الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITÉ AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES
قسم الرياضيات
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière :Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle et applications.

PAR :

AIOUAZI FATNA

Thème

Sur les opérateurs n-normaux.

Devant le jury composé de :

AMAR BELACEL	Prof	Université de Laghouat	Président
AMAR BOUGOUTAIA	M.C.A	Université de Laghouat	Encadreur
NAWEL ABDESSELAM	M.C.B	Université de Laghouat	Examinateur

Année Universitaire : 2023-2024

Remerciements

Que Dieu soit loué pour avoir éclairé mon chemin vers la connaissance, et m'avoir accordé sa bénédiction pour mener à bien ce travail.

Je tiens à exprimer ma sincère gratitude et mon appréciation envers mon superviseur, le professeur AMAR BOUGOUTAIA, qui m'a prodigué des conseils précieux tout au long de ce projet.

À tous mes chers enseignants qui m'ont accompagné et encadré tout au long de mon parcours universitaire, et à tous ceux qui ont contribué directement ou indirectement à la réalisation de ce modeste travail, ainsi qu'aux membres du jury pour leur gentillesse et leur acceptation de discuter de cette thèse, je les remercie pour toutes les remarques qu'ils ont apportées sur ce mémoire.

Dédicace

Dédicace à la joie de vivre et au secret de l'existence, à la signification de l'amour et de la tendresse, à la bougie qui se consume pour éclairer mon chemin, à celle dont les prières étaient le secret de ma réussite et dont la tendresse a été le baume de mes blessures "ma chère mère".

Au plus grand des hommes, qui a supporté l'amertume des jours et la dureté du temps pour éclairer les chemins de l'apprentissage pour ses enfants, symbole de lutte et de générosité, symbole de sacrifice et de défi, symbole de moralité et de travail, à celui qui a été mon soutien dans mon parcours scolaire "mon cher père".

À toute la famille, les proches et les amis, à tous ceux qui restent dans ma mémoire mais que mon carnet n'a pas mentionnés, je dédie ce modeste travail.

Aiouazi Fatna

ملخص

المؤثرات الناظمية تلعب دوراً مهماً في نظرية المؤثرات. في هذه المذكرة، قمنا بدراسة المؤثرات ن-الناظمية من خلال تعريفها وذكر أهم خصائصها، كما قدمنا مقارنة بينها وبين المؤثرات الناظمية. وفي الختام أجرينا دراسة شاملة حول المؤثرات ن-الناظمية.

الكلمات المفتاحية

المؤثرات الناظمية ، المؤثرات ن- ناظمية

Résumé

Les opérateurs normaux jouent un rôle important dans la théorie des opérateurs. Dans une cette mémoire , nous avons étudié les opérateurs n-normaux en les définissant et en mentionnant leurs principales propriétés. Nous avons également comparé ces opérateurs aux opérateurs normaux. Enfin, nous avons mené une étude complète sur les opérateurs n-normaux.

Mots clés :

Normal operators, n-normal operators.

Abstract

Normal operators play an important role in operator theory. In this note, we studied n-normal operators by defining them and mentioning their main properties. We also compared them to normal operators. Finally, we conducted a comprehensive study on n-normal operators.

Key words :

opérateurs normaux,opérateurs n-normaux.

Table des matières

Notation

$L(E, F)$	L'ensemble des applications linéaire de E dans F.
$B(H)$	L'espace d'opérateurs linéaire bornés définies sur H.
$\mathcal{L}(E, F)$	L'ensemble des application linéaires continus de E dans F.
$C([a, b])$	L'espace des fonction continus sur [a, b] .
$L^2([a; b])$	L' espace des fonctons de careés intégrables sur [a, b] , i :e $\int_a^b \|f(x)\|^2 dx < \infty$.
$l^2(\mathbb{R})$	L'espaces des suites réelles $(x_n)_n$ de carrés sommables, i.e vérifiant

$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$.

A^{-1}	L'inverse de l'opérateur A .
A^*	L'adjoint de l'opérateurs A .
$Im(A)$	L'image de l'opérateur A .
$\ker(A)$	Le noyau de l'opérateurs A .
$D(A)$	Le domaine de l'opérateur A .
$K(E), K(E, F)$	Lespace des opérateurs compacts de E, ou de E dans F .
$\bar{A}$	La fermeture de l'opérateur A .
$\rho(A)$	L'ensemble résolvante de l'opérateur A.
$W(A)$	Le rang numérique de A, i.e $W(A) = \{\langle Ax, x\rangle : x \in H, \\|x\\| = 1\}$.
$\sigma(A)$	Le spectre de l'opérateur A .
$\sigma_p(A)$	Le spectre ponctuel de l'opérateur A .

Introduction

Ce travail s'inscrit dans le cadre des théories des opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert. La théorie des opérateurs linéaires tire ses origines notamment de l'étude des systèmes finis d'équations linéaires différentielles et intégrales.

Notons H l'espace de Hilbert complexe et $B(H)$ l'espace de tous les opérateurs linéaires bornés définis sur H. Soit A un opérateur dans $B(H)$. L'opérateur A est dit normal s'il satisfait la condition suivante : $A^*A = AA^*$. Si A est un opérateur normal, alors $\ker(A) = \ker(A^*)$. On dit qu'un opérateur est n-normal si $A^*A^n = A^nA^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et (n, m)-normal si $A^{*m}A^n = A^nA^{*m}$ pour $n, m \in \mathbb{N}$.

L'objectif de ce travail est de comparer les opérateurs normaux et les opérateurs n-normaux. Ce mémoire est structuré en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous présenterons les éléments de base de l'analyse fonctionnelle (espaces de Banach et espaces de Hilbert) et aborderons les opérateurs linéaires bornés (compacts, adjoints, auto-adjoints, positifs et isométriques).

Le deuxième chapitre sera consacré à la théorie des opérateurs normaux. Nous y présenterons également quelques classes d'opérateurs (hyponormaux, normaloïdes, paranormaux).

Dans le troisième chapitre, on va donnons les définirons et étudierons les propriétés importantes des opérateurs n-normaux et comparerons ces derniers aux opérateurs normaux. Nous inclurons également la définition et les propriétés des opérateurs (n, m)-normaux.

Chapitre 1

Opérateurs bornés

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail. Ce chapitre est composé de trois sections, la premiére section, nous rappelons quelques définition et résultats sur les espaces de Banach et les espaces de Hilbert, la deuxiéme section, contient un aperçu sur les opérateurs linéaires continus. La derniére section, nous donnons quelques définitions et résultats sur les opérateurs bornés.

1.1 Rappels et notions fondamentales

Définition 1.1.1 *(Espace de Banach)*

On appelle espace de Banach $(E, \|.\|)$ *tout espace vectoriel normé et complet*

Lemme 1.1.1 *Tout espace normé* $(E, \|.\|)$ *de dimension finie est complet.*

Définition 1.1.2 *(L'espace normé* $\mathcal{L}(E, F)$*)*

Si $(E, \|.\|)$ *et* $(F, \|.\|)$ *sont deux espace vectoriels normés. On not* $\mathcal{L}(E, F)$ *l'espace vectoriel constitué par toutes les applications linéaires continues de E dans F. Lorsque* $E = F$*,on écrit* $\mathcal{L}(E)$ *au lie de* $\mathcal{L}(E, F)$.

Théorème 1.1.1 *Soit E et F deux espace vectoriel normé. On suppose que l'espace F est complet. Alors l'espace* $\mathcal{L}(E, F)$ *est complet.*

Théorème 1.1.2 *Soit E un espace normé et F un espace de Banach, alors* $\mathcal{L}(E, F)$ *est un espace de Banach.*

Définition 1.1.3 *(Espace Euclidien (préhilbertien))*

Un espace vectoriel H sur $\mathbb{K}$ muni d'un produit scalaire est dit espace Euclidien ou préhilbertien.

Proposition 1.1.1 *Tout espace préhilbertien est un espace vectoriel normé, la norme est donnée par :*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x.x \rangle}.$$

Définition 1.1.4 *(Identité du parallélogramme)*

Soient x et $y \in E$ avec F est un espace préhilbert alors :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Remarque 1.1.1 *Un espace vectoriel normé est un espace préhilbertien si et seulement si sa norme vérifie l'identité du parallélogramme.*

Définition 1.1.5 *(Espace de Hilbert)*

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle x, y \rangle$ et qui est complet pour la norme $\sqrt{\langle x.x \rangle}$.

Définition 1.1.6 *Un espace de Hilbert est un espace de Banach (donc complet) dont la norme découle d'un produit scalaire ou hermitien par le signe $\langle . \rangle$. C'est la généralisation en dimension quelconque d'un espace Euclidien ou hermitien.*

Remarque 1.1.2 *Un espace de Banach est un espace de Hilbert si et seulement si sa norme vérifie l'identité du parallélogramme.*

1.2 Opèrateurs linèaires bornès

Définition 1.2.1 *(Opèrateur linèaire)*

Soient E et F deux espaces vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, et $A : E \longrightarrow F$. On dit que l'opèrateur A est linèaire si :

i) $\forall x, y \in E \quad A(x+y) = A(x) + A(y),$

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad A(\lambda x) = \lambda A(x).$

Définition 1.2.2 *(Opèrateur continu)*

Soient E et F deux espaces normès, un opèrateur A dèfini sur un sous ensemble $S \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de S si on a la propriètè suivante :

Pour toute suite $(x_n)_n$ de S converge vers x_0, la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$ c'est à dire :

$$\lim_{n \to +\infty} A(x_n) = A(\lim_{n \to +\infty} x_n) = A(x_0).$$

Remarque 1.2.1 *L'opèrateur linèaire A est dit continu sur S, s'il est continu en chaque point de l'ensemble S.*

Théorème 1.2.1 [14]

Soient E et F deux espaces normès, un opèrateur linèaire A dèfini sur un sous ensemble $S \subset E$ dans F est dit continu partout sur S s'il est continu en point x_0 de S.

Définition 1.2.3 *(Opèrateur bornè)*

Un opèrateur linèaire A dèfini sur E dans F est dit bornè s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que :

$$\|A(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E \qquad \forall x \in E, \quad \|A\| = inf C$$

Théorème 1.2.2 [14]

Un opérateur linéaire A est continu, si et seulement si, il est borné.

Remarque 1.2.2 – *Soient E et F deux espaces normés, l'ensemble de tous les opérateurs linéaires continus de E dans F est notée $\mathcal{L}(E, F)$.*

– *L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E, F)$, de plus $\mathcal{L}(E, F)$ muni de la norme $\|A\|$ est un espace normé.*

1.3 Opérateurs compacts

Parmi tous les opérateurs bornés, on peut distinguer une classe importante d'opérateurs, dont les propriétés sont le plus proches de celles des opérateurs linéaires dans un espace de dimension finie. C'est la classe des opérateurs compacts.

Rappel et notations

Nous commençons d'abord par rappeler la défnition et quelques propriétés des opérateurs compacts. Soint E et F deux espaces de Banach. On désigne par $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts et on pose $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E)$:

Définition 1.3.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$, on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné dans E à un ensemble relativement compact dans F.*

Définition 1.3.2 *L'opérateur A est compact, si et seulement si, pour tout suite bornée $(x_n)_{n\geqslant 0} \subset E$, la suite $(Ax_n)_{n\geq 0}$ admet que sous suite convergente dans F. Dans le cas particulier ou $F = C([a;b])$, le thèoème suivant d'Arzela -Ascoli est gènèralement utilisè pour prouver la compacitè de A.*

Théorème 1.3.1 *(d'Arzela -Ascoli)*

soit A ensemble, $A \subset C(G)$ dans $C(G)$ à noyau continu est un relativement compact si et seulement si :

i) bornèe i.e, s'il existe une constante M telle que :

$$|\varphi(x)| \leqslant M \qquad \forall x \in G,\ \forall \varphi \in A$$

ii) èquicontinu i.e, $\forall \epsilon > 0$; $\exists \delta > 0$ telle que $\forall \varphi \in A$, nous avons

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \epsilon \qquad \forall x, y \in G \quad et \quad |x - y| < \delta$$

Théorème 1.3.2 *Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.*

Preuve.

En effet, si on désigne par

$$B(0,1) = \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$$

Alors, $A(B(0,1))$ est relativement compact d'ou $\|A(x)\| \leq C, \forall x \in B(0,1)$. Alors A est borné.

Réciproquement, l'opérateur indentique I de E dans E est borné, mais il n'est pas compact car $I(B(0,1)) = B(0,1)$, n'est pas relativement compacte sauf si E est de dimension finie.

Proposition 1.3.1 [2]

Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opérateur compact est un opérateur compact, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

Théorème 1.3.3 [10]

Soit E un espace normé et F un espace de Banach, et soit (A_n) une suit d'opérateur compacts de E dans F si :

$$\lim_{x\to\infty} \|A_n - A\| = 0$$

alors, A est compact.

Théorème 1.3.4 [2]

Soit $A \in \mathcal{K}(E)$, alors l'image par A de tout suite de E faible-ment convergent est une suit fortement convergente.

Corollaire 1.3.1 *Soit $(e_k)_{K\in\mathbb{N}}$ une suit orthonormée dans H. Si $T \in \mathcal{K}(H)$, alors*

$$\lim_{k\to\infty} \|Te_k\| = 0$$

Preuve.

Pour tout $x \in H$ la série $\sum_K |\langle x, e_k\rangle|^2$ est convergente et terme général $\langle x, e_k\rangle$ tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini. Cela traduit le fait que la suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est faiblement convergente vers 0, le théoréme précédent permet de conclure. Un exemple important d'opérateurs compacts est donée par le théoreme qui suit.

Théorème 1.3.5 *Soint H un espace de Hilbert séparable et (e_n) une base hilbertienne de H. Soit $\lambda = (\lambda_n)$ une suit bornée dans $\mathbb{C}$. Alors, l'opérateur de multiplication par λ défini par :*

$$T_\lambda e_n = \lambda_n e_n,$$

est compact si, et seulement si :

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0.$$

Définition 1.3.3 *On dit qu'un opérateur $A \in B(E,F)$ est de rang fini si*

$$dim\ \Re(A) < \infty.$$

Remarque 1.3.1 *Il est clair qu'un opérateur borné de range fini est compact.*

Corollaire 1.3.2 *Soit (A_n) une suit d'opérateurs bornés de rang finis de E dans F et soit $A \in \mathcal{L}(E,F)$ tels que :*

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$$

Alors, A est complet.

Théorème 1.3.6 [2]

Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$, les assertions suivantes sont équivalentes

1. *L'opérateur T est compact .*
2. *L'opérateur $T^* \in \mathcal{L}(F^*,E^*)$ est compact.*
3. *L'opérateur T est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.*

1.4 Opérateur Positif

Définition 1.4.1 [10]

On dit qu'un opérateur A sur un Hilbert H est positif s'il vérifie $\langle x, Ax\rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$.

Théorème 1.4.1 *Tout opérateur positif A admet un unique opérateur positif B tell que $A = B^2$. De plus, B commut avec tout opérateur qui commut avec A. On appelle B la racine carré de A et on not par $\sqrt{A}$.*

Définition 1.4.2 *Pour tout $A \in \mathcal{L}(H)$ on not $|A| = \sqrt{A^*A}$.*

Définition 1.4.3 *Un opérateur $U \in \mathcal{L}(H)$ est appelé isométrie partielle si $\|U(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in \ker(U)^{\perp}$. Remarquons que l'image d'un isométrie partielle $U \in \mathcal{L}(H)$ est un fermé de H.*

Proposition 1.4.1

Un opérateur $U \in \mathcal{L}(H)$ est une isométrie partielle si et seulement si U^*U est une projection orthogonale.

Preuve

Supposon que U est un isométrie partiele. On alors

$$(U^*U)^* = (U^*U) \quad \text{et} \quad (UU^*)^* = (UU^*).$$

Il reste donc à prouver que

$$(U^*U)^2 = (U^*U) \quad \text{et} \quad (U^*U)^2 = (UU^*).$$

Comme $H = \ker(U)^{\perp} \oplus \ker(U)$, on a pour tout $x \in H$

$$U^*Ux = U^*x_1 \in \ker(U)^{\perp},$$

ou $x_1 \in \ker(U)^{\perp}$ vérifie $(x - x_1) \in ker(U)$,

Il réste de $\|Ux_1\| = \|x_1\|$ que $\langle U^*Ux_1, x_1\rangle = \langle x_1, x_1\rangle$, puis de l'identité de polarisation que $U^*Ux_1 = x_1$. On a donc $(U^*U)^2x = U^*x$. Montrons la réciproque. comme U^*U est une projection orthogonale, on a

$$\|U^*Ux\|^2 = \langle U^*Ux, x\rangle = \|Ux\|^2$$

En déduit alors que $\ker(U^*U) = \ker(U)$ et donc U^*U est une projection orthogonale sur $ker(U)^{\perp}$. D'ou, pour tout $x \in \ker(U)^{\perp}$

$$\|Ux\|^2 = \langle U^*Ux, x\rangle = \|x\|^2.$$

Proposition 1.4.2 *U est une isométrie partielle si et seulement si U^* est aussi.*

Preuve

Il suffit de montrer que si U est une isométrie partielle alors U^*U est une projection orthogonale. En effet, pour tout $x \in H$ on a $U^*x \in \overline{Im(U^*)} = \ker(U)^{\perp}$. En utilisant la proposition 1.4.1,on a donc

$$(U^*U)x = U(U^*U)U^*x = UU^*x.$$

1.5 Opérateur adjoint

Théorème 1.5.1 *(Représentation de Riesz)*

Soit H un espace de Hilbert. Alors.

$$\forall f \in \mathcal{L}(H, \mathbb{K}), \exists y \in H \ : \ f(x) = \langle y, x \rangle \ , \ \forall x \in H$$

Proposition 1.5.1 *Soent H_1et H_2 deux espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ tel que, pour tout $x \in H_1$ et tout $y \in H_2$, on dit :*

$$\langle Ax, y \rangle_{H_2} = \langle x, A^*y \rangle_{H_1}$$

est appelée l'adjoint de A.

Proposition 1.5.2 [5] *Soit $A \in L(H)$. Alors, on a :*

1. $\ker(A) = (Im(A^*))^{\perp}$.
2. $\overline{Im(A)} = \ker(A)^{\perp}$.

Théorème 1.5.2 *Soit $A, S \in \mathcal{L}(H), A^*, S^*$ leur adjoint (respectivement), alors on a les propriétés suivantes :*

1. $(A^*)^* = A$.
2. $(A + S)^* = A^* + S^*$.
3. $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^* \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$.
4. $\|A^*\| = \|A\|$.
5. $(AS)^* = S^*A^*$.

Lemme 1.5.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ est inversible, alors A^* est inversible et on a :*

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$$

Preuve

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$ (A est inversible, alors A^* est inversible) d'ou

$$(AA^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I$$

$$(A^{-1})^* A^* = A^*(A^{-1})^* = I$$

alors : A^* est inversible et $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

1.5.1 Opérateurs isométriques, normaux, unitaires, positifs, auto - adjoints

Définition 1.5.1 *Soit H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert .*

1. *Un opérateur $S \in \mathcal{L}(H_1)$ est appelé hermitien ou auto-adjoint si :*

$$S = S^*$$

2. *Un opérateur $N \in \mathcal{L}(H_1)$ est appelé normal si :*

$$NN^* = N^*N$$

3. *Un opérateur $U \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est appelé unitaire si :*

$$U^*U = Id_{H_1} \quad et \quad U^*U = Id_{H_2}$$

4. *Un opérateur $U \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est appelé isométrique si :*

$$\|U(x)\| = \|x\|$$

pour tout $x \in H_1$.

5. *Un opérateur* $P \in \mathcal{L}(H_1)$ *est appelé positif (notation :* $P \geq 0$*) si* P *est auto-adjoint et si pour tout* $x \in H$

$$\langle P(x), x\rangle \geq 0 \ , \ \forall x \in H_1.$$

Exemple 1.5.1 *L'opérateur shift* S *sur* $l^2(\mathbb{N})$ *est isométrique, l'opérateur shift* S *sur* $l^2(\mathbb{Z})$ *est unitaire.*

Remarque 1.5.1 *pour tout opérateur* $A \in L(H_1, H_2)$, $A^*A \in L(H_1)$ *est hermitien car :*

$$(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$$

Il est même positif car :

$$\forall x \in H_1, \langle A^*Ax, x\rangle = \|Ax\|^2 \geq 0$$

Lemme 1.5.2 *Un opérateur borné* A *est auto-adjoint si et selement si :* $\langle Ax, x\rangle$ *est réel pour tout* x *dans* H.

Preuve

$$\langle A^*x, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle x, Ax\rangle} = \langle x, Ax\rangle$$

i.e : $A = A^*$.

Lemme 1.5.3 *Soit* $A \in \mathcal{L}(H)$ *un opérateur normal, alors :*

$$\ker A = \ker A^*.$$

Preuve

Soit $x \in \ker A$. Alors :

$$\|A^*x\|^2 = \langle A^*x, A^*x\rangle = \langle AA^*x, x\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle = 0$$

en utilisant pour la deuxiéme égalité le fait que A est normal donc :

$$AA^* = A^*A$$

ceci prouve donc que

$$\ker A \subset \ker A^*$$

Maintenant remarquons que si A est normal, alors A^* est normal et en appliquant l'inclusion qu'on vient de démontrer à A^* , on obtient :

$$\ker A^* \subset \ker A^{**} = \ker A$$

car

$$A^{**} = A$$

Finalement

$$\ker A = \ker A^*$$

Théorème 1.5.3 *(Fuglede - 1950)*

Soient A et N deux opérateurs bornés sur un espace de Hilbert tels que : $AN = NA$, où N est normal. Alors : $AN^* = N^*A$.

Chapitre 2

Théorie des opérateurs normaux

Dans ce chapitre, nous présentons quelques notions fondamentales de la théorie des opérateurs normaux qui seront essentielles pour ce travail.

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1.1 *On dit que $A \in B(H)$ est un opérateur normal si A commute avec son adjoint i.e. $A^*A = AA^*$.*

Exemple 2.1.1 *La multiplication A_φ par une fonction mesurable bornèe φ est un opérateur normal sur $L^2([0;1])$.*

En effet, on a $(A_\varphi f)(t) = f(t)\varphi(t)$ ou $\varphi \in C([0,1]), f \in L^2([0,1])$.

$$\begin{aligned}\langle A_\varphi f, g\rangle &= \langle f(t)\varphi(t), g(t)\rangle \\ &= \langle f(t), \varphi(t)g(t)\rangle\end{aligned}$$

donc $(A^*g(t) = \overline{\varphi(t)}g(t),$ C'est-à-dire $A^*_\varphi = A_{\overline{\varphi}}$

D'où

$$A^*_\varphi A_\varphi = A_\varphi A^*_\varphi$$

L'opérateur A_φ est un hermitien (auto-adjoint) s'il la fonction φ est réelle.

Proposition 2.1.1 [12]

Soit $A \in B(H)$, alors A est normal , si et seulement si :

$$\|Ax\| = \|A^*x\| \;\; pour\ tout\;\; x \in H$$

Corollaire 2.1.1 *Si $A \in B(H)$ est normal, on a :*

$$ker(A) = ker(A^*)$$

Proposition 2.1.2 [11]

Soit A est normal, on a :

1. *L'opérateur aA est aussi normal pour tout $a \in \mathbb{C}$.*
2. *L'opérateur A^n est aussi normal pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

Preuve

1. Nous avons $(aA)(aA)^* = aaAA^*$ et $(aA)^*(aA) = aaA^*A$. puisque A est normal, d'où il sont égaux.
2. A est normal, d'ou :

$$\begin{aligned} AA^* = A^*A &\Longrightarrow (AA^*)^n = (A^*A)^n \\ &\Longrightarrow A^n(A^*)^n = (A^*)^n A^n \\ &\Longrightarrow A^n(A^n)^* = (A^n)^* A^n \end{aligned}$$

C'est-à-dire A^n est normal, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Corollaire 2.1.2 *Soit P est polynôme et A est un opérateur normal. Alors P(A) est aussi normal.*

Remarque 2.1.1 *A^n normal $\not\Rightarrow$ A normal.*

En effet, soit $A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. on a $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est normal, mais A n'est pas normal.

Proposition 2.1.3 [11]

Soit $A \in B(H)$ est normal, on a

$$\ker(A) \oplus \overline{Im(A)} = H$$

Preuve.

On sait que : $\ker(A^*) = (ImA)^{\perp}$*, d'ou*

$$(\ker(A^*)) = ((ImA)^{\perp})^{\perp} = \overline{(ImA)}.$$

Donc

$$\begin{aligned} H &= \ker(A^*) \oplus (\ker(A^*))^{\perp} \\ &= \ker(A) \oplus \overline{Im(A)}. \end{aligned}$$

Proposition 2.1.4 [11] *(Inverse d'un opérateur normal)*

Soit $A \in B(H)$ *est normal et inversible d'inverse* A^{-1}*. Alors* A^{-1} *est aussi normal.*

Preuve

On a :

$$\begin{aligned} (A^{-1})^* A^{-1} &= (A^*)^{-1} A^{-1} \\ &= (AA^*)^{-1} = (A^*A)^{-1} \quad \textit{car } A \textit{ normal} \\ &= A^{-1}(A^*)^{-1} = A^{-1}(A^{-1})^* \end{aligned}$$

Donc A^{-1} est un opérateur normal.

Proposition 2.1.5 [11]

Pour tout U *unitaire. L'opérateur* U^*AU *est normal si et seulement si* A *est normal .*

Preuve

On a :

$$(U^*AU)^*(U^*AU) = U^*A^*AU$$

et

$$(U^*AU)(U^*AU) = U^*AA^*U$$

On remarque que $A^*A = AA^*$ si et seulement si U^*AU est normal.

Proposition 2.1.6 [11]

Soit $A \in B(H)$, les assertions suivantes sont équivalentes

i. *A est normal.*

ii. *$A^{-1}A^*$(ou A^*A^{-1}) est unitaire .*

iii. *Il existe un opérateur U telque : $A^* = UA$.*

Preuve

$i \Longrightarrow ii$ on a

$$\begin{aligned}(A^{-1}A^*)^*(A^{-1}A^* &= A(A^{-1})^*A^{-1}A^* \\ &= AA^{-1}(A^{-1})^*A^* = I(AA^{-1}) = I\end{aligned}$$

$ii \Longrightarrow iii$ clair

$iii \Longrightarrow i$ pour tout $x \in H$, on a

$$\begin{aligned}\|A^*x\|^2 &= \|UAx\|^2 \\ &= UAx, UAx = Ax, U^*UAx = \|Ax\|^2\end{aligned}$$

Donc, A est normal.

2.2 Quelque classes des opérateurs non normaux

Dans ce chapiter, nous ètudierons certaines classes d'opérateur non normaux tels que les opérateurs hyponormaux, et opèrateurs normaloides et opèrateurs paranormaux

2.2.1 Opérateur hyponormal

Définition 2.2.1 *Un opérateur $A \in B(H)$ est hyponormal si $A^*A \geq AA^*$, qui est èquivalent à la condition $\|A^*x\| \leq \|Ax\|$. Un opèrateur $A \in B(H)$ est cohyponor-*

mal si son adjoint est hyponormal. Si c'est hyponormal ou cohyponormal, alors on l'appelle seminormal.

Proposition 2.2.1 [8]

Soit $A \in B(H)$, alors A est un opérateur hyponormal si et seulement si $A^*A + 2\lambda AA^* + 2A^*A > 0$, pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$.

Preuve

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in H$ donnés . A est opérateur hyponormal si et seulement si :

$$\begin{aligned}\|A^*x\| \leq \|Ax\| &\Longleftrightarrow \|Ax\|^2 + 2\lambda\|A^*x\|^2 + \lambda^2\|Ax\|^2 \geq 0\\ &\Longleftrightarrow \langle Ax, Ax\rangle + 2\lambda \langle A^*x, A^*x\rangle + \lambda^2 \langle Ax, Ax\rangle \geq 0\\ &\Longleftrightarrow \langle A^*Ax, x\rangle + 2\lambda \langle AA^*x, x\rangle + \lambda^2 \langle A^*Ax, x\rangle \geq 0\\ &\Longleftrightarrow \left\langle (A^*A + 2\lambda AA^* + \lambda^2 A^*A)x, x\right\rangle \geq 0\\ &\Longleftrightarrow A^*A + 2\lambda AA^* + \lambda^2 A^*A > 0.\end{aligned}$$

Remarque 2.2.1 *Si $A \in B(H)$ est hyponormal, alors $(A - \lambda I)$ et hyponormal pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$*

Proposition 2.2.2 [8] *Soit $A \in B(H)$, et $\lambda \in \mathbb{C}$, si A est hyponormal et $(A-\lambda I)^{-1}$ exists, alors $(A - \lambda I)^{-1}$ et hyponormal.*

Preuve

Puisque l'hyponormalitè par la proposition 2.2.1, on peut supposer $\lambda = 0$ Ainsi $A^*A - AA^* \geq 0$ et donc

$$0 \geq A^{-1}(A^*A - AA^*)A^{*-1} = A^{-1}A^*AA^{*-1} - I.$$

Maintenant depuis $A \geq I$ implique $A^{-1} \geq I$ nous avons

$$I - A^*A^{-1}A^{*-1}A \geq 0$$

Et donc

$$(A^{*-1}A^{-1} - A^{-1}A^{*-1} = A^{*-1}(I - A^{*}A^{-1}A^{*-1}A)A^{-1} \geq 0$$

Qui compléte la preuve.

2.2.2 Opérateur normaloide

Définition 2.2.2 *Soit $A \in B(H)$, est normaloide si $r(A) = \|A\|$, oú*

$$r(A) = sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

est le rayon spectral de A. (tel que : $\sigma(A)$ le spectre de A)

Proposition 2.2.3 [8]

$r(A) = \|A\|$ *si et seulement si* $\|A^n\| = \|A\|^n$

Théorème 2.2.1 [8]

Tout opérateur hyponormal est normaloide.

Preuve

Soit $A \in B(H)$ un opérateur hyponormal sur un espace de Hilbert H.

R_1 $\|A^n\|^2 \leq \|A^{n+1}\|\|A^{n-1}\|$ pour tout entier positif n, pour chaque $n \geq 1$ et chaque $x \in H$. Maintenant si A est hyponormal, alors :

$$\|A^n x\|^2 = \langle A^n x, A^n x\rangle = \left\langle A^* A^n x, A^{n-1}x\right\rangle \leq \|A^* A^n x\|\|A^{n-1}x\|,$$

et donc pour chaque $n \geq 1$.

$$\|A^n x\|^2 \leq \|An+1\|\|A^{n-1}\|x\|^2,$$

qui assure le rèsultat revendique, complétant ainsi la preuve de R_1.

R_2 On montre

$$\|A^n\| = \|A\|^n \;\; pour\ tout\ n \geq 1.$$

Le rèsultat ci-dessus est trivial si A = 0 et il est également pour n = 1. Soit $A \neq 0$ et supposons que le rèsultat ci-dessus soit valable pour un entier $n \geq 1$.

Sellon R_1, nous obtenons

$$\|A\|^{2n} = \|A^n\|^2 \leq \|A^{n+1}\|\|A^{n-1}\| \leq \|A^{n+1}\|\|A\|^{n-1}$$

Par conséquent, comme $\|A^n\| \leq \|A\|^n$, et puisque $A \neq 0$.

$$\|A\|^{n+1} = \|A\|^{2n}(\|A\|^{n-1}) \leq \|A^{n+1}\|\|A\|^{n+1}.$$

Donc $\|A^{n+1}\| = \|A\|^{n+1}$. Ensuite, R_2 est valable pour n+1 à chaque fois qu'il est valide pour n, qui conclut la preuve de la revendication 2, et donc A est normaloide.

Depuis $\|A^{*n}\| = \|A^n\|$ pour chaque $n \geq 1$, ils'ensuit que $r(A^*) = r(A)$. donc un opérateur A est normaloide si et seulement si, et son adjoint A^* est normaloide, et ainsi chaque opérateur seminormal est normaloide.

Proposition 2.2.4 [8]

Un opérateur A est normaloide si et seulement si

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \{| \langle Ax, x \rangle |\}$$

Corollaire 2.2.1 *Si un opérateur $A \in B(H)$ est compact et normaloide, alors $\sigma_p(A) \neq 0$. Et il existe $\lambda \in \sigma_p(A)$ tel que $\|\lambda\| = \|A\|$.*

Théorème 2.2.2 [13, 8]

chaque opérateur hyponormal compact est normal.

2.2.3 Opérateur paranormal

Dans cett section, nous discutons d'une classe d'opérateur paranormaux. Dans [12] cela s'appelle un opérateur de classe (N). Nous montrons que cette classe contient les opérateurs hyponormaux et inclus dans la classe des opérateurs normaloids.

Définition 2.2.3 *Un opérateur $A \in B(H)$ est paranormal si $\|A^2x\| \geq \|Ax\|^2$ pour chaque vecteur unitaire x dans H .*

Proposition 2.2.5 *tout opérateur hyponormal est paranormal.*

Preuve.

En effet,

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle \leq \|A^*Ax\| \leq \|A^2x\|$$

Théorème 2.2.3 [8]

Soit $A \in B(H)$. si A est paranormal alors

1) est normaloid.

2) A^{-1} est également paranormal si A est inversible.

Lemme 2.2.1

Soit A un opérateur paranormal, alors :

$$\|A^3x\| \geq \|A^2x\|\|Ax\|$$

Preuve.

Pour chaque vecteur unitaire x en H, tel que $Ax \neq 0$.

$$\begin{aligned} \|A^3x\| &= \|Ax\|\|A^2\frac{Ax}{\|Ax\|}\| \geq \|Ax\|\|A\frac{Ax}{\|Ax\|}\|^2 \\ &= \frac{\|A^2x\|^2}{\|Ax\|} \geq \frac{\|A^2x\|\|Ax\|^2}{\|Ax\|} = \|A^2x\|\|Ax\| \end{aligned}$$

Lemme 2.2.2

Soit A un opérateur paranormal, alors

$$\|A^{k+1}x\|^2 \geq \|A^k\|^2\|A^2x\| \qquad \ldots \ (P_k)$$

Pour un entier positif $k \geq 1$, et chaque vecteur unitaire x dans H.

Preuve.

Pour le cas $k = 1$

$$\|A^2x\|^2 = \|A^2x\|\|A^2x\| \geq \|A^2x\|\|Ax\|^2$$

et (P_1) est clair, maintenant supposons que (P_k) est valide pour k et que nous supposons que $\|Ax\| \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}
\|A^{k+2}x\|^2 &= \|Ax\|\|^2A^{k+1}\frac{Ax}{\|Ax\|}\|^2 \\
&\geq \|Ax\|^2\|A^k\frac{Ax}{\|Ax\|}\|^2 \; \|A^2\frac{Ax}{\|Ax\|}\|^2 \\
&\geq \|A^{k+1}x\|^2\|\frac{\|A^2x\|}{\|Ax\|}\| \\
&\geq \|A^{k+1}x\|^2\|A^2x\|
\end{aligned}$$

par de Lemme 2.2.1 et (P_k). Donc (P_{k+1}) est valide est la preuve est complète par récurrence .

Théorème 2.2.4 *Si A est un opérateur paranormal, alors A^n est paranormal pour chaque entier $n \geq 1$.*

Preuve.

Est suffisant pour montrer que si A et A^k est paranormal, alors A^{k+1} est paranormal aussi. Nous pouons supposer $\|A^2x\| \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}
\|A^{2(k+1)}x\|^2 &= \|A^2x\|^2\|A^{2k}\frac{A^2x}{\|Ax\|}\|^2 \\
&\geq \|A^2x\|^2\|A^k\frac{A^2x}{\|Ax\|}\|^2 \; \|A^2\frac{Ax}{\|Ax\|}\| \\
&\geq \frac{\|A^{k+2}x\|^2}{\|A^2x\|} \\
&\geq \frac{\|A^{k+1}x\|^2\|A^2x\|}{\|A^2x\|} \\
&= \|A^{k+1}x\|^2
\end{aligned}$$

, par (P^{k+1}) de Lemma 2.2.2. Donc A^{k+1} est paranormal. Il existe un opérateur paranormal qui n'est pas hyponormal, c'est-á-dire que la classe des opérateur hyponormaux sont correctement inclus dans la classe des opérateurs paranormaux. Dans [7] Halmos un exemple d'opérateur hyponormal A tel que A^2 n'est pas hyponormal. Par le Théoréme 2.2.4, ce A est paranormal. Nous obtenons donc un exemple de non hyponormal, dans le Théoréme 2.2.2, nous prouvons que tout opérateur hyponormal compact est nécessairement normal, le théoréme suivant en est une légére généralisation.

Chapitre 3

La classe des opérateurs n-normaux

Dans ce chapitre, on présente les notions qui concernent la définition des classes opérateurs n-normaux, avec des exemples dans un espace d'Hilbert et des autres dèfinitions et des résultat que nous avons utilisé dans notre travail avec des preuves détaillées. En plus on parle de la comparaison entre les opérateurs normaux et les opérateurs n-normaux. Enfin nous discuterons les opérateurs (n, m)-normaux.

3.1 Les opérateurs n-normaux

Définition 3.1.1 *Soit $n \in \mathbb{N}$. $A \in B(H)$ est appelée opérateur n-normal si*

$$A^n A^* = A^* A^n.$$

Proposition 3.1.1 *Soit $A \in B(H)$. Alors A est n-normal si est seulement si A^n est un opérateurs normal.*

Preuve.

Soit A est un n-normal, $A^n A^* = A^* A^n$.

Alors

$$\begin{aligned} A^n(A^*)^n &= A^*A^n(A^*)^{n-1} \\ &= A^*(A^nA^*)(A^*)^{n-2} \\ &= (A^*)^2A^n(A^*)^{n-2} \\ &= (A^*)^nA^n, \end{aligned}$$

donc A^n est normal. Maintenant laissez A^n est un opérateur normal, depuis $A^nA = AA^n$, par le théoréme de fuglede, $A^*A^n = A^nA^*$, ainsi est A est n-normal. Il est qu'un opérateurs normal délimité est n-normal pour tout n, l'inverse n'est pas vrai. En effet

$$A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

alors A est n-normal ce qui n'est pas normal. Tous les opérateurs non nuls sont des opérateurs n-normaux, pour $n \geq k$ où k l'indice nilpotance, mais ils ne sont pas normaux. Est si A normal ,alors il est hyponormal . Et si A normal et A^k compact pour certains k. puis A est compact.

Exemple 3.1.1 *Soit $H = l^2$ et $e_1, e_2, \dots$ la base orthogonale standard pour l^2. On défini A sur H par :*

$$Ae_i = \begin{cases} e_1, & i = 1 \\ e_{i+1}, & i = 2j \quad ,j = 1, 2, \dots \\ 0, & i = 2j+1 \end{cases}$$

puis $A^2 = P$ où P est la projection orthogonale de l'espace par e_1. Donc A est n-normal, mais ni A ni A^* est hyponormal. Maintenant, puisque A^2 est une projection sur un espace uni-dimentionnel, il est néanmois compact. Puisque la gamme de A contient un ensemble orthonormal infini $\{e_i, i = 1, 3, 5, \dots\}$ il n'est pas compact.

Théorème 3.1.1 [1]

L'ensemble de tous les opérateurs n-normal sur H est un sous-ensemble fermé de B(H) qui est fermé sous multiplication scalaire.

Proposition 3.1.2

Soit $A \in B(H)$ est n-normal, Alors on a :

1. *A^* est n-normal,*
2. *si A^{-1} existe, alors (A^{-1}) est n-normal,*
3. *si $S \in B(H)$ est unitaire équivalent à A puis S est n-normal.*

Théorème 3.1.2 *Si A, B sont des opérateurs n-normaux et commutatifs, alors AB est un opérateur n-normal.*

Preuve

Puisque A, B sont deux opérateurs n-normaux et commutatifs, A^n, B^n sont n-normaux et commutatifs. Alors A^n, B^n sont des opérateurs n normaux. Puisque $A^n B^n = (AB)^n, (AB)^n$ est normal, donc AB est n-normal.

L'exemple suivant montre que le Théoréme 3.1.1 n'est pas nécessairement vrai si A, B ne sont pas commutatifs.

Exemple 3.1.2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad et \; A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

deux opérateurs sur l'espace de Hilbert $\mathbb{C}^2$ Alors A et B sont 2-normal, on remarque que

$$BA = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & i \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} i & -2 \\ 0 & i \end{pmatrix} = AB$$

mais comme

$$(BA)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4i \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

n'est pas normal, BA n'est pas 2-normal.

Corollaire 3.1.1 *Si $A \in B(H)$ est n-normal, alors A^m est n-normal pour tout entier positive m.*

Proposition 3.1.3 *On suppose que $A \in B(H)$ est un opérateur k-normal et qu'il est aussi un opérateur $(k+1)$-normal pour certains entiers positifs K. Alors A est $(k+2)$-normal, donc A est n-normal pour tous $n \geq k$.*

Preuve.

Puisque A est n-normal

$$A^kA^* = A^*A^k \text{ donc } AA^kA^*A = AA^*A^kA$$

depuis

$$A^{k+1}A^*A = AA^*A^{k+1}$$

puisque A est $(k+1)$-normal

$$A^*A^{k+2} = A^{k+2}A^*$$

donc A est $(k+2)$-normal.

Corollaire 3.1.2 *Si A est 2-normal et 3-normal, alors A est un opérateurs n-normal pour $n \geq 2$.*

Exemple 3.1.3 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \alpha \neq 0$$

être une opérateurs agissant dans l'espace complexe bidimensionnel Hilbert. Donc A est un 2-normal, et 3-normal, alors A est un n-normal pour tous $n \geq 2$, mais A n'est pas normal.

Proposition 3.1.4 *Suppose que $T \in B(H)$ est un opérateurs k-normal pour un entier positif k et qu'il sagit d'une isométrie partielle, puis T est un opérateurs n-normal pour tous $n \geq k$.*

Preuve

Si A est une isométrie partielle on a :$AA^*A = A$, donc $AA^*A^k = A^k$ et $A^kA^*A = A^k$.

Si A est k-normal : $A^{k+1}A^* = A^k$ et $A^*A^{k+1} = A^k$ donc $A^{k+1}A^* = A^*A^{k+1}$.

Si A est $(k+1)$-normal est par Proposition 3.1.1, alors A est n-normal pour tous $n \geq k$.

Corollaire 3.1.3 [1]

Si $A \in B(H)$ est 2-normal est isométrie partielle, alors A est n-normal, pour tous les entiers $n \geq 2$.

3.2 Comparaison entre les opérateurs normaux et les opérateurs n-normaux

Notons soigneusement la différence entre les opérateurs normaux et les opérateurs n-normaux

Proposition 3.2.1 *Supposons que A est un opérateur normal, B est un opérateur linéaire.*

Si A et B commutent, alors A^* et B^* commutent ainsi.

Théorème 3.2.1 *Si A et B sont normaux et commutent entre eux, alors $A+B$ est un opérateur normal.*

Démonstration

Nous avons

$$\begin{aligned}(A+B)(A+B)^* &= (A+B)(A^*+B^*)\\ &= AA^* + A^*B + B^*A + B^*B.\end{aligned}$$

Mais, puisque chacun de A, A^*, B, B^* commute avec tous les autre, en conséquence de la proposition précédente, les deux produits sont égaux. D'où $A+B$ est un opérateur normal.

L'exemple suivant montre que la somme de deux opérateur n-normaux et commutatifs n'a pas besoin d'être n-normal.

Exemple 3.2.1 *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

alors A et B sont 2-normal et commutatifs, mais

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad et \quad (A+B)^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$(A+B)^2$ n'est pas normal. Donc A+B n'est pas 2-normal.

Proposition 3.2.2 [1]

Soit $(A-\lambda)$ est un opérateur n-normal pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, si et seulement si A est un opérateur normal.

Proposition 3.2.3 *Supposons que A est à la fois k-normal et $(k+1)$-normal pour un entier positif k. Alors A est $(k+2)$-normal,et alors A est n-normal pour tous $n \geq k$.*

Preuve

Puisque A est k-normal, $A^kA^* = A^*A^k$, alors $AA^kA^*A = AA^*A^kA$ d'où $A^{k+1}A^*A = AA^*A^{k+1}$.

Puisque A est $(k+1)$-normal, $A^*A^{k+2} = A^{k+2}A^*$, donc A est $(k+2)$-normal.

Corollaire 3.2.1 *Si A est 2-normal et 3-normal, alors A est n-normal pour tous $n \geq 2$.*

L'exemple suivant montre qu'un opérateur 2-normal et 3-normal. Peut ne pas être normal.

Exemple 3.2.2 *Soit*

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ a & 0\end{pmatrix}$$

un opérateur agissant dans un espace de Hilbert complexe bidimensionnel. Alors A est 2-normal, 3-normal, et donc A est n-normal mais pas normal.

Proposition 3.2.4 *Supposons que A est un opérateur k-normal pour un entier positif k, et c'est une isométrie partielle. Alors A est $(k+1)$-normal.*

Donc A est n-normal pour tout $n \geq k$

Preuve

Puisque A est isométrie partielle, $AA^*A = A$. [6]. Alors $AA^*A^k = A^k$ et $A^kA^*A = A^k$. Puisque A est k-normal, $A^{k+1}A^* = A^k$ et $A^*A^{k+1}A^k$. D'où $A^{k+1}A^* = A^*A^{k+1}$, donc A est $(k+1)$-normal. Et donc d'aprés la proposition précédente A est n-normal pour tout n, k.

Corollaire 3.2.2 *Si A est 2-normal et isométrie partielle, alors A est n-normal pour tout entier $n \geq 2$.*

Notons que, dans l'exemple précédent si a est égale à 1. Alors A est un opérateur 2-normal et une isometrie partielle mais pas normal.

Lemme 3.2.1 *Soit A un opérateur k-normal et $(k+1)$-normal. Si A ou A^* est injectif, alors A est normal.*

Preuve

Puisque A est $(k+1)$-normal, $A^{k+1}A^* = A^*A^{k+1}$, et puisque A est k-normal, $A^{k+1}A^* = A^kA^*A$. Donc $A^*(AA^* - A^*A) = 0$, Puisque A est injectif, $AA^* - A^*A = 0$. Donc A est normal. Dans le cas A^* est injectif, puisque A^* est k-normal et $(k+1)$-normal, A^* est normal. Donc A est normal.

Théorème 3.2.2 [13] *Soit A un opérateur hyponormal tel que $A^n = B$ avec n est un entier positif et B un opérateur normal, alors A est normal.*

3.3 Les opérateurs (n, m)-normaux

Définition 3.3.1 *Pour deux entier positif (n, m), l'opérateur $A \in B(H)$ est dit être (n, m)-normal si :*

$$A^{*m}A^n = A^nA^{*m}$$

Par la défnition, il est clair que A est (n, m)-normal si et seulment si A^* est (n, m)-normal. De plus, si A^n est m-normal, alors A est (n, m)-normal pour chaque m. En effet, puis que A^n est normal et $A^mA^n = A^nA^m$, il résulte du théoréme de fuglede que $A^{*m}A^n = A^nA^{*m}$. Par conséquent A est (n, m)-normal.

Corollaire 3.3.1 [1]

Si $A \in B(H)$ est (n,m)-normal, alors on a :

1. *A^* est (n,m)-normal.*
2. *Si A^{-1} existe, alors A^{-1} est (n,m)-normal.*
3. *Si $S \in B(H)$ est équivalent unitaire à A, alors S est (n,m)-normal.*
4. *Si M est un sous-espace fermé de H qui réduit A, alors $A_{|M}$ est (n,m)-normal sur M.*
5. *Si A est (n,m)-normal, alors A^k est normal .*
6. *Si A est quasi-nilpotent, alors A est nilpotent.*

Références

[1] S.A. Alzuraiqi : A.B. Patel , On n-normal operators, General Mathematics Nots.1/2 (2010),61-73.

[2] H. Brezis : Analyse fonctionnelle (théorie et applications), $2^{\text{ème}}$ édition, masson paris, 1983

[3] A.Benali : Sur les opérateurs non-normaux, Thèse de doctorat, Univ. Oran 1, A.Benbella, 2014/2015

[4] A.Chaban : Les critéres de commutativité d'opérateurs bornés et non bornés, thése de doctorat. Oran 1,A. Benbella.

[5] S. Chavan : Spectral theorem for normal operators :application, Harish-Chandra research institute, Allahabad.

[6] John B. Conway : A Course in Functional Analysis, Springer Verlag, New York-Berlin Heidelberg Tokyo, 1985

[7] J. Derezinski : Unbounded linear operators, Hoza 74, 00-682, Warszawa, Poland, 2013

[8] S. Dehimi : Operators similar to their adjoit, Thèse de doctorat, univ.díOran 2017.

[9] I. Gohberg : S. Goldberg, M. A. Kaashoek, Basic Classes of Linear Operators, BirkhäuserVerlag, Basel, 2003.

[10] S. Goldberg : Unbounded linear operators, Mc Graw-Hill, United States of America, 1966

[11] M. Guesba : Traitement sur les opérateurs normaux et les opérateurs compacts, thése de doctorat, Univ.Mohamed Boudiaf-M'sila 2017.

[12] V.Istratescu : T. Saito, and T. Yoshino : On a class of operators. TShoku. Math. joun, 18,410-413(1966).

[13] V.Istratescu : On Some hyponormal operators, Pacific J.Math.22(3)(1967) 413-417

[14] M.Nadir : Opérateurs continus, Cours d'analyse fonctionnelle sur le site web (www.mostefanadir.com), 2017

[15] A.Smati : Etude des condition entre les opérateurs compacts, normaux et positifs, thése de doctorat, Université Mohamed Boudiaf-M'sila, 2018.