

République Algérienne Démocratique et Populaire
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Amar Telidji de Laghouat

جامعة عمار تليجي - الأغواط



Faculté de Technologie
Département de Sciences et Technologies

Polycopié pédagogique

Destiné aux étudiants de : 1^{ère} Année « TC Ingénieur et LMD »

Algèbre I : Cours & Exercices Corrigés

Elaboré par :
Dr. Kenioua Zoubir
MCB, Université de Laghouat
Email : zoukenioua164@gmail.com

Année Universitaire 2025–2026

MATIÈRE : ALGÈBRE I

TABLE DES MATIÈRES

1	Ensembles, Relations et Applications	5
1.1	Introduction	6
1.2	Généralités sur les ensembles	6
1.2.1	Ensemble	6
1.2.2	Propriétés	10
1.2.3	L'ensemble des parties d'un ensemble	12
1.2.4	Partition d'un ensemble	12
1.2.5	Produit cartésien	12
1.3	Exercices	15
1.4	Relations binaires dans un ensemble	20
1.4.1	Définition et Propriétés	20
1.4.2	Relation d'équivalence	21
1.4.3	Relation d'ordre	23
1.5	Exercices	25
1.6	Applications	28
1.6.1	<u>Définitions</u>	28
1.6.2	Restriction et prolongement d'une application	30
1.6.3	Composition d'applications	31
1.6.4	Injection, surjection et bijection	32
1.6.5	Les applications injectives, surjectives et bijectives	32
1.6.6	Applications réciproques	36
1.6.7	L'image directe et l'image réciproque	37
1.7	Exercices	38
2	Nombres Complexes	42
2.1	Introduction	43
2.2	L'ensemble des nombres complexes \mathbb{C}	43
2.2.1	Définition d'un nombre complexe	43
2.2.2	Opérations dans \mathbb{C}	44
2.2.3	Le plan complexe	46
2.2.4	Forme trigonométrique d'un nombre complexe	47

2.2.5	Forme exponentielle d'un nombre complexe	49
2.2.6	Formule d'Euler	50
2.2.7	Formule de Moivre	51
2.3	Équation du second degré dans \mathbb{C}	52
2.3.1	Équations du second degré à coefficients réels	52
2.4	Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe	53
2.4.1	Racines carrées d'un nombre complexe	53
2.4.2	Équations du second degré à coefficients complexes	55
2.4.3	Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe	57
2.4.4	Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité	57
2.5	Exercices	58
3	Espaces Vectoriels, Applications Linéaires	72
3.1	Introduction	73
3.2	Espace Vectoriel, Base, Dimension	73
3.2.1	Lois de composition interne	73
3.2.2	Groupes	74
3.3	Espaces vectoriels	75
3.3.1	Structure d'espace vectoriel	75
3.3.2	Sous-espaces vectoriels	76
3.4	Dépendance, Indépendance linéaires	82
3.4.1	Familles de vecteurs : définition	82
3.4.2	Combinaisons linéaires	83
3.4.3	Familles liées, familles libres	83
3.4.4	Sous-espace engendré par une partie	84
3.4.5	Familles génératrices, bases	85
3.5	Théorie de la dimension	87
3.5.1	Définition	87
3.5.2	Dimension d'un espace vectoriel	87
3.5.3	Caractérisation des bases	88
3.5.4	Théorème de la base incomplète	89
3.6	Sous-espaces vectoriels et dimension	89
3.6.1	Dimension d'un sous-espace vectoriel	89
3.6.2	Dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels	90
3.7	Exercices	91
3.8	Applications Linéaires	92
3.8.1	Noyau, Image d'une application linéaire	94
3.8.2	Composition de deux applications linéaires	95
3.8.3	Rang d'une application linéaire	95
3.9	Exercices	96
	Bibliographie	101
	A Alphabet grec	102
	B Formule du binôme	103

C	Trigonometrie	104
C.1	Trigonometrie — Courbes	104
C.2	Trigonometrie — Triangles Spéciales	104
C.3	Trigonometrie — Identities Simples	105
C.4	Trigonometrie — Addition et Soustraction des Angles	105
C.5	Fonctions Trigonometriques Inverses	107
D	Vocabulaire d'Algèbre I	109

Préface

Le présent polycopié, intitulé Cours et exercices d'Algèbre I, est destiné aux étudiants inscrits dans le **domaine Sciences et Techniques – 1ère année LMD et Ingénieur**. Il a pour objectif de présenter, de manière structurée et accessible, l'ensemble du **programme officiel** de la matière Algèbre I dispensée au premier semestre.

Ce support a été élaboré dans un esprit pédagogique, alliant **rigueur scientifique** et **progression méthodique**. Chaque chapitre expose les notions fondamentales du cours, illustrées par des exemples représentatifs et suivies d'une sélection d'exercices corrigés, conçus pour renforcer la compréhension et l'autonomie de l'étudiant.

Le contenu de l'ouvrage s'articule autour de trois chapitres principaux :

Chapitre 1 : Ensembles, relations et applications

- a) Théorie des ensembles.
- b) Relations d'ordre et d'équivalence.
- c) Applications injectives, surjectives et bijectives ; application réciproque, image directe et image réciproque.

Chapitre 2 : Nombres complexes

- a) Définition et propriétés de base des nombres complexes.
- b) Représentations algébrique, trigonométrique, géométrique et exponentielle.
- c) Racines d'un nombre complexe : racines carrées, résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (avec $a, b, c \in \mathbb{C}$) et racines n-ièmes d'un nombre complexe.

Chapitre 3 : Espaces vectoriels et applications linéaires

- a) Espaces vectoriels, bases et dimension : définitions et propriétés fondamentales.
- b) Applications linéaires : noyau, image et rang.

L'objectif de ce document est de fournir à l'étudiant de première année un outil de travail cohérent et complet, favorisant une assimilation progressive des concepts de base de l'algèbre, pierre angulaire de toute formation scientifique et technique.

Conscient que tout ouvrage, en particulier dans sa première édition, peut comporter des imprécisions ou des fautes résiduelles, l'auteur invite les lecteurs à bien vouloir signaler toute erreur ou suggestion susceptible d'enrichir et de perfectionner ce support.

Les remarques peuvent être adressées à :

[zoukenioua164@gmail.com]

Chapitre 1

ENSEMBLES, RELATIONS ET APPLICATIONS

1.1▲ Introduction

La notion d'ensemble constitue le langage de base des mathématiques. Elle permet de décrire et d'organiser les objets étudiés. Les relations et les applications prolongent naturellement cette idée : les premières expriment des liens entre éléments, tandis que les secondes définissent une correspondance précise entre deux ensembles.

Ce chapitre présente ces notions fondamentales. On y introduira les opérations sur les ensembles, les principaux types de relations et les propriétés essentielles des applications, illustrées par des exemples simples.

1.2▲ Généralités sur les ensembles

1.2.1 ► Ensemble

Définition 1.2.1.

Un ensemble est une collection d'objets qui ont la même propriété. Chaque objet est un élément de l'ensemble.

Remarque 1.2.2. Un élément x est distinct de l'ensemble $\{x\}$ c'est à dire $x \neq \{x\}$.

Exemple 1.2.3

Soit E l'ensemble des entiers qui divisent 20, on aura :

$$E = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

Exemple 1.2.3

Exemple 1.2.4

- L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.
- L'ensemble des réels \mathbb{R} , par exemple $1, \sqrt{2}, \pi, \ln(2), \dots$
- L'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} .

Exemple 1.2.4

Un ensemble peut se définir de deux manières :

- **En extension** : en donnant la liste de tous ses éléments. Par exemple, l'ensemble des nombres naturels pairs inférieurs ou égaux à 10 est

$$E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}.$$

- **En compréhension** : en caractérisant ses éléments par une propriété. Par exemple,

$$E = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 10 \text{ et } x \text{ est pair}\}.$$

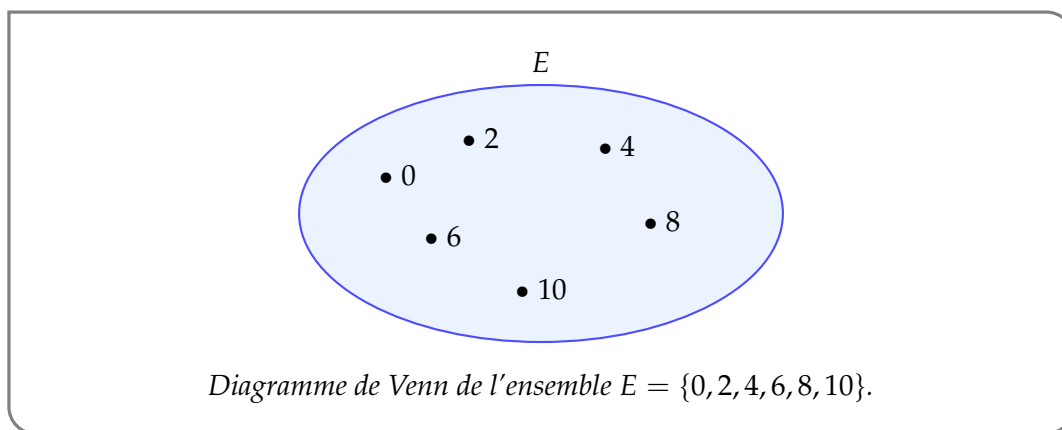
Exemple 1.2.5

On considère les trois sous-ensembles finis de \mathbb{R} suivants :

$$\begin{cases} A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} & \text{(défini en compréhension)} \\ B = \{1, 2\} & \text{(défini en extension)} \\ C = \{1, 2, \sqrt{2}\} & \text{(défini en extension)} \end{cases}$$

Exemple 1.2.5

On peut représenter graphiquement un ensemble à l'aide d'un diagramme de venn. Considérons par exemple l'ensemble $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.



►►► Appartenance, Inclusion et Égalité

Soit E un ensemble non vide.

- Si x est un élément de E on dit aussi que x appartient à E et on écrit $x \in E$. Si x n'est pas un élément de E , on dit que x n'appartient pas à E et on écrit $x \notin E$.
- L'**inclusion**. $E \subset F$ si tout élément de E est aussi un élément de F . Autrement dit : $\forall x \in E (x \in F)$. On dit alors que E est un **sous-ensemble** de F ou une **partie** de F .
- L'**égalité**. $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$. Dans le cas contraire, on dit qu'ils sont **distincts** et on note $E \neq F$.

Remarque 1.2.6. 1. L'ensemble vide noté \emptyset ; (ou $\{\}$) est un ensemble sans éléments et de plus il est inclus dans tout ensemble E .

2. Si A et B sont deux ensembles finis et si $A \subset B$ alors $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$.

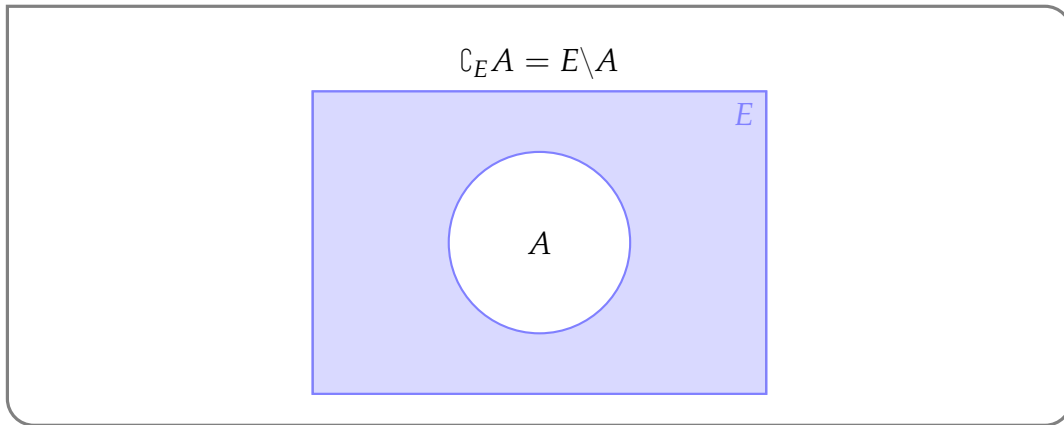
3. Soient A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E . Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$.

►►► complémentaire, union et intersection

— **Complémentaire.** Si $A \subset E$,

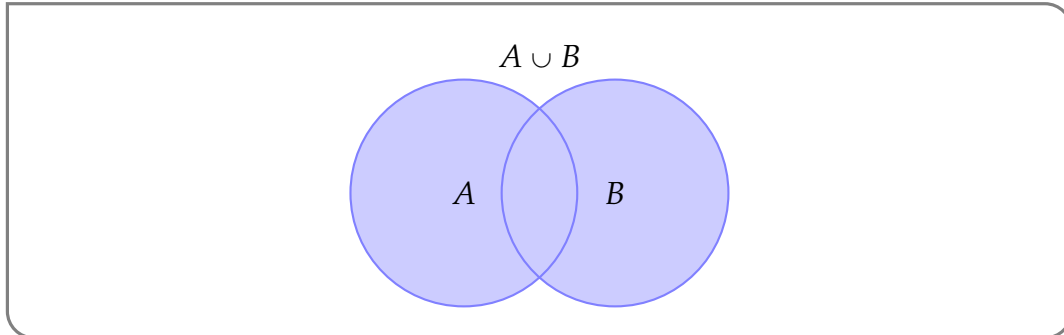
$$\complement_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}$$

Il est aussi noté $E \setminus A$ et parfois A^c ou \bar{A} ou \complement_E^A .



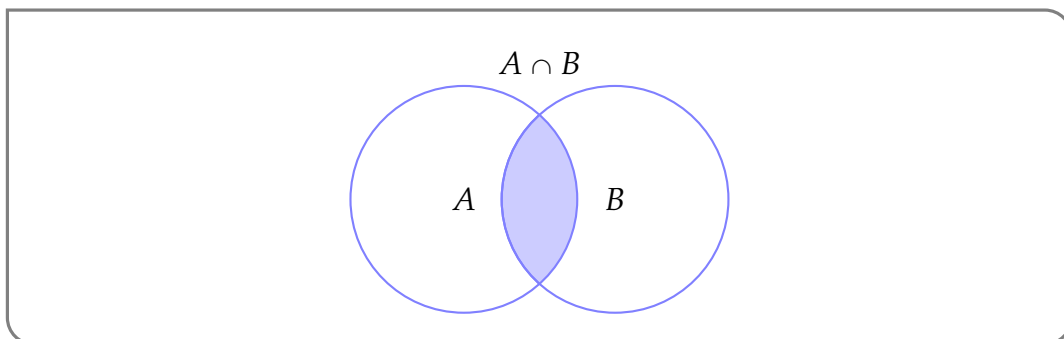
— **Union.** Pour $A, B \subset E$,

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



— **Intersection.** Pour $A, B \subset E$,

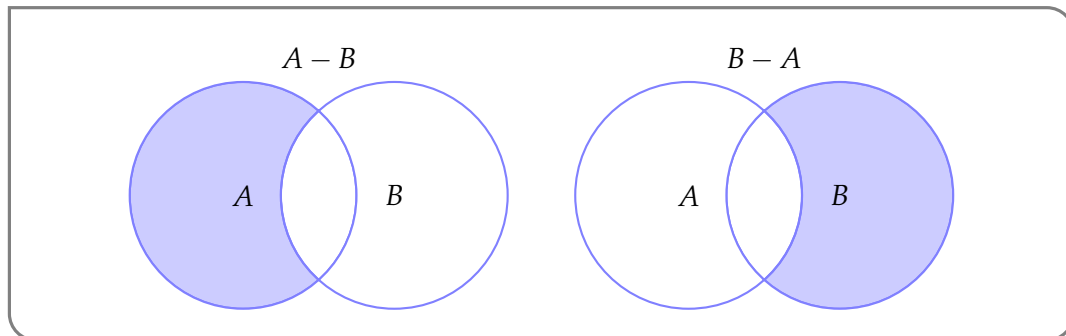
$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$



►► Différence et Différence symétrique

- **Différence.** Si $A, B \subset E$, La différence de deux sous-ensembles A et B de E , c'est l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B ,

$$A \setminus B = \{x \in E \mid ((x \in A) \text{ et } (x \notin B))\} = A \cap (E \setminus B).$$



Exemple 1.2.7

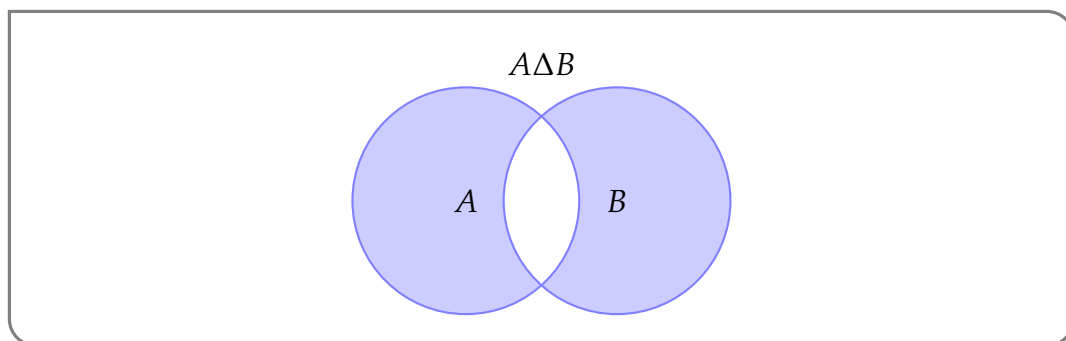
Soit $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Alors :

$$A \setminus B = \{1, 2\}, \quad B \setminus A = \{5, 6\}.$$

Exemple 1.2.7

- **Différence symétrique.** Si $A, B \subset E$,
La différence symétrique de deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E , c'est

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$



Exemple 1.2.8

Soit $A \subset \mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers divisibles par 2 et $B \subset \mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers divisibles par 3.

Alors $A \Delta B$ est l'ensemble des entiers divisibles par 2 ou 3 mais pas par 6,

$$A \Delta B = \{\dots, -9, -8, -4, -3, -2, 0, 2, 3, 4, 8, 9, 14, 15, \dots\}.$$

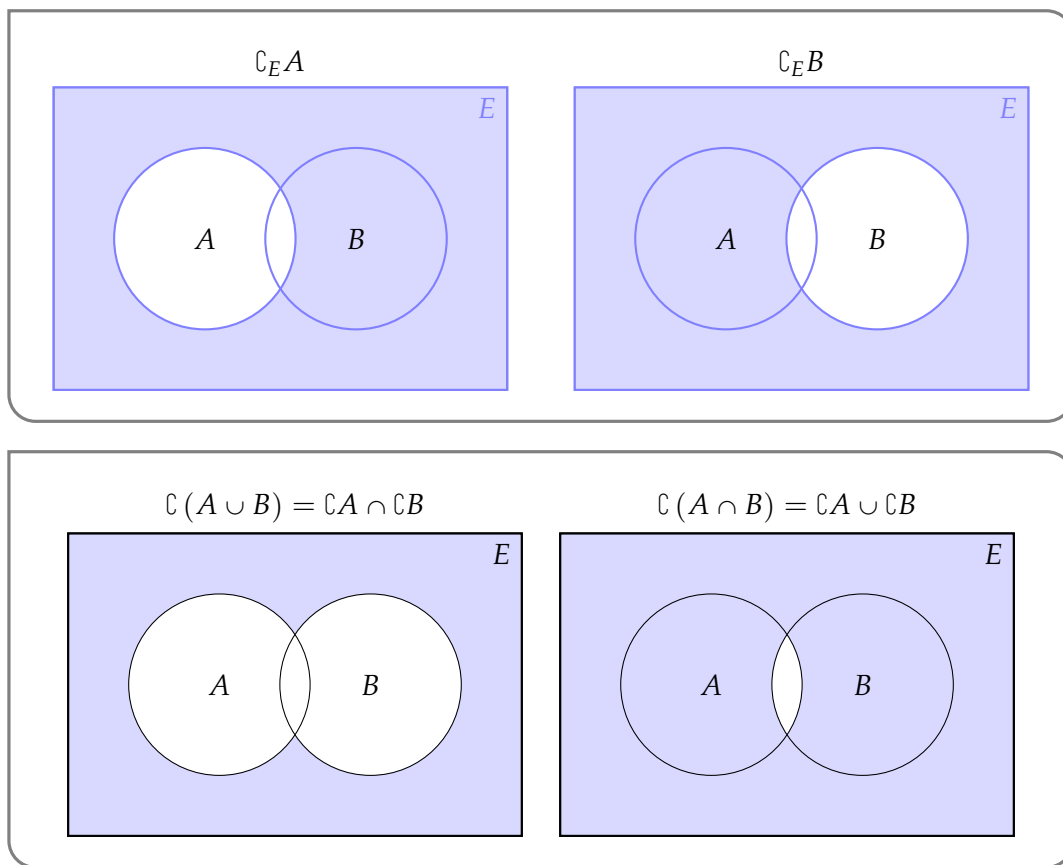
Exemple 1.2.8

1.2.2 ► Propriétés

Soient A, B, C des parties d'un ensemble E .

- (1) $A \cap B = B \cap A$ (Commutativité du \cap)
- (2) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (Associativité du \cap)
- (3) $A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cap A = A, \quad A \subset B \iff A \cap B = A$
(Élément neutre, idempotence, inclusion)
- (4) $A \cup B = B \cup A$ (Commutativité du \cup)
- (5) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (Associativité du \cup)
- (6) $A \cup \emptyset = A, \quad A \cup A = A, \quad A \subset B \iff A \cup B = B$
(Élément neutre, idempotence, inclusion)
- (7) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Distributivité du \cap sur \cup)
- (8) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Distributivité du \cup sur \cap)
- (9) $\complement(\complement A) = A$ et donc $A \subset B \iff \complement B \subset \complement A$ (Complément double / loi de De Morgan)
- (10) $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$ (Loi de De Morgan)
- (11) $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ (Loi de De Morgan)
- (12) $A \setminus B = A \cap \complement B$ (Définition via complément)
- (13) $A \setminus \emptyset = A, \quad \emptyset \setminus A = \emptyset$ (Élément neutre)
- (14) $A \setminus A = \emptyset$ (Idempotence)
- (15) $A \setminus B = \emptyset \iff A \subset B$ (Lien avec inclusion)
- (16) $A \setminus B = A \iff A \cap B = \emptyset$ (Si disjoint)
- (17) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ (Différence successive)
- (18) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ (Distributivité sur intersection)
- (19) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (Distributivité sur union)
- (20) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (Différence symétrique)
- (21) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A), \quad A \Delta \emptyset = A, \quad A \Delta B = B \Delta A$ (Différence symétrique : propriétés)
- (22) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C, \quad A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ (Associativité et distributivité du Δ)

Voici les dessins pour les deux dernières assertions.



Remarque 1.2.9. Soient E et F deux ensembles. En pratique, on a deux méthodes pour démontrer que $E = F$:

1. Soit on montre la double inclusion $F \subset E$ et $E \subset F$.
2. Soit on utilise directement la propriété d'extentionnalité, en montrant que pour tout x , $x \in E \iff x \in F$ par équivalences successives.

Démonstration. Des preuves pour quelques propriétés :

(7) Preuve de $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$:

$$\begin{aligned}
 x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \text{ et } x \in (B \cup C) \\
 &\iff x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C) \\
 &\iff (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C) \\
 &\iff (x \in A \cap B) \text{ ou } (x \in A \cap C) \\
 &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).
 \end{aligned}$$

(10) Preuve de $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$:

$$\begin{aligned}
 x \in \complement(A \cap B) &\iff x \notin (A \cap B) \\
 &\iff \text{non } (x \in A \text{ et } x \in B) \\
 &\iff (x \notin A) \text{ ou } (x \notin B) \\
 &\iff x \in \complement A \cup \complement B.
 \end{aligned}$$

■

1.2.3 ► L'ensemble des parties d'un ensemble

Etant donné un ensemble E . On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E et on écrit

$$\mathcal{P}(E) = \{A \text{ tel que } : A \in E\}$$

Exemple 1.2.10

Si $E = \{1, 2, 3\}$:

$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Exemple 1.2.10

Remarque 1.2.11. L'ensemble vide et E sont toujours des éléments de $\mathcal{P}(E)$.

1.2.4 ► Partition d'un ensemble

Définition 1.2.12 (Partition d'un ensemble).

Soient E un ensemble non vide et B une famille des parties de E . On dit que B est une partition de E si

- (1) Tout élément de B n'est pas vide.
- (2) Les éléments de B sont deux à deux disjoints.
- (3) La réunion des éléments de B est égale à E .

Exemple 1.2.13

Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$, on a : $B = \{\{3\}, \{4\}, \{1, 2\}\}$ est une partition de E .

Exemple 1.2.13

1.2.5 ► Produit cartésien

Définition 1.2.14.

Soient E et F deux ensembles. Le **produit cartésien**, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$. On écrit :

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

1. Non-commutativité :

$$E \times F \neq F \times E \quad \text{en général.}$$

En effet, $(x, y) \neq (y, x)$ sauf cas particuliers (ex : $E = F$ et $x = y$).

'''

2. Distributivité sur l'union :

$$E \times (F \cup G) = (E \times F) \cup (E \times G).$$

3. Distributivité sur l'intersection :

$$E \times (F \cap G) = (E \times F) \cap (E \times G).$$

4. Différence ensembliste :

$$E \times (F \setminus G) = (E \times F) \setminus (E \times G).$$

5. Cardinal du produit cartésien :

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F).$$

6. Produit cartésien avec l'ensemble vide :

$$E \times \emptyset = \emptyset \times E = \emptyset.$$

7. Produit cartésien d'un singleton :

$$\{a\} \times F = \{(a, y) \mid y \in F\}, \quad E \times \{b\} = \{(x, b) \mid x \in E\}.$$

Représentation géométrique

Si E et F sont des sous-ensembles de \mathbb{R} , alors $E \times F$ représente l'ensemble des points du plan ayant pour abscisse un élément de E et pour ordonnée un élément de F .

Exemple 1.2.15

a) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$

b) Si $A = [2, 5]$ et $B = [2, 4]$, le produit

$$[2, 5] \times [2, 4] = \{(x, y) \mid 2 \leq x \leq 5, 2 \leq y \leq 4\}$$

est un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 qui peut être représenté par le rectangle sur la figure ci-dessous.

c) $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x, y, z \leq 1\}$

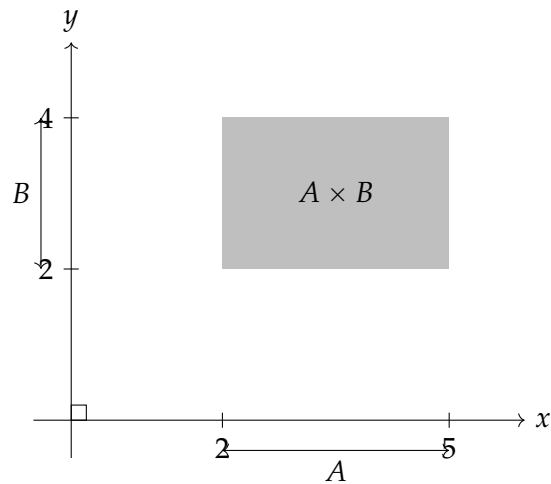


FIGURE 1.1 – (b)

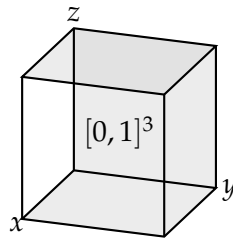


FIGURE 1.2 – (c)

Exemple 1.2.15

Définition 1.2.16 (Cardinal d'un ensemble).

Soit E un ensemble fini. On appelle **cardinal** de E , et on note $\text{Card}(E)$, le nombre d'éléments distincts de E :

$$\text{Card}(E) = \text{nombre d'éléments de } E.$$

Propriétés cardinal d'un ensemble

- $\text{Card}(\emptyset) = 0$
- $\text{Card}(\{a\}) = 1$
- Si $A \cap B = \emptyset$, alors : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$
- En général : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$
- $\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B)$

- $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$
- Si $A \subseteq B$, alors $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(B)$
- $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}$ (nombre de parties de E)
- Si E et F sont finis :

$$\text{Card}(\mathcal{F}(E, F)) = (\text{Card}(F))^{\text{Card}(E)} \text{ (nombre de fonctions de } E \text{ vers } F)$$

Exemple 1.2.17

Soient $E = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{-2, 0, 1, 2, 3\}$, $C = \{0, 2\}$.

$$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} = E,$$

$$A \cap B = \{1, 3\},$$

$$\complement_E A = \{-2, -1, 0, 2\},$$

$$\complement_E B = \{-1, 4\},$$

$$A \setminus B = \{4\},$$

$$B \setminus A = \{-2, 0, 2\},$$

$$A \times C = \{(1, 0), (1, 2), (3, 0), (3, 2), (4, 0), (4, 2)\},$$

$$C \times A = \{(0, 1), (0, 3), (0, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4)\}.$$

Exemple 1.2.17

Exemple 1.2.18

Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{3, 4, 5, 6\}$. On a :

$$\text{Card}(A) = 3, \quad \text{Card}(B) = 4, \quad \text{Card}(A \cap B) = 1,$$

$$\text{Card}(A \cup B) = 3 + 4 - 1 = 6.$$

Exemple 1.2.18

1.3▲ Exercices

Exercice 1

Décrire l'ensemble E des entiers naturels pairs, l'ensemble F des entiers naturels impairs et strictement inférieurs à 8.

Solution: Description d'ensembles

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid (\exists m \in \mathbb{N})(n = 2m)\}.$$

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid ((\exists m \in \mathbb{N})(n = 2m + 1) \text{ et } (n < 8))\} = \{1, 3, 5, 7\}.$$

Exercice 2

I. Décrire les parties de \mathbb{R} dans lesquelles évoluent x pour que les assertions suivantes soient vraies.

- 1) $(x > 0 \text{ et } x < 1) \text{ ou } x = 0$.
- 2) $(x > 3 \text{ et } x < 5) \text{ et } x \neq 4$.
- 3) $(x \leq 0 \text{ et } x > 1) \text{ ou } x = 4$.
- 4) $x \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

II. Soient A et B deux ensembles non vides tels que : $A = \{x \in \mathbb{N} : \frac{2x+3}{2} \leq 4\}$,
 $B = \{x \in \mathbb{Z} : |x - 1| < \frac{3}{2}\}$

- a. Définir les deux ensembles A et B d'autre manière (dans lesquelles évoluent x), puis donner leurs cardinaux.
- b. Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $B \setminus A$, $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}(A)$ et $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}(B)$.

III. Comparer les ensembles $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(A) \cap \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(B)$ et $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(C)$ tels que : $A =]-\infty, 1[$, $B =]2, +\infty[$ et $C =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

Solution:

I. Décrire les parties de \mathbb{R} dans lesquelles évoluent x pour que les assertions suivantes soient vraies.

- 1) $(x > 0 \text{ et } x < 1) \text{ ou } x = 0$.
 $x \in [0, 1[$
- 2) $(x > 3 \text{ et } x < 5) \text{ et } x \neq 4$.
 $x \in]3, 4[\cup]4, 5[$
- 3) $(x \leq 0 \text{ et } x > 1) \text{ ou } x = 4$.
 $x \in \{4\}$
- 4) $x \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$
 $x \in]-\infty, 0[\cup [2, +\infty[$

II. Soient A et B deux ensembles non vides tels que : $A = \{x \in \mathbb{N} : \frac{2x+3}{2} \leq 4\}$,
 $B = \{x \in \mathbb{Z} : |x - 1| < \frac{3}{2}\}$

- a. Définir les deux ensembles A et B d'autre manière (dans lesquelles évoluent x), puis donner leurs cardinaux.

$$A = \{x \in \mathbb{N} : \frac{2x+3}{2} \leq 4\} = \{0, 1, 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} : |x - 1| < \frac{3}{2}\} = \{0, 1, 2\}$$

$$\text{Card}(A) = \text{Card}(B) = 3$$

b. Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $B \setminus A$, $\complement_{\mathbb{N}}(A)$ et $\complement_{\mathbb{Z}}(B)$

$$A \cap B = \{0, 1, 2\}$$

$$A \cup B = \{0, 1, 2\}$$

$$B \setminus A = \emptyset$$

$$\complement_{\mathbb{N}}(A) = \mathbb{N} - \{0, 1, 2\} = \{3, 4, \dots\}$$

$$\complement_{\mathbb{Z}}(B) = \mathbb{Z} - \{0, 1, 2\} = \{\dots - 2, -1, 3, 4, \dots\}$$

III. Comparer les ensembles $\complement_{\mathbb{R}}(A) \cap \complement_{\mathbb{R}}(B)$ et $\complement_{\mathbb{R}}(C)$ tels que : $A =]-\infty, 1[$, $B =]2, +\infty[$ et $C =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

$$\complement_{\mathbb{R}}(A) = [1, +\infty[$$

$$\complement_{\mathbb{R}}(B) =]-\infty, 2]$$

$$\complement_{\mathbb{R}}(A) \cap \complement_{\mathbb{R}}(B) = [1, +\infty[\cap]-\infty, 2] = [1, 2]$$

$$\complement_{\mathbb{R}}(C) = \complement_{\mathbb{R}}(A \cup B) = \complement_{\mathbb{R}}(A) \cap \complement_{\mathbb{R}}(B) = [1, 2]$$

Exercice 3 Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E ,

I. Montrons que :

$$1) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

$$2) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

$$3) A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A.$$

$$4) A \cup B = A \cap C \Rightarrow B \subset A \subset C.$$

$$5) \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

$$6) \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

II. Montrons par contraposition que :

$$1) A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B.$$

$$2) A \times B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset.$$

III. Simplifions les ensembles suivantes :

$$1) \overline{A \cup B} \cap \overline{C \cup A}.$$

$$2) \overline{A \cap B} \cup \overline{C \cap A}.$$

$$3) (A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)}.$$

Solution: Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E ,

I. Montrons que :

$$1) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \wedge x \in (B \cup C) \iff x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ &\iff (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\ &\iff (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \\ &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

$$\text{Donc } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

$$2) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\iff x \in A \vee x \in (B \cap C) \iff x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ &\iff (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\ &\iff (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C) \\ &\iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

Donc $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$$3) A \subset B \iff A \cap B = A.$$

$$(a) A \subset B \Rightarrow A \cap B = A.$$

On suppose que $A \subset B$ et on montre que $A \cap B = A$. Pour cela, on doit montrer les deux inclusions $A \cap B \subset A$ et $A \subset A \cap B$.

- $A \cap B \subset A$ Soit $x \in A \cap B$ alors $(x \in A)$ et $(x \in B)$ donc $(x \in A)$

On obtient alors

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$$

Ainsi $A \cap B \subset A$

- $A \subset A \cap B$ Soit $x \in A$ alors $x \in B$ car $A \subset B$ donc $(x \in A) \wedge (x \in B)$

On obtient alors

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$$

Ainsi $A \subset A \cap B$. D'où

$$A \cap B = A$$

Donc

$$A \subset B \Rightarrow A \cap B = A \quad (1)$$

$$(b) A \cap B = A \Rightarrow A \subset B.$$

On suppose que $A \cap B = A$ et on montre que $A \subset B$

Soit $x \in A$ alors $x \in A \cap B$ car $A = A \cap B$ donc $(x \in A) \wedge (x \in B)$. Ainsi $x \in B$

On obtient alors

$$(x \in A \Rightarrow x \in B) \iff A \subset B$$

D'où

$$A = A \cap B \Rightarrow A \subset B \quad (2)$$

De (1) et (2) on obtient :

$$A \subset B \iff A \cap B = A$$

$$4) A \cup B = A \cap C \Rightarrow B \subset A \subset C.$$

Soit $x \in B$ alors $x \in A \cup B$ et donc $x \in A \cap C$, en particulier $x \in A$. On en déduit que $A \subset B$.

Soit $x \in A$. Alors $x \in A \cup B$ et donc $x \in A \cap C$, en particulier $x \in C$. On en déduit que $A \subset C$.

D'où $A \cup B = A \cap C \Rightarrow B \subset A \subset C$.

- 5) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Pour montrer l'égalité, on montre que
 $\forall x, x \in \overline{A \cap B} \iff x \in \overline{A} \cup \overline{B}$

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cap B} &\iff x \notin (A \cap B) \\ &\iff \overline{x \in (A \cap B)} \\ &\iff \overline{(x \in A) \wedge (x \in B)} \\ &\iff \overline{(x \in A)} \vee \overline{(x \in B)} \\ &\iff (x \notin A) \vee (x \notin B) \\ &\iff (x \in \overline{A}) \vee (x \in \overline{B}) \\ &\iff x \in (\overline{A} \cup \overline{B}) \end{aligned}$$

D'où $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

- 6) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

La (6) égalité peut se prouver de la même manière que(5).

II. Montrons par contraposition que :

- 1) $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$.

Montrons que : $A \neq B \Rightarrow A \cup B \neq A \cap B$.

On suppose que :

$$A \neq B$$

Alors : $\exists x \in A - B$ ou $\exists x \in B - A$

cas 1 : $\exists x \in A - B$

$$\begin{aligned} x \in A - B &= x \in A \wedge x \notin B \\ &= x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B \\ &= A \cup B \neq A \cap B \end{aligned}$$

cas 2 : $\exists x \in B - A$

$$\begin{aligned} x \in B - A &= x \in B \wedge x \notin A \\ &= x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B \\ &= A \cup B \neq A \cap B \end{aligned}$$

Donc :

$$A \neq B \Rightarrow A \cup B \neq A \cap B.$$

Par contraposition on déduit que :

$$A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B.$$

- 2) $A \times B = \phi \Rightarrow A = \phi \vee B = \phi$.

Montrons que : $A \neq \phi \wedge B \neq \phi \Rightarrow A \times B \neq \phi$.

On suppose que : $A \neq \phi$ et $B \neq \phi$

Alors : $\exists x \in A, y \in B$ d'où $(x, y) \in A \times B$,

Donc $A \times B \neq \phi$

Par contraposition on déduit que :

$$A \times B = \phi \Rightarrow A = \phi \vee B = \phi.$$

III. Simplifions les ensembles suivantes :

1) $\overline{A \cup B \cap C \cup A}$.

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B \cap C \cup A} &= (\overline{A \cap B}) \cap (\overline{C \cap A}) \\ &= (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap (\overline{C} \cap \overline{A}) \\ &= \phi \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \\ &= \phi \end{aligned}$$

2) $\overline{A \cap B \cup C \cap A}$.

$$\begin{aligned} \overline{A \cap B \cup C \cap A} &= (\overline{A \cup B}) \cup (\overline{C \cup A}) \\ &= (\overline{A} \cup \overline{B}) \cup (\overline{C} \cup \overline{A}) \\ &= E \cup (\overline{B} \cup \overline{C}) \\ &= E \end{aligned}$$

3) $(A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)}$.

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)} &= (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) \\ &= [(A \cap B) \cap \overline{A}] \cup [(A \cap B) \cap \overline{C}] \\ &= [(A \cap \overline{A}) \cap B] \cup [(A \cap B) \cap \overline{C}] \\ &= [\phi \cap B] \cup [A \cap B \cap \overline{C}] \\ &= \phi \cup [A \cap B \cap \overline{C}] \\ &= A \cap B \cap \overline{C} \end{aligned}$$

1.4▲ Relations binaires dans un ensemble

1.4.1 ► Définition et Propriétés

Définition 1.4.1.

Soient E un ensemble, x et y deux éléments de E . S'il existe un lien qui relie x et y , on dit qu'ils sont reliés par une relation \mathfrak{R} et on écrit

$$x \mathfrak{R} y \quad \text{ou} \quad \mathfrak{R}(x, y).$$

Exemple 1.4.2

Soit $E = \mathbb{R}$ et $\forall x, y \in E$, on définit :

$$x\mathfrak{R}y \iff |x| - |y| = x - y.$$

Exemple 1.4.2

Propriétés

1. **Réflexivité** : On dit que \mathfrak{R} est réflexive dans E si :

$$\forall x \in E : x\mathfrak{R}x.$$

2. **Symétrie** : On dit que \mathfrak{R} est symétrique dans E si :

$$\forall x, y \in E : x\mathfrak{R}y \Rightarrow y\mathfrak{R}x.$$

3. **Antisymétrie** : On dit que \mathfrak{R} est antisymétrique dans E si :

$$\forall x, y \in E : (x\mathfrak{R}y \text{ et } y\mathfrak{R}x) \Rightarrow x = y.$$

4. **Transitivité** : On dit que \mathfrak{R} est transitive dans E si :

$$\forall x, y, z \in E : (x\mathfrak{R}y \text{ et } y\mathfrak{R}z) \Rightarrow x\mathfrak{R}z.$$

1.4.2 ▶ Relation d'équivalence

On dit que \mathfrak{R} est une relation d'équivalence sur E si \mathfrak{R} est à la fois réflexive, symétrique et transitive.

▶▶▶ Classe d'équivalence

Soient \mathfrak{R} une relation d'équivalence sur E et $a \in E$. On appelle *classe d'équivalence de a* , notée \hat{a} ou \bar{a} , l'ensemble des éléments x de E qui sont en relation \mathfrak{R} avec a , c'est-à-dire :

$$\hat{a} = \{x \in E : x\mathfrak{R}a\}.$$

ou encore

$$\hat{a} = \{x \in E : a\mathfrak{R}x\}.$$

▶▶▶ Ensemble quotient

Soit \mathfrak{R} une relation d'équivalence sur E . On définit l'*ensemble quotient* de E par la relation \mathfrak{R} comme l'ensemble des classes d'équivalence de tous les éléments de E , noté :

$$E/\mathfrak{R} = \{\hat{a}, a \in E\}.$$

Propriétés. Soit E un ensemble et \mathfrak{R} une relation d'équivalence dans E . Pour tout $x \in E$, on a :

1. $\forall a \in E : a \in \dot{a}$
2. $\forall a, b \in E : a \mathfrak{R} b \iff \dot{a} = \dot{b}$ (autrement dit, $a \in \dot{b} \iff \dot{a} = \dot{b}$)
3. $\forall a, b \in E : \dot{a} \neq \dot{b} \iff \dot{a} \cap \dot{b} = \emptyset$
4. $E = \bigcup_{a \in E} \dot{a}$

Exemple 1.4.3

Dans \mathbb{R} , on définit la relation binaire \mathfrak{R} par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} ; x \mathfrak{R} y \iff x^2 - y^2 = x - y.$$

1. Montrer que \mathfrak{R} est une relation d'équivalence.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Préciser la classe d'équivalence de a .

Solution.

1. Montrons que \mathfrak{R} est une relation d'équivalence.

Réflexivité :

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \mathfrak{R} x; ?$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x \mathfrak{R} x \iff x^2 - x^2 = x - x \iff 0 = 0$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R} : x \mathfrak{R} x$, alors \mathfrak{R} est **réflexive**. (1)

\mathfrak{R} est-elle symétrique ?

$$(\forall x, y \in \mathbb{R} : x \mathfrak{R} y \Rightarrow y \mathfrak{R} x)?$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on suppose $x \mathfrak{R} y$ et on démontre que $y \mathfrak{R} x$. On a :

$$\begin{aligned} x \mathfrak{R} y &\Rightarrow x^2 - y^2 = x - y \\ &\Rightarrow -(y^2 - x^2) = -(y - x) \\ &\Rightarrow y^2 - x^2 = y - x \\ &\Rightarrow y \mathfrak{R} x. \end{aligned}$$

Donc, $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \mathfrak{R} y \Rightarrow y \mathfrak{R} x$, alors \mathfrak{R} est **symétrique**. (2)

\mathfrak{R} est-elle transitive ?

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \mathfrak{R} y \text{ et } y \mathfrak{R} z \Rightarrow x \mathfrak{R} z)?$$

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, on suppose $x \mathfrak{R} y$ et $y \mathfrak{R} z$ et on démontre que $x \mathfrak{R} z$. On a :

$$x \mathfrak{R} y \iff x^2 - y^2 = x - y \tag{1.1}$$

et

$$y\mathfrak{R}z \iff y^2 - z^2 = y - z \quad (1.2)$$

En additionnant (1.1) et (1.2) :

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + y^2 - z^2 &= x - y + y - z \\ \Rightarrow x^2 - z^2 &= x - z \\ \Rightarrow x\mathfrak{R}z. \end{aligned}$$

Ainsi, \mathfrak{R} est **transitive**. (3)

Par (1), (2) et (3), \mathfrak{R} est donc une **relation d'équivalence sur \mathbb{R}** .

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminons la classe d'équivalence de $a \in \mathfrak{R}$.

Nous cherchons l'ensemble

$$\dot{a} = x \in \mathbb{R} : x\mathfrak{R}a,$$

c'est-à-dire les x vérifiant

$$x^2 - a^2 = x - a.$$

Factorisons le membre de gauche :

$$(x - a)(x + a) = x - a.$$

On réarrange :

$$\begin{aligned} (x - a)(x + a) - (x - a) &= 0 \\ \iff (x - a)((x + a) - 1) &= 0 \\ \iff (x - a)(x + a - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Donc les solutions sont données par

$$x = a \quad \text{ou} \quad x + a - 1 = 0 \iff x = 1 - a.$$

Conclusion :

$$\dot{a} = a, ; 1 - a.$$

Remarque : si $a = \frac{1}{2}$ alors $1 - a = a$ et la classe d'équivalence se réduit à l'unique élément

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

On vérifie bien que ces classes forment une partition de \mathbb{R} : chaque élément de \mathbb{R} appartient à exactement une des classes $\{a, 1 - a\}$.

Exemple 1.4.3

1.4.3 ► Relation d'ordre

Une relation binaire \mathfrak{R} dans un ensemble E est dite relation d'ordre si elle est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.

►►► Ordre partiel, ordre total

Soient E un ensemble et \mathfrak{R} une relation d'ordre dans E . On dit que \mathfrak{R} est d'ordre total si

$$\forall x, y \in E : x\mathfrak{R}y \text{ ou } y\mathfrak{R}x.$$

Et on dit qu'elle est d'ordre partiel si elle n'est pas d'ordre total, c'est à dire

$$\exists x, y \in E : x \text{ n'a pas de relation avec } y \text{ et } y \text{ n'a pas de relation avec } x.$$

Exemple 1.4.4

On définit sur \mathbb{R}^* la relation binaire \mathfrak{R}_1 par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^* : x\mathfrak{R}_1y \iff \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } y = kx.$$

- a) Montrer que \mathfrak{R}_1 est une relation d'ordre.
- b) L'ordre \mathfrak{R}_1 est-il total ?

Solution.

- a) \mathfrak{R}_1 est une relation d'ordre ?

Nous vérifions les trois propriétés.

Réflexivité. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, prendre $k = 1 \in \mathbb{N}$ donne $x = 1 \cdot x$, donc $x\mathfrak{R}_1x$. Ainsi \mathfrak{R}_1 est réflexive.

Antisymétrie. Supposons $x, y \in \mathbb{R}^*$ tels que $x\mathfrak{R}_1y$ et $y\mathfrak{R}_1x$. Alors il existe $k, \ell \in \mathbb{N}$ avec

$$y = kx \quad \text{et} \quad x = \ell y.$$

En substituant la seconde dans la première on obtient

$$x = \ell y = \ell(kx) = (\ell k)x.$$

Comme $x \neq 0$, on peut simplifier et obtenir $\ell k = 1$. Or ℓ et k sont des entiers naturels strictement positifs, donc nécessairement $\ell = k = 1$. D'où $y = x$. Ainsi \mathfrak{R}_1 est antisymétrique.

Transitivité. Si $x\mathfrak{R}_1y$ (donc $y = kx$) et $y\mathfrak{R}_1z$ (donc $z = \ell y$) pour certains $k, \ell \in \mathbb{N}$, alors

$$z = \ell y = \ell(kx) = (\ell k)x,$$

avec $\ell k \in \mathbb{N}$, donc $x\mathfrak{R}_1z$. Ainsi \mathfrak{R}_1 est transitive.

Par réflexivité, antisymétrie et transitivité, \mathfrak{R}_1 est bien une relation d'ordre sur \mathbb{R}^* .

- b) L'ordre \mathfrak{R}_1 est-il total ?

Non, l'ordre n'est pas total. Pour être total il faudrait que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^*$ on ait $x\mathfrak{R}_1y$ ou $y\mathfrak{R}_1x$. Ce n'est pas vrai en général. Par exemple, prenons $x = 2$ et $y = 3$. Il n'existe pas de $k \in \mathbb{N}$ tel que $3 = k \cdot 2$ et il n'existe pas non plus de $k \in \mathbb{N}$ tel que $2 = k \cdot 3$. Donc ni $2\mathfrak{R}_13$ ni $3\mathfrak{R}_12$ n'est vrai. Ainsi des il ya des éléments ne sont pas comparables, et l'ordre est strictement partiel (non total).

Exemple 1.4.4

1.5▲ Exercices

Exercice 4

1. Dans \mathbb{R}^* , on définit la relation \mathfrak{R} par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*, x \mathfrak{R} y \iff x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y}$$

Montrer que \mathfrak{R} est une relation d'équivalence, puis déterminer la classe d'équivalence de $-1, -2$ et 3 .

2. On considère la relation suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \mathfrak{R} y \iff \cos^2(x) + \sin^2(y) = 1$$

Montrer que \mathfrak{R} est une relation d'équivalence, puis déterminer la classe d'équivalence de 0 .

3. Soit \mathfrak{R} une relation réflexive et transitive, soit \mathfrak{S} une relation qui est défini par

$$\forall x, y \in E, x \mathfrak{S} y \iff x \mathfrak{R} y \text{ et } y \mathfrak{R} x$$

Montrer que \mathfrak{S} est une relation d'équivalence.

Solution:

1. Dans \mathbb{R}^* , on définit la relation \mathfrak{R} par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*, x \mathfrak{R} y \iff x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y}$$

Montrer que \mathfrak{R} est une relation d'équivalence, puis déterminer la classe d'équivalence de $-1, -2$ et 3 .

\mathfrak{R} Réflexive : ?

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ fixé quelconque. Alors $x + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x}$ donc $x \mathfrak{R} x$.

Par conséquent, \mathfrak{R} est réflexive.

\mathfrak{R} Symétrique : ?

Soient $x, y \in \mathbb{R}^*$ 2 fixés quelconques tels que $x \mathfrak{R} y$. Alors $x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y}$ donc $y + \frac{1}{y} = x + \frac{1}{x}$ donc $y \mathfrak{R} x$. Par conséquent, \mathfrak{R} est symétrique.

\mathfrak{R} Transitive : ?

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ 3 fixés quelconques tels que $x \mathfrak{R} y$ et $y \mathfrak{R} z$. Alors $x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y}$ et $y + \frac{1}{y} = z + \frac{1}{z}$

Par la somme des deux équations on obtient $x + \frac{1}{x} = z + \frac{1}{z}$

si bien que $x \mathfrak{R} z$. Par conséquent, \mathfrak{R} est transitive. Ainsi, \mathfrak{R} est une relation d'équivalence.

$$(-1) = \{y \in \mathbb{R}^* : (-1) \mathfrak{R} y\} = \{y \in \mathbb{R}^* : y^2 + 2y + 1 = 0\} = \{-1\}$$

2. On considère la relation suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \mathfrak{R} y \iff \cos^2(x) + \sin^2(y) = 1$$

Montrer que \mathfrak{R} est une relation d'équivalence, puis déterminer la classe d'équivalence de 0.

\mathfrak{R} **Réflexive** : ?

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé quelconque. Alors $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donc $x \mathfrak{R} x$.

Par conséquent, \mathfrak{R} est réflexive (De la formule $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$).

\mathfrak{R} **Symétrique** : ?

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ 2 fixés quelconques tels que $x \mathfrak{R} y$. Alors $\cos^2(x) + \sin^2(y) = 1$ alors on a D'une part

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y &= (\cos^2 x + \sin^2 y) + (\cos^2 y + \sin^2 x) \\ &= 1 + (\cos^2 y + \sin^2 x) \end{aligned}$$

Et d'autre part

$$\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y = 1 + 1 = 2$$

Ce qui entraîne bien $\cos^2(y) + \sin^2(x) = 1$ donc $y \mathfrak{R} x$. Par conséquent, \mathfrak{R} est symétrique.

\mathfrak{R} **Transitive** : ?

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ 3 fixés quelconques tels que $x \mathfrak{R} y$ et $y \mathfrak{R} z$. Alors $\cos^2 x + \sin^2 y = 1$ et $\cos^2 y + \sin^2 z = 1$

Par la somme des deux équations on obtient $\cos^2 x + (\cos^2 y + \sin^2 y) + \sin^2 z = 2$

Ce qui implique $\cos^2 x + \sin^2 z = 1$. si bien que $x \mathfrak{R} z$.

Par conséquent, \mathfrak{R} est transitive. Ainsi, \mathfrak{R} est une relation d'équivalence.

$$\dot{0} = \{y \in \mathbb{R} : 0 \mathfrak{R} y\} = \{y \in \mathbb{R} : \cos^2 0 + \sin^2 y = 1\} = \{\}$$

3. Soit \mathfrak{R} une relation réflexive et transitive, soit \mathfrak{S} une relation qui est défini par

$$\forall x, y \in E, x \mathfrak{S} y \iff x \mathfrak{R} y \text{ et } y \mathfrak{R} x$$

Montrer que \mathfrak{S} est une relation d'équivalence.

Exercice 5

1. Dans \mathbb{Z} , on définit la relation \mathfrak{R} par :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x \mathfrak{R} y \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x - y = 2k$$

Montrons que \mathfrak{R} est une relation d'équivalence :

2. On considère sur \mathbb{R}^2 la relation binaire \mathfrak{R} telle que :

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, (x, y) \mathfrak{R} (x', y') \iff x \leq x' \text{ et } y \leq y'$$

Montrer que \mathfrak{R} est une relation d'ordre. L'ordre est total ou partiel ?

3. Soit \mathfrak{R} une relation définie sur \mathbb{N}^* comme suit :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}^*, x \mathfrak{R} y \iff \exists k \in \mathbb{N}^*, x = ky$$

Montrer que \mathfrak{R} est une relation d'ordre. Est ce que l'ordre est total ou partiel?.

Solution:

1. Dans \mathbb{Z} , on définit la relation \mathfrak{R} par :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x \mathfrak{R} y \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x - y = 2k$$

Montrons que \mathfrak{R} est une relation d'équivalence :

Réflexivité : $x \mathfrak{R} x$ car $x - x = 2 \cdot 0$ et $0 \in \mathbb{Z}$.

Symétrie : si $x \mathfrak{R} y$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = k \cdot 2$, on a donc $y - x = -k \cdot 2$ et $-k \in \mathbb{Z}$ d'où $y \mathfrak{R} x$.

Transitivité : si $x \mathfrak{R} y$ et $y \mathfrak{R} z$ alors il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $x - y = k \cdot 2$ et $y - z = k' \cdot 2$. Ainsi $x - z = x - y + y - z = (k + k') \cdot 2$. On en déduit que $x \mathfrak{R} z$.

Donc \mathfrak{R} une relation d'équivalence sur \mathbb{Z} .

Déterminons la classe d'équivalence de a .

$$\dot{a} = \{x \in \mathbb{R} : x \mathfrak{R} a\} = \{x \in \mathbb{R} : x - a = 2 \cdot k\}$$

2. On considère sur \mathbb{R}^2 la relation binaire \mathfrak{R} telle que :

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, (x, y) \mathfrak{R} (x', y') \iff x \leq x' \text{ et } y \leq y'$$

Montrer que \mathfrak{R} est une relation d'ordre. L'ordre est total ou partiel?.

3. Soit \mathfrak{R} une relation définie sur \mathbb{N}^* comme suit :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}^*, x \mathfrak{R} y \iff \exists k \in \mathbb{N}^*, x = ky$$

Montrer que \mathfrak{R} est une relation d'ordre. Est ce que l'ordre est total ou partiel?.

\mathfrak{R} **réflexive** : on a $x \mathfrak{R} x$ pour tout $x \in \mathbb{N}^*$.

\mathfrak{R} **transitive** : si x divise y (c'est à dire il existe k tel que $y = kx$) et y divise z (c'est à dire il existe k' tel que $z = k'y$) alors $z = k'y = (kk')x$ donc x divise z .

\mathfrak{R} **antisymétrique** : si $x \mathfrak{R} y$ et $y \mathfrak{R} x$ alors $x = y$.

Donc \mathfrak{R} est une relation d'ordre sur \mathbb{N}^* .

L'ordre n'est pas total (donc partiel) car si on prend par exemple $x = 4$ et $y = 5$ on a $x \not\mathfrak{R} y$ et $y \not\mathfrak{R} x$.

1.6 Applications

1.6.1 Définitions

- Une **application** (ou une **fonction**) $f : E \rightarrow F$, c'est la donnée pour chaque élément $x \in E$ d'un unique élément de F noté $f(x)$.

Notation 1.6.1.

On note une application par : f, g, h, \dots

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

$f(x)$: s'appelle l'image de x par l'application f .

x : s'appelle l'antécédent de $f(x)$ par l'application f .

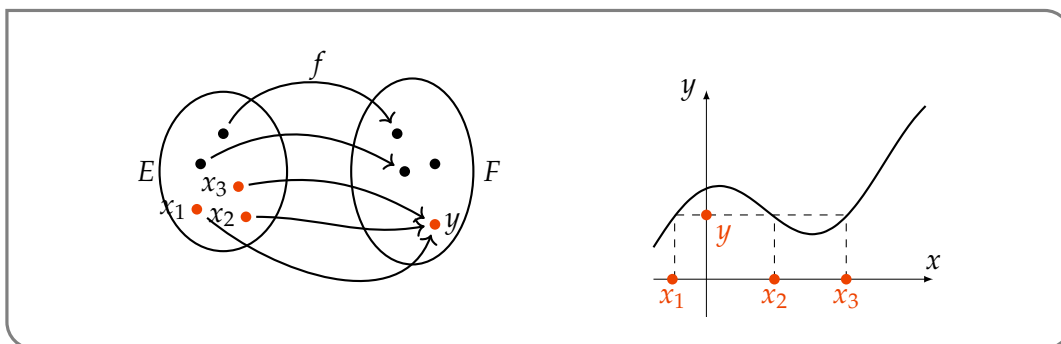
Antécédents :

Soit $y \in F$. Tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$ est appelé un **antécédent** de y .

L'ensemble des antécédents de y est donné par l'**image réciproque** :

$$f^{-1}(\{y\}).$$

Dans les figures suivantes, l'élément y admet **trois antécédents** par l'application f , à savoir x_1, x_2, x_3 .



Remarque 1.6.2. Il ya une différence entre f et $f(x)$:

f : une application.

$f(x)$: est l'image de x par l'application f .

Graphes

Le **graphe** d'une application $f : E \rightarrow F$ est le sous-ensemble $gr(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$ du produit $E \times F$.

Exemple 1.6.3

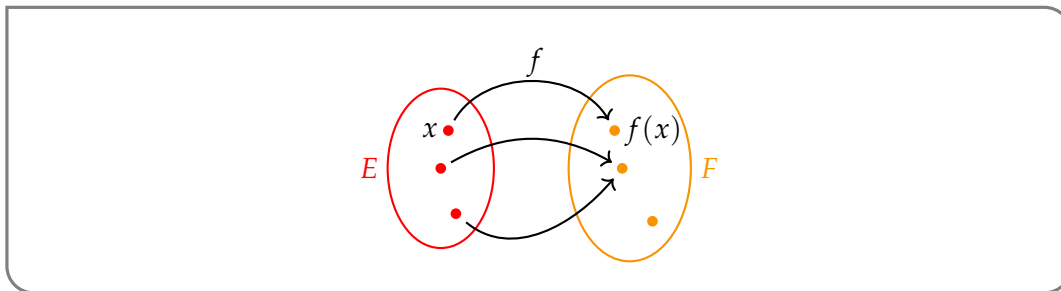
La courbe représentative d'une fonction définie sur une partie de \mathbb{R} est le graphe de cette fonction.

Exemple 1.6.3

Il existe deux manières de représenter graphiquement une application :

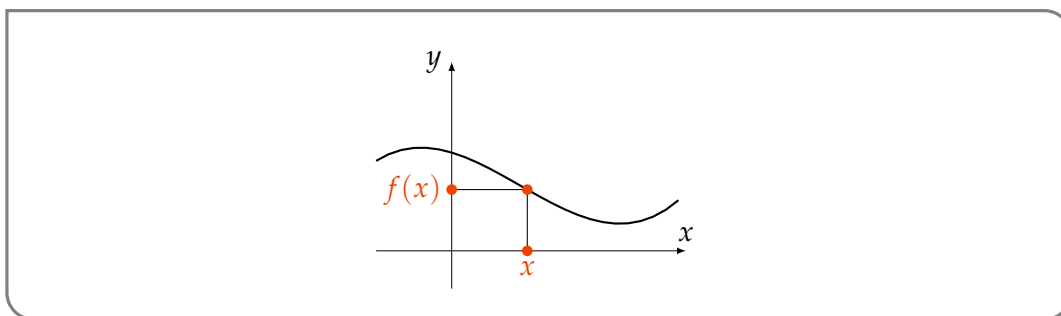
1. Première représentation : par ensembles (forme ovale).

Les ensembles de départ et d'arrivée sont représentés sous forme de deux ovales contenant leurs éléments sous forme de points. La relation $x \mapsto f(x)$ est représentée par une flèche.



2. Deuxième représentation : courbe de la fonction.

Cette représentation concerne les applications continues sur \mathbb{R} (ou sur des sous-ensembles de \mathbb{R}). L'ensemble de départ \mathbb{R} est représenté sur l'axe des abscisses, et l'ensemble d'arrivée sur l'axe des ordonnées. La relation $x \mapsto f(x)$ est alors représentée par le point $(x, f(x))$.



Exemple 1.6.4

(1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x}$ f est une fonction.

Exemple 1.6.4

Exemple 1.6.5

(2) $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x}$ f est une application.

Exemple 1.6.5

Exemple 1.6.6

(3) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto f(x) = \frac{x+1}{4}$ f est une application.

Exemple 1.6.6

Exemple 1.6.7

(4) $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x}$ f est une application.

Exemple 1.6.7

Exemple 1.6.8

L'application $id_E : E \rightarrow E$, définie par $id_E(x) = x$.

$$\begin{aligned} id_E : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto id_E(x) = x \end{aligned}$$

Exemple 1.6.8

►►► Égalité de deux applications

Soient $f, g : E \rightarrow F$ deux applications. On dit que f et g sont égales et on écrit $f = g$ si et seulement si $f(x) = g(x)$ pour tous $x \in E$.

1.6.2 ►► Restriction et prolongement d'une application

Soit $f : E \rightarrow F$ une application entre ensembles et $A \subset E$ une partie de E . La restriction de f à A est l'application $f|_A : A \rightarrow F$ définie par $f|_A(x) = f(x)$ pour $x \in A$.

Exemple 1.6.9

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2$. Elle n'est pas croissante, mais sa restriction à $[0, +\infty[$ est croissante, sa restriction à $] -\infty, 0]$ est décroissante.

Exemple 1.6.9

Prolonger $f : E \rightarrow F$ à des ensembles E' contenant E et F' contenant F , c'est trouver une application $g : E' \rightarrow F'$ telle que pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.

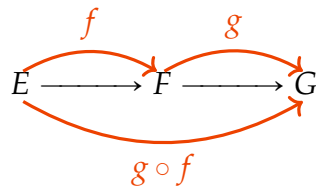
Exemple 1.6.10

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Sa courbe représentative suggère fortement de la prolonger à \mathbb{R} entier en posant $g(0) = 1$. Pourquoi?

Exemple 1.6.10

1.6.3 ► Composition d'applications

Soient E , F et G trois ensembles non vides et soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications, on définit l'application composée $g \circ f : E \rightarrow G$ par $g \circ f(x) = g(f(x))$, pour $x \in E$.



Exemple 1.6.11

Soient les applications f, g définies par :

$$f :]0, +\infty[\begin{array}{l} \longrightarrow]0, +\infty[\\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{array}, \quad g :]0, +\infty[\begin{array}{l} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x-1}{x+1} \end{array}.$$

D'où $g \circ f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ pour $x \in]0, +\infty[$:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1} = \frac{1 - x}{1 + x} = -g(x).$$

Exemple 1.6.11

Exemple 1.6.12

Soit $\text{prems} : \text{MOT} \rightarrow \text{LÉTTRE}$ l'application qui à un mot associe sa première lettre. Alors $\text{prems} \circ \text{nom}$ associe à un étudiant la première lettre de son nom,

$$\text{prems} \circ \text{nom}(\text{Wei Wei Zhao}) = \text{Z}.$$

Exemple 1.6.12

Exemple 1.6.13

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(y) = \sin y$. Alors

$g \circ f(x) = \sin(\sqrt{x})$ est définie sur \mathbb{R}_+ et n'est pas périodique. $f \circ g(y) = \sqrt{\sin x}$ est une fonction périodique, définie seulement sur une réunion d'intervalles. Par conséquent, $g \circ f \neq f \circ g$.

Exemple 1.6.13

Proposition 1.6.14. La composition des applications est associative, i.e. si $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$, alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$

qu'on peut donc noter $h \circ g \circ f$.

Démonstration. Les deux applications composées ont même ensemble de départ E et même ensemble d'arrivée H . Si $x \in E$, $(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x)$. ■

1.6.4 ► Injection, surjection et bijection

1.6.5 ► Les applications injectives, surjectives et bijectives

Soient E, F deux ensembles non vides et $f : E \rightarrow F$ une application.

Définition 1.6.15.

On dit que f est **injective** si et seulement si On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est injective si, pour tous $x, x' \in E$,

$$f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

Exemple 1.6.16

Une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, où $A \subset \mathbb{R}$, est injective si et seulement si sa courbe représentative coupe toute droite parallèle à l'axe Ox en au plus un point. Un trinôme du second degré n'est donc jamais injectif.

Exemple 1.6.16

Remarque 1.6.17. Si E et F sont des ensembles finis et s'il existe une application injective de E dans F , alors E a moins d'éléments que F .

Définition 1.6.18.

On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est **surjective** si, pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Autrement dit, f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

Exemple 1.6.19

Une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, où $A \subset \mathbb{R}$, est surjective si et seulement si sa courbe représentative coupe toutes les droites parallèle à l'axe Ox en au moins un point. Un trinôme du second degré n'est donc jamais surjectif.

Exemple 1.6.19

Remarque 1.6.20. Si E et F sont des ensembles finis et s'il existe une application surjective de E dans F , alors E a plus d'éléments que F .

Définition 1.6.21.

On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est **bijjective** si, pour tout $y \in F$, il existe un et un seul $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Autrement dit, f est bijective si et seulement si f est à la fois injective et surjective.

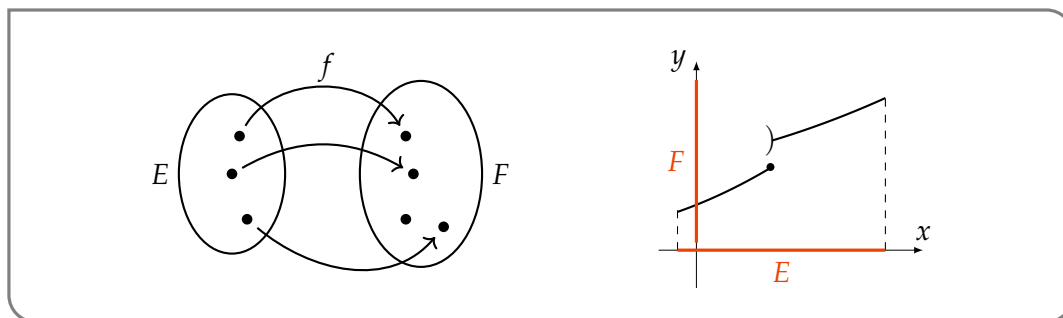
Exemple 1.6.22

Une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, où $A \subset \mathbb{R}$, est bijective si et seulement si sa courbe représentative coupe toutes les droites parallèle à l'axe Ox en exactement un point. Une fonction affine non constante est bijective.

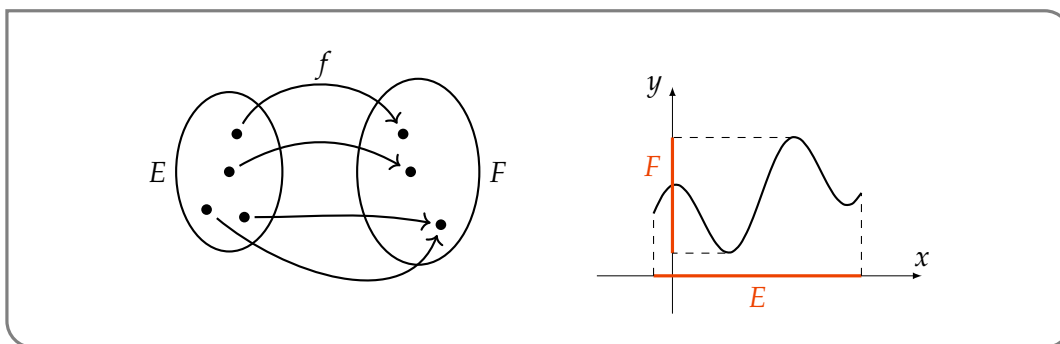
Exemple 1.6.22

Remarque 1.6.23. Si E et F sont des ensembles finis et s'il existe une application bijective de E dans F , alors E a autant d'éléments que F .

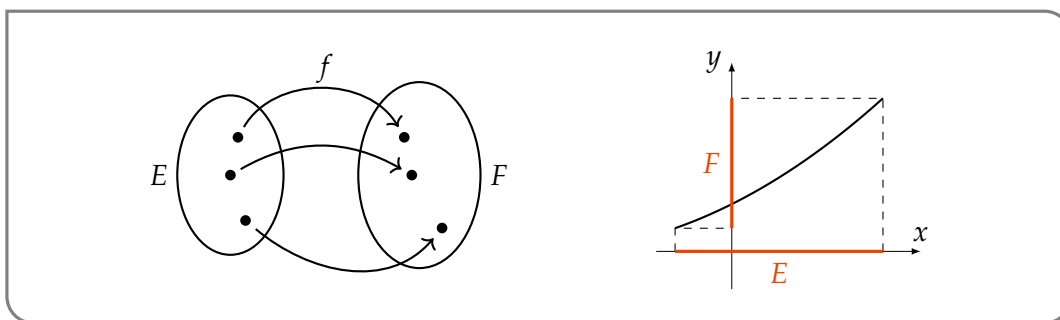
Les applications représentées dans la figure suivante sont des applications injectives



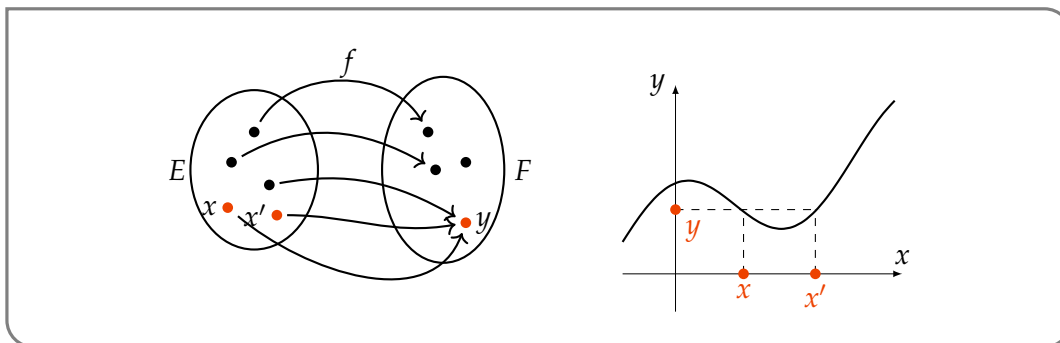
Les applications représentées dans la figure suivante sont des applications surjectives



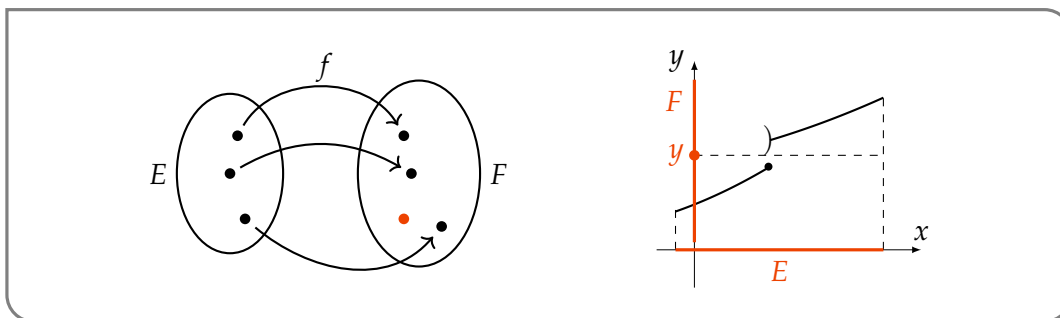
Les applications représentées dans la figure suivante sont des applications bijectives



Les applications représentées dans la figure suivante sont des applications non injectives



Les applications représentées dans la figure suivante sont des applications non surjectives



Exemple 1.6.24

On considère l'application $f_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ définie par $f_1(x) = \frac{1}{1+x}$.

Montrons que f_1 est injective :

Soient $x, x' \in \mathbb{N}$ tels que $f_1(x) = f_1(x')$.

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x'} \Rightarrow 1+x = 1+x' \Rightarrow x = x'.$$

Ainsi, f_1 est injective.

Montrons maintenant que f_1 n'est pas surjective :

Il suffit de trouver un $y \in \mathbb{Q}$ sans antécédent par f_1 .

On remarque que $f_1(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{N}$, d'où par exemple $y = 2$ n'a pas d'antécédent.

Donc f_1 n'est pas surjective.

Exemple 1.6.24

Exemple 1.6.25

On considère l'application $f_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f_2(x) = x^2$.

Injection :

f_2 n'est pas injective, car il existe $x, x' \in \mathbb{Z}$ distincts tels que $f_2(x) = f_2(x')$.

Par exemple : $x = 2$ et $x' = -2$.

Surjection :

f_2 n'est pas surjective, car il existe des $y \in \mathbb{N}$ sans antécédent.

Par exemple : pour $y = 3$, si $f_2(x) = y$ alors $x^2 = 3$, donc $x = \pm\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$.

Ainsi, $y = 3$ n'a pas d'antécédent et f_2 n'est pas surjective.

Exemple 1.6.25

Exercice 6

a) Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

- $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$, $x \mapsto x^2$.
- $f_2 : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$, $x \mapsto x^2$.
- $f_3 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $x \mapsto x^2$.
- $f_4 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto x - 7$.
- $f_5 : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$, $x \mapsto |x|$.

b) On considère l'application $f :]1, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ définie par $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Montrer que f est bijective et déterminer l'expression de sa réciproque.

Exemple 1.6.26

Soit P l'ensemble des nombres naturels pairs, et soit l'application :

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow P, \quad \forall n \in \mathbb{N}, f(n) = 2n.$$

Montrer que f est une **bijection**.

Solution :

— **Montrons d'abord que f est surjective :**

Soit $y \in P$ un élément quelconque de P . Alors il existe un entier naturel k tel que $y = 2k$, car y est un nombre naturel pair.

En posant $x = k$, on obtient :

$$f(x) = f(k) = 2k = y.$$

Ainsi, $y = f(x)$, donc f est surjective.

— **Montrons ensuite que f est injective :**

Soient $x, y \in \mathbb{N}$ tels que $f(x) = f(y)$. On a alors

$$2x = 2y \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

Ainsi, f est injective.

Comme f est à la fois injective et surjective, elle est **bijective**. C'est donc un **isomorphisme entre \mathbb{N} et P** .

Exemple 1.6.26

1.6.6 ► Applications réciproques

Soient E, F deux ensembles non vides.

Définition 1.6.27.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application bijective. Sa réciproque $f^{-1} : F \rightarrow E$ est définie par

$$\begin{array}{ccc} f : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} f^{-1} : F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & x = f^{-1}(y) \end{array} .$$

$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$ C'est à dire f est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que

$$f \circ g = \text{id}_F \text{ et } g \circ f = \text{id}_E. (g = f^{-1})$$

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

Explication

$$— f \circ g = \text{id}_F \implies \forall y \in F \quad f(g(y)) = y.$$

$$— g \circ f = \text{id}_E \implies \forall x \in E \quad g(f(x)) = x.$$

— Par exemple l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ définie par $f(x) = \exp(x)$ est bijective et sa bijection réciproque est $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(y) = \ln(y)$.

En effet $\exp(\ln(y)) = y$, pour tout $y \in]0, +\infty[$ et $\ln(\exp(x)) = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.6.28. Soient $f : E \rightarrow F$ $g : F \rightarrow G$ deux applications bijectives. L'application $g \circ f$ est une application bijective et sa bijection réciproque est donnée par $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

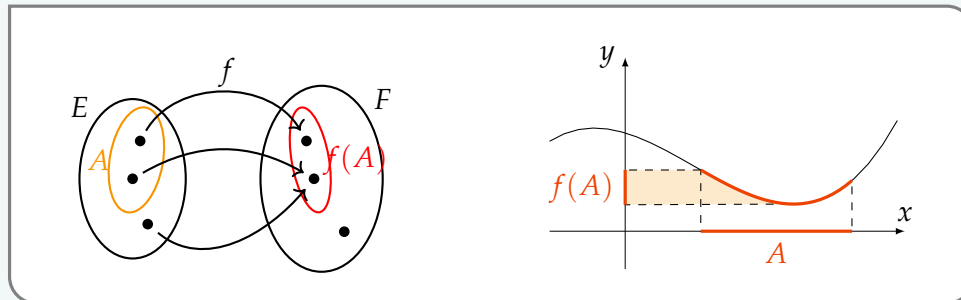
1.6.7 ► L'image directe et l'image réciproque

Soient E, F deux ensembles non vides.

Définition 1.6.29.

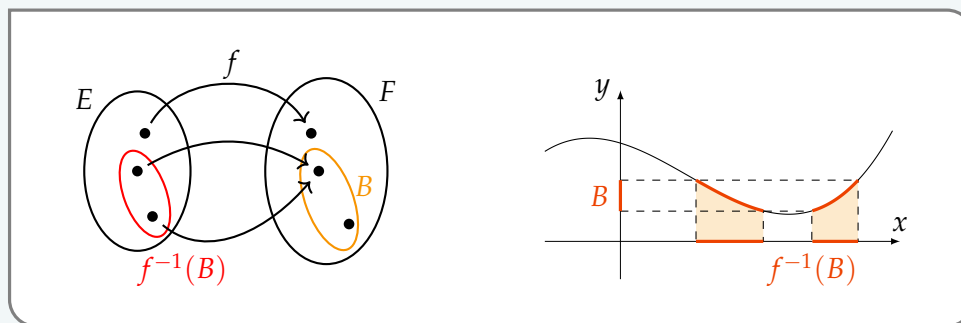
1. Soit $f : E \rightarrow F$ une application et soit $A \subset E$ un sous-ensemble de E . On définit l'**image directe** de A par l'application f le sous-ensemble de F noté $f(A)$:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in F \mid (\exists x \in A)(y = f(x))\}.$$



2. Soit $f : E \rightarrow F$ une application et soit $B \subset F$ un sous-ensemble de F . On définit l'**image réciproque** de B par l'application f le sous-ensemble de E noté $f^{-1}(B)$:

$$\{x \in E \mid f(x) \in B\} \subset E.$$



Remarque 1.6.30. La notation « $f^{-1}(B)$ » est un tout, rien ne dit que f est un fonction bijective. L'image réciproque existe quelque soit la fonction.

Propriétés

Soit l'application $f : E \rightarrow F$ et soient $A, A' \subset E, B, B' \subset F$ alors :

- $A \subset A' \implies f(A) \subset f(A')$
- $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$
- $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.
- $B \subset B' \implies f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$
- $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$
- $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$

- $A \subset f^{-1}(f(A))$
- $f(E \setminus A) \supset f(E) \setminus f(A)$
- $f(\emptyset) = \emptyset$.
- $f(f^{-1}(B)) \subset B$
- $f^{-1}(f(B)) = f^{-1}(F) \cap f^{-1}(B) = E \cap f^{-1}(B)$
- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
- f injective $\iff f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$
- f injective $\iff A = f^{-1}(f(A))$
- f surjective $\iff f(f^{-1}(B)) = B$.
- f surjective $\iff f(E) = F$

Exemple 1.6.31

- a) Soient f et g deux applications telles que $f, g : E \rightarrow F$. Nier $f = g$
- b) Représenter graphiquement l'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $n \mapsto \frac{4}{n+1}$.
- c) On considère les applications $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies successivement $f(x) = x^2$
 $g(x) = 2x + 1$ $h(x) = x^3 - 1$.
 Trouver $f \circ (g \circ h)$ et $(f \circ g) \circ h$.
- d) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie par $x \mapsto x^2$. Représenter graphiquement et trouver les ensembles suivants :
 $f([0, 1[)$ $f(\mathbb{R})$ $f(]-1, 2])$ $f^{-1}([1, 2[)$ $f^{-1}([-1, 1])$ $f^{-1}(\{3\})$ $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N})$.

Exemple 1.6.31

1.7▲ Exercices

Exercice 7 Les applications suivantes sont elles injectives, surjectives, bijectives? 1. f de \mathbb{N} dans \mathbb{N} définie par $f(x) = 2x$. 2. g de \mathbb{N} dans \mathbb{N} définie par $g(x) = 2x + 1$. 3. h de \mathbb{Z} dans \mathbb{N} définie par $h(x) = |x|E(x)$, où $E(x)$ désigne le partie entière de x . 4. u de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ définie par $u(x) = \sqrt{x}$

Solution:

1. f est injective et non surjective car les nombres impairs n'ont pas d'antécédents dans \mathbb{N} .
2. g est injective et non surjective car les nombres pairs n'ont pas d'antécédents dans \mathbb{N} .
3. h est non injective car $h(5) = h(6)$ mais $5 \neq 6$, et non surjective car les nombres impairs n'ont pas d'antécédents dans \mathbb{Z} .
4. u est injective et surjective donc bijective

Exercice 8

• Soit $f : E \rightarrow F$ une application, soient A, B deux sous-ensembles de E . Démontrer que :

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

On a $y \in f(A \cup B)$ si et seulement si il existe $x \in A \cup B$ tel $y = f(x)$. Si et seulement si (il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$) ou (il existe $x \in B$ tel que $y = f(x)$).

Ce qui équivaut à $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$, donc $y \in f(A) \cup f(B)$.

2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Soit $y \in f(A \cap B)$, donc il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$, Ainsi $y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$.

Montrons par un contre-exemple que : $f(A \cap B) \subsetneq f(A) \cap f(B)$

Soit l'application $f : \{0, 1\} \rightarrow \{1\}$ et $f(0) = f(1) = 1$. En prend $A_i = \{i\}$ avec $i = 0, 1$. On a $f(A_0 \cap A_1) = f(\emptyset) = \emptyset \neq f(A_0) \cap f(A_1) = \{1\}$

3. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

On a $x \in f^{-1}(A \cap B)$ si et seulement si $f(x) \in A \cap B$, et donc $f(x) \in A$ et $f(x) \in B$. C'est équivalent à $x \in f^{-1}(A)$ et $x \in f^{-1}(B)$ et donc $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Exercice 9

• Soit $f : E \rightarrow F$ une application, soient A, B deux sous-ensembles de E . Démontrer que :

1. Les définitions de l'injection, la surjection et la bijection d'une application.

Soit l'application $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

L'application f est injective?

$$f \text{ est injective} \iff \forall x_1, x_2 \in [-1, 1] : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \sqrt{1 - x_1^2} = \sqrt{1 - x_2^2} \\ &\Rightarrow 1 - x_1^2 = 1 - x_2^2 \\ &\Rightarrow -x_1^2 = -x_2^2 \\ &\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \\ &\Rightarrow x_1 = -x_2 \vee x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Alors L'application f n'est pas injective.

l'application f est surjective?

$$f \text{ est surjective} \iff \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in [-1, 1] : y = f(x)$$

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Rightarrow y = \sqrt{1 - x^2} \\ &\Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \\ &\Rightarrow x^2 = 1 - y^2. \end{aligned}$$

Cette equation est impossible pour $y < -1$ et $y > 1$

Alors L'application f n'est pas surjective.

L'application f n'est pas surjective et n'est pas injective donc elle n'est pas bijective

2. On définit l'application g comme suit : $g : \mathbb{R} \longrightarrow [-3, +\infty[$
 $x \longmapsto f(x) = x^2 + 4x + 1$

Calculons $g(0)$, $g(-4)$

$$g(0) = g(-4) = 1$$

L'application g n'est pas injective car pour $x_1 = 0$ et $x_2 = -4$, $x_1 \neq x_2$ mais $g(0) = g(-4)$.

L'application g est surjective ?

L'étude de la surjection conduit à la résolution de l'équation $y = g(x)$ d'inconnue x . Soit $y \geq -3$: $g(x) = y$. Résolvons cette équation, d'inconnue x . $g(x) = y \iff x^2 + 4x + 1 = y \iff x^2 + 4x + (1 - y) = 0$. Il s'agit d'une équation du second degré d'inconnue x . Résolvons la.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(1)(1 - y) = 16 - 4 + 4y = 12 + 4y = 4(3 + y) \geq 0 \text{ car } y \geq -3.$$

Deux cas sont envisageables, $\Delta > 0$ et $\Delta = 0$

Si $\Delta > 0$ i.e. $y + 3 > 0$, l'équation a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{4(3 + y)}}{2} = -2 + \sqrt{3 + y}, \quad x_2 = \frac{-4 - \sqrt{4(3 + y)}}{2} = -2 - \sqrt{3 + y}$$

Si $\Delta = 0$ i.e. $y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3$, l'équation a une solution double : $x_0 = \frac{-4}{2} = -2$

Dans tous les cas, on a obtenu : $\forall y \in [-3, +\infty], \exists x \in \mathbb{R} : y = g(x)$. L'application g est donc surjective.

L'application g n'est pas bijective car g n'est pas injective.

3. On considère les applications suivants :

a. $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [0, 2[$
 $x \longmapsto f(x) = \frac{2x^2}{1+x^2}$

Montrons que f est bijective

L'application f est injective ?

$$f \text{ est injective} \iff \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\begin{aligned}
f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \frac{2x_1^2}{1+x_1^2} = \frac{2x_2^2}{1+x_2^2} \\
&\Rightarrow 2x_1^2(1+x_2^2) = 2x_2^2(1+x_1^2) \\
&\Rightarrow 2x_1^2 = 2x_2^2 \\
&\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \\
&\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ (car } x_1, x_2 \text{ ont la même signe)}
\end{aligned}$$

Alors L'application f est injective.

l'application f est surjective?

$$f \text{ est surjective} \iff \forall y \in [0, 2[, \exists x \in \mathbb{R}^+ : y = f(x)$$

$$\begin{aligned}
y = f(x) &\iff y = \frac{2x^2}{1+x^2} \\
&\iff (1+x^2)y = 2x^2 \\
&\iff -y = x^2(y-2) \\
&\iff x^2 = \frac{-y}{y-2} \\
&\iff x^2 = \frac{y}{2-y} \\
&\iff x = \sqrt{\frac{y}{2-y}} \vee x = -\sqrt{\frac{y}{2-y}} \text{ (une solution qui ne convient pas)}
\end{aligned}$$

Alors $x = \sqrt{\frac{y}{2-y}}$ qui existe $\forall y \in [0, 2[$

Conclusion : f est bijective car elle est injective et surjective.

De plus l'application réciproque est :

$$\begin{aligned}
f^{-1} : [0, 2[&\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\
x &\longmapsto f^{-1}(x) = \frac{x}{2-x}
\end{aligned}$$

b. $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $x \longmapsto g(x, y) = (x + 3y, x - y)$

Montrons que g est bijective

L'application g est injective?

$$g \text{ est injective} \iff \forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = g(x', y') \Rightarrow (x, y) = (x', y')$$

NOMBRES COMPLEXES

2.1▲ Introduction

Nous avons constaté que certaines équations du second degré peuvent ne posséder aucune solution réelle. C'est le cas, par exemple, de l'équation

$$x^2 = -1, \quad \text{soit} \quad x^2 + 1 = 0,$$

qui ne possède aucune solution dans \mathbb{R} .

Pour dépasser cette limite, les mathématiciens ont introduit un nombre dit imaginaire, noté i , défini par

$$i^2 = -1,$$

et ont ainsi construit l'ensemble des nombres complexes.

2.2▲ L'ensemble des nombres complexes \mathbb{C}

2.2.1 ► Définition d'un nombre complexe

Définition 2.2.1 (Nombre Complexe).

- L'ensemble des nombres de la forme $x + iy$, où x et y sont des réels et i est tel que $i^2 = -1$, est appelé ensemble des nombres complexes. On le note \mathbb{C} . Les propriétés des opérations addition et multiplication dans \mathbb{R} se prolongent dans \mathbb{C} .
- L'écriture $z = x + iy$ est la forme algébrique du nombre complexe z . x est la partie réelle de z , y sa partie imaginaire. On note $\operatorname{Re}(z) = x$, $\operatorname{Im}(z) = y$. \mathbb{R} est une partie de \mathbb{C} , \mathbb{R} contient les nombres complexes dont la partie imaginaire y est nulle.

Exemple 2.2.2

Le nombre $z = -3 + 2i$ est un nombre complexe tel que $\operatorname{Re}(z) = -3$ et $\operatorname{Im}(z) = 2$

Exemple 2.2.2

Remarque 2.2.3. Nombres particuliers :

1. Si $\operatorname{Im}(z) = 0$, on a $z = x = \operatorname{Re}(z)$, on dit que z est un réel,
2. Si $\operatorname{Re}(z) = 0$, on a $z = iy = i \operatorname{Im}(z)$, on dit que z est un imaginaire pur.
3. Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nuls.

Exemple 2.2.4

Dans chacun des exemples suivants, on donne la partie réelle et la partie imaginaire :

$$\begin{array}{lll} \rightarrow z = 2 + 3i & \operatorname{Re}(z) = 2 & \operatorname{Im}(z) = 3 \\ \rightarrow z = -1 + \frac{1}{2}i & \operatorname{Re}(z) = -1 & \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2} \\ \rightarrow z = -i & \operatorname{Re}(z) = 0 & \operatorname{Im}(z) = -1 \\ \rightarrow z = \pi & \operatorname{Re}(z) = \pi & \operatorname{Im}(z) = 0 \\ \rightarrow z = 4i - \frac{1}{3} & \operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{3} & \operatorname{Im}(z) = 4 \end{array}$$

Exemple 2.2.4

Proposition 2.2.5. Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire :

$$z = z' \Leftrightarrow x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y = y' \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z').$$

2.2.2 ► Opérations dans \mathbb{C}

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes, alors on définit les opérations suivantes :

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = x + x' + i(y + y') \quad (2.2.1)$$

$$z \cdot z' = (x + iy) \cdot (x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + yx') \quad (2.2.2)$$

$$\lambda z = \lambda(x + iy) = (\lambda x) + i(\lambda y), \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.2.3)$$

Remarque 2.2.6. Le produit $z \cdot z'$ de deux nombres complexes z et z' est aussi noté zz' ou $z \times z'$.

Exemple 2.2.7

Soit $z = 2 + 3i$ et $z' = i - 5$, on a :

$$\rightarrow z + z' = 2 + 3i + i - 5 = -3 + 4i,$$

$$\rightarrow z - z' = 2 + 3i - (i - 5) = 2 + 3i - i + 5 = 7 + 2i,$$

$$\rightarrow 2z - 3z' = 2(2 + 3i) - 3(i - 5) = 4 + 6i - 3i + 15 = 19 + 3i,$$

$$\rightarrow zz' = (2 + 3i)(i - 5) = 2i - 10 + 3i^2 - 15i = 2i - 10 - 3 - 15i = -13 - 13i,$$

$$\rightarrow z^2 = (2 + 3i)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 3i + (3i)^2 = 4 + 12i + 9i^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i.$$

Exemple 2.2.7

Définition 2.2.8 (Conjugué d'un nombre complexe).

Si $z \in \mathbb{C}$, $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, le nombre complexe $\bar{z} = x - yi$ est appelé le **complexe conjugué** de z .

Proposition 2.2.14. Soit z et z' deux nombres complexes, alors on a :

- | | |
|---|---|
| ◆ $ z = 0 \Leftrightarrow z = 0.$ | ◆ $ z = \sqrt{z\bar{z}}$ |
| ◆ $ -z = \bar{z} = z .$ | ◆ $ z + z' \leq z + z' $ |
| ◆ $ z \times z' = z \times z' .$ | ◆ $ z z' \leq z - z' $ |
| ◆ $\left \frac{1}{z} \right = \frac{1}{ z }.$ | ◆ $\left \frac{z}{z'} \right = \frac{ z }{ z' }.$ |

Exemple 2.2.15

Soient $z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = 2 - 3i$ deux nombres complexes.

On a :

$$|z_1| = |-1 + 2i| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5},$$

$$|z_2| = |2 - 3i| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13},$$

$$\left| \frac{1}{z_1} \right| = \frac{1}{|-1 + 2i|} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}.$$

Exemple 2.2.15

2.2.3 ►► Le plan complexe

Soit le plan (P) muni du repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

À tout nombre complexe $z = x + iy$, on associe le point $M(x, y)$ de coordonnées (x, y) .

Par définition :

- Le point M est l'image de z ;
- Le nombre z est l'affixe du point M .

(cf figure 2.1 p. 47). D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$OM^2 = x^2 + y^2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad OM = |z|.$$

Donc le module de z est la distance OM (cf figure 2.1 p. 47).

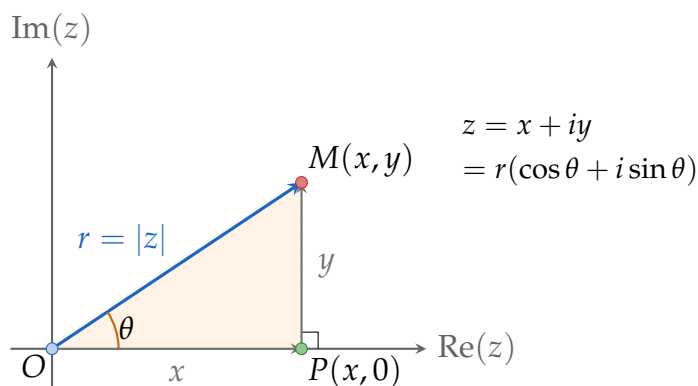


FIGURE 2.1 – Le plan complexe : coordonnées cartésiennes

2.2.4 ►► Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition 2.2.16 (Argument d'un nombre complexe).

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul. On appelle **argument** de z et on note $\arg(z)$ toute mesure θ dans $[0, 2\pi[$ de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$, et on écrit :

$$\arg(z) = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(On écrit aussi $\arg(z) = \theta [\pi]$.)

On a :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{|z|}, \\ \sin \theta = \frac{y}{|z|}. \end{cases}$$

On appelle **forme trigonométrique** de z la représentation suivante :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.

On note aussi la forme trigonométrique d'un complexe z par :

$$z = [r, \theta].$$

Pour trouver la forme trigonométrique d'un nombre z , il faut donc calculer successivement le module et l'argument de z .

Exemple 2.2.17

Calcul d'un argument de nombres complexes :

$$\rightarrow z_1 = 2 + 2i :$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \arg(2 + 2i) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\rightarrow z_2 = 1 + i\sqrt{3} :$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}, \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \arg(1 + \sqrt{3}i) = \frac{\pi}{3}.$$

Exemple 2.2.17

Propriétés. Soient $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ et $z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$ deux nombres complexes sous forme trigonométrique, alors on a : les principales **propriétés géométriques** suivantes :

- a) $z = z'$ si et seulement si $|z| = |z'|$ et $\arg(z) = \arg(z')$.
- b) $|zz'| = |z| \cdot |z'| \Rightarrow \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$
- c) $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$, $z' \neq 0 \Rightarrow \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}$
- d) $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$.
- e) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $z^n = |z|^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$ (formule de Moivre).

Exemple 2.2.18

D'après l'exemple précédent (voir l'exemple 2.2.17), on obtient :

$$\rightarrow \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}.$$

$$\rightarrow \arg\left(\frac{1}{z_1}\right) = -\arg z_1 = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\rightarrow \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12}.$$

Exemple 2.2.18

2.2.5 ► Forme exponentielle d'un nombre complexe

Définition 2.2.19.

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul de module $r = |z|$ et dont un argument est $\theta = \arg(z)$.

On note ce nombre z sous la forme $z = r e^{i\theta}$.

Cette écriture est appelée **représentation exponentielle** de z .

Remarque 2.2.20. On a alors $z = r e^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r \cos \theta + ir \sin \theta = a + ib$.

Exemple 2.2.21

Soient $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$ deux nombres complexes.

Différentes écritures des nombres complexes z_1 et z_2 :

Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
$z_1 = 1 - i$	$\sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]$	$\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$
$z_2 = \sqrt{3} + i$	$2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right]$	$2 e^{i\frac{\pi}{6}}$

Exemple 2.2.21

Exemple 2.2.22

Soit $z = z = 4 e^{i\frac{3\pi}{4}}$ un nombre complexe.

Passage de la forme exponentielle à la forme algébrique de z :

$$\begin{aligned}
 z &= 4 e^{i\frac{3\pi}{4}} \\
 &= 4 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \\
 &= 4 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
 &= -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

Exemple 2.2.22

Proposition 2.2.23. Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, tous $r, r' \in \mathbb{R}_*^+$, tout $n \in \mathbb{N}$:

- ◆ $r e^{i\theta} \times r' e^{i\theta'} = r r' e^{i(\theta+\theta')}$.
- ◆ $(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$.
- ◆ $\frac{r e^{i\theta}}{r' e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$.

Exemple 2.2.24

Soit $z_1 = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = 2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$:

$$\rightarrow z_1 z_2 = 2 \times 2\sqrt{3} e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6})} = 4\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

$$\rightarrow z_2^4 = (2\sqrt{3})^4 e^{i4\frac{\pi}{6}} = 144 e^{\frac{2i\pi}{3}}.$$

$$\rightarrow \frac{z_2}{z_1} = \frac{2\sqrt{3}}{2} e^{i(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3})} = 2 e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

Exemple 2.2.24

2.2.6 ▶ Formule d'Euler

Si $\theta \in \mathbb{R}$ on a la formule d'Euler :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Une application de la formule d'Euler : la linéarisation d'expressions trigonométriques

▶▶ Linéarisation de $\cos^n \theta$ et $\sin^n \theta$

Linéariser $\cos^n \theta$ ou $\sin^n \theta$, c'est en donner une expression qui ne contient aucun produit de fonctions circulaires. Cette opération est possible, en développant $\cos^n \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^n$ à l'aide de la formule du binôme (proposition B.0.2 p. 103).

Exemple 2.2.25

$$\begin{aligned}
 \cos^3 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 = \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^3}{2^3} \\
 &= \frac{1}{2^3} \left[e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta} e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta} \right] \\
 &= \frac{1}{2^3} \left[e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} + 3(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \right] \\
 &= \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin^3 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3}{2^3 i^3} \\
 &= \frac{-1}{2^3 i} \left[e^{3i\theta} - e^{-3i\theta} - 3(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \right] \\
 &= \frac{-1}{4} \sin 3\theta + \frac{3}{4} \sin \theta
 \end{aligned}$$

Exemple 2.2.25

Exercice 10

Linéariser $\cos^4 \theta$, $\sin^4 \theta$ et $\cos^3 \theta \sin^2 \theta$.

2.2.7 ► Formule de Moivre

On a

$\forall n \in \mathbb{N} : e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$, soit :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$.

C'est ce qu'on appelle [la formule de De Moivre](#).

►►► Une application de la formule de Moivre : la factorisation d'expressions trigonométriques

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite factoriser $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

C'est l'opération inverse de la linéarisation.

Pour la réaliser, on utilise le fait que $\cos n\theta$ est la partie réelle (et $\sin n\theta$ la partie imaginaire) de $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$, que l'on développe à l'aide de la formule du binôme (rappelée en §B, p. 103).

Exemple 2.2.26

Exemple pour $n = 3$:

$$\begin{aligned}\cos 3\theta + i \sin 3\theta &= (\cos \theta + i \sin \theta)^3 \\ &= \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta + 3i^2 \cos \theta \sin^2 \theta + i^3 \sin^3 \theta \\ &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta).\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires des deux membres, on obtient

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta \\ \sin 3\theta &= 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta.\end{aligned}$$

Si on le souhaite, on peut améliorer ces égalités en utilisant $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, ce qui donne alors

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \\ \sin 3\theta &= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta.\end{aligned}$$

Exemple 2.2.26

Exercice 11

Écrire $\cos 4\theta$, $\sin 4\theta$ et $\cos 3\theta \sin 2\theta$ en fonction de puissances de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

2.3▲ Équation du second degré dans \mathbb{C}

2.3.1 ► Équations du second degré à coefficients réels

Proposition 2.3.1. Soit $az^2 + bz + c = 0$ une équation du second degré où $a; b; c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

◆ Si $\Delta > 0$, l'équation du second degré admet deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

◆ Si $\Delta = 0$, l'équation du second degré admet une unique solution réelle :

$$z_0 = \frac{-b}{2a}.$$

◆ Si $\Delta < 0$, l'équation du second degré admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Exemple 2.3.2

1. Résolvons dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$:

$$\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = -4 = (2i)^2.$$

\rightarrow Le discriminant étant négatif, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$\rightarrow z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i.$$

2. Résolvons dans \mathbb{C} l'équation $z^2 + 6z + 9 = 0$:

$$\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 0.$$

\rightarrow Le discriminant étant nul, l'équation admet une solution double :

$$\rightarrow z_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2} = -3.$$

3. Résolvons dans \mathbb{C} l'équation $z^2 + 2z - 3 = 0$:

$$\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 16 = 4^2.$$

\rightarrow Le discriminant étant positif, l'équation admet deux solutions réelles :

$$\rightarrow z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 4}{2} = 1 \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 4}{2} = -3.$$

Exemple 2.3.2

2.4▲ Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe

2.4.1 ► Racines carrées d'un nombre complexe

Soit $Z = x + iy$ un nombre complexe avec $x, y \in \mathbb{R}$. On appelle **racines carrées** de Z , les solutions z dans \mathbb{C} de l'équation $z^2 = Z$.

Méthode de résolution algébrique de $z^2 = Z$.

Posons $Z = a + ib$ et désignons par $x + iy$ une des racines carrées de Z . On a :

$$z^2 = Z \iff (x + iy)^2 = a + ib$$

$$\iff (x^2 - y^2) + i(2xy) = a + ib$$

D'où :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (3) \end{cases}$$

La résolution de ce système nous donne les racines carrées z de Z .

Méthode de résolution trigonométrique de $z^2 = Z$.

Soit $Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ un complexe. Le nombre complexe $z = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ est la racine de $z^2 = Z$, on a :

$$z^2 = Z \iff r(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho^2(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha)$$

d'où :

$$\begin{cases} \rho^2 = r & \iff \rho = \sqrt{r} \\ 2\alpha = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} & \iff \alpha = \frac{\theta}{2} + k\pi, k \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Conclusion : Les solutions de l'équation $z^2 = Z$ sont :

$$z_1 = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{r} \left(\cos \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right) \right)$$

Exemple 2.4.1

Déterminer les racines carrées de $-3 + 4i$, par la méthode de résolution algébrique.

Désignons par $x + iy$ une des racines carrées de Z . On a :

$$z^2 = -3 + 4i \iff (x + iy)^2 = -3 + 4i$$

$$\iff (x^2 - y^2) + i(2xy) = -3 + 4i$$

D'où :

$$z^2 = Z \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 & (1) \\ 2xy = 4 & (2) \\ x^2 + y^2 = 5 & (3) \end{cases}$$

De (1) et (3) on a : $2x^2 = 2$ où $x = 1$ ou $x = -1$, de l'équation (2) on aura :

$$\text{Si } x = 1 \text{ on obtient } y = \frac{2}{2x} = \frac{2}{2(1)} = 2$$

$$\text{Si } x = -1 \text{ on obtient } y = \frac{2}{2x} = \frac{2}{2(-1)} = -2$$

Alors, les racines carrées de $-3 + 4i$ sont :

$$z_1 = 1 + 2i \quad \text{et} \quad z_2 = -1 - 2i.$$

Exemple 2.4.1

Exemple 2.4.2

Déterminer les racines carrées de $Z = -1 + \sqrt{3}i$, par la méthode de résolution trigonométrique.

On écrit d'abord Z sous la forme trigonométrique :

$$|Z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2,$$

soit $\theta \in [0, 2\pi[$ l'argument de Z , donc on a :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{|Z|} = \frac{-1}{2}, \\ \sin \theta = \frac{y}{|Z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

D'où $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi :

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

est la forme trigonométrique de Z .

Le nombre complexe $z = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ est la racine de $z^2 = Z$, on a :

$$z^2 = Z \iff 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \rho^2 (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha)$$

d'où :

$$\begin{cases} \rho^2 = 2 & \iff \rho = \sqrt{2}, \\ 2\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} & \iff \alpha = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Alors, les racines carrées de $-1 + \sqrt{3}i$ sont :

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right).$$

Exemple 2.4.2

2.4.2 ► Équations du second degré à coefficients complexes

Proposition 2.4.3. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, avec $a \neq 0$. Alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions complexes (qui peuvent être identiques).

On procède comme dans le cas réel :

$$az^2 + bz + c = a \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right], \quad (2.4.1)$$

donc $az^2 + bz + c = 0$ est équivalent à

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0,$$

où Δ est le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. On distingue deux cas :

— Si $\Delta \neq 0$, alors $\Delta = b^2 - 4ac$ admet deux racines carrées complexes distinctes, notées δ et $-\delta$. Alors les solutions sont

$$z_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} \text{ et } z_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} \quad (2.4.2)$$

et elles sont distinctes.

— Si $\Delta = 0$, alors

$$-\frac{b}{2a} \quad (2.4.3)$$

est racine double.

Les formules (2.4.2), (2.4.3) sont à retenir.

Remarque 2.4.4. Dans le cas particulier des coefficients réels, $\Delta \in \mathbb{R}$.

1. Si $\Delta > 0$, il y a deux racines réelles distinctes,
2. Si $\Delta < 0$, $\delta = i\sqrt{-\Delta}$ et il y a deux racines complexes conjuguées.

Exemple 2.4.5

Réolvons l'équation

$$z^2 - (2+i)z - 1 + 7i = 0.$$

C'est une équation quadratique $az^2 + bz + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -(2+i)$, $c = -1 + 7i$.
On utilise la méthode vue en 2.4.1.

Le discriminant vaut :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = (-(2+i))^2 - 4(1)(-1+7i) \\ &= (2+i)^2 - 4(-1+7i) = 7 - 24i \end{aligned}$$

Soit $\delta = a + ib$ une des racines carrées de Δ . On a :

$$\begin{aligned} \delta^2 = 7 - 24i &\iff (a + ib)^2 = 7 - 24i \\ &\iff (a^2 - b^2) + i(2ab) = 7 - 24i \end{aligned}$$

D'où :

$$\delta^2 = 7 - 24i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 7 & (1) \\ 2ab = -24 & (2) \\ a^2 + b^2 = x^2 + y^2 = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25 & (3) \end{cases}$$

De (1) et (3) on a : $2a^2 = 32$ donc $a = 4$ ou $a = -4$. De l'équation (2) on aura :

$$\text{Si } a = 4 \Rightarrow b = \frac{-12}{a} = \frac{-12}{4} = -3$$

$$\text{Si } a = -4 \Rightarrow b = \frac{-12}{a} = \frac{-12}{-4} = 3$$

Par conséquent, Δ admet deux racines carrées : $\delta = 4 - 3i$ et $-\delta = -4 + 3i$.

Alors l'équation possède deux racines complexes :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{2 + i + 4 - 3i}{2} = 3 - i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a} = \frac{2 + i - 4 + 3i}{2} = -1 + 2i.$$

Exemple 2.4.5

2.4.3 ► Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe

Soit $Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ un complexe. On appelle **racines $n^{\text{ièmes}}$ de Z** les solutions z dans \mathbb{C} de l'équation :

$$z^n = Z, \quad n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}.$$

Posons $z = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ est la racine de $z^n = Z$, on a :

$$z^n = Z \Leftrightarrow \rho^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

d'où :

$$\rho^n = r \quad \text{et} \quad n\alpha = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi :

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Conclusion : L'ensemble des solutions de l'équation $z^n = Z$ est :

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right], \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

2.4.4 ► Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont les solutions de l'équation :

$$z^n = 1.$$

Les solutions de cette équation sont :

$$z_k = \cos \left(\frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{2k\pi}{n} \right), \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Exemple 2.4.6

— Trouver les racines cubiques de $Z = 1$, et vérifier que la somme de ces racines est nulle.

On écrit d'abord Z sous la forme trigonométrique. On a :

$$|Z| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1.$$

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$ l'argument de 1, donc :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{|Z|} = \frac{1}{1} = 1, \\ \sin \theta = \frac{y}{|Z|} = \frac{0}{1} = 0. \end{cases}$$

Exemple 2.4.6

2.5▲ Exercices

Exercice 12

Calculer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

- a) $z_1 = 4 + 5i$,
- b) $z_2 = (-2 + 2i) + (5 + 3i)$,
- c) $z_3 = (-3 - 7i)(1 - 2i)$,
- d) $z_4 = (4 + 5i)(5 + 3i)(1 - 2i)$,
- e) $z_5 = \frac{4 - 3i}{5 + 2i}$,
- f) $z_6 = \frac{(4 - 3i)(1 - 2i)}{7 - 3i}$,
- g) $z_7 = \frac{(7 + 6i)(-3 - 2i)}{2 + i} + 4 + 6i$.

Solution:

- a) $z_1 = 4 + 5i \rightarrow \operatorname{Re}(z_1) = 4, \operatorname{Im}(z_1) = 5$.
- b) $z_2 = (-2 + 2i) + (5 + 3i) = 3 + 5i \rightarrow \operatorname{Re}(z_2) = 3, \operatorname{Im}(z_2) = 5$.
- c) $z_3 = (-3 - 7i)(1 - 2i) = -17 - i \rightarrow \operatorname{Re}(z_3) = -17, \operatorname{Im}(z_3) = -1$.
- d) $z_4 = (4 + 5i)(5 + 3i)(1 - 2i) = 79 + 27i \rightarrow \operatorname{Re}(z_4) = 79, \operatorname{Im}(z_4) = 27$.
- e) $z_5 = \frac{4 - 3i}{5 + 2i} = \frac{14}{29} - \frac{23}{29}i \rightarrow \operatorname{Re}(z_5) = \frac{14}{29}, \operatorname{Im}(z_5) = -\frac{23}{29}$.
- f) $z_6 = \frac{(4 - 3i)(1 - 2i)}{7 - 3i} = \frac{19}{58} - \frac{83}{58}i \rightarrow \operatorname{Re}(z_6) = \frac{19}{58}, \operatorname{Im}(z_6) = -\frac{83}{58}$.
- g) $z_7 = \frac{(7 + 6i)(-3 - 2i)}{2 + i} + 4 + 6i = -6 - 5i \rightarrow \operatorname{Re}(z_7) = -6, \operatorname{Im}(z_7) = -5$.

Exercice 13 Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de nombre complexe :

$$z = \frac{1 + im}{2m + i(m^2 - 1)} \quad \text{pour } m \in \mathbb{R}.$$

Solution: On veut écrire $z = \frac{1+im}{2m+i(m^2-1)}$ sous la forme $z = a + ib$.

On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur : $(2m + i(m^2 - 1)) = 2m - i(m^2 - 1)$, donc

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1 + im)(2m - i(m^2 - 1))}{(2m)^2 + (m^2 - 1)^2} \\ &= \frac{2m - i(m^2 - 1) + 2im^2 + m(m^2 - 1)}{4m^2 + (m^4 - 2m^2 + 1)} = \frac{m^3 + m + i(m^2 + 1)}{(m^2 + 1)^2} \\ &= \frac{m^3 + m}{(m^2 + 1)^2} + i \frac{m^2 + 1}{(m^2 + 1)^2} \\ &= \frac{m}{m^2 + 1} + i \frac{1}{m^2 + 1}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\boxed{\operatorname{Re}(z) = \frac{m}{m^2 + 1}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{m^2 + 1}}.$$

Exercice 14 Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer le conjugué des nombres complexes suivants en fonction de $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$:

- | | | | |
|---------------|----------------------|----------------------|-------------------------|
| a) $z + 1$ | c) $\bar{z} + 2z$ | e) $z^3 + 1$ | g) $z - \bar{z} + iz$ |
| b) $z^2 + 3i$ | d) $\bar{z} + z - i$ | f) $iz^2 - 3\bar{z}$ | h) $z^2 - i\bar{z} + 4$ |

Solution: Soit $z = x + iy$ avec $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$.

(a) $z + 1 = (x + 1) + iy \implies \overline{z + 1} = (x + 1) - iy = \operatorname{Re}(z) + 1 - i \operatorname{Im}(z)$

(b) $z^2 + 3i = (x + iy)^2 + 3i = (x^2 - y^2) + i(2xy + 3) \implies \overline{z^2 + 3i} = x^2 - y^2 - i(2xy + 3)$

(c) $\bar{z} + 2z = (x - iy) + 2(x + iy) = 3x + iy \implies \overline{\bar{z} + 2z} = 3x - iy$

(d) $\bar{z} + z - i = (x - iy) + (x + iy) - i = 2x - i \implies \overline{\bar{z} + z - i} = 2x + i$

(e) On a

$$z^3 + 1 = (x + iy)^3 + 1 = (x^3 - 3xy^2 + 1) + i(3x^2y - y^3)$$

On en déduit : $\overline{z^3 + 1} = x^3 - 3xy^2 + 1 - i(3x^2y - y^3)$

(f) On a

$$\begin{aligned} iz^2 - 3\bar{z} &= i(x + iy)^2 - 3(x - iy) \\ &= i(x^2 - y^2 + 2ixy) - 3x + 3iy \\ &= (-2xy - 3x) + i(x^2 - y^2 + 3y) \end{aligned}$$

On en déduit : $\overline{iz^2 - 3\bar{z}} = -2xy - 3x - i(x^2 - y^2 + 3y)$

(g) On a

$$\begin{aligned} z - \bar{z} + iz &= (x + iy) - (x - iy) + i(x + iy) \\ &= 2iy + (ix - y) \\ &= -y + i(x + 2y) \end{aligned}$$

On en déduit : $\overline{z - \bar{z} + iz} = -y - i(x + 2y)$

(h) On a

$$\begin{aligned} z^2 - i\bar{z} + 4 &= (x + iy)^2 - i(x - iy) + 4 \\ &= (x^2 - y^2 + 2ixy) - ix - y + 4 \\ &= (x^2 - y^2 - y + 4) + i(2xy - x) \end{aligned}$$

On en déduit : $\overline{z^2 - i\bar{z} + 4} = (x^2 - y^2 - y + 4) - i(2xy - x)$ **Exercice 15**

1. Calculer le module des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 2 + 5i, z_2 = -3 + 2i, z_3 = (3 - 2i)(9 + i), z_4 = \frac{2 + 5i}{5 - 2i}$$

2. Exprimer le module des nombres complexes suivants à l'aide du module de z :

$$z\bar{z}, 2z^2, \frac{2}{\bar{z}}, 3\frac{z^2}{z}$$

Solution:

1. Calcul des modules :

a) $z_1 = 2 + 5i \implies |z_1| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$.

b) $z_2 = -3 + 2i \implies |z_2| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$.

c) $z_3 = (3 - 2i)(9 + i)$. D'abord, on calcule le produit :

$$(3 - 2i)(9 + i) = 27 + 3i - 18i - 2i^2 = 27 - 15i + 2 = 29 - 15i.$$

Donc $|z_3| = \sqrt{29^2 + (-15)^2} = \sqrt{841 + 225} = \sqrt{1066}$.

d) $z_4 = \frac{2+5i}{5-2i}$. On utilise $|z_4| = \frac{|2+5i|}{|5-2i|}$:

$$|2 + 5i| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}, \quad |5 - 2i| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}.$$

Donc $|z_4| = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = 1$.

2. Modules en fonction de $|z|$:

- a) $|z\bar{z}| = |z||\bar{z}| = |z||z| = |z|^2$.
 b) $|2z^2| = 2|z^2| = 2|z|^2$.
 c) $|\frac{z}{\bar{z}}| = \frac{|z|}{|\bar{z}|} = \frac{|z|}{|z|}$.
 d) $|3\frac{z^2}{z}| = 3\frac{|z|^2}{|z|} = 3\frac{|z|^2}{|z|} = 3|z|$.

Exercice 16

1. Représenter les points d'affixes suivantes dans le plan $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$:

a) $z = 1 - i$, b) \bar{z} , c) $z + \bar{z}$, d) $z - \bar{z}$.

2. Représenter les vecteurs suivants dans le plan $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$:

a) \vec{v} d'affixe $2 + i$, b) \vec{w} d'affixe $-3 + 2i$, c) $\vec{v} + \vec{w}$, d) $2\vec{v} - \vec{w}$.

Solution:

1. Représentation des points dans le plan complexe :

Soit $z = 1 - i$. Alors $\bar{z} = 1 + i$.

- (a) $z = 1 - i \rightarrow (1, -1)$
 (b) $\bar{z} = 1 + i \rightarrow (1, 1)$
 (c) $z + \bar{z} = (1 - i) + (1 + i) = 2 \rightarrow (2, 0)$
 (d) $z - \bar{z} = (1 - i) - (1 + i) = -2i \rightarrow (0, -2)$

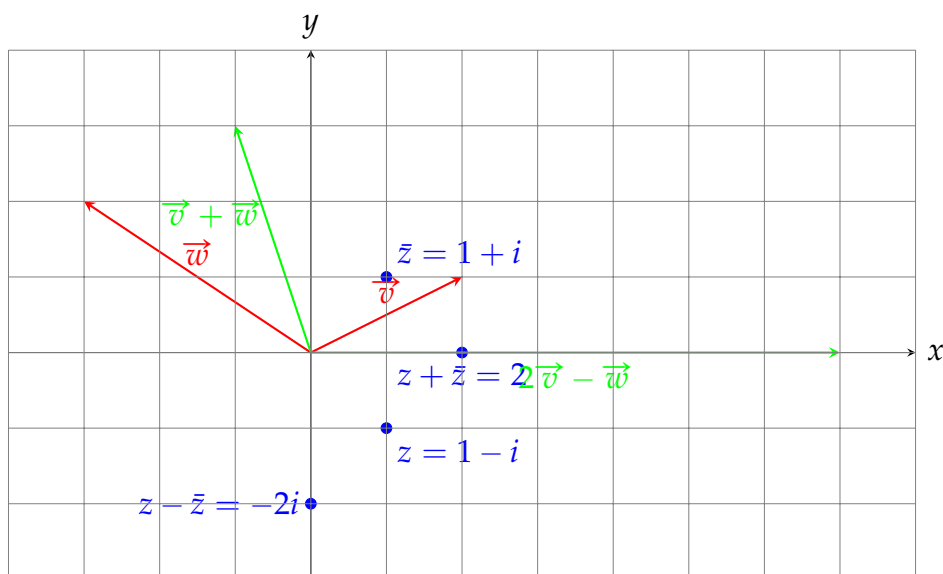
2. Représentation des vecteurs dans le plan complexe :

Soient $\vec{v} = 2 + i \rightarrow (2, 1)$ et $\vec{w} = -3 + 2i \rightarrow (-3, 2)$.

- (a) $\vec{v} = (2, 1)$
 (b) $\vec{w} = (-3, 2)$
 (c) $\vec{v} + \vec{w} = (2 - 3, 1 + 2) = (-1, 3)$
 (d) $2\vec{v} - \vec{w} = 2(2, 1) - (-3, 2) = (4 + 3, 2 - 2) = (7, 0)$

Remarque : Chaque point ou vecteur peut être représenté dans le plan (x, y) en plaçant le premier nombre sur l'axe des abscisses et le second sur l'axe des ordonnées.

3. Représentation graphique dans le plan complexe



Remarque : Les points sont en bleu et les vecteurs en rouge ou vert pour distinguer les sommes et combinaisons.

Exercice 17 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

1. $|1 - z| \leq \frac{1}{2}$,
2. $\operatorname{Re}(1 - z) \leq \frac{1}{2}$,
3. $\operatorname{Re}(iz) \leq \frac{1}{2}$,
4. $\left|1 - \frac{1}{z}\right|^2 = 2$,
5. $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2$.

Solution:

1. $|1 - z| \leq \frac{1}{2}$

Soit $z = x + iy$, alors $|1 - z| = |1 - x - iy| = \sqrt{(1-x)^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}$. Ceci définit le disque fermé de centre 1 et de rayon $\frac{1}{2}$:

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \leq \frac{1}{2}\}.$$

2. $\operatorname{Re}(1 - z) \leq \frac{1}{2}$

On a $\operatorname{Re}(1 - z) = 1 - x \leq \frac{1}{2} \implies x \geq \frac{1}{2}$. Donc l'ensemble est le demi-plan vertical à droite de la droite $x = \frac{1}{2}$:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq \frac{1}{2}\}.$$

3. $\operatorname{Re}(iz) \leq \frac{1}{2}$

Pour $z = x + iy$, $iz = i(x + iy) = -y + ix$, donc $\operatorname{Re}(iz) = -y \leq \frac{1}{2} \implies y \geq -\frac{1}{2}$. C'est le demi-plan horizontal au-dessus de la droite $y = -\frac{1}{2}$.

$$4. \left|1 - \frac{1}{z}\right|^2 = 2$$

Écrivons $z = x + iy$, alors

$$\left|1 - \frac{1}{z}\right|^2 = \left|1 - \frac{x - iy}{x^2 + y^2}\right|^2 = \left(1 - \frac{x}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)^2 = 2.$$

Donc z vérifie l'équation

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{2}$$

après simplification, ce qui correspond à un cercle de centre $(\frac{1}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$5. \left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2$$

En posant $z = x + iy$,

$$\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = \frac{\sqrt{(x-3)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+3)^2 + y^2}} < 2.$$

Élevons au carré et simplifions :

$$(x-3)^2 + y^2 < 4((x+3)^2 + y^2) \implies (x-3)^2 < 4(x+3)^2 + 3y^2.$$

Après développement :

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 &< 4(x^2 + 6x + 9) + 3y^2 \implies 0 < 3x^2 + 30x + 27 + 3y^2 \\ \implies x^2 + 10x + 9 + y^2 &> 0 \implies (x+5)^2 + y^2 > 16. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble est l'extérieur du disque de centre $(-5, 0)$ et de rayon 4 :

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z + 5| > 4\}.$$

Exercice 18 Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$, puis $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$.
2. Linéariser $\sin^4(x)$ puis $\cos(x) \sin^4(x)$.

Solution:

a) Calcul de $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ (Factorisation) :

Factorisation de $\cos(3x)$.

1. Application de la formule de De Moivre :

$$\cos(3x) = \operatorname{Re}(e^{i3x}) = \operatorname{Re}(e^{ix})^3 = \operatorname{Re}(\cos(x) + i \sin(x))^3$$

2. Par formule de binôme de Newton :

$$\begin{aligned} (\cos x + i \sin x)^3 &= \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} (\cos x)^{3-k} (i \sin x)^k \\ &= \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x \\ &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x + i(3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x) \end{aligned}$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire, on obtient :

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x \\ &= \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x) \\ &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x\end{aligned}$$

On en conclut :

$$\boxed{\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x}$$

b) Linéarisation de $\sin^4(x)$ et $\cos(x) \sin^4(x)$:

1. Linéarisation de $\sin^4(x)$

Rappel de la formule d'Euler :

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

On applique la formule d'Euler, on écrit donc :

$$\sin^4(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4 = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^4}{2^4}.$$

On applique la formule du binôme de Newton :

$$(e^{ix} - e^{-ix})^4 = e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}.$$

On divise par 16 :

$$\sin^4(x) = \frac{1}{16} (e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix})$$

Ainsi :

$$\sin^4(x) = \frac{1}{16} (2 \cos(4x) - 8 \cos(2x) + 6) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(4x)$$

2. Linéarisation de $\cos(x) \sin^4(x)$

On utilise la linéarisation précédente :

$$\cos(x) \sin^4(x) = \cos(x) \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(4x) \right)$$

On distribue :

$$\cos(x) \sin^4(x) = \frac{3}{8} \cos(x) - \frac{1}{2} \cos(x) \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(x) \cos(4x)$$

Utilisation de la formule produit-somme :

$$\cos(A) \cos(B) = \frac{1}{2} [\cos(A + B) + \cos(A - B)]$$

$$-\frac{1}{2} \cos(x) \cos(2x) = -\frac{1}{4} (\cos(3x) + \cos(x))$$

$$\frac{1}{8} \cos(x) \cos(4x) = \frac{1}{16} (\cos(5x) + \cos(3x))$$

Regroupement les termes similaires :

$$\cos(x) \sin^4(x) = \frac{1}{8} \cos(x) - \frac{3}{16} \cos(3x) + \frac{1}{16} \cos(5x)$$

Exercice 19

1. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = -3, z_2 = 1 - i, z_3 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}, z_4 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}.$$

2. En déduire le module et un argument de $z_1 z_3$ et $\frac{z_4}{z_2}$.

Solution:

1. Calcul des modules et arguments :

(a) $z_1 = -3$:

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{-3}{\sqrt{0^2 + (-3)^2}} = \frac{-3}{3} = -1, \\ \sin \theta = \frac{0}{\sqrt{0^2 + (-3)^2}} = \frac{0}{3} = 0. \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi \Rightarrow \arg(-3) = \pi.$$

Ainsi

$$|z_1| = 3, \quad \arg(z_1) = \pi.$$

(b) $z_2 = 1 - i$:

$$|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \arg(z_2) = -\frac{\pi}{4}.$$

(c) $z_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$: D'abord, écrire sous forme trigonométrique le numérateur et le dénominateur :

$$1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right), \quad \sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

Donc

$$z_3 = \frac{2e^{i\pi/3}}{2e^{i\pi/6}} = e^{i(\pi/3 - \pi/6)} = e^{i\pi/6}.$$

Ainsi

$$|z_3| = 1, \quad \arg(z_3) = \frac{\pi}{6}.$$

(d) $z_4 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$:

$$|z_4| = \frac{\sqrt{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2}}{2} = \frac{\sqrt{6+2}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}.$$

$$\arg(z_4) = \arctan\left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

2. Module et argument de z_1z_3 et $\frac{z_4}{z_2}$:

$$z_1z_3 = (-3) \cdot e^{i\pi/6} = 3e^{i(\pi+\pi/6)} = 3e^{i7\pi/6}, \quad |z_1z_3| = 3, \quad \arg(z_1z_3) = \frac{7\pi}{6}.$$

$$\frac{z_4}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\pi/6}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = e^{i(-\pi/6+\pi/4)} = e^{i\pi/12}, \quad \left|\frac{z_4}{z_2}\right| = 1, \quad \arg\left(\frac{z_4}{z_2}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

Exercice 20 Soit $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

(a) Calculer z^2 , déterminer le module et un argument de z^2 et écrire z^2 sous forme trigonométrique.

(b) En déduire le module et un argument de z .

(c) En déduire une expression de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Solution:

(a) Calcul de z^2 :

$$z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

$$z^2 = (\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}})^2 = (2+\sqrt{3}) - (2-\sqrt{3}) + 2i\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2\sqrt{3} + 2i.$$

Module et argument de z^2 :

$$|z^2| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4,$$

$$\arg(z^2) = \arctan\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Forme trigonométrique :

$$z^2 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

(b) Module et argument de z :

$$|z| = \sqrt{|z^2|} = \sqrt{4} = 2, \quad \arg(z) = \frac{\arg(z^2)}{2} = \frac{\pi}{12}.$$

(c) On a

$$z = |z|(\cos \arg(z) + i \sin \arg(z)) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right).$$

Par identification de la forme algébrique avec la forme trigonométrique :

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} = 2 \cos \frac{\pi}{12} \implies \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2},$$

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} = 2 \sin \frac{\pi}{12} \implies \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

Exercice 21

(a) Donner la forme trigonométrique de $(1 + i)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (utiliser la formule de Moivre).

(b) En déduire une expression très simple de $(1 + i)^n + (1 - i)^n$.

Solution:

a) Forme trigonométrique de $(1 + i)^n$: On sait que $1 + i$ peut s'écrire sous forme trigonométrique :

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Par la formule de Moivre, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(1 + i)^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) = 2^{n/2} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right).$$

b) Expression simple de $(1 + i)^n + (1 - i)^n$:

On a $1 - i = \sqrt{2} \left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4}) \right)$, donc

$$(1 - i)^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{-n\pi}{4} + i \sin \frac{-n\pi}{4} \right) = 2^{n/2} \left(\cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4} \right).$$

On a donc :

$$(1 + i)^n + (1 - i)^n = 2^{n/2} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} + \cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4} \right) = 2^{n/2+1} \cos \frac{n\pi}{4}.$$

Exercice 22

1. Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

a) $z = 7 + 24i$,

b) $z = 9 + 40i$,

c) $z = 1 + i$.

2. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

a) $z^2 = -2\sqrt{3} + 2i$,

b) $z^2 = 3 - 4i$.

Solution:**1. Racines carrées des nombres complexes :**

a) Calculons les racines carrées de $z = 7 + 24i$

On cherche $\delta = a + bi$ tel que $\delta^2 = 7 + 24i$. Écrivons : $\delta^2 = a^2 - b^2 + 2abi = 7 + 24i$.

On obtient le système :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 7, \\ 2ab = 24. \end{cases}$$

De $2ab = 24$, on a $ab = 12 \implies b = \frac{12}{a}$. Substituons dans $a^2 - b^2 = 7$:

$$a^2 - \left(\frac{12}{a}\right)^2 = 7 \implies a^4 - 7a^2 - 144 = 0.$$

Posons $X = a^2$, on obtient $X^2 - 7X - 144 = 0$. Résolvons : $X = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 576}}{2} = \frac{7 \pm 25}{2}$.
Donc $X_1 = 16 \implies a = \pm 4$, $X_2 = -9$ (non valable).

Alors $b = 12/4 = 3$.

Ainsi, les racines carrées de $z = 7 + 24i$ sont $\delta = 4 + 3i$ et $\delta = -4 - 3i$.

b) Calculons les racines carrées de $z = 9 + 40i$

De même (Exer), on trouve les racines carrées de $z = 9 + 40i$

$$\delta^2 = a^2 - b^2 + 2abi = 9 + 40i$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 9, \\ 2ab = 40 \implies ab = 20 \implies b = 20/a \end{cases}$$

$a^2 - (20/a)^2 = 9 \implies a^4 - 9a^2 - 400 = 0$. Posons $X = a^2$: $X^2 - 9X - 400 = 0$,
 $X = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 1600}}{2} = \frac{9 \pm 41}{2}$. $X_1 = 25 \implies a = \pm 5$, $b = 20/5 = 4$.

Racines : $\delta = 5 + 4i$ et $\delta = -5 - 4i$.

c) Calculons les racines carrées de $z = 1 + i$

$$\delta^2 = a^2 - b^2 + 2abi = 1 + i$$

$$2ab = 1 \implies b = \frac{1}{2a}, \quad a^2 - b^2 = 1 \implies a^2 - \frac{1}{4a^2} = 1 \implies 4a^4 - 4a^2 - 1 = 0$$

Posons $X = a^2$: $4X^2 - 4X - 1 = 0 \implies X = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 16}}{8} = \frac{4 \pm \sqrt{32}}{8} = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$.

On prend $a = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}}$, $b = 1/(2a) = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}}$

Racines : $\delta = \pm \left(\sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}} \right)$.

Résolution des équations :

a) Résolvons l'équation $z^2 = -2\sqrt{3} + 2i$

Même méthode que ci-dessus.

$$z^2 = a^2 - b^2 + i(2ab) = -2\sqrt{3} + 2i \implies \begin{cases} a^2 - b^2 = -2\sqrt{3} \\ 2ab = 2 \implies ab = 1 \end{cases}$$

$$b = 1/a \implies a^2 - 1/a^2 = -2\sqrt{3} \implies a^4 + 2\sqrt{3}a^2 - 1 = 0 \text{ Posons } X = a^2 : \\ X^2 + 2\sqrt{3}X - 1 = 0$$

$$X = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{12+4}}{2} = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2\sqrt{3} \pm 4}{2} = -\sqrt{3} + 2 \text{ ou } -\sqrt{3} - 2$$

$$\text{On garde } X = -\sqrt{3} + 2 > 0 \implies a = \pm\sqrt{2 - \sqrt{3}}, b = 1/a = \pm 1/\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

b) Résolvons l'équation $z^2 = 3 - 4i$

$$z^2 = a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i \implies 2ab = -4 \implies ab = -2, \quad a^2 - b^2 = 3$$

$$b = -2/a \implies a^2 - 4/a^2 = 3 \implies a^4 - 3a^2 - 4 = 0 \text{ Factorisation : } (a^2 - 4)(a^2 + 1) = 0 \implies a = \pm 2 \text{ (puis } b = -1), a = \pm i.$$

$$\text{Donc } z = 2 - i \text{ ou } z = -2 + i.$$

Exercice 23

- Déterminer les racines cubiques de 1 et les représenter dans le plan complexe.
- On note $j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.
- Exprimer les racines cubiques de 1 en fonction de j .

Solution:

- Racines cubiques de 1 : Les solutions de $z^3 = 1$ sont :

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Explicitement :

$$z_0 = 1, \quad z_1 = e^{i2\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = e^{i4\pi/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ces trois points sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle unité.

- Vérification de $1 + j + j^2 = 0$ avec $j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$:

$$j^2 = \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1 - 2i\sqrt{3} - 3}{4} = \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Donc :

$$1 + j + j^2 = 1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

- Exprimer les racines cubiques de 1 en fonction de j :

$$z_0 = 1, \quad z_1 = j, \quad z_2 = j^2.$$

Ainsi, les trois racines sont $1, j, j^2$.

Exercice 24 Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

1. $iz^2 + (1 - 5i)z - 2 + 6i = 0$,
2. $z^2 - 2(2 + i)z + 6 + 8i = 0$.
3. $(1 + 2i)z^2 - (9 + 3i)z + 10 - 5i = 0$,
4. $z^2 - (1 + i\sqrt{3})z - 1 + i\sqrt{3} = 0$.
5. $z^2 - 2e^{i\alpha}z + 2i(\sin \alpha)e^{i\alpha} = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
6. $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$
7. $z^4 - (15 + 30i)z^2 - 88 + 234i = 0$ cette équation est dite bicarrée.
8. $2z^3 - (1 - i)z^2 + (1 + i)z + 2i = 0$, sachant qu'elle a une racine imaginaire pure.

Solution:

1. Résolvons l'équation

$$iz^2 + (1 - 5i)z - 2 + 6i = 0$$

C'est une équation quadratique $az^2 + bz + c = 0$ avec $a = i$, $b = 1 - 5i$, $c = -2 + 6i$.

Le discriminant vaut :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = (1 - 5i)^2 - 4i(-2 + 6i) \\ &= 1 - 10i - 25 - 4i(-2 + 6i) \\ &= -24 - 10i - 4i(-2 + 6i) \\ &= -24 - 10i + 24 + 8i = -2i. \end{aligned}$$

Soit $\delta = a + ib$ une des racines carrées de Δ . On a :

$$\begin{aligned} \delta^2 = -2i &\iff (a + ib)^2 = -2i \\ &\iff (a^2 - b^2) + i(2ab) = -2i \end{aligned}$$

D'où :

$$\delta^2 = -2i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 & (1) \\ 2ab = -2 & (2) \\ a^2 + b^2 = 2 & (3) \end{cases}$$

De (1) et (3) on a : $2a^2 = 2$ donc $a = 1$ ou $a = -1$. De l'équation (2) on aura :

$$\text{Si } a = 1 \Rightarrow b = \frac{-1}{a} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\text{Si } a = -1 \Rightarrow b = \frac{-1}{a} = \frac{-1}{-1} = 1$$

Donc, $\delta = 1 - i$ ou $\delta = -1 + i$; alors l'équation possède deux racines complexes sont

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 5i - (1 - i)}{2i} = -1 + 3i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 5i + (1 - i)}{2i} = 2$$

2. Résolvons l'équation

$$z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0.$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = 4(2+i)^2 - 4(1)(6+8i) = -12 - 16i.$$

Soit $\delta = a + ib$ une des racines carrées de Δ . On a :

$$\begin{aligned} \delta^2 = -12 - 16i &\iff (a+ib)^2 = -12 - 16i \\ &\iff (a^2 - b^2) + i(2ab) = -12 - 16i \end{aligned}$$

D'où :

$$\delta^2 = -12 - 16i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -12 & (1) \\ 2ab = -16 & (2) \\ a^2 + b^2 = 20 & (3) \end{cases}$$

De (1) et (3) on a : $2a^2 = 8$ donc $a = 2$ ou $a = -2$. De l'équation (2) on aura :

$$\text{Si } a = 2 \Rightarrow b = \frac{-8}{a} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$\text{Si } a = -2 \Rightarrow b = \frac{-8}{a} = \frac{-8}{-2} = 4$$

Donc, $\delta = 2 - 4i$ ou $\delta = -2 + 4i$; alors l'équation possède deux racines complexes sont

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2(2+i) - (2-4i)}{2(1)} = 3 - i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2(2+i) + (2-4i)}{2(1)} = 1 + 3i$$

3. $(1 + 2i)z^2 - (9 + 3i)z + 10 - 5i = 0$

On peut utiliser $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $a = 1 + 2i$, $b = -(9 + 3i)$, $c = 10 - 5i$. Résoudre ensuite avec la formule $z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

4. $z^2 - (1 + i\sqrt{3})z - 1 + i\sqrt{3} = 0.$

5. $z^2 - 2e^{i\alpha}z + 2i(\sin \alpha)e^{i\alpha} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

6. $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$ Posons $u = z^2$, alors $u^2 + 10u + 169 = 0$. Discriminant : $\Delta = 100 - 676 = -576$ $u = \frac{-10 \pm \sqrt{-576}}{2} = -5 \pm 12i$ Alors $z^2 = -5 + 12i$ ou $z^2 = -5 - 12i$ Prendre les racines carrées complexes pour obtenir z .

7. $z^4 - (15 + 30i)z^2 - 88 + 234i = 0$ cette équation est dite bicarrée.

8. $2z^3 - (1 - i)z^2 + (1 + i)z + 2i = 0,$ sachant qu'elle a une racine imaginaire pure.

Chapitre 3

ESPACES VECTORIELS, AP- PLICATIONS LINÉAIRES

3.1▲ Introduction

L'espace vectoriel constitue l'une des structures majeures des mathématiques modernes. Il fournit un cadre commun grâce auquel on met en lumière les propriétés que partagent des ensembles pourtant très divers, tels que les vecteurs du plan, les fonctions, les polynômes ou encore les matrices,...

3.2▲ Espace Vectoriel, Base, Dimension

3.2.1 ▶ Lois de composition interne

Définition 3.2.1.

Soit E un ensemble non vide.

On appelle " $*$ " loi (opération) de composition interne dans E l'application de $E \times E$ dans E :

$$\begin{aligned} * : E \times E &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto x * y \end{aligned}$$

C'est à dire $\forall x, y \in E : x * y \in E$.

Exemple 3.2.2

L'addition dans \mathbb{R} est une opération interne car : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

La multiplication dans \mathbb{R} est une opération interne car : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \times y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \times : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x \times y \end{aligned}$$

Exemple 3.2.2

Propriétés.

Soient E un ensemble et « $*$ », « Δ » deux lois de composition interne dans E , alors :

a) On dit que « $*$ » est *commutative* dans E si et seulement si :

$$\forall x, y \in E : x * y = y * x.$$

b) On dit que « $*$ » est *associative* dans E si et seulement si :

$$\forall x, y, z \in E : (x * y) * z = x * (y * z).$$

c) Soit $e \in E$, on dit que « e » est un *élément neutre* de « $*$ » dans E si et seulement si :

$$\forall x \in E, x * e = e * x = x.$$

d) Soit $x \in E$, on dit que x' de E est le *symétrique* de x si et seulement si :

$$x * x' = x' * x = e.$$

e) On dit que « $*$ » est *distributive* par rapport à « Δ » si et seulement si :

$$\forall x, y, z \in E, \begin{cases} x * (y \Delta z) = (x * y) \Delta (x * z), \\ (x \Delta y) * z = (x * z) \Delta (y * z). \end{cases}$$

3.2.2 ► Groupes

Définition 3.2.3.

Soit E un ensemble muni d'une loi « $*$ ». On dit que $(E, *)$ est un *groupe* si et seulement si :

- a) La loi « $*$ » est interne dans E .
- b) La loi « $*$ » est associative.
- c) La loi « $*$ » admet un élément neutre dans E .
- d) Tout élément de E admet un symétrique pour la loi « $*$ ».

Et si de plus la loi « $*$ » est commutative, on dit que E est un *groupe abélien* (ou *commutatif*).

Exemple 3.2.4

$(\mathbb{R}, +)$, (\mathbb{R}^*, \times) , $(\mathbb{Z}, +)$ sont des groupes abéliens.

$(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe car les éléments de \mathbb{N}^* n'ont pas de symétrique.

Exemple 3.2.4

Exemple 3.2.5

Soit $E = \{-1, 1\}$, on a : (E, \times) est un groupe abélien.

Exemple 3.2.5

3.3▲ Espaces vectoriels

3.3.1 ► Structure d'espace vectoriel

Dans cette partie, $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ désigne un corps commutatif, en pratique $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On note par $1_{\mathbb{K}}$ l'élément neutre pour la loi « \cdot ».

Un **espace vectoriel** est une structure algébrique comportant deux opérations : une **opération interne** et une **opération externe**. Présentons d'abord ces deux notions.

— On appelle **opération interne** (ou loi de composition interne) toute application définie de $E \times E$ vers E , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} E \times E &\rightarrow E \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

— On appelle **opération externe** (ou loi de composition externe) toute application définie de $\mathbb{K} \times E$ vers E , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda \cdot u \end{aligned}$$

Exemple 3.3.1

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, (x, y)) &\mapsto (\lambda x, \lambda y) \end{aligned}$$

Alors f définit une **opération externe** sur \mathbb{R}^2 dont les **scalaires** sont les réels \mathbb{R} .

Exemple 3.3.1

Définition 3.3.2.

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un **espace vectoriel sur un corps \mathbb{K}** (ou un **\mathbb{K} -espace vectoriel**) si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- a) $(E, +)$ est un **groupe abélien** ;
- b) $1 \cdot u = u$ pour tout $u \in E$;
- c) $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $u \in E$;
- d) $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u, v \in E$;
- e) $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $u \in E$.

Remarque 3.3.3. Terminologie et notations

- ❶ Les éléments de E sont appelés **vecteurs**, notés x, y, v, w, \dots
- ❷ Les éléments de \mathbb{K} sont appelés **scalaires**, notés par des lettres grecques $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \dots$ (voir l'alphabet grec p. 102).

Exemple 3.3.4

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. L'ensemble des solutions $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ de l'équation

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$$

est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Exemple 3.3.4

Exemple 3.3.5

L'ensemble $\{(\lambda, \mu, \lambda + \mu), \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\}$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Exemple 3.3.5

3.3.2 ►► Sous-espaces vectoriels

On fixe un \mathbb{K} -espace vectoriel E .

►►► Deux définitions équivalentes

Proposition 3.3.6. Soit F un sous-ensemble de E . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- a) F est un \mathbb{K} -espace vectoriel.
- b) Les trois propriétés suivantes sont vérifiées :
 - $\mathbf{0} \in F$;
 - $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in F^2 \implies \mathbf{x} + \mathbf{y} \in F$;
 - $(\mathbf{x} \in F, \lambda \in \mathbb{K}) \implies \lambda\mathbf{x} \in F$.

Définition 3.3.7.

Un ensemble F vérifiant les propriétés de la proposition 3.3.6 est appelé sous-espace vectoriel de E .

Remarque 3.3.8. En pratique, la définition donnée par le point (b) de la proposition est celle que l'on utilise. L'autre définition justifie l'expression "sous-espace vectoriel".

Exemple 3.3.9

Les ensembles $\{\mathbf{0}\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E , appelés sous-espace vectoriels triviaux de E .

Exemple 3.3.9

Exemple 3.3.10

Si E est un espace vectoriel, et $\mathbf{u} \in E \setminus \{\mathbf{0}\}$, l'ensemble

$$\{\lambda \mathbf{u}, \lambda \in \mathbb{K}\}$$

est un sous-espace vectoriel de E , appelée droite (vectorielle) de E . Dans le cas où E est l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , ces ensembles sont exactement les droites du plan ou de l'espace passant par l'origine.

Exemple 3.3.10
Exemple 3.3.11

L'ensemble $\{(\lambda, \lambda, 2\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel du \mathbb{R} -espace vectoriel $\{(\lambda, \mu, \lambda + \mu), \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\}$ introduit dans l'exemple 3.3.5.

Exemple 3.3.11
►►► Intersection

Proposition 3.3.12. Soit F et G des sous-espaces vectoriels du \mathbb{K} -espace vectoriel E . Alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration. (a) Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E , on a $\mathbf{0} \in F$ et $\mathbf{0} \in G$ et donc $\mathbf{0} \in F \cap G$.

(b) De même, si \mathbf{x} et \mathbf{y} sont des vecteurs de $F \cap G$, ce sont des vecteurs de F , donc $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in F$ (car F est un sous-espace vectoriel), et des vecteurs de G , donc $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in G$ (car G est un sous-espace vectoriel).

(c) Par suite $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in F \cap G$. La preuve de $(\mathbf{x} \in F \cap G, \lambda \in \mathbb{K}) \implies \lambda \mathbf{x} \in F \cap G$ est identique.

■

Exemple 3.3.13

L'intersection des sous-espaces vectoriels de \mathbb{C}^3

$$F = \{(0, x_2, x_3), (x_2, x_3) \in \mathbb{C}^2\} \text{ et } G = \{(x_1, x_2, 0), (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2\}$$

est le sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^3 :

$$F \cap G = \{(0, z, 0), z \in \mathbb{C}\}.$$

Exemple 3.3.13

Proposition 3.3.14. Soit F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels de E . Alors $F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration. Par récurrence sur n , à partir de la proposition 3.3.12. ■

Donnons un exemple fondamental :

Exemple 3.3.15

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ avec $n \geq 1$. On veut montrer que

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Procédons en deux étapes.

(i) A-t-on $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} \in H$? On a

$$a_1 \cdot 0 + \dots + a_n \cdot 0 = 0,$$

donc $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} \in H$.

(ii) L'ensemble H est-il stable par combinaison linéaire ? Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ deux éléments de H . Montrons que $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \in H$.

Écrivons d'abord

$$\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} = (\lambda u_1 + \mu v_1, \dots, \lambda u_n + \mu v_n) = (X_1, \dots, X_n).$$

Pour établir l'inclusion souhaitée, il suffit de montrer que

$$a_1X_1 + \dots + a_nX_n = 0.$$

Or les hypothèses $\mathbf{u} \in H$ et $\mathbf{v} \in H$ donnent

$$a_1u_1 + \dots + a_nu_n = 0, \quad a_1v_1 + \dots + a_nv_n = 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} a_1X_1 + \dots + a_nX_n &= a_1(\lambda u_1 + \mu v_1) + \dots + a_n(\lambda u_n + \mu v_n) \\ &= \lambda(a_1u_1 + \dots + a_nu_n) + \mu(a_1v_1 + \dots + a_nv_n) \\ &= \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Donc $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \in H$.

On a montré que H contient $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$ et qu'il est stable par combinaisons linéaires. Il s'agit donc d'un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . ■

Exemple 3.3.15

Avertissement 3.3.16. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors la réunion $F \cup G$ n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel de E .

Exemple 3.3.17

Par exemple, la réunion des sous-espaces vectoriels $\{(x_1, 0), x_1 \in \mathbb{R}\}$ et $\{(0, x_2), x_2 \in \mathbb{R}\}$ de \mathbb{R}^2 n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 : elle contient les vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$ mais pas leur somme $(1, 1)$.

Exemple 3.3.17

Un résultat plus précis est donné par la proposition suivante.

Proposition 3.3.18. Soit F et G des sous-espaces vectoriels de E . Alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Démonstration. Supposons que F n'est pas inclus dans G et que G n'est pas inclus dans F . Il existe alors un vecteur x qui est dans F , mais pas dans G , et un vecteur y qui est dans G , mais pas dans F . Alors x et y sont tous les deux dans $F \cup G$. Mais $x + y \notin F$ (sinon on aurait $y = y + x - x \in F$) et $x + y \notin G$ (sinon on aurait $x = x + y - y \in G$). Donc $x + y \notin F \cup G$, ce qui montre que $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E . ■

►► Somme, somme directe, supplémentaires

►► Somme de deux sous-espaces vectoriels

La démonstration (facile) de la proposition suivante est laissée au lecteur :

Proposition 3.3.19. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . L'ensemble $H = \{x + y, x \in F, y \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de E .

Définition 3.3.20.

Le sous-espace vectoriel H de la proposition précédente est noté $F + G$ et appelé **somme** de F et G .

Exemple 3.3.21

Soit $F = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x_1 = 0\}$ et $G = \{x \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x_3 = 0\}$. Alors

$$F + G = \mathbb{R}^3.$$

En effet, si $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{(0, x_2, x_3)}_{\in F} + \underbrace{(x_1, 0, 0)}_{\in G},$$

et donc $x \in F + G$.

Exemple 3.3.21

Exemple 3.3.22

Soit $n, p \geq 1$ et $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_p$ des vecteurs de E . Alors

$$\text{vect}(u_1, \dots, u_n) + \text{vect}(v_1, \dots, v_p) = \text{vect}(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_p).$$

En effet, notons F l'espace vectoriel engendré par les vecteurs u_j et G l'espace vectoriel engendré par les vecteurs v_j . Par définition, $F + G$ est l'ensemble des $x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$. En utilisant la définition d'un espace vectoriel engendré, on obtient :

$$F + G = \left\{ \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_p v_p, (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^{n+p} \right\}$$

ce qui donne le résultat annoncé.

Exemple 3.3.22

Exemple 3.3.23

La somme des droites de \mathbb{R}^3 , $\{(x, 0, 0), x \in \mathbb{R}\}$ et $\{(0, y, 0), y \in \mathbb{R}\}$ est le plan de \mathbb{R}^3 :

$$\{(x, y, 0), x \in \mathbb{R}\}.$$

Ceci découle immédiatement de la définition de la somme de deux sous-espaces vectoriels. C'est aussi un cas particulier de l'exemple précédent (avec $n = p = 1$, $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)$ et $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0)$).

Exemple 3.3.23

►►► Somme directe

Définition 3.3.24.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . On dit que la somme de F et G est **directe** quand tout élément de $F + G$ s'écrit de manière unique $\mathbf{x} + \mathbf{u}$ avec $\mathbf{x} \in F$ et $\mathbf{u} \in G$. En d'autres termes :

$$\left(\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{y} + \mathbf{v}, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in F^2 \text{ et } (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in G^2 \right) \implies \left(\mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ et } \mathbf{u} = \mathbf{v} \right).$$

On note alors $F \oplus G$ la somme de F et G .

Proposition 3.3.25. *La somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$.*

Démonstration. Supposons que la somme est directe. Soit $\mathbf{x} \in F \cap G$. Alors

$$\underbrace{\mathbf{x}}_{\in F} + \underbrace{\mathbf{0}}_{\in G} = \underbrace{\mathbf{0}}_{\in F} + \underbrace{\mathbf{x}}_{\in G},$$

et par unicité de la décomposition d'un vecteur comme somme d'un élément de F et d'un élément de G , on obtient $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. D'où $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$.

Supposons maintenant $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$. Soit \mathbf{x} et \mathbf{y} des vecteurs de F , \mathbf{u} et \mathbf{v} des vecteurs de G . On suppose

$$\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{y} + \mathbf{v}.$$

Alors

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{v} - \mathbf{u}.$$

Donc $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{v} - \mathbf{u} \in F \cap G$ (car $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in F$ et $\mathbf{v} - \mathbf{u} \in G$). Puisque $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$, on en déduit $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ et $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, ce qui termine la preuve. ■

Exemple 3.3.26

La somme $F + G$ de l'exemple 3.3.21 n'est pas directe. En effet, on voit facilement que

$$F \cap G = \{(x_1, x_2, x_3), \text{ t.q. } x_1 = 0 \text{ et } x_3 = 0\} = \text{vect}\{(0, 1, 0)\} \neq \{0\}.$$

Exemple 3.3.26

Exemple 3.3.27

La somme des droites de \mathbb{R}^3 , $\{(x, 0, 0), x \in \mathbb{R}\}$ et $\{(0, y, 0), y \in \mathbb{R}\}$ est directe. Le seul point commun à ces droites est bien l'origine $\{0\}$.

Exemple 3.3.27

▶▶ Supplémentaires

Définition 3.3.28.

On dit que les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E lorsque

$$E = F \oplus G.$$

En d'autres termes, la somme de F et G est directe, et égale à E .

Donc par définition, F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si tout élément z de E s'écrit **de manière unique** $z = x + u$ avec $x \in F$ et $u \in G$.

Exemple 3.3.29

Les droites $\text{vect}\{(1, 0)\}$ et $\text{vect}\{(0, 1)\}$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^2 .

Exemple 3.3.29

Exemple 3.3.30

Les espaces F et G des exemples 3.3.21 et 3.3.26 ne sont pas supplémentaires dans \mathbb{R}^3 : leur somme est bien égale à \mathbb{R}^3 , mais elle n'est pas directe.

Les deux droites de \mathbb{R}^3 apparaissant dans l'exemple 3.3.27 ne sont pas supplémentaires dans \mathbb{R}^3 : leur somme est directe, mais elle ne vaut pas \mathbb{R}^3 .

Exemple 3.3.30

Exemple 3.3.31

Soit $F = \{(x_1, 0, x_3), (x_1, x_3) \in \mathbb{K}^2\}$ et $G = \text{vect}\{(0, 1, 1)\}$. Vérifier que F et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

Exemple 3.3.31

3.4▲ Dépendance, Indépendance linéaires

Dans toute cette partie, E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel. On étudie ici certaines propriétés des familles (finies) de vecteurs de E , qui seront utiles pour traiter, dans la partie 3.5, la notion de dimension d'un espace vectoriel.

3.4.1 ► Familles de vecteurs : définition

Définition 3.4.1.

Soit n un entier ≥ 1 . Une **famille** (finie) \mathcal{F} de n vecteurs de E est un n -uplet $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ de vecteurs de E .

On note $\mathbf{u} \in \mathcal{F}$ quand \mathbf{u} est un des vecteurs \mathbf{u}_j . Le nombre n est le **cardinal** de \mathcal{F} , et on note $n = \text{Card}(\mathcal{F})$. On convient qu'il existe une seule famille de cardinal 0, notée \emptyset .

Soit $\mathcal{F} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ et $\mathcal{G} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$ deux familles de vecteurs. On note $\mathcal{F} \cup \mathcal{G} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$.

Si $\mathcal{F} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ est une famille de vecteurs, et \mathcal{G} est une autre famille de la forme $(\mathbf{u}_{k_1}, \dots, \mathbf{u}_{k_p})$ avec $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_p \leq n$, on dit que \mathcal{G} est **extraite** de \mathcal{F} , et on note $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. On dit aussi que la famille \mathcal{F} **complète** la famille \mathcal{G} .

Exemple 3.4.2

Soit

$$\mathcal{F} = \left\{ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1) \right\} \text{ et } \mathcal{G} = \left\{ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1) \right\}.$$

Alors \mathcal{F} et \mathcal{G} sont des familles de vecteurs de \mathbb{R}^3 , $\text{Card}(\mathcal{F}) = 4$, $\text{Card}(\mathcal{G}) = 3$, et \mathcal{G} est extraite de \mathcal{F} .

Exemple 3.4.2

3.4.2 ► Combinaisons linéaires

Définition 3.4.3.

On appelle **combinaison linéaire** de $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ un vecteur de E de la forme

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n, \quad \text{où } \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ sont des scalaires.}$$

3.4.3 ► Familles liées, familles libres

Définition 3.4.4.

Une famille $\mathcal{F} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ de E est **libre** si la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

On dit aussi que les vecteurs $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ sont **linéairement indépendants**. Si la famille \mathcal{F} n'est pas libre, on dit qu'elle est **liée**.

Exemple 3.4.5

$\{(0, 1, 1), (1, 1, 2)\}$ est libre dans \mathbb{R}^3 . En effet, supposons

$$\lambda_1(0, 1, 1) + \lambda_2(1, 1, 2) = (0, 0, 0),$$

i.e $\lambda_2 = 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$. Alors $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Exemple 3.4.5

Exemple 3.4.6

Soit $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)$ et $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 0)$. La famille $\mathcal{G} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ est libre dans \mathbb{C}^3 . Comme dans l'exemple précédent, on est ramené à étudier un système homogène.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3$ tels que $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. Alors

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad \lambda_2 = 0 \text{ et } \lambda_1 = 0,$$

ce qui donne facilement $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Exemple 3.4.6

Exemple 3.4.7

Soit $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1), \mathbf{u}_2 = (1, 1, 0)$ et $\mathbf{u}_3 = (2, 1, 1)$. Alors la famille $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ est liée. En effet :

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 = \mathbf{0}.$$

On peut retrouver cette relation en résolvant le système $\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$, d'inconnues λ_1, λ_2 et λ_3 .

Exemple 3.4.7

Exemple 3.4.8

Si $\mathbf{0} \in \mathcal{F}$, alors \mathcal{F} est liée. En effet $1 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, et $1 \neq 0$.

Exemple 3.4.8

Exemple 3.4.9

Une famille à un élément \mathbf{u} est libre si et seulement si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. En effet, si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ la famille n'est pas libre (cf exemple précédent).

Exemple 3.4.9

La proposition suivante découle immédiatement de la définition d'une famille libre :

Proposition 3.4.10. *Si \mathcal{F} est une famille libre, toute famille extraite de \mathcal{F} est libre.*

On termine cette partie sur les familles libres par le [lemme utile sur les familles libres](#) suivant :

Lemme 3.4.11.

Soit \mathcal{F} une famille libre et $\mathbf{v} \in E$. Alors la famille $\mathcal{F} \cup \{\mathbf{v}\}$ est libre si et seulement si $\mathbf{v} \notin \text{vect } \mathcal{F}$.

ce qui implique, la famille étant libre,

Exemple 3.4.12

Une famille de deux vecteurs (\mathbf{u}, \mathbf{v}) est libre si et seulement si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ et \mathbf{v} n'appartient pas à la droite $\text{vect } \mathbf{u}$. Ceci découle immédiatement des deux propositions précédentes.

Exemple 3.4.12

3.4.4 ► Sous-espace engendré par une partie

On donne maintenant un exemple important de sous-espace vectoriel. Soit $n \geq 1$ et $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ des vecteurs de E (on dit aussi que $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ est une famille de vecteurs de E , voir la définition 3.4.1 plus haut).

Proposition 3.4.13. *L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ de E :*

$$\left\{ \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de E , appelé **espace vectoriel engendré par $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$** et noté

$$\text{vect}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \text{ ou } \text{vect}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}.$$

Démonstration. Notons F cet ensemble. On a $\mathbf{0} = 0\mathbf{u}_1 + \dots + 0\mathbf{u}_n \in F$. Il est également très simple de vérifier que F est stable par addition et multiplication par un scalaire, ce qui montre le résultat. ■

Exemple 3.4.14

$$\text{vect}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\}.$$

Si \mathbf{u} est un vecteur non nul de E , $\text{vect}(\mathbf{u})$ est la droite engendrée par \mathbf{u} (voir exemple 3.3.10).

Exemple 3.4.14

Exemple 3.4.15

Soit $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$ et $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$. Le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 $\text{vect}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est

$$\{\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} = \{(\lambda, \mu, \lambda + \mu), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

C'est exactement le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 vu dans l'exemple 3.3.5.

Exemple 3.4.15

3.4.5 ► Familles génératrices, bases

►► Familles génératrices

Définition 3.4.16.

La famille $\mathcal{F} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ est une **famille génératrice de E** quand pour tout vecteur \mathbf{v} de E , il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_n\mathbf{u}_n.$$

On dit aussi que \mathcal{F} **engendre E** .

Remarque 3.4.17. La famille \mathcal{F} est génératrice si et seulement si $\text{vect } \mathcal{F} = E$.

Exemple 3.4.18

La famille $\mathcal{F}_1 = \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ est une famille génératrice de \mathbb{R}^2 : si $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1(1, 0) + \lambda_2(0, 1)$, et donc $\mathbb{R}^2 = \text{vect } \mathcal{F}_1$.

Exemple 3.4.18

Exemple 3.4.19

La famille $\mathcal{F}_2 = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0)\}$ n'est pas génératrice de \mathbb{R}^3 . En effet, la dernière coordonnée de tout élément de $\text{vect } \mathcal{F}$ est nulle, et donc par exemple $(0, 0, 1)$ n'appartient pas à $\text{vect } \mathcal{F}_2$.

Exemple 3.4.19

►►► Bases

Définition 3.4.20.

Une famille \mathcal{F} de E est une **base** quand elle est à la fois libre et génératrice.

Exemple 3.4.21

La famille $\{(1, 0), (0, 1)\}$ est une base de \mathbb{K}^2 . Plus généralement, si $n \geq 1$ et $j \in \{1, \dots, n\}$, définissons \mathbf{e}_j comme le vecteur de \mathbb{K}^n dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la j -ième, qui vaut 1. Alors la famille $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ est une base de \mathbb{K}^n , appelée **base canonique de \mathbb{K}^n** .

Exemple 3.4.21

Exemple 3.4.22

La famille $\{(2, 1, 0), (1, 1, 0)\}$ n'est pas une base de \mathbb{R}^3 : elle est libre mais pas génératrice (justifier).

Exemple 3.4.22

Exemple 3.4.23

La famille $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ n'est pas une base de \mathbb{R}^3 : elle est génératrice mais pas libre (justifier).

Exemple 3.4.23

Soit $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ une base de E . Alors tout vecteur \mathbf{x} de E s'écrit de manière unique

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{e}_j.$$

Les λ_j sont appelés coordonnées de \mathbf{x} dans la base E .

Exemple 3.4.24

Démonstration.

 Les coordonnées du vecteur $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de \mathbb{K}^n dans la base canonique de \mathbb{K}^n sont $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Exemple 3.4.24

3.5▲ Théorie de la dimension

3.5.1 ► Définition

Définition 3.5.1.

On dit que E est **de dimension finie** quand il admet une famille génératrice finie. On convient que l'espace vectoriel $\{0\}$ est de dimension finie, et que la famille vide est une famille génératrice de $\{0\}$.

Exemple 3.5.2

L'espace vectoriel \mathbb{K}^n est de dimension finie : la base canonique de \mathbb{K}^n est une famille génératrice finie.

Exemple 3.5.2

3.5.2 ► Dimension d'un espace vectoriel.

On note E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.

On rappelle que le **cardinal** d'une famille \mathcal{F} , noté $\text{Card}(\mathcal{F})$, est le nombre d'éléments de \mathcal{F} .

Théorème 3.5.3.

Soit \mathcal{F} une famille libre et \mathcal{G} une famille génératrice de E . Alors $\text{Card}(\mathcal{F}) \leq \text{Card}(\mathcal{G})$.

On peut maintenant définir la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie :

Théorème 3.5.4.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors :

- a) Toutes les bases de E ont le même cardinal, appelé **dimension** de E et noté $\dim E$.
- b) Le cardinal de toute famille libre de E est inférieur ou égal à $\dim E$.
- c) Le cardinal de toute famille génératrice de E est supérieur ou égal à $\dim E$.

Exemple 3.5.5

L'espace vectoriel $\{0\}$ est de dimension 0 (il a pour base l'ensemble vide \emptyset par convention).

L'espace vectoriel \mathbb{K}^n est de dimension n sur \mathbb{K} : la base canonique a n éléments.

Soit E un espace vectoriel et \mathbf{u} un vecteur non nul de E . Alors l'espace vectoriel $\text{vect}(\mathbf{u})$ est de dimension 1 : il a pour base \mathbf{u} .

La famille de \mathbb{C}^3 :

$$\mathcal{F} = \{(1, 2, 3), (-1, 0, i), (2, i, 2), (\sqrt{3}, i + 2, 3)\}$$

n'est pas une famille libre du \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C}^3 d'après le point (b) : cette famille a 4 éléments, alors que \mathbb{C}^3 est de dimension 3.

La famille de \mathbb{R}^4 :

$$\mathcal{G} = \{(1, 2, 0, 4), (-1, 1, 2, 1), (1, 0, 2, -1)\}$$

n'est pas une famille génératrice de \mathbb{R}^4 .

Exemple 3.5.5

3.5.3 ► Caractérisation des bases

Théorème 3.5.6.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit \mathcal{F} une famille de vecteurs de E . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) \mathcal{F} est une base de E .
- b) \mathcal{F} est une famille libre, et $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim E$.
- c) \mathcal{F} est une famille génératrice, et $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim E$.

Exemple 3.5.7

$$\{(-1, -1, 2, -1), (1, -1, -1, 0), (2, 1, -3, 1), (-2, -2, 3, -2)\}$$

est une base de \mathbb{R}^4 .

Exemple 3.5.7

3.5.4 ► Théorème de la base incomplète

On termine cette section sur la dimension finie par un résultat important, le théorème de la base incomplète :

Théorème 3.5.8.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Soit $\mathcal{L} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ une famille libre de E , de cardinal p . Alors $p \leq n$ et on peut compléter \mathcal{L} en une base $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_{p+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$ de E .

Exemple 3.5.9

La famille libre $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$ de \mathbb{R}^3 peut-être complétée en une base $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ de \mathbb{R}^3 .

Exemple 3.5.9

3.6▲ Sous-espaces vectoriels et dimension

3.6.1 ► Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème 3.6.1.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E . Alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.

Exemple 3.6.2

Tout sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n est de dimension finie, inférieure ou égale à n . En d'autres termes, tous les espaces vectoriels étudiés dans ce cours sont de dimension finie.

Exemple 3.6.2

Exemple 3.6.3

Le sous-espace vectoriel F de \mathbb{R}^3 d'équation $x = y$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 (un plan) de \mathbb{R}^3 . En écrivant l'ensemble des solutions de cette équation sous forme

paramétrique, on obtient

$$F = \{(x, x, z), (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 1, 0) + z(0, 0, 1), (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

La famille $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ engendre F . Puisque c'est une famille libre, c'est une base de F , ce qui montre le résultat annoncé.

Exemple 3.6.3

Le seul sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim E$ est E lui-même :

Proposition 3.6.4. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de même dimension $\dim E$. Alors $E = F$.

Définition 3.6.5.

On appelle **rang** d'une famille de vecteurs la dimension du sous-espace vectoriel engendré par cette famille.

3.6.2 ► Dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels

Théorème 3.6.6 (Formule de Grassmann).

Soit E de dimension finie, F et G des sous-espaces vectoriels de E . Alors

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Corollaire 3.6.7.

Sous les hypothèses du théorème, si la somme $F \oplus G$ est directe, $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$.

Si de plus F et G sont supplémentaires dans E , $\dim F + \dim G = \dim E$.

Exemple 3.6.8

Considérons les deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x = y\}$ et $G = \text{vect}\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$. Montrons que $F + G = \mathbb{R}^3$.

On remarque que $\dim F = 2$ (exemple 3.6.3), $\dim G = 2$ (G est engendré par une famille libre de dimension 2). De plus $\dim(F \cap G) = 1$. En effet, si $\mathbf{x} = (x, y, z) \in G$, alors \mathbf{x} s'écrit $\lambda(1, 1, 0) + \mu(1, 0, 1)$. De plus, $\mathbf{x} \in F \iff x = y \iff \mu = 0$. Donc $F \cap G = \text{vect}\{(1, 1, 0)\}$ est bien de dimension 1. Par le théorème 3.6.6,

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 2 + 2 - 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3.$$

Par la proposition 3.6.4, $F + G = \mathbb{R}^3$.

3.7▲ Exercices

Exercice 25

Soit $\mathbb{E} = [0, 1]$. On définit une loi $(*)$ sur \mathbb{E} par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{E}^2 : x * y = (x - 1)(1 - y) + 1$$

1. Montrer que $(*)$ est une loi interne dans \mathbb{E} , commutative et associative.
2. Montrer que $(*)$ possède un élément neutre.
3. Quels sont les éléments symétrisables de \mathbb{E} .

Exercice 26

- 1) Dans un espace vectoriel \mathbb{E} , soit (V_1, V_2, V_3) une famille libre, démontrer l'indépendance linéaire des vecteurs : $V_1 - V_2 - V_3$ et $V_1 + V_3$
- 2) Montrer que les vecteurs $a_1(1, 1, 1), a_2(1, 2, 3), a_3(2, -1, 1)$ engendrent \mathbb{R}^3 et calculer les composantes du vecteur $U(1, 1, 1)$ suivant cette base.
- 3) Pour quelle valeur de m le vecteur $X(1, -2, m)$ est-il une combinaison linéaire des deux vecteurs : $b_1(1, 1, 1), b_2(1, 2, 3)$

Exercice 27

On considère dans \mathbb{R}^3 les sous-ensembles suivant :

$$\mathbb{F} = \left\{ (x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0, z \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } \mathbb{G} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2z \right\};$$

1. Montrer que \mathbb{F} n'est pas un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
2. Montrer que \mathbb{G} est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
3. Trouver une partie génératrice de \mathbb{G}
4. Déterminer une base de \mathbb{G} et préciser sa dimension.
5. Soit \mathbb{H} un supplémentaire de \mathbb{G} dans \mathbb{R}^3 , donner la dimension \mathbb{H} .
6. Le vecteur $V(1, 2, 1)$ appartient-il à \mathbb{G} ?

Exercice 28

I. Soit $\mathbb{F} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z \right\}$;

1. Montrer que \mathbb{F} est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . Trouver une base de \mathbb{F} et déduire sa dimension.

2. Soit $\mathbb{G} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0 \right\}$. Montrer que \mathbb{G} est un s.e.v de \mathbb{R}^3

3. Déterminer $\mathbb{F} \cap \mathbb{G}$.

II. Soit $\mathbb{K} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z = 0 \right\}$;

1. Montrer que \mathbb{K} est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

2. Soit \mathbb{L} le sous espace vectoriel engendré par $v_1(1, 1, -1)$ et $v_2(1, 1, -1)$. Déterminer \mathbb{L} , $\mathbb{L} \cap \mathbb{K}$ et déduire $\mathbb{L} \oplus \mathbb{K}$. Le vecteur $w(1, 1, -1)$ appartient-t-il à \mathbb{L} ?

3. Soit \mathbb{H} le sous espace vectoriel engendré par $v_1(1, 2, 1)$, $v_2(0, 1, 2)$, $v_3(2, 5, 4)$ Déduire le supplémentaire de \mathbb{H} dans \mathbb{R}^3 ; le supplémentaire est-il unique ?

3.8▲ Applications Linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps \mathbb{K} et soit $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est une **application linéaire** si et seulement si

$$\begin{cases} (1) \forall x, y \in E : f(x + y) = f(x) + f(y) \\ (2) \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E : f(\lambda \cdot x) = \lambda f(x) \end{cases}$$

Ou bien

$$\{ (1') \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E : f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \}$$

Propriétés

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire, alors :

- ❶ $f(0_E) = 0_F$.
- ❷ $f(-x) = -f(x)$.
- ❸ Si E_1 est un s.e.v de E alors $f(E_1)$ est un s.e.v de F .
- ❹ Si F_1 est un s.e.v de F alors $f^{-1}(F_1)$ est un s.e.v de E .
- ❺ La composition de deux applications linéaires est une application linéaire.

Exemple 3.8.1

❶ L'application f définie par :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (2x, y + z) \end{aligned}$$

est une application linéaire.

En effet, soient $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On veut montrer que $f(\alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z')) = \alpha f(x, y, z) + \beta f(x', y', z')$.

On a

$$\begin{aligned} f(\alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z')) &= f((\alpha x, \alpha y, \alpha z) + (\beta x', \beta y', \beta z')) \\ &= f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z') \\ &= (2(\alpha x + \beta x'), \alpha y + \beta y' + \alpha z + \beta z') \\ &= (\alpha 2x + \beta 2x', \alpha(y + z) + \beta(y' + z')) \\ &= (\alpha 2x, \alpha(y + z)) + (\beta 2x', \beta(y' + z')) \\ &= \alpha(2x, y + z) + \beta(2x', y' + z') \\ &= \alpha f(x, y, z) + \beta f(x', y', z') \end{aligned}$$

Exemple 3.8.1

Exemple 3.8.2

L'application f définie par

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x + 1 \end{aligned}$$

n'est pas linéaire, car $f(0_{\mathbb{R}}) = 1 \neq 0_{\mathbb{R}}$

Exemple 3.8.2

Exemple 3.8.3

L'application f définie par

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

n'est pas linéaire, car elle ne vérifié pas les conditions.

Exemple 3.8.3

Exemple 3.8.4

L'application d'identité f définie par

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \text{id}_{\mathbb{R}}(x) = x \end{aligned}$$

est une application linéaire .

Exemple 3.8.4

3.8.1 ►► Noyau, Image d'une application linéaire

►►► Image d'une application linéaire

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. L'**image** de f est l'ensemble :

$$\text{Im}f = f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$$

►►► Noyau d'une application linéaire

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Le **noyau** de f est défini par :

$$\text{Ker} f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$$

Remarque 3.8.5. soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire alors :

1. $\text{Im}f = f(E) = F \iff f$ une application surjective .
2. $\text{Ker} f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{0_E\} \iff f$ une application bijective .

Exemple 3.8.6

Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y, z) = (x + y, z)$ Vérifier que f est surjective et n'est pas injective?

❶ f surjective?

$$\begin{aligned} \text{Im}f &= \left\{ f(x, y, z) : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ (x + y, z) : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ x(1, 0) + y(1, 0) + z(0, 1) : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \text{vect}\{(1, 0), (0, 1)\} \end{aligned}$$

Alors $\text{Im}f$ engendré par $\{(1, 0), (0, 1)\}$

$\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$

$\iff f$ une application surjective

② f n'est pas injective?

$$\begin{aligned} \ker f &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + y, z) = 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -y \wedge z = 0 \right\} \end{aligned}$$

O na $(1, -1, 0) \in \ker f$ d'où $\ker f \neq \{(0, 0, 0)\}$ alors f n'est pas injective

Exemple 3.8.6

Théorème 3.8.7.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps \mathbb{K} et soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire, alors :

$$\dim E = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f)$$

3.8.2 ▶ Composition de deux applications linéaires

3.8.3 ▶ Rang d'une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps \mathbb{K} de dimensions finies et soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On appelle rang de f et on note $\text{rg}(f)$ la dimension de $\text{Im} f$ telle que : $\text{rg}(f) = \dim \text{Im}(f)$

Théorème 3.8.8.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps \mathbb{K} et soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire, alors :

1. $\text{rg}(f) \leq \min(p, n)$.
2. $\text{rg}(f) = n \iff f$ une application surjective .
3. $\text{rg}(f) = p \iff f$ une application injective .
4. $\text{rg}(f) = n = p \iff f$ une application bijective .

Exemple 3.8.9

Soit l'application linéaire f définie par

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\longmapsto (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4, -x_1 - 2x_3 - x_4) \end{aligned}$$

Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ puis donner $\operatorname{rg}(f)$.

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \operatorname{Ker} f &\iff f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 0, \\ -x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \left\{ (-2x_3 - x_4, -x_3 - x_4, x_3, x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{x_3(-2, -1, 1, 0) + x_4(-1, -1, 0, 1) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{vect}((-2, -1, 1, 0), (-1, -1, 0, 1)) \end{aligned}$$

$$\dim \operatorname{Ker} f = 2.$$

Par le théorème du rang :

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Ker} f = 4 - 2 = 2.$$

$$\text{Ainsi } \operatorname{rg}(f) = 2.$$

Exemple 3.8.9

3.9▲ Exercices

Exercice 29 Soit l'application f définie par :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto f(x, y, z) = (x + 3y, 2x - z) \end{aligned}$$

- Vérifier que f est une application linéaire.
- Déterminer $\ker f$ puis donner $\dim(\ker f)$.
- f est-elle injective ?
- Donner $\dim(\operatorname{Im} f)$ puis une base de $\operatorname{Im} f$.
- f est-elle surjective ?

Solution:
1) Vérifions que f est une application linéaire.

Soient $X = (x, y, z)$ et $Y = (x', y', z')$ dans \mathbb{R}^3 , et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda X + \mu Y) &= f(\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z')) \\ &= f((\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')) \\ &= (\lambda x + \mu x' + 3(\lambda y + \mu y'), 2(\lambda x + \mu x') - (\lambda z + \mu z')) \\ &= \lambda(x + 3y, 2x - z) + \mu(x' + 3y', 2x' - z') \\ &= \lambda f(X) + \mu f(Y) \end{aligned}$$

Ainsi, f est une application linéaire.

2) Déterminons le noyau de f .

$$\ker f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (0, 0)\}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x \\ z = 2x \end{cases}$$

Donc :

$$\ker f = \left\{ x \left(1, -\frac{1}{3}, 2 \right) : x \in \mathbb{R} \right\}$$

Le vecteur $\left(1, -\frac{1}{3}, 2 \right)$ forme une base de $\ker f$, d'où :

$$\dim(\ker f) = 1$$

3) f est-elle injective ?

Non, car $\ker f \neq \{(0, 0, 0)\}$. Donc f n'est pas injective.

4) Déterminons $\dim(\text{Im } f)$.

On sait que :

$$\dim(\text{Im } f) = 3 - \dim(\ker f) = 3 - 1 = 2$$

et comme le codomaine est \mathbb{R}^2 , on conclut que :

$$\text{Im } f = \mathbb{R}^2$$

avec par exemple comme base :

$$\mathcal{B}_{\text{Im } f} = \{(1, 2), (3, 0)\}$$

5) f est-elle surjective ?

Oui, car $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$

Exercice 30 Soit l'application f définie par :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto f(x, y, z) = (x + 2z, y + z, 3x + 2z) \end{aligned}$$

- Montrer que f est linéaire.
- Déterminer $\ker f$ et $\text{Im } f$ en précisant leurs dimensions.
- f est-elle bijective? Justifier.

Solution:

On a :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + 2z, y + z, 3x + 2z)$$

1) Montrons que f est linéaire.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $X = (x_1, y_1, z_1), Y = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$. On calcule :

$$\begin{aligned} f(\alpha X + \beta Y) &= f(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_2 + 2(\alpha z_1 + \beta z_2), \alpha y_1 + \beta y_2 + (\alpha z_1 + \beta z_2), 3(\alpha x_1 + \beta x_2) + 2(\alpha z_1 + \beta z_2)) \\ &= \alpha(x_1 + 2z_1, y_1 + z_1, 3x_1 + 2z_1) + \beta(x_2 + 2z_2, y_2 + z_2, 3x_2 + 2z_2) \\ &= \alpha f(X) + \beta f(Y) \end{aligned}$$

Ainsi, f est linéaire.

2) Déterminons le noyau et l'image de f .

On cherche $\ker f = \{(x, y, z) \in \mathbb{B} : f(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$.

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ 3x + 2z = 0 \end{cases}$$

De la première équation : $x = -2z$. En la remplaçant dans la troisième : $3(-2z) + 2z = -4z = 0 \Rightarrow z = 0$. Donc $x = 0, y = 0$.

Ainsi :

$$\ker f = \{(0, 0, 0)\} \Rightarrow \dim(\ker f) = 0$$

Par le théorème du rang :

$$\dim(\text{Im } f) = 3 - 0 = 3$$

Donc $\text{Im } f = \mathbb{R}^3$.

3) f est-elle bijective?

Oui, car $\ker f = \{0\}$ et $\text{Im } f = \mathbb{B}$. Ainsi, f est bijective (linéaire, injective et surjective).

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + 2z, y + z, 3x + 2z)$$

2)

$$\begin{aligned}
 \text{Ker } f &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3}\} \\
 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + 2z, y + z, 3x + 2z) = (0, 0, 0)\} \\
 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2z = 0, y + z = 0, 3x + 2z = 0\} \\
 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y = 0, z = 0\} = \{(0, 0, 0)\}. \\
 \text{Ker } f &= \{0_{\mathbb{R}^3}\} \implies \dim(\text{Ker } f) = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Im } f &= \{f(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\
 &= \{(x + 2z, y + z, 3x + 2z) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\
 &= \{x(1, 0, 3) + y(0, 1, 0) + z(2, 1, 2) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\
 &= \text{vect}((1, 0, 3), (0, 1, 0), (2, 1, 2)).
 \end{aligned}$$

Montrons que cette famille est libre.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{aligned}
 \alpha(1, 0, 3) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(2, 1, 2) &= (0, 0, 0) \\
 \implies (\alpha + 2\gamma, \beta + \gamma, 3\alpha + 2\gamma) &= (0, 0, 0) \\
 \begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 & (1) \\ \beta + \gamma = 0 & (2) \\ 3\alpha + 2\gamma = 0 & (3) \end{cases}
 \end{aligned}$$

En remplaçant (1) dans (3) : $3(-2\gamma) + 2\gamma = 0 \implies \gamma = 0$. Alors $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Donc la famille est libre.

$$\begin{aligned}
 \{(1, 0, 3), (0, 1, 0), (2, 1, 2)\} &\text{ est une base de } \text{Im } f \\
 \implies \dim(\text{Im } f) &= 3.
 \end{aligned}$$

$$\text{Ker } f = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \implies f \text{ est injective.}$$

$$\Im f \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad \dim(\text{Im } f) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3) \implies \text{Im } f = \mathbb{R}^3 \implies f \text{ est surjective.}$$

f est bijective.

Conclusion

Ce polycopié d'Algèbre I a été conçu comme un support d'apprentissage progressif, permettant à l'étudiant de consolider les notions fondamentales abordées au cours du semestre. À travers les trois chapitres consacrés aux ensembles et aux applications, aux nombres complexes et aux espaces vectoriels, nous avons cherché à offrir une présentation cohérente et structurée des bases de l'algèbre moderne.

Les définitions essentielles, les exemples guidés et les exercices corrigés ont pour objectif d'accompagner l'étudiant dans sa progression, en développant à la fois rigueur, intuition mathématique et autonomie. Ce document constitue ainsi un socle solide pour la poursuite des études en mathématiques et dans les disciplines scientifiques où l'algèbre joue un rôle fondamental.

Nous espérons que ce support contribuera à éclairer la compréhension des concepts présentés et qu'il servira de référence utile tout au long du parcours académique de l'étudiant.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. Rivaud, *Algèbre : Classes préparatoires et Université, Tome 1, Exercices avec solutions*, Vuibert.
- [2] N. Faddeev, I. Sominski, *Recueil d'exercices d'algèbre supérieure*, Édition de Moscou.
- [3] M. Balabne, M. Duflo, M. Frish, D. Guegan, *Géométrie – 2^e année du 1^{er} cycle classes préparatoires*, Vuibert Université.
- [4] K. Allab, *Éléments d'analyse : Fonction d'une variable réelle*, Office des publications universitaires, 1986.
- [5] B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boschet, *Exercices d'analyse, 1^{er} Cycle, 1^{re} Année de Mathématiques Supérieures*, Librairie Armand Colin, 1977.
- [6] D. Degrave, C. Degrave, H. Muller, *Précis de mathématiques, Analyse – première année*, Bréal, Rosny, 2003.
- [7] J.-P. Escofier, *Toute l'analyse de la Licence : Cours et exercices corrigés*, Dunod, 2014.
- [8] M. Mehbali, *Mathématiques : Fonction d'une variable réelle*, Office des publications universitaires, Alger.
- [9] J.-M. Monier, *Analyse MPSI : Cours, méthodes et exercices corrigés*, 5^e édition, Dunod, Paris, 2006.

ALPHABET GREC

Minuscule	Majuscule	Nom	Minuscule	Majuscule	Nom
α	A	alpha	ν	N	nu
β	B	bêta	ξ	Ξ	xi
γ	Γ	gamma	o	O	omicron
δ	Δ	delta	π	Π	pi
ε	E	epsilon	ρ	P	rhô
ζ	Z	zêta	σ	Σ	sigma
η	H	êta	τ	T	tau
θ	Θ	thêta	υ	Υ	upsilon
ι	I	iota	ϕ	Φ	phi
κ	K	kappa	χ	X	khi
λ	Λ	lambda	ψ	Ψ	psi
μ	M	mu	ω	Ω	oméga

FORMULE DU BINÔME

On rappelle que les coefficients du binôme $\binom{n}{k}$ sont définis par $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ et si $k > n$, et la relation :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad 0 \leq k \leq n. \quad (\text{B.0.1})$$

Remarque B.0.1. On note parfois C_n^k au lieu de $\binom{n}{k}$.

Si n et k sont des entiers tels que $0 \leq k \leq n$, les coefficients du binôme peuvent aussi être définis par la formule suivante

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (\text{B.0.2})$$

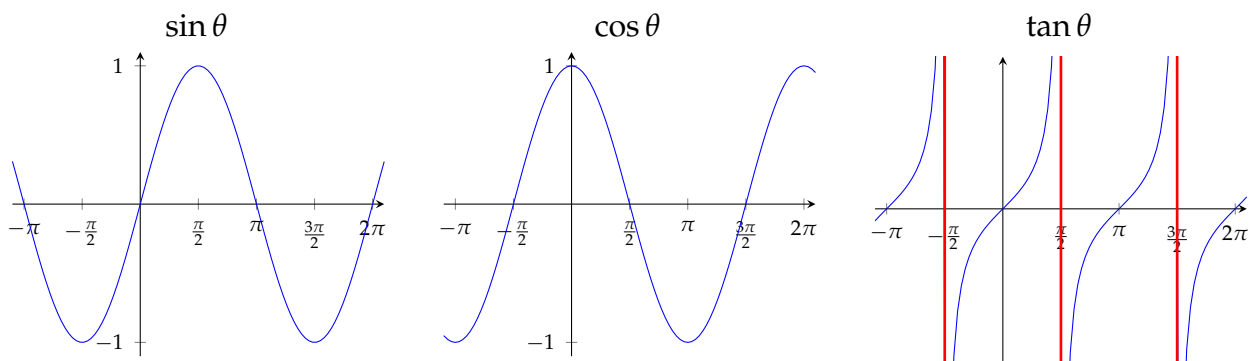
On a alors la formule du binôme de Newton sur \mathbb{C} :

Proposition B.0.2. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$,

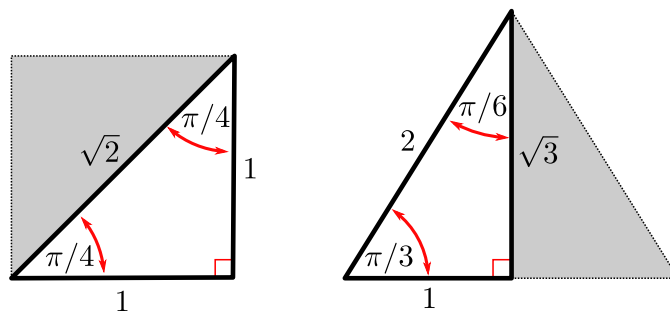
$$(z + z')^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k (z')^{n-k}.$$

TRIGONOMETRIE

C.1▲ Trigonometrie — Courbes



C.2▲ Trigonometrie — Triangles Spéciales



On a

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

C.3▲ Trigonometrie — Identities Simples

— Periodicité

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$$

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$$

— Réflexion

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

— Réflexion autour $\pi/4$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

— Réflexion autour $\pi/2$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

— Rotation par π

$$\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$$

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$$

— Pythagoras

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

— sin et cos building blocks

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta}$$

C.4▲ Trigonometrie — Addition et Soustraction des Angles

— Sinus

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

— Cosinus

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

— Tangente

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

— Double angle

$$\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$$

$$= 2 \cos^2(\theta) - 1$$

$$= 1 - 2 \sin^2(\theta)$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2 \tan(\theta)}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

$$\tan^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{1 + \cos(2\theta)}$$

— Produit vers Addition

$$\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

$$\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

— Addition vers Produit

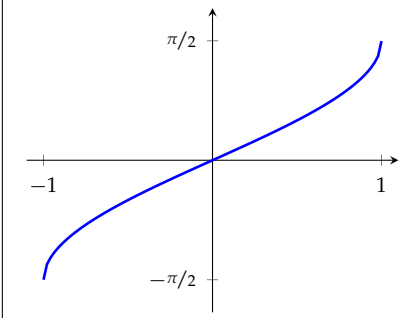
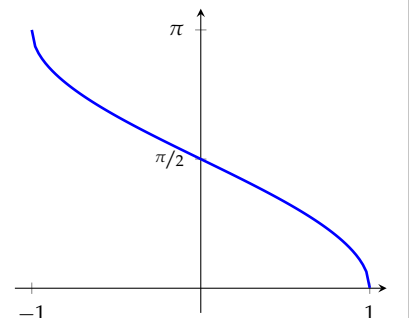
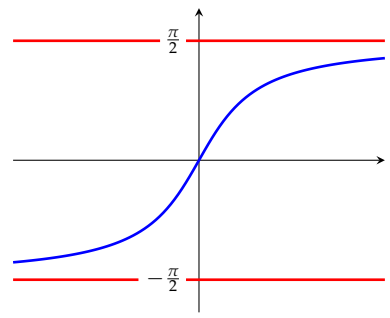
$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

C.5▲ Fonctions Trigonométriques Inverses

$\arcsin x$	$\arccos x$	$\arctan x$
Domain : $-1 \leq x \leq 1$	Domain : $-1 \leq x \leq 1$	Domain : $\forall x \in \mathbb{R}$
Range : $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$	Range : $0 \leq \arccos x \leq \pi$	Range : $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$
		

On a

$$\arcsin(\sin \theta) = \theta$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos(\cos \theta) = \theta$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\arctan(\tan \theta) = \theta$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Et

$$\sin(\arcsin x) = x$$

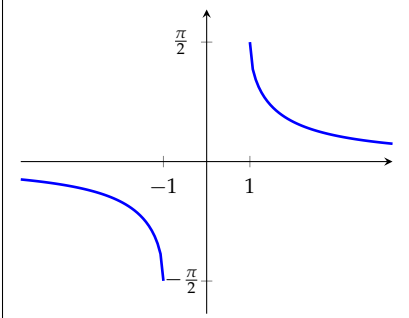
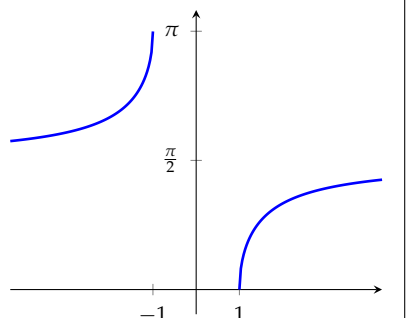
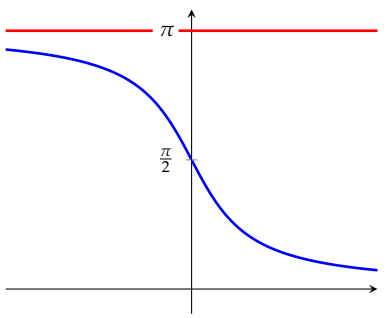
$$-1 \leq x \leq 1$$

$$\cos(\arccos x) = x$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$\tan(\arctan x) = x$$

pour tout réel x

$\operatorname{arccsc} x$	$\operatorname{arcsec} x$	$\operatorname{arccot} x$
Domain : $ x \geq 1$	Domain : $ x \geq 1$	Domain : $\forall x \in \mathbb{R}$
Range : $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arccsc} x \leq \frac{\pi}{2}$ $\operatorname{arccsc} x \neq 0$	Range : $0 \leq \operatorname{arcsec} x \leq \pi$ $\operatorname{arcsec} x \neq \frac{\pi}{2}$	Range : $0 < \operatorname{arccot} x < \pi$
		

On a

$$\operatorname{arccsc}(\csc \theta) = \theta$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \theta \neq 0$$

$$\operatorname{arcsec}(\sec \theta) = \theta$$

$$0 \leq \theta \leq \pi, \theta \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arccot}(\cot \theta) = \theta$$

$$0 < \theta < \pi$$

Et

$$\csc(\operatorname{arccsc} x) = x$$

$$|x| \geq 1$$

$$\sec(\operatorname{arcsec} x) = x$$

$$|x| \geq 1$$

$$\cot(\operatorname{arccot} x) = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

Annexe D

VOCABULAIRE D'ALGÈBRE I