الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة عمار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et informatique
Filière : Mathématique
Option : Analyse Mathématique

par :

BENMESSAOUD Elyamine

Thème

Équations différentielle stochastique et ses applications

Soutenu publiquement devant le jury composé de :

Mr OUCHENANE Djamel	M.C.B, Université de Laghouat	**Président**
Mr BOUGOUTAIA Amar	M.A.A, Université de Laghouat	**Examinateur**
Mme ABDESSELAM Naouel	M.C.B, Université de Laghouat	**Examinateur**
Mr BOUKEHILA Ahcen	M.C.B, Université de Laghouat	**Encadreur**

Année universitaire 2017/2018

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier ALLAH pour la force et la volonté qu'il m'a données pour pouvoir achever ce travail Je tiens à remercier tout spécialement mon directeur de mémoire M. BOUKEHILA Ahcen pour sa confiance, ses conseils avisés et le temps qu'il m'a accordé et pour la responsabilité de diriger ce travail. Je tiens aussi à exprimer mon reconnaissance à tous les enseignants qui ont contribué à mon formation LMD. Je tiens à remercier Mr. OUCHENANE Djamel pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury. Je remercie Mr B. Amar , Mme. A. Naouel et Mr A.MOKHTARI et Mr Y. BELLABACI pour avoir accepté de faire partie du jury et d'y avoir consacré une partie de leurs temps. Mes plus profonds remerciements vont à mes parents. Tout au long de mon cursus, ils m'ont toujours soutenu, encouragé et aidé. Ils ont su me donner toutes les chances pour réussir. Qu'ils trouvent, dans la réalisation de ce travail, l'aboutissement de leurs efforts ainsi que l'expression de mon plus affectueuse gratitude. Je remercie mon époux pour son aide et son soutien. Je remercie également mon famille et en particulier mon chère soeur Aicha, mes frères Mohammed El- habibe , mon petite Gazza et mon cousin Mohamed qui m'ont toujours soutenu dans les moments difficiles. Enfin, je remercie mes beaux parents pour leur disponibilité toutes les fois que j'ai eu besoin d'eux. Je voudrais également remercie tous mes plus proches amies.

Dédicaces

Ma dédicace s'adresse d'abord à ma mère et mon père pour leurs confiances et leurs encouragements.

A mes sœurs et mes frères pour leurs douceurs et leurs gentillesses.

A toute ma famille ainsi qu'à mes amis . . .

ملخص

نعتبر المعادلات التفاضلية ذات المتغير العشوائي في هذا العمل كمحور من محاور الحساب العشوائي. نقدم أولا مفاهيم وتعاريف أساسية في الاحتمالات , ندرس هذا النوع من المعادلات انطلاقا من أساسيات المعادلات التفاضلية العادية. وفي الأخير نبرهن وجود الحل ووحدانيته .

الكلمات المفتاحية معادلة تفاضلية ذات المتغير العشوائي , الوجود و الوحدانية , تكامل ايتو , التفاضل العشوائي.

Résumé :

On considéré dans ce travail les equations différentielles stochastiques comme une partie de calcul stochastiques .D'abord , on présente des définitions et propriétés de base de probabilité , pour étude ce types des equations en basant les equations différentielle ordinaire .En fin , on montre l'existence et l'unicité de la solution .

Mots clés : Équations Différentielles Stochastiques , Existence et Unicité ,Intégrale de Itô , Différentielle stochastique .

Abstract :

We consider in this work the stochastic differential equations a chaptre of stochastic calcul. Firstly, we present a definitions and properties of basic pobability . Then, for study this type based on a ordinary differntial equations . Finally, we show that the existence and uniqueness of solution .

Key-words : Stochastic differential equations , Existence and uniqueness, Itô integral , Stochastic differential .

Notations

Ω	Un ensemble non vide .
$\mathcal{B}(\Omega)$	Tribu sur Ω.
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	L'espace de probabilité.
$P_\xi(B)$	La distribution de ξ .
$\mathrm{var}(\xi)$	La variance de ξ
$E(\xi \setminus B)$	L'espérance conditionnelle de ξ sachant B.
$L^p(\Omega)$	L'espace de Lebesgue, $1 \leq p \leq \infty$.
M^2	la classe des processus stochastiques $f(t)$, $t \geqslant 0$.
M_T^2	L'espace des processus stochastique $f(t)$, $t \geqslant 0$
$W(t)$	Le processus de Wiener.
p.p.	Presque partout.
$\\|.\\|_p$	La norme associée à l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$.
$\\|.\\|_{M^2}$	La norme associée à l'espace M^2.
1_A	La fonction indicatrice de A .

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles servent à décrire des phénomènes physiques très varies.Cependant, dans de nombreuses situations les phénomènes observés ne suivent que grossièrement les trajectoires des équations qui semblent devoir leur correspondre. L'objectif ce travail est d'introduire L'intégrale de Itô qui permet d'aborder les équations différentielle stochastique.

Le premier chapitre sera consacré aux rappels de probabilité.On donnera les définitions , propriétés principales du base qui seront utiles pour cela. Après avoir présenter quelques résultats importants relatifs à le calcul stochastique .

Dans le deuxième chapitre, sera abordé rappel de base sur les processus stochastiques. On définit le mouvement brownien , le martingale et ses propriétés . En suite , on présente des propositions , corollaires liées à l'intégrale stochastique, on verra comment il peut être mise en œuvre pour la résolution des équations différentielles stochastiques.

Dans le dernier chapitre , on présente des définitions et propriétés sur l'intégrale de Itô . En suite , on donnera des quelques exemples de l'intégrale de Itô . Aussi , on explique conception très important il est le différentielle stochastique et la formule de Itô . En fin , on discuter l'existence et l'unicité de la solution de l'équation différentielle stochastique .

Chapitre 1

Rappels des probabilités

Dans ce chapitre, nous rappellerons quelques notions et faits de base de la probabilité théorie. Voici une courte liste de ce qui doit être examiné :

1. Espace probabilisé ,tribu et mesure
2. Variable aléatoire et leur distributions
3. Espérance et variance
4. La Tribu engendré par un variable aléatoire
5. Probabilité indépendante , conditionnelle
6. Espérance conditionnelle et propriétés

1.1 Événement et probabilités

Définition 1.1. Soit Ω un ensemble non vide , Une tribu A (σ-algebra en Anglais) sur Ω est une famille de parties de , contenant l'ensemble vide, stable par passage au complémentaire, union dénombrable et intersection dénombrable.

Définition 1.2. Soit $\mathcal{F}$ tribu sur Ω . A mesure de probabilité P est une fonction

$$P : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$$

tels que

1. $P(\Omega) = 1$
2. Si $A_1, A_2, A_3, ...$ sont ensembles disjoint ($A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$) appartenant à $\mathcal{F}$ alors
$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ....) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ...$$

le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est dit espace de probabilité.Les ensembles appartenant à $\mathcal{F}$ sont dits des événement.L'événement A s'appelle l'événement sûr quand $P(A) = 1$

Lemme 1.1. ***(Borel - Cantelli)***
Soit $A_1, A_2, A_3, ...$ une suite d'événements tels que $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ... < \infty$ et soit $B_n = A_n \cup A_{n+1} \cup ...$. Alors $P(B_1 \cap B_2 \cap ...) = 0$.

Démonstration

Lorsque B_n est une suite contractante d'événements

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2 \cap ...) &= \lim_{n\to\infty} P(B_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(A_n \cup A_{n+1} \cup ...) \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} (P(A_n) + P(A_{n+1}) + ...) \\ &= 0. \end{aligned}$$

l'égalité précédent vérifié car la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p(A_n)$ est convergente.Par les propriétés de sous-additivité l'inégalité au dessus vérifié

$$P(A_n \cup A_{n+1} \cup ...) \leqslant P(A_n) + P(A_{n+1}) + ...$$

Il s'ensuit que $P(B_1 \cap B_2 \cap ...) = 0$

1.2 Variables aléatoires

Définition 1.3. Si $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω , alors la fonction $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ est dit $\mathcal{F}$-mesurable si

$$\{\xi \in B\} \in \mathcal{F}$$

Pour toute ensemble Borélienne $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.Si $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace de probabilité , alors la fonction ξ est dite variable aléatoire .

Remarque 1.1. *Une notation abrégée pour des événements tels que $\{\xi \in B\}$ sera utilisé pour éviter l'encombrement.Pour être précis,il faut écrire*

$$\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in B\}$$

Au lieu de $\{\xi \in B\}$.Incidemment,$\{\xi \in B\}$ est juste un moyen pratique d'écrire l'image inverse $\xi^{-1}(B)$ d'un ensemble.

Définition 1.4. La tribu $\sigma(\xi)$ engendré par le variable aléatoire $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ consiste tous les ensembles de la forme $\{\xi \in B\}$, où B est un ensemble Borélienne dans $\mathcal{R}$

Définition 1.5. Le tribu $\sigma\{\xi_i : i \in I\}$ engendré par une famille $\{\xi_i : i \in I\}$ des variables aléatoires est définie être le plus petit tribu contenant tous les événements du forme $\{\xi_i \in B\}$, où B est un ensemble Borélienne dans $\mathcal{R}$ et $i \in I$.

Lemme 1.2. ***(Doob - Dynkin)***
Soit ξ un variable aléatoire .Alors chaque $\sigma(\xi)$ variable aléatoire mesurable η peut écrire

$$\eta = f(\xi)$$

pour certain fonction Borélienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Définition 1.6. Chaque variable aléatoire $f : \Omega \to \mathbb{R}$ donne lieu à une mesure de probabilité

$$P_\xi(B) = P\{\xi \in B\}$$

Sur $\mathbb{R}$ définie sur le tribu de Borel ensembles $B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ On appelle $P_\xi(B)$ la distribution de ξ. La fonction $F_\xi : \mathbb{R} \to [0.1]$ définie par

$$F_\xi(x) = P\{\xi \leqslant x\}$$

Définition 1.7. S'il y a une fonction Borélienne $f_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tels que pour tout ensemble Borélienne $B \subset \mathbb{R}$

$$P\{\xi \in B\} = \int_B f_\xi dx$$

Alors on dit que ξ est une variable aléatoire avec une distribution absolument continue et f_ξ est appelée la densité de ξ · S'il y a une séquence (finie ou infinie)des nombres réels distincts $x_1, x_2, ...$ tels que pour tout ensemble de Borélienne $B \subset \mathbb{R}$

$$P\{\xi \in B\} = \sum_{x_i \in B} P\{\xi = x_i\}$$

Alors on dit que ξ a une distribution discrète avec les valeurs $x_1, x_2, ...$ et masse $P\{\xi = x_i\}$ à x_i.

Définition 1.8. La distribution conjointe de plusieurs variables aléatoires$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ est une probabilité mesure $P_{\xi_1,\xi_2,.....,\xi_n}$ sur $\mathbb{R}^n$ tels que

$$P_{\xi_1,\xi_2,.....,\xi_n}(B) = P\{(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in B\}$$

· Pour tout ensemble Borélienne B dans $\mathbb{R}^n$. S'il y a une fonction Borélienne $f_{\xi_1,\xi_2,.....,\xi_n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tels que

$$P\{(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in B\} = \int_B f_{\xi_1,\xi_2,.....,\xi_n}(x_1, x_2, ..., x_n)dx_1....dx_n$$

Pour tout ensemble Borélienne B dans $\mathbb{R}^n$,Alors $f_{\xi_1,\xi_2,.....,\xi_n}$ est appelé la densité conjointe de $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$

Définition 1.9. Une variable aléatoire $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ est dit être intégrable si

$$\int_\Omega |\xi| dP < \infty$$

alors

$$E(\xi) = \int_\Omega \xi dP$$

existe et est appelé l'espérance de ξ.La famille des variables aléatoires intégrables $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ sera désigné par $\mathcal{L}^1$ ou, en cas d'ambiguïté possible, par $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Définition 1.10. Une variable aléatoire $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ est dit être carré intégrable si

$$\int_\Omega |\xi|^2 dP < \infty$$

Alors la variance de ξ peut être définie par

$$var(\xi) = \int_\Omega (\xi - E(\xi))^2 dP$$

.La famille des variables aléatoires carré intégrables $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ sera désigné par $\mathcal{L}^2$ ou, en cas d'ambiguïté possible, par $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1.3 Probabilité conditionnelle et indépendance

Définition 1.11. Pour tous les événements $A, B \in \mathcal{F}$ tel que $P(B) \neq 0$ la probabilité conditionnelle de A donné B est défini par

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Définition 1.12. Deux événements $A, B \in \mathcal{F}$ sont appelés indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

En général, nous disons que n événements $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$ sont indépendants si

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cup ...... \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})....P(A_{i_k})$$

Pour tout indice $1 \leqslant A_{i_1} < A_{i_2} < ..... < A_{i_k} \leqslant n$.

Définition 1.13. Deux variables aléatoire ξ et η sont appelés indépendants si pour tous les ensembles Borel $A, B \in \mathcal{F}$ les deux événements

$$\{\xi \in B\} \qquad \{\eta \in B\}$$

sont indépendants.On suppose que n variables aléatoires $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ sont indépendants si pour tous les ensembles Boréliennes $B_1, B_2, ..., B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ les événements

$$\{\xi_1 \in B_1\}, ..., \{\xi_n \in B_n\}$$

sont indépendants. En général, une famille (finie ou infinie) de variables aléatoires est dit être indépendant si un nombre fini de variables aléatoires de cette la famille sont indépendants.

Proposition 1.1. *Si deux variables aléatoires intégrables $\xi, \eta : \Omega \to \mathbb{R}$ sont indépendants, alors ils sont non corrélé, c'est-à-dire*

$$E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta)$$

à condition que le produit ξ_n soit également intégrable. Si $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n :: \Omega \to \mathbb{R}$ sont des variables aléatoires indépendantes intégrables, alors

$$E(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = E(\xi_1)E(\xi_2)......E(\xi_n)$$

à condition que le produit soit également $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ intégrable

Définition 1.14. Deux tribu $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ contenant dans $\mathcal{F}$ sont appelés indépendants si deux événements

$$A \in \mathcal{G} \qquad B \in \mathcal{H}$$

sont indépendants. De même, tout nombre fini de tribus $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, ..., \mathcal{G}_n$ contenant dans $\mathcal{F}$ sont indépendants s'il y a n événements

$$A_1 \in \mathcal{G}_1, ..., A_n \in \mathcal{G}_n$$

sont indépendants. En général, une famille (finie ou infinie) de tribus est dit être indépendant si un nombre fini d'entre eux sont indépendants.

Définition 1.15. On dits qu'une variable aléatoire ξ est indépendant d'un tribu $\mathcal{G}$ si le tribu

$$\sigma(\xi) \qquad et \quad \mathcal{G}$$

sont indépendants. Cela peut être étendu à toute famille (finie ou infinie) de variables aléatoires ou tribus ou une combinaison des deux. A savoir, une telle famille est dite indépendante si pour un nombre fini de variables aléatoires $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ et tribus $\mathcal{G}_1, ..., \mathcal{G}_n$ de cette famille les tribus

$$\sigma(\xi_1), ..., \sigma(\xi_n), \mathcal{G}_1, ..., \mathcal{G}_n$$

sont indépendants.

1.4 Espérance conditionnelle

L'espérance conditionnelle est un outil crucial dans l'étude des processus stochastiques. Il est donc important de développer l'intuition nécessaire derrière cette notion,dont la définition peut paraître un peu abstraite au début. Cette partie est conçu pour aider le débutant en le menant étape par étape à travers plusieurs cas particuliers, qui deviennent de plus en plus impliqués, aboutissant à la définition de l'espérance conditionnelle.

1.4.1 Conditionnement par rapport un événement

Le premier et le plus simple cas à considérer est celui de l'espérance conditionnelle $E(\xi \setminus B)$ d'un variable aléatoire ξ donné un événement B.

Définition 1.16. Pour tout variable aléatoire ξ et tout événement $B \in \mathcal{F}$ tel que $P(B) \neq 0$ l'espérance conditionnelle de ξ donné B est définie par

$$E(\xi \setminus B) = \frac{1}{P(B)} \int_B \xi dP$$

Exemple 1.1. Trois pièces de monnaie $10p, 20pet50p$ sont jetés. Les valeurs de ces pièces qui atterrissent en haut sont ajoutés pour calculer le montant total ξ .Quel est le total prévu ξ étant donné que deux pièces de monnaie ont atterri tête haute ?
Soit B l'événement que deux pièces ont atterri en l'air. Nous voulons trouver $E(\xi \setminus B)$ .Clairement, B se compose de trois éléments

$$B = \{HHT, HTH, THH\}$$

chacun ayant la même probabilité $\frac{1}{8}$.(Ici H représente les têtes et T les queues.)
Les valeurs correspondantes de ξ sont

$$\begin{aligned} \xi(HHT) &= 10 + 20 = 30 \\ \xi(HTH) &= 10 + 50 = 60 \\ \xi(THH) &= 20 + 50 = 70 \end{aligned}$$

Donc

$$E(\xi \setminus B) = \frac{1}{P(B)} \int_B \xi dP = \frac{1}{\frac{3}{8}} \left(\frac{30}{8} + \frac{60}{8} + \frac{70}{8} \right) = 53\frac{1}{3}$$

1.4.2 Conditionnement par rapport un Variable aléatoire discret

L'étape suivante a entraine vers la définition générale de l'espérance conditionnelle conditionnement par une variable aléatoire discrète η avec valeurs possible $y_1, y_2, ...$ tel que $P\{\eta = y_n 0\} \neq 0$ pour chaque n.Découvrir la valeur de η revient à trouver sur lequel des événements $\{\eta = y_n\}$ a eu lieu ou non.Conditionné par η devrait donc être le même que le conditionnement par les événements $\{\eta = y_n 0\}$.Parce que nous faisons pas savoir à l'avance lequel de ces événements se produira, nous devons considérer tous possibilités, impliquant une suite d'espérance conditionnelles

$$E\left(\xi|\{\eta = y_1\}\right), E\left(\xi|\{\eta = y_2\}\right), ...$$

Une façon pratique de le faire est de construire une nouvelle variable aléatoire discrète constant et égal à $E\left(\xi|\{\eta = y_n\}\right)$ sur chacun des ensembles $\{\eta = y_n\}$. Cela nous amène à la définition suivante.

Définition 1.17. Soit ξ un variable aléatoire intégrable et soit η un variable aléatoire discret comme ci-dessus.Alors l'espérance conditionnelle de ξ est définie par le variable aléatoire $E(\xi \setminus B)$ tel que

$$E(\xi \setminus \eta)(\omega) = E\left(\xi|\{\eta = y_n\}\right) \quad si \quad \eta(\omega) = y_n$$

Pour tout $n = 1, 2, ...$

Proposition 1.2. *Si ξ est un variable aléatoire intégrable et η est un variable aléatoire discret , Alors*

1. *$E(\xi \setminus \eta)$ est $\sigma(\eta)$-mesurable*
2. *pour tout $A \in \sigma(\eta)$*

$$\int_A E(\xi \setminus \eta) dP = \int_A \xi dP \tag{1.1}$$

Démonstration

supposons que η a des valeurs distinctes par paires $y_1, y_2, ...$ alors les événements

$$\{\eta = y_1\} \ , \{\eta = y_2\} \ , ...$$

sont disjoints par paires et couvrent Ω.Le tribu $\sigma(\eta)$ est engendré par ces événements, en fait tous $A \in \sigma(\eta)$ est une union dénombrable d'ensembles de la forme $\{\eta = y_n\}$ .Car $E(\xi \setminus \eta)$ est constant sur chacun de ces ensembles, il doit être $\sigma(\eta)$-mesurable.
Pour chaque n on a

$$\begin{aligned} \int\limits_{\{\eta = y_n\}} E(\xi \setminus \eta) dP &= \int\limits_{\{\eta = y_n\}} E(\xi|\{\eta = y_n\}) dP \\ &= \int\limits_{\{\eta = y_n\}} \xi dP \end{aligned}$$

puisque chaque $A \in \sigma(\eta)$ est une union dénombrable d'ensembles de la forme $\{\eta = y_n\}$ qui sont disjoints par paires, il s'ensuit que

$$\int_A E(\xi \setminus \eta) dP = \int_A \xi dP$$

1.4.3 Conditionnement par rapport un Variable aléatoire arbitraire

Les propriétés 1) et 2) de la proposition 1.1 fournissent la clé de la définition de l'espérance conditionnelle donné un variable aléatoire arbitraire η

Définition 1.18. Soit ξ est un variable aléatoire intégrable et soit η est un variable aléatoire arbitraire , Alors l'espérance conditionnelle de ξ donné η est défini comme une variable aléatoire $E(\xi \setminus \eta)$ tel que

1. $E(\xi \setminus \eta)$ est $\sigma(\eta)$-mesurable
2. pour tout $A \in \sigma(\eta)$

$$\int_A E(\xi \setminus \eta) dP = \int_A \xi dP$$

Remarque 1.2. *On peut aussi définir la probabilité conditionnelle d'un événement $A \in \mathcal{F}$ donné η par*

$$P(A \setminus \eta) = E(1_A \setminus \eta)$$

tel que 1_A est la fonction indicatrice de A .

Est-ce que les conditions de la définition 1.3 caractérisent $E(\xi \setminus \eta)$ uniquement ? . Le lemme ci-dessous implique que $E(\xi \setminus \eta)$ est défini à l'égalité sur un ensemble de mesure complète. À savoir

$$Si \ \ \xi = \xi' P.S \quad Alors \quad E(\xi \setminus \eta) = E(\xi' \setminus \eta) P.S \tag{1.2}$$

L'existence de $E(\xi \setminus \eta)$ sera discuté plus tard dans cette partie .

Lemme 1.3. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace de probabilité et soit $\mathcal{G}$ tribu contenant dans $\mathcal{F}$ .Si ξ est un variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable et pour tout $B \in \mathcal{G}$*

$$\int_A \xi dP = 0$$

Alors $\xi = 0$ $P.S$

Démonstration

On observe que $P\{\xi \geqslant \epsilon\} = 0$ pour tout $\epsilon > 0$ car

$$0 \leqslant \epsilon P\{\xi \geqslant \epsilon\} = \int\limits_{\{\xi \geqslant \epsilon\}} \epsilon dP \leqslant \int\limits_{\{\xi \geqslant \epsilon\}} \xi dP = 0$$

L'égalité précédé vérifié , lorsque $\{\xi \geqslant \epsilon\} \in \mathcal{G}$.De même $P\{\xi \leqslant -\epsilon\} = 0$ pour tout $\epsilon \geqslant 0$. Par conséquence,

$$P\{-\epsilon \leqslant \xi \leqslant \epsilon\} = 1$$

Pour tout $\epsilon > 0$
On pose

$$A_n = \{-\frac{1}{n} < \xi < \frac{1}{n}\}$$

Alors $P(A_n) = 1$ et

$$\{\xi = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Car A_n forment une suite contractante d'événements, il s'ensuit que

$$P\{\xi = 0\} = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1$$

Une difficulté liée à la définition 1.3 est qu'aucune formule explicite $E(\xi \setminus \eta)$ est donné. Si une telle formule est connue, il est généralement assez facile à vérifier conditions 1) et 2).

1.4.4 Conditionnement par rapport un Tribu

Nous sommes maintenant en mesure de faire le dernier pas vers la définition générale de l'espérance conditionnelle . Il est basé sur l'observation que $E(\xi \setminus \eta)$ ne dépend que de tribu $\sigma(\eta)$ engendré par η plutôt que sur les valeurs actuelles de η.

Proposition 1.3. *Si $\sigma(\eta) = \sigma(\eta')$,alors $E(\xi \setminus \eta) = E(\xi \setminus \eta')$ P.S (comparez avec (2.2).)*

Démonstration

C'est une conséquence immédiate du lemme 1. 1.

En raison de la proposition 1.2 il est raisonnable de parler d'espérance conditionnelle Donné un tribu . La définition ci-dessous diffère de la définition 1. 3 seulement en utilisant un arbitraire tribu $\mathcal{G}$ au lieu tribu $\sigma(\eta)$ engendré par un variable aléatoire η.

Définition 1.19. Soit ξ une variable aléatoire intégrable sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, et soit $\mathcal{G}$ un tribu contenant dans $\mathcal{F}$ .Alors l'espérance conditionnelle de ξ donné $\mathcal{G}$ est défini comme une variable aléatoire $E(\xi|\mathcal{G})$ tel que

1. $E(\xi|\mathcal{G})$ est $\mathcal{G}$-mesurable
2. pour tout $A \in \mathcal{G}$

$$\int_A E(\xi|\mathcal{G})dP = \int_A \xi dP \tag{1.3}$$

Remarque 1.3. *La probabilité conditionnelle d'un événement $A \in \mathcal{G}$ donné un tribu $\mathcal{G}$ peut définir par*

$$P(A|\mathcal{G}) = E(1_A|\mathcal{G})$$

Où 1_A est la fonction indicatrice de A La notion d'espérance conditionnelle par rapport un tribu étend le conditionnement sur une variable aléatoire η dans le sens où

$$E(\xi|\sigma(\eta)) = E(\xi|\eta)$$

où $\sigma(\eta)$ est le tribu engendré par η

Proposition 1.4. *$E(\xi|\mathcal{G})$ existe et est unique dans le sens que si $\xi = \xi'$ P.S ,alors $E(\xi|\mathcal{G}) = E(\xi'|\mathcal{G})$ P.S*

Démonstration

L'existence et l'unicité découlent respectivement du théorème 1.1 ci-dessous et Lemme 1.1.

Théorème 1.1. ***(Radon - Nikodym)***

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espace de probabilité et $\mathcal{G}$ un tribu contenant dans $\mathcal{F}$,Alors pour tout variable aléatoire ξ il existe un $\mathcal{G}$-mesurable variable aléatoire ζ tel que

$$\int_A \xi dP = \int_A \zeta dP$$

pour chaque $A \in \mathcal{G}$.

Le théorème Radon-Nikodym est important d'un point de vue théorique.Cependant, dans la pratique, il existe généralement d'autres moyens d'établir l'existence d'espérance conditionnelle, par exemple, en trouvant une formule explicite, comme dans la section précédente. La preuve du théorème de Radon-Nikodym est au-delà de la portée de ce cours et est omis .

1.4.5 Propriétés générales

Proposition 1.5. *L'espérance conditionnelle a les Propriétés suivantes :*

1. $E(a\xi + b\zeta|\mathcal{G}) = aE(\xi|\mathcal{G}) + bE(\zeta|\mathcal{G})$ *(linéarité)*
2. $E\left(E(\xi|\mathcal{G})\right) = E(\xi|\mathcal{G})$
3. $E(\xi\zeta|\mathcal{G}) = \xi E(\zeta|\mathcal{G})$ *si est $\mathcal{G}$-mesurable (En sortant ce qui est connu)*
4. $E(\xi|\mathcal{G}) = E(\xi)$ *si est indépendant à $\mathcal{G}$ (une condition indépendante disparaît)*
5. $E\left(E(\xi|\mathcal{G})|\mathcal{H}\right) = E(\xi|\mathcal{H})$ *si $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ (propriété de la tour)*
6. *si $\xi \geqslant 0$,alors $E(\xi|\mathcal{G}) \geqslant 0$ (positivité)*

Ici a, b sont des nombres réels arbitraires ,ξ, ζ sont des variables aléatoires intégrables sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $\mathcal{G}$,$\mathcal{H}$ sont tribus sur Ω contenant dans $\mathcal{F}$ .En 3), on suppose également que le produit $\xi\zeta$ est intégrable .Toutes les égalités et les inégalités dans 6) sont vérifiés .

Démonstration

1. Pour toute $B \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned}\int_B E(a\xi + b\zeta|\mathcal{G})dP &= a\int_B E(\xi|\mathcal{G}) + b\int_B E(\zeta|\mathcal{G}) \\ &= a\int_B \xi dP + b\int_B \zeta dP \\ &= \int_B (a\xi + b\zeta)dP\end{aligned}$$

Par l'unicité, cela prouve l'égalité .

2. Cela suit en mettant $A = \Omega$ dans (2, 3). Aussi, 2) est un cas particulier de 5) quand $\mathcal{H} = \{\emptyset, \Omega\}$.
3. Nous vérifions d'abord le résultat pour $\xi = 1_A$,où $A \in \mathcal{G}$ .Dans ce cas

$$\begin{aligned} \int_B 1_A E(\eta|\mathcal{G}) dP &= \int_{A\cap B} E(\eta|\mathcal{G}) dP \\ &= \int_{A\cap B} \eta dP \\ &= \int_B 1_A \eta dP \end{aligned}$$

Pour toute $B \in \mathcal{G}$, ce qui implique que

$$1_A E(\eta|\mathcal{G}) = E(1_A \eta|\mathcal{G})$$

par l'unicité. D'une manière similaire, nous obtenons le résultat si ξ est une fonction d'étape '$\mathcal{G}$- mesurable

$$\xi = \sum_{j=1}^{m} a_j 1_{A_j}$$

où $A_j \in \mathcal{G}$ pour $j = 1, 2, ..., m$. Finalement, le résultat dans le cas général suit en approximant ξ par $\mathcal{G}$-mesurable fonction d'étape.
4. Lorsque ξ est indépendant à $\mathcal{G}$ les variables aléatoires ξ et 1_B sont indépendants pour tout $B \in \mathcal{G}$.Il s'ensuit par proposition 1.1 (les variables aléatoires indépendantes ne sont pas corrélées)

$$\begin{aligned} \int_B E(\xi) dP &= E(\xi)E(1_B) \\ &= E(\xi 1_B) \\ &= \int_B \xi dP \end{aligned}$$

ce qui prouve l'assertion.
5. Par définition 1. 4

$$\int_B E(\eta|\mathcal{G}) dP = \int_B \xi dP$$

Pour chaque $B \in \mathcal{G}$, et

$$\int_B E(\eta|\mathcal{H}) dP = \int_B \xi dP$$

Pour chaque $B \in \mathcal{H}$. Car $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ il s'ensuit que

$$\int_B E(\eta|\mathcal{G}) dP = \int_B E(\eta|\mathcal{H}) dP$$

Pour chaque $B \in \mathcal{H}$.En appliquant à nouveau la définition 1.4, on obtient

$$E\left(E(\xi|\mathcal{G})|\mathcal{H}\right) = E(\xi|\mathcal{H})$$

6. Pour tout n on pose

$$A_n = \{E(\eta|\mathcal{G}) \leqslant -\frac{1}{n}\}$$

Si $A_n \in \mathcal{G}$. Si $\xi \geqslant 0$ P.S ;alors

$$0 \leqslant \int_{A_n} \xi dP = \int_{A_n} E(\eta|\mathcal{G}) dP \leqslant -\frac{1}{n} P(A_n)$$

ce qui signifie que $P(A_n) = 0$ .Car

$$\{E(\eta|\mathcal{G}) < 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

il s'ensuit que

$$P\{E(\eta|\mathcal{G}) < 0\} = 0$$

Le théorème suivant, qui sera énoncé sans preuve, implique la notion de fonction convexe,tel que $\max(1, x)$ ou e^{-x} , par exemple . Dans ce cours, le théorème sera principalement utilisé pour $|x|$, qui est donc une fonction convexe. En général, on appelle une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe si pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0, 1]$

$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$$

Cette condition signifie que le graphique de φ se trouve en dessous de la corde reliant les points avec des coordonnées $(x, \varphi(x))$ et $(y, \varphi(y))$

Théorème 1.2. ***(Inégalité de Jensen)***
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et ξ un variable aléatoire intégrable sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tel que $\varphi(\xi)$ est aussi intégrable .Alors

$$\varphi\left(E(\xi|\mathcal{G})\right) \leqslant E\left(\varphi(\xi|\mathcal{G})\right) \qquad P.P$$

Pour tout tribu $\mathcal{G}$ sur Ω contenant dans $\mathcal{F}$.

Chapitre 2

Processus Stochastique

2.1 Définitions et propriétés

Les définitions suivantes sont des extensions simples de celles introduites plus tôt pour les suites des variables aléatoires, l'idée sous-dessus étant celle d'une famille de variables aléatoires dépendant du temps.

Définition 2.1. Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires $\xi(t)$ paramétré par $t \in T$, où $T \subset \mathbb{R}$ .Quand $T = \{1, 2, ...\}$.On peut dire que $\xi(t)$ est un processus stochastique en temps discret (c'est-à-dire une suite de variables aléatoires) .

Pour tout fonction $\omega \in \Omega$

$$T \ni t \longrightarrow \xi(t, \omega)$$

est appelé un trajectoire (ou un chemin d'échantillon) de $\xi(t)$

Définition 2.2. Une famille $\mathcal{F}_t$ de tribu sur Ω paramétré par $t \in T$, où $T \subset \mathbb{R}$ est appelée filtration si

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$$

Pour tout $s, t \in T$ tel que $s < t$

Définition 2.3. Un processus stochastique $\xi(t)$ paramétré par $t \in T$ est appelée un martingale (sous-martingale , super-martingale) par rapport à une filtration $\mathcal{F}_t$ si

1. $\xi(t)$ est intégrable pour chaque $t \in T$
2. $\xi(t)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour chaque $t \in T$: dans ce cas, on dit que $\xi(t)$ est $\mathcal{F}_t$ adapté
3. $\xi(s) = E(\xi(t)|\mathcal{F}_s)$ (respectivement, $<$ ou $>$) pour chaque $s, t \in T$ tel que $s < t$

2.2 Mouvement Brownien

Imaginez un nuage de fumée dans l'air complètement immobile. À temps, le nuage s'étendra sur un grand volume, la concentration de fumée varie de manière douce. Cependant, si une seule particule de fumée est observée, sa trajectoire s'avère extrêmement rugueux en raison de collisions fréquentes avec d'autres particules.Ceci illustre deux aspects du même phénomène appelé diffusion : trajectoires de particules erratiques au niveau microscopique, donnant lieu à un comportement très lisse de la densité de l'ensemble des particules. Le processus de Wiener $W(t)$ défini ci-dessous est un dispositif mathématique conçu comme un modèle du mouvement de l'individu particules diffusais. En particulier, ses trajectoires présentent un comportement erratique similaire aux trajectoires des vraies particules de fumée. Pendant ce temps, la densité $f_{W(t)}$ de la variable aléatoire $W(t)$ est très lisse, donnée par la fonction exponentielle

$$f_{W(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

qui est une solution de l'équation de diffusion

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

et peut être interprété comme la densité au temps t d'un nuage de fumée sortant d'une source ponctuelle au temps 0.Le processus de Wiener $W(t)$ est également associé au nom du botaniste britannique Robert Brown qui, vers 1827, observait le mouvement aléatoire des particules de pollen dans l'eau.Nous étudierons principalement le processus de Wiener de dimension l, qui peut être considéré comme la projection de la position d'une particule de fumée sur l'un des axes d'un système de coordonnées. En plus de décrire le mouvement des particules diffusais, le processus de Wiener est largement appliquée dans les modèles mathématiques impliquant divers systèmes bruyants, par exemple, le comportement des prix des actifs à la bourse. Si le bruit dans le système est dû à une multitude de changements aléatoires indépendants, alors le théorème de limite centrale prédit que le résultat net aura la distribution normale, une propriété partagée par les incréments $W(t) - W(s)$ du Wiener processus. C'est l'une des principales raisons de l'utilisation répandue de $W(t)$ dans les modèles mathématiques.

2.2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.4. Le processus de Wiener (ou mouvement brownien) est un processus stochastique$W(t)$ avec des valeurs dans $\mathbb{R}$ défini pour $t \in [0, \infty)$ tel que

1. $W(0) = 0$ P.P
2. les trajectoires $t \to W(t)$ sont continues P.P
3. pour toute suite finie de temps $0 < t_1 < ..... < t_n$ et des ensembles Boréliennes $A_1, ..., A_n \subset \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & P\{W(t_1) \in A_1, ..., W(t_n) \in A_n\} \\ = & \int_{A_1} .... \int_{A_n} p(t_1, 0, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) ...... p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) dx_1 ..... dx_n \end{aligned}$$

Où

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} \tag{2.1}$$

défini pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $t > 0$ est appelée la densité de transition.

Définition 2.5. On dit que $W(t) = (W(t)^1, ..., W(t)^n)$ un processus de Wiener de dimension n si $W(t)^1, ..., W(t)^n$ sont des processus indépendants de Wiener $\mathbb{R}$ évalués .

2.2.2 Incréments de mouvement Brownien

Proposition 2.1. *Pour tout $0 \leqslant s < t$ l'incrément $W(t)-W(s)$ a la distribution normale avec sens 0 et variance $t-s$.*

Démonstration

Par la condition 3) de la définition 2.4, la densité conjointe de $W(s), W(t)$ est

$$f_{W(s),W(t)}(x,y) = p(s,0,x)p(t-s,x,y)$$

Par conséquent, pour tout ensemble Borélienne A

$$\begin{aligned}
P\{W(t)-W(s) \in A\} &= \int\limits_{\{(x,y):y-x\in A\}} p(s,0,x)p(t-s,x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} p(s,0,x)\left(\int\limits_{\{y:y-x\in A\}} p(t-s,x,y)dy\right)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} p(s,0,x)\left(\int_A p(t-s,x,x+u)du\right)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} p(s,0,x)\left(\int_A p(t-s,0,u)du\right)dx \\
&= \int_A p(t-s,0,u)du \int_{-\infty}^{\infty} p(s,0,x)dx \\
&= \int_A p(t-s,0,u)du
\end{aligned}$$

Mais $f(u) = p(t-s,0,u)$ est la densité de la distribution normale avec sens 0et la variance $t-s$, ce qui prouve le demande .

Corollaire 2.1. *La proposition 2.1 implique que $W(t)$ a des incréments stationnaires.*

Proposition 2.2. *pour tout $0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant .... \leqslant t_n$ des incréments*

$$W(t_1)-W(t_0), ..., W(t_n)-W(t_{n-1})$$

sont indépendants

Démonstration

D'après la proposition 2.1, nous savons que les incréments de $W(t)$ a la distribution normale. Parce que les variables aléatoires normalement distribuées sont indépendantes si et seulement si elles ne sont pas corrélées, il suffit de vérifier

$$E\left[(W(u)-W(t))\left(W(s)-W(r)\right)\right] = 0$$

pour tout $0 \leqslant r \leqslant s \leqslant t \leqslant u$

$$\begin{aligned}
E\left[(W(u)-W(t))\left(W(s)-W(r)\right)\right] &= E\left(W(u)W(s)\right) - E\left(W(u)W(r)\right) \\
&\quad -E\left(W(t)W(s)\right) + E\left(W(t)W(r)\right) \\
&= s-r-s+r \\
&= 0
\end{aligned}$$

Corollaire 2.2. *Pour tout $0 \leqslant s \leqslant t$ l'incrément $W(t) - W(s)$ est indépendant du tribu*

$$\mathcal{F}_s = \sigma\{W(r) : 0 \leqslant r \leqslant s\}$$

Démonstration

Par la proposition 2.2 les variables aléatoires $W(t) - W(s)$ et $W(r) - W(0) = W(r)$ sont indépendant si $0 \leqslant r \leqslant s \leqslant t \leqslant u$ .Car la tribu $\mathcal{F}_s$ est engendré par $W(r)$, il s'ensuit que $W(t) - W(s)$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$

Théorème 2.1. *Un processus stochastique $W(t)$, $t \leqslant 0$, est un processus de Wiener si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiés :*

— $W(0) = 0$ *P.P*
— *les marches aléatoires $t \to W(t)$ sont continues P.P*
— $W(t)$ *a des incréments indépendants stationnaires*
— *l'incrément W (t) - W (s) a la distribution normale avec la sens* 0 *et variance* $t - s$ *pour tout* $0 \leqslant s < t$

Théorème 2.2. ***(La Caractérisation de la Martingale de Lévy)***
Soit $W(t), t \geqslant 0$ un processus stochastique et soit $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s, s \leqslant t\}$ être la filtration engendré par elle.Alors $W(t)$ est un processus de Wiener si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiés

— $W(0) = 0$ *P.P*
— *les trajectoires $t \to W(t)$ sont continues P.P*
— $W(t)$ *est une martingale par rapport à la filtration* $\mathcal{F}_t$
— $|W(t)|^2 - t$ *est une martingale par rapport à la filtration* $\mathcal{F}_t$

2.2.3 Les Trajectoires

Soit

$$0 = t_0^n < t_1^n < .... < t_n^n = T$$

Où

$$t_i^n = \frac{iT}{n}$$

être une partition de l'intervalle $[0, T]$ en n parties égales. On note par

$$\Delta_i^n(W) = W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n)$$

les incréments correspondants du processus de Wiener $W(t)$.

Définition 2.6. La variation d'une fonction $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ défini pour être

$$\limsup_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

Où $t = (t_0, t_0, ..., t_n)$ est une partition de $[0, T]$, c'est-à-dire. $0 = t_0^n < t_1^n < .... < t_n^n = T$ et où

$$\Delta_t = \max_{\{i=0,.....,n-1\}} |t_{i+1} - t_i|$$

Théorème 2.3. *La variation des trajectoires de $W(t)$ est infinie P.P.*

Démonstration

Considérez la suite des partitions $t^n = (t_0^n < t_1^n < .... < t_n^n)$ de $[0, T]$ en n parties égales. alors

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\Delta_i^n W|^2 \leqslant \left(\max_{\{i=0,.....,n-1\}} |\Delta_i^n W| \right) \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta_i^n W|$$

Puisque les trajectoires de $W(t)$ sont P. P continu sur $[0, T]$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\max_{\{i=0,.....,n-1\}} |\Delta_i^n W| \right) = 0 \qquad P.P$$

Donc , il y a une sous-suite $t^{n_k} = (t_0^{n_k} < t_1^{n_k} < .... < t_n^{n_k})$ de partitions tel que

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{n_k-1} |\Delta_i^{n_k} W|^2 = T \qquad P.P$$

C'est parce que chaque suite de variables aléatoires convergente en L^2 a un sous-suite convergente P.P. Il s'ensuit que

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{n_k-1} |\Delta_i^{n_k} W| = \infty \qquad P.P$$

tandis que

$$\lim_{k\to\infty} \Delta_i^{n_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{T}{n_k} = 0$$

ce qui prouve le théorème.

Le théorème 2. 3 a des conséquences importantes pour la théorie des intégrales stochastiques

$$\int_0^T f(t) dW(t)$$

ne peut pas être défini marche sage (c'est-à-dire, séparément pour chaque $\omega \in \Omega$ comme le Riemann-Stieltjes intégral si les marches ont une variation infinie. Il s'avère qu'une approche intrinsèquement stochastique sera nécessaire pour tacle à de telles intégrales

Théorème 2.4. *le processus de Wiener $W(t)$ est non différentiable à tout $t \geqslant 0$*

2.2.4 Les Martingales

Le concept d'une martingale a son origine dans le jeu, à savoir, il décrit un jeu de hasard juste, qui sera discuté en détail dans la section suivante. De même, les notions de sous-martingale et sur-martingale définies ci-dessous sont liées à des jeux de hasard favorables et défavorables. Certains aspects du jeu sont inhérents aux mathématiques de la finance, en particulier la théorie de la les dérivés financiers tels que les options. Sans surprise, les martingales y jouent un rôle crucial. En fait , martingales atteignent bien au-delà de la théorie des jeux et apparaissent dans divers domaines de la probabilité moderne et de l'analyse stochastique, notamment dans la théorie de la diffusion. Tout d'abord, introduisons les définitions et propriétés de base dans le cas du temps discret.

Définition 2.7. Une suite des variables aléatoires $\xi_1, \xi_2, ...$ est appelé une martingale par rapport à une filtration $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ...$ Si

1. ξ_n est intégrable pour chaque $n = 1, 2, ...$
2. $\xi_1, \xi_2, ...$ est adapté à $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ...$
3. $E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \xi_n$ p.p pour chaque $n = 1, 2, ...$

Exemple 2.1. Soit $\eta_1, \eta_2, ...$ une séquence de variables aléatoires indépendantes intégrables telles que $E(\eta_n) = 0$ pour tout $n = 1, 2, ...$ on pose

$$\xi_n = \eta_1 + ... + \eta_n$$

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\eta_1, ..., \eta_n)$$

Alors ξ_n est adapté à la filtration $\mathcal{F}_n$ et il est intégrable parce que

$$\begin{aligned} E(|\xi_n|) &= E(|\eta_1 + ... + \eta_n|) \\ &\leqslant E(|\eta_1) + ... + E(|\eta_n) \\ &< \infty \end{aligned}$$

De plus ,

$$\begin{aligned} E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= E(\eta_{n+1}|\mathcal{F}_n) + E(\xi_n|\mathcal{F}_n) \\ &= E(\eta_{n+1}) + \xi_n \\ &= \xi_n \end{aligned}$$

depuis η_{n+1} est indépendant de $\mathcal{F}_n$ ('et la condition indépendante disparaît') et ξ_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable ("sortir ce qui est connu"). Cela signifie que ξ_n est une martingale par rapport à $\mathcal{F}_n$

Définition 2.8. On dit que $\xi_1, \xi_2, ...$ est une sur-martingale (sous-martingale) par rapport à une filtration $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ...$ Si

1. ξ_n est intégrable pour chaque $n = 1, 2, ...$
2. $\xi_1, \xi_2, ...$ est adapté à $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ...$
3. $E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leqslant \xi_n$ (respectivement , $E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geqslant \xi_n$) p.p pour chaque $n = 1, 2, ...$

2.2.5 Mouvement Brownien comme étant une martingale

Proposition 2.3. *Le processus W est une martingale. Le processus $(W_t^2 - t, t \geqslant 0)$ est une martingale.Réciproquement, si X est un processus continu tel que X et $(X_t^2 - t, t \geqslant 0)$ sont des martingales, X est un mouvement Brownien.*

Démonstration

Nous ne démontrons que la partie directe. La réciproque est plus difficile à établir (Voir Revuz-Yor) mais très utile.
L'idée est d'utiliser l'indépendance des accroissements pour calculer les espérances conditionnelles, et d'utiliser la propriété $E(X|\mathcal{G}) = E(X)$ quand X et $\mathcal{G}$ sont indépendantes. Soit $s \leqslant t$.

$$E(W_t|\mathcal{F}_s) = E(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) + E(W_s|\mathcal{F}_s) = 0 + W_s$$

De même $E((W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s) = t - s$ et

$$E((W_t-W_s)^2|\mathcal{F}_s) = E(W_t^2-W_s^2-2W_tW_s|\mathcal{F}_s) = E(W_t^2|\mathcal{F}_s)+W_s^2-2W_sE(W_t|\mathcal{F}_s) = E(W_t^2|\mathcal{F}_s)-W_s^2$$

On obtient alors

$$E(W_t^2 - t|\mathcal{F}_s) = W_s^2 - s$$

Proposition 2.4. *Soit W_1 et W_2 deux MB indépendants. Le produit B_1B_2 est une martingale.*

Définition 2.9. On dit que X est un $\mathcal{F}_s$-mouvement Brownien si W et $(W_t^2 - t, t \geqslant 0)$ sont des $\mathcal{F}_s$-martingales .

Proposition 2.5. *Pour tout λ réel, le processus*

$$\left(\exp(\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t), t \geqslant 0\right)$$

est une martingale.

Chapitre 3

Équations Différentielles stochastiques

L'une des premières applications du processus de Wiener a été proposée par Bachelier, qui, vers 1900, a rédigé un document révolutionnaire sur le mouvement des prix des actifs à la Bourse de Paris. Bien sûr, Bachelier n'aurait pas pu l'appeler le processus de Wiener, mais il a utilisé ce qui dans la terminologie moderne équivaut à $W(t)$ comme description des fluctuations du marché affectant le prix $X(t)$ d'un actif.A savoir, il a supposé que les incréments de prix infinitésimaux $dX(t)$ sont proportionnels aux incréments $dW(t)$ du processus de Wiener,

$$dX(t) = \sigma dW(t)$$

où σ est une constante positive. Par conséquent, un actif avec le prix initial $X(0) = x$ ça vaudrait le coup

$$X(t) = x + \sigma W(t)$$

à l'instant t. Cette approche était en avance sur l'époque de Bachelier, mais elle souffrait d'un grave défaut : pour $t > 0$ le prix $X(t)$ peut être négatif avec une probabilité non nulle. Néanmoins, pour de courtes périodes, cela fonctionne assez bien, puisque la probabilité est négligeable. Même si elle augmente, la probabilité que $X(t) < 0$ et le modèle s'écarte de la réalité.

Pour remédier à la faille, il a été observé que les investisseurs travaillent en termes de gain ou de perte potentielle $dX(t)$ proportionnellement à la somme investie $X(t)$.Par conséquent, c'est en fait le prix relatif $dX(t)/X(t)$ d'un actif qui réagit aux fluctuations du marché, c'est-à-dire qu'il devrait être proportionnel à $dW(t)$,

$$dX(t) = \sigma X(t)dW(t) \tag{3.1}$$

Quelle est la signification mathématique précise de cette égalité ? Formellement, il ressemble à une équation différentielle, mais cela conduit immédiatement à une difficulté parce que les chemins de $W(t)$ ne sont nulle part différentiables. Un moyen de contourner l'obstacle a été trouvé par Itô dans les années quatre-vingt. Dans sa théorie extrêmement réussie des intégrales stochastiques et des équations différentielles stochastiques, Itô a donné une signification rigoureuse aux équations telles que (3.1) en les écrivant comme des équations intégrales impliquant un nouveau .Intégrale. En particulier, (3.1) peut être écrit comme

$$X(t) = x + \sigma \int_0^t X(t)dW(t)$$

où l'intégrale par rapport à $W(t)$ sur le côté droit s'appelle l'intégrale stochastique Itô et sera définie dans la section suivante. Alors qu'à première vue on s'attendrait à ce que la solution à cette équation soit $xe^{W(t)}$, en fait il s'avère

$$X(t) = xe^{W(t)}e^{-\frac{t}{2}}$$

Le facteur supplémentaire intriguant $e^{\frac{t}{2}}$ est due à la non-différentiabilité des marches du processus de Wiener. Clairement, si $x > 0$,Alors $X(t) > 0$ pour tout $t \geqslant 0$, comme requis dans le modèle des prix des actifs. Dans les sections suivantes, nous apprendrons comment transformer et calculer des intégrales stochastiques et comment résoudre des équations différentielles stochastiques.
Tout au long de ce chapitre W (t) désignera un procédé de Wiener adapté à une filtration $\mathcal{F}$ et L^2 sera l'espace des variables aléatoires carrées intégrables .

3.1 Intégrale d'Itô

On suivre une construction ressemblant à celle de l'intégrale de Riemann.D'abord l'intégrale sera définie pour une classe de processus constants par morceaux appelé processus par étapes aléatoires. Ensuite, il sera étendu à une classe plus grande par approximation. Il y a cependant au moins deux différences majeures entre les intégrales de Riemann et d'Itô . L'un est le type de convergence. Les approximations de l'intégrale de Riemann convergent dans $\mathbb{R}$. Tandis que l'intégrale Itô sera approximée par des suites de variables aléatoires convergeant dans L^2. L'autre différence est la suivante. Les sommes de Riemann approximant l'intégrale d'une fonction $f : [0, t] \to \mathbb{R}$ sont de la forme

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(s_j)(t_{j+1} - t_j)$$

Où $0 = t_0 < t_1 < ..... < t_n = T$ et s_j point arbitraire dans $[t_j, t_{j+1}]$ pour chaque j . La valeur de l'intégrale de Riemann ne dépend pas du choix des points $s_j \in [t_j, t_{j+1})$. Dans le cas stochastique, les sommes approximatives auront la forme

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(s_j) \left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)$$

Il s'avère que la limite de telles approximations dépend du choix des points intermédiaires $s_j \in [t_j, t_{j+1}]$.

Définition 3.1. On appelle $f(t), t \leqslant 0$ un variable aléatoire pas à pas procès s'il y a une suite finie de nombres $0 = t_0 < t_0 < .... < t_n = T$ et des variables aléatoires carrées intégrables $\eta_0, \eta_1, ..., \eta_{n-1}$

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j 1_{[t_j, t_{j+1})}(t) \tag{3.2}$$

Où η_j est $\mathcal{F}_{t_j}$-mesurable pour $j = 0, 1, ..., n - 1$.L'ensemble des processus aléatoires d'étapes sera désigné par M^2_{step}

Observez que l'hypothèse selon laquelle η_j sont $\mathcal{F}_{t_j}$-mesurable s'assure que $f(t)$ est adapté à la filtration L'hypothèse que les η_j sont carrés intégrables garantit que $f(t)$ est carré intégrable pour chaque t.Aussi M^2_{step} est un espace vectoriel, c'est-à-dire $af + bg \in M^2_{step}$ pour tout $f, g \in M^2_{step}$ et $a, b \in \mathbb{R}$

Définition 3.2. L'intégrale stochastique d'un variable aléatoire pas à pas procès $f \in M^2_{step}$ de la forme (3.2) définie par

$$I(f) = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j \left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right) \tag{3.3}$$

Proposition 3.1. *Pour tout processus d'étape aléatoire $f \in M^2_{step}$ l'intégrale stochastique $I(f)$ est un variable aléatoire carré intégrable,i.e $I(f) \in L^2$,tel que*

$$E\left(|I(f)|^2\right) = E\left(\int_0^\infty |f(t)|^2 dt\right)$$

Démonstration

Notons l'incrément $W(t_{j+1}) - W(t_j)$ par $\Delta_j W$ et $t_{j+1} - t_j$ par $\Delta_j t$ pour la concision. alors

$$E(\Delta_j W) = 0 \quad et \quad E(\Delta_j^2 W) = \Delta_j t$$

D'abord , on calcule l'espérance de

$$|I(f)|^2 = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \eta_j \eta_k \Delta_j W \Delta_k = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j^2 \Delta_j^2 W + 2\sum_{k<j} \eta_j \eta_k \Delta_j W \Delta_k$$

Lorsque η_j et $\Delta_j W$ sont indépendants

$$E(\eta_j \Delta_j^2 W) = E(\eta_j) E(\Delta_j^2 W) = E(\eta_j^2)\Delta_j t$$

Si $k < j$,alors $\eta_j \eta_k \Delta_j W$ et $\Delta_j W$ sont indépendants ,donc

$$E(\eta_j \eta_k \Delta_j W \Delta_k W) = E(\eta_j \eta_k \Delta_k W) E(\Delta_j W)$$

De plus

$$E\left(|I(f)|^2\right) = \sum_{j=0}^{n-1} E(\eta_j^2)\Delta_j t$$

Il s'ensuit que $I(f) \in L^2$,lorsque $\eta 0, \eta 1, ..., \eta n - 1 \in L^2$
De l'autre côté,

$$|f(t)|^2 = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \eta_j \eta_k 1_{[t_j, t_{j+1})}(t) 1_{[t_k, t_{k+1})}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j^2 1_{[t_j, t_{j+1})}(t)$$

Implique que

$$E\left(\int_0^\infty |f(t)|^2 dt\right) = E(\eta_j^2)\Delta_j t$$

Cela signifie que

$$E\left(|I(f)|^2\right) = E\left(\int_0^\infty |f(t)|^2 dt\right)$$

comme demandé.

Définition 3.3. On note par M^2 la classe des processus stochastiques $f(t), t \leqslant 0$ tel que

$$E\left(\int_0^\infty |f(t)|^2 dt\right) < \infty$$

et il y a une suite $f_1, f_2, ... \in M^2_{step}$ des processus pas à pas aléatoires tels que

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\int_0^\infty |f(t) - f_n(t)|^2 dt\right) = 0 \tag{3.4}$$

Dans ce cas, on dits que la suite des processus aléatoires $f_1, f_2, ...$ approximer f dans M^2.

Définition 3.4. On appelle $I(f) \in L^2$ l'intégrale stochastique Itô (de 0 à ∞) de $f \in M^2$ si

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\int_0^\infty |I(f) - I(f_n)|^2 dt\right) = 0 \tag{3.5}$$

Pour tout suite $f_1, f_2, ... \in M^2_{step}$ des processus d'étape aléatoire qui se approxime $f \in M^2$ i.e. tel que (3.2) est satisfait. On écrits aussi

$$\int_0^\infty f(t) dW(t)$$

au lieu de $I(f)$

Proposition 3.2. *Pour tout $f \in M^2$ l'intégrale stochastique $I(f) \in L^2$ existe, est unique (en tant qu'élément de L^2 i.e. à l'égalité p.s.) et satisfait*

$$E\left(|I(f)|^2\right) = E\left(\int_0^\infty |I(f)|^2 dt\right) \tag{3.6}$$

Démonstration

Il sera approprié d'écrire

$$\|f\|_{M^2} = \sqrt{E\left(\int_0^\infty |I(f)|^2 dt\right)} \quad et \quad \|\eta\|_{L^2} = \sqrt{E(\eta^2)}$$

Pour tout $f \in M^2$ et $\eta \in L^2$ Ce sont les normes 1 dans M^2 et L^2 respectivement
Soit $f_1, f_2, ... \in M^2_{step}$ suite des processus d'étape aléatoire qui se approxime $f \in M^2$, c'est à dire . satisfaisant (3.2), qui peut s'écrire

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{M^2} = 0$$

on prétend que $I(f_1), I(f_2), ...$ est une suite de Cauchy de L^2 . En effet, pour tout $\epsilon > 0$ il y a un N tel que $\|f - f_n\|_{M^2} < \frac{\epsilon}{2}$ pour tout $n > N$par la Proposition 3. 1

$$\begin{aligned}
\|I(f_m) - I(f_n)\|_{L^2} &= \|I(f_m - f_n)\|_{L^2} \\
&= \|f_m - f_n\|_{M^2} \\
&\leqslant \|f - f_m\|_{M^2} + \|f - f_n\|_{M^2} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

pour tout $m, n > N$ qui prouve la proposition

Comme L^2 avec la norme $\|.\|_{L^2}$ est un espace complet (en fait un espace de Hilbert), toute suite de Cauchy a un limite.Il s'ensuit que $I(f_1), I(f_2), ...$ a un limite dans L^2 pour toute suite $f_1, f_2, ...$ suite des processus d'étape aléatoire qui se approxime f .Reste à montrer que la limite est la même pour toutes ces séquences. Suppose que $f_1, f_2, ...$ et $g_1, g_2, ...$ sont deux suite des processus d'étape aléatoire qui se approxime f .Ensuite, la séquence entrelacée $f_1, g_1, f_2, g_2......$ se approxime f aussi, donc la suite $I(f_1), I(g_1), I(f_2), I(g_2)......$ a un limite dans L^2 . Mais alors toutes les sous-suite de cette dernière suite, en particulier,$I(f_1), I(f_2), ...$ et $I(g_1), I(g_2), ...$ possède le même limite, que nous désignons par $I(f)$. Nous avons montré que

$$\lim_{n\to\infty} \|I(f) - I(f_n)\|_{L^2} = 0$$

i.e (3, 3) est valable pour n'importe quelle suite $f_1, f_2, ...$ suite des processus d'étape aléatoire qui se approxime f
Enfin, par la proposition 3. 1

$$\|I(f_n)\|_{L^2} = \|f_n\|_{M^2}$$

pour chaque n, puisque le f_n sont des processus d'étape aléatoire .En prenant la limite comme $n \to \infty$ on obtient

$$\|I(f)\|_{L^2} = \|f\|_{M^2}$$

Mais c'est l'égalité (3.4).

Définition 3.5. Pour tout $T > 0$ on note par M_T^2 l'espace de tous les processus stochastiques $f(t), t \geqslant 0$ tel que

$$1_{[0,T)} f \in M^2$$

L'intégrale stochastique d'Itô (de 0 à T) de $f \in M_T^2$ est défini par

$$I_T(f) = I(1_{[0,T)} f) \tag{3.7}$$

On peut écrire aussi

$$\int_0^T f(t) dW(t)$$

au lieu de $I_T(f)$

Théorème 3.1. *Soit $f(t), t \geqslant 0$ un processus stochastique avec marches continues P.P adapté à la filtration $\mathcal{F}_t$.Alors*

1. *$f \in M^2$,i.e l'intégrale d'Itô $I(f)$ existe , quand*

$$E\left(\int_0^\infty |I(f)|^2 dt\right) < \infty \tag{3.8}$$

2. *$f \in M_T^2$,i.e l'intégrale d'Itô $I_T(f)$ existe , quand*

$$E\left(\int_0^T |I(f)|^2 dt\right) < \infty \tag{3.9}$$

Démonstration

1. supposons que $f(t), t \geqslant 0$ est un processus adapté avec marches continues P.P. Si (3.6) vérifié ,alors

$$f_n(t) = \begin{cases} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(s)ds & \text{si } \frac{k-1}{n} \leqslant t < \frac{k}{n} \text{pour} \quad k = 1, 2, ..., n^2 - 1 \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \tag{3.10}$$

est une suite de processus de pas aléatoires dans M_2^{step} .Observez cela pour tout $k = 1, 2, ...$

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} |f_n(t)|^2 dt = n \left| \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)dt \right|^2 \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} |f_n(t)|^2 dt \quad \text{P.P} \tag{3.11}$$

Par l'inégalité de Jensen

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty |f(t) - f_n(t)|^2 dt = 0 \quad \text{P.P}$$

Ce qui implique que

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\int_0^\infty |f(t) - f_n(t)|^2 dt \right) = 0\text{P.P}$$

d'après la théorème de la convergence dominé (Lebesgue) et la condition (3.8) car

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f(t) - f_n(t)|^2 dt &\leqslant 2\int_0^\infty \left(|f(t)|^2 + |f_n(t)|^2 \right) dt \\ &\leqslant 4\int_0^\infty |f(t)|^2 dt \end{aligned}$$

Le dernière inégalité suit, depuis

$$\int_0^\infty |f_n(t)|^2 dt \leqslant \int_0^\infty |f(t)|^2 dt$$

pour tout n,on prend la somme de $k = 0$ jusqu'à ∞ de (3.11)
Pour vérifier la demande, observez que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f(t) - f_n(t)|^2 dt &= \int_0^N |f(t) - f_n(t)|^2 dt + \int_N^\infty |f(t) - f_n(t)|^2 dt \\ &\leqslant \int_0^N |f(t) - f_n(t)|^2 dt + 2\int_N^\infty \left(|f(t)|^2 + |f_n(t)|^2 \right) dt \\ &\leqslant \int_0^N |f(t) - f_n(t)|^2 dt + 4\int_{N-1}^\infty |f(t)|^2 dt \quad \text{P.P} \end{aligned}$$

Le dernière inégalité tient parce que

$$\int_N^\infty |f(t)|^2 dt \leqslant \int_{N-\frac{1}{n}}^\infty |f(t)|^2 dt \leqslant \int_{N-1}^\infty |f(t)|^2 dt \quad \text{P.P}$$

pour tout n et N, en prenant la somme de $k = nN$ jusqu'à ∞ de (3.11). La demande suit parce que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{N-1}^\infty |f(t)|^2 dt \quad \text{P.P}$$

d'après (3.8) et

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^N |f(t) - f_n(t)|^2 dt = 0 \quad \text{P.P}$$

pour tout N fixé par la continuité des marches de f
Ce qui précède signifie que la suite $f_1, f_2, ... \in M_{step}^2$ approxime f dans le sens de Définition 3.3, donc $f \in M^2$.

2. Si f vérifie (3.9) pour T> 0, alors $1_{[0,T)}f$ vérifie (3.8). Depuis f est adapté et a des marches continues p.p , $1_{[0,T)}f$ est aussi adapté et ses marches sont continues p.p , sauf peut-être à T.Mais le manque de continuité au seul point T n'affecte pas l'argument de 1),donc $1_{[0,T)}f \in M^2$ .Cela implique à son tour que $f \in M_T^2$, complétant la preuve.

Le théorème suivant. que nous déclarerons sans preuve,fournit une caractérisation de $M2$ et M_T^2 ,c'est-à-dire une condition nécessaire et suffisante pour un processus stochastique f appartenir à $M2$ ou M_T^2. Cela implique la notion d'un processus progressivement mesurable.

Définition 3.6. Un processus stochastique $f(t), t \geqslant 0$ est appelé progressivement mesurable si pour tout $t \geqslant 0$

$$(s, \omega) \to f(s, \omega)$$

est une fonction mesurable de $[0, t] \times \Omega$ avec la tribu $\mathcal{B}[0, t]\bar{\times}\mathcal{F}$ à $\mathbb{R}$.Ici $\mathcal{B}[0, t]\bar{\times}\mathcal{F}$ est la tribu de produit sur $[0, t] \times \Omega$,c'est le plus petit tribu contient tous les ensembles du forme $A \times B$,Où $A \subset [0, t]$ est un ensemble Borélienne et $B \in \mathcal{F}$.

Théorème 3.2.

1. *L'espace M^2 consiste tous les processus stochastiques progressivement mesurables $f(t), t \geqslant 0$ tel que*
$$E\left(\int_0^\infty |f(t)|^2 dt\right) < \infty.$$
2. *L'espace M_T^2 consiste tous les processus stochastiques progressivement mesurables $f(t), t \geqslant 0$ tel que*
$$E\left(\int_0^T |f(t)|^2 dt\right) < \infty.$$

3.2 Exemples

Le Processus de Wiener $W(t)$ appartient à M_T^2 pour tout $T > 0$.Par conséquent, l'intégrale stochastique dans l'exemple suivant existe.

Exemple 3.1. vérifié l'égalité

$$\int_0^T W(t)dW(t) = \frac{1}{2}W(T)^2 - \frac{1}{2}T$$

en calculant l'intégrale stochastique à partir de la définition, c'est-à-dire en l'intégrante par des fonctions aléatoires.

Exemple 3.2. vérifié l'égalité

$$\int_0^T t dW(t) = TW(T) - \int_0^T W(t)dt$$

en calculant l'intégrale stochastique à partir de la définition.(L'intégrale du côté droit est comprise comme une intégrale de Riemann définie par un marche, c'est-à-dire séparément pour chaque $\omega \in \Omega$

Astuce Vous pouvez utiliser la même partition de $[0,T]$ en n parties égaux comme dans la solution 3. 8. Les sommes qui approchent l'intégrale stochastique peuvent être transformées à l'aide de l'identité

$$c(b-a) = (db - ca) - b(d-c)$$

Exemple 3.3. Montrer que $W(t)^2$ appartient à M_T^2 pour chaque $T > 0$ et vérifiez l'égalité

$$\int_0^T W(t)^2 dW(t) = \frac{1}{3}W(T) - \int_0^T W(t)dt$$

où l'intégrale sur le côté droit est une intégrale de Riemann .

Astuce Comme dans les exemple ci-dessus, il est commode d'utiliser la partition de $[0,T]$ en n parties égaux. L'identité

$$a^2(b-a) = \frac{1}{3}(b^3 - a^3) - a(b-a)^2 - \frac{1}{3}(b-a)^3$$

peut être appliqué pour transformer les sommes approximant l'intégrale stochastique. Vous pouvez également avoir besoin de l'identité suivante :

$$(a^2 - b^2)^2 = (a-b)^4 + 4b(a-b)^3 + 4b^2(a-b)^2$$

3.3 Propriétés de L'intégrale Stochastique

Les propriétés de base de l'intégrale d'Itô sont résumées dans le théorème ci-dessous.

Théorème 3.3.
Les propriétés suivantes sont vrais pour tout $f, g \in M_t^2$,tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et tout $0 \leqslant s < t$:

1. *Linéarité*

$$\int_0^t (\alpha f(r) + \beta g(r))\, dW(r) = \alpha \int_0^t f(r)dW(r) + \beta \int_0^t g(r)dW(r)$$

2. *Isométrie*

$$E\left(\left|\int_0^t f(r)dW(r)\right|^2\right) = E\left(\int_0^t |f(r)|^2 dW(r)\right)$$

3. *Propriété de Martingale*

$$E\left(\int_0^t f(r)dW(r)|\mathcal{F}_s\right) = \int_0^s f(r)dW(r)$$

Démonstration

1. Si f et g appartiennent à M_t^2 ,alors $1_{[0,t]}f$ et $1_{[0,t]}g$ appartiennent à M^2, alors il y a suites $f_1, f_2, ...$ et $g_1, g_2, ... \in M_{step}^2$ approxime $1_{[0,t]}f$ et $1_{[0,t]}g$ .Il s'ensuit que $1_{[0,t]}(\alpha f + \beta g)$ peut être approximé par $\alpha f_1 + \beta g_1, \alpha f_2 + \beta g_2, ...$

$$I(\alpha f_n + \beta g_n) = \alpha I(f_n) + \beta I(g_n)$$

Pour chaque n .Prenant la limite de L^2 des deux côtés de cette égalité comme $n \to \infty$,on obtient

$$I(1_{[0,t]}\alpha f_n + 1_{[0,t]}\beta g_n) = \alpha I(1_{[0,t]}f_n) + \beta I(1_{[0,t]}g_n)$$

ce qui prouve 1).

2. Cela suit en se approximant $1_{[0,t]}f$ par des processus d'étape au hasard dans M^2_{step} et en utilisant la proposition 3. 1
3. Si f appartiennent à M^2_t ,alors $1_{[0,t]}f$ appartiennent à M^2 .Soit $f_1, f_2, ...$ être un suite de processus de M^2_{step} approximant $1_{[0,s]}f$

$$E\left(I(1_{[0,t]}f_n|\mathcal{F}_s\right) = I(1_{[0,s]}f_n) \tag{3.12}$$

pour chaque n. En prenant la limite de L^2 des deux côtés de cette égalité comme $n \to \infty$,on montrons que

$$E\left(I(1_{[0,t]}f|\mathcal{F}_s\right) = I(1_{[0,s]})$$

ce qui est ce qui doit être prouvé. En effet, observez $1_{[0,s]}f_1, 1_{[0,s]}f_2, ...$ est un suite de M^2_{step} approximant $1_{[0,t]}f$,donc

$$I(1_{[0,s]}f_n) \to I(1_{[0,s]}f) \quad \text{dans} \quad L^2 qaund \quad n \to \infty$$

De même façon ,$1_{[0,t]}f_1, 1_{[0,t]}f_2, ...$ est un suite de M^2_{step} approximant $1_{[0,t]}f$ ce qui implique que

$$I(1_{[0,t]}f_n) \to I(1_{[0,t]}f) \quad \text{dans} \quad L^2 qaund \quad n \to \infty$$

Le lemme ci-dessous implique que

$$E\left(I(1_{[0,t]}f_n)|\mathcal{F}_s\right) \to E\left(I(1_{[0,t]}f)|\mathcal{F}_s\right) \quad \text{dans} \quad L^2 qaund \quad n \to \infty$$

La preuve complète

Lemme 3.1. *Soit ξ et $\xi_1, \xi_2, ...$ sont des variables aléatoires carrées intégrables telles que $\xi_n \to \xi$ dans L^2 quand $n \to \infty$,Alors*

$$E(\xi_n|\mathcal{G}) \to E(\xi|\mathcal{G}) \quad dans \quad L^2 qaund \quad n \to \infty$$

ou tout tribu $\mathcal{G}$ sur Ω contenant dans $\mathcal{F}$.

Démonstration

Par l'inégalité de Jensen, voir le théorème 2. 2,

$$|E(\xi_n|\mathcal{G}) - E(\xi|\mathcal{G})|^2 = |E(\xi_n - \xi|\mathcal{G})|^2 \leqslant E\left(|\xi_n - \xi|^2|\mathcal{G})\right)$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} E\left(|E(\xi_n|\mathcal{G}) - E(\xi|\mathcal{G})|^2\right) &\leqslant E\left(|E(\xi_n - \xi|\mathcal{G})|^2\right) \\ &= E\left(|\xi_n - \xi|^2|\mathcal{G})\right) \to 0 \end{aligned}$$

quand $n \to \infty$.

Dans le théorème suivant, nous considérons l'intégrale stochastique $\int_0^t f(s)dW(s)$ en fonction de la limite d'intégration supérieure t.De même façon quant à l'intégrale de Riemann, il est naturel de se demander s'il s'agit d'une fonction continue de t. La réponse à cette question implique la notion de modification d'un processus stochastique

Définition 3.7. Soit $\xi(t)$ et $\zeta(t)$ être des processus stochastiques définis pour $t \in T$,Où $T \subset \mathbb{R}$ on dit que les processus sont des modifications (ou des versions) les uns des autres si

$$P\{\xi(t) - \zeta(t)\} = 1 \quad \text{Pour tout} \quad t \in T \tag{3.13}$$

Remarque 3.1. *Si $T \subset \mathbb{R}$ est un ensemble dénombrable, alors (3.13) est équivalent à la condition*

$$P\{\xi(t) = \zeta(t) \ \ \textit{for all} \ \ t \in T\} = 1$$

Cependant, ce n'est pas nécessairement le cas si T est non dénombrable.
Le résultat suivant est indiqué sans preuve.

Théorème 3.4.
Soit $f(s)$ un processus appartenant à M_t^2 et soit

$$\xi(t) = \int_0^t f(s)dW(s)$$

pour tout $t \geqslant 0$ Ensuite, il existe une modification adaptée $\xi(t)$ et $\zeta(t)$ avec des marches continues p.p .Cette modification est unique jusqu'à l'égalité p.p.

A partir de maintenant, on identifier toujours $\int_0^t f(s)dW(s)$ avec la modification adaptée ayant un marche continue p.p. Cette convention fonctionne avec Théorème 3. 1 chaque fois qu'il est nécessaire de montrer qu'une intégrale stochastique peut être utilisée comme l'intégrale d'une autre intégrale stochastique, i. e. appartient à M_t^2, pour $T \geqslant 0$.

3.4 Différentiel Stochastique et Formule d'Itô

Toute fonction continument différentiable $x(t)$ telle que $x(0) = 0$ satisfait les formules

$$x(T)^2 = 2\int_0^T x(t)dx(t)$$

$$x(T)^3 = 3\int_0^T x(t)^2dx(t)$$

où $dx(t)$ peut simplement être compris comme une notation abrégée pour $x'(t)dt$, les intégrales du côté droit étant des intégrales de Riemann. Des formules similaires ont été obtenues dans les exemples 3.8 et 3. 10 pour le processus de Wiener :

$$W(T)^2 = \int_0^T dt + 2\int_0^T W(t)dW(t)$$

$$W(T)^3 = 3\int_0^T W(t)dt + 3\int_0^T W(t)^2dW(t)$$

Ici les intégrales stochastiques ressemblent aux expressions correspondantes pour une fonction lisse x (t), mais il y a aussi les termes intrigants $\int_0^T dt$ et $3\int_0^T W(t)dt$.La formule $W(T)^2$ et $W(T)^3$ sont des exemples de la formule Itô beaucoup plus générale, un outil crucial pour transformer et calculer des intégrales stochastiques. Termes tels que $\int_0^T dt$ et $3\int_0^T W(t)dt$,qui n'ont pas d'analogues dans le calcul classique des fonctions lisses, sont une caractéristique inhérente à la formule d'Itô et désignée sous le nom de correction d'Itô. La classe de processus apparaissant dans la formule d'Itô est définie comme suit.

Définition 3.8. Un processus stochastique $\xi(t)$,$t \geqslant 0$ est appelé un processus Itô s'il a un marche continus p.p et peuvent être représentés comme

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^T a(t)dt + \int_0^T b(t)dW(t) \qquad \text{p.p} \tag{3.14}$$

où b(t) est un processus appartenant à M_T^2 pour tout $T > 0$ et $a(t)$ est un processus adapté à la filtration $\mathcal{F}_t$ tel que

$$\int_0^T |a(t)|dt < \infty \qquad p.p \tag{3.15}$$

Pour tout $T > 0$.La classe de tous les processus adaptés $a(t)$ satisfaisant (3.15) pour certains $T > 0$ sera noté $\mathcal{L}_T^1$.

Pour un processus Itô ξ on a précision d'écrire (3.14) comme

$$d\xi(t) = a(t)dt + b(t)dW(t) \tag{3.16}$$

et appeler $d\xi(t)$ le différentiel stochastique de $\xi(t)$ C'est ce que l'on appelle la différenciation différentielle d'Itô. Il convient de souligner que le différentiel stochastique n'a pas de signification mathématique bien définie en soi et devrait toujours être compris dans le contexte de l'équation rigoureuse (3.14). Le différentiel Itô la notation est un moyen efficace d'écrire cette équation, plutôt qu'une tentative donne une signification mathématique précise au différentiel stochastique.

Théorème 3.5. ***(Formule d'Itô, version simplifiée)***
Supposons que $F(t,x)$ est une fonction à valeurs réelles avec des dérivées partielles continues $F_t'(t,x)$,$F_x'(t,x)$ et $F_{xx}''(t,x)$,$\forall t \geqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}$. On suppose également que le processus $F_x'(t,W(t))$ appartient à M_T^2,$\forall T \geqslant 0$.Alors $F(t,W(t))$ est un processus d'Itô tel que

$$\begin{aligned} F(T,W(T)) - F(0,W(0)) &= \int_0^T \left(F_t'(t,W(t)) + \frac{1}{2}F_{xx}''(t,W(t))\right)dt \\ &+ \int_0^T F_x'(t,W(t))dW(t) \end{aligned} \tag{3.17}$$

En notation différentielle, cette formule peut s'écrire

$$dF(t,W(t)) = \left(F_t'(t,W(t)) + \frac{1}{2}F_{xx}''(t,W(t))\right)dt + F_x'(t,W(t))dW(t) \tag{3.18}$$

Remarque 3.2. *Comparez ce dernier avec la règle de la chaîne*

$$dF(t,x(t)) = F_t'(t,x(t))dt + F_x'(t,x(t))dx(t)$$

pour une fonction lisse $x(t)$, où $dx(t)$ est compris comme une notation abrégée pour $x'(t)dt$. Le terme supplémentaire $\frac{1}{2}F_{xx}''(t,W(t))dt$ dans (3.18) s'appelle la correction d'Itô.

Démonstration

Nous allons d'abord prouver la formule d'Itô sous l'hypothèse que F et les dérivées partielles F_x' et F_{xx}' sont dominé par certains $C > 0$.
Considérons une partition $0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_n^n = T$,Où $t_i^n = \frac{iT}{n}$ de $[0,T]$ en n parties égales. Nous allons noter les incréments $W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n)$ par $\Delta_i^n W$ et $t_{i+1}^n - t_i^n$ par $\Delta_i^n t$.On

peut écrire aussi W_i^n au lieu de $W(t_i^n)$ pour la concision. Selon la formule de Taylor, il y a un point $\tilde{W}_i^n$ dans chaque intervalle $[W(t_i^n), W(t_{i+1}^n)]$ et un point $\tilde{t}_i^n$ dans chaque intervalle $[t_i^n, t_{i+1}^n]$ tel que

$$F(T, W(T)) - F(0, W(0)) = \sum_{i=0}^{n-1} \Big(F(t_{i+1}^n, W_{i+1}^n - F(t_i^n, W_i^n) \Big)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \Big(F(t_{i+1}^n, W_{i+1}^n) - F(t_i^n, W_{i+1}^n) \Big) + \sum_{i=0}^{n-1} \Big(F(t_i^n, W_{i+1}^n) - F(t_i^n, W_i^n) \Big)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} F_t'(\tilde{t}_i^n, W_{i+1}^n)\Delta_i^n t + \sum_{i=0}^{n-1} F_x'(t_i^n, W_i^n)\Delta_i^n W + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} F_{xx}'(t_i^n, \tilde{W}_i^n)(\Delta_i^n W)^2$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} F_t'(\tilde{t}_i^n, W_{i+1}^n)\Delta_i^n t + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} F_{xx}'(t_i^n, W_i^n)\Delta_i^n t + \sum_{i=0}^{n-1} F_x'(\tilde{t}_i^n, W_i^n)\Delta_i^n W$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} F_{xx}'(t_i^n, W_i^n) \Big((\Delta_i^n W)^2 - \Delta_i^n t \Big)$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} \Big[F_{xx}'(t_i^n, \tilde{W}_i^n) - F_{xx}'(t_i^n, W_i^n) \Big] (\Delta_i^n W)^2$$

On étude séparément chaque somme dans la dernière expression, en séparant preuve en plusieurs étapes
ÉTAPE 1. On prétend que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} F_t'(\tilde{t}_i^n, W_{i+1}^n)\Delta_i^n t = \int_0^T F_t'(t, W(t))dt \qquad \text{p.p}$$

C'est parce que les marches de $W(t)$ sont a.s. continu, et $F_t'(t, x)$ est continue en fonction de deux variables par hypothèse. En effet, chaque chemin continu du processus de Wiener est borné sur $[0, T]$, c'est-à-dire qu'il y a un $M > 0$, qui peut dépendre du chemin, tel que

$$|W(t)| \leqslant M \quad \text{for all} \quad t \in [0, T]$$

En tant que fonction continue,$F_t'(t, x)$ est uniformément continue sur l'ensemble compact $[0, T] \times [-M, M]$ et W est uniformément continu sur $[0, T]$. Il s'ensuit que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{i,t} \Big| F_t'(\tilde{t}_i^n, W_{i+1}^n)\Delta_i^n t - F_t'(t, W(t)) \Big| = 0 \quad \text{p.p}$$

où le extremum est pris sur tout $i = 0, ..., n-1$ et $t \in [t_i^n, {}_{i+1}^n]$. Par la définition de l'intégrale de Riemann prouve la demande.
ÉTAPE 2. Ceci est très similaire à l'étape 1. Par continuité

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{i,t} \Big| F_{xx}'(t_i^n, W_{i+1}^n)\Delta_i^n t - F_{xx}'(t, W(t)) \Big| = 0 \quad \text{p.p}$$

où le extremum est pris sur tout $i = 0, ..., n-1$ et $t \in [t_i^n, {}_{i+1}^n]$. Par la définition de l'intégrale de Riemann .

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} F_{xx}'(t_i^n, W_{i+1}^n)\Delta_i^n t = \int_0^T F_{xx}'(t, W(t))dt \qquad \text{p.p}$$

ÉTAPE 3. On vérifie que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} F'_x(t_i^n, W_{i+1}^n)\Delta_i^n W = \int_0^T F'_x(t, W(t))dW(t) \qquad \text{dans} L^2$$

Si $F'_x(t,x)$ est borné par $C > 0$,alors $f(t) = F'_t(t, W(t))$ appartient à M_T^2 par le théorème 3.1, et la suite des processus pas à pas aléatoires

$$f_n = \sum_{i=0}^{n-1} F'_x(t_i^n, W_i^n)1_{[t_i^n, t_{i+1}^n]} \in M_{step}^2$$

se approxime de f. En effet, par la continuité

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(t) - f(t)|^2 = 0 \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,T] \quad p.p$$

Car $|f_n(t) - f(t)|^2 \leqslant 4C^2$,il s'ensuit que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T |f_n(t) - f(t)|^2 = 0 \qquad p.p$$

Par le théorème de convergence dominé de Lebesgue. Mais $|f_n(t) - f(t)|^2 \leqslant 4CT^2$,alors

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\int_0^T |f_n(t) - f(t)|^2\right) = 0$$

encore par le théorème de convergence dominé par Lebesgue. Cela montre que f_n se approxime f ce qui à son tour implique que $I(f_n)$ tend vers $I(f)$ dans L_2,final de Étape 3.

ÉTAPE 4. Si F'_{xx} est borné par $C > 0$,alors

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} F'_{xx}(t_i^n, W_i^n)\left((\Delta_i^n W)^2 - \Delta_i^n t\right) = 0 \qquad \text{dans} L^2$$

depuis

$$E\left|\sum_{i=0}^{n-1} F'_{xx}(t_i^n, W_i^n)\left((\Delta_i^n W)^2 - \Delta_i^n t\right)\right| = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} E\left|F'_{xx}(t_i^n, W_i^n)\left((\Delta_i^n W)^2 - \Delta_i^n t\right)\right| = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} E\left|F'_{xx}(t_i^n, W_i^n)\right|^2 E\left|(\Delta_i^n W)^2 - \Delta_i^n t\right|^2 = 0$$

$$\leqslant C^2\sum_{i=0}^{n-1} E\left|(\Delta_i^n W)^2 - \Delta_i^n t\right|^2 = 2C^2\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta_i^n t)^2$$

$$2C^2\sum_{i=0}^{n-1}\frac{T2}{n^2} = 2C^2\frac{T2}{n} \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty$$

Le première égalité ci-dessus tient parce que pour tout $i < j$

$$E\left[F'_{xx}(t_i^n, W_i^n)\left((\Delta_i^n W)^2 - \Delta_i^n t\right) F'_{xx}(t_j^n, W_j^n)\left((\Delta_j^n W)^2 - \Delta_j^n t\right)\right]$$
$$E\left[F'_{xx}(t_i^n, W_i^n)\left((\Delta_i^n W)^2 - \Delta_i^n t\right) F'_{xx}(t_j^n, W_j^n)\right] E\left[(\Delta_j^n W)^2 - \Delta_j^n t\right]$$
$$= 0$$

En effet, les expressions des deux derniers crochets sont indépendantes et le dernière attente est égale à zéro.
ÉTAPE 5. Par un argument de continuité similaire à celui des étapes 1 et 2

$$\lim_{n\to\infty} \sup_i \left| F'_{xx}(t_i^n, \tilde{W}_{i+1}^n)\Delta_i^n t - F'_{xx}(t, W(t)) \right| = 0 \quad \text{p.p}$$

où le maximum est pris pour tout $i = 0, 1, 0.., n-1$. Depuis $\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta_i^n W)^2 \to T$ dans L^2 lorsque $n \to \infty$, il y a une sous-suite $n_1 < n_2 < ...$ tel que

$$\sum_{i=0}^{n_k-1} (\Delta_j^n W)^2 \to T \quad p.p$$

lorsque $k \to \infty$ .Il s'ensuit que

$$\left| \sum_{i=0}^{n_k-1} \left(F'_{xx}(t_i^{n_k}, \tilde{W}_i^n) - F'_{xx}(t_i^{n_k}, W_i^{n_k}) \right) (\Delta_j^n W)^2 \right|$$

$$\sup_i \left| F'_{xx}(t_i^{n_k}, \tilde{W}_{i+1}^n) - F'_{xx}(t_i^{n_k}, W_{i+1}^{n_k}) \right| \sum_{i=0}^{n_k-1} (\Delta_j^n W)^2 \to 0 \quad p.p$$

lorsque $k \to \infty$

Dans ces étapes ci-dessus où L^2 convergence a été obtenue, nous avons également une convergence p.p. en prenant une sous-séquence. Ceci prouve la formule d'Itô (3.17) sous l'assomption que les dérivées partielles $F'_x(t,x)$ et $F'_{xx}(t,x)$ sont bornés. Pour compléter la preuve, nous devons supprimer cette hypothèse. Soit $F(t,x)$ une fonction arbitraire satisfaisant aux conditions du théorème 3.5. Pour chaque entier positif, prenez une fonction lisse φ_n de $\mathbb{R}$ à $[0,1]$ tel que $\varphi_n(x) = 1$ pour tout $x \in [-n, n]$ et $\varphi_n(x) = 0$ pour tout $x \notin [-n-1, n+1]$.Alors

$$F_n(t,x) = \varphi_n(x) F(t,x)$$

satisfait également aux conditions du théorème 3.5 et a des dérivées partielles bornées $(F_n)'_x(t,x)$ et $(F_n)'_{xx}(t,x)$ pour chaque n Par conséquent, par la première partie de la preuve

$$F_n(T, W(T)) - F_n(0, W(0))$$
$$= \int_0^T \left((F_n)'_t(t, W(t)) + \frac{1}{2}(F_n)'_{xx}(t, W(t)) \right) dt + \int_0^T F_n)'_x(t, W(t)) dW(t)$$

Considérez la suite d'événements en expansion

$$A_n = \left\{ \sup_{t\in[0,T]} |W(t)| < n \right\}$$

Comme $F(t,x) = F_n(t,x)$ pour chaque $t \in [0,T]$ et $x \in [-n, n]$, il s'ensuit que (3.17) tient sur A_n .Il reste à montrer que

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1$$

pour prouver que (3.17) détient a.s. Mais ce dernier est vrai en raison de l'inégalité L^2 maximale de Doob, le théorème 2.7, ce qui implique que

$$\begin{aligned} n^2(1-p(A_n)) &= n^2 P\left\{\sup_{t\in[0,T]} |W(t)| < n\right\} \\ &\leqslant E\left(\sup_{t\in[0,T]} |W(t)|\right) \\ &\leqslant 4E|W(T)|^2 = 4T \end{aligned}$$

preuve terminé

Théorème 3.6.
Soit $\xi(t)$ être un processus d'Itô comme ci-dessus. Supposons que $F(t,x)$ est une fonction à valeurs réelles avec des dérivées partielles continues $F'_t(t,x)$,$F'_x(t,x)$ et $F''_{xx}(t,x)$,$\forall t \geqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}$. On suppose également que le processus $F'_x(t,W(t))$ appartient à M_T^2,$\forall T \geqslant 0$ .Alors $F(t,\xi(t))$ est un processus d'Itô tel que

$$dF(t,\xi(t)) = \left(F'_t(t,\xi(t)) + F'_x(t,\xi(t))a(t) + \frac{1}{2}F''_{xx}(t,\xi(t))^2\right)dt + F'_x(t,\xi(t))b(t)dW(t) \tag{3.19}$$

Un moyen pratique de se souvenir de la formule d'Itô est d'écrire l'expansion de Taylor pour F (t, x) jusqu'aux termes avec des dérivées partielles d'ordre deux, en substituant $\xi(t)$ pour x et l'expression sur le côté droit de (3.19) pour $d\xi(t)$, et en utilisant la table de multiplication d'Itô

$$dtdt = 0 \qquad dtdW(t) = 0$$

$$dW(t)dt = 0 \qquad dW(t)dW(t) = dt$$

Cette procédure informelle donne

$$\begin{aligned} dF &= F'_t dt + F'_x d\xi + \frac{1}{2}F''_{tt}dtdt + F''_{tx}dtd\xi + \frac{1}{2}F''_{xx}d\xi d\xi \\ &= F'_t dt + F'_x(adt + bdW) \\ &\quad + \frac{1}{2}F''_{tt}dtdt + F''_{tx}dt(adt+bdW) + \frac{1}{2}F''_{xx}(adt+bdW)(adt+bdW) \\ &= F'_t dt + F'_x(adt+bdW) + \frac{1}{2}F''_{xx}b^2dt \\ &= \left(F'_t + F'_x a + \frac{1}{2}F''_{xx}b^2\right)dt + F'_x bdW \end{aligned}$$

qui est l'expression dans (3.20). Ici, nous avons omis les arguments $(t,\xi(t))$ et, respectivement, (t) dans toutes les fonctions pour plus de brièveté.

3.5 Existence et Unicité de Solution d' E.D.S

Cette section sera consacrée aux équations différentielles stochastiques de la forme

$$d\xi(t) = f(\xi(t))dt + g(\xi(t))dW(t)$$

Des solutions seront recherchées dans la classe des processus d'Itô $\xi(t)$ avec un marche continue p.p. Comme dans la théorie des équations différentielles ordinaires, nous devons spécifier une condition initiale

$$\xi(0) = \xi_0$$

Là ξ_0 peut être un nombre réel fixe ou, en général, une variable aléatoire. Être un processus d'Itô,$\xi(t)$ doit être adapté à la filtration $\mathcal{F}_t$ de $W(t)$, alors ξ_0 doit être $\mathcal{F}_0$-mesurable .

Exemple 3.4. L'équation différentielle stochastique

$$dX(t) = X(t)dW(t) \tag{3.20}$$

a été utilisé comme motivation pour le développement du calcul stochastique d'Ito au début du présent chapitre.
satisfait (3.22). Il satisfait aussi la condition initiale $X(0) = 1$. Ceci est un exemple d'équation différentielle stochastique linéaire. Pour la solution d'une équation générale de ce type avec une condition initiale arbitraire .

Définition 3.9. Un processus d'Itô $\xi(t)$,$t \geqslant 0$ est appelé une solution du problème de la condition initiale

$$d\xi(t) = f(\xi(t))dt + g(\xi(t))dW(t)$$
$$\xi(0) = \xi_0$$

Si ξ_0 est un variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable , le processus $f(\xi(t))$ et $g(\xi(t))$ appartiennent, respectivement, à $\mathcal{L}_T^1$ et M_T^2 , et

$$\xi(T) = \xi_0 + \int_0^T f(\xi(t))dt + \int_0^T g(\xi(t))dW(t) \qquad p.p \tag{3.21}$$

Pour tout $T \geqslant 0$.

Remarque 3.3. *Au regard de cette définition, la notion d'équation différentielle stochastique est une fiction. En fait, seules les équations intégrales stochastiques de la forme (3.23) ont une signification mathématique rigoureuse. Cependant, il s'avère pratique d'utiliser les différentiels stochastiques de façon informelle et de parler d'équations différentielles stochastiques pour tirer parti de l'analogie avec les équations différentielles ordinaires. Cette analogie sera utilisée pour résoudre certaines équations différentielles stochastiques plus loin dans cette section.*

Le théorème d'existence et d'unicité ci-dessous ressemble à celui de la théorie des équations différentielles ordinaires, où il est également crucial que le côté droit de l'équation soit Lipschitz continu en fonction de la solution.

Théorème 3.7.
Supposons que f et g sont des fonctions Lipschitziennes continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, i.e il y a une constante $C > 0$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|$$
$$|g(x) - g(y)| \leqslant C|x - y|$$

De plus , soit ξ_0 un variable aléatoire carrée intégrable $\mathcal{F}_0$-mesurable .Ensuite, le problème de la condition initiale

$$d\xi(t) = f(\xi(t))dt + g(\xi(t))dW(t) \tag{3.22}$$
$$\xi(0) = \xi_0 \tag{3.23}$$

a une solution $\xi(t)$,$t \geqslant 0$ dans la classe des processus d'Itô. La solution est unique en ce sens que si $\eta(t)$,$t \geqslant 0$ est un autre processus d'Itô satisfaisant (3.22) et (3.23), alors les deux processus sont identiques a.s. , C'est ,

$$P\{\xi(t) = \eta(t) \quad pour\ tout \quad t \geqslant 0\} = 1$$

Démonstration

Fixons $T > 0$.On recherche un processus $\xi \in M_T^2$ tel que

$$\xi(s) = \xi_0 + \int_0^s f(\xi(t))dt + \int_0^s g(\xi(t))dW(t) \qquad p.p \tag{3.24}$$

Pour tout $s \in [0, T]$. Une fois que nous avons montré qu'un tel $\xi \in M_T^2$ existe, pour obtenir une solution à l'équation différentielle stochastique (3.23) avec la condition initiale (3.24) il suffit de prendre une modification de ξ avec marche continue p.p , qui existe par le théorème 3.4.
Pour montrer qu'une solution à l'équation intégrale stochastique (3.24) existe, nous utiliserons le théorème du point fixe de Banach dans M_T^2 avec la norme

$$\|\xi\|_\lambda^2 = E\left(\int_0^T e^{-\lambda t}|\xi(t)|^2 dt\right) \tag{3.25}$$

qui tourne M_T^2 dans un espace vectoriel complet normé. Le nombre $\lambda > 0$ devrait être choisi assez grand, voir ci-dessous. Pour appliquer le théorème du point fixe, on définie $\Phi : M_T^2 \to M_T^2$ par

$$\Phi(\xi)(s) = \xi_0 + \int_0^s f(\xi(t))dt + \int_0^s g(\xi(t))dW(t) \tag{3.26}$$

pour tout $\xi \in M_T^2$ et $s \in [0, T]$ .On prétends que est une contraction stricte, i.e

$$\|\Phi(\xi) - \Phi(\zeta)\|_\lambda \leqslant \alpha\|\xi - \zeta\|_\lambda \tag{3.27}$$

pour certains $\alpha < 1$ et tout $\xi, \eta \in M_T^2$.Ensuite, par le théorème de Banach,Φ a un point fixe unique $\xi = \Phi(\xi)$ C'est la solution voulu pour (3.25).
Il reste à vérifier que Φ est en effet une contraction stricte. Il suffit de montrer que les deux cartes Φ_1 et Φ_2 , où

$$\Phi_1(\xi)(s) = \int_0^s f(\xi(t))dt \qquad \Phi_2(\xi)(s) = \int_0^s g(\xi(t))dW(t)$$

sont des contractions strictes avec des constantes α_1 et α_2 tel que $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$ .Pour Φ_1 cela résulte de la continuité de Lipschitz de f. Pour Φ_2 , nous devons utiliser la continuité

Lipschitz de g et la propriété isométrie de l'intégrale d'Itô. Mentionnons seulement une étape essentielle dans ce dernier cas. Pour toute $\xi, \eta \in M_T^2$

$$\begin{aligned}
\|\Phi_2(\xi) - \Phi_2(\zeta)\|_\lambda &= E\int_0^T e^{-\lambda s}\left|\int_0^s [g(\xi) - g(\zeta)]\, dW(t)\right|^2 ds \\
&= E\int_0^T e^{-\lambda s}\int_0^s |g(\xi) - g(\zeta)|^2\, dtds \\
&\leqslant C^2 E\int_0^T e^{-\lambda s}\int_0^s |\xi - \zeta|^2\, dtds \\
&= C^2 E\int_0^T \left(\int_t^T e^{-\lambda s}e^{\lambda t} ds\right) e^{-\lambda t}\, |\xi - \zeta|^2\, dt \\
&\leqslant \frac{C^2}{\lambda} E\int_0^T e^{-\lambda t}\, |\xi - \zeta|^2\, dt = \frac{C^2}{\lambda}\|\xi - \zeta\|_\lambda^2
\end{aligned}$$

Depuis

$$\int_t^T e^{-\lambda s}e^{\lambda t} ds = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda(T-t)}) \leqslant \frac{1}{\lambda}$$

Ici C est la constante de Lipschitz de g . Si $\lambda > \frac{C^2}{\epsilon}$,alors Φ_2 est une contraction stricte avec des contractions constantes $\leqslant \epsilon$.
Il reste quelques points techniques à régler, mais l'idée principale de la preuve est montrée ci-dessus.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons considéré les equations différentielles stochastique , on a étudié l'existence locale et l'unicité de la solution de ce types des equation en basant sur les equations différentielles ordinaire. Finalement, on trouve cette equation dans plusieurs domaines (Finance , Physique , ...) .

Bibliographie

[1] B. Âksendal. *Stochastic Differential Equations.*, Springer-Verlag, Berlin, sixth edition, 1998.

[2] Hwei P. Hsu, Ph.D. *Theory and Problems of Probability, Random Variables, and Random Processes* The McGraw-Hill Companies, Inc. 1997 .

[3] I. Karatzas and S.E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus.*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[4] R. Durrett., *Stochastic Calculus : a Practical Introduction.*, CRC press, Boca Raton, 1996.

[5] R. Elliott, *Stochastic Calculus and Applications.*,Springer, Berlin, 1982.

[6] Zdzislaw Brzezniak and Tomasz Zastawniak, *Basic stochastic*, Kingston upon Hull , June 2000