamental de l'intégration)*

Soient f *et* F *deux fonctions holomorphes dans un domaine connexe* D *telles que* $F'(z) = f(z)$*. Si* z_0 *et* z_1 *sont deux points quelconques de* D*, alors pour toute courbe* γ *de point initial* z_0 *et de point final* z_1*, on a*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$$

Cela signifie que si f *est holomorphe alors la valeur de l'intégrale est indépendante du chemin suivi pour aller de* z_0 *à* z_1.

Exemple 4.4.3.

Èvaluer $\int_C 2zdz$ *de* $z_0 = 0$ *à* $z_1 = 3+3i$

le long de la parabole

$\gamma_1 = \{z(t) \in \mathbb{C}, t \in [0,3]$ *où* $z(t) = \frac{1}{3}t^2 + it\}$,

et le long du segment de droite

$\gamma_2 = \{z(t) \in \mathbb{C}, t \in [0,1]$ où $z(t) = 3t + 3it\}$.

Solution :

Sur la parabole γ_1*, on a*

$$z(t) = \frac{1}{3}t^2 + it \Rightarrow dz = z'(t)dt = (-\frac{2}{3}t + i)dt$$

et

$$\int_{C_1} 2zdz = \int_0^3 2(\frac{1}{3}t^2+it)(\frac{2}{3}t+i)dt = [(\frac{1}{3}t^2+it)^2]_0^3 = 18i.$$

Sur le segment γ_2, on a

$$z(t) = 3t+3it \Rightarrow dz = z'(t)dt = (3+3i)dt,$$

et

$$\int_{C_2} 2zdz = \int_0^1 2(3t+3it)(3+3i)dt = [(3t+3it)^2]_0^1 = 18i.$$

Par le théorème fondamental de l'intégration

$$\int_C zdz = \int_0^{3+3i} 2zdz = [z^2]_0^{3+3i} = 18i.$$

Nous observons comment il est plus facile d'évaluer ces intégrales en utilisant une primitive, au lieu de paramétrer les chemins d'intégration.

4.5 Formule intégrale de Cauchy

Nous avons vu l'importance du théorème de Cauchy-Goursat dans le évaluation des intégrales de contour. Dans cette section, nous allons examiner plusieurs autres conséquences du théorème de Cauchy-Goursat. Incontestablement, le plus important d'entre eux est le résultat suivant : La valeur d'une fonction analytique f en tout point z_0 dans un domaine simplement connexe peut être représenté par une intégrale de contour. Après avoir établi cette proposition, nous l'utiliserons pour montrer davantage que : Une fonction analytique f dans un domaine simplement connexe possède des dérivées de tout ordres.

Théorème 4.5.1. *(Théorème : Formule de Cauchy)*

Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple γ, soit z_0 un point intérieur à γ, alors

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

où la courbe γ est décrit dans le sens direct.

Exemple 4.5.2.

1) Èvaluer $\oint_\gamma \frac{z^2-4z+4}{z+i}dz$, où γ est le cercle $|z|=2$.

2) Calculer $\oint_{|z-2i|=4} \frac{z}{z^2+9}dz$, où $\gamma = \{z \in \gamma, |z-2i|=4\}$.

Solution :

1) Premièrement, nous identifions $f(z) = z^2 - 4z + 4$

et $z_0 = -i$ *comme un point dans le cercle* C*.*

Ensuite, nous observons que f *est analytique*

en tout point à l'intérieur et sur le contour C*.*

Ainsi, par la formule intégrale de Cauchy on obtient

$$\oint_C \frac{z^2 - 4z + 4}{z + i} dz = 2\pi i f(-i) = \pi(-8 + 6i).$$

2) En factorisant le dénominateur comme

$z^2 + 9 = (z - 3i)(z + 3i)$ *on voit que* $3i$

est le seul point à l'intérieur du contour fermé

C *auquel l'intégrande ne parvient pas à être analytique.*

Voir la figure Puis en réécrivant l'intégrande sous la forme

$$\frac{z}{z^2 + 9} = \frac{\frac{z}{z+3i}}{z - 3i},$$

on peut identifier $f(z) = \dfrac{z}{z + 3i}$*. La fonction* f *est analytique en tout point dans et sur le contour* C*. Par conséquent, à partir de la formule intégrale de Cauchy, nous obtien*

$$\oint_{|z-2i|=4} \frac{z}{z^2 + 9} dz = \oint_{|z-2i|=4} \frac{\frac{z}{z+3i}}{z - 3i} dz = 2\pi i f(3i) = 2\pi i \frac{3i}{6i} = \pi i.$$

Proposition 4.5.3. *(Formule de Cauchy pour les dérivées) Supposons que* f *est analytique sur un domaine simplement connexe* D *et* γ *est un lacet inclus dans* D*. Alors pour tout* z_0 *dans l'intérieur de* γ*, on a*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Exemple 4.5.4.

1)Calculer $\displaystyle\oint_{|z+i|=1} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2} dz.$

2) Calculer $\displaystyle\oint_\gamma \frac{z + 1}{z^4 + 2iz^3} dz$*, où* γ *est le cercle* $|z| = 1$*.*

Solution :

1) $\displaystyle\oint_{|z+i|=1} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2} dz = \oint_{|z+i|=1} \frac{e^{iz}}{(z + i)^2 (z - i)^2} dz = \oint_{|z+i|=1} \frac{\frac{e^{iz}}{(z-i)^2}}{(z + i)^2} dz.$

Posons $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z - i)^2}$ *donc* f *est holomorphe à l'intérieur du cercle* $|z + i| = 1$ $z = i$ *est à l'extérieur du cercle* $|z + i| = 1$*,* $f'(z) = \frac{e^z (iz-1)}{(z-i)^3} \Rightarrow f'(-i) = 0$*,*

$$\oint_{|z+i|=1} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2} dz = \oint_{|z+i|=1} \frac{\frac{e^{iz}}{(z-i)^2}}{(z + i)^2} dz = \frac{2\pi i}{2!} f'(0) = 0.$$

2) L'inspection de l'intégrande montre qu'il n'est pas analytique à $z=0$ et $z=-2i$, mais seul $z=0$ se trouve dans le contour fermé. En écrivant le intégrande en tant que

$$\frac{z+1}{z^4+2iz^3}=\frac{\frac{z+1}{z+2i}}{z^3},$$

nous pouvons identifier, $z_0=0$, $n=2$, et $f(z)=\frac{z+1}{z+2i}$. Le quotient la règle donne $f''(z)=\frac{2-4i}{(z+2i)^3}$ et donc $f''(0)=\frac{2i-1}{4i}$. D'où on trouve

$$\oint_C \frac{z+1}{z^4+2iz^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}f''(0)=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}i.$$

4.5.1 Généralisation de la formule de Cauchy

Théorème 4.5.5. *$f: D\to\mathbb{C}$ une fonction analytique, et $D=\{z\in\mathbb{C}/0<r_1<|z-a|<r_2\}$. Alors pour tout z_0 verifiant $0<r_1<r_1'<|z_0-a|<r_2'<r_2$, on a :*

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz,$$

avec : $\gamma_1(t)=a+r_1'e^{it}$ et $\gamma_2(t)=a+r_2'e^{it}$

Théorème 4.5.6. *$f: D\to\mathbb{C}$ une fonction analytique, et $D=\{z\in\mathbb{C}/0<r_1<|z-a|<r_2\}$. Et soit γ est le lacet*

$$\begin{aligned}\gamma : [a,b] &\longrightarrow \mathbb{C}\\ t &\mapsto \gamma(t)=a+re^{it},\ r_1<r<r_2\end{aligned}$$

alors pour tout $z\in D$ on a :

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{(z-a)^n},$$

avec

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \text{ et } d_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)(z-a)^{n-1}dz.$$

Ou sous forme condensé :

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n(z-a)^n,\ a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)(z-a)^{-n-1}dz$$

Théorème 4.5.7. *(Inégalité de Cauchy) Soit f une fonction holomorphe sur le disque $D(z_0,R)$, $R>0$, alors $f(z)$ est développable en série entière sur ce disque, de plus on a l'inégalité :*

$$|f^{(n)}(z_0)|\leq\frac{n!M}{R^n},$$

où $M=\sup_{|z|=r}|f(z)|$.

Démonstration. En utilisant la formule intégrale de Cauchy pour les dérivés nous avons

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &\leq \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}|dz| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi i}\frac{M}{R^{n+1}}\oint_C |dz| \\ &= \frac{n!}{2\pi i}\frac{M}{R^{n+1}}2\pi R = \frac{n!M}{R^n}. \end{aligned}$$

□

4.5.2 Homotopie

Définition 4.5.8. *Soit $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to G$ deux chemins fermés. On dit que γ_0, γ_1 sont homotopes dans G s'il existe une application continue h :*

$$\begin{aligned} h : [0,1]\times[0,1] &\to G \\ (s,t) &\mapsto h(s,t), \end{aligned}$$

tel que

$$h(s,0) = \gamma_0(s),$$
$$h(s,1) = \gamma_1(s),$$
$$h(0,t) = h(1,t),$$

et on a :

$$h(s,t) = \gamma_0(s) + t[\gamma_1(s) - \gamma_0(s)], \quad t \in [0,1],$$

et on écrit

$$\gamma_0 \sim \gamma_1.$$

Théorème 4.5.9. *(Théorème de Cauchy :(1^{er} forme))*

Soit γ_0, γ_1 deux chemins fermés dand G.

$$f \in H(G) \ \wedge \ \gamma_0 \sim \gamma_1 \Rightarrow \int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Exemple 4.5.10.

Théorème 4.5.11. *(Théorème de Cauchy :(2^{eme} forme))*

Soit γ un chemin fermés dand G.

$$f \in H(G) \ \wedge \ \gamma \sim 0 \Rightarrow \int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

4.5.3 Homotopie par des cotés constantes

Définition 4.5.12. *Soit $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to G$ deux chemins ils ont les mêmes côtés, c'est-à-dire $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ et $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$. On dit que γ_0, γ_1 sont homotopes par des cotés constantes dans G s'il existe une application continue h :*

$$\begin{array}{rcl} h : [0,1] \times [0,1] & \to & G \\ (s,t) & \mapsto & h(s,t), \end{array}$$

tel que

$$\begin{aligned} &h(s,0) = \gamma_0(s), \\ &h(s,1) = \gamma_1(s), \\ &h(0,t) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0), \\ &h(1,t) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1). \end{aligned}$$

Théorème 4.5.13. *Si γ_0, γ_1 deux chemins dans G, alors*

$$f \in H(G) \ \wedge \ \gamma_0 \sim \gamma_1 \ (\textit{par des cotés constantes}) \Rightarrow \int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Exemple 4.5.14.

4.5.4 Indice d'un point par rapport á un lacet

Définition 4.5.15. *Soit γ un lacet dans un domaine D qui ne passe pas par z_0. On défini l'indice du point z_0 par rapport á et on note $I(\gamma, z_0)$ par :*

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{dz}{z - z_0}.$$

L'indice est une quantité qui mesure le (nombre de tours algébrique) réalisé par le lacet autour du point z_0 et donc $I(\gamma, z_0)$ est un nombre entier.

Exemple 4.5.16.
Pour $0 \leq t \leq 2\pi i$, soient $\gamma_1(t) = e^{2it}$, $\gamma_2(t) = e^{-3it}$ et $\gamma_3(t) = 3 + e^{it}$.
Calculer $I(\gamma_k, 0), k = 1,2,3$.
Solution :
Notons $\gamma_i, i = 1,2,3$, ne passe pas sur $z = 0$ car $|i(t)| \geq 1$.

$$I(\gamma_1, 0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_0^{2\pi} \frac{2ie^{2it}}{e^{2it}} dt = 2.$$

En effet γ_1 fait 2 révolutions autour de $z=0$.

$$I(\gamma_2,0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_0^{2\pi}\frac{-3ie^{-3it}}{e^{-3it}}dt=-3.$$

Dans ce cas γ_2 fait 3 révolutions au sens négatif autour de $z=0$.

$$I(\gamma_3,0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_0^{2\pi}\frac{ie^{it}}{3+e^{it}}dt=0.$$

car $z=0$ n'est pas á l'intérieur de γ_3

Proposition 4.5.17. *Avec les notations précédentes, l'indice vérifie :*

1 $I(\gamma,z_0)\in\mathbb{Z}$

2 *Pour tout $r>0$, le lacet $\gamma_n : t\in[0,2\pi]\mapsto z_0+re^{int}$ a pour indice $I(\gamma,z_0)=n$*

3 *La fonction $z_0\mapsto I(\gamma,z_0)$ est constante sur les composantes connexes de $\mathbb{C}$ $([a,b])$ et nulle sur l'unique composante connexe non bornée de $\mathbb{C}$ $([a,b])$.*

4 $I(-\gamma,z_0)=-I(\gamma,z_0)$.

5 *Si γ_1 et γ_2 sont deux lacets de meme origine, alors*

$$I(\gamma_1+\gamma_2,z_0)=I(\gamma_1,z_0)+I(\gamma_2,z_0).$$

Théorème 4.5.18. *(Formule généralisée de Cauchy)*

Si G un domaine dans $\mathbb{C}$, $f\in H(G)$ et si $\gamma\sim 0$ un chemin fermé dans G, si z_0 est un point à l'intérieur de γ, alors :

$$I(\gamma,z_0)f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,$$

et

$$\int_\gamma\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}I(\gamma,z_0)f^{(n)}(z_0).$$

Exemple 4.5.19. *Pour calcule l'intégrale*

$$\int_\gamma\frac{e^z}{(z-1)^4}dz,\ \ \textit{tel que}\ \gamma:\gamma(t)=2e^{5it},\ \ t\in[0,2\pi].$$

. On a, γ est un chemin fermé lisse, et $f(z)=e^z$ est analytique au voisinage inclut γ, $z_0=1$ un point à l'intérieur de γ, et on a $I(\gamma,z_0)=5$ et $n=3$,

donc

$$\int_\gamma\frac{e^z}{(z-1)^4}dz=\frac{2i\pi}{3!}.5e=\frac{5ei\pi}{3}.$$

Conséquence :

Si $\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n$ des chemins fermés, chacun satisfait à la formule de Cauchy et z_0 il n'existe sur aucune chemin, alors

$$f^{(k)}(z_0)\sum_{i=1}^{i=n}I(\gamma_i,z_0)=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma_i}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz.$$

4.6 Séries de Taylor

Nous avons montrer dans la section précédente que toute série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

est analytique dans son disque de convergence $D(z_0,R)$. Dans cette section, on montre que la réciproque est vraie. Toute fonction analytique dans un domaine D est développable en série entière dans un disque $D(z_0,R) \subset D$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!}(z-z_0)^n. \tag{4.6.1}$$

La série dans (4.6.1) est appelée série de Taylor de f centrée en a. Si le centre $z_0 = 0$ alors la série devient

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(0)}{n!} z^n. \tag{4.6.2}$$

et on l'appelle la série de Maclaurin de f.

Théorème 4.6.1. *(Théorème de Taylor)*

Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction analytique (holomorphe) dans le domaine D. Alors f est développable en une série entière
$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(0)}{n!} z^n$, *avec*
$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds,$
$n = 0,1,2,..,$ *où $C = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| = R\}$ est le plus grand cercle de centre z_0 et de rayon R orienté positivement inclus dans D.*

Démonstration. Soi $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-z_0| < R$ et s tel que $|s-z_0| = R$. D'après la formule intégrale de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{s-z_0} ds.$$

Le facteur $\frac{1}{s-z}$ peut être exprimer comme une série géométrique en fonction de $\frac{z-z_0}{s-z_0}$ où $\frac{z-z_0}{s-z_0} < 1$ par

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{(s-z_0)(z-z_0)} = \frac{1}{s-z} \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{s-z_0}} = \frac{1}{s-z} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^n$$

qui converge uniformément vers $\dfrac{1}{s-z}$ et donc

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(s)}{s-z_0}ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(s)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(s-z_0)^{n+1}}ds \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}ds\right](z-z_0)^n. \end{aligned}$$

Mais d'aprés la formule intégrale de Cauchy pour les dérivées, on a

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}ds,\ n = 0,1,2,..,$$

Ce qui complète la démonstration du théorème. □

Exemple 4.6.2.
Supposons que $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ *est développée en une série de Taylor de centre* $z_0 = 3i$. *Quel est le rayon de convergence* R *? Trouver la série de Taylor.*
La fonction f *est analytique partout sauf au point* $z = 1$. *Donc le rayon de convergence est la distance enter* 1 *et le centre* $z_0 = 3i$,

$$R = |1-3i| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}.$$

Donc

$$f(z) = \frac{1}{1-3i-(z-3i)} = \frac{1}{1-3i}\frac{1}{1-\frac{z-3i}{1-3i}} = \frac{1}{1-3i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-3i}{1-3i}\right)^n.$$

4.6.1 Fonctions développables en série entière

Définition 4.6.3. *On dit qu'une fonction* $f : D \to \mathbb{C}$ *définie sur un ouvert* D *de* $\mathbb{C}$ *contenant* 0 *est développable en série entière en* 0 *s'il existe une série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, *de rayon de convergence* $R > 0$ *et* $r \in]0,R[$ *tel que, pour tout* $z \in D(0;r)\cap D$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

On dit qu'elle est développable en série entière en $z_0 \in D$ *si la fonction*
$z \mapsto f(z-z_0)$ *est développable en série entière en* 0. *Dans ce cas, on appelle développement en série entière en* z_0 *de* f *la série* $\sum a_n(z-z0)^n$ *telle que pour* z *voisin de* z_0,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Exemple 4.6.4.

1) La série géométrique

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$

2)

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1.$$

3) En différenciant $\frac{1}{1-z}$ *par rapport à z, on obtient*

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{d}{dz}\frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1}, \quad |z| < 1.$$

4)D'autre part, en intégrant $\frac{1}{1-z}$ *par rapport à z de* 0 *à z,*

$$log(1-z) = \int_0^z \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad |z| < 1.$$

5) D'autres extensions utiles sont

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < \infty.$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |z| < \infty.$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad |z| < \infty.$$

6)Trouver le développement de la série de Taylor en série entière du fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}.$$

Puisque les points singuliers de $f(z)$ *sont* $z = 2$ *et* $z = 3$*, le le rayon de convergence de la série de Taylor en puissances z est égal à* 2*. En utilisant fractions partielles, on a*

$$f(z) = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}.$$

Nous développons chacune des fractions dans une série de Taylor dans le disque $|z| < 2$ *. On a donc la série*

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n,$$

qui converge pour

$$\frac{z}{3} < 1, \; \textit{c'est-à-dire}\, |z| < 3.$$

De même, on a la série
$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n,$$
qui converge pour
$$\frac{z}{2} < 1, \ \textit{c'est-à-dire} \ |z| < 2,$$
alors
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n.$$

4.7 Prolongement analytique

Soit la fonction
$$f(z) = \frac{1}{z-1},$$
définie pour $z \neq 1$. Cette fonction, dériveable au voisinage de tout point $z \neq 1$, est holomorphe dans $\mathbb{C}/\{1\}$. Soit
$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$
qui définit une fonction holomorphe dans le disque D de centre 0 et de rayon 1. Pour $|z| < 1, g(z) = f(z)$. On dit alors que $f(z)$ est le prolongement analytique dans $\mathbb{C}/\{1\}$ de la fonction $g(z)$. Plus généralement, si $f(z)$ est une fonction holomorphe dans un ouvert U du plan complexe et $g(z)$ est une fonction holomorphe dans un ouvert V du plan complexe, telles que l'intersection de U et de V ne soit pas vide, et que $f(z) = g(z)$, pour tout $z \in U \cap V$,
alors, $g(z)$ est le prolongement analytique de $f(z)$ dans $V - (U \cap V)$.
De même, $f(z)$ est le prolongement analytique de $g(z)$ dans $U - (U \cap V)$.

4.8 Séries de Laurent

Le développement en série de Taylor représente une fonction qui est analytique dans l'intérieur de son cercle de convergence. Il est fréquent de rencontrer des fonctions qui sont analytiques dans certains domaines perforés comme une couronne. Dans ces cas, la représentation en série de Taylor n'est pas la forme correcte pour décrire le développement en série de puissance infinie de ces types de fonctions complexes. Considérons la série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z-z_0)^{-n}.$$

Pour trouver la région de convergence de cette série, on pose $w = \dfrac{1}{z - z_0}$. La série devient une série de Taylor avec la variable w. Le rayon de convergence est

$$R' = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

et la série converge dans la région $|w| < R$ équivalente à la région $|z - z_0| > \frac{1}{R'} = r$. Plus généralement considérons une série avec des puissance positives et négatives de $(z - z_0)$ de la forme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n. \tag{4.8.1}$$

Cette série est appelée une série de Laurent de centre $z = z_0$. La série contenant les puissances négatives est appelée la partie principale de la série de Laurent, et celle des puissances positives est appelée partie analytique de la série de Laurent. Posons

$$r = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ \ et \ \ R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right|$$

La série de Laurent (4.8.1) converge dans la couronne

$$\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}.$$

Théorème 4.8.1. *(Théorème de Laurent)*
Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction analytique dans le domaine

$$D = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}.$$

Alors f est développable en une série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^{-n},$$

pour tout $z \in D$ et

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

où C est un contour simple orienté positivement inclue dans D et contenant $z = z_0$ dans son intérieur.

Exemple 4.8.2.
1) Développer $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ en série de Laurent valable dans les domaines suivants :
(a) $|z| < 1$, *(b)* $1 < |z| < 3$, *(c)* $|z| > 3$, *(d)* $0 < |z+1| < 2$.

2) Développer $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ *dans une série de Laurent valable pour*
(a) $0<|z-1|<2$, *(b)* $0<|z-3|<2$.

Solution :

1) On a

$$f(z)=\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+3}\Big].$$

(a) Dans $|z|<1$ *on a*

$$\frac{1}{z+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n,$$

et $\left|\frac{z}{3}\right|<1$ *alors*

$$\frac{1}{z+3}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Big(\frac{z}{3}\Big)^n,$$

donc

$$f(z)=\frac{1}{2}\Big[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Big(\frac{z}{3}\Big)^n\Big]=\frac{1}{2}\Big[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Big(1-\frac{1}{3^{n+1}}\Big)z^n\Big].$$

(b) Dans $1<|z|<3$ *on a* $\dfrac{1}{|z|}<1$ *et* $\dfrac{|z|}{3}<1$*, alors*

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Big(\frac{1}{z}\Big)^n$$

et

$$\frac{1}{z+3}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Big(\frac{z}{3}\Big)^n,$$

donc

$$f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{n+1}}-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Big(\frac{z}{3}\Big)^n.$$

(c) Dans $|z|>3$ *on a* $\dfrac{3}{|z|}<1$ *et* $\dfrac{1}{|z|}<1$*, alors*

$$f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{n+1}}-\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Big(\frac{3}{z}\Big)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2}(1-\frac{1}{3^n})\frac{1}{z^{n+1}}.$$

(d) Dans $|z+1|<2$ *on a* $\dfrac{|z+1|}{2}<1$*, alors*

$$f(z)=\frac{1}{z+1}\frac{1}{(z+1)+2}=\frac{1}{2(z+1)}\frac{1}{1+\frac{z+1}{2}}=\frac{1}{2(z+1)}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Big(\frac{z+1}{2}\Big)^n.$$

2) (a)Dans le domaine $|z-1|<2$ *on a* $|z-1|<2\Rightarrow\dfrac{|z-1|}{2}<1$*, donc on obtient*

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{-2+(z-1)}=\frac{-1}{2(z-1)^2}\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}},$$

donc

$$f(z) = \frac{-1}{2(z-1)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-1}{2}\right)^n.$$

(b)Dans le domaine $|z-3| < 2$ *on a* $|z-3| < 2 \Rightarrow \dfrac{|z-3|}{2} < 1$*. Pour obtenir des puissances de* $z-3$*, on écrit* $z-1 = 2+(z-3)$ *et*

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} &= \frac{1}{z-3}\frac{1}{[2+(z-3)]^2} = \frac{1}{4(z-3)}\frac{1}{[1+\frac{z-3}{2}]^2} \\ &= \frac{1}{4(z-3)}\left[1+\frac{(-2)}{1!}\left(\frac{z-3}{2}\right)+\frac{(-2)(-3)}{2!}\left(\frac{z-3}{2}\right)^2+...\right] \\ &= \frac{1}{4(z-3)} - \frac{1}{4} + \frac{3}{16}(z-3) - \frac{1}{8}(z-3)^2 + ... \end{aligned}$$

4.9 Points singuliers

Un point en lequel une fonction $f(z)$ cesse d'être analytique est appelé un point singulier ou une singularité de $f(z)$. Il existe des types variés de singularités.

1. Singularités isolées : Le point $z = z_0$, est appelé singularité isolée, ou point singulier isolé de $f(z)$, si l'on peut déterminer $\delta > O$ tel que le cercle $|z-z_0| = \delta$ ne contienne pas d'autre point singulier que z_0, (i.e. il existe un δ voisinage pointé de z, ne contenant pas de singularité). Si l'on ne peut trouver une telle valeur δ, on dit que z, est une singularité non isolée.
Si z_0, n'est pas un point singulier et si l'on peut trouver $\delta > 0$ tel que $|z-z| = \delta$ ne contienne pas de point singulier, alors on dit que z_0, est un point ordinaire de $f(z)$.

2. Pôles : Si l'on peut trouver un entier positif n tel que

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^n f(z) = A \neq 0,$$

alors z_0, est appelé un pôle d'ordre n. Si $n = 1$, z, est appelé un pôle simple.

3. Points de branchement : Les points de branchement des fonctions multiformes, sont des points singuliers.

4. Singularités apparentes : Le point singulier z, est appelé singularité apparente de $f(z)$ si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existe.

5. Singularités essentielles : Une singularité qui n'est ni un pôle, ni un point de branchement, ni une singularité apparente est appelée singularité essentielle.

Si une fonction est uniforme et possède une singularité, celle-ci ne peut être qu'un pôle ou une singularité essentielle. Pour cette raison un pôle est quelquefois appelé singularité non essentielle. De manière équivalente on peut dire que z, est un point singulier essentiel si l'on ne peut trouver d'entier positif n tel que $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0$.
6. Singularités à l'infini : La nature d'une singularité de $f(z)$ à $z = \infty$ est la même que celle de $f(\frac{1}{w})$ à $w = 0$.

Exemple 4.9.1.

1. *$f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^3}$ a un pôle triple en $z = 2$.*
2. *$f(z) = \dfrac{3z-2}{(z-1)^2(z+1)(z-4)}$ a un pôle double en $z = 1$ et deux pôles simples $z = -1$ et $z = 4$.*
3. *$f(z) = \sqrt{z-3}$ a un point de branchement en $z = 3$.*
4. *$f(z) = Log(z^2 - z - 2)$ a un point de branchement pour les valeurs de z telles que $z^2 + z - 2 = 0$, i.e. en $z = 1$ et $z = -2$.*
5. *Le point singulier $z = 0$ est une singularité apparente de la fonction $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ puisque $\lim_{z \to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$.*
6. *$f(z) = e^{\frac{1}{z-2}}$ a une singularité essentielle en $z = 2$.*
7. *$f(z) = z^3$ a un pôle triple à $z = \infty$ car $f(\frac{1}{w}) = \frac{1}{w^3}$ à un pôle triple en $z = 0$.*

4.10 Exercices

Exercice 4.10.1. *(Intégrales curvilignes) (Toutes les courbes sont dans le sens direct.)Calculer :*

1. *$I_1 = \int_C (x - 2iy)(dx + idy)$, C est la parabole $y = x^2$ de $(0,0)$ à $(1,1)$.*
   réponse : $I_1 = \dfrac{3}{2}$.
2. *$I_2 = \displaystyle\int_C (2y + x2)dx + (3r - y)dy$, C est la parabole $y = \dfrac{x^2}{4} + 3$ de $(0,3)$ à $(2,4)$.*
   réponse : $I_2 = \dfrac{33}{2}$.

3. $I_3 = \int_C (z^3 + 2\overline{z})dz$, C est le cercle $|z| = 2$ de $2i$ à -2.

   réponse : $I_3 = 4i\pi$.

4. $I_4 = \int_C (2z - \overline{z})dz$, C est $z(t) = 2\cos t + i \sin t$ de 2 à i.

   réponse : $I_4 = -\frac{7}{2} - i\pi$.

5. $I_5 = \int_C z^{-1+3i}dz$, , C est le cercle $|z| = 2$.

   réponse : $I_5 = i2^{3i}(e^{-3\pi} - e^{3\pi})$.

6. $I_6 = \int_C (x^2 - iy^2)dz$, C est la parabole $y = 2x^2$ de $(1,2)$ à $(2,8)$.

   réponse : $I_6 = \dfrac{511}{3} - \dfrac{48}{5}i$.

7. $I_7 = \int_C z^2 dz$, C est le polygonale $O(0,0) \to A(1,0) \to B(1,1)$.

   réponse : $I_7 = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{5}i$.

Exercice 4.10.2. *(Primitives)*

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^{1+i} z^2 dz$, réponse : $I_1 = \left.\dfrac{z^3}{3}\right|_0^{1+i} = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3}i$.
2. $I_2 = \displaystyle\int_1^{i} \frac{\ln z}{z} dz$, réponse : $I_2 = \left.\dfrac{\ln^2 z}{2}\right|_1^{i} = -\dfrac{\pi^2}{8}$.
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{2+i} \cos z dz$, réponse : $I_3 = \sin z\Big|_0^{2+i} = sin(2+i)$.
4. $I_4 = \displaystyle\int_{1-i}^{1+2i} z e^{z^2} dz$, réponse : $I_4 = \left.\dfrac{e^{z^2}}{2}\right|_{1-i}^{1+2i} = \dfrac{1}{2}(e^{-2i} - e^{-3+4i})$.

Exercice 4.10.3. *(Formule intégrale de Cauchy)*

(Toutes les courbes sont dans le sens direct.)Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\oint_{|z-2|=1} \frac{dz}{(z-2)(z+1)}$,

   réponse : $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$, $I_1 = \displaystyle\oint_{|z-2|=1} \frac{f(z)}{z-2}dz = 2\pi i f(2) = \frac{2}{3}\pi i$.

2. $I_2 = \displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{e^{2z}dz}{(z+1)^4}$,

   réponse : $f(z) = e^{2z}$, $I_2 = \displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{f(z)}{(z+1)^4}dz = \frac{2\pi}{3!} i f'''(-1) = \frac{8\pi i}{3e^2}$.

3. $I_3 = \displaystyle\oint_\gamma \frac{z+1}{z(z-1)(z+2)}dz$, si γ est :

   a) Le cercle $|z| = \frac{1}{2}$, réponse : $f(z) = \dfrac{z+1}{(z-1)(z+2)}$,$I_3 = \displaystyle\oint_\gamma \frac{f(z)}{z}dz = 2\pi i f(0) = -\pi i$.

   b) Le cercle $|z| = \frac{3}{2}$,$I_3 = \displaystyle\oint_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z}dz + \oint_{\gamma_2} \frac{g(z)}{z-1}dz$, $g(z) = \dfrac{z+1}{z(z+2)}$

   réponse : $I_3 = I_1 + 2\pi i g(1) = -i\pi + \dfrac{4\pi i}{3} = \dfrac{i\pi}{3}$.

   c) Le rectangle de sommets $-4+i, -4-i, 2+i, 2-i$.

$$I_3 = \oint_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z}dz + \oint_{\gamma_2} \frac{g(z)}{z-1}dz + \oint_{\gamma_2} \frac{h(z)}{z+2}dz,\ h(z) = \frac{z+1}{z(z-1)}$$

réponse : $I_3 = 2\pi i(f(0)+g(1)+h(-2)) = \dfrac{i\pi}{3} - \dfrac{i\pi}{3} = 0$.

Exercice 4.10.4. *(La somme d'une série)*

Trouvez la somme des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{2^n}$, *réponse :* $R = 2$, *et* $S = \dfrac{1}{2-z}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$, *réponse :* $R = 1$, *et* $S = \dfrac{z^2+z}{(1-z)^3}$.
3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n(n-1)}$, *réponse :* $R = 1$, *et* $S = -zln(1-z) + z + ln(1-z)$.

Exercice 4.10.5. *(Développement en série de Taylor)*

Donner le développement en série de Taylor de :

1. $f(z) = \frac{z^3}{(1-z)^2}$ *au voisinage de* $z_0 = 0$, , *réponse* $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n+1}$.
2. $f(z) = \frac{1}{1-z}$ *au voisinage de* $z_0 = 2i$, , *réponse* $f(z) = \dfrac{1}{1-2i}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)^n$.
3. $f(z) = z^8 e^{3z}$ *au voisinage de* $z_0 = 0$, , *réponse* $f(z) = \dfrac{1}{1-2i}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}z^{n+8}$.
4. $f(z) = \frac{1+2z^2}{z^3+z^5}$ *au voisinage de* $z_0 = 0$, , *réponse* $f(z) = \left(\dfrac{1}{z^3} + \dfrac{1}{z}\right) - \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n+1}$.
5. $f(z) = \frac{\cos^2}{1+z^2}$ *au voisinage de* $z_0 = 0$, , *réponse* $f(z) = 1 - 2z^2 + \frac{7z^4}{3} - ...,\ \ R = 1$.

Exercice 4.10.6. *(Développement en série de Laurent)*

Donner le développement en série de Laurent de :

1. $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$, *dans* $1 < |z| < 3$, $f(z) = \frac{1}{2}[\frac{1}{z+1} - \frac{1}{(z+3)}]$,
   réponse $f(z) = \frac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{3}\right)^n$.
2. $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$, *dans* $1 < |z-2| < 2$, $f(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$,
   réponse $f(z) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-2}\right)^{n+1}$.
3. $f(z) = \frac{z}{(z-2)(z+1)}$, *dans* $3 < |z+1| < +\infty$, $f(z) = \frac{1}{3}\left[\dfrac{1}{z+1} + \dfrac{2}{z+1}.\dfrac{1}{1-\frac{3}{z+1}}\right]$,
   réponse $f(z) = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{z+1} + \dfrac{2}{z+1}.\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z+1}\right)\right]^n$.
4. $f(z) = \frac{2}{z(z-2)}$, *dans* $|z| > 2$, $f(z) = \dfrac{2}{z}.\dfrac{1}{z(1-\frac{2}{z})}$, *réponse* $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{z^{n+2}}$.

5. $f(z)=\frac{3z-3}{(2z-1)(z-2)}$, *dans* $\frac{1}{2}<|z-1|<2$,

réponse $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n.$

6. $f(z)=e^{3/z}$, *dans* $0<|z|<\infty$, *réponse* $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!z^n}.$

7. $f(z)=\frac{e^z}{(z+1)^2}$, *dans* $0<|z+1|<\infty$, *réponse* $f(z)=\displaystyle\frac{1}{e}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{(n+1)!}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{(z+1)^2}\Big].$

8. $f(z)=\frac{\cos z}{(z-a)^2}$, *dans* $0<|z-a|<r$, *réponse* $f(z)=\displaystyle\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-a)^{2n}}{(2n+2)!}.$

Chapitre 5

Théorème des résidus

Nous avons vu que si une fonction complexe f a une singularité isolée en un point z_0, alors f a une représentation en série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (z - z_0)^n,$$

qui converge pour tout z proche de z_0. Plus précisément, la représentation est valable dans certains voisinage de z_0 ou disque ouvert perforé $0 < |z - z_0| < R$.
Dans cette chapitre, tout notre focus sera sur le coefficient a_{-1} et son importance dans l'évaluation des intégrales de contour.

5.1 Les résidus et leurs calculs

On a vu dans le chapitre précédent que si f est analytique dans un domaine D sauf en une singularité isolée $z = z_0$, alors f est développable en une série de Laurent valide dans un disque pointé $\{z : 0 < |z - z_0| < R\} \subset D$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (z - z_0)^n$$

Définition 5.1.1. *Le résidu de f au point singulier isolé $z = z_0$ est défini par*

$$Res(f, z_0) = a_{-1}.$$

Donc le nombre complexe a_{-1}, qui est le coefficient de $\dfrac{1}{z - z_0}$ dans le développement de la série de Laurent est appelé le résidu de f au point singulier isolé z_0.

Si $r < R$ et $C_r = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, alors d'après le théorème de Laurent, on a

$$\oint_{C_r} f(z)dz = \oint_{C_r} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \oint_{C_r} (z - z_0)^n dz,$$

mais

$$\oint_{C_r} (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

d'où

$$\oint_{C_r} f(z)dz = 2\pi i a_{-1},$$

et donc

$$Res(f,z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} f(z)dz.$$

Exemple 5.1.2. *Calculer $Res(f,1)$ et $Res(f,3)$ si*

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}.$$

Solution :

La série de Laurent obtenue dans cet exemple valable pour le voisinage supprimé de $z=1$ défini par $0<|z-1|<2$,

$$f(z) = \frac{\frac{-1}{2}}{(z-1)^2} + \frac{\overbrace{\frac{-1}{4}}^{a_{-1}}}{(z-1)} - \frac{1}{8} - \frac{z-1}{16} - ...,$$

on voit que le coefficient de $\dfrac{1}{z-1}$ est $a_{-1} = Res(f(z),1) = \dfrac{-1}{4}$.

On peut vérifier que dans la couronne $0<|z-3|<2$.

$$f(z) = \frac{\frac{1}{4}}{(z-3)} + \frac{-1}{4} + \frac{3}{16}(z-3) - \frac{1}{8}(z-3)^2 + ...,$$

donc $z=3$ est un simple pôle et $Res(f,3) = \dfrac{1}{4}$.

5.1.1 Calcul des résidus

Pour obtenir le résidu d.une fonction f en $z=z_0$ on pourrait croire à la nécessité d'écrire le développement de $f(z)$ en série de Laurent dans le voisinage de $z=z_0$. Dans beaucoup de cas on peut déterminer le résidu sans passer par le développement de Laurent.

Proposition 5.1.3. *Soit $z=z_0$ une singularité isolée de f, alors*

(a) *Si $z=z_0$ est un pôle simple de f,*

$$Res(f,z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

(b) *Si $z = z_0$ est un pôle d'ordre n de f,*

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z - z_0)^n f(z)].$$

(c) *Si $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ où $g(z_0) \neq 0$, et $h(z_0) = 0$ mais $h'(z_0) \neq 0$, alors*

$$Res(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Exemple 5.1.4.
1) Trouver le résidu de $f(z) = \dfrac{z+1}{(z+2)(z-1)}$ en $z = 1$.

2) Trouver le résidu de $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ en $z = 1$.

3) Soit $f(z) = \dfrac{1}{z^4 - 1}$, calculer les résidus de f en tous les pôles de f.
Solution :
1) Le point $z = 1$ est un pôle simple et le résidu en $z = 1$ est

$$Res(f, 1) = \lim_{z \to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z \to 1}(z-1)\frac{z+1}{(z+2)(z-1)} = \lim_{z \to 1} \frac{z+1}{z+2} = \frac{2}{3}.$$

2) Le point $z = 1$ est un pôle d'ordre 2, donc

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{1!} \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz}[(z-1)^2 f(z)] = \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz}[\frac{1}{z-3}] = \lim_{z \to 1} \frac{-1}{(z-3)^2} = -\frac{1}{4}.$$

3) On a $z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = (z-1)(z+1)(z-i)(z-i)$.

Les singularités $z = \pm 1, \pm i$ sont des simples pôles de f. Si on utilise la formule $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ avec $g(z) = 1$ et $h(z) = z^4 - 1$, on aura

$$Res(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} = \frac{1}{4z_0^3}.$$

Donc on trouve :

$$Res(f, -1) = \frac{-1}{4} \quad et \quad Res(f, 1) = \frac{1}{4},$$
$$Res(f, -i) = \frac{-i}{4} \quad et \quad Res(f, i) = \frac{i}{4}.$$

5.2 Théorème des résidus

Nous arrivons maintenant à la raison pour laquelle le concept des résidus est important. Le théorème des résidus de Cauchy indique que, dans certaines circonstances, nous pouvons calculer les intégrales complexes $\oint_\gamma f(z)dz$ en additionnant les résidus aux singularités isolées de f se trouvant à l'intérieur du contour fermé γ.

Théorème 5.2.1. *(Théorème des résidus)*
Soit D un domaine simplement connexe et γ un simple contour fermé se trouvant entièrement dans D. Si une fonction f est analytique sur et dans γ, sauf en un nombre fini de points singuliers isolés $z_1, z_2, ..., z_n$ dans γ, alors

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f(z), z_k).$$

i.e. L.intégrale de $f(z)$ le long de γ est égale à $2\pi i$ fois la somme des résidus de $f(z)$ en les singularités contenues dans γ. Notons que le théorème de Cauchy et les formules intégrales sont des cas particuliers de ce théorème.

Démonstration. Supposons que $C_1, C_2, ..., C_n$ sont des cercles centrés en $z_1, z_2, ..., z_n$, respectivement. De plus supposons que chaque cercle C_k est positivement orienté et son rayon r_k est tel que $C_1, C_2, ..., C_n$ sont mutuellement disjoints et tous à l'intérieur de C. Voire la figure ci-dessous. on a vu ca

$$\oint_{C_k} f(z)dz = 2\pi i Res(f(z), z_k),$$

et ainsi par théorème de Cauchy-Goursat pour la multiplication domaines connexe on a

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f(z), z_k).$$

□

Exemple 5.2.2.
1) Calculer

$$\oint_C \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} dz, \text{ où le contour } C \text{ est,}$$

(a) *le rectangle défini par les droites : $x = 0, x = 4, y = -1$ et $y = 1$,*

(b) *le cercle $|z| = 2$.*

2) Calculer

$$\oint_C \frac{e^z}{z^4 + 5z^3} dz, \text{ où le contour } C \text{ est le cercle } |z| = 2.$$

Solution :

(a) *Puisque les singularités $z=1$ et $z=3$ sont dans le rectangle alors on*

$$\oint_c \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}dz = 2\pi i[Res(f,1)+Res(f,3)] = 2\pi i[-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}] = 0.$$

(b) *Seule la singularité $z=1$ est dans le cercle $|z|=2$, donc*

$$\oint_c \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}dz = 2\pi i Res(f,1) = -2\pi i\frac{1}{4} = -\frac{\pi}{2}i.$$

2) On a $z^4+5z^3 = z^3(z+5)$ donc $z=0$ est un pôle d'ordre 3 et $z=-5$ est un pôle simple, mais seul $z=0$ est dans le cercle $|z|=2$, donc

$$\begin{aligned} \oint_c \frac{e^z}{z^4+5z^3}dz &= 2\pi i Res(f,0) \\ &= \pi i \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}[z^3\frac{e^z}{z^3(z+5)}] \\ &= \pi i \lim_{z\to 0}\frac{(z^2+8z+17)e^z}{(z+5)^3} \\ &= \frac{17\pi}{125}i. \end{aligned}$$

5.3 Application du théorème des résidus au calcul intégral

Le calcul d'intégrales définies peut souvent être effectué en utilisant le théorème des résidus à une fonction et à un contour convenable dont le choix peut demander une grande ingéniosité. Dans cette section, nous verrons comment la théorie des résidus peut être utilisée pour évaluer les intégrales réelles du formes

$$\int_0^{2\pi} F(cos\theta, sin\theta)d\theta, \tag{5.3.1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx, \tag{5.3.2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\alpha x dx, \ et \ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\alpha x dx. \tag{5.3.3}$$

5.3.1 Èvaluation des intégrales trigonométriques réelles

Intégrales de la forme $\int_0^{2\pi} F(cos\theta, sin\theta)d\theta$

L'idée de base ici est de convertir une intégrale trigonométrique réelle de forme (5.3.1) en un complexe intégrale, où le contour C est le cercle unité $|z|=1$ centré à l'origine.

Pour ce faire nous commencons par paramétrer ce contour par $z=e^{i\theta}, 0\leq\theta\leq 2\pi$. On peut alors écrire

$$dz = ie^{i\theta}d\theta,\ \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\ \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

Puisque $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$ et $z^{-1} = \frac{1}{z} = e^{-i\theta}$, ces trois quantités sont équivalentes à

$$d\theta = \frac{dz}{iz},\ \cos\theta = \frac{1}{2}(z+z^{-1}),\ \sin\theta = \frac{1}{2i}(z-z^{-1}). \tag{5.3.4}$$

La conversion de l'intégrale en (5.3.1) en une intégrale de contour est accomplie en remplaçant tour à tour $d\theta$, $\cos\theta$ et $\sin\theta$ par les expressions en (5.3.4) :

$$\oint_C F\left(\frac{1}{2}(z+z^{-1}), \frac{1}{2i}(z-z^{-1})\right)\frac{dz}{iz}$$

où C est le cercle unité $|z|=1$.

Exemple 5.3.1.

1) Calculer

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{(2+\cos\theta)^2}d\theta.$$

2) Calculer

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\sin\theta}d\theta.$$

Solution :

Lorsque nous utilisons les substitutions données en (5.3.4), la valeur trigonométrique donnée intégrale devient l'intégrale de contour 1)

$$\oint_C \frac{1}{(2+\frac{1}{2}(z+z^{-1}))^2}\frac{dz}{iz} = \oint_C \frac{1}{\left(2+\frac{z^2+1}{2z}\right)^2}\frac{dz}{iz} = \frac{4}{i}\oint_C \frac{z}{(z^2+4z+1)^2}dz.$$

A partir de la formule quadratique, nous pouvons factoriser le polynôme z^2+4z+1 *comme* $z^2+4z+1 = (z-z1)(z-z2)$*, où* $z_1=-2-\sqrt{3}$ *et* $z_2=-2+\sqrt{3}$*. Nous,l'intégrande peut s'écrire*

$$\frac{z}{(z^2+4z+1)^2} = \frac{z}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}.$$

Parce que seul z_2 est à l'intérieur du cercle unité C, nous avons

$$\oint_C \frac{z}{(z^2+4z+1)^2}dz = 2\pi i Res(f(z), z_2),$$

Pour calculer le résidu, on note d'abord que z_2 est un pôle d'ordre 2,

$$Res(f(z), z_2) = \lim_{z\to z_2} \frac{d}{dz}(z-z_2)f(z) = \lim_{z\to z_2} \frac{d}{dz}\frac{z}{(z-z_1)^2} = \frac{1}{6\sqrt{3}}.$$

D'où,

$$\frac{4}{i}\oint_C \frac{z}{(z^2+4z+1)^2}dz = \frac{4}{i}2\pi i Res(f(z), z_2) = \frac{4}{i}.2\pi i.\frac{1}{6\sqrt{3}},$$

et enfin,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos\theta)^2}d\theta = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

2) $C = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{1}{(5+3\frac{1}{2i}(z-z^{-1}))}\frac{dz}{iz} &= \oint_C \frac{2}{(3z^2+10iz-3)}dz \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{2}{(3z+i)(z+3i)}dz.\end{aligned}$$

Puisque le nombre $\frac{-i}{3}$ est le seul pôle de $\frac{2}{(3z+i)(z+3i)}$ qui appartient à l'intérieur du cercle $|z| = 1$, alors par le théorème des résidus

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin\theta}d\theta &= 2\pi i Res\left(\frac{2}{(3z+i)(z+3i)}, \frac{-i}{3}\right) \\ &= 2\pi i \frac{2}{3(\frac{-i}{3}+3i)} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

5.3.2 Èvaluation des intégrales réelles impropres

Intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

Supposons que $y = f(x)$ est un réel fonction définie et continue sur l'intervalle $[0, +\infty)$. En élémentaire calculer l'intégrale impropre $I_1 = \int_0^{+\infty} f(x)dx$ est défini comme la limite

$$I_1 = \int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty}\int_0^R f(x)dx. \tag{5.3.5}$$

Si la limite existe, l'intégrale I_1 est dite convergente, sinon c'est divergent. L'intégrale impropre $I_2 = \int_{-\infty}^0 f(x)dx$ est défini de la même manière :

$$I_2 = \int_{-\infty}^0 f(x)dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^0 f(x)dx. \tag{5.3.6}$$

Enfin, si f est continue sur $(-\infty,+\infty)$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est défini comme étant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx = I_1 + I_2. \tag{5.3.7}$$

à condition que les deux intégrales I_1 et I_2 soient convergentes.

on peut alors l'évaluer par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx. \tag{5.3.8}$$

La limite en (5.3.8), si elle existe, est appelée valeur principale de Cauchy (V.P.) de l'intégrale et s'écrit

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx. \tag{5.3.9}$$

Pour évaluer une intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, où la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ est continue sur $(-\infty,+\infty)$, par théorie des résidus on remplace x par le variable complexe z et intégrer la fonction complexe f sur un contour fermé C qui se compose de l'intervalle $[-R,R]$ sur l'axe réel et d'un demi-cercle C_R de rayon suffisamment grand pour englober tous les pôles de $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ dans la partie supérieure demi-plan $Im(z) > 0$. Voir la Figure. Nous ont

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_R} f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \sum_{n}^{k=1} Res(f(z),z_k),$$

où $z_k, k = 1,2,...,n$ désigne les pôles dans le demi-plan supérieur. Si on peut montrer que l'intégrale, $\oint_{C_R} f(z)dz \to 0$ comme $R \to \infty$, alors on a

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \sum_{n}^{k=1} Res(f(z),z_k). \tag{5.3.10}$$

Exemple 5.3.2. *Evaluer la valeur principale de Cauchy de*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)}dx.$$

Solution :

Soit

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)} = \frac{1}{(z-i)(z+i)(z-3i)(z+3i)},$$

on prend C le contour fermé constitué par l'intervalle $[-R,R]$ sur le l'axe des x et le demi-cercle C_R de rayon $R > 3$.

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}dz &= \int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)}dx + \int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}dz \\ &= I_1 + I_2 = 2\pi i\Big(Res(f(z),i) + Res(f(z),3i)\Big). \end{aligned}$$

Aux pôles simples $z = i$ et $z = 3i$ on trouve respectivement,

$$Res(f(z), i) = \frac{1}{16i} \;\; et \;\; Res(f(z), 3i) = -\frac{1}{48i},$$

pour que

$$I_1 + I_2 = 2\pi i \left[\frac{1}{16i} - \frac{1}{48i}\right] = \frac{\pi}{12}.$$

Alors

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)} dx = \frac{\pi}{12}.$$

Il est souvent fastidieux de devoir montrer que l'intégrale de contour le long de C_R tend vers zéro lorsque $R \to \infty$. Conditions suffisantes dans lesquelles ce comportement est toujours vrai sont résumés dans le théorème suivant.

Théorème 5.3.3. *Supposons $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ est une fonction rationnelle, où le degré de $p(z)$ est n et le degré de $q(z)$ est $m \geq n+2$. Si C_R est un contour semi-circulaire $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, alors, $\displaystyle\int_{C_R} f(z)dz \to 0$ comme $R \to \infty$.*

Exemple 5.3.4.
Èvaluer la valeur principale de Cauchy de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4} dx$.
Solution :
Par inspection de l'intégrande, nous voyons que les conditions données dans le théorème récent sont satisfaits. De plus, nous savons que $f(z) = \dfrac{1}{z^2+4}$ a un pôle simple dans le demi-plan supérieur en $z_1 = 2i$.
Nous avons

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{1}{z^2+4} dz &= 2\pi i Res(f(z), z_1) = 2\pi i Res(f(z), 2i) \\ &= 2\pi i \lim_{z \to 2i} (z-2i) f(z) \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{z+2i}\right)_{i=2i} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2+4} dz = \int_{C_R} \frac{1}{z^2+4} dz + \int_{-R}^{+R} \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{\pi}{2},$$

si $R \to \infty$

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} \frac{1}{z^2+4} dz = 0. \;\; \textit{Car le pôlynome } (z^2+4) \textit{ est de degré } \; 2 \geq 0+2.$$

Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{\pi}{2}.$$

5.3.3 Èvaluation des intégrales réelles impropres

Intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\alpha x dx$, *et* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\alpha x dx$

Parce que les intégrales impropres de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\alpha x dx$ sont rencontrés dans les applications de l'analyse de Fourier, ils sont souvent appelées intégrales de Fourier. Les intégrales de Fourier apparaissent comme parties réelles et imaginaires dans l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx$.

En vue de la formule d'Euler $e^{i\alpha x} = \cos\alpha x + isin\alpha x$, où α est un nombre réel positif, nous pouvons écrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\alpha x dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\alpha x dx \tag{5.3.11}$$

chaque fois que les deux intégrales du membre de droite convergent. Supposons $f(x) = p(x)/q(x)$ est une fonction rationnelle continue sur $(-\infty,\infty)$. Alors les deux Les intégrales de Fourier dans (5.3.11) peuvent être évaluées en même temps en considérant l'intégrale complexe, $\int_C f(z)e^{i\alpha z}dz$, où $\alpha > 0$, et le contour C à nouveau se compose de l'intervalle $[-R,R]$ sur l'axe réel et d'un contour semi-circulaire C_R avec un rayon suffisamment grand pour enfermer les pôles de $f(z)$ dans la moitié supérieure plane.

Avant de procéder, nous donnons, sans preuve, des conditions suffisantes sous dont l'intégrale de contour le long de C_R tend vers zéro lorsque $R \to \infty$.

Théorème 5.3.5. *Supposons* $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ *est une fonction rationnelle, où le degré de* $p(z)$ *est* n *et le degré de* $q(z)$ *est* $m \geq n+2$. *Si* C_R *est un contour semi-circulaire* $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, *alors,* $\int_{C_R} f(z)e^{i\theta}dz \to 0$ *comme* $R \to \infty$.

Exemple 5.3.6.

Èvaluer la valeur principale de Cauchy de $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+9}dx$.

Solution :

Notez d'abord que les limites d'intégration dans l'intégrale donnée ne sont pas de $-\infty$ *à* ∞ *comme requis par la méthode qui vient d'être décrite. Cela peut être résolu en observant que puisque l'intégrale est une fonction paire de x (vérifier), on peut écrivez*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+9}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+9}dx, \tag{5.3.12}$$

on forme maintenant l'intégrale de contour $\oint_C \frac{z}{z^2+9}e^{iz}dz$, *alors*

$$\oint_{C_R} \frac{z}{z^2+9}e^{iz}dz + \int_{-R}^{R} \frac{x\sin x}{x^2+9}dx = 2\pi i Res(f(z)e^{iz}, 3i),$$

où $f(z)=\frac{z}{z^2+9}$, *et*

$$Res(f(z)e^{iz},3i)=\frac{ze^{iz}}{2z}\bigg|_{z=3i}=\frac{1}{2e^3}.$$

Ensuite, à partir du théorème 5.3.5, nous concluons $\int_{C_R} f(z)e^{i\theta}dz \to 0$ *comme* $R\to\infty$*, et donc*

$$V.P.\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+9}dx=2\pi i\frac{1}{2e^3}=\frac{\pi}{e^3}i.$$

Mais

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+9}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2+9}dx+i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+9}dx.$$

L'équivalence des parties réelles et imaginaires dans la dernière ligne donne le résultat

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2+9}dx=0 \text{ de même que } V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+9}dx=\frac{\pi}{e^3}.$$

Enfin, compte tenu du fait que l'intégrale est une fonction paire, on obtient la valeur de l'intégrale prescrite :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+9}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+9}dx=\frac{\pi}{2e^3}.$$

5.4 Résidu á l'infini

Nous devons d'abord expliquer l'idée ici. L'intérieur d'une simple courbe fermée est tout à gauche lorsque vous traversez la courbe. Le courbe C est orientée dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, donc son intérieur contient tous les pôles de . Le théorème des résidus dit que l'intégrale sur C est déterminé par les résidus de ces pôles. D'autre part, l'intérieur de la courbe $-C$ est tout à l'extérieur de C. Il n'y a pas de pôles dans cette région. Si nous voulons le théorème des résidus à retenir (ce que nous faisons - c'est si important) alors la seule option est d'avoir un résidu à ∞ et de le définir comme Nous faisions. La définition du résidu à l'infini suppose que tous les pôles de sont à l'intérieur C. Le théorème des résidus implique donc. Si f admet un développement de Laurent pour z trés grand, alors on peut toujours définir le résidu de f au voisinage de l'infini. Considérons l'expression $f(z)dz$, si z est au voisinage de l'infini alors $\frac{1}{z}$ se trouve au voisinage de 0.

Posons $t=\frac{1}{z}$, on a donc $f(z)dz=\frac{-1}{t^2}f(\frac{1}{t})dt$, d'où la définition :

Définition 5.4.1. *Soit* $f:\mathcal{C}\to\mathbb{C}$ *une fonction analytique au point* z_0*, et* $\mathcal{C}=\{z\in\mathbb{C}.|z|>R,R>0\}$ *. On appelle résidu de* f *a l'infini, le nombre*

$$Res(f,\infty)=Res(g,0) \text{ avec } g(z)=\frac{-1}{z^2}f(\frac{1}{z}).$$

Exemple 5.4.2. *Soit*

$$f(z) = \frac{5z-2}{z(z-1)}$$

Auparavant, nous avons calculé

$$\int_{|z|=2} f(z)dz = 10\pi i.$$

en calculant les résidus à $z = 0$ et $z = 1$. Recalculez cette intégrale en calculant un seul résidu à l'infini.

$$\frac{1}{w^2} f(\frac{1}{w}) = \frac{1}{w^2} \frac{\frac{5}{w} - 2}{(\frac{1}{w})(\frac{1}{w}) - 1} = \frac{5-2w}{w(1-w)}.$$

On calcule facilement que

$$Res(f, \infty) = -Res(\frac{1}{w^2} f(\frac{1}{w}), 0) = -5$$

Puisque $|z| = 2$ contient toutes les singularités de on a

$$\int_{|z|=2} f(z)dz = -2\pi i Res(f, \infty) = 10\pi i.$$

Remarque 5.4.3.

1) Posons :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n \Rightarrow -\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{a_n}{z^{n+2}}.$$

D'où l'on tire : $Res(f, \infty) = -a_{-1}$, et donc :

$$Res(f, 0) + Res(f, \infty) = 0$$

2) Si $f(z)$ se présente sous la forme $f(z) = g(\frac{1}{z})$ alors

$$Res(f, \infty) = -g'(0).$$

5.5 Exercices

Exercice 5.5.1. *(Calcule des résidus.)*

Calculer le résidu en tous les pôles à distance finie :

1. *La fonction $f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$, posséde un pôle double en $z = -1$ et des pôles simples en $z = \pm 2i$,*

$$\begin{aligned} Res(f, -1) &= \lim_{z\to -1} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left\{ (z+1)^2 \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)} \right\} = -\frac{14}{25}, \\ Res(f, 2i) &= \lim_{z\to 2i} \left\{ (z-2i) \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)} \right\} = \frac{7+i}{25}, \\ Res(f, -2i) &= \lim_{z\to 2i} \left\{ (z+2i) \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)} \right\} = \frac{7-i}{25}. \end{aligned}$$

2. *La fonction* $f(z)=\dfrac{e^z}{\sin^2 z}$, *posséde des pôles double en* $z=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$,

$$Res(f,k\pi)=\lim_{z\to -1}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left\{(z-k\pi)^2\frac{e^z}{\sin^2 z}\right\}=e^{k\pi},\ k\in\mathbb{Z}.$$

3. *La fonction* $f(z)=\dfrac{\cos z.\cosh z}{z^3\sin z.\sinh z}$, *posséde un pôle d'ordre* 5 *en* $z=0$, *on a*

$$f(z)=\frac{1}{z^5}-\frac{7}{45z}+...,$$

donc

$$Res(f,0)=-\frac{7}{45}.$$

4. *La fonction* $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2(z-1)}$, *posséde un pôle double en* $z=0$ *et un pôle simple en* $z=1$,

$$\begin{aligned} Res(f,0) &= \lim_{z\to 0}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left\{z^2\frac{e^z}{z^2(z-1)}\right\}=-2,\\ Res(f,1) &= \lim_{z\to 1}\left\{(z-1)\frac{e^z}{z^2(z-1)}\right\}=e. \end{aligned}$$

Exercice 5.5.2. *(Utilise le théorème des résidus pour calcule les intégrales.)*

Utiliser le théorème des résidus pour calculer les intégrales sur les contours indiqués :

1.
$$I_1=\oint_{|z|=2}\frac{1-\sin z}{z^2-z}dz,$$

réponse *: puisque il y a deux singularités à l'intérieur de* $|z|=2$,

$$I_1=2\pi i\Big(Res(f,0)+Res(f,1)\Big)=-(1+\sin 1)\pi i.$$

2.
$$I_2=\oint_{|z|=2}\frac{e^{zt}z}{z^2(z^2+2z+2)}dz,$$

réponse *: puisque il y a trois singularités à l'intérieur de* $|z|=2$,

$$\begin{aligned} I_2 &= 2\pi i\Big(Res(f,0)+Res(f,-1+i)+Res(f,-1-i)\Big)\\ &= \left(\frac{t-1}{2}+\frac{1}{2}e^{-t}\cos t\right)2\pi i. \end{aligned}$$

3.
$$I_3=\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}}\frac{e^z z}{z^2(z-1)}dz,$$

réponse *: puisque il y a un singularité à l'intérieur de* $|z-1|=\frac{1}{2}$,

$$I_3=2\pi i Res(f,1)=2\pi i e.$$

4.

$$I_4 = \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z(z-1)^3},$$

réponse *: Aucune singularité à l'intérieur de* $|z+1| = \frac{1}{2}$*, donc* $I_4 = 0$.

5.

$$I_5 = \oint_{|z+i|=2} z^3 e^{-1/z^2} dz,$$

réponse *: puisque il y a un singularité à l'intérieur de* $|z-1| = 2$*,*

$$I_5 = 2\pi i Res(f,0) = \pi i.$$

6.

$$I_6 = \oint_{|z|=2} \frac{\tan z}{z} dz,$$

réponse *: puisque il y a trois singularités à l'intérieur de* $|z-1| = 2$*,*

$$I_6 = 2\pi i \left(Res(f,0) + Res(f, -\frac{\pi}{2}) + Res(f, \frac{\pi}{2}) \right) = -4i.$$

7.

$$I_7 = \oint_{|z-1|=2} \frac{\sin z}{(z^2-1)(z^2+1)} dz,$$

réponse *: puisque les singularités sont situées sur le cercle* $|z| = 1$*,*

$$\begin{aligned} I_7 &= 2\pi i \left(Res(f,-1) + Res(f,1) + Res(f,-i) + Res(f,i) \right) \\ &= \frac{\pi i}{2}(\sin 1 - \sinh 1). \end{aligned}$$

8.

$$I_8 = \oint_C \frac{dz}{(z^2+4)^2}, \quad C : x^2 + y^2 = \frac{25}{4} \;\; et \;\; y \geq 0,$$

réponse *: puisque il y a un singularité à l'intérieur de* C*,*

$$I_8 = 2\pi i Res(f, 2i) = \frac{\pi}{16}.$$

Chapitre 6

Applications

6.1 Equivalence entre analyticité et holomorphie

Nous avons vu qu'une fonction de la variable réelle développable en série entière au voisinage de 0 est indéfiniment dérivable . Maintenant que nous avons donné un sens á la notion de dérivation complexe nous allons montrer que ce résultat est encore valable pour les fonctions d'une variable complexe. Le fait qu'une fonction analytique en z_0 est holomorphe en ce point est élémentaire.

Théorème 6.1.1. *Une fonction analytique sur un ouvert non vide D de $\mathbb{C}$ est holomorphe sur cet ouvert.*

Démonstration. Pour $z_0 \in D$; il existe $r > 0$ tel que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ pour $z \in D(z_0;r) \subset D$ et pour $z \neq z_0$ dans $D(z_0;r)$; on a :

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}(z-z_0)^n = g(z)$$

avec $\lim_{z\to z_0} g(z) = g(z_0) = a_1$ puisque la fonction g est continue en z_0 (la série entière $\sum a_{n+1}t^n$ qui a même rayon de convergence que $\sum a_n t^n$ est continue sur $D(0;r)$, donc en 0). La fonction f est donc dérivable en z_0 de dérivée $f'(z_0) = a_1$.
De manière, plus précise, on peut montrer que la dérivée d'une fonction analytique sur D est elle même analytique sur cet ouvert et donc holomorphe. Après avoir montrè l'équivalence entre analyticité et holomorphie, on déduira qu'une fonction $\mathbb{C}-$dérivable est indéfiniment $\mathbb{C}-$dérivable (ce résultat étant faux pour les fonctions d'une variable réelle).

□

6.2 Théoème de maximum

Une des conséquences importantes du théorème de Cauchy est le résultat connu sous le nom du principe du module maximum qui dit que pour une fonction holomorphe non constante f sur un domaine (ouvert et connexe) D, alors le module $|f|$ ne peux pas avoir un maximum (minimum) dans le domaine D.

Théorème 6.2.1. *(Le principe du module maximum) Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine (ouvert et connexe) et $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ analytique. S'il existe $a \in D$ tel que $|f(a)| \leq |f(z)|$ pour tout $z \in D$, alors f est constante.*
En d'autres termes $|f(z)|$ ne peut pas avoir un maximum dans D, sauf si f est constante.

Démonstration. Supposons que $|f|$ atteint son maximum en $a \in D$ c.a.d. $|f(a)| = \max\limits_{z\in D} |f(z)| > 0$. Comme f est analytique, c'est une application ouverte, d'où il existe $\delta > 0$ tel que le disque $D(f(a),\delta) \subset f(D)$. Soit $w = f(a)\left[1+\dfrac{\delta}{2|f(a)|}\right]$. Alors $w \in D(f(a),\delta)$ et par consèquent il existe $z \in D$ tel que $w = f(z)$ et d'autre part, $|f(z)| = |w| > f(a)$, ce qui est une contradiction. $\square$

Le principe du maximum oblige le module d'une fonction analytique non constante à ne pas avoir de maximum local sur un ouvert connexe D. Ce maximum va donc forcément être atteint sur la frontière ∂D.
Le corollaire suivant est souvent nommé le principe du module maximum du à ses divers applications aux problèmes d'optimisation.

Corollele 6.2.2. *Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine (ouvert et connexe) borné, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et f analytique sur D, alors*

$$\max_{z\in D} |f(z)| = \max_{z\in \partial D} |f(z)|.$$

En d'autres termes $|f|$ atteint son maximum sur la frontière ∂D et nulle part ailleurs.

Exemple 6.2.3.
1) Trouver le maximum de $f(z) = 2z+5i$ sur $|z| \leq 2$.
2) Trouver le maximum de $f(z) = z^2+5z-1$ sur $|z| \leq 1$.
Solution :
1)On a

$$|2z+5i|^2 = (2z+5i)(2\overline{z}-5i) = 4|z|^2+20Imz+25.$$

D'aprés le principe du maximum on a

$$\begin{aligned}\max_{|z|\leq 2}|2z+5i| &= \max_{|z|=2}|2z+5i| \\ &= \max_{|z|=2}\sqrt{4|z|^2+20Imz+25}=\sqrt{4\times 2^2+20\times 2+25}=9.\end{aligned}$$

2) D'aprés le principe du maximum on a :

$$|z^2+5z-1|\leq |z|^2+5|z|+|-1|.$$

Puisque le module maximum de f apparait sur $|z|=1$, l'inégalité montre que le module maximum de $f(z)=z^2+5z-1$ sur la région est 7.

6.3 Théoème de Liouville

Théorème 6.3.1. *(Théoème de Liouville) Supposons que f soit entier et qu'il soit borné dans le plan complexe, à savoir $|f(z)|\leq M$ pour tout $z\in\mathbb{C}$ alors f est constant.*

Preuve. Soit $f(z)$ une fonction entière et bornée c.a.d. $|f(z)|\leq M$ pour tout $z\in\mathbb{C}$. D'aprés l'inégalité de Cauchy pour tout $z_0\in\mathbb{C}$, on a

$$|f'(z_0)|\leq \frac{M}{R}\to 0 \text{ quand } R\to+\infty.$$

Donc $|f'(z_0)|=0$ pour tout $z_0\in\mathbb{C}$ ce qui montre que f est constante. □

Exemple 6.3.2.
1) Supposons que $f(z)$ soit une fonction entière et $Re(f(z))\leq c$ pour tout $z\in\mathbb{C}$. Alors que $f(z)$ est une constante.
Puisque $Re(f(z))\leq c$, on a

$$\left|e^{f(z)}\right|=\left|e^{Re(f(z))+iIm(f(z))}\right|=\left|e^{Re(f(z))}\right|<c.$$

Par conséquent, la fonction $e^{f(z)}$ est uniformément bornée dans tout le plan complexe, et par le théoème de Liouville, il est constant en $\mathbb{C}$. Alors $f(z)$ est constant en $\mathbb{C}$.
2) La fonction d'une variable complexe définie par $f(z)=cosz$ est analytique partout et satisfait l'inégalité $|cosx|\leq 1$ pour tout x réel. Pourtant, ce n'est pas une constante. Y a-t-il une contradiction avec le théoème de Liouville ?
Il n'y a pas de contradiction avec le théoème de Liouville puisque $|cosz|$ est non borné en $\mathbb{C}$. Le théoème de Liouville ne peut donc pas être appliqué.

6.4 Théoème de Rouché

6.4.1 Le principe de l'argument

Contrairement à la discussion précédente dans laquelle le l'accent était mis sur l'évaluation des intégrales réelles, nous appliquons ensuite la théorie des résidus à l'emplacement des zéros d'une fonction analytique. Pour arriver à ce sujet, nous devons Considérons d'abord deux théoèmes qui sont importants en eux-mêmes. Dans le premier théoème, nous devons compter le nombre de zéros et de pôles d'un fonction f qui se situent à l'intérieur d'un simple contour fermé C ; dans ce comptage nous incluons l'ordre ou la multiplicité de chaque zéro et pôle par exemple, si

$$f(z) = \frac{(z-1)(z-9)^4(z+i)^2}{(z^2-2z+2)^2(z-i)^6(z+6i)^7},$$

et C est pris pour le cercle $|z| = 2$, puis contrôle du numérateur de f révèle que les zéros à l'intérieur de C sont $z = 1$ (un zéro simple) et $z = -i$ (un zéro de ordre ou multiplicité 2). Par conséquent, le nombre N_0 de zéros à l'intérieur de C est pris être $N_0 = 1+2 = 3$. De même, l'inspection du dénominateur de f montre, après factorisation de z^2-2z+2, que les pôles à l'intérieur de C sont $z = 1-i$ (pôle d'ordre 2), $z = 1+i$ (pôle d'ordre 2) et $z = i$ (pôle d'ordre 6). Le nombre N_p de pôles à l'intérieur de C est considéré comme $N_p = 2+2+6 = 10$.

Proposition 6.4.1. *(Principe de l'argument) Soit C un simple contour fermé entièrement è l'intérieur d'un domaine D. Supposons f est analytique dans D sauf en un nombre fini de pôles à l'intérieur de C, et que $f(z) \neq 0$ sur C. Alors*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N_0 - N_p$$

où N_0 est le nombre total de zéros de f à l'intérieur de C et N_p est le total nombre de pôles de f a l'intérieur de C. Pour déterminer N_0 et N_p, les zéros et les pôles sont comptés selon leur ordre ou leurs multiplicités.

Le résultat suivant découle de la principe d'argument. Le théoème est utile pour déterminer le nombre de zéros d'une fonction analytique

6.4.2 Théorème de Rouché

Théorème 6.4.2. *(Théorème de Rouché)*
Soit C un simple contour fermé situé entièrement dans un domaine D. Supposons que f et g

soient analytiques dans D. Si l'inégalité stricte $|f(z)-g(z)|<|f(z)|$ est vrai pour tout z sur C, alors f et g ont le même nombre de zéros (comptés selon leur ordre ou leurs multiplicités) à l'intérieur de C.

Version II :

Si f et g sont analytiques dans et sur un contour fermé C sur lequel f ne s'annule pas et aussi $|g(z)|<|f(z)|$, alors f et $f+g$ ont le même nombre de zéros dans C.

Exemple 6.4.3.

1) Montrez que les zéros de $g(z)=z^5+3z+1$ se trouvent tous à l'intérieur de $|z|<2$.

2) Trouver le nombre de zéros du polynôme

$$F(z)=z^{10}-7z^6-2z+1,$$

à l'intérieur du disque unité $D:|z|<1$.

Solution :

1)Soit $C:|z|=2$ et choisissons $f(z)=z^5$.

Alors $|f(z)-g(z)|=|-3z-1|\leq 3|z|+1=7$ sur C.

Aussi $|f(z)|=z^5=|z|^5=2^5=32$ sur C.

Donc $|f-g|<|f|$ sur C, et le théoème de Rouché s'applique.

Puisque f a 5 zéros (tous à $z=0$), alors g a 5 zéros à l'intérieur de $|z|=2$.

2)Soit $F(z)=f(z)+g(z)$, où $f(z)=-7z^6+1$ et $g(z)=z^{10}-2z$.

Alors, pour tout z sur le cercle unité $C:|z|=1$

$$|f(z)|=|-7z^6+1|\leq|-7z^6|-1=7-1=6,$$

et

$$|g(z)|=|z^{10}-2z|\leq|z^10|+|2z|=1+2=3.$$

D'où

$$|f(z)|>|g(z)|>0,\quad z\in C.$$

Par conséquent, par le théoème de Rouché, le nombre de zéros de $F(z)$ à l'intérieur du disque unité, $D:|z|\leq 1$, est égal au nombre de zéros de $f(z)=-7z^6+1$ en D. En résolvant l'équation $f(z)=0$, on obtient

$$z=7^{-1/6}e^{2k\pi i/6},\quad k=0,1,...,5.$$

Par conséquent, $F(z)$ a six zéros dans D.

6.5 Calcul d'intégrales par la methode des résidus

On utilise le théorème des résidus pour calcule les intégrales réelles.

Exercice 6.5.1.

Calculer les intégrales suivantes par la méthode des résidus :

1.
$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta} = \int_C f(z)dz,$$
tel que : $a > b > 0$, $C : |z| = 1$ *et* $f(z) = \dfrac{2}{i(bz^2 + 2az + b)}$,

réponse : *Seul le pôle* $\alpha = \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ *appartiennent au demi plan supérieur, donc*
$$I_1 = 2\pi i Res(f, \alpha) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

2.
$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos\theta} d\theta = -\frac{1}{2i} \int_C f(z)dz,$$
tel que : $C : |z| = 1$ *et* $f(z) = \dfrac{z^6 + 1}{z^3(2z-1)(z-2)}$,

réponse : *Les pôles qui se trouvent à l'intérieur du plan supérieur sont* $z_1 = 0$ *et* $z_2 = \frac{1}{2}$, *donc*
$$I_2 = -\frac{1}{2i} 2\pi i \left(Res(f, 0) + Res(f, \frac{1}{2}) \right) = \frac{\pi}{12}.$$

3.
$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 2x + 10} dx,$$

réponse : *On calculons*
$$\int_\gamma f(z)e^{iz}dz, \text{ où } f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 10},$$
avec $\gamma = C \cup [-R, R]$, $C_R : |z| = R$, *et* $Im(z) \geq 0$,

puisque le pôle de f *qui se trouve à l'intérieur du* γ *est* $z_1 = 1 + 3i$, *alors*
$$\int_\gamma f(z)e^{iz}dz = 2\pi i Res(f(z)e^{iz}, z_1).$$

D'autre part
$$\int_\gamma f(z)e^{iz}dz = \int_{-R}^{+R} f(x)e^{ix}dx + \int_{C_R} f(z)e^{iz}dz.$$

Si $R \to \infty$
$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)e^{iz}dz = 0,$$

car le pôlynome $z^2+2z+10$ *est de degré* $2 \geq 0+2$. *Donc*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+2x+10} dx = 2\pi i Res(f(z)e^{iz}, z_1) = \frac{\pi}{3e^3}(\cos 1 - i \sin 1),$$

ce qui implique que

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+2x+10} dx = -\frac{\pi \sin 1}{3e^2},$$

4.

$$I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} dx,$$

réponse : *On calculons*

$$\int_\gamma f(z)e^{iz}dz, \ \ où \ f(z) = f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2},$$

avec $\gamma = C \cup [-R, R]$, $C_R : |z| = R$, *et* $Im(z) \geq 0$,

puisque le pôle de f *qui se trouve à l'intérieur du* γ *est* $z_1 = i$, *alors*

$$\int_\gamma f(z)e^{iz}dz = 2\pi i Res(f(z)e^{iz}, z_1).$$

D'autre part

$$\int_\gamma f(z)e^{iz}dz = \int_{-R}^{+R} f(x)e^{ix}dx + \int_{C_R} f(z)e^{iz}dz.$$

Si $R \to \infty$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)e^{iz}dz = 0,$$

car le pôlynome $(1+z^2)^2$ *est de degré* $4 \geq 0+2$. *Donc*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi i Res(f(z)e^{iz}, z_1) = \frac{\pi}{e},$$

ce qui implique que

$$I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{e},$$

5.

$$I_5 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x+e^{2x}} dx, \ \ 0 < Re(a) < 2,$$

réponse : *On calculons*

$$\int_\gamma f(z)dz, \ \ où \ f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z+e^{2z}},$$

avec $\gamma = C \cup [-R, R]$, $C_R : |z| = R$, *et* $Im(z) \geq 0$,

puisque les pôles de f *qui se trouves à l'intérieur du* γ *est* $z_1 = e^{2\pi i/3}$, $z_2 = e^{4\pi i/3}$, *alors*

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)dz &= 2\pi i \Big(Res(f(z), z_1) + Res(f(z), z_2) \Big) \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{3}\sin \pi a} \sin \frac{\pi(1-a)}{3}, \end{aligned}$$

par la même methode, on a

$$I_5 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x+e^{2x}}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\sin\pi a}\sin\frac{\pi(1-a)}{3},$$

6.

$$I_6 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+1)},$$

réponse : *On calculons*

$$\int_\gamma f(z)dz, \;\; où \;\; f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+1)},$$

avec $\gamma = C\cup[-R,R], \;\; C_R : |z| = R,$ *et* $Im(z) \geq 0,$

puisque les pôles de f *qui se trouves à l'intérieur du* γ *est* $z_1 = i$, $z_2 = -1+i$, *par la même methode, on obtient*

$$I_6 = \frac{7\pi}{50},$$

7.

$$I_7 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-4x+5)^2},$$

réponse : *On calculons*

$$\int_\gamma f(z)dz, \;\; où \;\; f(z) = \frac{1}{(z^2-4z+5)^2},$$

avec $\gamma = C\cup[-R,R], \;\; C_R : |z| = R,$ *et* $Im(z) \geq 0,$

puisque les pôles de f *qui se trouves à l'intérieur du* γ *est* $z_1 = 2+i$, *par la même methode, on obtient*

$$I_7 = \frac{\pi}{2}.$$

8.

$$I_8 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1},$$

réponse : *On calculons*

$$\int_\gamma f(z)dz, \;\; où \;\; f(z) = \frac{1}{z^6+1},$$

avec $\gamma = C\cup[-R,R], \;\; C_R : |z| = R,$ *et* $Im(z) \geq 0,$

puisque les pôles de f *qui se trouves à l'intérieur du* γ *est* $z_0 = \frac{3}{2}+\frac{i}{2}\; z_1 = i$, $z_2 = -\frac{3}{2}+\frac{i}{2}$, *par la même methode, on obtient*

$$I_8 = \frac{2\pi}{3}.$$

9.

$$I_9 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx,$$

réponse : *On calculons*

$$\int_\gamma f(z)dz, \;\; où \;\; f(z) = \frac{z^2+1}{z^4+1},$$

avec $\gamma = C \cup [-R, R]$, $C_R : |z| = R$, *et* $Im(z) \geq 0$,

puisque les pôles de f *qui se trouves à l'intérieur du* γ *est* $z_1 = e^{i\pi/4}$ $z_1 = e^{i3\pi/4}$, *par la même methode, on obtient*

$$I_9 = \pi\sqrt{2}.$$

10.

$$I_{10} = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} dx,$$

réponse : *On calculons*

$$\int_\gamma f(z)dz, \;\; où \;\; f(z) = \frac{\ln(z^2+1)}{(z^2+1)},$$

avec $\gamma = C \cup [-R, R]$, $C_R : |z| = R$, *et* $Im(z) \geq 0$,

puisque les pôles de f *qui se trouves à l'intérieur du* γ *est* $z_1 = i$, *par la même methode, on obtient*

$$I_{10} = Re(\pi \ln 2 + \frac{1}{2}\pi^2 i) = \pi \ln 2.$$

Chapitre 7

Annexe

7.1 Sujet 01

Université Amar Teledji - Laghouat

Faculté des Sciences — 2^{eme} Ph

Departement (S.M) — $16/05/2023(1^h.30)$

Examen de F.de V.Complexe

Exercice 01 :

1) Resoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\cos z = -i$$

2) La fonctions suivantes sont-elles holomorphes sur G ? tel que :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{iz} \\ g(z) &= \overline{z}^2. \end{aligned}$$

3) Trouver la fonction holomorphe $f = u + iv$, tel que :

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x^2 - y^2 + 1 \\ f(-i) &= 0 \end{aligned}$$

- Ecrire $f(z)$ en fonction de z.

Exercice 02 :

Calculer les intégrales suivantes :

1)

$$\int_{\gamma}(2z+1)dz$$

$$\begin{aligned} a)\ \gamma &= [AB]\ \ seguement\ \ de\ \ droite\ \ A(1,-1), B(1,1) \\ b)\ \gamma &= \widehat{AB}\ \ demi\ \ cercle. \end{aligned}$$

2)

$$\int_{|z+1+i|=2}\frac{z^3+e^z}{z^2+2iz}dz$$

Solution :

Exercice 01 :

1. On a

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos(x+iy) \\ &= \cos x\cosh y + i\sin x\sinh y. \end{aligned}$$

alors

$$\cos z = -i \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x\cosh y &= 0 \quad ...(1) \\ \sin x\sinh y &= -1...(2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x &= 0 \quad ...(3) \\ \cosh y &= 0 \quad (imposible, \cosh y > 0), \end{cases}$$

d'après la resolution de l'équation (3), on obtient

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}+\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}.$$

Substituez le résultat dans l'équation (2), nous obtenons

$$\begin{aligned}\sin x \sinh y = -1 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin(\frac{\pi}{2} + \pi k)\sinh y = -1, \;\; k \in \mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow \quad (-1)^k \sinh y = -1 \quad ...(4),\end{aligned}$$

il y a deux cas :

* pour k impaire :

$$\begin{aligned}(4) \Leftrightarrow \sinh y = +1 \quad &\Leftrightarrow \quad e^y - e^{-y} = 2\\ &\Leftrightarrow \quad y = \ln \frac{2+\sqrt{8}}{2}.\end{aligned}$$

* pour k paire :

$$\begin{aligned}(4) \Leftrightarrow \sinh y = -1 \quad &\Leftrightarrow \quad e^y - e^{-y} = -2\\ &\Leftrightarrow \quad y = \ln \frac{-2+\sqrt{8}}{2}.\end{aligned}$$

Donc, l'ensemble des solutions

$$S = \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + \pi(2k+1), \ln \frac{2+\sqrt{8}}{2} \right), \left(\frac{\pi}{2} + \pi(2k), \ln \frac{-2+\sqrt{8}}{2} \right), \;\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2. *) Pour la 1er fonction, on a

$$f(z) = \frac{1}{iz} = \underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{u(x,y)} + i \underbrace{\frac{-x}{x^2+y^2}}_{v(x,y)}, \;\; (x,y) \in \mathbb{C}^*.$$

D'abord

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad v_x = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\\ u_y &= \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad v_y = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\end{aligned}$$

les dérivées partielles existent et sont continues sur $\mathbb{C}^*$.

Deuxièmement, les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifient $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$ sur $G = \mathbb{C}^*$.

Alors, la fonction f est dérivable sur $G = \mathbb{C}^*$, de plus, le domaine $G = \mathbb{C}^*$ est un ouvert dans $\mathbb{C}$.

Donc la fonction f est holomorphe sur $G = \mathbb{C}^*$.

*) Pour la 2eme fonction, on a

$$g(z) = \overline{z}^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + i \underbrace{-2xy}_{v(x,y)}, \;\; (x,y) \in \mathbb{C}.$$

D'abord

$$u_x = 2x, \qquad v_x = -2y$$
$$u_y = -2y, \qquad v_y = -2x,$$

les dérivées partielles existent et sont continues sur $\mathbb{C}$.

Deuxièmement, les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifient $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$ sur $G = \{(0,0)\}$.

Alors, la fonction g est dérivable sur G, de plus, le domaine $G = \{(0,0)\}$ est un fermé (point) dans $\mathbb{C}$.

Donc la fonction g n'est pas holomorphe sur $G = \{(0,0)\}$.

3. la fonction $f = u + iv$ est holomorphe donc les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifient

$$u_x = v_y = 2x \qquad ...(1)$$
$$u_y = -v_x = -2y...(2),$$

d'apres la resolution de l'équation (1), on obtient

$$(1) \Leftrightarrow v = \int 2x dy \Leftrightarrow v = 2xy + C(x),$$

Substituez le résultat dans l'équation (2), nous obtenons

$$(2) \Leftrightarrow C'(x) = 0 \Rightarrow C(x) = k(constante),$$

alors

$$v(x,y) = 2xy + k, \ \ k \in \mathbb{C}.$$

Donc

$$\begin{aligned} f(x,y) = u + iv &= (x^2 - y^2 + 1) + i(2xy + k) \\ &= (x^2 - y^2 + 2ixy) + (1 + ik) \\ &= z^2 + (1 + ik), \end{aligned}$$

la condition initial donne

$$f(-i) = 0 \Leftrightarrow -1 + 1 + ik = 0 \Leftrightarrow k = 0.$$

Finalement, on a

$$f(z) = z^2 + 1.$$

Exercice 02 :

1. On calcule l'intégrale
$$\int_{\gamma}(2z+1)dz.$$

 * Pour la 1er courbe $\gamma_1=[AB]$,

 on a
$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= A+t(B-A), \quad t\in[0,1]\\ &= (1-i)+2it,\end{aligned}$$

 la courbe γ_1 est lisse sur $[0,1]$, donc
$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{\gamma_1}(2z+1)dz=\int_0^1(2\gamma_1(t)+1)\gamma_1'(t)dt\\ &= \int_0^1\Big(2[(1-i)+2it]+1\Big)(2i)dt=6i \quad ...(1).\end{aligned}$$

 * Pour la 2eme courbe $\gamma_2=\widehat{AB}$ demi cercle de centre $z_0=1$ et de rayon $r=1$, on a
$$\begin{aligned}\gamma_2(t) &= z_0+re^{it}, \quad t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\\ &= 1+e^{it},\end{aligned}$$

 la courbe γ_2 est lisse sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, donc
$$\begin{aligned}I_2 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2\gamma_2(t)+1)d(\gamma_2(t))=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2\gamma_2(t)+1)\gamma_2'(t)dt\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(2[1+e^{it}]+1\Big)(ie^{it})dt=6i \quad ...(2).\end{aligned}$$

 De (1) et (2), on a $\gamma_1\sim\gamma_2$ sont homotopies par des cotés constantes.

2. On calcule
$$J=\int_{|z+1+i|=2}\frac{z^3+e^z}{z^2+2iz}dz,$$
 il y deux singularités $z_1=0$ et $z_2=-2i$ (des pôles simples).

 * **1er méthode :**(Cauchy).

 On considère $\gamma_1=C(z_1,r_1)$ et $\gamma_2=C(z_2,r_2)$, avec $r_1,r_2>0$
$$\begin{aligned}J &= \int_{\gamma_1}\frac{z^3+e^z}{z(z+2i)}dz+\int_{\gamma_2}\frac{z^3+e^z}{z(z+2i)}dz\\ &= 2i\pi f_1(0)+2i\pi f_2(-2i), \quad \left(f_1(z)=\frac{z^3+e^z}{z+2i},\ f_1(z)=\frac{z^3+e^z}{z}\right)\\ &= 2i\pi(\frac{1}{2i})+2i\pi(\frac{2i+e^{-2i}}{-2i})=\pi(1-8i-e^{-2i}).\end{aligned}$$

* **2eme méthode :**(Résidus).

On calcule les résidus

$$Res(f(z),0) = \lim_{z\to 0} zf(z) = \frac{1}{2},$$
$$Res(f(z),-2i) = \lim_{z\to -2i}(z+2i)f(z) = \frac{8i+e^{-2i}}{-2i}.$$

$$J = 2\pi i\Bigg(Res(f(z),0)+Res(f(z),-2i)\Bigg) = \pi(1-8i-e^{-2i}).$$

Bibliographie

[1] M.Ya. Antimirov, A. A. Kolyshkin, R. Vaillancourt, Complex variables, Riga, Ottawa, Canada (1997).

[2] W. Appel, Mathématiques pour la physique et les physiciens, 4ème Ed., H& K Edition, Paris, (2008).

[3] C. Aslangul, Des mathématiques pour les sciences 1, Concepts, méthodes et techniques pour la modélisation, De Boeck, Bruxelles (2011).

[4] C. Aslangul, Des mathématiques pour les sciences 2, Corrigés détaillés et commentés des exercices et problèmes, De Boeck, Bruxelles (2013).

[5] E. Belorizky, Outils mathématiques à l'usage des scientifiques et des ingénieurs, EDP Sciences, Paris, (2007).

[6] J.W. Brown, R. V. Churchill, Complex variables and applications, mcGraw-Hill Inc, New York, 2014.

[7] A. Lesfari, Variables complexes Cours et exercices corrigés, Ellipses Édition Marketing S.A., (2014).

[8] E. Pap, Complex Analysis through Examples and Exercises, Springer Science+Business Media Dordrecht, (1999).

[9] M.R. Spiegel, Variables complexes, Cours et problèmes, Séries Schaum, Mac Graw Hill, (2000).

[10] P. Tauvel, Analyse complexe :Exercices corrigés, Dunod, Paris, (1999).

[11] P. Tauvel, Analyse complexe pour la licence 3, Dunod, Paris, (2006).

[12] D.G. Zill, P.D. Shanahan, A first course in complex analysis with applications, Jones and Bartlett Publishers Canada, (2003).