

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE
ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



Université Amar Téliidji de Laghouat
Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématiques

Thème

Explosion en temps fini de quelques équations
d'évolutions avec un terme source

Présenté par :

KODIFA Mohamed

Soutenu le : xx/xx/2015.

Devant le jury composé de :

Président :	<i>M^r</i> MOKHTARI Abdelkader	Professeur, Université de Laghouat
Encadreur :	<i>M^{me}</i> ABDESSELAM Nawel	M.A.A, Université de Laghouat
Examineur :	<i>M^r</i> RAHMOUNE Abdelaziz	M.A.A, Université de Laghouat
Examineur :	<i>M^r</i> BOUGOUTAIA Amar	M.A.B, Université de Laghouat

Année universitaire 2014/2015

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu mon Dieu qui m'a donné la santé, la force physique et intellectuelle et le courage pour mener à bien la réalisation de ce travail.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à mon encadreur ABDELESSLAM. N pour avoir proposé ce sujet, ses précieux conseils et leur aides le long de tout mon travail.

Je remercie très chaleureusement les membres de jury qui n'ont pas hésité d'avoir accepté cette tâche.

Enfin, tous mes remerciements à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce modeste travail....

Kodifa mohamed

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

Mes très chers parents

A toute ma famille

A tous mes amis

A tous ceux qui s'intéresse au développement du savoir

Kodifa mohamed

Résumé

Dans ce travail, on a étudié l'explosion en temps fini de quelques équations d'évolutions avec un terme source. On a établi l'existence de ce problème, en suite on a montre le résultat principale de ce mémoire.

Table des matières

Introduction générale	v
1 Rappels	4
1.1 Espace L^p	5
1.2 Espaces de Sobolev	6
1.3 Opérateurs linéaires	8
1.4 Différentiabilité	9
1.5 Fonction localement lipschitzienne	9
1.6 Rappels sur la théorie des semi groupes	10
1.7 Application de la théorie des semi groupe dans les EDP.	11
1.8 Système abstrait	12
2 l'existence de la solution de l'équation des ondes avec un terme source	13
2.1 Forme abstraite	14
2.2 Domaine de A	15
2.3 Propriété de l'opérateur A	16
2.4 propriété de la fonction f	20
2.5 Théorème d'existence	25
3 Explosion en temps fini de l'équations des ondes et chaleur avec un terme source	26
3.1 Explosion en temps fini de l'équation des ondes avec un terme source	27
3.1.1 Conservation de l'énergie	27
3.1.2 Théorème d'explosion	29
3.2 Explosion en temps fini de l'équation de chaleur avec un terme source	32
3.2.1 Décroissance de l'énergie	32
3.2.2 Théorème d'explosion	34
Conclusion générale	37
Bibliographie	38

Introduction générale

L'équation d'évolution (les ondes et chaleurs) est l'une des plus importantes équations aux dérivées partielles.

Elle sert des modèles à la théorie générale des équations hyperboliques et paraboliques, et ses applications en physique théorique sont multiples.

De très nombreux lui ont été consacrés depuis plus de deux siècles encore aujourd'hui elle est l'objet de recherches très active dans ses versions linéaire et non linéaire.

Dans ce mémoire, on s'intéresse aux systèmes suivants :

$$\begin{cases} y_{tt} = \Delta y + |y|^{\gamma-1} y, & t > 0, x \in \Omega. \\ y = 0, & t \geq 0, x \in \partial\Omega. \\ y(x, 0) = y_0(x), & y'(x, 0) = y_1(x) \end{cases} \quad (1)$$

et

$$\begin{cases} y_t = \Delta y + |y|^{\gamma-1} y & x \in \Omega \\ y = 0 & x \in \partial\Omega \\ y(x, 0) = y_0(x) \end{cases} \quad (2)$$

le systèmes (1) pour expliquer l'équations des ondes.

le systèmes (2) pour expliquer l'équations de chaleur.

Où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}^*$) de frontière $\partial\Omega$ assez régulière. $\gamma > 1$,

$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ désigne le Laplacien par rapport aux variables d'espace, t est la va

riable de temps et y_0, y_1 sont des fonctions données.

Dans J.M.Ball, a obtenu un résultat d'explosion en temps fini de la solution de ces systèmes. L'objectif de ce mémoire est de présenter ce résultat.

Dans le premier chapitre on a donne quelques rappels et des outils nécessaires qu'on aura besoin aux chapitres qui suivent (Espace L^p , espaces de Sobolev, théorie des semi groupes, système abstrait, opérateurs linéaires...).

Dans le deuxième chapitre, on a étudié l'existence de la solution de l'équation des ondes, en utilisant le théorème des semi groupes pour établir ce dernier.

Dans le troisième chapitre, on a présente le resultat principal de ce mémoire, Ce dernier à été obtenu par J.M.Ball. en utilisant le théorème de continuation pour les équations différentielles ordinaire, et la méthode multiplicateur pour démontrer la conservation ou décroissance de l'énergie.

Chapitre 1

Rappels

l'objet de ce chapitre est de présenter sous une forme rapidement accessible quelques rappels utiles dans ce mémoire.

1.1 Espace L^p

Définition 1.1. :

1. Si $1 \leq p < \infty$. On appelle $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables f telle que

$$\int_{\Omega} |f|^p dx < \infty$$

2. Si $p = \infty$. On appelle $L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables f telle que

$$\exists C > 0 : |f(x)| \leq C \quad p.p \text{ sur } \Omega.$$

Remarque 1.1. :

l'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p},$$

est un espace de Banach[3]

Corollaire 1.1. [3]

Si $1 \leq p \leq \infty$ alors

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega). \text{ ou } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Avec une injection continue.

Théorème 1.1. (inégalité de Hölder)[1]

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

1.2 Espaces de Sobolev

Définition 1.2. :

Soit $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq \infty$ l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f : f \in L^p(\Omega), D^\alpha f \in L^p(\Omega), \alpha \in \mathbb{N}^N : |\alpha| \leq m\}.$$

Où

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Notation 1.1. :

Pour $p = 2$ on pose

$$H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega) \text{ et } H_0^m(\Omega) := W_0^{m,2}(\Omega)$$

Théorème 1.2. (*Injection de Sobolev Rellich-Kondrachov [1]*)

1. Si $1 \leq p < n$, alors

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*[,$$

$$\text{où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$$

2. Si $p = n$, alors

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty[,$$

3. Si $p > n$, alors

$$W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega}),$$

avec injections compactes.

Ici $C(\bar{\Omega}) = \{v : \Omega \cup \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue}\}$

Corollaire 1.2. [1]

Soit $1 \leq p < \infty$. On a

1. Si $1 \leq p < n$, alors

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega),$$

$$\text{Où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$$

2. Si $p = n$, alors

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [p, +\infty[,$$

3. Si $p > n$, alors

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega),$$

avec injections continues.

Théorème 1.3. (Formule de Green pour le Laplacien)[1][10]

Pour tout $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$ on a la formule de Green donnée par

$$\int_{\Omega} \Delta uv \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v \, d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx.$$

Où $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_i$ est la dérivée normale et η est le vecteur unitaire normale à

$\partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur de Ω .

Proposition 1.1. (Inégalité de Poincaré) [1]

Il existe une constante $C > 0$, qui dépend de Ω , telle que pour toute fonction f de l'espace de Sobolev H_0^1 , on a

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Remarque 1.2. :[1]

L'expression $\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ qui est équivalente à la norme $\|f\|_{H^1(\Omega)}$ sur $H_0^1(\Omega)$.

L'expression $\langle f, g \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \langle \nabla f, \nabla g \rangle_{L^2(\Omega)}$ est un produit scalaire sur $H_0^1(\Omega)$ qui induit la norme $\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}$.

1.3 Opérateurs linéaires

Soient E et F deux espaces normés.

Définition 1.3. :

L'application

$$\begin{aligned} u : E &\longrightarrow F \\ x &\longrightarrow y = u(x) \end{aligned}$$

s'appelle opérateur linéaire (ou plus simplement un opérateur) si elle vérifie :

$$\forall x_1, x_2 \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad u(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha u(x_1) + \beta u(x_2).$$

D_u désigne le domaine de définition de l'opérateur u .

Par la suite, on va s'occuper aux opérateurs dit bornés.

Définition 1.4. :

Un opérateur u est borné, si il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\|u(x)\|_F \leq M\|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

Définition 1.5. :

Un opérateur u est continu en $x_0 \in E$, si :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \|x - x_0\|_E < \delta \quad \Rightarrow \quad \|u(x) - u(x_0)\|_F < \epsilon.$$

Théorème 1.4. :

L'opérateur u est continu si et seulement si il est borné.

Pour plus de détails voir [7].

Définition 1.6. [7]

Soient E et F deux espaces de Banach, u un opérateur linéaire borné, on appelle opérateur adjoint de u et on le note par u^* l'application :

$$u^* : F^* \longrightarrow E^*$$

qui vérifie :

$$\forall x \in E, \quad \forall y^* \in F^* : \quad \langle u(x), y^* \rangle = \langle x, u^*(y^*) \rangle.$$

Théorème 1.5. [7]

Si u est un opérateur borné, donc u^ l'est aussi et on a :*

$$\|u\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|u^*\|_{\mathcal{L}(F^*,E^*)}$$

1.4 Différentiabilité

Définition 1.7. [6] :

Soit $U \subset E$ un ouvert non vide, et soit $f : U \rightarrow F$. On dit que la fonction f est différentiable en $a \in U$ si et seulement s'il existe une application linéaire et continue $L \in L(E; F)$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - L(x - a)\|_F}{\|x - a\|_E} = 0$$

On peut aussi écrire, en posant $x - a = h$

$$\lim_{h \rightarrow 0_E} \frac{\|f(a + h) - L(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0$$

et $h \neq 0_E$

1.5 Fonction localement lipschitzienne

Définition 1.8. :

On fixe une norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^n . Une fonction f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ est dite lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable si il existe $C > 0$ tel que pour tout (t, x) et tout (t, y) de U , on a :

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq C \|x - y\|.$$

Une fonction f définie sur U est dite localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable si pour tout (t_0, x_0) de U , il existe a, b et C positifs tels que

$$Q = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B(x_0, b)} \subset U$$

et pour tout (t, x) et tout (t, y) de Q , on a :

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq C \|x - y\|.$$

Il est clair que si la fonction f est de classe C^1 , elle est localement lipschitzienne, de même si f est continue et $x \rightarrow f(t, x)$ est linéaire, f est localement lipschitzienne.

1.6 Rappels sur la théorie des semi groupes

On désigne par $L(X)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach X .

soit $(S(t))_{t \geq 0}$ une famille d'opérateurs de $L(X)$.

Définition 1.9. [5]

$(S(t))_{t \geq 0}$ est appelée un C_0 -semi groupe sur X si elle vérifie

1. $S(0) = I$ (I : représente l'identité sur X)
2. $S(t+s) = S(t)S(s)$ pour tout $t, s \geq 0$.
3. $\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)x = x$ pour tout $x \in X$

Définition 1.10. :

Le générateur infinitésimal A du C_0 -semi groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ sur X est opérateur fermé de domaine dense $D(A)$ défini par

$$D(A) = \left\{ x \in X / \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}.$$

De plus

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ pour tout } x \in D(A).$$

Corollaire 1.3. [3]

Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine dense $D(A)$ dans un espace Hilbert X . A est le générateur infinitésimale d'un C_0 -semi groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ sur H s'il existe $w > 0$ tel que

$$\operatorname{Re} \langle Ay, y \rangle_X \leq w \|y\|_X^2, \forall y \in D(A),$$

et

$$\operatorname{Re} \langle A^*y, y \rangle_X \leq w \|y\|_X^2, \forall y \in D(A^*)$$

1.7 Application de la théorie des semi groupe dans les EDP.

Problème 1.1. Problème de Cauchy.

Soient X un espace de Hilbert et $T > 0$.

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} \text{Trouve } y \text{ tel que} \\ y_t = Ay + f, & t \in (0, T) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Où A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ sur X .
Posons

$$y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)f(s) ds. \quad (1.2)$$

Définition 1.11. :

- (i) Une solution forte de (1.1) est une fonction $y \in C(0, T; D(A)) \cap C^1(0, T; X)$ qui vérifie (1.1).
- (ii) Une solution faible de (1.1) est une fonction $y \in C(0, T; X)$ qui vérifie

$$(\psi, y(t)) = (\psi, y_0) + \int_0^t [(A^*\psi, y(s)) + (\psi, f(s))]$$

$\forall \psi \in D(A^*)$ Il est intéressant de savoir quand y donné par (1.2) défini une solution forte ou faible pour (1.1). [3][5]

Théorème 1.6. :

- (i) Si $f \in W^{1,1}(0, T; X)$ et $y_0 \in D(A)$ alors (1.2) représente la solution forte de (1.1).
- (ii) Si $f \in L^1(0, T; X)$ et $y_n \in X$ alors (1.2) représente la solution faible de (1.1).

1.8 Système abstrait

Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine dense $D(A)$ dans un espace Hilbert X et $T > 0$.

Considérons le problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = f(u), \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Définition 1.12. (Solution forte)

Une solution forte de (1.3) est une fonction

$$u \in C([0, T[; D(A)) \cap C^1([0, T[; X), \text{ qui vérifie (1.3).}$$

Définition 1.13. (Solution faible)

Une solution faible de (1.3) est une fonction $u \in C([0, T[; X)$, qui vérifie, pour tout $v \in D(A^*)$:

$$\langle v, u(t) \rangle_X = \langle v, u(0) \rangle_X + \int_0^t [\langle A^*v, u(s) \rangle_X + \langle v, f(u(s)) \rangle_X] ds.$$

Théorème 1.7. (Existence de solution forte et faible) [1]

Si A est un générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ sur X .
Si $f : X \rightarrow X$ est une fonction localement Lipschitzienne, c'est à dire pour chaque sous ensemble borné B de X , il existe une constante $C_B > 0$ telle que

$$\|f(u) - f(v)\|_X \leq C_B \|u - v\|_X \text{ pour tout } u, v \in B.$$

1. Si $u_0 \in X$ alors il existe une solution faible $u \in C([0, T[; X)$ du système (1.3).
2. Si, en plus, f est différentiable alors $u_0 \in D(A)$ il existe une solution forte

$$u \in C([0, T[; D(A)) \cap C^1([0, T[; X) \text{ du système (1.3).}$$

Chapitre 2

l'existence de la solution de l'équation
des ondes avec un terme source

Considérons le système

$$\begin{cases} y_{tt} = \Delta y + |y|^{\gamma-1} y & x \in \Omega \\ y = 0 & x \in \partial\Omega \\ y(x, 0) = y_0(x), y'(x, 0) = y_1(x) \end{cases} \quad (2.1)$$

Dans cette partie, on va appliquer le théorème(1.7) pour étudier l'existence et la régularité de la solution du système (2.1).

2.1 Forme abstraite

Lemme 2.1. :

le problème (2.1) s'écrit sous la forme

$$\frac{dU}{dt} = AU + f(U),$$

tel que

$$U = \begin{pmatrix} u \\ \frac{du}{dt} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ |u|^{\gamma-1} u \end{pmatrix}.$$

Preuve 2.1. :

On

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ \frac{du}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{d^2u}{dt^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \Delta u + |u|^{\gamma-1} u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \frac{du}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ |u|^{\gamma-1} u \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

alors le problème (2.1) s'écrit sous la forme

$$\frac{dU}{dt} = AU + f(U).$$

2.2 Domaine de A

Lemme 2.2. :

Soit $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$

Le domaine de A est donne par

$$D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$$

Preuve 2.2. :

On a

$$\begin{aligned} D(A) &= \{(f, g) \in X / A(f, g) \in X\} \\ &= \left\{ (f, g) \in X / \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in X \right\}, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{ (f, g) \in X / \begin{pmatrix} g \\ \Delta f \end{pmatrix} \in X \right\}, \\ &= \left\{ (f, g) / (f, g) \in X \wedge \begin{pmatrix} g \\ \Delta f \end{pmatrix} \in X \right\} \\ &= \{(f, g) / f \in H_0^1(\Omega), \Delta f \in L^2(\Omega), g \in L^2(\Omega), g \in H_0^1(\Omega)\} \\ &= \{(f, g) / f \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \wedge g \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\} \end{aligned}$$

donc

$$D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

Remarque 2.1. :

$D(A)$ est dense dans X . c'est à dire

$$\overline{D(A)} = X$$

2.3 Propriété de l'opérateur A

Lemme 2.3. :

A est un générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ sur X .

Preuve 2.3. :

Pour la démonstration on utilise le corollaire 1.3.

1. On détermine l'adjoint de A :

Soient $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in D(A)$, $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in D(A)$, on a

$$\left\langle A \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle_X = \left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, A^* \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle_X$$

Mais

$$\begin{aligned} \left\langle A \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle_X &= \left\langle \begin{pmatrix} g \\ \Delta f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle_X \\ &= \langle g, h \rangle_{H_0^1(\Omega)} + \langle \Delta f, k \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_{\Omega} \nabla g \nabla h \, dx + \int_{\Omega} (\Delta f) k \, dx. \end{aligned}$$

Si on applique la formule de Green on trouve

$$\left\langle A \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle_X = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial h}{\partial \eta} g \, d\sigma - \int_{\Omega} g \Delta h \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \eta} k \, d\sigma - \int_{\Omega} \nabla f \nabla k \, dx.$$

Puisque $g, h \in H_0^1(\Omega)$ alors $g = h = 0$ sur $\partial\Omega$. Ceci implique

$$\begin{aligned} \left\langle A \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle_X &= - \left[\int_{\Omega} g \Delta h \, dx + \int_{\Omega} \nabla f \nabla k \, dx \right] \\ &= - \left[\langle g, \Delta h \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle f, k \rangle_{H_0^1(\Omega)} \right] \\ &= - \left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ \Delta h \end{pmatrix} \right\rangle_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \\ &= - \left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle_X \end{aligned}$$

Alors

$$\left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, A^* \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle_X = - \left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle_X,$$

on déduit que

$$A^* \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = -A \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

D'où

$$A^* = -A \text{ et } D(A) = D(A^*).$$

Ceci implique que A est fermé.

2. Soit $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in D(A)$ alors

$$\begin{aligned} \left\langle A \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\rangle_X &= \left\langle \begin{pmatrix} g \\ \Delta f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\rangle_X \\ &= \langle g, f \rangle_{H_0^1(\Omega)} + \langle \Delta f, g \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_{\Omega} \nabla f \nabla g \, dx + \int_{\Omega} \Delta f g \, dx, \end{aligned}$$

on applique la formule de Green, on trouve

$$\begin{aligned} \left\langle A \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\rangle_X &= \int_{\Omega} \nabla f \nabla g \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \eta} g \, d\sigma - \int_{\Omega} \nabla f \nabla g \, dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \eta} g \, d\sigma, \end{aligned}$$

mais $g \in H_0^1(\Omega)$ alors $g = 0$ sur $\partial\Omega$, donc

$$\left\langle A \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\rangle_X = 0 \leq \omega \left\| \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|_X^2,$$

avec $\omega = 1$ par exemple.

3. soit $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in D(A^*) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ alors

$$\begin{aligned} \left\langle A^* \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\rangle_X &= \left\langle (-A) \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\rangle_X \\ &= 0 \leq \omega \left\| \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|_X^2, \end{aligned}$$

avec $\omega = 1$ par exemple.

2.4 propriété de la fonction f

Lemme 2.4. :

Si on suppose que

$$\gamma > 1 \text{ si } n = 1, 2; \text{ et } 1 < \gamma \leq \frac{n}{n-2} \text{ si } n \geq 3, \quad (2.2)$$

alors $f : X \rightarrow X$ est localement Lipschitzienne.

Preuve 2.4. :

1. On montre que

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in X \implies f \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in X.$$

On a $f \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ |y|^{\gamma-1} y \end{pmatrix}$, alors pour montrer que $f \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in X$, on montre que $|y|^{\gamma-1} y \in L^2(\Omega)$ avec $y \in H_0^1(\Omega)$.

on a

$$\int_{\Omega} (|y|^{\gamma-1} y)^2 dx = \int_{\Omega} |y|^{2\gamma} dx,$$

alors

$$|y|^{\gamma-1} y \in L^2(\Omega) \iff y \in L^{2\gamma}(\Omega).$$

D'ou, il suffit de montrer que $y \in L^{2\gamma}(\Omega)$.

Cas 1 : $n = 1$

On a $p = 2 > 1 = n$ c'est à dire $p > n$ alors d'après le théorème (1.2), on trouve

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) \subset C(\Omega),$$

donc

$$y \in H_0^1(\Omega) \implies y \in H^1(\Omega) \implies y \in C(\Omega) \implies y \in L^{2\gamma}(\Omega)$$

car $C(\bar{\Omega}) \subset L^{2\gamma}(\Omega)$.

Cas 2 : $n = 2$

Pour $n=2$ on a $p = n$. D'après le théorème (1.2), on trouve

$$H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty[.$$

Maintenant, on vérifie que $q = 2\gamma \in [1, +\infty[$.

On a $\gamma > 1$ alors $2\gamma > 2$ donc $q = 2\gamma \in [1, +\infty[$. Ce qui implique

$$H^1(\Omega) \subset L^{2\gamma}(\Omega).$$

Donc

$$y \in H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^{2\gamma}(\Omega) \text{ alors } y \in L^{2\gamma}(\Omega).$$

Cas 3 : $n \geq 3$

i) $1 < \gamma < \frac{n}{n-2}$.

On a $n > 3$ alors $n > 2 = p$, c'est à dire $n > p$, alors d'après le théorème (1.2), on trouve

$$H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*[,$$

où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.

On a $p = 2$ alors $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{n-2}{2n}$, donc $p^* = \frac{2n}{n-2}$ alors

$$H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in \left[1, \frac{2n}{n-2}\right[.$$

Montrons que $q = 2\gamma \in [1, \frac{2n}{n-2}[$.

D'une part, on a $\gamma > 1$ alors $2\gamma > 2 > 1$ c'est à dire $2\gamma > 1$.

D'autre part, on a $\gamma < \frac{n}{n-2}$. alors $2\gamma < \frac{2n}{n-2}$.

Ce qui implique que $1 < q = 2\gamma < \frac{2n}{n-2}$, ainsi $H^1(\Omega) \subset L^{2\gamma}(\Omega)$, alors

$$y \in H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^{2\gamma}(\Omega)$$

Donc

$$y \in L^{2\gamma}(\Omega).$$

ii) $\gamma = \frac{n}{n-2}$.

On a $2\gamma = \frac{2n}{n-2} = p^* = 2^*$, d'après le corollaire (1.2), on trouve $H_0^1(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega)$, c'est à dire

$$H_0^1(\Omega) \subset L^{2\gamma}(\Omega).$$

2. On montre que f est localement Lipschitzienne ?

Montrons que pour chaque sous-ensemble borné B de X , il existe $C_B > 0$ tel que

$$\|f(U) - f(V)\|_X \leq C_B \|U - V\|_X, \quad \forall U, V \in B.$$

On a

$$\|f(U) - f(V)\|_X^2 = \left\| |y_1|^{\gamma-1} y_1 - |y_2|^{\gamma-1} y_2 \right\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$\text{où } U = \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in X.$$

C'est à dire

$$\|f(U) - f(V)\|_X^2 = \int_{\Omega} (|y_1|^{\gamma-1} y_1 - |y_2|^{\gamma-1} y_2)^2 dx.$$

soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(s) = |s|^{\gamma-1} s, \quad \gamma > 1,$$

On a g est différentiable sur \mathbb{R} et $g'(s) = \gamma |s|^{\gamma-1}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Alors

$$\begin{aligned} g(y_1) - g(y_2) &= g'(\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2)(y_1 - y_2), \quad \alpha \in]0, 1[\\ &= \gamma |\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2|^{\gamma-1} (y_1 - y_2). \end{aligned}$$

Donc

$$|g(y_1) - g(y_2)|^2 = \gamma^2 |\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2|^{2(\gamma-1)} |(y_1 - y_2)|^2.$$

Donc

$$\|f(U) - f(V)\|_X^2 = \gamma^2 \int_{\Omega} |\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2|^{2(\gamma-1)} |(y_1 - y_2)|^2 dx.$$

i) Pour $n \geq 3$ on a d'après le corollaire (1.2)

$$H_0^1(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega).$$

où

$$\frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{n-2}{2n}.$$

Soient $(y_1, y_2) \in H_0^1(\Omega)$, alors $(y_1, y_2) \in L^{2^*}(\Omega)$. Donc

$$(y_1, y_2) \in L^{\frac{n-2}{2n}}(\Omega).$$

On applique l'inégalité de Hölder sur $p = \frac{n}{n-2}$ et $q = \frac{n}{2}$ on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2|^{2(\gamma-1)} |(y_1 - y_2)|^2 \, dx &\leq \left[\int_{\Omega} (|(y_1 - y_2)|^2)^{\frac{n}{n-2}} \, dx \right]^{\frac{n-2}{n}} \\ &\quad \left[\int_{\Omega} (|\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2|^{2(\gamma-1)})^{\frac{n}{2}} \, dx \right]^{\frac{2}{n}} \\ &= \|y_1 - y_2\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}^2 \|\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2\|_{L^{(\gamma-1)n}(\Omega)}^{2(\gamma-1)}, \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\int_{\Omega} |\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2|^{2(\gamma-1)} |(y_1 - y_2)|^2 \, dx \leq C \|y_1 - y_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \|\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2\|_{L^{(\gamma-1)n}(\Omega)}^{2(\gamma-1)}. \quad (2.3)$$

Mais

$$\forall a, b \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \exists C > 0. \|\alpha a + \beta b\|_X \leq C (\|a\|_X + \|b\|_X),$$

alors

$$\|\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2\|_{L^{(\gamma-1)n}(\Omega)}^{2(\gamma-1)} \leq C \left(\|y_1\|_{L^{(\gamma-1)n}(\Omega)} + \|y_2\|_{L^{(\gamma-1)n}(\Omega)} \right)^{2(\gamma-1)}.$$

Dans tout ce qui suit, C est une constante positive.

D'après l'inégalité algébrique

$$\forall A, B \geq 0, \forall p \geq 0, (A, B)^p \leq \max(1, 2^{p-1})(A^p + B^p),$$

on trouve

$$\|\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2\|_{L^{(\gamma-1)n}(\Omega)}^{2(\gamma-1)} \leq C \left(\|y_1\|_{L^{(\gamma-1)n}(\Omega)} + \|y_2\|_{L^{(\gamma-1)n}(\Omega)} \right)^{2(\gamma-1)}.$$

D'autre part, $\gamma < \frac{n}{n-2}$ alors $(\gamma - 1)n < \frac{2n}{n-2}$, d'après le corollaire (1.1) et (1.2) on a

$$H^1(\Omega) \subset L^{(\gamma-1)n}(\Omega),$$

avec une injection continue.

Mais $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ avec une injection continue alors $H_0^1(\Omega) \subset L^{(\gamma-1)n}(\Omega)$ avec une injection continue, alors

$$\|y\|_{L^{(\gamma-1)n}(\Omega)} \leq C \|y\|_{H_0^1(\Omega)}, C \geq 0.$$

Donc

$$\|\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2\|_{L^{(\gamma-1)n}(\Omega)}^{2(\gamma-1)} \leq C \left(\|y_1\|_{H_0^1(\Omega)}^{2(\gamma-1)} + \|y_2\|_{H_0^1(\Omega)}^{2(\gamma-1)} \right).$$

De (2.3) on trouve

$$\begin{aligned} \|f(U) - f(V)\|_X^2 &\leq C \left(\|y_1\|_{H_0^1(\Omega)}^{2(\gamma-1)} + \|y_2\|_{H_0^1(\Omega)}^{2(\gamma-1)} \right) \|y_1 - y_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &\leq \sqrt{C_B} \|y_1 - y_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \sqrt{C_B} \|U - V\|_X^2, \end{aligned}$$

pour tout $U, V \in B$.

ii) De même pour $n = 1, 2$.

2.5 Théorème d'existence

D'après ce qu'on a montré, on obtient le résultat suivant :

Théorème 2.1. [1]

1. Si $\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ alors le système (2.1) admet une solution faible y telle que

$$\begin{pmatrix} y \\ y_t \end{pmatrix} \in C([0, T[; H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$$

2. Si $\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times L^2(\Omega)$ alors le système (2.1) admet une solution forte y telle que

$$\begin{pmatrix} y \\ y_t \end{pmatrix} \in C([0, T[; (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T[; H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))).$$

Chapitre 3

Explosion en temps fini de l'équations
des ondes et chaleur avec un terme
source

3.1 Explosion en temps fini de l'équation des ondes avec un terme source

3.1.1 Conservation de l'énergie

Dans cette partie, on utilise la méthode du multiplicateur pour montrer que l'énergie de la solution du système (2.1) définie par :

$$E(y, y_t) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |y_t|^2 + \frac{1}{2} |\nabla y|^2 - \frac{1}{\gamma + 1} |y|^{\gamma+1} \right] dx,$$

est conservative.

Lemme 3.1. :

Pour tout $t > 0$, on a

$$E(y, y_t) = E_0,$$

avec

$$E_0 = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |y_1|^2 + \frac{1}{2} |\nabla y_0|^2 - \frac{1}{\gamma + 1} |y_0|^{\gamma+1} \right] dx,$$

Preuve 3.1. :

Il suffit de montrer que $\frac{dE}{dt} = 0$.

On multiplie la première équation du (2.1) par y_t on trouve

$$y_{tt}y_t = \Delta y y_t + |y|^{\gamma-1} y y_t,$$

et on intègre sur Ω pour obtenir

$$\int_{\Omega} y_{tt}y_t dx = \int_{\Omega} \Delta y y_t dx + \int_{\Omega} |y|^{\gamma-1} y y_t dx. \quad (3.1)$$

et on applique la formule de Green, on trouve

$$\int_{\Omega} \Delta y y_t dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial y}{\partial \eta} y_t d\sigma - \int_{\Omega} \nabla y \nabla y_t dx,$$

et comme $y = 0$ alors $y_t = 0$, donc

$$\int_{\Omega} \Delta y y_t dx = - \int_{\Omega} \nabla y \nabla y_t dx,$$

Maintenant, on remplace dans (3.1), on trouve

$$\int_{\Omega} y_{tt}y_t dx = - \int_{\Omega} \nabla y \nabla y_t dx + \int_{\Omega} |y|^{\gamma-1} y y_t dx,$$

c'est à dire

$$\int_{\Omega} y_{tt} y_t \, dx + \int_{\Omega} \nabla y \nabla y_t \, dx - \int_{\Omega} |y|^{\gamma-1} y y_t \, dx = 0. \quad (3.2)$$

Mais

$$E(y, y_t) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |y_t|^2 + \frac{1}{2} |\nabla y|^2 - \frac{1}{\gamma+1} |y|^{\gamma+1} \right] \, dx,$$

Si on dérive par rapport à t on trouve

$$\frac{d}{dt} E(y, y_t) = \int_{\Omega} \left[y_{tt} y_t + \nabla y_t \nabla y - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\gamma+1} |y|^{\gamma+1} \right) \right] \, dx,$$

Considérons la fonction

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } g(s) = |s|^{\gamma+1},$$

On a g est différentiable sur \mathbb{R} et $g'(s) = (\gamma+1) |s|^{\gamma-1} s$, alors

$$\frac{d}{dt} E(y, y_t) = \int_{\Omega} y_{tt} y_t \, dx + \int_{\Omega} \nabla y_t \nabla y_t \, dx - \int_{\Omega} |y|^{\gamma-1} y y_t \, dx,$$

Donc, de (3.2), on trouve $\frac{d}{dt} E(y, y_t) = 0$.

3.1.2 Théorème d'explosion

On énonce maintenant le résultat principale de ce méméore.

Théorème 3.1. [1]

Si γ satisfait (2.2), et si $E_0 < 0$, ou bein $E_0 = 0$ et $(y_0, y_1) > 0$, alors il existe $t^ > 0$ telque*

$$\lim_{t \rightarrow t^*} \|y(t)\|_{L^{\gamma+1}(\Omega)} = \lim_{t \rightarrow t^*} [\|\nabla y(t)\|_{L^2\Omega}^2 + \|y_t(t)\|_{L^2\Omega}^2]^{\frac{1}{2}} = +\infty.$$

Preuve 3.2. :

Considérons la fonction F définie comme suit

$$F(t) = \|y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

On a

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{d}{dt} \left(\|y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} |yy| \, dx \right) \\ &= \int_{\Omega} (y_t y + y y_t) \, dx = 2 \int_{\Omega} y_t y \, dx. \end{aligned}$$

Donc

$$F'(t) = 2 \langle y, y_t \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

On a aussi

$$\begin{aligned} F''(t) &= \frac{d}{dt} \left(2 \langle y, y_t \rangle_{L^2(\Omega)} \right) \\ &= 2 \int_{\Omega} (y_{tt} y + y_t y_t) \, dx, \end{aligned}$$

alors

$$F''(t) = 2 \int_{\Omega} (|y_t|^2 + y_{tt} y) \, dx.$$

On remplace y_{tt} par sa valeur, on trouve

$$F''(t) = 2 \int_{\Omega} (|y_t|^2 + y \Delta y + |y|^{\gamma+1}) \, dx.$$

Si on applique la formule de Green et comme $y = 0$ sur $\partial\Omega$ on trouve

$$F''(t) = 2 \int_{\Omega} (|y_t|^2 - \nabla y \nabla y + |y|^{\gamma+1}) \, dx.$$

Puisque E est conservative alors on a

$$\begin{aligned}
 F''(t) - \frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1} \int_{\Omega} |y|^{\gamma+1} dx + 4E_0 &= F''(t) - \frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1} \int_{\Omega} |y|^{\gamma+1} dx + 4E(y, y_t) \\
 &= 2 \int_{\Omega} (|y_t|^2 - |\nabla y|^2 + |y|^{\gamma+1}) dx \\
 &\quad - \frac{2(\gamma+1)}{\gamma+1} \int_{\Omega} |y|^{\gamma+1} dx + 2 \int_{\Omega} [|y_t|^2 + |\nabla y|^2] dx \\
 &\quad - \frac{4}{\gamma+1} \int_{\Omega} |y|^{\gamma+1} dx \\
 &= 4 \int_{\Omega} |y_t|^2 dx \geq 0,
 \end{aligned}$$

donc

$$F''(t) \geq \frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1} \int_{\Omega} |y|^{\gamma+1} dx - 4E_0$$

De plus, on a

$$\gamma > 1 \implies \gamma + 1 > 2$$

$\implies L^{\gamma+1}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ avec injection continue

$$\implies \|y\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|y\|_{L^{\gamma+1}(\Omega)}, \forall y \in L^{\gamma+1}(\Omega)$$

Alors

$$\left(\int_{\Omega} |y|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\int_{\Omega} |y|^{\gamma+1} dx \right)^{\frac{1}{\gamma+1}} \implies \left(\int_{\Omega} |y|^2 dx \right)^{\frac{\gamma+1}{2}} \leq C \int_{\Omega} |y|^{\gamma+1} dx,$$

donc

$$F''(t) \geq \frac{2(\gamma+1)}{\gamma+1} \int_{\Omega} |y|^{\gamma+1} dx - 4E_0 \geq kF^{\frac{\gamma+1}{2}} - 4E_0 \tag{3.3}$$

Où $k > 0$.

Si $E_0 < 0$ alors, de (3.3), on trouve $F'(t) > 0$ (alors F est croissant), alors peut montrer qu'on

peut toujours prendre $(y_0, y_1) > 0$.

Comme $F'' \geq 0$, on obtient que F' est croissante.

Ce qui implique que F et F' sont positive.

D'ou

$$\frac{1}{2}F'^2(t) \geq \frac{2k}{\gamma+3}F^{\frac{\gamma+3}{2}}(t) + C.$$

Ceci implique que

$$F'(t) \geq \sqrt{\frac{4k}{\gamma+3}} F^{\frac{\gamma+3}{4}}(t),$$

On intègre sur $[0, t]$ on trouve

$$\int_0^t -F^{-\frac{\gamma+1}{4}}(s) \cdot F'(s) ds \leq -\sqrt{\frac{4k}{\gamma+3}} t,$$

ce qui implique

$$-\frac{1}{-\frac{3+\gamma}{4}+1} \left(F^{-\frac{\gamma+3}{4}+1}(t) - F^{-\frac{\gamma+3}{4}+1}(0) \right) \leq -\sqrt{\frac{4k}{\gamma+3}} t,$$

mais $\gamma > 1$ alors

$$-\frac{1}{-\frac{3+\gamma}{4}+1} = \frac{4}{\gamma-1} > 0$$

Alors

$$\begin{aligned} F^{\frac{1-\gamma}{4}}(t) - F^{\frac{1-\gamma}{4}}(0) &\leq -\sqrt{\frac{4k}{\gamma+3}} \times \frac{\gamma-1}{4} t \\ \implies F^{\frac{1-\gamma}{4}}(t) &\leq F^{\frac{1-\gamma}{4}}(0) - \frac{\gamma-1}{4} \sqrt{\frac{4k}{\gamma+3}} t \\ \implies F^{\frac{1-\gamma}{4}}(t) &\geq \frac{1}{F^{\frac{1-\gamma}{4}}(0) - \frac{\gamma-1}{4} \sqrt{\frac{4k}{\gamma+3}} t}, \end{aligned}$$

ceci implique que F explose en t^* telle que

$$t^* = \frac{4\sqrt{\gamma+3} F^{\frac{1-\gamma}{4}}(0)}{(\gamma-1)\sqrt{4k}},$$

D'après la proposition (1.1) on a

$$\|y(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla y(t)\|_{L^2(\Omega)},$$

alors

$$\|y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\|\nabla y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|y_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right),$$

ce qui implique

$$\lim_{t \rightarrow t^*} \left[\left(\|\nabla y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|y_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} = +\infty$$

D'autre part, on a

$$\|y(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|y(t)\|_{L^{\gamma+1}(\Omega)},$$

alors

$$\lim_{t \rightarrow t^*} \|y(t)\|_{L^{\gamma+1}(\Omega)} = +\infty,$$

3.2 Explosion en temps fini de l'équation de chaleur avec un terme source

3.2.1 Décroissance de l'énergie

Dans cette partie, on utilise la méthode du multiplicateur pour montrer que l'énergie de la solution du système (2) définie par :

$$E(y) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla y|^2 - \frac{1}{\gamma + 1} |y|^{\gamma+1} \right] dx,$$

est décroissante.

Lemme 3.2. :

Pour tout $t > 0$, on a

$$E(y) \leq E_0,$$

avec

$$E_0 = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla y_0|^2 - \frac{1}{\gamma + 1} |y_0|^{\gamma+1} \right] dx,$$

Preuve 3.3. :

Il suffit de montrer que $\frac{dE}{dt} \leq 0$.

On multiplie la première équation du (2) par y_t on trouve

$$y_t y_t = \Delta y y_t + |y|^{\gamma-1} y y_t,$$

et on intègre sur Ω pour obtenir

$$\int_{\Omega} y_t^2 dx = \int_{\Omega} \Delta y y_t dx + \int_{\Omega} |y|^{\gamma-1} y y_t dx. \quad (3.4)$$

et on applique la formule de Green, on trouve

$$\int_{\Omega} \Delta y y_t dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial y}{\partial \eta} y_t d\sigma - \int_{\Omega} \nabla y \nabla y_t dx,$$

et comme $y = 0$ alors $y_t = 0$, donc

$$\int_{\Omega} \Delta y y_t dx = - \int_{\Omega} \nabla y \nabla y_t dx,$$

Maintenant, on remplace dans (3.4), on trouve

$$\int_{\Omega} y_t^2 dx = - \int_{\Omega} \nabla y \nabla y_t dx + \int_{\Omega} |y|^{\gamma-1} y y_t dx,$$

c'est à dire

$$\int_{\Omega} y_t^2 \, dx + \int_{\Omega} \nabla y \nabla y_t \, dx - \int_{\Omega} |y|^{\gamma-1} y y_t \, dx = 0. \quad (3.5)$$

Mais

$$E(y) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla y|^2 - \frac{1}{\gamma+1} |y|^{\gamma+1} \right] \, dx,$$

Si on dérive par rapport à t on trouve

$$\frac{d}{dt} E(y) = \int_{\Omega} \left[\nabla y_t \nabla y - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\gamma+1} |y|^{\gamma+1} \right) \right] \, dx,$$

Considérons la fonction

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } g(s) = |s|^{\gamma+1},$$

On a g est différentiable sur \mathbb{R} et $g'(s) = (\gamma+1) |s|^{\gamma-1} s$, alors

$$\frac{d}{dt} E(y) = \int_{\Omega} \nabla y \nabla y_t \, dx - \int_{\Omega} |y|^{\gamma-1} y y_t \, dx,$$

Donc, de (3.5), on trouve

$$\frac{d}{dt} E(y, y_t) = - \int_{\Omega} y_t^2 \, dx \leq 0$$

.

3.2.2 Théorème d'explosion

On énonce maintenant le résultat principal de ce méméore.

Théorème 3.2. [1]

Si γ satisfait (2.2), et si $E_0 < 0$, ou bien $E_0 = 0$ et $(y_0, y_1) > 0$, alors il existe $t^ > 0$ telque*

$$\lim_{t \rightarrow t^*} \|y(t)\|_{L^{\gamma+1}(\Omega)} = \lim_{t \rightarrow t^*} [\|\nabla y(t)\|_{L^2\Omega}^2]^{\frac{1}{2}} = +\infty.$$

Preuve 3.4. :

Considérons la fonction F définie comme suit

$$F(t) = \|y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

On a

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{d}{dt} \left(\|y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} |yy| \, dx \right) \\ &= \int_{\Omega} (y_t y + y y_t) \, dx = 2 \int_{\Omega} y_t y \, dx. \end{aligned}$$

Donc

$$F'(t) = 2 \langle y, y_t \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

On remplace y_t par sa valeur, on trouve

$$F'(t) = 2 \int_{\Omega} (|y_t|^2 + y \Delta y + |y|^{\gamma+1}) \, dx.$$

Si on applique la formule de Green et comme $y = 0$ sur $\partial\Omega$ on trouve

$$\begin{aligned} F'(t) &= 2 \int_{\Omega} (-\nabla y \nabla y + |y|^{\gamma+1}) \, dx. \\ &= 2 \int_{\Omega} (-|\nabla y|^2 + |y|^{\gamma+1}) \, dx. \end{aligned}$$

Puisque E est décroissante c'est à dire $E_0 \geq E(y)$. alors on a

$$\begin{aligned} F'(t) - \frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1} \int_{\Omega} |y|^{\gamma+1} \, dx + 4E_0 &= 2 \int_{\Omega} (-|\nabla y|^2 + |y|^{\gamma+1}) \, dx - \frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1} \int_{\Omega} |y|^{\gamma+1} \, dx \\ &\quad + 4 \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla y_0| - \frac{1}{\gamma+1} |y_0|^{\gamma+1} \right] \, dx \end{aligned}$$

On a $E_0 \geq E(y)$, donc

$$\begin{aligned}
 F'(t) - \frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1} \int_{\Omega} |y|^{\gamma+1} dx + 4E_0 &\geq 2 \int_{\Omega} (-|\nabla y|^2 + |y|^{\gamma+1}) dx \\
 &\quad - \frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1} \int_{\Omega} |y|^{\gamma+1} dx + 4 \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla y|^2 - \frac{1}{\gamma+1} |y|^{\gamma+1} \right] dx \\
 &\geq \frac{4}{\gamma+1} \int_{\Omega} |y|^{\gamma+1} dx - 2 \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx + 2 \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx - \frac{4}{\gamma+1} \int_{\Omega} |y|^{\gamma+1} dx \\
 &\geq 0,
 \end{aligned}$$

donc

$$F'(t) \geq \frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1} \int_{\Omega} |y|^{\gamma+1} dx - 4E_0$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
 \gamma > 1 &\implies \gamma + 1 > 2 \\
 &\implies L^{\gamma+1}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \text{ avec injection continue} \\
 &\implies \|y\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|y\|_{L^{\gamma+1}(\Omega)}, \forall y \in L^{\gamma+1}(\Omega)
 \end{aligned}$$

Alors

$$\left(\int_{\Omega} |y|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\int_{\Omega} |y|^{\gamma+1} dx \right)^{\frac{1}{\gamma+1}} \implies \left(\int_{\Omega} |y|^2 dx \right)^{\frac{\gamma+1}{2}} \leq C \int_{\Omega} |y|^{\gamma+1} dx,$$

donc

$$F'(t) \geq \frac{2(\gamma+1)}{\gamma+1} \int_{\Omega} |y|^{\gamma+1} dx - 4E_0 \geq kF^{\frac{\gamma+1}{2}} - 4E_0 \quad (3.6)$$

Où $k > 0$.

Si $E_0 < 0$ alors, de (3.6), on trouve $F'(t) > 0$ (alors F est croissant), alors on peut montrer qu'on

peut toujours prendre $(y_0, y_1) > 0$.

Ce qui implique que F et F' sont positive.

D'ou

$$F'(t) \geq kF^{\frac{\gamma+1}{2}}(t) + C.$$

On intègre sur $[0, t]$, on trouve

$$\int_0^t F^{-\frac{\gamma+1}{2}}(s) \cdot F'(s) ds \leq \int_0^t k ds,$$

$$\int_0^t F'(s) \cdot F^{-\frac{\gamma+1}{2}}(s) ds \leq \int_0^t k ds,$$

ce qui implique

$$\frac{1}{-\frac{1+\gamma}{2} + 1} \left(F^{-\frac{\gamma+1}{2}+1}(t) \right) - \frac{1}{-\frac{1+\gamma}{2} + 1} \left(F^{-\frac{\gamma+1}{2}+1}(0) \right) \leq kt,$$

mais $\gamma > 1$ alors

$$\frac{1}{-\frac{1+\gamma}{2} + 1} = \frac{2}{1-\gamma} < 0$$

Alors

$$\begin{aligned} & \frac{2}{1-\gamma} \left(F^{\frac{1-\gamma}{2}}(t) - F^{\frac{1-\gamma}{2}}(0) \right) \geq kt \\ \implies F^{\frac{1-\gamma}{2}}(t) & \geq \left(\frac{2}{1-\gamma} F^{\frac{1-\gamma}{2}}(0) + kt \right) \frac{1-\gamma}{2} \\ \implies F^{\frac{1-\gamma}{2}}(t) & \geq \frac{1}{F^{\frac{1-\gamma}{2}}(0) + \frac{k(1-\gamma)t}{2}}, \end{aligned}$$

ceci implique que F explose en t^* telle que

$$\begin{aligned} t^* & = \frac{-F^{\frac{1-\gamma}{2}}(0)}{\frac{k(1-\gamma)}{2}}, \\ \implies t^* & = -F^{\frac{1-\gamma}{2}}(0) \cdot \frac{2}{k(1-\gamma)}, \\ \implies t^* & = \frac{2F^{\frac{1-\gamma}{2}}(0)}{k(\gamma-1)}, \end{aligned}$$

D'après la proposition (1.1) on a

$$\|y(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla y(t)\|_{L^2(\Omega)},$$

alors

$$\|y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\|\nabla y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right),$$

ce qui implique

$$\lim_{t \rightarrow t^*} \left[\|\nabla y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{\frac{1}{2}} = +\infty$$

D'autre part, on a

$$\|y(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|y(t)\|_{L^{\gamma+1}(\Omega)},$$

alors

$$\lim_{t \rightarrow t^*} \|y(t)\|_{L^{\gamma+1}(\Omega)} = +\infty,$$

Conclusion générale

Dans ce mémoire, on a présenté le résultat de l'explosion en temps fini des l'équations des ondes et chaleurs avec un terme source. Ce dernier a été obtenu par J.M.Ball.

La méthode utilisée est basée sur théorème de continuation pour les équations différentielles ordinaires. et la méthode multiplicateur et on applique le théorème de semi groupe pour obtenir l'existence.

Bibliographie

- [1] J.M.Ball. *Remarks on Blow-up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations*. Quart.J.Math. Oxford 28. 473-486(1977)
- [2] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, Paris.1983.
- [3] T.Cazenave & A.Haraux. *Introduction aux problème d'évolution semi-lineaire*. SMAL, Ellipses(1990)
- [4] R.F.Curtain& A.J.Zwart. *Introdiction to infintedimensional linear systems theory*. Springer-Verlag,Berlin(1978)
- [5] R.Daurtay & J.L.Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique. Tome 8 :Evolution,semigroup,variationnel*. Masson,Paris(1985).
- [6] J.B.Hiriart-Urruty. *Optimisation et analyse convexe*. Edition EDP sciences (2009)
- [7] A.Kolmogorov & S.Fomine. *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. Edition Mir-Moscou. deuxième édition, Décembre 1973.
- [8] J.L.Lions & E.Magenes. *Problèmeaux limites non homoègnes et application Volumes 1,2*. Dunod,Paris(1968).
- [9] A.Pazy. *Semi groups of linear operators and application to partial differential equations*. Springer-Verlag,Berlin,New-York(1983).
- [10] J.C.Saut. *Problèmes d'évolution*. Masson, Paris(2009)