الـــجمهـــورية الجـــــــــزائرية الديمـــــــــقراطـــية الشـــــــعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة عمار ثليجي – الأغواط -
كليـة التكنولوجيا
قسم العلوم التقنية

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Amar Telidji – Laghouat
Faculté de Technologie
Département des sciences techniques

دروس

المقياس: رياضيات1

السداسي الأول

مستوى السنة الأولى

جذع مشترك علوم و تقنيات

إعداد الأستاذ : سليم ساف

جامعة عمار ثليجي بالأغواط s.saf@lagh-univ.dz

السنة الجامعية: 2023-2022

الفهرس العام

الفصل الأول: مبادىء في المنطق و نماذج من طرق البرهان الرياضي.....ص4

1. مبادىء في المنطق.....ص5

2. نماذج من طرق البرهان الرياضي.....ص9

الفصل الثاني: المجموعات، العلاقات و التطبيقات.....ص12

1. نظرية المجموعات.....ص13

2. العلاقات: علاقة التكافؤ، علاقة الترتيب.....ص16

3. التطبيقات: التباين، الغامر، التقابل، الصورة المباشرة و العكسية.....ص20

الفصل الثالث: الدوال العددية لمتغير حقيقي واحد ص26

1. مفاهيم أولية ص27

2. النهايات ص30

3. الإستمرار ص33

4. الإشتقاق.....ص37

الفصل الرابع: الدوال الاساسية.....ص45

1. الدوال المثلثية و دوالها العكسية.....ص46

2. الدوال الأسية و اللوغاريتمية.....ص50

3. الدوال القطعية الزائدية و دوالها العكسية.....ص51

الفصل الخامس: دستور تايلور و النشر المحدود.....ص55

1. دستور تايلور ص56

2. النشور المحدودة.....ص60

الفصل السادس: البنى الجبرية، الفضاءات الشعاعية و التطبيقات الخطية ص71

1. البنى الجبرية الأساسية: الزمرة، الحلقة و الحقل.....ص72
2. الفضاءات الشعاعية (التعريف و الخواص الأولية).....ص78
3. التطبيقات الخطية (التعريف و الخواص الأولية).....ص96

مقدمة

بسم اللهّٰ الرحمن الرحيم و الصلاة والسلام على خاتم الأنبياء و المرسلين
و بعد :

تتضمن هذه المطبوعة الموجهة إلى طلاب السنة الأولى جذع مشترك علوم و تكنولوجيا دروس في مقياس الرياضيات 1.

وقد كتبت هذه المطبوعة باللغة العربية لشعور الأستاذ بالحاجة لمثل هذه المطبوعات في مثل هذه المقاييس و باللغة العربية التي تنقص المراجع بها كثيرا.

إن هذه المطبوعة و كأي نتاج علمي لا تخلو من النواقص و الهفوات، وكل أملنا أن تسهم في تطوير العمل البيداغوجي والبحث العلمي.

و الله الموفق

الأستاذ: سليم ساف

الفصل الأول

مبادىء في المنطق و نماذج من طرق البرهان الرياضي

- **مبادىء في المنطق الرياضي**
- **نماذج من طرق البرهان الرياضي**

مبادىء في المنطق و نماذج من طرق البرهان الرياضي

1. مبادىء في المنطق:

1.1. القضية : نصطلح على التسمية "قضية منطقية" أو بإختصار "قضية"، كل جملة خبرية تكون صحيحة أو خاطئة.

أمثلة: 1. "التفاح فاكهة" قضية صحيحة،

2. "ولاية الأغواط تقع في شرق الجزائر" قضية خاطئة،

3. "$8 + 2 = 10$ " قضية صحيحة،

4. "$0 > 1$" قضية خاطئة.

ملاحظات:1. إذا كانت p قضية فإننا نلحق بها الرمز 1 إذا كانت صحيحة و الرمز 0 إذا كانت خاطئة، و في حالة قضيتين p و q هناك أربعة احتمالات، و هي مجملة ضمن الجدول الموالي المدعو جدول الحقيقة

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

- يعني السطر الأول من الجدول بأن p و q كلاهما صحيحتان،
- يعني السطر الثاني من الجدول بأن p صحيحة و q خاطئة،
- يعني السطر الثالث من الجدول بأن p خاطئة و q صحيحة،...

2. إذا كانت p قضية معطاة، فإننا نرمز ب: $\bar{p}$ لنفيها، تكون إذن $\bar{p}$ صحيحة إذا كانت p خاطئة و العكس بالعكس، لا يمكن لقضيتين p و $\bar{p}$ أن تكونا صحيحتين معا، كذلك القضية p تكون صحيحة أو خاطئة.

2-1. الروابط المنطقية: يمكن الربط بين قضيتين p و q بهدف إنشاء قضية جديدة

الوصل: إذا قلنا لنأخذ القضية "p و q " فسنكتب هذا رمزيا على الشكل: $(p \wedge q)$، و هذه القضية تكون صحيحة فقط في حالة واحدة إذا كانت القضيتين p و q صحيحتين معا وجدول الحقيقة التالي يبين ذلك

p	q	p∧ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

أمثلة:

1. إذا كانت القضية p هي "المثلث Δ متساوي الساقين" و كانت القضية q هي "المثلث Δ قائم الزاوية" فإن القضية $(p \wedge q)$ هي "المثلث Δ متساوي الساقين و قائم "'،

2. " $2 > 1$ و $1 = 1$ " قضية صحيحة، 3. " $2 < 1$ و $1 = 1$ " قضية خاطئة .

الفصل: إذا قلنا لنأخذ القضية "p أو q " فسنكتب هذا رمزيا على الشكل:$(p \vee q)$، و هذه القضية تكون خاطئة فقط في حالة واحدة إذا كانت القضيتين p و q خاطئتين معا و جدول الحقيقة التالي يبين ذلك

P	Q	p$\vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

أمثلة: 1. إذا كانت القضية p هي "المثلث Δ متساوي الساقين" و كانت القضية q هي "المثلث Δ قائم الزاوية" فإن القضية $(p \vee q)$ هي "المثلث Δ متساوي الساقين أو قائم الزاوية" .

2. " $2 < 1$ أو $1 = 1$ " قضية صحيحة.

الإستلزام: إذا قلنا لنأخذ القضية "$\overline{p}$ أو q " فسنكتب هذا رمزيا على الشكل: $(p \Longrightarrow q)$ ، و نقرأ: القضية p يستلزم القضية q أو القضية p تؤدي الى قضية ثانية q ، و تكون خاطئة فقط في حالة واحدة إذا كانت القضية p صحيحة و القضية q خاطئة وجدول الحقيقة التالي يبين ذلك

P	Q	p$\Longrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

أمثلة:

1. إذا كانت القضية p هي "المثلث Δ متساوي الساقين" و كانت القضية q هي "المثلث Δ قائم الزاوية" فإن القضية $(p \Longrightarrow q)$ هي "المثلث Δ ليس متساوي الساقين أو قائم الزاوية"،

2. " $2 < 1$ أو $1 = 1$ " قضية صحيحة،

3. " $2 > 1$ أو $1 = 1$ " قضية صحيحة،

4. " $2 > 1$ أو $1 = 3$ " قضية خاطئة،

مثال: (يوضح الإستلزام)

إفرض أن رئيس قسم العلوم التقنية يقول للطالب محمد إذا تحصلت على المعدل في مادة الرياضيات فسوف أعطيك هدية (لتكن سيارة)، هناك أربعة إحتمالات:

أ. يحصل محمد على المعدل في مادة الرياضيات و يحصل على الهدية،

ب. يحصل محمد على المعدل في مادة الرياضيات و لا يحصل على الهدية،

ج. لا يحصل محمد على المعدل في مادة الرياضيات و يحصل رغم ذلك على الهدية،

د. لا يحصل محمد على المعدل في مادة الرياضيات و لا يحصل على الهدية.

يكون رئيس القسم قد كذب على الطالب إلا في حالة واحدة فقط و هي الحالة الثانية.

نرمز ب: p للقضية " يحصل الطالب على المعدل في مادة الرياضيات " و للقضية q " يمنح رئيس قسم العلوم التقنية الهدية للطالب محمد "،

و منه نحصل على الجدول التالي:

P	q	p$\Longrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

التكافؤ: نقول إن القضيتين و q متكافئتين إذا كان ($p\Longrightarrow q$ و $q\Longrightarrow$ p) و نكتب: $(p\Longleftrightarrow q)$ ، و يكون هذا التكافؤ صحيح إذا كانت القضيتين p و q صحيحتين معا أو خاطئتين معا كما يبين الجدول التالي:

P	q	p$\Longrightarrow q$	q$\Longrightarrow p$	p$\Longleftrightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

أمثلة: 1. "$1=1\Leftrightarrow 1<2$ " قضية صحيحة،

2. "$1=1\Leftrightarrow 2=1$" قضية خاطئة،

3. "$2>1\Leftrightarrow 0>1$" قضية خاطئة.

خواص: لتكن p، q و r ثلاث قضايا لدينا:

1. $p\Leftrightarrow \bar{\bar{p}}$ ،

2. $p \Leftrightarrow p \vee p$ و $p \Leftrightarrow p \wedge p$ (خاصية الجمود)،

3. $p \wedge \bar{p}$ قضية خاطئة سواء كانت p صحيحة أو خاطئة (مبدأ عدم التناقض)،

4. $p \vee \bar{p}$ قضية صحيحة سواء كانت p صحيحة أو خاطئة،

5. $(p \Longrightarrow p)$ و $(p \Leftrightarrow p)$ قضيتان صحيحتان سواء كانت p صحيحة أو خاطئة،

6. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ و $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ (خاصية التبديل)،

7. $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$ (القانون الأول لدي مورغان)،

8. $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$ (القانون الثاني لدي مورغان)،

9. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$،

10. $(p \Longrightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Longrightarrow \bar{p})$، $(p \Longrightarrow q) \Leftrightarrow \bar{p} \vee q$ ،

11. $\begin{cases} p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r \\ p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r \end{cases}$ (خاصية التجميع)،

12. $\begin{cases} p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$ (خاصية التوزيع)،

13. القضيتان التاليتان صحيحتان:

$\begin{cases} (p \Longrightarrow q \wedge q \Longrightarrow r) \Longrightarrow (p \Longrightarrow r) \\ (p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r) \Longrightarrow (p \Leftrightarrow r) \end{cases}$ (خاصية التعدي).

3-1. المكممات:

الجملة مفتوحة:

نسمي جملة مفتوحة معرفة على مجموعة E كل جملة ذات متغير x و التي تصبح قضية إذا إستبدلنا x بأي عنصر من عناصر E ونرمز لها بالرمز $P(x)$ ، $Q(x)$،...

المكمم الكلي

نرمز إلى المكمم الكلي بالرمز $\forall$ و يقرأ " مهما يكن " أو" من أجل كل"

القضية "$\forall x \in E : P(x)$ " تكون صحيحة عندما تكون القضايا $P(x)$ صحيحة من أجل كل العناصر x من E و نقرأ " من أجل كل العناصر x التي تنتمي الى E، $P(x)$ صحيحة "

أمثلة:

1. "$\forall x \in \mathbb{R}: x \geq 0$" القضية خاطئة،

2. "$\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$" القضية صحيحة.

المكمم الوجودي (الجزئي)

نرمز إلى المكمم الوجودي (الجزئي) بالرمز "$\exists$ " و يقرأ" يوجد على الأقل ." و نرمز أيضا بالرمز " "$\exists!$ " و يقرأ" يوجد و هو وحيد ".

القضية " $\exists\, x \in E : P(x)$ **"** تكون صحيحة عندما يوجد عنصر على الأقل x من E *بحيث تكون* القضية $P(x)$ صحيحة و نقرأ " يوجد على الأقل عنصر x ينتمي الى E، $P(x)$ صحيحة ".

أمثلة:

1. "$\exists x \in \mathbb{R}: x \geq 0$ " القضية صحيحة،

2. "$\exists x \in \mathbb{R}: x^2 < 0$" القضية خاطئة.

نفي المكممات :

نفي القضية $\forall\, x \in E : P(x)$ هي القضية $\exists\, x \in E : \overline{P(x)}$ ،

نفي القضية $\exists\, x \in E : P(x)$ هي القضية $\forall\, x \in E : \overline{P(x)}$،

نفي القضية $\forall\, x \in E, \forall\, y \in F : P(x, y)$ هي القضية $\exists\, x \in E, \exists y \in F : \overline{P(x, y)}$،

نفي القضية $\exists\, x \in E, \exists\, y \in F : P(x, y)$ هي القضية $\forall\, x \in E, \forall\, y \in F : \overline{P(x, y)}$ ،

نفي القضية $\forall\, x \in E, \exists\, y \in F : P(x, y)$ هي القضية $\exists\, x \in E, \forall\, y \in F : \overline{P(x, y)}$،

نفي القضية $\exists\, x \in E, \forall\, y \in F : P(x, y)$ هي القضية $\forall\, x \in E\,, \exists\, y \in F : \overline{P(x, y)}$.

أمثلة:

1. $\exists x \in \mathbb{R}: x < 0 \;\Leftrightarrow\; \overline{\forall x \in \mathbb{R}: x \geq 0}$ ،

2. $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \overline{\exists x \in \mathbb{R}: x^2 < 0}$.

2. نماذج من طرق البرهان الرياضي :

1-2 . الإستنتاج: هو إستدلال يعتمد على القاعدة، إذا كانت p صحيحة و $(p \Longrightarrow q)$ صحيحة فإن q صحيحة (يمكن التأكد من صحة القاعدة بسهولة بإستعمال جدول الحقيقة)

2-2. البرهان بالخلف : إذا كان علينا أن نثبت الإستلزام التالي: $(p \Longrightarrow q)$ فإننا نفرض أن النتيجة q خاطئة (غير محققة) أي $\bar{q}$ صحيحة و نصل إلى سقوط الفرضية p (أو نصل إلى تناقض عام)

مثال1: بين أن $\sqrt{2}$ عدد أصم (عدد غير ناطق)

- نفرض أن $\sqrt{2}$ عدد ناطق إذن يمكننا كتابته على الشكل $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ حيث a و b عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما ($b \neq 0$) و منه :

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Longrightarrow 2b^2 = a^2 \Longrightarrow a^2 = 2k, \qquad k \in \mathbb{N}^*$$

إذن نستنتج أن a^2 و a عددان زوجيان، و بما أن a عدد زوجي فإنه قابل القسمة على 2 ومنه نستخلص أن b^2 و b عددان زوجيان كذلك و هذا يؤدي الى أن a و b قابلين للقسمة على 2 و هذا تناقض كون a و b عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما و بالتالي $\sqrt{2}$ عدد أصم .

مثال2: بين بإستعمال البرهان بالخلف أن:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} - \{-2\} \Rightarrow xy + 2x + 2y + 2 \in \mathbb{R} - \{-2\}$$

نفرض أن: $xy + 2x + 2y + 2$ لا ينتمي الى $\mathbb{R} - \{-2\}$ و منه فإن:

$$xy + 2x + 2y + 2 = -2 \Longrightarrow (x+2)(y+2) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \text{أو} \\ y = -2 \end{cases}$$

و هذا تناقض كون $y \neq -2$ و $x \neq -2$

3-2. البرهان بالعكس النقيض: بما أن $(p \Longrightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Longrightarrow \bar{p})$

إذا كان علينا أن نثبت الإستلزام: $(p \Longrightarrow q)$ فإننا نستطيع أن نثبت الإستلزام التالي: $(\bar{q} \Longrightarrow \bar{p})$

مثال: ليكن n عدد طبيعي بين الإستلزام التالي: n عدد زوجي $\Longrightarrow n^2$ عدد زوجي

نستعمل البرهان بالعكس النقيض أي نبرهن الإستلزام: n^2 عدد فردي $\Longrightarrow n$ عدد فردي

ليكن n عدد طبيعي، نفرض أن n عدد فردي إذن $n = 2k + 1$ حيث k عدد طبيعي و منه $n^2 = 2h + 1$ حيث $h = 2k^2 + 2k$ و منه n^2 عدد فردي

و بالتالي مهما يكن n عدد طبيعي فإن : (n عدد زوجي $\Longrightarrow n^2$ عدد زوجي)

4-2. البرهان بمثال مضاد: لكي نبرهن على خطأ القضية "$\forall x \in X:\ P(x)$" يكفي أن نجد عنصرا $x \in X$ بحيث تكون القضية $\overline{P(x)}$ صحيحة.

هذا مثال بسيط يوضح هذا النوع من الإستدلال

مثال: أثبت أن القضية " $\forall n \in \mathbb{N}: n \geq 10$ " خاطئة، هنا يكفي أخذ قيمة للعدد n من المجموعة $\mathbb{N}$ بحيث تكون المتراجحة $n \geq 10$ غير صحيحة، نأخذ مثلا $n = 8$ فيكون لدينا: $8 \geq 10$ متراجحة غير صحيحة، و منه القضية " $\forall n \in \mathbb{N}: n \geq 10$ " غير صحيحة.

5-2. البرهان بفصل الحالات: يعتمد هذا النوع من الإستدلال على القاعدة

$(p \Longrightarrow q$ و $\overline{p} \Longrightarrow q$) صحيحة فإن q صحيحة.

مثال: أثبت أن: $n(n+1)$ عدد طبيعي زوجي مهما يكن n من المجموعة $\mathbb{N}$

هنا لدينا حالتين: و في كلتا الحالتين يكون $n(n+1)$ عدد زوجي

1. $n = 2k+1$ عدد فردي و منه $n(n+1) = 2(k+1)(k+2)$ عدد زوجي

2. $n = 2k$ عدد زوجي و منه $n(n+1) = 2k(2k+1)$ عدد زوجي

6-2. البرهان بالتراجع: أفرض أن لدينا جملة قضايا "P_n" حيث n عدد طبيعي و $n \geq n_0$ يطلب إثباتها، نستخدم لذلك طريقة البرهان بالتراجع على العدد الطبيعي n و التي تكمن في:

1. التحقق من صحة القضية P_{n_0} ، 2. فرض القضية P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي كيفي n $(n \geq n_0)$، و إثبات صحة القضية P_{n+1} ، نكون عندئذ قد برهنا على صحة القضايا "P_n" من أجل كل n عدد طبيعي و $n \geq n_0$.

مثال: أثبت صحة القضية "P_n" : "$\forall n \in \mathbb{N}^*: 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$"

- من أجل $n = 1$ لدينا: $1 = 1$ محققة و منه القضية p_1 صحيحة $(n_0 = 1)$

- نفرض صحة القضية P_n من أجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$ ، و نبرهن صحة P_{n+1}

لدينا: $\underbrace{1+2+\cdots+n}_{P_n} + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$ ،

و بالتالي القضية "P_{n+1}" صحيحة إذن القضية "P_n" صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$.

الفصل الثاني

المجموعات، العلاقات و التطبيقات

- **المجموعات**
- **العلاقات**
- **التطبيقات**

المجموعات، العلاقات و التطبيقات

1. نظرية المجموعات :

1-1. مفاهيم عامة :

مفهوم المجموعة : إن مفهوم المجموعة مفهوم أولي يدرك بالحدس، ويكون محددا تماما إذا علمت الأشياء المكونة لها، تدعى هده الأشياء بعناصر المجموعة.

أمثلة :

$\mathbb{N} = \{0,1,2, \dots\}$ مجموعة الأعداد الطبيعية،

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1,0,1,2, \dots\}$ مجموعة الأعداد الصحيحة ،

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \quad p, q \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \}$ مجموعة الأعداد الناطقة ،

$\mathbb{R} =]-\infty \quad +\infty[$ مجموعة الأعداد الحقيقية .

الانتماء: إذا كان العنصر x من المجموعة E ، نقول أن x ينتمي للمجموعة E و نكتب $x \in E$ و إذا العنصر x ليس من المجموعة E، نقول أن x لا ينتمي للمجموعة E و نكتب $x \notin E$.

مثال: $1 \in \mathbb{N}$ و $-1 \notin \mathbb{N}$

تعيين مجموعة : تكون مجموعة معينة تماما إذا تحقق أحد الشروط التالية:

1. علمت جميع عناصرها، 2. علمت الخاصية التي تميز هده المجموعة، 3. علمت بعض العناصر و العلاقة التي تربطها ببقية العناصر.

المجموعة المنتهية : هي المجموعة المكونة من عدد منته من العناصر،

المجموعة الغير منتهية : هي المجموعة المتكونة من عدد غير منته من العناصر،

المجموعة وحيدة العنصر : هي المجموعة المكونة من عنصر واحد،

المجموعة الخالية : هي المجموعة التي لا تشمل على إي عنصر.

مثال : المجموعة المعرفة ب $A = \{x \in N : \quad x^2 + 1 = 0\}$، هي مجموعة خالية لأنه لا يوجد أي عدد طبيعي مربعه يساوي 1- .

2-1. العمليات على المجموعات : لتكن A و B مجموعتين

الاحتواء : نقول أن المجموعة A محتواة في المجموعة B، إذا كان كل عنصر من A هو كذلك عنصر من B و نكتب $A \subseteq B$ و بعبارة رياضية لدينا:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow [\forall x,\ \ x \in A \Longrightarrow x \in B]$$

ونقول أيضا أن المجموعة $\boldsymbol{B}$ مجموعة جزئية من المجموعة $\boldsymbol{A}$.

مثال : مجموعة الأعداد الطبيعية محتواة في مجموعة الأعداد الصحيحة.

المساواة : نقول أن المجموعة $\boldsymbol{A}$ تساوي المجموعة $\boldsymbol{B}$ إذا كانت $\boldsymbol{A}$ محتواة في $\boldsymbol{B}$ و $\boldsymbol{B}$ محتواة في $\boldsymbol{A}$ ونكتب

$$A = B \ \Leftrightarrow [\ A \subset B \text{ و } B \subset A\ ]$$

التقاطع : نسمي تقاطع المجموعتين $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$ مجموعة العناصر المشتركة بينهما و نكتب

$$A \cap B = \{x\ ;\ \ x \in A \ \text{ و }\ x \in B\}$$

مثال : $A = \{0,1,2\}$, $B = \{0,1,3\}$ و بالتالي $A \cap B = \{0,1\}$

خواص: لتكن المجموعات الكيفية A، B و C

1. $A \cap B = B \cap A$، 2. $A \cap A = A$ ، 3. $A \cap \phi = A$ ، 4. $A \cap E = E$

5. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$، 6. $A \cap B \subseteq B$ ، $A \cap B \subseteq A$.

ملاحظة : نقول أن المجموعتين $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$ منفصلتان إذا كان تقاطعهما يساوي مجموعة خالية.

الإتحاد: نسمي إتحاد مجموعتين A و B، مجموعة العناصر المكونة لكلتا المجموعتين و نكتب:

$$A \cup B = \{x;\ \ x \in A \ \text{ أو }\ x \in B\}$$

مثال: $A = \{0,1,3\}$ ، $B = \{2,4\}$ و $A \cup B = \{0,1,2,3,4\}$.

خواص : لتكن $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ و $\boldsymbol{C}$ مجموعات كيفية

1. $A \cup A = A$، 2. $A \cup B = B \cup A$ ، 3. $A \subseteq A \cup B$، 4. $B \subseteq A \cup B$

5. $(A \cup) \cup C = A \cup (B \cup C)$، 6. $A \cup \phi = A$.

المتممة : لتكن $\boldsymbol{A}$ مجموعة جزئية من المجموعة E، نسمي متممة $\boldsymbol{A}$ بالنسبة إلى E مجموعة العناصر التي تنتمي إلى E و لا تنتمي إلى $\boldsymbol{A}$ و نرمز لها بالرمز A^C ونكتب:

$$A^C = \{x\ , x \in E \ \text{ و }\ x \notin A\}$$

الفرق : الفرق بين مجموعتين $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$ هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى $\boldsymbol{A}$ و لا تنتمي إلى $\boldsymbol{B}$،

و نكتب: $A - B = \{x\ ;\ \ x \in A \text{ و } x \notin B\}$

خواص :1. $A - \Phi = A$، 2. $A - A = \Phi$ ، 3. $\Phi - A = \Phi$،

4. $A - B \subseteq A$ ، $A - B = A \cap B^C$ .5 ، $A - B \neq B - A$ .6 (عموما).

الفرق التناظري: الفرق التناظري بين المجموعتين $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$ هو مجموعة العناصر الغير مشتركة بينهما و نكتب :

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \, ; (x \in A \text{ و } x \notin B) \text{ أو } (x \in B \text{ و } x \notin A)\}$$

خواص عامة : لتكن $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ و $\boldsymbol{C}$ مجموعات

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$،

2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ،

3. $A \Delta B = C_{A \cup B}^{A} \cap B$ ، $A \Delta B = C_B^A \cup C_A^B$ ،

4. إذا كانت $A \subset E$ فإن $A \cup A^C = \mathrm{E}$ و $A \cap A^C = \Phi$ ،

5. $(A^C)^C = A$ ،

6. إذا كانت $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$ مجموعتين من E فلدينا قانوني دي مورقان

$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ ، $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

مجموعة أجزاء مجموعة : مجموعة أجزاء المجموعة E هي المجموعة

$$p(E) = \{A \, ; \quad A \subseteq E\}$$

مثال : $E = \{a, b\}$ و $p(E) = \{\Phi, E, \{a\}, \{b\}\}$

خواص : لتكن E مجموعة كيفية لدينا

1. $p(E) \neq \Phi$ لأن $E \in p(E)$

2. $p(E)$ مغلقة بالنسبة للإتحاد أي : $\forall A, B \in p(E)$, $A \cup B \in p(E)$

3. $p(E)$ مغلقة بالنسبة للتقاطع أي : $\forall A, B \in p(E)$, $A \cap B \in p(E)$

4. إذا كانت E مجموعة مكونة من n عنصرا فإن عدد عناصر $p(E)$ هي 2^n

الجداء الديكارتي : الجداء الديكارتي للمجموعتين E و F هو مجموعة الثنائيات (x, y) بحيث $x \in E$ و $y \in F$ و نكتب $E \times F = \{(x, y) \, , \; x \in E \text{ و } y \in F\}$

خواص :

1. $(x, y) = (a, b) \iff x = a$ و $y = b$ ،

2. $E \times F \times G = \{(x, y, z) \; ; \; x \in E \text{ و } y \in F \text{ و } z \in G\}$ ،

3. $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \; , \; x_i \in E_i \; , 1 \leq i \leq n\}$

و إذا كان $E_1 = E_2 = \cdots = E_n$ فإن $\prod_{i=1}^{n} E_i = E^n$،

4. خاصية التجميع هي : $(E \times F) \times G = E \times (F \times G)$،

5. لدينا عموما $E \times F \neq F \times E$،

6. إذا كانت E مجموعة مكونة من n عنصرا و F مجموعة مكونة من m عنصرا فإن ExF مجموعة مكونة من nxm عنصرا .

تجزئة مجموعة : لتكن E مجموعة غير خالية و $p(E)$ مجموعة أجزائها و لتكن Ω مجموعة جزئية غير خالية من $p(E)$ ، نقول عن المجموعة Ω أنها تشكل تجزئة للمجموعة E إذا تحقق

1. كل عناصر Ω غير خالية أي : $\forall A, B \in \Omega : A \neq \Phi$

2. Ω منفصلة مثنى مثنى أي : $\forall A, B \in \Omega : A \cap B = \Phi$

3. إتحاد عناصر Ω يساوي المجموعة E أي : $\bigcup_{A \in \Omega} A = E$

نتيجة: ينتج من هذا التعريف و حسب خواص التقاطع والإتحاد أنه من أجل كل جزء من المجموعة E يختلف عن E و Φ توجد تجزئة ل E هي : $\Omega = \{A \, ، \, A^c\}$

2. العلاقات الثنائية :

البيان : لتكن E و F مجموعتين، نسمي بيانا كل مجموعة جزئية G من ExF، فإذا كان (x, y) عنصرا من البيان G نقول أن y يقابل x و فق البيان G أو أن x يرتبط ب y وفق البيان G .

البيان العكسي : ليكن G بيانا، البيان العكسي ل G نرمز له بالرمز : G و المعرف كمايلي:

$$(x, y) \in G \Leftrightarrow (y, x) \in G^{-1}$$

العلاقة من مجموعة نحو مجموعة : لتكن E و F مجموعتين، نسمي علاقة من المجموعة E نحو المجموعة F كل ثلاثية $\Re = (E، F، G)$ بحيث : G بيان في ExF و يدعى البيان G بيان العلاقة $\Re$، فيما تدعى المجموعة E مجموعة إنطلاقها و المجموعة F مجموعة وصولها .

فإذا كان (x, y) عنصرا من G نقول أن x له علاقة مع y و نكتب : $x \Re y$.

العلاقة العكسية : لتكن $\Re = (G, F, E)$ علاقة، العلاقة العكسية للعلاقة $\Re$ هي العلاقة المعرفة كمايلي : $\Re^{-1} = (F, E, G^{-1})$ $\quad x \Re^{-1} y \Leftrightarrow y \Re x$

مثال : لتكن المجموعتين $E = \{-2، 0، 2، 4، 5\}$ و $F = \{-1، 0، 1، 3، 4\}$

العلاقة $\Re$ المعرفة من E نحو F كمايلي :

$$\forall\, x \in E\,, \forall y \in F\colon \left[x\Re y \Leftrightarrow y \text{ هو ضعف } x\right]$$

بيان العلاقة G هو :

$$G = \{(x,y) \in E \times F;\ x\Re y\} = \{\,(x,y) \in E \times F; y \text{ هوضعف } x\,\}$$

$$= \{(-2,-1),(0,0),(2,1)\}$$

و علاقتها العكسية $\Re^{-1}$ معرفة من F نحو E كمايلي :

$$\forall x \in F\,, \forall y \in E\ :\ x\Re^{-1}y \Leftrightarrow y \text{ ضعفه } x$$

بيان $\Re^{-1}$ هو $G_{\Re^{-1}} = \{(-1,-2),(0,0),(1,2)\}$

أنواع العلاقات الثنائية : لتكن $\Re$ علاقة ثنائية على المجموعة E

1. **$\Re$ علاقة انعكاسية**: كل عنصر من E هو في علاقة مع نفسه أي : $\forall x \in E\colon\ x\Re x$

2. **$\Re$ علاقة تناظرية**: إذا كان العنصر x في علاقة مع y فإن العكس صحيح كذلك أي :

$$\forall x,y \in E\colon\quad x\Re y \Longrightarrow y\Re x$$

3. **$\Re$ علاقة متعدية:** إذا كان العنصر x في علاقة مع العنصر y و العنصر y في علاقة مع العنصر z فإن العنصر x في علاقة مع العنصر z أي :

$$\forall x,y,z \in E\colon (x\Re y) \text{ و } (y\Re z) \Longrightarrow x\Re z$$

4. **$\Re$ علاقة ضد تناظرية:** إذا كان العنصر x في علاقة مع العنصر y و العنصر y في علاقة مع العنصر x فإن العنصر x يساوي y أي :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2\colon x\Re y \text{ و } y\Re x \Longrightarrow x = y$$

1-2. علاقة التكافؤ: نقول عن $\Re$ أنها علاقة تكافؤ على E إذا كانت إنعكاسية ، تناظرية و متعدية .

مثال: لتكن العلاقة الثنائية $\mathcal{R}$ المعرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة كمايلي :

$$\forall x,y \in \mathbb{Z}\ :\ x\Re y \ \Leftrightarrow\ \exists n \in \mathbb{Z}\ :\ x - y = 3n$$

بين أن $\Re$ علاقة تكافؤ .

1. **$\Re$ انعكاسية:** لأنه لدينا كل عنصر من المجموعة $\mathbb{Z}$ في علاقة مع نفسه أي :

$$\forall x \in \mathbb{Z}\colon\quad x - x = 3(0) \Longrightarrow x\Re x$$

2. **$\Re$ تناظرية:** لأن

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x\Re y \Longrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : x - y = 3$$

$$\Longrightarrow \exists n_1 = -n \in \mathbb{Z} : y - x = 3(-n) = 3n_1 \Longrightarrow y\Re x$$

3. $\Re$ **متعدية :** لأن

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : \begin{cases} x\Re y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}: x - y = 3n \ldots\ldots (1) \\ y\Re z \Leftrightarrow \exists\, n_1 \in \mathbb{Z}: y - z = 3n_1 \ldots (2) \end{cases}$$

من (1) و (2) نجد :

$$\exists n_2 \in \mathbb{Z} : \; x - z = 3(n + n_1) = 3(n_2) \;\; , (n + n_1 = n_2 \text{ بوضع })$$

من 1)، 2) و 3) نستنتج أن $\Re$ علاقة تكافؤ على المجموعة $\mathbb{Z}$.

صنف تكافؤ عنصر: لتكن $\Re$ علاقة تكافؤ على المجموعة E و ليكن x عنصرا من E.

نسمي صنف تكافؤ العنصر x مجموعة العناصر التي لها علاقة مع العنصر y ونرمز لها بالرمز
$\dot{x}$ أو $\bar{x}$ أو $\mathrm{C}(x)$ و نكتب : $\dot{x} = \{y \in E, \;\; xRy \;\}$

نتائج : ينتج من هذا التعريف أن :

أ. كل صنف تكافؤ غير خال لأن : $\forall x \in E : x\Re x \Rightarrow \; x \in \dot{x} \Longrightarrow \dot{x} \neq \phi$

ب. كل صنفي تكافؤ إما متساويين و إما منفصلين أي:

$$\forall (x, y) \in E^2 : \dot{x} = \dot{y} \text{ أو } \dot{x} \cap \dot{y} = \Phi$$

ج. إن أي صنف تكافؤ يكون محددا تماما بإعطاء عنصر كيفي من عناصره يدعى هذا العنصر x ممثلا لهذا صنف التكافؤ .

في المثال السابق : أوجد صنف تكافؤ العنصر $x = 0$

$$\dot{x} = \{x \in \mathbb{Z} : \;\; 0\Re x\} = \{x \in \mathbb{Z} : \; 0 - x = 3n\} = \{x \in \mathbb{Z} : \; x = 3n\}$$

$$= \{\ldots, -3, 0, 3, \ldots\}$$

إذن مجموعة صنف تكافؤ العدد 0 هو مجموعة الأعداد المضاعفة للعدد 3.

2-2. علاقة الترتيب : نقول عن $\Re$ أنها علاقة ترتيب على E إذا كانت إنعكاسية، ضد تناظرية و متعدية .

ملاحظات هامة : لتكن E مجموعة و $\Re$ علاقة ترتيب على E.

1. نقول عن عنصرين x و y من E أنهما قابلين للمقارنة إذا كان $y\Re x$ أو $x\Re y$،

2. نقول عن $\mathfrak{R}$ أنها علاقة ترتيب كلي إذا كان كل عنصرين من E قابلين للمقارنة وفق العلاقة $\mathfrak{R}$ بمعنى $\forall(x,y) \in E^2: x\mathfrak{R}y$ أو $y\mathfrak{R}x$

3. نقول عن $\mathfrak{R}$ أنها علاقة ترتيب جزئي على E إذا وجد على الأقل عنصرين من E غير قابلين للمقارنة فيما بينهما أي: $\exists(x,y) \in E^2: x\mathfrak{R}y$ و $y\mathfrak{R}x$

مثال : علاقة الاحتواء ($\subseteq$) هي علاقة ترتيب جزئي على مجموعة أجزاء المجموعة.

الحواد العليا و الحواد السفلى:

لتكن E مجموعة مرتبة بعلاقة ترتيب $\mathfrak{R}$، وليكن A جزء من E و a عنصرا من E.

- نقول عن a أنه **حادا من الأعلى** للمجموعة A إذا كان: $\forall x \in A \;\; x\mathfrak{R}a$،

- نقول عن a أنه **حادا من الأسفل** للمجموعة A إذا كان : $\forall x \in A \;\; a\mathfrak{R}x$،

- نقول عن مجموعة A أنها محدودة من الأعلى إذا كانت مجموعة حوادها العليا و نرمز لها بالرمز $\boldsymbol{Maj_A}$ غير خالية، بمعنى أنها إذا قبلت على الأقل حادا من الأعلى،

- نقول عن مجموعة A أنها محدودة من الأسفل إذا كانت مجموعة حوادها الدنيا و نرمز لها بالرمز $\boldsymbol{Min_A}$ غير خالية، بمعنى أنها إذا قبلت على الأقل حادا من الأسفل،

ونقول عن A أنها **محدودة**، إذا قبلت حادا من الأعلى و حادا من الأسفل و نكتب:

$$(A \text{ محدودة}) \;\Leftrightarrow\; x\mathfrak{R}a \text{ و } a\mathfrak{R}x \quad \exists(a,b) \in E^2: \forall x \in A,$$

الحد من الأعلى و الحد من الأسفل : لتكن A مجموعة جزئية من E

- نقول عن عنصر من $\boldsymbol{Maj_A}$ أنه **حد من الأعلى** ل A (ونرمز له بالرمز $\boldsymbol{sup(A)}$) إذا كان حادا من الأسفل لمجموعة الحواد العليا للمجموعة A أي $\forall a \in Maj_A: sup(A)\mathfrak{R}a$

- نقول عن عنصر من $\boldsymbol{Min_A}$ أنه **حد من الأسفل** ل A (ونرمز له بالرمز $\boldsymbol{inf(A)}$) إذا كان حادا من الأعلى لمجموعة الحواد الدنيا للمجموعة A أي $\forall b \in Min_A: b\mathfrak{R}\ inf(A)$

العنصر الأكبر و العنصر الأصغر :

- نقول عن عنصر M من E أنه العنصر الأكبر للمجموعة A و نرمز له بالرمز $Max(A)$ إذا كان $M \in A$ و $sup(A) = M$ و نكتب: $\boldsymbol{Max(A) = M}$

- نقول عن عنصر m من E أنه العنصر الأصغر للمجموعة A و نرمز له بالرمز $Min(A)$ إذا كان

$m \in A$ و $inf(A) = m$ و نكتب: $\boldsymbol{Min(A) = m}$

نتيجة : الحد الأعلى $sup(A)$ و الحد الأسفل $inf(A)$ إذا إنتميا للمجموعة A فإنهما يتحولان الى عنصر أكبر $Max(A)$ وعنصر أصغر $Min(A)$ للمجموعة A على التوالي .

تمرين: نعرف في مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$ علاقة الترتب الشائعة $(\leq)$ و لتكن المجموعة

$A = \{\frac{n+1}{n+2} \quad , n \in \mathbb{N}\}$، عين في حالة الوجود الحد الأعلى $sup(A)$، الحد الأسفل $inf(A)$، العنصر الأكبر $Max(A)$، و العنصر الأصغر $Min(A)$ للمجموعة A.

الحل : بإستعمال طريقة الحصر نجد: $\forall n \in \mathbb{N}\ ; \frac{1}{2} \leq \frac{n+1}{n+2} < 1$ ومنه نستنتج أن:

$A = \mathbb{Q} \cap \left[\frac{1}{2} \quad 1\right[$ إذن $Maj_A = \{x \in \mathbb{Q}\ ; x \geq 1\}$ و منه $sup(A) = 1$ (لأن 1 له علاقة مع جميع عناصر مجموعة الحواد العليا) و $Max(A)$ غير موجود لأن $1 \notin A$ من جهة أخرى لدينا

$Min_A = \left\{x \in \mathbb{Q}\ \ ; x \leq \frac{1}{2}\right\}$ ، إذن $inf(A) = \frac{1}{2}$ (لأن $\frac{1}{2}$ له علاقة مع جميع عناصر الحواد الدنيا) و بما أن $\frac{1}{2} \in A$ فإن $Min(A) = \frac{1}{2}$.

خواص الحد الأعلى و الحد الأسفل في $\mathbb{R}$:

لتكن A و B مجموعتين من $\mathbb{R}$ من أجل المجموعة $-A = \{-x\ ; x \in A\}$ لدينا

1. $sup(-A) = -inf(A)$ و $inf(-A) = -sup(A)$

2. إذا كانت $A \cup B$ محدودة فإنه لدينا : $sup(A \cup B) = Max(sup(A), sup(B))$

و $inf(A \cup B) = Min\ (inf(A), inf(B))$.

العنصر الأصغري و العنصر الأعظمي :

لتكن A مجموعة جزئية من مجموعة مرتبة و λ عنصر من $\mathbb{R}$.

- نقول عن λ أنه عنصر أصغري في A إذا كان لا يقبل عنصرا أصغر منه وفق العلاقة $\Re$ بمعنى

$(\lambda$ أصغري في $A) \Leftrightarrow (\forall x \in A\ , x\Re\lambda \implies x = \lambda)$

- نقول عن أنه عنصر أعظمي في A إذا كان لا يقبل عنصرا أكبر منه وفق العلاقة $\Re$ بمعنى

$(\lambda$ أعظمي في $A) \Leftrightarrow (\forall x \in A: \lambda\Re x \implies x = \lambda)$

3. التطبيقات:

3-1. عموميات و تعريفات :

تعريف: لتكن E و F مجموعتين، نسمي تابعا (دالة) ل E في F كل علاقة f من E نحو F، ترفق بكل عنصر x من E عنصرا y من F على الأكثر، تدعى E مجموعة بدئها و F مجموعة وصولها.

- فإذا كان y يقابل x وفق العلاقة (التابع) f نقول أن صورة x وفق التابع f و أن x سابقة y وفق f و نكتب $y = f(x)$ و نعبر عن تابع f بالشكل $f: \begin{matrix} E \to F \\ x \to f(x) \end{matrix}$

- نقول عن f أنه تابع حقيقي إذا كان $E = \mathbb{R}$

- نقول عن f أنه يابع حقيقي لمتغير حقيقي إذا كان $E = F = \mathbb{R}$

مجموعة التعريف: ليكن f تابعا معرف من E نحو F ، نسمي مجموعة العناصر x من E التي تقبل صورا وفق التابع f مجموعة تعريف f ونرمز لها بالرمز D_f.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كمايلي: $\begin{matrix} f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to f(x)=\sqrt{x-1} \end{matrix}$

يكون التابع f معرف إذا كان $x - 1 \geq 0$ أي: $x \geq 1$ ومنه: $D_f = [1 \ \ +\infty \ [$

التطبيق: نسمي تطبيقا لمجموعة E نحو F كل علاقة ترفق بكل عنصر x من E عنصرا وحيدا y من المجموعة ، $G = \{(x, y) \in E \times F; \ \ f(x) = y\}$ تسمى بيان التطبيق f.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كمايلي: $\begin{matrix} f :\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to f(x)=\sqrt{x+1} \end{matrix}$ f ليس تطبيق لأن ليس لكل سابقة x صورة وحيدة y ، مثلا نأخذ $x = -2$ ليست لها صورة لأن $\mathrm{y} = \sqrt{-1}$ غير معرفة

مثال أخر: نعتبر الدالة f المعرفة كمايلي: $\begin{matrix} f:[-1 \ \ 10 \ ] \to \mathbb{R} \\ x \to \sqrt{x+1} \end{matrix}$

f عبارة عن تطبيق لأنه من الواضح أن لكل سابقة x صورة وحيدة y.

بعض النماذج عن التطبيقات: لتكن E و F مجموعتين .

التطبيق المطابق: نسمي التطبيق $\begin{matrix} f:E \to F \\ x \to x \end{matrix}$ التطبيق المطابق للمجموعة E ونرمز له بالرمز Id_E.

التطبيق الثابت: نقول عن تطبيق f أنه ثابت إذا وجد عنصر $c \in F$ بحيث:

$$\forall x \in E: f(x) = c$$

التطبيق المميز: لتكن المجموعة A جزءا من E نسمي التطبيق المميز للمجموعة A الذي نرمز له بالرمز χ_A ، المعرف من E نحو المجموعة $\{0,1\}$ كمايلي:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & si \ \ x \in A \\ 0 & si \ \ x \notin A \end{cases}$$

إقتصار تطبيق: ليكن f تطبيقا معرف من E نحو F و E_1 جزءا من E نسمي التطبيق g المعرف كمايلي $\begin{matrix} g:E_1 \longrightarrow F \\ x \longrightarrow g(x)=f(x) \end{matrix}$ إقتصار التطبيق f على المجموعة E_1

تمديد تطبيق: ليكن f تطبيقا معرف من E نحو F و لتكن E_2 مجموعة تحوي E نقول عن التطبيق $\tilde{f}$ للمجموعة E_2 نحو F أنه تمديد للتطبيق f.

تركيب التطبيقات: لتكن E, F, G ثلاث مجموعات و g، f تطبيقين معرفين كمايلي:

$f: E \longrightarrow F$ ، $g: F \longrightarrow G$ إن التطبيق $g \circ f$ المعرف بالشكل :

$\begin{matrix} g\circ f:E \longrightarrow G \\ x \longrightarrow (g\circ f)(x)=g(f(x)) \end{matrix}$ يسمى تركيب التطبيقين f و g

مثال: ليكن التطبيقين $\begin{matrix} f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x)=x-2 \end{matrix}$ و $\begin{matrix} g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow g(x)=x^2 \end{matrix}$

تركيب التطبيقين f و g معرف كمايلي : $\begin{matrix} g\circ f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow (g\circ f)(x)=(x-2)^2 \end{matrix}$

ملاحظات و خواص: لتكن E و F مجموعتين.

نرمز بالرمز $F(E,F)$ لمجموعة التطبيقات المعرفة من E نحو F وبالرمز $F(E)$ لمجموعة التطبيقات المعرفة من E في نفسها.

1. $\forall f \in F(E,F)\ ;\ Id_F \circ f = f$ و $f \circ Id_E = f$

2. إذا كان f عنصرا من $F(E)$ نضع إصطلاحا: $f^0 = Id_E$ و نعرف:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*:\ f^{(n)} = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\ fois}$$

3. التطبيق الحيادي Id_E تبديلي مع جميع التطبيقات المعرفة من E نحو E

4. القوى النونية f^n لتطبيق f تبديلية مع بعضها أي: $f^n \circ f^m = f^m \circ f^n$

2-3. الصورة المباشرة لمجموعة وفق تطبيق:

ليكن f تطبيقا معرف من E نحو F و A مجموعة جزئية من E المجموعة المعرفة بالشكل

$f(A) = \{f(x) \in F\ ;\ x \in A\}$ تسمى **الصورة المباشرة** للمجموعة A وفق التطبيق f ونكتب:

$$y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A\ ;\ y = f(x)$$

مثال: ليكن التطبيق $\begin{matrix} f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x)=x^2 \end{matrix}$

أحسب الصورة المباشرة للمجموعة $A = [1\ \ 2]$.

$f(A) = f([1\ \ 2]) = \{f(x) \in \mathbb{R}\,; x \in A\} = \{x^2 \in \mathbb{R}\,; x \in [1\ \ 2]\}$

إنطلاقا من $x \in [1\ \ 2]$ نبحث عن حصرا للقيمة x^2 ، فنجد $x^2 \in [1\ \ 4]$ و بالتالي

$f(A) = \mathbb{R} \cap [1\ \ 4] = [1\ \ 4]$ و هي الصورة المباشرة للمجال $[1\ \ 2]$.

حالات خاصة :

1. $f(\Phi) = \Phi$ ،
2. $\forall a \in E\,;\ f(\{a\}) = \{f(a)\}$ ،
3. المجموعة $f(E)$ تدعى صورة التطبيق f و نكتب $\text{Imf} = f(E)$.

خواص: ليكن f تطبيق معرف من E نحو F ، و لتكن A، B مجموعتين جزئيتين من E عندئذ لدينا الخواص التالية :

1. $A \subseteq B \Longrightarrow f(A) \subseteq f(B)$ ،
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ ،
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ ،
4. $A \neq \Phi \Leftrightarrow f(A) \neq \Phi$ ،
5. $f(E) - f(A) \subseteq f(E - A)$

ملاحظة هامة: نشير إلى أنه لا توجد قاعدة محددة للمقارنة بين صورة المتممة $f(A^c)$ ، و متممة الصورة $(f(A))^c$.

3-3. الصورة العكسية لمجموعة وفق تطبيق:

ليكن التطبيق $f: E \longrightarrow F$ ، ولتكن المجموعة B جزءا من المجموعة F.

المجموعة المعرفة بالشكل $f^{-1}(B) = \{x \in E\,;\ \ f(x) \in B\}$ تسمى **الصورة العكسية** للمجموعة B وفق التطبيق f وهي كذلك مجموعة جميع سوابق العناصر B وفق التطبيق f

ونكتب: $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

ملاحظة هامة: نشير إلى أن الرمز f^{-1} لا يعني بالضرورة أن f يقبل تطبيق عكسيا.

مثال: نعتبر التطبيق السابق $f(x) = x^2$ و نأخذ $B = [9\ \ \ 16]$ إذن لدينا

$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}:\ \ f(x) \in [9\ \ 16]\} = \{x \in \mathbb{R}\ :\ x^2 \in [9\ \ 16]\}$

إنطلاقا من $x^2 \in B$ نبحث عن السوابق x في $\mathbb{R}$ فنجد :

$f^{-1}([9\ \ \ 16]) = [-4\ \ -3] \cup [3\ \ \ 4]$

حالات خاصة:

1. $f^{-1}(\Phi) = \Phi$ ، $f^{-1}(F) = E$ .2،

3. $\forall b \in F : \ f^{-1}(\{b\}) = \{x \in E \ ; \ f(x) = b\}$

خواص: ليكن التطبيق $f: E \longrightarrow F$ و لتكن المجموعتين الجزئيتين A، B من F عندئذ لدينا:

1. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ ، $f^{-1}(F - A) = E - f^{-1}(A)$ .2،

3. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ ، $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$ .4 ،

5. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ ، $A \subseteq B \Longrightarrow f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$ .6 .

4-3. أنواع التطبيقات: ليكن التطبيق f المعرف من E نحو F

التطبيق المتباين: نقول عن تطبيق f أنه متباين، إذا كان كل عنصر (صورة) y من F يقبل على الأقل سابقة x من E وفق التطبيق f و نكتب بعبارة رياضية

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2 : f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

أو بعبارة أخرى: $\forall \ (x_1, x_2) \in E^2 : x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2 \ )$

مثال1: نعتبر التطبيق $\begin{matrix} f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow 2x-1 \end{matrix}$

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقيين بحيث: $f_1(x_1) = f_1(x_2)$ إذن :

$$f_1(x_1) = f_1(x_2) \Longrightarrow 2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \Longrightarrow x_1 = x_2$$

و بالتالي f_1 تطبيق متباين .

مثال2: نعتبر التطبيق $\begin{matrix} f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow x^2 \end{matrix}$

ليكن x_1 ، x_2 عنصران من $\mathbb{R}$ بحيث: $f_2(x_1) = f_2(x_2)$

$$f_2(x_1) = f_2(x_2) \Longrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Longrightarrow |x_1| = |x_2| \Longrightarrow x_1 = x_2 \text{ أو } x_1 = -x_2$$

واضح أنه توجد صورة لها سابقتين ، مثلا $x_1 = 2$ و $x_2 = -2$ لهما نفس الصورة وهي $y = 4$ ، إذن f ليس تطبيق متباين.

التطبيق الغامر: نقول عن تطبيق $f: E \longrightarrow F$ أنه غامر إذا كان كل عنصر y من F يقبل على الأقل سابقة x من E وفق التطبيق f ونكتب $\forall y \in F \ \ \exists x \in E : y = f(x)$، وبتعريف مكافئ إذا كان $f(E) = F$.

مثال3: نعتبر التطبيق السابق f_1 (أنظرالى المثال1)

ليكن y عنصرا ما من $\mathbb{R}$ هل يوجد عنصر x من $\mathbb{R}$ بحيث $y = f(x)$ ؟

$$y = f(x) \Longrightarrow y = 2x - 1 \Longrightarrow x = \frac{y+1}{2}$$

إذن لكل عنصر y من $\mathbb{R}$ سابقة على الأقل $x = \frac{y+1}{2}$ من $\mathbb{R}$ و بالتالي التطبيق f تطبيق غامر.

مثال4: ليكن التطبيق $\begin{matrix} f_3 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \sqrt{x} \end{matrix}$

ليكن y عنصرا ما من $\mathbb{R}$ هل يوجد عنصر x من $\mathbb{R}_+$ بحيث $y = \sqrt{x}$ ؟

نعلم أن $\sqrt{x}$ هو عدد حقيقي موجب إذن الأعداد الحقيقية السالبة الغير معدومة ليست لها سوابق وفق التطبيق f مثلا (y =-2) ليست لها سابقة (لأنه لا توجد قيمة جذرها يساوي (-2)) وفق التطبيق f، ومنه التطبيق f ليس تطبيق غامر.

التطبيق التقابلي: نقول عن التطبيق $f: E \longrightarrow F$ أنه تقابلي اذا كان كل عنصر y من F يقبل سابقة وحيدة x من E وفق التطبيق f ونكتب: $\forall y \in F \quad \exists! x \in E \; ; \; y = f(x)$

أي بتعريف أخر : f تقابلي $\Leftrightarrow$ (f متباين و f غامر)

مثال5: التطبيق f_1 تطبيق تقابلي (لقد رأينا سابقا أنه تطبيق متباين و غامر)

مثال6: التطبيق f_2 تطبيق ليس تقابلي لأنه تطبيق ليس متباين و التطبيق f_3 كذلك ليس تقابلي لأنه تطبيق ليس غامر.

التطبيق العكسي لتطبيق تقابلي: ليكن التطبيق $f: E \longrightarrow F$، إذا كان f تطبيق تقابلي فيمكننا تعريف تطبيق نرمز له بالرمز f^{-1} معرف من F نحو E كمايلي:

$$\forall x \in E, \forall y \in F : x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) = y$$

و لدينا كذلك $\forall x \in E; \quad (f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$

يدعى f^{-1} التطبيق العكسي للتطبيق f وهو تقابلي أيضا.

مثال: التطبيق التقابلي $\begin{matrix} f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow 2x-1 \end{matrix}$ له تطبيق عكسي معرف بالشكل

$$\begin{matrix} f_1^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f_1^{-1}(x) = \frac{x+1}{2} \end{matrix}$$

(للحصول على صورة التطبيق العكسي إرجع إلى المثال3)

خواص عامة: ليكن $f \in F(,F)$ و $g \in F(F,E)$

1. $(f^{-1})^{-1} = f$ ، $f^{-1} \circ f = Id_E$ ، $f \circ f^{-1} = Id_F$

2. f متباين $\Leftarrow (\forall A, B \in p(E): f(A \cap B) = f(A) \cap f(B))$

3. f و g متباينين (غامرين على التوالي) $\Leftarrow g \circ f$ متباين (غامر على التوالي)

4. f و g تقابليين) $\Leftarrow$ ($g \circ f$ تقابلي) ولدينا: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

5. $g \circ f$ متباين (غامر على التوالي) $\Leftarrow f$ متباين (g غامر على التوالي)

الفصل الثالث

التوابع العددية لمتغير حقيقي واحد

- ❖ النهايات
- ❖ الإستمرار
- ❖ الإشتقاق
- ❖ نظرية رول
- ❖ نظرية التزايدات المنتهية

التوابع العددية لمتغير حقيقي واحد

1. مفاهيم أولية:

تعريف1: $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ يسمى دالة عددية، إذا كان كل عنصر من E له صورة على الأكثر من $\mathbb{R}$، حيث E تسمى مجموعة البدء و $\mathbb{R}$ تسمى مجموعة الوصول .

تعريف2: $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ يسمى دالة حقيقية ذات متغير حقيقي، بحيث $E \subseteq \mathbb{R}$ ، نسمي E مجموعة تعريف الدالة f، و نرمز لها أحيانا D_f.

أمثلة: 1. $\begin{matrix} f: E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) = u_n \end{matrix}$ هي دالة حقيقية ذات متغير حقيقي، $E = \mathbb{N}$،

2. $\begin{matrix} f: E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) = \frac{1}{x} \end{matrix}$ هي دالة حقيقية ذات متغير حقيقي، $E = \mathbb{R}^*$.

تعريف3: لتكن $x_0 \in \mathbb{R}$ و $V \subseteq \mathbb{R}$

نقول أن $V \subseteq \mathbb{R}$ هو جوار للنقطةx_0 إذا كان يحتوي على مجال مفتوح تنتمي إليه x_0،

بمعنى V جوار للنقطة x_0 إذا وجد $\delta > 0$ بحيث: $x_0 \in]x_0 - \delta \quad x_0 + \delta [\subseteq V$

مثال: $V = [0 \quad 2]$ جوار للنقطة 1 لأنه يوجد $\delta > 0$ بحيث $1 \in]1 - \delta \quad 1 + \delta [\subset V$

تعريف4: الدالة f معرفة بجوار النقطة x_0 يكافئ $\exists \delta > 0,]x_0 - \delta \quad x_0 + \delta [\subset D_f$

تعريف5: الدالة f معرفة بجوار النقطة x_0 (إلا من الممكن في x_0) يكافئ

$$\exists \delta > 0,]x_0 - \delta \quad x_0 + \delta [\cup]x_0 \quad x_0 + \delta [\subset D_f$$

تعريف6: لتكن الدالة $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$، نسمي المجموعة

$G_f = \{(x, f(x)); \quad x \in E \text{ و } f(x) \in \mathbb{R}\}$ بيان (أو المنحنى) الدالة f

الدالة الزوجية و الدالة الفردية:

تعريف: لتكن $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة بحيث $E \subseteq \mathbb{R}$ و E مجال تناظري بالنسبة للمبدأ (للصفر) أي $E = -E$، بوضع $-E = \{y = -x; \quad x \in E\}$، لدينا

1. f دالة زوجية $\Leftrightarrow \forall x \in E: \quad f(-x) = f(x)$

2. f دالة فردية $\Leftrightarrow \forall x \in E: \quad f(-x) = -f(x)$

أمثلة:

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)=x^2$ دالة زوجية لأن $\forall x \in \mathbb{R}: f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)=x^3$ دالة فردية لأن $\forall x \in \mathbb{R}: f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

ملاحظة: إذا كانت f دالة زوجية فإن بيانها يكون تناظريا بالنسبة لمحور الترتيب، و إذا كانت f دالة فردية فإن بيانها يكون تناظريا بالنسبة للمبدأ، إذن يكفي دراسة الدالة الزوجية أو الفردية من أجل القيم الموجبة للمتغير x ثم إتمام البيان (المنحنى) بالتناظر.

الدالة الدورية:

تعريف1: لتكن $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة، نقول أنها دورية إذا وجد عدد حقيقي موجب T بحيث

$\forall x \in D_f: \ f(x+T) = f(x)$، و نقول إن T دورة للدالة f.

ملاحظة: إذا كانت T دورة للدالة f فإن كل عدد حقيقي من الشكل kT (حيث $k \in \mathbb{N}^*$)، دورة للدالة f أي

$f(x+kT) = f(x+(k-1)T) = \cdots = f(x+T) = f(x)$

تعريف2: الدور $T > 0$ للدالة f هو أصغر عدد يحقق $\forall x \in D_f: \ f(x+T) = f(x)$

مثال1: $f: \mathbb{R} \longrightarrow [-1 \quad 1]$ دالة معرفة بالشكل $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = \cos(x)$، لدينا

$$\exists kT = k2\pi > 0, \forall x \in \mathbb{R}: f(x+2k\pi) = \cos(x+2k\pi) = f(x)$$

و بالتالي : $T = 2\pi$ هو دور للدالة f .

مثال2: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة معرفة بالشكل $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = x - E(x)$، لدينا

$$\exists T = 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}: f(x+1) = x + 1 - E(x+1) = f(x)$$

الدوال الرتيبة: لتكن $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة حقيقية ذات متغير حقيقي (حيث $E \subseteq \mathbb{R}$)

1. f دالة متزايدة $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in E: \ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
2. f دالة متزايدة تماما $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in E: \ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
3. f دالة متناقصة $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in E: \ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1 \geq f(x_2)$
4. f دالة متناقصة تماما $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in E: \ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

ملاحظة: نقول عن الدالة f أنها رتيبة (تماما) إذا كانت متزايدة أو متناقصة (تماما) على E.

الدوال المحدودة: لتكن $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة حقيقية ذات متغير حقيقي (حيث $E \subseteq \mathbb{R}$)، لدينا

$f(E) = \{f(x); \ x \in E\}$ هي الصورة المباشرة للمجموعة E وفق التطبيق f.

1. f دالة محدودة من الأعلى $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}; \forall x \in E: \ f(x) \leq M$

2. f دالة محدودة من الأدنى $\Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{R};\ \forall x \in E \ : \ f(x) \geq m$

3. f دالة محدودة على $E \Leftrightarrow \exists\, m, M \in \mathbb{R}\ \forall x \in E: \ m \leq f(x) \leq M$

- $\sup\limits_{x\in E}(f(x)) = sup(f(E))$ يسمى **الحد الأعلى** للدالة f.

- $\inf\limits_{x\in E}(f(x)) = inf(f(E))$ يسمى **الحد الأدنى** للدالة f.

- إذا كان $inf(f(E)) \in f(E)$ فإن $\min\limits_{x\in E}(f(x)) = Min(f(E))$ ، يسمى **العنصر الأصغر** للدالة f.

- إذا كان $sup(f(E)) \in f(E)$ فإن $\max\limits_{x\in E} f(x) = Max(f(E))$، يسمى **العنصر الأكبر** للدالة f.

خواص:

1. f دالة محدودة من الأعلى $\Leftrightarrow \sup\limits_{x\in E}(f(x)) < +\infty$

2. f دالة محدودة من الأدنى $\Leftrightarrow \inf\limits_{x\in E}(f(x)) > -\infty$

3. $$\sup_{x\in E}(f(x)) = M \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E: \ f(x) \leq M \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in E: \ M - \varepsilon < f(x) \end{cases}$$

4. $$\inf_{x\in E}(f(x)) = m \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E: \ f(x) \geq m \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in E: \ f(x) < \varepsilon + m \end{cases}$$

ملاحظة: نرمز **لمجموعة الدوال الحقيقية ذات المتغير الحقيقي** بالرمز $F(E, \mathbb{R})$ حيث

$F(E, \mathbb{R}) = \{f; \quad f: E \longrightarrow \mathbb{R}, \ E \subseteq \mathbb{R}\}$، نعرف في $F(E, \mathbb{R})$ العمليات التالية:

1. $\forall f, g \in F(E, \mathbb{R}): \ (f + g)(x) = f(x) + g(x),$
2. $\forall f, g \in F(E, \mathbb{R}): \ (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$
3. $\forall f \in F(E, \mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}: \ (\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$

- إن المجموعة $F(E, \mathbb{R})$ مزودة بالعمليتين الأولى و الثانية حلقة تبديلية.

- إن المجموعة $F(E, \mathbb{R})$ مزودة بالعمليتين الأولى و الثالثة فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$.

- نعرف من ناحية أخرى في $F(E, \mathbb{R})$ علاقة ترتيب (جزئي عموما) بوضع

$$f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x), \qquad \forall x \in E$$

2. النهايات:

تعريف1: لتكن $f: E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، نقول إن الدالة f المعرفة بجوار x_0 (إلا من الممكن في x_0) تملك نهاية l عندما يؤول x إلى x_0 و نكتب $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ إذا تحقق مايلي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0;\ \forall x \in E, x \neq x_0 : |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

تعريف2: لتكن $f: E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، نقول إن الدالة f المعرفة بجوار x_0 (إلا من الممكن في x_0) تملك نهاية l عندما يؤول x إلى x_0، إذا كان من أجل كل متتالية $(u_n) \subset E$ (بحيث $u_n \neq x_0$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$) متقاربة نحو x_0 فإن $f(u_n)$ متقاربة نحو l.

ملاحظة: التعريف1 يكافئ التعريف 2.

مثال1: لتكن الدالة $\begin{matrix} f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x)=3x+1 \end{matrix}$

- بإستعمال تعريف النهاية أثبت أن $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4$

ليكن $\varepsilon > 0$، المطلوب هو البحث عن $\alpha > 0$ بحيث :

$$|x - 1| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon$$

ليكن $\varepsilon > 0$، لدينا

$$|f(x) - 4| = |3x + 1 - 4| = |3x - 3| = 3|x - 1|$$

تكون $|(x) - 4| < \varepsilon$ إذا كان $3|x - 1| < \varepsilon$ و منه $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$، إذن يكفي أخذ $\alpha = \frac{\varepsilon}{3}$، و منه

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha = \frac{\varepsilon}{3} > 0;\ \forall x \in \mathbb{R}, x \neq x_0 : |x - 1| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon$$

و بالتالي : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4$

مثال2: لتكن الدالة $\begin{matrix} f:\mathbb{R}-\{2\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x)=\frac{x^2-4}{x-2} \end{matrix}$

- أثبت أن : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$

ليكن $\varepsilon > 0$، لدينا $|f(x) - 4| = \left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| = |x - 2|$، إذن يكفي أخذ $\alpha = \varepsilon$ ومنه

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha = \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}; x \neq 2 : |x - 2| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon$$

و بالتالي : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$

ملاحظات: 1. يمكن أن تكون $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ موجودة، لكن $f(x_0)$ غير موجودة، نأخذ المثال2 السابق $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ ، لدينا $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ و لكن $f(2) = \frac{0}{0}$ غير معرفة.

2. يمكن أن تكون $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

مثال: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$ ، لدينا $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \neq f(0) = 2$

نظرية: إذا كانت الدالة f تملك نهاية فهي وحيدة.

النهاية على اليمين و النهاية على اليسار:

- نرمز للنهاية على اليمين بالرمز $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$

- نرمز للنهاية على اليسار بالرمز $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$

تعريف: 1. الدالة $f: E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تملك نهاية l على يمين x_0 هذا يعني

$$(\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in E: x_0 < x < x_0 + \alpha$$

$$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

2. الدالة $f: E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تملك نهاية l على يسار x_0 هذا يعني

$$(\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in E: x_0 - \alpha < x < x_0$$

$$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

مثال: لتكن الدالة $f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$،

لدينا $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ ، $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$

ملاحظة: إن وجود نهاية للدالة f عند x_0 معناه وجود نهاية مشتركة للدالة f عن اليمين و عن اليسار أي

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Rightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$$

نظرية: (معيار كوشي) f تملك نهاية منتهية عندما يؤول x إلى x_0 إذا وفقط إذا

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x_1, x_2 \in E, x \neq x_0: |x_1 - x_0| < \alpha \text{ و } |x_2 - x_0| < \alpha$$

$$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

النهايات الشهيرة:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0; \forall x \in E: \forall x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0;\ \forall x \in E: \forall x < -A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0;\ \forall x \in E :\ \forall x > B \Rightarrow f(x) > A$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0;\ \forall x \in E: \forall x > B \Rightarrow f(x) < -A$

5. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0; \forall x \in E: \forall x < -B \Rightarrow f(x) > A$

6. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0; \forall x \in E: \forall x < -B \Rightarrow f(x) < -A$

عمليات على النهايات: لتكن الدالتين $f، g: E \longrightarrow \mathbb{R}$ (حيث $E \subseteq \mathbb{R}$)

إذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l'$ و $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ فإن:

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \lim\limits_{x\to x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha l + \beta l'$

2. $\lim\limits_{x\to x_0} (fg)(x) = ll'$ ، 3. $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$

4. إذا كان $g(x_0) \neq 0$ و $l' \neq 0$ فإن $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x)} = \frac{l}{l'}$

5. إذا كان $f(x) \leq g(x)$ أو $(f(x) < g(x))$ فإن $l \leq l'$

6. $l = 0$ و g دالة محدودة على E فإن $\lim\limits_{x\to x_0} (fg)(x) = 0$

نظرية: لتكن f, g, h ثلاث دوال معرفة على جوار E للنقطة x_0 من $\mathbb{R}$ فإن:

$$(\forall x \in E, f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ و } \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = l) \Rightarrow (\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l)$$

- حالات عدم التعين: $\frac{0}{0}$ ، $\infty - \infty$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، ∞^0 ، 1^∞ ، 0^0

2. الدوال المستمرة:

تعريف1: ليكن الدالة $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ و $x_0 \in I$

- f دالة مستمرة عند $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I: |x - x_0| < \alpha$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

ملاحظة: α يكون عموما مرتبط ب x_0 و ε

تعريف2: نقول عن f أنها مستمرة على المجال I إذا كانت مستمرة في كل نقطة من المجال I.

مثال: لتكن $\begin{matrix} f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x)=3x+1 \end{matrix}$ ، أدرس الإستمرار عند $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (3x + 1) = 1 = f(0) \Longrightarrow x_0 = 0 \text{ مستمرة عند } f$$

- بإستعمال التعريف بين أن f مستمرة على $\mathbb{R}$: ليكن $\varepsilon > 0$ و $x, x_0 \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$|f(x) - f(x_0)| = |3x + 1 - (3x_0 + 1)| = 3|x - x_0|$$

يكون $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ إذا كان $3|x - x_0| < \varepsilon$ و منه $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{3}$

إذن يكفي أخذ $\alpha = \frac{\varepsilon}{3}$، و منه :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha = \frac{\varepsilon}{3} > 0, \forall x \in \mathbb{R}: |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

و بالتالي f مستمرة على $\mathbb{R}$.

تعريف3: 1. f دالة مستمرة على يمين x_0 يكافىء $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

2. f دالة مستمرة على يسار x_0 يكافىء $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

ملاحظة: f دالة مستمرة عند $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

مثال: لتكن الدالة $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = 1 = f(0) \Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ مستمرة على يمين } f$$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = 1 = f(0) \Leftrightarrow x_0 = 0$ مستمرة على يسار f

بما أن $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$ فإن: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ مستمرة عند f $x_0 = 0$.

أمثلة: (تكون فيها الدالة ليست مستمرة)

1. لتكن الدالة : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$ ، لدينا

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$ إذن f ليست مستمرة على يمين $x_0 = 0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$ و منه ليست مستمرة على يسار $x_0 = 0$ و بالتالي

f ليست مستمرة عند $x_0 = 0$.

2. لتكن الدالة : $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases}$، لدينا:

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 \neq f(0) = 3 \Longrightarrow x_0 = 0$ f ليست مستمرة عند

3. لتكن الدالة : $f(x) = \begin{cases} 4 & x > 2 \\ 1 & x < 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$، لدينا

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 4$ ، $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$ و $f(2) = 0$ ،

و بالتالي f ليست مستمرة عند $x_0 = 2$.

4. لتكن الدالة : $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ، لدينا

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ غير معرفة

و بالتالي f ليست مستمرة عند $x_0 = 0$

التمديد بالإستمرار: لتكن $f: I \to \mathbb{R}$ دالة معرفة على I ماعدا في النقطة x_0 إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ فإن

$\tilde{f}: I\cup\{x_0\} \to \mathbb{R}$
$x \to \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in I \\ l & x = x_0 \end{cases}$ هي تمديد بالإستمرار للدالة f في النقطة x_0 .

مثال: لتكن الدالة $\begin{matrix} f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R} \\ x\to f(x)=\frac{\sin(x)}{x} \end{matrix}$ ،

لدينا $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$، و بالتالي الدالة f تقبل التمديد بالإستمرار عند النقطة $x_0 = 0$ و الدالة الممددة للدالة f هي الدالة المعرفة كمايلي:

$$\tilde{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \mathbb{R}^* \\ l & x = x_0 \end{cases}$$

خواص: إذا كانت $f: I \to \mathbb{R}$ و $g: I \to \mathbb{R}$ دالتين مستمرتين في النقطة $x_0 \in I$ ، لدينا

1. الدالة $(f+g)$ مستمرة عند النقطة x_0،
2. (fg) مستمرة عند النقطة x_0،
3. λf $(\forall \lambda \in \mathbb{R})$ مستمرة عند النقطة x_0 ،
4. $\frac{f}{g}$ (حيث $g(x_0) \neq 0$) مستمرة عند النقطة x_0.

نظرية : $f: I \to J$ و $g: J \to \mathbb{R}$ دالتين، حيث f مستمرة عند النقطة x_0 و g مستمرة عند $f(x_0)$ فإن $(g \circ f): I \to \mathbb{R}$ هي دالة مستمرة في $x_0 \in I$.

الإستمرار بإنتظام:

تعريف: $f: I \to \mathbb{R}$ دالة، حيث $I \subseteq \mathbb{R}$ (I مجال محدود أو غير محدود)

- نقول عن الدالة f إنها مستمرة بإنتظام على المجال I إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, (\forall x_1, x_2 \in I: |x_1 - x_2| < \alpha) \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

- نقول عن الدالة f إنها غير مستمرة بإنتظام على المجال I إذا تحقق:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, (\exists x_1, x_2 \in I: |x_1 - x_2| < \alpha) \wedge |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$$

مثال1: لتكن الدالة $\begin{matrix} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\to f(x)=x^2 \end{matrix}$ ،

نأخذ $I =]0\ 1[$ إذن ليكن $\varepsilon > 0$ و $x_1, x_2 \in I$، لدينا:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |{x_1}^2 - {x_1}^2| = |x_1 + x_2||x_1 - x_2|$$
$$\leq (|x_1| + |x_2|)|x_1 - x_2| \leq 2|x_1 - x_2|$$

و منه تكون $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ إذا كان $2|x_1-x_2|<\varepsilon$ و منه $|x_1-x_2|<\frac{\varepsilon}{2}$

إذن يكفي أخذ $\alpha=\frac{\varepsilon}{2}$ ومنه الإستلزام محقق أي

$$\forall\varepsilon>0,\exists\alpha=\frac{\varepsilon}{2}>0,\forall x_1,x_2\in I:|x_1-x_2|<\alpha\Longrightarrow|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

و بالتالي f مستمرة بإنتظام على المجال I.

مثال 2: لتكن الدالة $\begin{matrix}f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}\\x\to f(x)=\frac{1}{x}\end{matrix}$ ، و $I=]0\quad+\infty]$

نأخذ $x_1=\frac{1}{2}\alpha$ و $x_2=\frac{3}{2}\alpha$ ، فيكون لدينا :

$$|x_1-x_2|=\alpha\leq\alpha\wedge|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\frac{2}{\alpha}-\frac{2}{3\alpha}\right|=\frac{4}{3}\geq\frac{4}{3}$$

و منه :

$$\exists\varepsilon=\frac{4}{3}>0,\forall\alpha>0,\exists x_1=\frac{1}{2}\alpha,\exists x_2=\frac{3}{2}\alpha\in I:$$

$$|x_1-x_2|\leq\alpha\wedge|f(x_1)-f(x_2)|\geq\varepsilon$$

و بالتالي f ليست مستمرة بإنتظام على المجال I.

ملاحظة: (f مستمرة بإنتظام $\Leftarrow$ f مستمرة)، و العكس غير صحيح .

مثال: نأخذ الدالة السابقة $f(x)=\frac{1}{x}$ ، f مستمرة على $]0\quad+\infty]$ و لكن f غير مستمرة بإنتظام على نفس المجال.

نظرية (هاين): إذا كانت $f:[a\quad b]\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة على المجال المحدود و المغلق (نقول عن المجال $[a\quad b]$ متراص في $\mathbb{R}$)، فإن f مستمرة بإنتظام على المجال $[a\quad b]$.

مثال: $\begin{matrix}f:[0\quad1]\to\mathbb{R}\\x\to f(x)=x^2\end{matrix}$، f مستمرة على $[0\quad1]$ $\Leftarrow$ f مستمرة بإنتظام على $[0\quad1]$

نظرية: $f:[a\quad b]\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة على المجال $[a\quad b]$، فإنه لدينا:

1. f محدودة على المجال $[a\quad b]$،
2. تبلغ الدالة f حديها الأعلى و الأسفل على المجال $[a\quad b]$ أي:

$$\exists\alpha\in[a\quad b]:\sup_{x\in[a\ b]}(f(x))=f(\alpha),\exists\beta\in[a\quad b]:\inf_{x\in[a\ b]}(f(x))=f(\beta)$$

نظرية1 (القيم المتوسطة): $f:[a\ \ b]\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة على المجال $[a\ \ b]$، إذا كان $f(a)f(b)<0$، فإنه: $\exists c\in\ ]a\ \ b[:\ f(c)=\ c$ (c هو حل على الأقل للمعادلة $f(x)$)

ملاحظة: إذا كانت f دالة رتيبة تماما فإن $\exists!\ c\in\ ]a\ \ b[:\ f(c)=0$ (حل وحيد)

مثال: لتكن الدالة $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)=x^5-3x+1$، واضح أن f دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$f(1)=-1$ و $f(0)=1$، و منه $f(0)f(1)<0$

بما أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$، فهي مستمرة على المجال $[1\ \ 0]$ و $f(0)f(1)<0$ إذن حسب ن ق م فإن $\exists c\in\ ]0\ \ 1[:\ f(c)=0$ (c هو حل للمعادلة).

نظرية2 (القيم المتوسطة): $f:I\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة على I ، $f(x_1)$ و $f(x_2)$ قيمتين لدالة f، إذا كان $x_1<x_2$، مهما يكن c محصور بين $f(x_1)$ و $f(x_2)$ فإن:

$$\exists x_3\in\ ]x_1\ \ x_2\ [:\ f(x_3)=c$$

3. الدوال الإشتقاقية:

تعريف1: ليكن I مجال من $\mathbb{R}$، $f:I\to\mathbb{R}$ و $x_0\in I$

- نقول إن الدالة f قابلة للإشتقاق عند x_0 إذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$ ، حيث l عدد حقيقي موجود و منتهي، نرمز لنهاية النسبة بالرمز $f'(x_0)$ أو $\frac{df}{dx}(x_0)$ و نكتب :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

مثال1: لتكن $f:\mathbb{R}\to[1\ \ -1]$ دالة معرفة كمايلي: $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)=sin(x)$، لدينا

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{sin(x)-sin(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)=co\,s(x_0)$$

و بالتالي : $\forall x_0\in\mathbb{R}: sin'(x_0)=cos(x_0)$

مثال2: لتكن $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ دالة معرفة كمايلي: $\forall x\in\mathbb{R}^*: f(x)=\frac{1}{x}$، لدينا

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{-1}{xx_0}=\frac{-1}{x_0^2}$$

و بالتالي : $\forall x_0\in\mathbb{R}^*:\left(\frac{1}{x_0}\right)'=\frac{-1}{x_0^2}$

ملاحظة: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ أو $\frac{(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+\varepsilon(x)$ مع $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$

تعريف2: ليكن I مجال من $\mathbb{R}$، $f:I\to\mathbb{R}$ دالة و $x_0\in I$

1. f قابلة للإشتقاق على يمين x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ موجودة و منتهية

و نرمز لها بالرمز $f'_d(x_0)$ أو $f'(x_0^+)$ و نكتب $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_d(x_0)$

2. f قابلة للإشتقاق على يسار x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ موجودة و منتهية

و نرمز لها بالرمز $f'_g(x_0)$ أو $f'(x_0^-)$ و نكتب $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_g(x_0)$

ملاحظة:

f قابلة للإشتقاق عند x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

أمثلة: (حالات عدم قابلية الإشتقاق (ق إ) عند النقطة x_0)

1. $f(x)=|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x\leq 0\end{cases}$ ، $D_f=\mathbb{R}$ و $x_0=0$، لدينا:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x-0}=1=f'_d(0)\Rightarrow$$ f ق إ على يمين 0

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x-0}{x-0}=-1=f'_g(0)\Rightarrow$$ f ق إ على يسار 0

و لكن بما أن $f'_d(0)\neq f'_g(0)$، فإن f غير قابلة للإشتقاق عند $x_0=0$.

2. $\forall x\in\mathbb{R}:f(x)=\sqrt[3]{x}$ ، $D_f=\mathbb{R}$ و $x_0=0$، لدينا :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{0}=\infty\Rightarrow$$ f غير ق إ عند 0

3. $f(x)=\begin{cases} xsin(\frac{1}{x}) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ ، $D_f=\mathbb{R}$ و $x_0=0$ ، لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 0}\frac{xsin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}sin\left(\frac{1}{x}\right)$$ غير معرفة

و بالتالي f غير ق إ عند 0.

قضية: $f:I\to\mathbb{R}$ قابلة للإشتقاق عند النقطة $x_0\in I \Leftarrow$ f مستمرة عند النقطة x_0

ملاحظة: $f:I\to\mathbb{R}$ مستمرة عند النقطة $x_0\in I \not\Leftarrow$ f قابلة للإشتقاق عند النقطة x_0

مثال: لتكن الدالة : $f(x)=\begin{cases} xsin(\frac{1}{x}) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$،

f غير ق إ عند 0، و لكن f مستمرة عند النقطة 0.

تعريف: $f:I\to\mathbb{R}$ دالة معرفة على المجال I، إذا كانت f قابلة للإشتقاق في كل نقطة من المجال I، فإن الدالة $\begin{matrix} f':I\to\mathbb{R} \\ x\to f'(x) \end{matrix}$ تسمى الدالة المشتقة للدالة f أو مشتق f .

نظرية: I مجال من $\mathbb{R}$، لتكن $f:I\to\mathbb{R}$ و $g:I\to\mathbb{R}$ دالتين قابلتين للإشتقاق عند $x_0\in I$

1. الدالة $(f+g)$ ق إ عند النقطة x_0، و لدينا $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$
2. (fg) ق إ عند النقطة x_0 ، و لدينا $(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$
3. λf $(\forall\lambda\in\mathbb{R})$ ق إ عند النقطة x_0، و لدينا $(\lambda f)'(x_0)=\lambda f'(x_0)$
4. $\frac{f}{g}$ (حيث $g(x_0)\neq 0$) ق إ عند x_0، و لدينا $(\frac{f}{g})'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

الدالة المشتقة لتركيب دالتين:

نظرية: لتكن $f:I\to J$ دالة ق إ عند $x_0\in I$ ، $g:J\to\mathbb{R}$ ق إ عند $f(x_0)$، و لدينا

$$(g\circ f)'(x_0)=(g(f(x_0)))'=f'(x_0)\,g'(f(x_0))$$

مثال: $h:\mathbb{R}\to[-1\ \ 1]$ حيث $\forall x\in\mathbb{R}: h(x)=cos(x^3)$، إن h هي تركيب دالتين و لدينا

$h:\underbrace{\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R}\xrightarrow{g}[-1\ \ 1]}_{h=g\circ f}$ ، حيث $g(x)=cos(x)$ ، $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)=x^3$ ،

و بالتالي:

$$f'(x) = 3x^2, g'(x) = -sin(x) \Rightarrow (g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)\, g'\big(f(x_0)\big)$$

$$\Longrightarrow h'(x_0) = -3x_0^2\, sin(x_0^3) \quad ,\forall x_0 \in \mathbb{R}$$

مشتق الدالة العكسية:

نظرية: لتكن $f: I \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة و رتيبة تماما على المجال I من $\mathbb{R}$، (إذن f^{-1} موجودة) إذا كانت f ق إ عند $x_0 \in I$ و كان $f'(x_0) \neq 0$، فإن الدالة العكسية $f^{-1}: f(I) \to I$ قابلة للإشتقاق عند $f(x_0)$ ، و لدينا

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \text{ أو } (f^{-1})'\big(f(x_0)\big) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

مثال: لتكن الدالة $f: [0\ +\infty[\to \mathbb{R}$ ، حيث $\forall x \in [0\ +\infty[: f(x) = x^2$ ، لدينا f دالة مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0\ +\infty[$ و منه تقبل دالة عكسية

$f^{-1}: [0\ +\infty[\to [0\ +\infty[$ ، و لدينا $y = x^2 \Longrightarrow x = \sqrt{y}$

إذن $\forall x \in [0\ +\infty[: f^{-1}(x) = \sqrt{x}$، وهي قابلة للإشتقاق على المجال $]0\ +\infty[$ ، و بالتالي:

$$\forall x \in]0\ +\infty[: (f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- لنحسب مشتق الدالة العكسية بإستعمال النظرية السابقة : لدينا

$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$، إذن

$$(f^{-1})'\left(\underbrace{f(x)}_{y}\right) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

و بالتالي :

$$\forall x \in]0\ +\infty[: (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2f^{-1}(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad ; f'(x) = 2x$$

المشتقات من الصنف n: لتكن $f: I \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للإشتقاق على المجال I ، f' ق إ كذلك على المجال I ، f'' ق إ كذلك على المجال I و f''' ق إ كذلك على المجال I، إذن بالتراجع إذا كانت $f^{(n-1)}$ ق إ على المجال I فإن $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ و لدينا

$$f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', \ f^{(2)} = f'', \dots\dots\dots, f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

- نرمز للمشتقة من الدرجة n للدالة f ذات متغير x بالرمز $\frac{d^n f}{dx^n}$

الدوال من الصنف C^n : إذا كانت f دالة قابلة للإشتقاق n مرة (أي إذا كانت مشتقة f من الرتبة n موجودة أو معرفة) على المجال I، و كانت f مستمرة على المجال I، فإننا نقول إن f دالة قابلة للإشتقاق بإستمرار n مرة أو إن f من الصنف C^n على المجال I و نكتب $f \in C^n(I)$، و نعرف $C^0(I) = \{f;\ f: I \to \mathbb{R}$ مستمرة$\}$

$C^n(I) = \{f;\ f: I \to \mathbb{R}$ مستمرة على $I \wedge f^{(n)}$ موجودة$\}$

$C^\infty(I) = \{f;\ f: I \to \mathbb{R}$ مستمرة على $I \wedge f$ ق إ عدد لانهائي من المرات على $I\}$

مثال1: $f(x) = e^x \in C^\infty(\mathbb{R})$ ($f(x) = e^x$ ق إ عدد لانهائي من المرات على $\mathbb{R}$)

مثال2: $f(x) = \cos(x)$:$\forall x \in \mathbb{R}$، لدينا

$$f'(x) = -\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), f''(x) = -\cos(x) = \cos(x + \pi), \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \forall x \in \mathbb{R}$$

بنفس الطريقة نجد: $\forall x \in \mathbb{R}: \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ (برهن عليها بالتراجع)

مثال3: $f(x) = \ln(x+1)$:$\forall x \in]-1\ \ +\infty[$، لدينا:

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}, \qquad f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} = (-1)^1 \frac{(2-1)!}{(x+1)^2},$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} = (-1)^2 \frac{(3-1)!}{(x+1)^3}, \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = ln^{(n)}(1+x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x+1)^n}, \forall x \in]-1\ \ +\infty[.$$

نظرية (دستور ليبنيتز): إذا كانت $f, g \in C^n(I)$ فإن حسب ليبنتيز لدينا

$$\forall x \in I: (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

مثال: $\forall x \in \mathbb{R}: h(x) = x^2\cos(x)$ ، نضع $f(x) = x^2$ ، $g(x) = \cos(x)$

($f \in C^2(\mathbb{R})$ و $g \in C^n(\mathbb{R})$)، حسب دستور ليبنيتز فإنه لدينا :

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

$$= C_n^0 f^{(0)}(x) g^{(n-0)}(x) + C_n^1 f^{(1)}(x) g^{(n-1)}(x) + C_n^2 f^{(2)}(x) g^{(n-2)}(x)$$

لدينا: $f(x) = x^2 \Longrightarrow f'(x) = 2x \Longrightarrow f''(x) = 2$

و نعلم أن (إرجع الى المثال 2): $g^{(n)}(x) = cos^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$

و لدينا كذلك : $C_n^0 = 1$، $C_n^1 = n$ ، $C_n^2 = \frac{1}{2}n(n-1)$، $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

و بالتالي :

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ (fg)^{(n)}(x) = (x^2 \cos(x))^{(n)}$$

$$= x^2 \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + n(2x)\cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+ n(n-1)\cos(x + (n-2)\frac{\pi}{2})$$

تطبيقات الإشتقاق:

القيم العظمى و القيم الصغرى: لتكن $f: I \to \mathbb{R}$ دالة معرفة على المجال I و $x_0 \in I$.

- نقول إن f تملك قيمة عظمى محلية أو نسبية في المجال I عند النقطة x_0، إذا وجد $\delta > 0$ بحيث:

$$\forall x \in]x_0 + \delta \ \ x_0 - \delta \ [: f(x) \leq f(x_0) \ \text{ و } \ ]x_0 - \delta \ \ x_0 + \delta \ [\subset I$$

و نقول $f(x_0)$ قيمة عظمى نسبية أو محلية للدالة f.

- نقول إن f تملك قيمة صغرى محلية أو نسبية في المجال I عند النقطة x_0، إذا وجد $\delta > 0$ بحيث

$$\forall x \in]x_0 + \delta \ \ x_0 - \delta \ [: f(x) \geq f(x_0) \ \text{ و } \ ]x_0 - \delta \ \ x_0 + \delta \ [\subset I$$

و نقول $f(x_0)$ قيمة صغرى نسبية أو محلية للدالة f.

- نقول إن f تملك قيمة قصوى في المجال I عند النقطة x_0 إذا كانت تملك قيمة عظمى أو قيمة صغرى عند النقطة $x_0 \in I$.

نظرية القيم القصوى: إذا كانت $f: I \to \mathbb{R}$ دالة معرفة على المجال I، و تملك قيمة قصوى في المجال I عند النقطة x_0 و كانت قابلة للإشتقاق عند x_0، فإن $f'(x_0) = 0$.

نظرية رول: لتكن $f: [a \ \ b] \to \mathbb{R}$ دالة معرفة و مستمرة على المجال $[a \ \ b]$ و قابلة للإشتقاق على $]a \ \ b[$ و تحقق الشرط $f(a) = f(b)$ فإن $\exists c \in]a \ \ b[: f'(c) = 0$

نظرية التزايدات المنتهية (ن ت م): لتكن $f:[a\ \ b]\to\mathbb{R}$ دالة معرفة و مستمرة على المجال $[a\ \ b]$ و قابلة للإشتقاق على $]a\ \ b[$ فإنه: $\exists c\in\ ]a\ \ b[:\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

مثال: لتكن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بحيث: $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)=e^x+x-1$

- بإستعمال ن ت م بين أن: $\forall x\in[0\ \ 1[: 1-x\le e^x$

لدينا f معرفة، مستمرة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$، إذن فهي كذلك مستمرة على المجال $[\ x\ \ 0]$ و ق إ على $]0\ \ x\ [$، $([0\ \ x\ ]\subset[0\ \ 1[\ )$ و بالتالي حسب ن ت م فإنه:

$$\exists c\in\ ]0\ \ x[:\ \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{e^x+x-1-0}{x-0}=f'(c)$$

و بما أن : $f'(x)=e^x+1$ فإن

$$\frac{e^x+x-1}{x}=f'(c)\Longrightarrow\frac{e^x+x-1}{x}=e^c+1>0\Longrightarrow 1-x<e^x$$

و بالتالي: $\forall x\in[0\ \ 1[: 1-x\le e^x$

قضية: لتكن $f:I\to\mathbb{R}$ دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على المجال I، فإن

$$\forall x_1,x_2\in I,\exists c\in\ ]x_1\ \ x_2[:\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$$

نظرية التزايدات المنتهية المعممة: لتكن $f:[a\ \ b]\to\mathbb{R}$ ، $g:[a\ \ b]\to\mathbb{R}$ دالتين معرفتين و مستمرتين على المجال $[a\ \ b]$ و قابلتين للإشتقاق على $]a\ \ b[$ فإنه:

$$\exists c\in\ ]a\ \ b[:\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

تطبيقات ن ت م :

نظرية: إذا كانت $f:E\to\mathbb{R}$ دالة إشتقاقية، فإن :

أ. $f'=0\ \Longleftarrow\ f$ دالة ثابتة

ب. $f'\ge 0\ \Longleftarrow\ f$ دالة متزايدة

ج. $f'\le 0\ \Longleftarrow\ f$ دالة متناقصة

نظرية (قاعدة لوبيتال): لتكن الدالتين f و g قابلتين للإشتقاق بجوار النقطة x_0، إذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة و تساوي l فإن $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$ موجودة وتساوي l.

ملاحظة: نستعمل قاعدة لوبيتال لإزالة حالات عدم التعين $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ في حساب النهايات.

أمثلة: أحسب النهايات : $\lim_{x\to 0}\frac{x+\ln(x+1)}{x}$، $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{لوبيتال}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{1}=0\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\ln(x+1)}{x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{لوبيتال}}\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{x+1}}{1}=2\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{x+\ln(x+1)}{x}=2$$

ملاحظة: العكس غير صحيح أي:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=l\nRightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$$

مثال: لتكن الدالتين $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ ، $g(x)=\sin(x)$، و لدينا :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{\sin(x)-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{\sin(x)}{x}}=0$$

و لكن $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{'(x)}$ غير موجودة لأن :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2xsin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}\left(2xsin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

الفصل الرابع

الدوال الأساسية

- ❖ **الدوال المثلثية و دوالها العكسية**
- ❖ **دوال القوى**
- ❖ **الدوال الأسية**
- ❖ **الدوال اللوغاريتمية**
- ❖ **الدوال القطعية الزائدية و دوالها العكسية**

الدوال الأساسية

1- الدوال المثلثية و دوالها العكسية:

- **الدالة الجيب (sin):** هي دالة معرفة كما يلي $\begin{matrix} sin:\mathbb{R}\to[-1\ 1] \\ x\to\sin(x) \end{matrix}$ و هي دالة فردية ، مستمرة و إشتقاقية على $\mathbb{R}$ و لدينا: $\forall x \in \mathbb{R}:\ sin'(x) = \cos(x)$

- **الدالة الجيب التمام (cos):** هي دالة معرفة كما يلي $\begin{matrix} cos:\mathbb{R}\to[-1\ 1] \\ x\to\cos(x) \end{matrix}$ و هي دالة زوجية، مستمرة و إشتقاقية على $\mathbb{R}$ و لدينا: $\forall x \in \mathbb{R}:\ cos'(x) = -sin(x)$

- **الدالة الظل (tan):** هي دالة معرفة كما يلي $\begin{matrix} tan:\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R} \\ x\to tg(x)=\frac{\sin(x)}{cos(x)} \end{matrix}$ و هي دالة فردية، مستمرة و إشتقاقية على $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$ و لدينا:

$$\forall x \in \mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}:\ tan'(x) = \frac{1}{cox^2(x)} = (1+tan^2(x))$$

- **الدالة الظل التمام (cotan):** هي دالة معرفة كما يلي $\begin{matrix} cotan:\mathbb{R}-\{k\pi;k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R} \\ x\to cotan(x)=\frac{\cos(x)}{sin(x)} \end{matrix}$

و هي فردية و دالة مستمرة و إشتقاقية على $\mathbb{R}-\{k\pi;k\in\mathbb{Z}\}$ ، و لدينا:

$$\forall x \in \mathbb{R}-\{k\pi;k\in\mathbb{Z}\}:\ cotan'(x) = \frac{-1}{sin^2(x)} = -(1+cotan^2(x))$$

دساتير التحويل: لدينا ما يلي

$$\forall x \in \mathbb{R}:\ sin^2(x)+cos^2(x) = 1$$

$$\forall x,y \in \mathbb{R}:\ \cos(x\pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

$$\forall x,y \in \mathbb{R}:\ \sin(x\mp y) = \sin(x)\cos(y) \mp \cos(x)\sin(y)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}:\ \cos(2x) = 2cos^2(x)-1 = 1-2sin^2(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}:\ \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\forall x,y \in \mathbb{R}:\ \cos(x)+\cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}:\ \cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}:\ \sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}:\ \sin(x) - \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\forall \in \mathbb{R}: sin^2(x) = \frac{tan^2(x)}{1+tan^2(x)}, \qquad cos^2(x) = \frac{1}{1+tan^2(x)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}:\ \cos(2x) = \frac{1-tan^2(x)}{1+tan^2(x)}, \quad \sin(2x) = \frac{2tan^2(x)}{1+tan^2(x)}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: tan(x \mp y) = \frac{tan(x) \mp tan(y)}{1 \pm tan(x)tan(y)}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: tan(x) \mp tan(y) = \frac{\sin(x \mp y)}{\cos(x)\cos(y)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: tan(2x) = \frac{2tan(x)}{1-tan^2(x)}$$

الدوال العكسية للدوال المثلثية:

نظرية1: ليكن I مجال معطى و $f: I \to \mathbb{R}$ دالة رتيبة لدينا

f مستمرة على المجال I $\iff$ $f(I)$ عبارة عن مجال في $\mathbb{R}$

نظرية2: ليكن I مجال معطى و $f: I \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة، لدينا: f متباينة $\iff$ f رتيبة

نظرية (الدالة العكسية): إذا كانت $f: I \to J$ دالة مستمرة و رتيبة تماما على المجال I، فإن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة و مستمرة و رتيبة تماما على المجال $f(I)$ و قيمها في المجال I، و تتغير في نفس إتجاه تغير الدالة f.

الدالة قوس الجيب (Arcsin): نعلم أن $sin: \mathbb{R} \to [-1\ \ 1]$ دالة معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$، نرمز ب f لإقتصار دالة الجيب $x \to \sin(x)$ على المجال $\left[\frac{-\pi}{2}\ \ \frac{\pi}{2}\right]$، إن الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{-\pi}{2}\ \ \frac{\pi}{2}\right]$، و بالتالي فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من $[-1\ \ 1]$ نحو $\left[\frac{\pi}{2}\ \ \frac{-\pi}{2}\right]$، تكون كذلك مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[-1\ \ 1]$، نسمي هذه الدالة العكسية قوس الجيب و نرمز لها بالرمز $Arcsin$ ، و لدينا إذن

$$y = Arcsin(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin(y) \\ \frac{-\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{و} \quad Arcsin: [-1 \quad 1] \to \left[\frac{-\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2}\right]$$

و هي دالة إشتقاقية على المجال $]-1 \quad 1[$، و لدينا

$$y = \ sin(x) \Leftrightarrow Arcsin(y) = x, \forall y \in [-1 \quad 1]$$

$$Arcsin'(y) = Arcsin'\left(\underbrace{\sin(x)}_{y}\right) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}$$

$$\Longrightarrow \forall y \in]-1 \quad 1[: \ Arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

و بالتالي :

$$\forall x \in]-1 \ 1[: \ Arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ , \ Arcsin'(x):]-1 \quad 1[\to \left]\frac{-\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2}\right[$$

الدالة قوس الجيب التمام (Arccos): نعلم أن $cos: \mathbb{R} \to [-1 \quad 1]$ دالة معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$، نرمز ب f لإقتصار دالة الجيب التمام $x \to \cos(x)$ على المجال $[0 \quad \pi]$، إن الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[0 \quad \pi]$، و بالتالي فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من $[1 \quad -1]$ نحو $[0 \quad \pi]$، تكون كذلك مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[1 \quad -1]$ نسمي هذه الدالة العكسية قوس الجيب التمام و نرمز لها بالرمز $Arccos$ ، و لدينا إذن

$$y = Arccos(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos(y) \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases} \quad \text{و} \quad Arccos: [-1 \quad 1] \to [0 \quad \pi]$$

و قابلة للإشتقاق على المجال $]-1 \quad 1[$، و لدينا:

$$y = \ \cos(x) \Leftrightarrow Arccos(y) = x, \qquad \forall y \in [-1 \quad 1]$$

$$Arccos'(y) = Arccos'\left(\underbrace{\cos(x)}_{y}\right) = \frac{1}{\cos'(x)} = \frac{-1}{\sin(x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}$$

$$\Longrightarrow \forall y \in]-1 \quad 1[: \ Arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

و بالتالي :

$$\forall x \in]-1 \ 1[: \ Arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \ , \ Arccos'(x):]-1 \quad 1[\to]0 \ \pi[$$

الدالة قوس الظل (Arctan): نعلم أن $tan: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ دالة معرفة و مستمرة على $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$، نرمز ب f لإقتصار دالة الظل $x \to tan(x)$ على المجال $\left]-\frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2}\right[$، إن الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $\left]-\frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2}\right[$، و بالتالي فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\left]\frac{-\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2}\right[$ ، تكون كذلك مستمرة و متزايدة تمام $\mathbb{R}$ ، نسمي هذه الدالة العكسية قوس الظل و نرمز لها بالرمز $Arctan$ ، و لدينا إذن

$$y = Arctan(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan(y) \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{و} \quad Arctan: \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2}\right[$$

$\mathrm{Arc}tan(x)$ هي دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$، إذن لدينا :

$$Arctan'(y) = Arctan'\left(\underbrace{\tan(x)}_{y}\right) = \frac{1}{tan'(x)} = \frac{1}{1 + tan^2(x)}$$

$$\Longrightarrow \forall y \in \mathbb{R}: \ Arctan'(y) = \frac{1}{1 + y^2}$$

و بالتالي: $Arctan': \mathbb{R} \longrightarrow \left]\frac{-\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2}\right[$ و $\forall x \in \mathbb{R}: \ Arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

الدالة قوس الظل التمام (Arccotan): نعلم أن $cotan: \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ دالة معرفة و مستمرة على $\mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$، نرمز ب f لإقتصار دالة الظل التمام $x \to cotan(x)$ على المجال $]0 \quad \pi[$، إن الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]0 \quad \pi[$، و بالتالي فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $]0 \quad \pi[$، تكون كذلك مستمرة و متزايدة تماما $\mathbb{R}$ ، نسمي هذه الدالة العكسية قوس الظل و نرمز لها بالرمز $Arccotan$ ، و لدينا إذن

$$y = Arccotan(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mathrm{cotan}(y) \\ 0 < y < \pi \end{cases} \quad \text{و} \quad Arccotan: \mathbb{R} \to]0 \quad \pi[$$

$Arcotan(x)$ هي دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$، إذن

$$Arcotan'(y) = Arccotan'\left(\underbrace{\mathrm{cotan}(x)}_{y}\right) = \frac{1}{cotan'(x)} == \frac{-1}{1 + y^2}$$

$$\Longrightarrow \forall y \in \mathbb{R}: \ Arccotan'(y) = \frac{-1}{1 + y^2}$$

وبالتالي: $Arccotan': \mathbb{R} \longrightarrow]0 \quad \pi[$ و $\forall x \in \mathbb{R}: \ Arccotan'(y) = \frac{-1}{1+x^2}$

2. الدوال الأسية و اللوغاريتمية:

الدالة الأسية ذات الأساس a : هي دالة معرفة كما يلي: $\begin{matrix} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^* \\ x\to f(x)=a^x=exp_a(x) \end{matrix}$;$a>0$

و تحقق:

أ. لما $a=1$ فإن f دالة ثابتة، لما $a>1$ فإن f متزايدة تماما ،

ب. لما $a<1$ فإن f متناقصة تماما،

ج. لما $a>1$ فإنه لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$ ،

د. لما $0<a<1$ فإنه لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty$ ،

ه. من أجل $a>0$ و $a\neq 1$ فإن الدالة a^x مستمرة و رتيبة تماما على $\mathbb{R}$.

خواص:

أ. $\forall a>0, \forall x,y\in\mathbb{R}:\ a^x a^y=a^{x+y}\ ;\ (a^x)^y=a^{xy}\ , a^{-x}=\frac{1}{a^x}$ ،

ب. $\forall a,b>0, \forall x\in\mathbb{R}:\ (ab)^x=a^x b^x$.

الدالة الأسية ذات الأساس e : هي دالة معرفة كما يلي: $\begin{matrix} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^* \\ x\to f(x)=e^x=exp\,(x) \end{matrix}$

و هي الدالة الوحيدة الإشتقاقية على $\mathbb{R}$ و تحقق: $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)=f(x),\ f(0)=1$

خواص: الدالة الأسية ذات الأساس e تحقق كل الخواص السابقة للدالة الأسية a^x في حالة $a>1$.

الدالة اللوغارتمية: بما أن الدالة e^x مستمرة و رتيبة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}_+^*$ فهي تقبل دالة عكسية تسمى الدالة اللوغارتمية النيبيرية و هي معرفة كما يلي $\begin{matrix} ln:]0\ +\infty[\to\mathbb{R} \\ x\to ln(x) \end{matrix}$ و تحقق

$$\forall x\in\mathbb{R}: y=e^x \iff x=\ln(y)\,, \forall y>0$$

خواص: أ. الدالة ln مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0\ +\infty[$ و $ln(1)=0$

ب. $\forall x,y\in\mathbb{R}_+^*: ln(xy)=ln(x)+ln(y)\,, ln\left(\frac{x}{y}\right)=ln(x)-ln(y)$

ج. $\forall x\in\mathbb{R}_+^*, \forall n\in\mathbb{Z}: ln(x^n)=nln(x)$

د. الدالة e^x إستقاقية على $\mathbb{R}_+^*$ و لدينا: $ln'(x)=\frac{1}{x}$

ه. $\lim\limits_{x\to0} ln(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to0} xln(x)=0$

و. $\lim_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty, \lim_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$

الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس a: من أجل $a > 0$ و $a \neq 1$ فإن الدالة a^x مستمرة و رتيبة تماما على $\mathbb{R}$ فهي تقبل دالة عكسية تسمى الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس a و هي معرفة كما يلي:

$$log_a:]0 \ +\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \to log_a(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)}$$

ملاحظة: من أجل $a = e$ نحصل على اللوغاريتم النيبيري $log_e(x) = ln(x)$، و من أجل $a = 10$ نحصل على اللوغاريتم العشري المعرف كما يلي

$$log_{10}(x) = \frac{ln(x)}{ln(10)} = kln(x), \quad k = 0{,}434343 \ldots$$

خواص: أ. الدالة log_a مستمرة و رتيبة تماما على المجال $]0 \ +\infty[$

ب. لتكن $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

$$log_a(xy) = log_a(x) + log_a(x), \ log_a(a^x) = a^{log_a(x)} = x$$

ج. لما $0 << 1$ فإن الدالة $log_a(x)$ متناقصة تماما و لدينا

$$\lim_{x\to0} log_a(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} log_a(x) = -\infty$$

د. لما $a > 1$ فإن الدالة $log_a(x)$ متزايدة تماما و لدينا

$$\lim_{x\to0} log_a(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} log_a(x) = +\infty$$

ه. من أجل $a > 0$ و $a \neq 1$ فإن الدالة $log_a(x)$ إشتقاقية على المجال $]0 \ +\infty[$

و لدينا : $log_a{}'(x) = \frac{1}{xln(a)}$

3- الدوال القطعية الزائدية و دوالها العكسية :

يمكن كتابة أي دالة $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، بطريقة وحيدة على الشكل $f(x) = u(x) + v(x)$ بحيث :

$u(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ دالة فردية و $v(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ دالة زوجية، نأخذ

$f(x) = e^x$ و نضع $u(x) = sh(x)$ و $v(x) = ch(x)$، و بالتالي

$$\begin{cases} sh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ ch(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{cases}$$

نسمي sh دالة الجيب القطعي الزائدي و ندعو ch دالة جيب التمام القطعي الزائدي.

- نعرف كذلك دالة الظل القطعي الزائدي th بوضع: $\forall x \in \mathbb{R}: th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$، و نعرف دالة ظل التمام القطعي الزائدي $coth$، بوضع :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*: coth(x) = \frac{1}{th(x)} = \frac{ch(x)}{sh(x)}$$

ملاحظة: ch دالة زوجية و sh، th و coth دوال فردية.

مشتق الدوال القطعية الزائدية :

$$\forall x \in \mathbb{R}: sh'(x) = ch(x), ch'(x) = sh(x), \qquad th'(x) = 1 - th^2(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*: \coth'(x) = \frac{-1}{th^2(x)}$$

دساتير التحويل : لدينا $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$، فإن

1. $ch^2(x) - sh^2(x) = 1,$
2. $ch(x \mp y) = ch(x)ch(y) \mp sh(x)sh(y)$
3. $sh(x \mp y) = sh(x)ch(y) \mp ch(x)sh(y)$
4. $ch(x) + ch(y) = 2ch(\frac{x+y}{2})ch(\frac{x-y}{2})$
5. $sh(x) + sh(y) = 2sh\left(\frac{x+y}{2}\right)ch(\frac{x-y}{2})$
6. $th(x \mp y) = \frac{th(x) \mp th(y)}{1 - th(x)th(y)}, \quad th(2x) = \frac{2th(x)}{1+th^2(x)}$
7. $ch(2x) = \frac{1+th^2(x)}{1-th^2(x)}, sh(x) = \frac{2th(x)}{1-th^2(x)}$

الدالة العكسية للدالة sh: $sh: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$، فهي تقبل دالة عكسية نرمز لها بالرمز $Argsh$ (عمدة الجيب القطعي الزائدي) معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$، و هي كذلك قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.

الكتابة اللوغاريتمية و حساب المشتقة للدالة $Argsh$: لدينا

$$y = sh(x) \Leftrightarrow x = Argsh(y); \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$y = sh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} \Longrightarrow e^{2x} + 2ye^x - 1 = 0$$

بوضع : $t = e^x$ نجد $y^2 + 2yt - 1 = 0$، بحل المعادلة نجد $t = y \mp \sqrt{y^2 + 1}$، إذن

$$y = sh(x) \Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \text{ أو } e^x = y - \sqrt{y^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$$

$$\Leftrightarrow Argsh(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$$

و بالتالي : $\forall x \in \mathbb{R}: Argsh'(x) = ln'\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

الدالة العكسية للدالة ch: $ch: [0 + \infty[\longrightarrow [1 + \infty[$ دالة مستمرة و متزايدة تماما على $[0 + \infty[$، فهي تقبل دالة عكسية نرمز لها بالرمز $Argch$ (عمدة جيب التمام القطعي الزائدي) معرفة من $[1 + \infty[$ نحو $[0 + \infty[$، و هي كذلك قابلة للإشتقاق على $]1 + \infty[$. ($\forall x \in [0 + \infty[: ch'(x) = sh(x) > 0$ و منه ch متزايدة تماما)

الكتابة اللوغاريتمية و حساب المشتقة للدالة $Argch$: لدينا

$$y = ch(x) \Leftrightarrow x = Argch(y); \quad \forall y \in [1 + \infty[$$

$$y = ch(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$

بوضع : $t = e^x$ نجد $y^2 - 2yt + 1 = 0$، بحل المعادلة نجد $t = y \mp \sqrt{y^2 - 1}$، إذن

$$y = ch(x) \Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 - 1} \text{ أو } e^x = y - \sqrt{y^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

$$\Leftrightarrow Argch(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

و بالتالي : $\forall x \in]1 + \infty[: Argch'(x) = ln'\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

الدالة العكسية للدالة th: $th: \mathbb{R} \longrightarrow]-1\ \ 1[$ دالة مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$، فهي تقبل دالة عكسية نرمز لها بالرمز $Argth$ (عمدة الظل القطعي الزائدي) معرفة من $]-1\ \ 1[$ نحو $\mathbb{R}$، و هي كذلك قابلة للإشتقاق على $]-1\ \ 1[$.

الكتابة اللوغاريتمية و حساب المشتقة للدالة $Argth$: لدينا

$$y = th(x) \Leftrightarrow x = Argth(y); \quad \forall y \in]-1\ \ 1[$$

$$y = th(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} > 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

$$\Leftrightarrow Argth(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

و بالتالي : $\forall x \in]-1\ \ 1[: Argth'(x) = \frac{1}{2}\ln'\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2}$

الدالة العكسية للدالة $coth$: $coth: \mathbb{R}^* \longrightarrow]-\infty\ -1[\cup]1\ +\infty[$ دالة مستمرة و متناقصة تماما على $\mathbb{R}^*$، فهي تقبل دالة عكسية نرمز لها بالرمز $Argcoth$ (عمدة ظل التمام القطعي الزائدي) معرفة من $]-\infty\ -1[\cup]1\ +\infty[$ نحو $\mathbb{R}^*$، و هي كذلك قابلة للإشتقاق على $]-\infty\ -1[\cup]1\ +\infty[$.

الكتابة اللوغاريتمية و حساب المشتقة للدالة $Argcoth$: لدينا

$$y = coth(x) \Leftrightarrow x = Argcoth(y); \quad \forall y \in]-\infty\ -1[\cup]1\ +\infty[$$

$$y = coth(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{y-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{y-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow Argth(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{y-1}\right)$$

و بالتالي: $\forall x \in]-\infty\ -1[\cup]1\ +\infty[: Argcoth'(x) = \frac{1}{2}\ln'\left(\frac{1+x}{x-1}\right) = \frac{1}{1-x^2}$

الفصل الخامس

دستور تايلور و النشر المحدود

- **دستور تايلور**
- **النشور المحدود**

دستور تايلور و النشر المحدود

1. دستور تايلور:

الدوال المتكافئة: لتكن f و g دالتين معرفتين بجوار نقطة $x_0 \in \mathbb{R}$ (إلا من الممكن عند x_0)

تعريف1: نقول إن f قابلة للإهمال (أو مهملة) أمام g بجوار x_0، و نرمز لذلك بالرمز $f = O(g)$، إذا وجدت دالة ε معرفة بجوار x_0 بحيث: $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ مع $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ من أجل كل x داخل جوار x_0 (إلا من الممكن عند x_0)، و نكتب:

$$\left(f = O(g)\right) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in V_{(x_0)}: |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|\right)$$

- في حالة $g(x_0) \neq 0$ ، $\forall x \in V_{(x_0)}$ فإن $f = O(g) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

مثال: $f(x) = x^2$ مهملة أمام الدالة $g(x) = x$ بجوار الصفر لأنه توجد دالة $\varepsilon(x) = x$ معرفة بجوار الصفر بحيث $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ مع $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

تعريف2: نقول عن f و g إنهما متكافئتان بجوار x_0، و نرمز لذلك بالرمز $f \sim g$، إذا وجدت دالة ε معرفة بجوار النقطة x_0 بحيث $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 1$ ، $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ من أجل كل x داخل جوار x_0 (إلا من الممكن عند x_0)، و نكتب :

$$f \sim g \Leftrightarrow f - g = O(g) = O(f)$$

- في حالة $g(x_0) \neq 0$ ، $\forall x \in V_{(x_0)}$ فإن: $f \sim g \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

مثال: الدالتان $g(x) = \sin(x)$، $f(x) = tan(x)$ متكافئتان بجوار الصفر لأنه توجد دالة $\varepsilon(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ معرفة بجوار الصفر و $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = \frac{1}{\cos(0)} = 1$ و

$$f(x) = g(x)\varepsilon(x) = \sin(x)\frac{1}{\cos(x)} = tan(x)$$

دستور تايلور: لتكن f دالة مستمرة على المجال $[a \quad b[$ و قابلة للإشتقاق على المجال $]a \quad b[$ فإن :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \varepsilon(x) \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)}_{P_1(x)} + \underbrace{(x - x_0)\varepsilon(x)}_{R_1(x)} = P_1(x) + R_1(x)$$

- R_1 هو كثير حدود من الدرجة الأولى و نقول إن P_1 يقارب الدالة f بجوار النقطة x_0 بدقة تساوي R_1 (خطأ)

- R_1 يسمى باقي من المرتبة الأولى بحيث:

$$\lim_{x \to x_0} R_1(x) = \lim_{x \to x_0} (x - x_0)\varepsilon(x) = 0$$

تعميم: إذا كانت $f^{(n)}(x_0)$ موجودة و منتهية فإن

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!}f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + R_n(x)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = P_n(x) + R_n(x)\,; \quad \lim_{x \to x_0} R_n(x) = 0$$

- R_n هو كثير حدود من الدرجة n و نقول إن P_n يقارب الدالة f بجوار x_0 بدقة تساوي R_n (خطأ).

- R_n يسمى باقي من المرتبة n بحيث : $\lim_{x \to x_0} R_n(x) = 0$

ملاحظة: إذا تغيرت المعطيات على الدالة f يتغير الباقي.

نظرية1 (دستور تايلور - باقي لاغرانج): لتكن f دالة مستمرة على المجال $[a \quad b]$ و قابلة للإشتقاق n مرة وعلى المجال $]a \quad b[$ و لتكن $f^{(n+1)}$ موجودة على المجال $]a \quad b[$ فإنه:

$$\exists c \in]a \quad b[: f(b) = f(a) + \frac{(b - a)}{1!}f'(a) + \cdots$$

$$+ \frac{(b - a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b - a)^{n+1}}{(1 + n)!}f^{(n+1)}(c)$$

يسمى هذا الدستور بدستور تايلور مع باقي لاغرانج، حيث $R_n(c) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(1+n)!}f^{(n+1)}(c)$ يسمى باقي لاغرانج.

ملاحظة: بوضع $b - a = h$، يمكن كتابة الدستور الورد في نظرية1 كمايلي :

$$f(h + a) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(1 + n)!}f^{(n+1)}(a + \theta h)\,; 0 < \theta < 1)$$

نظرية1 (دستور تايلور – لاغرانج): إذا كانت $f \in C([a \quad b])$ و $f \in C^n(]a \quad b[)$ و لتكن $f^{(n+1)}$ موجودة و $x_0 \in [a \quad b]$، فإن $x \neq x_0$ ، $\forall x \in [a \quad b]$ لدينا

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}\, f^{(n)}(x_0) + R_n(x, x_0)$$

حيث: $R_n(x, x_0) = \frac{(x-x_0)^{1+n}}{(1+n)!} f^{(n+1)}(c)$ يسمى باقي لاغرانج.

نظرية2 (دستور تايلور - باقي كوشي): إذا كانت $f \in C([a \quad b])$ و $f \in C^n(]a \quad b[)$ و $f^{(n+1)}$ موجودة و ليكن $x_0 \in [a \quad b]$، فإن $\forall x \in [a \quad b]$ ، $x \neq x_0$، و لدينا

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}\, f^{(n)}(x_0) + R_n(x, x_0)$$

حيث: $R_n(, x_0) = \frac{(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0)), 0 < \theta < 1$ يسمى باقي كوشي.

نظرية3 (دستور تايلور - باقي يونغ): إذا كانت $f \in C([a \quad b])$ و $f \in C^n(]a \quad b[)$ و ليكن $x_0 \in [a \quad b]$، فإن $\forall x \in [a \quad b]$ ، $x \neq x_0$ و لدينا:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}\, f^{(n)}(x_0) + R_n(x, x_0)$$

حيث: $R_n(x, x_0) = O((x-x_0)^n)$ يسمى باقي يونغ

$$R_n(x, x_0) = O((x-x_0)^n) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x, x_0)}{(x-x_0)^n} = 0$$

كتابة أخرى لدستور تايلور- يونغ: نضع $\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{R_n(x,x_0)}{(x-x_0)^n} & x \neq x_0 \\ 0 & x = x_0 \end{cases}$

$$si\ x \neq x_0 : \varepsilon(x) = \frac{R_n(x, x_0)}{(x-x_0)^n} \Longrightarrow R_n(x, x_0) = \varepsilon(x)(x-x_0)^n$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} R_n(x, x_0) = \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x)(x-x_0)^n = 0$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}\, f^{(n)}(x_0) + \varepsilon(x)(x-x_0)^n$$

ملاحظة هامة: لما $x_0 = 0$، يصبح دستور تايلور يسمى دستور **ماك لوران**

مثال1: $f(x) = e^x;\ x_0 = 0$ لدينا $f^{(n)}(x) = e^x$ ، و منه دستور ماك لوران هو

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(0, x)$$

- لما $0 < \theta < 1$ $R_n(0,x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$ يسمى باقي لاغرانج

- لما $0 < \theta < 1$ $R_n(0,x) = \frac{x^{n+1}}{(n)!}(1-\theta)e^{\theta x}$ يسمى باقي كوشي

- لما $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$ $R_n(0,x) = O(x^n) = x^n\varepsilon(x)$ يسمى باقي يونغ

إستنتاج دستور ماك لوران للدالتين ch و sh بجوار 0 حتى المرتبة n :

$$,e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + O(x^n)$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}x^n + O(x^n)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ch(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{(2p)!}x^{2p} + O(x^{2p}) \\ sh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(2p+1)!}x^{2p+1} + O(x^{2p+1}) \end{cases}$$

مثال2: $\alpha \in \mathbb{R}$; $f(x) = (1+x)^\alpha :]-1 \ +\infty[$ حيث $\forall x \in]-1 \ +\infty[$، لدينا $x_0 = 0$

$$f(0) = 1, f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \rightarrow f'(0) = \alpha$$

$$\ldots, f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \rightarrow f''(0) = \alpha(\alpha-1),$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \times \ldots \times \big(\alpha-(n-1)\big)(x+1)^{\alpha-n}$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \times \ldots \times \big(\alpha-(n-1)\big)$$

و منه دستور ماك لوران للدالة $f(x) = (1+x)^\alpha$ هو :

$$f(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots\big(\alpha-(n-1)\big)}{n!}x^n + \mathrm{R_n}$$

- لما $0 < \theta < 1$ $R_n(0,x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}$ يسمى باقي لاغرانج،

- لما $0 < \theta < 1$ $R_n(0,x) = \frac{x^{n+1}}{(n)!}(1-\theta)^n\ \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}, 0<\theta<1$ يسمى باقي كوشي،

- لما $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$ $R_n(0,x) = O(x^n) = x^n\varepsilon(x),$ يسمى باقي يونغ

- و لما $\alpha = -1$ فإن $f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + O(x^n)$

مثال3: 1. لتكن الدالة $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = sin(x)$، نأخذ $x_0 = 0$

نعلم أن : $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ و بالتالي

$$\sin(x) = \sin(0) + \frac{x}{1!}sin'(0) + \frac{x^2}{2!}sin''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}sin^{(n)}(0) + R_n$$

$$\Rightarrow\ \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^n)$$

2. لتكن الدالة : $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = \cos(x)$، نأخذ $x_0 = 0$

نعلم أن : $f^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$، و نفس الطريقة السابقة نجد:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n\ )!} + O(x^n)$$

2. النشور المحدودة:

تعريف: لتكن f دالة معرفة بجوار الصفر (ماعدا ربما عند 0)، نقول إن f تملك **نشر محدود** من المرتبة (أو الدرجة) n بجوار الصفر إذا وجدت دالة كثير حدود P_n درجتها أقل أو تساوي n و دالة ε معرفة بجوار الصفر بحيث:

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}_{P_n(x)} + x^n\varepsilon(x),\ \lim_{x\to\leftarrow 0}\varepsilon(x) = 0$$

- من أجل كل x داخل جوار الصفر، يدعى P_n **الجزء الرئيسي** للنشر و $x^n\varepsilon(x)$ **باقي** النشر

- نستطيع كذلك أن نكتب f على الشكل : $f(x) = P_n(x) + O(x^n)$، و ذلك بوضع $x^n\varepsilon(x) = O(x^n)$ و منه $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = \lim_{x\to 0}\frac{O(x^n)}{x^n} = 0$.

مثال: لتكن الدالة $f(x) = \frac{1}{1-x}; x \neq 1$ ، أوجد النشر المحدود بجوار الصفر حتى المرتبة n (يمكن إجراء القسمة حسب القوى المتزايدة للعدد 1 على $1-x$)

نعلم أن: $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + O(x^n)$ ، و بالتالي

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1+(-x)} = \underbrace{1 + x + x^2 + \cdots + x^n}_{\text{الجزء الرئيسي}} + \underbrace{O(x^n)}_{\text{باقي النشر}} \; ; \; \lim_{x\to 0} \frac{O(x^n)}{x^n} = 0$$

ملاحظات:

1. إذا كانت f تملك **نشر محدود** من المرتبة n بجوار 0 فإن : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
2. إذا كانت $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجود و منتهية فإن f تملك نشر محدود بجوار 0،
3. $\lim_{x\to 0} f(x) = \pm\infty$ فإن f لا تملك نشر محدود بجوار 0،
4. $\lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة (غير معرفة) فإن f لا تملك نشر محدود بجوار 0،
5. إذا كان $x_0 \neq 0$ فإننا نرجع إلى جوار 0، بوضع $y = x - x_0$ فنجد:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + O((x - x_0)^n), \lim_{x\to \leftarrow x_0} \frac{O((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n} = 0$$

6. إذا كانت $x_0 = \pm\infty$ ، فإننا نرجع إلى جوار 0، بوضع $y = \frac{1}{x}$ فنجد:

$$f(x) = a_0 + a_1(\frac{1}{x}) + \cdots + a_n(\frac{1}{x})^n + O((\frac{1}{x})^n), \qquad \lim_{x\to \pm\infty} \frac{O((\frac{1}{x})^n)}{(\frac{1}{x})^n} = 0$$

مثال1: لتكن الدالة $f(x) = e^{x+1}$ ، أوجد النشر المحدود بجوار $x_0 = -1$ حتى المرتبة n .

نرجع إلى جوار الصفر، بوضع $y = x + 1$ و منه $x = y - 1$ ($x \to -1$ فإن $y \to 0$)

و بالتالي:

$$f(y) = e^y = 1 + y + \frac{1}{2!}y^2 + \cdots + \frac{1}{n!}y^n + O(x^n)$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + (x + 1\ ) + \frac{1}{2!}(x + 1\ )^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(x + 1\ )^n + O((x + 1\ )^n)$$

و هو النشر المحدود للدالة f بجوار $x_0 = -1$ حتى المرتبة n.

مثال2: لتكن الدالة $f(x) = ln(1 + \frac{1}{x})$، أوجد النشر المحدود بجوار $+\infty$ حتى المرتبة 2 - نرجع إلى جوار الصفر بوضع $y = \frac{1}{x}$، و منه $x = \frac{1}{y}$ ($x \to +\infty$ فإن $y \to 0$) و لدينا

$$f(y) = ln(1 + y) = y - \frac{1}{2}y^2 + O(y^2) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + O(\frac{1}{x^2})$$

نظرية1: إذا كانت f تملك نشر محدود بجوار الصفر فإنه وحيد.

قضية:إذا كانت f دالة زوجية (فردية)، و إذا كانت f تملك نشر محدود بجوار الصفر فإن الجزء الرئيسي لهذا النشر يكون دالة زوجية (فردية).

نظرية2 (تايلور-يونغ): إذا كانت $f^{(n)}(0)$ موجودة فإن f تملك نشر محدود من المرتبة n بجوار 0 (وحيد)، و لدينا

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}\ f^{(n)}(0) + O(x^n), \lim_{x \to 0} \frac{O(x^n)}{x^n} = 0$$

قضية: إذا كانت $f^{(n)}(0)$ موجودة فإن f تملك نشر محدود من المرتبة n بجوار 0، أي

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ a_2x^2 \ldots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x), \qquad \lim_{x \to \leftarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

فإن : $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

مثال1: $f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n\varepsilon(x), \ \lim_{x \to \leftarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ ، قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R} - \{1\}$ و لدينا :

$$\frac{1}{1-x} = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}\ f^{(n)}(0) + O(x^n), \lim_{x \to 0} \frac{O(x^n)}{x^n} = 0$$

حيث : $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 1$

مثال2: (f دالة ليست مستمرة عند 0، لكن تقبل نشر محدود بجوار 0)

لتكن الدالة : $f(x) = \begin{cases} x^{n+1}\sin\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

f ليست مستمرة عند 0 لأن :

$$\lim_{x \to \leftarrow 0} f(x) = \lim_{x \to \leftarrow 0} x^{n+1}\sin\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) = 0 \neq f(0) = 1$$

لكن f تملك نشر محدود بجوار 0 حتى المرتبة n لأن :

$$f(x) = 0 + 0x + \cdots 0x^n + x^n \left(\underbrace{x\sin\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)}_{\varepsilon(x)} \right), \lim_{x \to \leftarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

مثال3: لتكن الدالة :

$$f(x) = \begin{cases} x^{n+1} \sin\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

1. (f دالة مستمرة عند 0، و تقبل نشر محدود بجوار 0)

f مستمرة عند 0 لأن: $\lim_{x \to \leftarrow 0} f(x) = \lim_{x \to \leftarrow 0} x^{n+1} \sin\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) = f(0) = 0$

و f تملك نشر محدود بجوار 0 حتى المرتبة n لأن:

$$f(x) = 0 + 0x + \cdots + 0x^n + x^n \left(\underbrace{x\sin\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)}_{\varepsilon(x)} \right), \lim_{x \to \leftarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

2. (f تملك نشر محدود بجوار 0 حتى المرتبة n لكن $f^{(n)}(0)$ غير موجودة)

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x^n \sin(\frac{1}{x^{n+1}}) = 0$$

$$f'(x) = (n+1)x^n \sin\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) - \frac{(n+1)}{x} \cos\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) \Longrightarrow f'(0) = 0$$

ومنه $f'(0)$ موجودة، و لدينا:

$$f'(x) = \begin{cases} (n+1)x^n \sin\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) - \frac{(n+1)}{x} \cos\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

و منه :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[(n+1)x^{n-1} \sin\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) - \frac{(n+1)}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) \right]$$

$= 0 - \lim_{x\to 0} \frac{(n+1)}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)$ غير موجودة

و منه $f''(0)$ غير موجودة و بالتالي: $f^{(n)}(0)$ غير موجودة

و لكن تملك نشر محدود بجوار 0 حتى المرتبة n و لدينا :

$$f(x) = 0 + 0x + \cdots 0x^n + x^n \left(\underbrace{x\sin\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)}_{\varepsilon(x)} \right), \lim_{x\to\leftarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

عمليات على النشر المحدود:

1. إذا كانت f تملك نشر محدود بجوار 0 حتى المرتبة n فإن f تملك نشر محدود بجوار 0 حتى المرتبة p حيث $p \leq n$ و لدينا:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \ldots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x), \quad \lim_{x\to\leftarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 \ldots + a_px^p + a_{p+1}x^{p+1} + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$= a_0 + a_1x + \cdots + a_px^p + x^p \underbrace{(a_{p+1}x + \cdots + a_nx^{n-p} + x^{n-p}\varepsilon(x))}_{\varepsilon_1(x)}$$

$$\Longrightarrow f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \ldots + a_px^p + x^p\varepsilon_1(x), \lim_{x\to\leftarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

2. إذا كانت f تملك نشر محدود بجوار 0 حتى المرتبة n أي $f(x) = P_n(x) + O(x^n)$، و إذا كانت g تملك نشر محدود بجوار 0 حتى المرتبة n أي $g(x) = Q_n(x) + O(x^n)$ فإن $f + g$ تملك نشر محدود بجوار 0 حتى المرتبة n، و لدينا:

$$(f+g)(x) = P_n(x) + Q_n(x) + O(x^n); \lim_{x\to 0} \frac{O(x^n)}{x^n} = 0$$

مثال1: إذا كان $f(x) = 1 + x + x^2 + O(x^2)$ و $g(x) = 2 + x + O(x^2)$ فإن:

$$(f+g)(x) = \underbrace{1 + x + x^2}_{P_2(x)} + \underbrace{2 + x}_{Q_2(x)} + O(x^2) = 3 + 2x + x^2 + O(x^2)$$

3. إذا كانت f تملك نشر محدود بجوار 0 حتى المرتبة n أي $f(x) = P_n(x) + O(x^n)$، و إذا كانت g تملك نشر محدود بجوار 0 حتى المرتبة n أي $g(x) = Q_n(x) + O(x^n)$ فإن $f \times g$ تملك نشر محدود بجوار 0 حتى المرتبة n، و لدينا:

$$(f \times g)(x) = P_n(x) \times Q_n(x) + O(x^n); \lim_{x\to 0} \frac{O(x^n)}{x^n} = 0$$

ملاحظة: في الجداء $P_n(x) \times Q_n(x)$ نتوقف في المرتبة n فقط (المرتبة التي نحتاج إليها)

نأخذ المثال1 السابق: عين النشر المحدود بجوار 0 للدالة $(f \times g)$ حتى المرتبة 2، لدينا:

$$(f \times g)(x) = (1 + x + x^2) \times (2 + x) = 2 + 3x + 3x^2 + O(x^2)$$

4. إذا كانت f تملك نشر محدود بجوار 0 حتى المرتبة n أي $f(x) = P_n(x) + O(x^n)$، و إذا كانت g تملك نشر محدود بجوار 0 حتى المرتبة n أي $g(x) = Q_n(x) + O(x^n)$ بحيث: $\lim_{x\to 0} g(x) \neq 0$ ، فإن $\frac{f}{g}$ تملك نشر محدود بجوار 0 حتى المرتبة n، و لدينا

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} + O(x^n);\ \lim_{x\to 0} \frac{O(x^n)}{x^n} = 0$$

ملاحظة: في حاصل القسمة $\frac{P_n}{Q_n}$ نتوقف في المرتبة n فقط (المرتبة التي نحتاج إليها)

دوما نأخذ المثال1 السابق: عين النشر المحدود بجوار 0 للدالة $(\frac{f}{g})$ حتى المرتبة 2، لدينا

$\lim_{x\to 0} g(x) = 2 \neq 0$، لنجري القسمة حسب القوى المتزايدة للمتغير x، للدالة $1 + x + x^2$ على $2 +$

$1 + x + x^2$	$2 + x$
$-1 - \frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}x^2$
$\frac{1}{2}x + x^2$	
$-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2$	
$\frac{3}{4}x^2$	
x	

و بالتالي : $\frac{1+x+x^2}{2+x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}x^2 + O(x^2)$

مثال2: عين النشر المحدود للمرتبة 5 بجوار 0 للدالة: $f(x) = tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

نعلم أن:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^5) \quad \text{و} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^5)$$

نجري القسمة حسب القوى المتزايدة للدالة : $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$ على $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$

$$\begin{array}{l|l} x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120} & 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} \\ \hline -x+\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{24} & x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5 \\ \frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30} & \\ \frac{-x^3}{3}+\frac{x^5}{6}-\frac{x^7}{72} & \\ \frac{2}{15}x^5-\frac{x^7}{72} & \end{array}$$

و بالتالي نجد : $tan(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+O(x^5)$

النشر المحدود لدالة مركبة:

إذا كانت f تملك نشر محدود بجوار 0 حتى المرتبة n أي $f(x)=P_n(x)+O(x^n)$ ، و إذا كانت g تملك نشر محدود بجوار 0 حتى المرتبة n أي $g(x)=Q_n(x)+O(x^n)$ و إذا كان $g(0)=0$ فإن $(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})$ تملك نشر محدود بجوار 0 حتى المرتبة n، و لدينا:

$$(f\circ g)(x)=P_n\left(Q_n(x)\right)+O(x^n);\ \lim_{x\to 0}\frac{O(x^n)}{x^n}=0$$

مثال1: عين النشر المحدود للمرتبة 3 بجوار الصفر للدالة : $h(x)=e^{\sin(x)}$

نضع: $f(x)=e^x$ ، $g(x)=\sin(x)$، و لدينا $g(0)=\sin(0)=0$ و بالتالي $(f\circ g)$ يملك نشر محدود بجوار 0، و نعلم أن:

$$\begin{cases} f(x)=e^x=\underbrace{1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3}_{P_{3(x)}}+O(x^3) \\ g(x)=\sin(x)=\underbrace{x-\frac{x^3}{3!}}_{Q_3(x)}+O(x^3) \end{cases}$$

و منه نجد :

$$h(x) = e^{\sin(x)} = (f \circ g)(x) = P_3\left(Q_3(x)\right) = P_3\left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + O(x^3)$$

$$\Rightarrow h(x) = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \frac{1}{2!}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^3 + O(x^3)$$

$$\Rightarrow h(x) = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \frac{1}{2!}(x^2\ ) + \frac{1}{3!}(x^3\ ) + O(x^3)$$

$$\Rightarrow h(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$$

مثال2: عين النشر المحدود للمرتبة 2 بجوار الصفر للدالة $h(x) = e^{\cos(x)}$

نضع: $f(x) = e^x$ ، $g(x) = \cos(x) - 1$ و لدينا: $g(0) = \cos(0) - 1 = 0$

و منه $(f \circ g)$ يملك نشر محدود بجوار 0، و نعلم أن :

$$\begin{cases} f(x) = e^x = \underbrace{1 + x + \frac{1}{2!}x^2}_{P_{2(x)}} + O(x^2) \\ g(x) = \cos(x) - 1 = -\underbrace{\frac{x^2}{2!}}_{Q_2(x)} + O(x^2) \end{cases}$$

و بالتالي نجد :

$$h(x)\ = ee^{\cos(x)-1} = (f \circ g)(x) = P_2\big(Q_2(x)\big) = P_2\left(\frac{-x^2}{2}\right) + O(x^2)$$

$$\Rightarrow h(x) = e(1 + \left(-\frac{x^2}{2!}\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2!}\right)^2) + O(x^2) = e - \frac{e}{2}x^2 + O(x^2)$$

تكامل نشر محدود بجوار الصفر :

لتكن $f: [-x_0\ \ x_0] \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للمكاملة، إذا كانت f تملك نشر محدود من المرتبة n بجوار 0 فإن $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ تملك نشر محدود من المرتبة $(n+1)$ بجوار 0، و لدينا:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ a_2x^2 \ldots + a_nx^n + O(x^n)$$

$$\Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x (a_0 + a_1t + \ a_2t^2 \ldots + a_nt^n + O(t^n))dt$$

$$\Longrightarrow F(x) = a_0 x + \frac{1}{2}a_1 x^2 + \ \ldots + \frac{1}{n+1}a_n x^{n+1} + O(x^{n+1})$$

مثال: لدينا $f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + O(x^n)$

$$\Longrightarrow F(x) = \ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt$$

$$\Longrightarrow F(x) = \int_0^x (1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + O(t^n))dt$$

$$\Longrightarrow \ \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} + O(x^{n+1})$$

إشتقاق نشر محدود بجوار الصفر : إذا كانت f قابلة للإشتقاق على المجال $[-x_0 \ \ x_0]$ ، و إذا كانت f تملك نشر محدود من المرتبة n بجوار 0، فإن f' تملك نشر محدود من المرتبة $(n-1)$ بجوار 0، و لدينا:

$$f'(x) = \ a_1 \ + 2\,a_2 x + 3a_3 x^2 \ \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + O(x^{n-1})$$

مثال: $f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + O(x^n)$ إذن :

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + O(x^{n-1})$$

النشر المحدود المعمم : لتكن f دالة معرفة بجوار0 ماعدا في 0، نفرض أن f لا تملك نشر محدود بجوار 0، ($\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة أو غير منتهية)، لكن الدالة $x^p f(x)$ حيث $p \in \mathbb{R}_+^*$ تملك نشر محدود بجوار 0 (أي $\lim\limits_{x\to 0} x^p f(x)$ موجودة) فإن

$$x^p f(x) = a_0 + a_1 x + \ a_2 x^2 \ldots + a_n x^n + O(x^n)$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{1}{x^p}(a_0 + a_1 x + \ a_2 x^2 \ldots + a_n x^n + O(x^n)\ )$$

العلاقة الأخيرة تسمى النشر المحدود المعمم للدالة f .

مثال1: أوجد النشر المحدود المعمم للدالة $f(x) = \frac{1}{ln(x+1)}$ حتى المرتبة $n = 2$ بجوار الصفر.

بما أن : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\ln(x+1)} = \infty$ فإن f لا تملك نشر محدود بجوار 0 و لكن لدينا:

$$\lim_{x\to 0} xf(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\ln(x+1)}{x}} = 1$$

و منه $xf(x)$ تملك نشر محدود بجوار 0، و نعلم أن النشر المحدود للمرتبة $n = 2$ بجوار الصفر لدالة ln هو :

$$ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^2)$$

و بالتالي نجد: $xf(x) = \frac{x}{x-\frac{1}{2}x^2+O(x^2)}$،

لنجري القسمة حسب القوى المتزايدة ل x على $x - \frac{1}{2}x^2$ فنجد

$$\begin{array}{r|l} x & x - \frac{1}{2}x^2 \\ \hline & 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 \\ -x + \frac{x^2}{2} & \\ \frac{x^2}{2} & \\ -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} & \\ \frac{x^3}{4} & \end{array}$$

و منه :

$$xf(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + O(x^2) \implies f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{x}O(x^2)$$

و هو النشر المعمم للدالة f حتى المرتبة 2

مثال2: أوجد النشر المعمم للدالة $f(x) = cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ حتى المرتبة $n = 4$ بجوار الصفر.

بما أن $\lim_{x\to 0} cotan(x) = \frac{1}{0} = \infty$، فإن f لا تملك نشر محدود بجوار 0 ، و نعلم أن النشر المحدود بجوار الصفر حتى المرتبة $n = 4$ لدالتين sin و cos هو :

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^5), \qquad cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^5)$$

و منه :

$$f(x) = cotan(x) = \frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}}{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}} \Longrightarrow xf(x) = \frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}}{1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} xf(x) = 1$$

و بالتالي : $xf(x)$ تملك نشر محدود بجوار 0 حتى المرتبة $n = 4$، إذن بإجراء القسمة حسب القوى المتزايدة للدالة $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ على $1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}$ نجد :

$$\begin{array}{l|l}
1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} & 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} \\
\hline
-1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} & 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 \\
-\frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{30} & \\
\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{18} + \frac{x^6}{360} & \\
-\frac{x^4}{45} + \frac{x^6}{360} &
\end{array}$$

و منه لدينا $xcotan(x) = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 + O(x^4)$ ، و بالتالي نجد :

$$cotan(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 + \frac{1}{x}O(x^4))$$

و هو النشر المحدود المعمم للدالة $cotan(x)$ حتى المرتبة 4 بجوار الصفر .

الفصل السادس

البنى الجبرية، الفضاءات الشعاعية و التطبيقات الخطية

- **البنى الجبرية الأساسية**
- **الفضاءات الشعاعية**
- **التطبيقات الخطية**

البنى الجبرية الأساسية، الفضاءات الشعاعية و التطبيقات الخطية

1. البنى الجبرية الأساسية (الزمرة، الحلقة و الحقل)

1-1. الزمرة:

تعريف: لتكن G مجموعة غير خالية مزودة بالعملية $*$.

- نقول أن الثنائية $(G,*)$ زمرة إذا تحققت الشروط التالية :

1. العملية * تكون قانون داخلي في G أي : $\forall, y \in G: x * y \in G$

2. العملية * تكون تجميعية بمعنى $\forall x, y, z \in G: (x * y) * z = x * (y * z)$

3. G تقبل عنصر حيادي بالنسبة للعملية * (نرمز له ب e) أي :

$$\forall x \in G \ \ \exists! e \in G : x * e = e * x = x$$

4. كل عنصر x من G يقبل عنصر نظير x^{-1} من G أي :

$$\forall x \in G \ \ \exists! \ x^{-1} \in G: \ x * \ x^{-1} = x^{-1} \ * x = e$$

تعريف: لتكن $(G,*)$ زمرة.

- نقول أن العملية * تبديلية إذا تحقق $\forall x, y \in G \ ; \ x * y = y * x$

- نقول أن $(G,*)$ زمرة تبديلية إذا كانت $(G,*)$ زمرة و * عملية تبديلية

أمثلة:

1. الثنائيات $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{Z}, +), (\mathbb{C}, +)$ هي زمر تبديلية

2. $(\mathbb{N}, +)$ ليست زمرة (لأنه مثلا العنصر2 لا يملك نظير في $\mathbb{N}$)

تمرين: لتكن المجموعة $G = \mathbb{R}$, نعرف في G العملية $*$ كمايلي:

$$\forall x, y \in G: x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

$(G,*)$ زمرة تبديلية لأن:

1. * عملية داخلية لأن: $\forall x,y \in \mathbb{R} \Longrightarrow x * y = \sqrt[3]{x^3+y^3} \in \mathbb{R}$

2. * عملية تبديلية لأن: $\forall x,y \in \mathbb{R}: x * y = \sqrt[3]{x^3+y^3} = \sqrt[3]{y^3+x^3} = y * x$

3. * عملية تجميعية لأن:

$$\forall x,y,z \in \mathbb{R}: (x * y) * z = \sqrt[3]{(x * y)^3 + z^3}$$

$$= \sqrt[3]{(\sqrt[3]{x^3+y^3}\,)^3 + z^3} = \sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}$$

و من جهة أخرى لدينا: $x * (y * z) = \sqrt[3]{x^3 + (\sqrt[3]{y^3+z^3}\,)^3} = \sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}$

و بالتالي : $(x * y) * z = x * (y * z)$

4. وجود العنصر الحيادي: $\forall x \in G\ \exists!\, e \in G: x * e = x$ و $e * x = x$

$$x * e = x \Longrightarrow \sqrt[3]{x^3+e^3} = x \Longrightarrow e = 0$$

و منه يوجد العنصر الحيادي و يساوي الصفر $(e = 0 \in G)$

5. وجود العنصر النظير: $\forall x \in G\ \exists!\, x^{-1} \in G: x * x^{-1} = 0$ و $x^{-1} * x = 0$

$$x * x^{-1} = 0 \Longrightarrow \sqrt[3]{x^3 + (x^{-1})^3} = 0 \Longrightarrow x^{-1} = -x$$

ومنه لكل عنصر $x \in G$ عنصر نظير هو $x^{-1} = -x \in G$.

الزمرة الجزئية: لتكن $(G,*)$ زمرة، $H \neq \Phi$ مجموعة جزئية غير خالية من G نقول أن $(H,*)$ زمرة جزئية من $(G,*)$ اذا كانت الثنائية $(H,*)$ زمرة بالنسبة للقانون * .

نظرية1: لتكن $(G,*)$ زمرة، $H \neq \Phi$ مجموعة جزئية غير خالية من G.

إن الشرط اللازم و الكافي لكي تكون $(H,*)$ زمرة جزئية من $(G,*)$ هو تحقق:

1. H مستقرة بالنسبة للعملية * أي: $\forall x,y \in H: x * y \in H$

2. H مستقرة بالنسبة للنظير أي: $x^{-1} \in H$ $\forall x \in H;$ (x^{-1} هو نظير x بالنسبة للعملية * في G)

نظرية2 : لتكن $(G,*)$ زمرة، $H \neq \Phi$ مجموعة جزئية غير خالية من G إذن

H زمرة جزئية من G هذا يكافئ $\forall x,y \in H;\ x * y^{-1} \in H$

مثال: لتكن $(\mathbb{C},+)$ زمرة و لتكن $H = \{a+ib\ ;\ a,b \in \mathbb{Z}\}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{C}$

أن $(H,+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{C},+)$ لأنه حسب النظرية 2 لدينا:

1. $H \neq \Phi$ لأن $0 \in H$ $(0 = 0 + i0)$

2. H مستقرة بالنسبة لعملية الجمع (+) و بالنسبة للنظير لأن:

$$\forall x \in H \Longrightarrow \exists a_1, b_1 \in \mathbb{Z};\quad x = a_1 + ib_1 \qquad (1)$$

$$\forall y \in H \Longrightarrow \exists a_2, b_2 \in \mathbb{Z};\quad y = a_2 + ib_2 \qquad (2)$$

من (1) و (2) نجد: $x - y = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\in\mathbb{Z}} + i\underbrace{(b_1 - b_2)}_{\in\mathbb{Z}}$

ومنه نستنتج أن: $x - y \in H$

تشاكل الزمر: لتكن $(G,*)$، $(H,\perp)$ زمرتين و $f:(G,*) \longrightarrow (H,\perp)$ تطبيق نقول أن f تماثل (أو تشاكل) زمر إذا تحقق: $\forall (x,y) \in G^2 : f(x*y) = f(x) \perp f(y)$

- إذا كان $G = H$ نقول عن f أنه تشاكل ذاتي.

مثال: ليكن التطبيق $\begin{matrix} f:(\mathbb{R}^2,+)\longrightarrow(\mathbb{R},+) \\ (x,y)\longrightarrow f(x,y)= x+y \end{matrix}$

التطبيق f تماثل من الزمرة $(\mathbb{R}^2,+)$ نحو الزمرة $(\mathbb{R},+)$ لأن :

$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$f\,[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)] = f(x_1+x_2, y_1+y_2)$$

$$= (x_1+x_2)+(y_1+y_2)$$

$$= (x_1+y_1)+(x_2+y_2)$$

$$= f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)$$

الصورة والنواة: ليكن التطبيق $f:(G,*) \longrightarrow (H,\perp)$ تشاكل، المجموعة

$$Im(f) = f(G) = \{f(x); x \in G\} Im(f) = \{y \in H;\ \exists x \in G : y = f(x)\}$$

تسمى صورة التشاكل

وبعبارة رياضية نكتب $\forall y \in Im(f) \Leftrightarrow \exists x \in G : y = f(x)$

والمجموعة $Ker(f) = \{x \in G\ ; f(x) = e_H\}$ تسمى نواة التشاكل (e_H نرمز به إلى العنصر الحيادي في الزمرة H بالنسبة للعملية $\perp$).

و بعبارة رياضية نكتب $\forall x \in Ker(f) \Leftrightarrow f(x) = e_H$

مثال: نعرف التطبيق: $\begin{matrix} f:(\mathbb{R},+)\longrightarrow(\mathbb{R}^*,\times) \\ x\longrightarrow f(x)=e^x \end{matrix}$

- أولا التطبيق f تشاكل من الزمرة $(\mathbb{R},+)$ نحو $(\mathbb{R}^*,\times)$ لأن :

$$\forall x,y \in \mathbb{R}: f(x+y) = e^{x+y} = e^x \times e^y = f(x) \times f(y)$$

- تعين صورة ونواة التطبيق f

$$Im(f) = \{f(x) \in \mathbb{R}^*;\ x \in \mathbb{R}\} = \{e^x;\ \ x \in \mathbb{R}\} =]0\ \ +\infty[$$

$$Ker(f) = \{x \in \mathbb{R};\ \ f(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R};\ e^x = 1\} = \{0\}$$

(1 هو العنصر الحيادي في $\mathbb{R}^*$ بالنسبة لعملية الضرب ($\times$))

2-1. الحلقة:

تعريف: لتكن A مجموعة غير خالية مزودة بالعمليتين الداخليتين $\oplus$ و $\otimes$.

- نقول أن الثلاثية $(A,\oplus,\otimes)$ حلقة إذا تحققت الشروط التالية:

1. $(A,\oplus)$ زمرة تبديلية
2. العملية الثانية $\otimes$ تجميعية أي : $\forall x,y,z \in A:\ x\otimes(y\otimes z) = (x\otimes y)\otimes z$
3. العملية الثانية $\otimes$ توزيعية على العملية الأولى $\oplus$ على اليمين و اليسار أي:

$$\forall x,y,z \in A: \begin{cases} x\otimes(y\oplus z) = (x\otimes y)\oplus(x\otimes z) \\ \text{و} \\ (y\oplus z)\otimes x = (y\otimes x)\oplus(z\otimes x) \end{cases}$$

العنصر الحيادي بالنسبة للعملية الأولى $\oplus$ نرمز له بالرمز 0_A و نظير أي عنصر $x \in A$ بالنسبة للعملية الثانية $\otimes$ نرمز له بالرمز x^{-1} و العنصر الحيادي بالنسبة للعملية الثانية $\otimes$ نرمز له بالرمز 1_A.

حالات خاصة:

1. إذا كانت الحلقة $(A,\oplus,\otimes)$ تقبل عنصر حيادي بالنسبة للعملية الثانية $\otimes$ أي:

$$\forall x \in A\ \exists!\ 1_A \in A: x\otimes 1_A = 1_A \otimes x = x$$

الحلقة في هذه الحالة تسمى **حلقة واحدية.**

2. إذا كانت العملية الثانية $\otimes$ تبديلية أي: $\forall x,y \in A: x\otimes y = y \otimes x$

- نقول أن الحلقة $(A,\oplus,\otimes)$ تبديلية.

3. نقول عن الحلقة $(A,\oplus,\otimes)$ أنها تامة إذا كانت واحدية، تبديلية و تحقق:

$$\forall (a,b)\in A^2: a\otimes b=0_A \Longrightarrow a=0_A \text{ أو } b=0_A$$

نظرية: لتكن $(A,+,\times)$ حلقة فانه لدينا:

1. $\forall a\in A:\ 0_A\times a=a\times 0_A=0_A$
2. $\forall a,b\in A: a\times(-b)=(-a)\times b=-(a\times b)$
3. $\forall a,b,c\in A:\ a\times(b-c)=(a\times b)-(a\times c)$
4. لتكن $(A,+,\times)$ حلقة تبديلية فإنه لدينا

$$\forall a,b\in A,\forall n\in\mathbb{N}^*: (a+b)^n=\sum_{k=1}^{n} C_n^k a^{n-k}\times b^k$$

$$\forall a,b\in A,\forall n\in\mathbb{N}^*: a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}\,b^k$$

أمثلة:

1. $(\mathbb{Z},+,\times),(\mathbb{Q},+,\times),(\mathbb{R},+,\times)$ و$(\mathbb{C},+,\times)$ حلقات تبديلية
2. $(\mathbb{Z}^*,+,\times),(\mathbb{Q}^*,+,\times),(\mathbb{R}^*,+,\times)$ و$(\mathbb{C}^*,+,\times)$ ليست حلقات

لأن $(\mathbb{Z}^*,+),(\mathbb{Q}^*,+),(\mathbb{R}^*,+),(\mathbb{C}^*,+)$ ليست زمر و ذلك لعدم وجود العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الجمع (+) (0 لا ينتمي الى $\mathbb{Z}^*,\mathbb{Q}^*,\mathbb{R}^*,\mathbb{C}^*$)

3. $(\mathbb{N},+,\times)$ ليست حلقة لأن $(\mathbb{N},+)$ ليست زمرة (عدم وجود العنصر النظير)

تمرين: لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، نعرف في G العملية $\times$ كمايلي :

$$\forall x,y\in G: x\times y=0$$

إن $(G,+,\times)$ حلقة تبديلية لأن : 1. $(G,+)$ زمرة تبديلية من المعطيات

2. العملية $\times$ داخلية وتبديلية لأن: $\forall x,y\in G \Longrightarrow x\times y=y\times x=0\in G$
وكذلك العملية $\times$ تجميعية لأن :

$$\forall x,y,z\in G:\begin{cases}x\times(y\times z)=x\times 0=0\\(x\times y)\times z=0\times z=0\end{cases}\Longrightarrow x\times(y\times z)=(x\times y)\times z$$

3. العملية $\times$ توزيعية على $+$ لأن:

$$\forall x,y,z \in G: \begin{cases} x \times (y+z) = 0\,, & (x \times y) + (x \times z) = 0 + 0 = 0 \\ (y+z) \times x = 0, & (y \times x) + (z \times x) = 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \times (y+z) = (x \times y) + (x \times z) \\ (y+z) \times x = (y \times x) + (z \times x) \end{cases}$$

الحلقة الجزئية: لتكن$(A,\oplus,\otimes)$ حلقة ولتكن B مجموعة جزئية غير خالية من A

- نقول أن $(B,\oplus,\otimes)$ حلقة جزئية من $(A,\oplus,\otimes)$ اذا كانت $(B,\oplus,\otimes)$ حلقة

نظرية1: لتكن$(A,\oplus,\otimes)$ حلقة ولتكن B مجموعة جزئية غير خالية من A ، $(B,\oplus,\otimes)$ حلقة جزئية من $(A,\oplus,\otimes)$ اذا تحققت الشروط:

1. $(A,\oplus)$ زمرة جزئية من $(B,\oplus)$

2. الإستقرار بالنسبة للعملية الثانية $\otimes$ أي : $\forall x,y \in B:\ x \otimes y \in B$

ملاحظة: A و $\{0_A\}$ حلقتين جزئيتين من الحلقة $(A,\oplus,\otimes)$.

مثال: $(\mathbb{Q},+,\times)$ حلقة جزئية من الحلقة $(\mathbb{R},+,\times)$

3-1. الحقل:

تعريف: لتكن $(K,\oplus,\otimes)$ حلقة (نرمز ب 0_K للعنصر الحيادي بالنسبة للعملية الأولى $\oplus$ و ب 1_K للعنصر الحيادي بالنسبة للعملية الثانية $\otimes$)

- نقول أن $(K,\oplus,\otimes)$ حقل اذا كان كل عنصر $x \in K - \{0_K\}$ قابل للقلب أي:

$$\forall x \in K - \{0_K\}\ \exists y \in K - \{0_K\} : x \otimes y = y \otimes x = 1_K$$

بمعنى أخر: $(K,\oplus,\otimes)$ حقل هذا يكافئ

$$\begin{cases} 1. \text{ حلقة } (K,\oplus,\otimes) \\ 2.\ \forall x \in K - \{0_K\}\ \exists y \in K - \{0_K\}: x \otimes y = y \otimes x = 1_K \end{cases}$$

أمثلة:

1. $(\mathbb{C},+,\times),(\mathbb{R},+,\times),(\mathbb{Q},+,\times)$ هي حقول،

2. $(\mathbb{Z},+,\times)$ ليست حقل لأن مثلا $2 \in \mathbb{Z}$ غير قابل للقلب في $\mathbb{Z}$،

3. $(\mathbb{C}^*,+,\times),(\mathbb{R}^*,+,\times),(\mathbb{Q}^*,+,\times)$ ليست حقول لأنها ليست حلقات.

الحقل الجزئي: ليكن $(K,\oplus,\otimes)$ حقل ولتكن L مجموعة جزئية غير خالية من K

$(L,\oplus,\otimes)$ حقل جزئي من $(K,\oplus,\otimes)$ إذا تحققت الشروط :

$$\begin{cases}1.\ (K,\oplus,\otimes) \text{ حلقة جزئية من } (L,\oplus,\otimes)\\ 2.\ \forall a\in L-\{0_K\}\Longrightarrow b\in L-\{0_K\}\ \ (b \text{ هو مقلوب } a \text{ في } L)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1.\forall(a,b)\in L^2\Longrightarrow a\oplus b^{-1}\in L \quad (b^{-1} \text{ هو نظير } b \text{ بالنسبة للعملية } \oplus)\\ 2.\forall(a,b)\in L^2\Longrightarrow a\otimes b\in L\\ 3.\forall a\in L-\{0_K\}\Longrightarrow c\in L-\{0_K\}\ \ (c \text{ هو مقلوب } a \text{ في } L)\end{cases}$$

مثال: $(\mathbb{R},+,\times)$ حقل جزئي من الحقل $(\mathbb{C},+,\times)$.

تمرين: ليكن $(\mathbb{R},+,\times)$ حقل الأعداد الحقيقية بالنسبة لعمليتي الجمع و الضرب العاديتين و لتكن المجموعة

$$F=\{x+y\sqrt{2}\ \ ;\ \ x,y\in\mathbb{Q}\}$$

- بين أن $(F,+,\times)$ حقل جزئي من الحقل $(\mathbb{R},+,\times)$.

الحل: مما سبق لدينا $(F,+,\times)$ حقل جزئي من $(\mathbb{R},+,\times)$ $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}1.\ F\neq\Phi\\ 2.\ \forall(a,b)\in F^2\Longrightarrow a-b\in F\\ 3.\ \forall(a,b)\in F\times F^*\Longrightarrow a\times b^{-1}\in F\end{cases}$$

1. $F\neq\Phi$ لأن: $0=0+0\sqrt{2}\in F$

2. ليكن $x_1\text{، }y_1\text{، }x_2\text{، }y_2\in\mathbb{Q}$ بحيث $a=x_1+y_1\sqrt{2}\in F$ و $b=x_2+y_2\sqrt{2}\in F$

و بالتالي : $a-b=\underbrace{(x_1-x_2)}_{\in\mathbb{Q}}+\underbrace{(y_1-y_2)}_{\in\mathbb{Q}}\sqrt{2}\in F$

3. ليكن :

$$\begin{cases}a=x_1+y_1\sqrt{2}\in F\ ,\quad x_1\text{و}y_1\in\mathbb{Q}\\ b=x_2+y_2\sqrt{2}\in F^*\ ,(x_2,y_2\ )\in\mathbb{Q}^*\times\mathbb{Q}\ \text{أو}\ (x_2,y_2)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}^*\end{cases}$$

$$\Rightarrow ab^{-1}=\underbrace{(\frac{x_1x_2-2y_1y_2}{x_2^2-2y_2^2})}_{\in\mathbb{Q}}+\underbrace{(\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2-2y_2^2})}_{\in\mathbb{Q}}\sqrt{2}\in F$$

و بالتالي : $(F,+,\times)$ حقل جزئي من $(\mathbb{R},+,\times)$.

2. الفضاءات الشعاعية :

الفضاءات الشعاعية (ف ش):

تعريف: لتكن مجموعة غير خالية و ليكن $(K,+,\times)$ حقلا.

- نقول أن V ف ش على الحقل $(K,+,\times)$ إذا تحقق الشرطان التاليان:

1. إذا كانت المجموعة V مزودة بالعملية $\oplus$ زمرة تبديلية ($(V,\oplus)$ زمرة تبديلية)
2. إذا وجد تطبيق معرف من الجداء الديكارتي $K \times V$ نحو : $\begin{matrix} K\times V\to V \\ (\alpha,v)\to\alpha\otimes v \end{matrix}$

يحقق الشروط التالية (نسمي هذه الشروط بشروط الضرب):

أ. $\forall v \in V: 1_K\otimes v = v$ (1_K يمثل العنصر الحيادي بالنسبة للعملية الثانية في الحقل K)

ب. $\forall (v_1,v_2) \in V^2, \forall \alpha \in K: \alpha\otimes(v_1 \oplus v_2) = (\alpha\otimes v_1)\oplus(\alpha\otimes v_2)$

ج. $\forall v \in V, \forall \alpha,\beta \in K: \ (\alpha+\beta)\otimes v = (\alpha\otimes v)\oplus(\beta\otimes v)$

د. $\forall v \in V, \forall \alpha,\beta \in K: (\alpha\times\beta)\otimes v = \alpha\otimes(\beta\otimes v)$

قواعد الحساب في الفضاء الشعاعي:

ليكن $(V,\oplus,\otimes)$ ف ش على الحقل $(K,+,\times)$

1. $\forall v \in V: 0_V\otimes v = 0_V$
2. $\forall \alpha \in K: \alpha\otimes 0_V = 0_V$
3. $\forall v \in V, \forall \alpha \in K: \alpha\otimes V = 0_V \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0_K \\ \text{أو} \\ v = 0_V \end{cases}$
4. $\forall v_1,v_2,v_3 \in V: v_1\oplus v_3 = v_2\oplus v_3 \Longrightarrow v_1 = v_2$
5. $\forall v \in V, \forall \alpha \in K: \alpha^{-1}\otimes v = \alpha\otimes v^{-1} = (\alpha\otimes v)^{-1}$
6. $\forall v_1,v_2 \in V, \forall \alpha \in K: \alpha\otimes(\ v_1 \oplus v_2^{-1}) = \alpha\otimes v_1\oplus(\alpha\otimes v_2)^{-1}$
7. $\forall v \in V, \forall \alpha,\beta \in K: (\alpha+\beta^{-1})\otimes v = (\alpha\otimes v)\oplus(\beta\otimes v)^{-1}$

(α^{-1} هو نظير α في الزمرة $(K,+)$ و v^{-1} هو نظير v، $(\alpha\otimes v)^{-1}$ هو نظير $\alpha\otimes v$ و $(\beta\otimes v)^{-1}$ هو نظير $\beta\otimes v$ في الزمرة $(V,\oplus)$).

ملاحظات:

1. عناصر V تسمى أشعة و عناصر K تسمى سلميات

2. الفضاء الشعاعي V يمكن كتابته على الشكل $(V,\oplus,\otimes)$

تمرين1: (دراسة الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ على الحقل $\mathbb{R}$)

نعرف العملية $\oplus$ في $\mathbb{R}^2$ بمايلي:

$\forall(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2,\forall(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$:

$$(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$

و نعرف التطبيق: $\begin{matrix} f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \\ (\alpha,(x,y))\to\alpha\otimes(x,y)=(\alpha\,x,\alpha\,y)\end{matrix}$

هل $\mathbb{R}^2$ هو فضاء شعاعي على الحقل $(\mathbb{R},+,\times)$ ؟

1. أولا نبين أن $(\mathbb{R}^2,\oplus)$ زمرة تبديلية:

أ. $\oplus$ عملية تجميعية لأن :

$\forall(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2,\forall(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2,\forall(x_3,y_3)\in\mathbb{R}^2$:

$$[(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)]\oplus(x_3,y_3)=(x_1+x_2\,,y_1+y_2)\oplus(x_3,y_3)$$
$$=\big((x_1+x_2)+x_3,(y_1+y_2)+y_3\big)$$
$$=\big(x_1+(x_2+x_3),y_1+(y_2+y_3)\big)$$
$$=(x_1,y_1)\oplus(x_2+x_3,y_2+y_3)$$
$$=(x_1,y_1)\oplus[(x_2,y_2)\oplus(x_3,y_3]$$

ب. $\oplus$ عملية تبديلية لأن :

$:\forall(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2,\forall(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$

$$(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)=(x_1+x_2\,,y_1+y_2)=(x_2+x_1\,,y_2+y_1)$$
$$=(x_2,y_2)\oplus(x_1,y_1)$$

ج. هل يوجد العنصر الحيادي ؟

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\exists!\,e=(e_1,e_2)\in\mathbb{R}^2:\begin{cases}(x,y)\oplus(e_1,e_2)=(x,y)\\ \text{و}\\ (e_1,e_2)\oplus(x,y)=(x,y)\end{cases}?$$

بما أن العملية $\oplus$ تبديلية إذن يكفي إستعمال معادلة واحدة للبحث عن العنصر الحيادي (e_1,e_2) من $\mathbb{R}^2$:

$$(x,y)\oplus(e_1,e_2)=(x,y)\Longrightarrow(x+e_1,y+e_2)=(x,y)$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}x+e_1=x\\y+e_2=y\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}e_1=0\\e_2=0\end{cases}$$

ومنه العنصر الحيادي موجود و يساوي $(e_1,e_2)=(0,0)$

د. هل لكل عنصر نظير في $\mathbb{R}^2$ ؟

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\exists!\,(x^{-1},y^{-1})\in\mathbb{R}^2:$$

$$\begin{cases}(x,y)\oplus(x^{-1},y^{-1})=(e_1,e_2)=(0,0)\\\qquad\qquad\text{و}\qquad\qquad\\(x^{-1},y^{-1})\oplus(x,y)=(e_1,e_2)=(0,0)\end{cases}?$$

بما أن العملية $\oplus$ تبديلية إذن يكفي إستعمال معادلة واحدة للبحث عن العنصر النظير (x^{-1},y^{-1}) من $\mathbb{R}^2$.

$$(x,y)\oplus(x^{-1},y^{-1})=(e_1,e_2)\Longrightarrow(x+x^{-1},y+y^{-1})=(0,0)$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}x+x^{-1}=0\\y+y^{-1}=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x^{-1}=-x\\y^{-1}=-y\end{cases}$$

إذن لكل عنصر (x,y) من $\mathbb{R}^2$ نظير يساوي $(x^{-1},y^{-1})=(-x,-y)$ من $\mathbb{R}^2$.

ومنه جميع الشروط أ)، ب)، ج) و د) محققة إذن $(\mathbb{R}^2,\oplus)$ زمرة تبديلية.

2. ثانيا التحقق من شروط الضرب:

$a.\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1_{\mathbb{R}}\otimes(x,y)=(x,y)$?

$$1_{\mathbb{R}}\otimes(x,y)=(1\times x,1\times y)=(x,y)$$

$b.\ \forall(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2,\forall(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2,\forall\alpha\in\mathbb{R}$:

$$\alpha\otimes((x_1,y_2)\oplus(x_2,y_2))=\alpha\otimes(x_1,y_1)\oplus\alpha\otimes(x_2,y_2)\quad?$$

$$\alpha\otimes\big((x_1,y_2)\oplus(x_2,y_2)\big)=\alpha\otimes(x_1+x_2,y_1+y_2)$$

$$=\big(\alpha\times(x_1+x_2),\alpha\times(y_1+y_2)\big)$$

$$=(\alpha\times x_1+\alpha\times x_2,\alpha\times y_1+\alpha\times y_2)$$

$$=(\alpha\times x_1,\alpha\times y_1)\oplus(\alpha\times x_2,\alpha\times y_2)$$

$$=\alpha\otimes(x_1,y_1)\oplus\otimes(x_2,y_2)$$

$c.\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}:(\alpha\times\beta)\otimes(x,y)=\alpha\otimes(\beta\otimes(x,y))$?

$$(\alpha\times\beta)\otimes(x,y)=\big((\alpha\times\beta)\times x,(\alpha\times\beta)\times y\big)=\big(\alpha\times(\beta\times x),\alpha\times(\beta\times y)\big)$$

$$=\alpha\otimes(\beta\otimes(x,y)$$

$d.\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}:\ \ (\alpha+\beta)\otimes(x,y)=\alpha\otimes(x,y)\oplus\beta\otimes(x,y)$?

$$(\alpha+\beta)\otimes(x,y)=\big((\alpha+\beta)\times x,(\alpha+\beta)\times y\big)=(\alpha x+\beta x,\alpha y+\beta y)$$

$$=(\alpha x,\alpha y)\oplus(\beta x,\beta y)=\alpha\otimes(x,y)\oplus\beta\otimes(x,y)$$

كذلك جميع شروط الضرب محققة و بالتالي: $\mathbb{R}^2$ ف ش على الحقل $\mathbb{R}$

تمرين2 : هل $\mathbb{R}^2$ هو فضاء شعاعي على الحقل $(\mathbb{R},+,\times)$ ؟

حيث $\mathbb{R}^2$ مزودة بالعمليتين $\oplus$ و $\otimes$ المعرفتين كمايلي:

$$\begin{cases}\forall(x_1,y_1),\forall(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2:(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)\\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\forall\alpha\in\mathbb{R}:\alpha\otimes(x,y)=(\alpha x,0)\end{cases}$$

$\mathbb{R}^2$ ليس ف ش على الحقل $\mathbb{R}$ لأن الشرط أ) من شروط الضرب غير محقق

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2:1\otimes(x,y)=(1\times x,0)\neq(x,y)$$

مثال مضاد: $1\otimes(2,1)=(1\times2,0)=(2,0)\neq(2,1)$

الفضاء الشعاعي الجزئي (ف ش ج):

ليكن $(V,\oplus,\otimes)$ ف ش على الحقل $(K,+,\times)$ ولتكن w مجموعة جزئية غير خالية من V.

- نقول أن w ف ش ج من V إذا كان $(w,\oplus,\otimes)$ ف ش على الحقل K.

قضية: ليكن $(V,\oplus,\otimes)$ ف ش على الحقل $(K,+,\times)$ ولتكن w مجموعة جزئية من V .

إذن w ف ش ج من V إذا تحققت الشروط التالية:

$$\begin{cases}1.\ w\neq\Phi\\ 2.\ \ \forall X,Y\in w:X\oplus Y\in w\\ 3.\ \forall X\in w,\forall\alpha\in w:\alpha\otimes X\in w\end{cases}$$

مثال1: لتكن المجموعة $w=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ \ x+y=0\}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$.

w ف ش ج من $(\mathbb{R}^2,+,\times)$ على الحقل $\mathbb{R}$ لأن:

1. $(0,0) \in w$ لأن $0+0=0$ ومنه $w \neq \Phi$

2. $\forall X=(x,y) \in w, \forall Y=(z,t) \in w \Longrightarrow X+Y \in w$?

لدينا من المعطيات:

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in w \Longrightarrow x+y=0 & (1) \\ \forall (z,t) \in w \Longrightarrow z+t=0 & (2) \end{cases}$$

إذن $(x,y)+(z,t)=(x+z,y+t) \in w$ لأن:

$$(x+z)+(y+t)=\underbrace{(x+y)}_{(1)=0}+\underbrace{(z+t)}_{(2)=0}=0+0=0$$

و بالتالي : $X+Y \in w$

3. $\forall X=(x,y) \in w, \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \otimes (x,y)=(\alpha \times x, \alpha \times y) \in w$?

$(\alpha \times x, \alpha \times y) \in w$ لأن $\alpha \times x+\alpha \times y=\alpha \times \underbrace{(x+y)}_{(1)=0}=\alpha \times 0=0$

و بالتالي : $\alpha \otimes (x,y)=(\alpha \times x, \alpha \times y) \in w$

ملاحظة: الشرط (1) و (2) في القضية السابقة يكافئ الشرط

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall X, Y \in w: (\alpha \otimes X) \oplus (\beta \otimes Y) \in w$$

نأخذ المثال السابق:

$\alpha \times (x,y)+\beta \times (z,t)=(\alpha \times x+\beta \times z, \alpha \times y+\beta \times t) \in w$ لأن:

$$(\alpha \times x+\beta \times z)+(\alpha \times y+\beta \times t)=\alpha \times \underbrace{(x+y)}_{(1)=0}+\beta \times \underbrace{(z+t)}_{(2)=0}=0$$

وبالتالي : $\alpha \times X+\beta \times Y \in w$

ملاحظات:

1. w ف ش ج من $(V,\oplus,\otimes)$ $\Longleftarrow$ $0_V \in w$ (0_V العنصر الحيادي بالنسبة للعملية الأولى$\oplus$ في V)
2. w ليس ف ش ج من V . $\Longleftarrow 0_V \notin w$
3. 0_V و V فضائيين شعاعيين جزئيين من V على الحقل K .

مثال : لتكن $w=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x+y+z=1\}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^3$ نلاحظ أن $(0,0,0) \notin w$ لأن $0+0+0 \neq 1$ ومنه w ليست ف ش ج من ف ش $(\mathbb{R}^3,+,\times)$ على الحقل $\mathbb{R}$.

قضية: ليكن V ف ش على الحقل $(K,+,\times)$.

اذا كان w_1 و w_2 فضاءان شعاعيان جزئيان من V فإن :

1. $w_1 \cap w_2$ ف ش ج من V و لدينا : $w_1 \cap w_2 = \{v \in V; v \in w_1 et\ v \in w_2\}$

2. $w_1 + w_2$ ف ش ج من V و لدينا :

$$w_1 + w_2 = \{v_1 + v_2 \in V;\quad v_1 \in w_1\ et\ v_2 \in w_2\}$$

مثال: $w_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2; x + y = 0 \right\}$ و $w_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2; 2x + y = 0 \right\}$

ف ش ج من $(\mathbb{R}^2,+,\times)$ على الحقل $\mathbb{R}$ (يمكن التأكد من ذلك بسهولة) ومنه حسب القضية السابقة $w_1 \cap w_2$ و $w_1 + w_2$ ف ش ج من $\mathbb{R}^2$ و لدينا:

$$w_1 \cap w_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x,y) \in w_1 et\ (x,y) \in w_2\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0 \quad و \quad 2x + y = 0\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0 \text{ و } y = 0\} = \{(0,0)\}$$

$$w_1 + w_2 = \{((x,y) + (z,t)) \in \mathbb{R}^2;\ (x,y) \in w_1 \text{ و } (z,t) \in w_2\}$$

$$= \{(x + z, y + t) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0 \quad و \quad 2z + t = 0\}$$

$$= \{(x + z, y + t) \in \mathbb{R}^2; y = -x \quad و \quad t = -2z \quad \}$$

$$= \{(x + z, -x - 2z);\quad x,z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$

ملاحظة: $w_1 \cup w_2$ ليس ف ش ج من ف ش V على الحقل K عموما

مثال: $w_1 = \{(x,0);\quad x \in \mathbb{R}\}$ و $w_2 = \{(0,y);\quad y \in \mathbb{R}\}$ فضائيين شعاعيين جزئيين من ف ش $\mathbb{R}^2$ على الحقل $\mathbb{R}$ لكن $w_1 \cup w_2$ ليس ف ش ج من $\mathbb{R}^2$

لأنه لدينا مثلا $(1,0) \in w_1$ ومنه نستنتج أن $(1,0) \in w_1 \cup w_2$ و $(0,1) \in w_2$ و منه

نستنتج أن $(0,1) \in w_1 \cup w_2$ لكن $(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin w_1 \cup w_2$

ملاحظة: إذا كان V_1 و V_2 فضائيين شعاعيين على الحقل K فإن $V_2 \times V_2$ ف ش على الحقل K .

الجمع المباشر:

تعريف: ليكن V ف ش على الحقل K و w_1 ، w_2 ف ش ج من V، نقول أن V هو مجموع مباشر للمجموعتين w_1 و w_2 إذا تحقق الشرطان: $\begin{cases} 1.\ V = w_1 + w_2 \\ 2.\ w_1 \cap w_2 = \{0_V\} \end{cases}$

و نكتب : $V = w_1 \oplus w_2$

مثال1: (نأخذ المثال السابق) لدينا مما سبق $\begin{cases} 1.\ w_1 + w_2 = \mathbb{R}^2 \\ 2.\ w_1 \cap w_2 = \{(0,0)\} \end{cases}$

إذن $\mathbb{R}^2$ هو مجموع مباشر للمجموعتين w_1 و w_2.

مثال2 : $V = \mathbb{R}^2$ ف ش على الحقل $\mathbb{R}$، و ليكن $w_1 = \{(x,0);\ x \in \mathbb{R}\}$ ف ش ج من $\mathbb{R}^2$ و $w_2 = \{(0,y);\ y \in \mathbb{R}\}$ ف ش ج من $\mathbb{R}^2$.

لدينا: $\forall v \in \mathbb{R}^2 : v = (x,y) = \underbrace{(x,0)}_{\in w_1} + \underbrace{(0,y)}_{\in w_2}$ و بالتالي: $\mathbb{R}^2 = w_1 + w_2$

أو لدينا بطريقة أخرى :

$$w_1 + w_2 = \{((x,y) + (z,t)) \in \mathbb{R}^2;\ (x,y) \in w_1 \text{ و } (z,t) \in w_2\}$$

$$(1)\quad \begin{cases} (x,y) \in w_1 \Longrightarrow x \in \mathbb{R} \ et\ y = 0 \\ et \\ (z,t) \in w_2 \Longrightarrow z = 0 \ et\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

و بالتالي نجد: $w_1 + w_2 = \{(x,t);\quad x,t \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$

من جهة أخرى لدينا:

$$w_1 \cap w_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x,y) \in w_1 \text{ و } (x,y) \in w_2\}$$

و بإستعمال (1) نجد :

$$w_1 \cap w_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = 0 \ et\ x = 0\} = \{(0,0)\}$$

ومنه نستنتج أن: $w_1 \oplus w_2 = \mathbb{R}^2$

الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بواسطة مجموعة من الأشعة:

تعريف: ليكن V ف ش على الحقل K و $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعة منتهية من أشعة V .

- نسمي الفضاء ش ج المولد بواسطة الأشعة $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ الفضاء الشعاعي الجزئي $\{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n\ ;\quad \alpha_i \in K\}$ وهو أصغر (بمفهوم الإحتواء) ف ش ج يحوي $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ و نرمزله بالرمز $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$.

العبارة الخطية:ليكن V ف ش على الحقل K و $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعة منتهية من أشعة V

- نسمي عبارة خطية للأشعة $v_1, v_2, \dots, v_n$ كل عبارة من الشكل :

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \ ; \quad \alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n \in K$$

مثال: لتكن الأشعة $v_1 = (0,0,1), v_2 = (0,1,2), v_3 = (0,1,3)$ من $\mathbb{R}^3$،

أكتب v_3 على شكل عبارة خطية للشعاعين v_1 و v_2 .

نبحث عن α_1 و α_2 من $\mathbb{R}$ بحيث: $v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

$$(0,1,3) = \alpha_1(0,0,1) + \alpha_2(0,1,2) \Longrightarrow \begin{cases} 1 = 0 + \alpha_2 \\ 3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \end{cases} \qquad (1)$$

بحل الجملة (1) نجد $\alpha_1 = 1$ و $\alpha_2 = 1$ ، و بالتالي : $v_3 = v_1 + v_2$

نظرية: ليكن V ف ش على الحقل K و $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعة منتهية من أشعة V .

- مجموعة جميع العبارات الخطية للإشعة $v_1, v_2, \dots, v_n$ تشكل ف ش ج من V و هو الفضاء ش ج المولد بواسطة $v_1, v_2, \dots, v_n$ أي أن :

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \ ; \quad \alpha_i \in K\}$$

ملاحظات: 1. واضح أن $v_1, v_2, \dots, v_n \in \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ لأن:

$$\begin{cases} v_1 = 1 \times v_1 + 0 \times v_2 + \cdots + 0 \times v_n \\ v_2 = 0 \times v_1 + 1 \times v_2 + \cdots + 0 \times v_n \\ . \\ . \\ \\ v_n = 0 \times v_1 + 0 \times v_2 + \cdots + 1 \times v_n \end{cases}$$

2. إذا كان $w_1 = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ و $w_2 = \langle \grave{v_1}, \grave{v_2}, \dots, \grave{v_n} \rangle$ فإن :

$$w_1 = w_2 \Leftrightarrow v_1, v_2, \dots, v_n \in w_2 \ et \ \grave{v_1}, \grave{v_2}, \dots, \grave{v_n} \in w_1$$

مثال1: نأخذ $V = \mathbb{R}^n$ ف ش على الحقل $\mathbb{R}$ إذن :

$$\forall v \in V \Longrightarrow v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$= (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, 0, .. 0) + \cdots + (0,0, \dots, x_n)$$

$$= x_1 \underbrace{(1,0, \dots, 0)}_{=e_1} + x_2 \underbrace{(0,1,0, \dots, 0)}_{=e_2} + x_n \underbrace{(0,0, \dots, 1)}_{=e_n}$$

و منه : $v = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$ ، إذن نستنتج أن : $\mathbb{R}^n = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$.

مثال2: نأخذ $V = \mathbb{R}_n[x] = \{p(x);\ d^\circ p \leq n\}$ ، ($\mathbb{R}_n[x]$ ترمز إلى مجموعة فضاء كثيرات الحدود من الدرجة أقل أو تساوي n) إذن:

$$\forall v \in V \Longrightarrow v = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n;\quad a_i \in \mathbb{R}$$

و بالتالي : $\mathbb{R}_n[x] = \langle 1, x, x^2, \dots, x^n \rangle$

مثال3: نأخذ $w = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = y\}$ ف ش ج من $\mathbb{R}^2$، لدينا

$$w = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = y\} = \{(x,x);\ \ x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1);\ \in \mathbb{R}\}$$

إذن نستنتج أن : $w = \langle (1,1) \rangle$

مثال4: (توليد فضاء ش ج بواسطة مجموعة من الأشعة ليس وحيد)

$w = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; -2x + 3y + z = 0\}$ ف ش ج من $\mathbb{R}^3$.

بين أن: $w = \langle \left(\frac{3}{2}, 1,0\right), \left(\frac{1}{2}, 0,1\right) \rangle$ ، $w = \langle (1, \frac{2}{3}, 0)), (0\, \frac{-1}{3}, 1)\ \rangle$

و $w = \langle (1,0,2), (0,1,-3) \rangle$.

الحل:

$$w = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ -2x + 3y + z = 0\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z\right\}$$

$$= \left\{\left(\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z, y, z\right);\ \ y,z \in \mathbb{R}\right\} = \left\{y\left(\frac{3}{2}, 1,0\right) + z\left(\frac{1}{2}, 0,1\right);\ \ y,z \in \mathbb{R}\right\}$$

ومنه نستنتج أن: w مولدة بواسطة الجملة $\left\{\left(\frac{3}{2}, 1,0\right), \left(\frac{1}{2}, 0,1\right)\right\}$ أي:

$$w = \langle \left(\frac{3}{2}, 1,0\right), \left(\frac{1}{2}, 0,1\right) \rangle$$

من جهة أخرى لدينا:

$$w = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}z\right\}$$

$$= \left\{\left(x, \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}z, z\right); x,z \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x\left(1, \frac{2}{3}, 0\right) + z\left(0, -\frac{1}{3}, 1\right);\ x,z \in \mathbb{R}\right\}$$

ومنه نستنتج أن : $w = \langle \left(1, \frac{2}{3}, 0\right), \left(0, -\frac{1}{3}, 1\right) \rangle$

وأخيرا لدينا:

$$w = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = 2x - 3y\}$$

$$= \{(x,y,2x-3y);\ \ x,y \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,2) + y(0,1,-3);\quad x,y \in \mathbb{R}\}$$

ومنه نستنتج أن : $w = \langle (1,0,2), (0,1,-3) \rangle$

الإستقلال و الإرتباط الخطي:

ليكن V ف ش على الحقل و $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعة منتهية من أشعة V .

تعريفات:

1. نقول عن الأشعة $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ أنها مستقلة خطيا (أو حرة) إذا تحقق:

$\forall \alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n \in K$:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0_K$$

2. نقول عن الأشعة $\{v_1, \dots, v_n\}$ أنها مرتبطة خطيا (أو مقيدة) اذا كانت ليست مستقلة خطيا أي

$\exists \alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n \in K$ (ليست معدومة كلها): $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V$

بعبارة أخرى: الأشعة $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مرتبطة خطيا إذا أمكن كتابة أحد هذه الأشعة بدلالة الأخرى (كتابة شعاع على شكل مزج خطي لبقية الأشعة).

ملاحظات: 1. في الفضاء الشعاعي V، الشعاع 0_V ليس مستقل خطيا لأن:

$\alpha 0_V = 0_V \nRightarrow \alpha = 0_K$ عموما

2. في الفضاء الشعاعي V، لدينا الأشعة $\{0_V, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مرتبطة خطيا لأن:

$1.0 + 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n = 0_V \Longrightarrow 1 = 0$ (هذا مستحيل)

3. كل شعاع وحيد غير معدوم هو مستقل خطيا

أمثلة: 1. هل الجملة $\{v = (1,1), w = (1,-1)\}$ مستقلة خطيا ؟

لتكن α, β من $\mathbb{R}$ بحيث: $\alpha v + \beta w = (0,0)$

$$\alpha(1,1) + \beta(1,-1) = (0,0) \Longrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \quad (1)$$

بحل الجملة (1) نجد $\beta = 0$ و $\alpha = 0$ و بالتالي: الجملة $\{v, w\}$ مستقلة خطيا.

2. هل الجملة $\{v = (1,1),\ w = (2,2)\}$ مستقلة خطيا ؟

لتكن α, β من $\mathbb{R}$ بحيث: $\alpha v + \beta w = (0,0)$

$$\alpha(1,1) + \beta(2,2) = (0,0) \Longrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \quad (2)$$

للجملة (2) عدد غير منته من الحلول (مثلا (1- ,2) حل للجملة (2)) و بالتالي الجملة

$\{v = (1,1), w = (2,2)\}$ ليست مستقلة خطيا إذن فهي مرتبطة خطيا .

(أو يمكن أن نلاحظ مباشرة أن : $v = 2w$)

الأساس و البعد:

ليكن V ف ش على الحقل K و $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعة منتهية من أشعة V .

- نقول أن A تشكل أساس للفضاء الشعاعي V إذا تحقق الشرطان:

1. إذا كانت A مستقلة خطيا فإن :

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n \in K: \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V \Longrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0_K$$

2. إذا كانت A تولد الفضاء الشعاعي V فإن :

$$\forall v \in V \Longrightarrow v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \ ; \quad \alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n \in K$$

(كل شعاع من V يكتب على شكل مزج خطي للأشعة $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$)

أمثلة: 1. نأخذ $V = \mathbb{R}^n$ ف ش على الحقل $\mathbb{R}$ لقد رأينا سابقا أن:
$\mathbb{R}^n = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ ، هل جملة الأشعة $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ مستقلة خطيا؟

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n \in \mathbb{R}: \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = (0,0, \dots, 0)$$

$$\Longrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n) = (0,0, \dots, 0) \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

ومنه نستنتج أن جملة الأشعة $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ مستقلة خطيا إذن $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ تشكل أساس للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^n$ و يسمى الأساس القانوني.

لدينا مثلا: الأساس القانوني للمجموعة $\mathbb{R}^2$ هي جملة الأشعة $\{e_1, e_2\}$ و الأساس القانوني للمجموعة $\mathbb{R}^3$ هي جملة الأشعة $\{e_1, e_2, e_3\}$.

2. (الأشعة التي تشكل الأساس ليست وحيدة)

لتكن : $w = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}$ ف ش ج من $\mathbb{R}^2$.

$$w = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x = -y\} = \{(-y,y);\ \ y \in \mathbb{R}\} = \{y(-1,1);\ \ y \in \mathbb{R}\}$$

ومنه نستنتج أن : الشعاع $(-1,1)$ يولد w أي $w = \langle(-1,1)\rangle$ وبما أن الشعاع $(-1,1)$ غير معدوم فهو مستقل خطيا، إذن $\{(-1,1)\}$ تشكل أساس للمجموعة w .

من جهة أخرى لدينا:

$$w = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = -x\} = \{(x,-x);\ \ x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,-1);\ \ x \in \mathbb{R}\}$$

ومنه نستنتج أن: الشعاع $(1,-1)$ يولد w أي $w = \langle(1,-1)\rangle$ وبما أن الشعاع $(1,-1)$ غير معدوم فهو مستقل خطيا، إذن $\{(1,-1)\}$ تشكل أساس للمجموعة w .

3. نأخذ $V = \mathbb{R}_n[x] = \{p(x);\ \ d^\circ p \leq n\}$ ($\mathbb{R}_n[x]$ ترمز الى مجموعة فضاء كثيرات الحدود من الدرجة أقل أو تساوي n)

$$\forall p \in V \Longrightarrow p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n;\ \ a_i \in \mathbb{R}$$

و بالتالي: $\mathbb{R}_n[x] = \langle 1, x, x^2, \dots, x^n\rangle$، بقي إثبات فقط هل جملة الأشعة $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ مستقلة خطيا أم لا ؟

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n \in \mathbb{R}:\ \ \alpha_0 1 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \cdots + \alpha_nx^n = 0$$

$$\Longrightarrow \alpha_0 1 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \cdots + \alpha_nx^n = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n$$

بالمطابقة نجد: $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

ومنه جملة الأشعة $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ مستقلة خطيا إذن فهي تشكل أساس للمجموعة $\mathbb{R}_n[x]$

نظرية: ليكن V ف ش على الحقل K و $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعة منتهية من أشعة V، نقول أن A تشكل أساس للفضاء الشعاعي V إذا و فقط إذا تحقق :

$$\forall v \in V, \exists!\ \alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n \in K: v = \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \cdots + \alpha_nv_n$$

ملاحظة: V ف ش على الحقل K و $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعة منتهية من أشعة V، A تشكل أساس للفضاء الشعاعي V إذا كان لدينا:

$$\forall v \in V \Longrightarrow v = \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \cdots + \alpha_nv_n\ \ ;(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in K$$

تسمى $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$ مركبات الشعاع v في الأساس $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

مثال: ليكن $\mathbb{R}^2$ ف ش على الحقل $\mathbb{R}$ و $A = \{v_1 = (1,1), v_2 = (1,2)\}$ أساس له، لدينا

$$v_3 = (5,7) \in \mathbb{R}^2 \Longrightarrow (5,7) = 3(1,1) + 2(1,2) \quad \Longrightarrow v_3 = 3v_1 + 2v_2$$

و بالتالي : مركبات الشعاع v_3 في الأساس A هي $\alpha = 3$ و $\beta = 2$

بعد فضاء شعاعي: ليكن V ف ش على الحقل K و لتكن $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعة منتهية من أشعة V تشكل أساس له.

- نسمي عدد أشعة الأساس بعد الفضاء الشعاعي V و نرمز له بالرمز: $dim(V)$.

أمثلة: رأينا في الأمثلة السابقة أن:

1. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ تشكل أساس للمجموعة $\mathbb{R}^n$ إذن $dim(\mathbb{R}^n) = n$
2. $\{(1, -1)\}$ تشكل أساس للمجموعة w إذن $dim(w) = 1$
3. $\{1, x, x^2, \dots, \ ^n\}$ تشكل أساس للمجموعة $\mathbb{R}_n[x]$، إذن $dim(\mathbb{R}_n[x]) = n + 1$

ملاحظات:

1. $dim(\{0\}) = 0$
2. إذا لم يوجد للفضاء الشعاعي V أساس منته عندئذ نقول أن V ذو بعد غير منته أي: $din(v) = +\infty$
3. كل ف ش ذو بعد منته على الحقل K يملك على الأقل أساس.
4. إذا كان V ف ش ذو بعد منته على الحقل K فإن جميع أسس V لها عدد واحد من الأشعة (عدد أشعة الأساس وحيد).

نظرية1: ليكن V ف ش على الحقل K ذو بعد منته n حيث $n \geq 1$.

إذا كانت لدينا مجموعة مكونة من p شعاع من V أي $p \geq n + 1$ فإن هذه الأشعة مرتبطة خطيا أي لايمكن إيجاد في هذا الفضاء أكبر من n شعاع مستقل خطيا.

مثال: في ف ش $\mathbb{R}^2$ على الحقل $\mathbb{R}$ $(dim(\mathbb{R}^2) = 2)$، لا يمكن إيجاد أكبر من شعاعين مستقلين خطيا أي لو أخذنا ثلاثة أشعة فهي حتما مرتبطة خطيا.

نظرية2: ليكن V ف ش على الحقل K ذو بعد منته، وليكن w ف ش ج من V فإن w ذو بعد منته و لدينا:

$dim(w) \leq dim(V)$ و إذا كان $dim(w) = dim(V)$ فإن : $w = V$

مثال1: لتكن $w = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = y\}$ ف ش ج من $\mathbb{R}^2$.

$$w = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = y\} = \{(y, y); \ \ y \in \mathbb{R}\} = \{y(1,1); \ \ y \in \mathbb{R}\}$$

ومنه نستنتج أن: الشعاع $(1,1)$ يولد w أي $w = \langle(1,1)\rangle$ وبما أن الشعاع $(1,1)$ غير معدوم فهو مستقل خطيا، إذن $\{(1,1)\}$ تشكل أساس للمجموعة w إذن $dim(w) = 1$ و منه

$$dim(w) = 1 < dim(\mathbb{R}^2) = 2.$$

مثال2: ليكن $w = \{(x, 2y) \ ; \ x, y \in \mathbb{R}\}$ ف ش ج من $\mathbb{R}^2$، لدينا:

$$w = \{x(1,0) + y(0,2); \quad x, y \in \mathbb{R}\}$$

ومنه نستنتج أن: $w = \langle (1,0), (0,2) \rangle$

هل $\{(1,0), (0,2)\}$ حرة (مستقلة خطيا) ؟

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \alpha(1,0) + \beta(0,2) = (0,0) \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$$

إذن $\{(1,0), (0,2)\}$ مستقلة خطيا فهي تشكل أساس للمجموعة w و منه نجد :

$dim(w) = 2$ وبما أن $dim(w) = dim(\mathbb{R}^2)$ و $w \subset \mathbb{R}^2$ فإن $w = \mathbb{R}^2$

نظرية3: ليكن V ف ش على الحقل K ذو بعد منته، وليكن w_1 و w_2 ف ش ج من V فانه لدينا:

$$dim(w_1 + w_2) = dim(w_1) + dim(w_2) - dim(w_1 \cap w_2)$$

و إذا كان $w = w_1 \oplus w_2$ فإنه لدينا: $dim(w_1 + w_2) = dim(w_1) + dim(w_2)$

مثال1: لتكن $w_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x + y = 0\}$ ف ش ج من $\mathbb{R}^3$ و كذلك $w_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad 2x - y = 0\}$ ف ش ج من $\mathbb{R}^3$، لدينا:

$$w_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x = -y\} = \{(-y, y, z); \ y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{y(-1,1,0) + z(0,0,1); \ y, z \in \mathbb{R}\}$$

و منه نستنتج أن: $w_1 = \langle (-1,1,0), (0,0,1) \rangle$ (يمكن التأكد من أن الأشعة التي تولد w_1 مستقلة خطيا) إذن فهي تشكل أساس للمجموعة w_1 إذن $dim(w_1) = 2$.

$$w_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad y = 2x\} = \{(x, 2x, z); \quad x, z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x(1,2,0) + z(0,0,1); \quad x, z \in \mathbb{R}\}$$

و منه نستنتج أن: $w_2 = \langle (1,2,0), (0,0,1) \rangle$ (يمكن التأكد من أن الأشعة التي تولد w_2 مستقلة خطيا) إذن فهي تشكل أساس للمجموعة w_2 إذن $dim(w_2) = 2$.

و من جهة أخرى لدينا:

$$w_1 \cap w_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \ (x, y, z) \in w_1 \text{ و } (x, y, z) \in w_2\}$$

$$(x, y, z) \in w_2 \text{ و } (x, y, z) \in w_1 \Longrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ \text{و} \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Longrightarrow x = y = 0$$

ومنه: $w_1 \cap w_2 = \{(0,0,z); \quad z \in \mathbb{R}\} = \{z(0,0,1); \ z \in \mathbb{R}\}$

إذن نستنتج أن: $w_1 \cap w_2 = \langle (0,0,1) \rangle$ و بما أن $(0,0,1)$ شعاع غير معدوم فهو مستقل خطيا إذن فهو يشكل أساس للمجموعة $w_1 \cap w_2$ أي: $dim(w_1 \cap w_2) = 1$

$$\mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2 = \{v = v_1 + v_2 \in \mathbb{R}^3 \ ; \ v_1 \in w_1 \text{ و } v_2 \in w_2\}$$

$$v_1 \in w_1 \Longrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}: v_1 = \alpha \underbrace{(-1,1,0)}_{X} + \beta \underbrace{(0,0,1)}_{Y}$$

$$v_2 \in w_2 \Longrightarrow \exists \gamma, \delta \in \mathbb{R}: v_2 = \gamma \underbrace{(1,2,0)}_{Z} + \delta \underbrace{(0,0,1)}_{T}$$

$$\mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2 = \{\alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta T; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$$

نلاحظ أن: $Y = T$ إذن لدينا

$$\mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2 = \left\{\alpha X + \left(\underbrace{\beta + \delta}_{\theta}\right) Y + +\gamma Z; \ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2 = \{\alpha X + \theta Y + \gamma Z; \quad \alpha, \gamma, \theta \in \mathbb{R}\}$$

و منه نستنتج أن: $\mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2 = \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z} \rangle$

هل جملة الأشعة $\{\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}\}$ مستقلة خطيا أم لا ؟

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}: \quad \alpha X + \beta Y + \gamma Z = (0,0,0) \Longrightarrow \begin{cases} -\alpha + 0 + \gamma = 0 \\ \alpha + 0 + 2\gamma = 0 \\ 0 + \beta + 0 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

بحل الجملة (*) نجد: $\alpha = \gamma = \beta = 0$ ومنه نستنتج أن جملة الأشعة $\{\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}\}$ مستقلة خطيا فهي تشكل أساس للمجموعة $\mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2$ إذن $dim(\mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2) = 3$

و بالتالي: $dim(w_1 + w_2) = dim(w_1) + dim(w_2) - dim(w_1 \cap w_2)$

مثال2: $w_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2; 2x + y = 0 \right\}$ و $w_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2; x + y = 0 \right\}$

فضائيين شعاعيين جزئيين من $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ على الحقل $\mathbb{R}$ و لدينا:

$$w_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2; y = -2x \right\} = \{(x, -2x) \ ; \ x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,-2); \ x \in \mathbb{R}\}$$

ومنه: $w_1 = \langle (1,-2) \rangle$ أي $\{(1,-2)\}$ تشكل أساس للمجموعة w_1 إذن $dim(w_1) = 1$

$$w_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2; x = -y \right\} = \{(-y, y); \quad y \in \mathbb{R}\} = \{y(-1,1); \ y \in \mathbb{R}\}$$

و منه:$w_2 = \langle(-1,1)\rangle$ إذن $\{(-1,1)\}$ تشكل أساس للمجموعة w_2 أي $dim(w_2) = 1$

لدينا (رأينا ذلك في مثال سابق) $w_1 \oplus w_2 = \mathbb{R}^2$ أي $\begin{cases} w_1 + w_2 = \mathbb{R}^2 \\ w_1 \cap w_2 = \{(0,0)\} \end{cases}$

إذن $dim(w_1 + w_2) = 2$ و $dim(w_1 \cap w_2) = 0$ ومنه نجد:

$$dim(w_1 + w_2) = dim(w_1) + dim(w_2)$$

نظرية4: ليكن V_1 و V_2 فضائيين شعاعيين على الحقل K ذو بعدين منتهيين فإن:

$$dim(V_1 \times V_2) = dim(V_1) + dim(V_2)$$

مثال: $\mathbb{R}^3$ ف ش على الحقل $\mathbb{R}$ ($dim(\mathbb{R}^3) = 3$) و $\mathbb{R}^2$ ف ش على الحقل $\mathbb{R}$

$(dim(\mathbb{R}^2) = 2)$، لدينا $dim(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2) = dim(\mathbb{R}^3) + dim(\mathbb{R}^2) = 5$

مرتبة جملة أشعة:

تعريف1: ليكن V ف ش على الحقل K، نسمي مرتبة جملة من الأشعة $B = \{v_1, \dots, v_p\}$ مكونة من p شعاع من V بعد الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بواسطة $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$

و نكتب : $rg(B) = dim\langle v_1, v_2, \dots, v_p\rangle$

تعريف2: نعرف كذلك مرتبة جملة من الأشعة $B = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ بالعدد الأكبر من الأشعة المستقلة خطيا التي يمكن إخراجها من B .

مثال: ليكن w ف ش ج من $V = \mathbb{R}^4$ مولد بواسطة الأشعة التالية:

$$v_1 = (2,1,3,1), v_2 = (1,2,0,1), v_3 = (-1,1,-3,0)$$

عين أساس للمجموعة ثم عين مرتبة جملة الأشعة $B = \{v_1, v_2, v_3\}$.

من المعطيات لدينا $w = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ أي أن :

$$w = \{v \in \mathbb{R}^4;\ v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

نلاحظ أن: $v_1 = v_2 - v_3$ و منه نستنتج أن $\{v_1, v_2, v_3\}$ مرتبطة خطيا

إذن $\{v_1, v_2, v_3\}$ لا تشكل أساس للمجموعة w و لدينا:

$$w = \{v \in \mathbb{R}^4;\ v = \alpha(v_2 - v_3) + \beta v_2 + \gamma v_3 \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{v \in \mathbb{R}^4; v = (\alpha + \beta)v_2 + (\gamma - \alpha)v_3; \quad \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

و منه : $w = \langle v_2, v_3 \rangle$، بقي إثبات هل جملة الأشعة $\{v_2, v_3\}$ مستقلة خطيا أم لا ؟

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \alpha v_2 + \beta v_3 = (0,0,0,0) \Longrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ -3\beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$$

ومنه نستنتج أن: $\{v_2, v_3\}$ مستقلة خطيا إذن فهي تشكل أساس للمجموعة w ،

$dim(w) = 2$ و مرتبة $\{v_1, v_2, v_3\}$ تساوي 2 أي: $rg(B) = 2$

نتائج: ليكن ف ش على الحقل K ولتكن $B = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ مجموعة من أشعة V

1. B مستقلة خطيا $\Leftrightarrow rg(B) = p$
2. B مولدة للمجموعة $V \Leftrightarrow rg(B) = dim(V)$.
3. B أساس للمجموعة $\Leftrightarrow rg(B) = p = \dim(V)$

ملاحظة: لتكن $B = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ مجموعة من أشعة V على الحقل K فإن مرتبة B دائما تكون أقل أو تساوي بعد V أي: $rg(B) \leq dim(V)$

تمرين شامل: ليكن $V = \mathbb{R}^2$ ف ش على الحقل $\mathbb{R}$ و لتكن المجموعتين الجزئيتين من V المعرفتين كمايلي:

$$w_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 5x + 3y = 0\}\ ,\ w_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x + y = 0\}$$

1. بين أن: w_1 و w_2 فضائيين جزئيين من V ،
2. بين أن: $\mathbb{R}^2 = w_1 \oplus w_2$،
3. عين أساس w_1 ، w_2 و بعد كل منهما.

2. التطبيقات الخطية:

تعريف: ليكن V_1 و V_2 فضائيين شعاعيين على نفس الحقل K، نقول أن التطبيق

$f: V_1 \longrightarrow V_2$ أنه تطبيق خطي اذا تحقق:

$$\begin{cases} 1.\ \forall X, Y \in V_1: f(X+Y) = f(X) + f(Y) \\ 2.\ \forall X \in V_1, \forall \alpha \in K: f(\alpha X) = \alpha f(X) \end{cases}$$

نرمز ب $L(V_1, V_2)$ الى مجموعة التطبيقات الخطية المعرفة من V_1 نحو V_2 .

مثال: ليكن التطبيق $\begin{matrix} f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \longrightarrow x \end{matrix}$

f تطبيق خطي لأن :

1. $\forall (x,y),(z,t) \in \mathbb{R}^2$:

$$f\big((x,y)+(z,t)\big) = f(x+z, y+t) = x+z = f(x,y)+f(z,t)$$

2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}: f\big(\alpha(x,y)\big) = f(\alpha x, \alpha y) = \alpha x = \alpha f(x,y)$

قضية: ليكن V_1 و V_2 فضائيين شعاعيين على نفس الحقل K و $f: V_1 \longrightarrow V_2$ تطبيق، لدينا f تطبيق خطي هذا يكافئ:

$$\forall X, Y \in V_1, \forall \alpha, \beta \in K: f(\alpha X + \beta Y) = \alpha f(X) + \beta f(Y)$$

مصطلحات :

1. التطبيق الخطي يسمى كذلك بتماثل الفضائيين الشعاعين V_1 و V_2
2. إذا كان f تطبيق خطي و تقابلي فنقول أن f تشاكل (أو ايزومورفيزم).
3. إذا كان $V_1 = V_2$ و f تطبيق خطي (تماثل) نقول أن f تماثل داخلي.
4. إذا كان $V_1 = V_2$ و f تشاكل نقول أن f تشاكل ذاتي .

مثال: ليكن التطبيق $\begin{matrix} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longrightarrow ax \end{matrix}$

f تطبيق خطي لأن :

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = a(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha(a x_1) + \beta(a x_2)$$
$$= \alpha f(a x_1) + \beta f(a x_2)$$

ملاحظات:

1. $f: V_1 \longrightarrow V_2$ تطبيق خطي فإن: $\forall v \in V_1: f(-v) = -f(v)$
2. $f: V_1 \longrightarrow V_2$ تطبيق خطي $\Longleftarrow f(0_{V_1}) = 0_{V_2}$
3. $f: V_1 \longrightarrow V_2 \Longleftarrow f(0_{V_1}) \neq 0_{V_2}$ ليس تطبيق خطي
4. التطبيق المعدوم $f: V_1 \longrightarrow V_2$ المعرف بالشكل $\forall X \in V_1: f(X) = 0_{V_2}$ تطبيق خطي و نرمز له بالرمز f_0.

5. التطبيق الحيادي $f: V_1 \longrightarrow V_1$ المعرف بالشكل $\forall X \in V_1: f(X) = X$ تطبيق خطي و نرمز له بالرمز $Id: V_1 \longrightarrow V_1$

مثال: التطبيق $\begin{matrix} f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longrightarrow (x+1,y) \end{matrix}$ ليس تطبيق خطي لأن $f(0,0) = (1,0) \neq (0,0)$

عمليات على التطبيقات الخطية:

ليكن V_1 و V_2 فضائيين شعاعيين على نفس الحقل K ، $f: V_1 \longrightarrow V_2$ و $g: V_1 \longrightarrow V_2$ تطبيقين خطيين إذن لدينا:

1. . التطبيق $f + g: V_1 \longrightarrow V_2$ المعرف بالشكل :

$\forall x \in V_1: (f + g)(x) = f(x) + g(x)$ هو تطبيق خطي.

2. التطبيق $\alpha f: V_1 \longrightarrow V_2$ المعرف ب: $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ تطبيق خطي.

3. ليكن كذلك V_3 ف ش على الحقل K و ليكن $h: V_2 \longrightarrow V_3$ تطبيق خطي، و لدينا

$h \circ f: V_1 \longrightarrow V_3$ هو كذلك تطبيق خطي (تركيب تطبيقات خطية هو تطبيق خطي)

4. إذا كان $f: V_1 \longrightarrow V_2$ تطبيق خطي و تقابلي فإن $^{-1}: V_2 \longrightarrow V_1$ هو كذلك تطبيق خطي (f^{-1} هو التطبيق العكسي ل f).

الصورة و النواة: ليكن $f: V_1 \longrightarrow V_2$ تطبيق خطي فإن المجموعة المعرفة كمايلي:

$ker(f) = \{X \in V_1;\ f(X) = 0_{V_2}\}$ تسمى نواة التطبيق f

و المجموعة المعرفة كمايلي:

$$Im(f) = \{\forall y \in V_2\ \exists X \in V_1;\ f(X) = Y\} = \{f(X);\ X \in V_1\}$$

تسمى صورة التطبيق f.

نظرية1: ليكن $V_1 \longrightarrow V_2$: تطبيق خطي، لدينا :

1. $Ker(f)$ ف ش ج من V_1 و $Im(f)$ ف ش ج من V_2

2. $ker(f) = \{0_{V_1}\} \Leftrightarrow f$ متباين

3. $Im(f) = V_2 \Leftrightarrow f$ غامر

نظرية2: ليكن V_1 ف ش على الحقل K ذو بعد منته n و لتكن $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ أساس له و ليكن V_2 ف ش على الحقل K و لتكن $w_1, w_2, \dots, w_n$ أشعة ما من V_2 فإنه يوجد تطبيق خطي وحيد $f: V_1 \longrightarrow V_2$ بحيث $f(v_i) = w_i$: $\forall i = 1,2, \dots, n$

نظرية3: ليكن V_1 ف ش على الحقل K ذو بعد منته n و لتكن $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ أساس له و ليكن V_2 ف ش على الحقل K و لتكن $w_1, w_2, \dots, w_n$ أشعة ما من V_2،

و ليكن $f: V_1 \longrightarrow V_2$ تطبيق خطي بحيث $f(v_i) = w_i$ لكل $i = 1, \dots, n$ فإنه لدينا:

1. f متباين $\Leftrightarrow \{w_1, w_2, \dots, w_n\} = \{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ مستقلة خطيا
2. f غامر $\Leftrightarrow \{w_1, w_2, \dots, w_n\} = \{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ تولد V_2
3. f متقابل $\Leftrightarrow \{w_1, , \dots, w_n\} = \{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ تشكل أساس ل V_2

نظرية4: ليكن V_1 و V_2 فضائيين شعاعيين على نفس الحقل K بحيث V_1 ذو بعد منته، و $f: V_1 \longrightarrow V_2$ تطبيق خطي لدينا:

1. $dim\big(Ker(f)\big) + dim\big(Im(f)\big) = dim(V_1)$
2. إذا كان $dim(V_1) = dim(V_2)$ فإن الشروط الثلاثة التالية متكافئة:

أ. f متباين ، ب. f غامر و ج. f متقابل.

رتبة تطبيق f (نرمز لها بالرمز $rg(f)$) :

$f: V_1 \longrightarrow V_2$ تطبيق خطي، بعد صورة التطبيق f تسمى رتبة التطبيق f أي:

$$rg(f) = dim(Im(f))$$

تمرين: ليكن التطبيق $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ المعرف كمايلي:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2: f(x, y) = (x + y, x - y)$$

1. بين أن: f تطبيق خطي
2. عين $Ker(f)$ ثم $Im(f)$ و ماذا تستنتج ؟
3. عين رتبة f $(rg(f))$

الحل:

1. f تطبيق خطي لأن :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall (z, t) \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}:$$

$$f\big(\alpha(x, y) + \beta(z, t)\big) = f(\alpha x + \beta z, \alpha y + \beta t)$$

$$= ((\alpha x + \beta z) + (\alpha y + \beta t), (\alpha x + \beta z) - (\alpha y + \beta t))$$

$$= (\alpha x + \alpha y, \alpha x - \alpha y) + (\beta z + \beta t, \beta z - \beta t)$$

$$= \alpha(x + y, x - y) + \beta(z + t, z - t\ )$$

$$= \alpha f(x, y) + \beta f(z, t)$$

2. $Ker(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = (0,0)\}$

$$f(x, y) = (0,0) \Longrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

بحل الجملة (1) نجد: $y = 0$ و $x = 0$ و بالتالي : $Ker(f) = \{(0,0)\}$

إذن نستنتج أن: f تطبيق متباين (بإستعمال النظرية1) لأن $Ker(f) = \{(0,0)\}$

$$Im(f) = \{f(x, y);\ x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x + y, x - y);\ x, y \in \mathbb{R}\ \}$$

$$= \{x(1,1) + y(1, -1); \qquad x, y \in \mathbb{R}\ \}$$

و منه : $Im(f) = \langle (1,1), (1, -1) \rangle$، (تستطيع أن تتأكد بسهولة أن جملة الأشعة $\{(1,1), (1, -1)\}$ مستقلة خطيا) إذن $\{(1,1), (1, -1)\}$ تشكل أساس للمجموعة $Im(f)$ و منه نستنتج أن: $dim(Im(f)) = 2$ و بما أن $Im(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ فإن $Im(f) = \mathbb{R}^2$ و منه نستنتج أن f تطبيق غامر (بإستعمال النظرية1).

3. تعين رتبة f : $rg(f) = dim(Im(f) = 2$

قائمة المراجع

1. أبوبكر خالد سعد الله " الرياضيات و الإعلام الألي ج1 المتتاليات و الدوال الوحيدة المتغير la cedraie " .2009.
2. أبوبكر خالد سعد الله " الرياضيات و الإعلام الألي ج2 التحليل، الإشتقاق و دساتير المتوسط تايلور la cedraie ". 2010.
3. بابا حامد بن حبيب " التحليل *I*" ديوان المطبوعات الجامعية. 2008.
4. علي حميدة و عبد الوهاب بيبي .الرياضيات في الجامعة .التحليل .الجزء الثاني و الجزء الثالث.2001. جامعة قسنطينة.
5. عبد الوهاب بيبي، .علي حميدة وفهيم لكحل .الرياضيات في الجامعة .الجبر .الجزء الأول.2001 . جامعة قسنطينة.
6. قادة علاب " عناصر من التحليل الرياضي التوابع لمتغير حقيقي واحد ". ديوان المطبوعات الجامعية. 1991.