

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITÉ AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES
قسم الرياضيات
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique .

Par :

KORIBA Fatma Zohra

Thème

SEMI-GROUPES INTÉGRÉS ET QUELQUES APPLICATIONS.

Devant le jury composé de :

YAGOUB Ameer	Maître de conférence A	Université de Laghouat	Président
GAGUI Abdelmalek	Maître de conférence B	Université de Laghouat	Examinateur
ABDESSELAM Nawel	Maître de conférence B	Université de Laghouat	Encadreur

Année Universitaire : 2023-2024

Table des matières

Tableau de Notations	5
1 Notions préliminaires	10
1.1 Espaces fonctionnels	10
1.2 Opérateurs linéaires	13
1.3 Quelques propriétés spectrales	16
2 Semi-groupe	18
2.1 Semi-groupe fortement continue à l'origine	18
2.1.1 Introduction	18
2.1.2 Unicité de l'engendrement	22
2.1.3 Propriété de la croissance exponentielle de semi-groupe	22
2.1.4 Type d'un semi groupe	23
2.1.5 Transformation de Laplace d'un C_0 -semi-groupe	23
2.1.6 Etude de la croissance de la résolvante	25
2.1.7 Théorème de Hille-yosida	25
2.2 Semi-groupe intégrés	27
2.2.1 Introduction	27
2.2.2 Propriétés élémentaires des semi-groupes intégrés	27
2.2.3 Générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré	30
2.2.4 Propriétés des semi-groupes intégrés non-dégénéré exponentiellement bornés	32
2.2.5 Semi-groupes intégrés localement Lipschitzien	33
2.2.6 Théorème d'arendt	34

3	Équations différentielles à retard et semi-groupes	35
3.1	Modèle d'équation différentielle à retard	35
3.1.1	Équation de Nicholson (mouche-moutons)	35
3.2	Équations différentielles ordinaires à retard	37
3.2.1	Problème de Cauchy abstrait	37
3.2.2	Équations différentielles à retard	38
3.2.3	Approche de semi-groupes	39
3.2.4	Transformation au problème de Cauchy abstrait	40
3.3	Équation différentielle partielle à retard	42
3.3.1	Vérification des conditions nécessaires [5]	45
 4	 Modèles de dynamique de populations structurées en âge	 48
4.1	Présentation du modèle [5]	48
4.2	Problème semi-linéaire	50
4.3	Existence, unicité et globalité de la solution positive	52
4.3.1	Existence et unicité de la solution positive	52
4.3.2	La globalité de la solution	53
4.4	$L^1(\mathbb{R}^d, dx)$ -unicité des solutions faibles pour l'équation de transport de masse	54
 Bibliographies		 58

Dédicace

Je dédie ce modeste travail : A mon cher père, KORIBAA BRAHIM.

A ma chère mère, BEN OTHMANNE OMELKHIÈRE.

Qui n'ont jamais cessé, de formuler des prières à mon égard, de me soutenir et de m'épauler pour que je puisse atteindre mes objectifs.

Pour leurs indéfectibles soutiens et leurs patiences infinies.

A mes frères , ISMAIL, ABO BAKEUR, ASMA. Pour leurs prières et leur soutien moral.

A mon fils , AISSA HASSAN

A mes grands-pères, et mes grandes mères

Que dieu la repose et la mette au paradis .

Remerciement

Merci avant tout au bon Dieu **ALLAH**, le clément, le miséricordieux, le plus puissant. En premier lieu nos remerciements s'adressent à nos encadrant **Nawel Abdesselam** .
Merci à tous nos professeurs de **Université Amar Téliédji, Laghouat**.
Nous remercions également les membres du jury d'avoir accepté d'examiner et de juger notre travail **Yagoub Ameer** et **Gagui Abdelmalek** .
Que tous ceux qui, de près ou de loin ont contribué, par leurs conseils, leurs encouragements ou leur amitié à l'aboutissement de ce travail, trouvent ici l'expression de notre profonde reconnaissance.
Pour leur encouragement, leur soutien moral et la patience qu'ils nous ont manifestée durant toute l'année, nous remercions fortement tous les membres de nos familles.
Enfin remercier nos parents serait se répéter, parfois pour exprimer plus que ce qu'on a envie de dire on a recours au silence.

Table des Notations

On utiliserons les notations suivantes :

Δ	Le laplacien .
Re	la partie réelle dans l'ensemble \mathbb{C} .
$A(E)$	L'algèbre de Banach des opérateurs linéaires .
$L^1((0, +\infty), \mathbb{R})$	L'espace de Lebesgue des fonctions sommables sur $(0; +\infty)$.
$L^2((0, T), \mathbb{R})$	L'espace des fonctions de carré intégrable sur $[(0; T)]$ à valeur dans \mathbb{R} .
$L^p((0, T), \mathbb{R})$	L'espace des fonctions mesurables $f : [0; T] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $ f ^p$ est intégrable sur $[0; T]$.
$C^1([0, +\infty[, E)$	L'espace des fonctions continument différentiable de $[0; +\infty[$ dans E .
$D(A)$	Le domaine d'opérateur linéaire A .
$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, 1 \leq p \leq \infty$	q est l'exposant conjugué de p .
$D^\alpha u$	la dérivée partielle d'ordre α de u au sens de distributions.
$\{S(t)\}_{t \geq 0}$	Une famille d'opérateur linéaire de E dans E .
$\mathcal{SG}(M, \omega)$	Semi-groupe fortement continues.
$\mathcal{SI}(t)$	Semi-groupe intégré.
$\mathcal{L}^p(\Omega, E)$	L'espace des fonctions linéaire continie .
$R(A, \lambda)$	La résolvante de A en $\lambda \in \rho(A)$ c'est l'opérateur linéaire $R(A, \lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$.

Introduction

Les problèmes d'évolutions abstraits apparaissent dans de très nombreuses applications en finance (équation de Black-Scholes) en mécanique quantique (équation de Schrödinger) ... etc . , les outils mathématiques les plus importants pour résoudre ces problèmes est les semi-groupes d'opérateurs linéaires et ses applications à la théorie des équations aux dérivées partielles. Un semi-groupe à un paramètre d'opérateurs linéaires sur un espace de Banach E est une famille d'opérateurs linéaires bornés $S : [0, +\infty[\rightarrow A(E)$ vérifiant :

- 1) $S(t + s) = S(t)S(s)$, $\forall t, s \geq 0$
- 2) $S(0) = I$, tel que $I = id$

Cette nomination est d'origine algébrique, en abstraite, un semi-groupe est un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, ce qui est bien le cas avec la famille $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ muni de la composition. La théorie des semi-groupes trouve sa source dans une question posée par Augustin Louis Cauchy (1789 -1857), en 1821 dans son cours d'analyse [4] dans les pages 98 -113, sans aucune motivation. La question était la suivante : Déterminer toutes les fonctions complexes continues non nulles vérifiant :

$$f(t + s) = f(t)f(s) \quad , \forall t, s \geq 0$$

Le fait que ces fonctions sont de la forme $f(t) = \exp(at)$; qui est un résultat prouvé après par **Niels Henrik Abel** (1802 -1829), et le fait que f est complètement déterminée par le nombre $a = f'(0)$ motive l'association d'un opérateur linéaire $A : D(A) \rightarrow E$ un semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ défini par :

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} = \left. \frac{dS(t)x}{dt} \right|_{t=0} \quad \forall x \in D(A)$$

appelé le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Ce qui a donné la naissance effective de la théorie des semi-groupes dans la première moitié de ce siècle avec **Jacques Hadamard** (1865 - 1963) qui a souligné dans [8] que ce qu'on appelle habituellement le principe de Huygens en physique ondulatoire, a pour conséquence un principe abstrait applicable aux problèmes autonomes de Cauchy : si un tel problème admet des solutions uniques pour tous les temps $t \geq 0$; alors ces solutions sont les orbites de la donnée initiale sous un semi-groupe de transformations $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

En 1948, la théorie de semi groupe a trouvé sa place avec le fameux théorème du à **Einar Hille** (1894 - 1980) et **Kosaku Yosida** (1909 - 1990) qui ont caractérisé les générateurs infinitésimaux des semi-groupes fortement continues dans [9] et [12]. Dans les années (1970 - 1980) et grâce aux efforts de plusieurs écoles, la théorie a atteint un certain degré de perfection par les études de **Pazy**.

Actuellement, les semi-groupes sont existe dans la majorité des aires mathématiques. On trouve plusieurs applications de cette théorie non seulement aux domaines classiques comme la théorie des EDP ou la théorie des processus stochastiques, mais les semi-groupes aujourd'hui deviennent un outil très puissant dans la résolution des équations intégré-différentielles et des équations différentielles fonctionnelles issues de la mécanique quantique et aussi dans la théorie du contrôle en dimension infinie.

D'autre part Les méthodes de semi-groupes sont également appliquées aujourd'hui dans la résolution des équations concrètes qui se produisent dans la dynamique de la population ou dans la théorie du transport.

Le moment de plus important concernant la génération des semi-groupe est marqué par l'introduction des semi-groupes intégrés à la fin des années 80. Dans la théorie de semi-groupe intégré un role important revient a un théorème classique de représentation de la transformée de Laplace pour une fonction avec valeurs réelles prouvé par Widder, dans le cas des semi-groupes intégrés on peut voir que le générateur n'est pas nécessairement à domaine dense . Le but de ce travail est d'appliquer respectivement les semi-groupes et les semi-groupes intégrés dans les équations différentielles à retard, équations paraboliques avec retard pour atteindre cet objectif, nous composons ce travail en quartes chapitres précédés d'une introduction. Chaque chapitre est composé de plusieurs sections dans lesquelles nous développons les différents aspects du sujet du chapitre. Après l'introduction, nous . trouvons

le premier chapitre, quelques résultats préliminaires : des notions générales sur les espaces comme espace Sobolev, Banach, . . . avec des quelques propriétés associées, nous avons donné aussi quelques propositions et théorèmes fondamentaux utilisés dans la suite de ce mémoire, et aussi des rappels utiles pour que le lecteur puisse comprendre les résultats des chapitres suivants.

En suite, le deuxième chapitre contient deux sections, la première section présente une introduction à la théorie des semi-groupe, c'est le dernier que nous désignons par $S(t)$ ont deux propriétés similaires à celles d'une fonction exponentielle, qui sont définies comme suit :

$$\begin{cases} S(0) = I \\ S(t + s) = S(t)S(s) \quad ; \forall t, s \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Et on définirons aussi le générateur infinitésimal de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est l'opérateur linéaire non borné A , et le domaine de définition de A , et quelques propriétés de semi-groupe, nous terminons ce se section par un théorème très important le théorème de Hille-Yosida. La deuxième section présente la théorie des semi-groupes intégrés et quelques propriétés. Le troisième chapitre est consacré pour l'étude l'équation différentielle à retard qui a de la valeur de la dérivée à un instant t de la solution y dépend non seulement de la valeur de la dérivée à un instant t mais de ses valeurs prises avant cet instant dans le pas d'où le mot retard.

Le dernier chapitre présente un modèle de dynamique de population structurée en âge, qui se compose de trois sections, la première section présente un modèle linéaire de base pour une population structurée en âge chronologique après la modélisation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = - \underbrace{\left(\mu(x) + \int_0^{+\infty} \kappa(s)y(s, t)ds \right)}_{\text{compétition pour les ressources}} \chi(x) y(x, t), \quad \text{pour } x \geq 0, \\ y(0, t) = \exp \left(- \underbrace{\int_0^{+\infty} \sigma(s)y(s, t)ds}_{\text{limitations des naissances}} \right) \int_0^{+\infty} \beta(x)y(x, t)dx \\ y(\cdot, t) = y_0 \in L^1((0, +\infty), \mathbb{R}). \end{array} \right.$$

Ensuite, l'objet de la deuxième section est considéré par des méthodes de semi-groupe intégré et reformuler le problème comme problème semi-linéaire classique :

$$\begin{cases} \frac{dv(t)}{dt} = Av(t) + F(v(t)) & , \text{pour } t \geq 0 \\ v(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix} = v_0 \in \overline{D(A)} \end{cases}$$

Dans la dernière section de ce chapitre, on a présenter l'existence, unicité et la globalité de la solution positive.

On termine par une conclusion.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce premier chapitre, on rappelle quelques notions de base tout en reprenant des théorèmes et des résultats nécessaires pour le développement de notre travail. Pour plus de détails le lecteur peut consulter l'ouvrage suivant [2].

1.1 Espaces fonctionnels

Définition 1.1.1. (Espace C^k) Soient I un ouvert de \mathbb{R} ; $k \in \mathbb{N}$ et E un espace de Banach.

1) $C^0(I; E)$ est l'espace des fonctions $f : I \rightarrow E$ continues.

2) $C^k(I; E)$ est l'espace des fonctions $f : I \rightarrow E$ dont toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre k continues, c'est à dire $f^{(n)} \in C^0(I; E)$ pour $0 \leq n \leq k$.

Définition 1.1.2. (Espace de Bochner) Soient $p \in \mathbb{R}^*$, $\omega \in \mathbb{R}$ et E un espace de Banach munit de la norme $\| \cdot \|_E$.

Pour $1 \leq p \leq \infty$; on définit l'espace de Bochner :

$\mathcal{L}^p(\Omega; E) := \{f : \Omega \rightarrow E \text{ mesurable} : \int_{\Omega} |f(s)|_E^p ds < \infty\}$,

et l'application $|\cdot|_p$ définie sur $\mathcal{L}^p(\Omega; E)$ à valeurs dans \mathbb{R}_+ par :

$$\| f \|_p := \left(\int_{\Omega} |f(s)|_E^p ds \right)^{\frac{1}{p}}$$

Remarque 1.1.1. On peut définir :

$\mathcal{L}^{\infty}(\Omega; E) := \{f : \Omega \rightarrow E \text{ mesurable} : \exists C \geq 0 \text{ tel que } |f(s)|_E \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}$,

et l'application $|\cdot|_{\infty}$ définie sur $\mathcal{L}^{\infty}(\Omega; E)$ à valeurs dans \mathbb{R}_+ par :

$|f|_{\infty} := \inf\{C \geq 0, |f(s)|_E \leq C \text{ pour presque tout } s \in \Omega\}$.

Remarque 1.1.2. Pour $1 \leq p \leq \infty$ est l'ensemble des classes d'équivalence F des fonctions f de $L^p(\Omega; E)$ pour la relation d'équivalence $(= p.p).|\cdot|_p$ est alors une norme sur $\mathcal{L}^p(\Omega; E)$ est un espace de Banach.

La classe d'équivalence de f est notée $[f]$ pour tout $f \in L^p(\Omega; E)$.

Définition 1.1.3. (Espace de Banach) Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet (pour la distance associée à sa norme), c'est-à-dire dans lequel toute suite de Cauchy est convergente.

Définition 1.1.4. (Espace Normé) Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} ; on dit que E est normé lorsqu'il muni d'une norme, c'est-à-dire d'une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que pour tous $x; y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

- 1) Séparation $N(x) = 0 \implies x = 0$.
- 2) Homogénéité $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$.
- 3) Sous additive $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Remarque 1.1.3. 1) Les espaces $(\mathbb{R}; |\cdot|), (\mathbb{C}; |\cdot|)$ sont de Banach.
2) Toute espace normé de dimension fini est un espace de Banach.

Définition 1.1.5. (Espace de Hilbert)

- 1) Un \mathbb{K} -espace vectoriel H muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien (réel si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; complexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
- 2) Un espace pré hilbertien complet pour la norme définie par un son produit scalaire est appelé espace de Hilbert.

Définition 1.1.6. (Espace Dual) Soit E un espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} : On appelle espace dual de E , et on le note E' ; l'ensemble des formes linéaires continues sur E .

Définition 1.1.7. (Espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$) Pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et tout $m \in \mathbb{N}$ l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est définie par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

ou $D^\alpha u$ désigne la dérivée partielle d'ordre α de u au sens de distributions.

Cet espace est muni de la norme

$$\| u \|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \| D^\alpha u \|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p \leq \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq m} \| D^\alpha u \|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

On pose

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, u \text{ est mesurable et } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \leq \infty \right\}.$$

On note

$$\| u \|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Noter que pour $m = 0$ l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$.

Remarque 1.1.4. (Espace de Sobolev $W^{1,2} = H^1(\Omega)$) L'espace $H^1(\Omega)$ (de Sobolev d'ordre 1) est l'ensemble des fonctions de $L^2(\Omega)$ ayant des dérivées dans $L^2(\Omega)$ au sens des distributions

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i \in \overline{1, n} \right\}.$$

Théorème 1.1.1. $H^1(\Omega)$ est un espace vectoriel muni de produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx + \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx$$

et de la norme

$$\| u \|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 + \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Remarque 1.1.5. 1) Convergence dans $H^1(\Omega)$ Une suite U_j converge vers U dans $H^1(\Omega)$ si et seulement si $U_j \longrightarrow U$ dans $L^2(\Omega)$ et $\nabla U_j \longrightarrow \nabla U$ dans $(L^2(\Omega))^n$.

2) $(H^1(\Omega), \| \cdot \|_{H^1(\Omega)})$ est un espace de Hilbert séparable.

Définition 1.1.8. (Espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$) On définit $H_0^1(\Omega)$ comme la fermeture de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ tel que $D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$. Autrement dit :

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega); \exists \varphi_n \in D(\Omega) \text{ tel que } \varphi_n \longrightarrow u \text{ dans } H^1(\Omega) \right\}$$

Proposition 1.1.1. (Inégalité de Poincaré) Si Ω un ouvert borné (au moins dans une direction) alors il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle que :

$$\| u \|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}, \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Corollaire 1.1.1. Si Ω borné (au moins dans une direction) alors la semi-norme $\left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à celle induite par $H^1(\Omega)$

Définition 1.1.9. (Formule de Green) 1) Soit Ω un ouvert 1-régulier alors pour tous $u, v \in H^1(\Omega)$ on a :

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) v(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) \nu_i(x) dx$$

ν_i la i -ème composante de la normale extérieur unité de D .

2) Si Ω est 1-régulier alors $\forall (u; v) \in H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ on a :

$$\int_{\Omega} \delta u(x) v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \int_{\partial\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) dx.$$

1.2 Opérateurs linéaires

Soient E et F deux espaces de Banach.

Définition 1.2.1. [11] (Opérateur linéaire) Un opérateur linéaire de E dans F est une application linéaire A définie d'un sous espace vectoriel $D(A) \subset E$ et à valeurs dans F , c'est à dire pour tout $x; y \in D(A)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :

1) $A(x + y) = Ax + Ay$.

2) $A(\lambda x) = \lambda Ax$.

Remarque 1.2.1. Chaque opérateur ne vérifie pas les propriétés de la définition 1.2.1 est un opérateur non linéaire .

Définition 1.2.2. [11] (Opérateur Fermé) Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ est dit fermé si et seulement si pour tout suite $(x_n)_n$ d'éléments de $D(A)$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n \longrightarrow x \\ Ax_n \longrightarrow y \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} x \in D(A) \\ Ax = y. \end{array} \right.$$

Définition 1.2.3. (Opérateur borné) Un opérateur linéaire A entre les espaces vectoriels normés E et F est appelé opérateur borné quand l'ensemble $:\left\{ \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E}, x \in E \setminus \{0\} \right\}$ est

borné.

En d'autres termes, On dit que l'opérateur linéaire A est borné s'il existe $M > 0$; pour tout x dans l'espace E qui vérifié :

$$\| Ax \|_F \leq M \| x \|_E .$$

Définition 1.2.4. (Opérateur Différentiel) Un opérateur différentiel linéaire d'ordre m est définie par :

$$\mathcal{D} = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(x) D^\alpha ,$$

ou les $a_\alpha(x)$ sont des fonctions de n variables, appelées coefficients de l'opérateur \mathcal{D} .

Définition 1.2.5. [2] (Opérateur non borné) Soient E et F deux espaces normés et $A : D(A) \rightarrow F$ un opérateur linéaire, ou $D(A) \subset E$. L'opérateur A est dit non borné s'il existe une suite $(x_n)_n \in D(A)$ tel que :

$$\| Ax_n \| > n \| x_n \| .$$

Exemple 1.2.1. (Sur un opérateur différentiel) Soit

$$\Delta : L^2([0, 1]^2, \mathbb{C}) \rightarrow L^2([0, 1]^2, \mathbb{C})$$

$$u \mapsto \Delta u$$

On va montrer que le Laplacien est un opérateur non borné de $L^2([0, 1]^2, \mathbb{C})$ dans $L^2([0, 1]^2, \mathbb{C})$.

Soit $u_n(x, y) = e^{in(x+y)}$.

On va montrer que $u_n \in L^2([0, 1]^2, \mathbb{C})$:

$$\| u_n \|_{L^2}^2 = \int_{[0,1]^2} |e^{in(x+y)}|^2 dx dy = 1 < \infty ,$$

donc $u_n \in L^2$.

On a

$$\begin{aligned}\Delta u_n &= \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} \\ &= -n^2 e^{in(x+y)} - n^2 e^{in(x+y)} \\ &= -2n^2 e^{in(x+y)} \\ &= -2n^2 u_n\end{aligned}$$

donc,

$$\frac{\|\Delta u_n\|_{L^2}}{\|u_n\|_{L^2}} = \frac{2n^2 \|u_n\|_{L^2}}{\|u_n\|_{L^2}} = 2n^2 \longrightarrow \infty.$$

tel que $n \longrightarrow \infty$. Donc le Laplacien est un opérateur non borné de $L^2([0, 1]^2, \mathbb{C})$ dans $L^2([0, 1]^2, \mathbb{C})$.

Définition 1.2.6. (Opérateur Adjoint) Soient $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H_1})$ et $(H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H_2})$ deux \mathbb{K} espaces de Hilbert, on appelle adjoint de l'opérateur $A \in L(H_1, H_2)$ l'opérateur $A^* : H_2 \longrightarrow H_1$ tel que :

$$\forall x \in H_1, \forall y \in H_2 : \langle A(x), y \rangle_{H_2} = \langle x, A^*(y) \rangle_{H_1}$$

Définition 1.2.7. (Opérateur dissipatif) Soit E un espace de Banach et soit E' son dual topologique, on note la valeur de $x^* \in E'$ au point $x \in E$ par $\langle x^*, x \rangle$ ou $\langle x, x^* \rangle$: Pour tout $x \in E$ on définit l'ensemble de dualité $F(x) \subseteq E'$ par :

$$F(x) = \left\{ x^* \in E', \langle x^*, x \rangle = |x|_E^2 - |x^*|_{E'}^2 \right\},$$

pour tout $x \in E$; $F(x) \neq \emptyset$ (d'après théorèmes de Hahn-Banach).

Un opérateur linéaire A est dissipatif si pour tout $x \in D(A)$ il existe $x^* \in F(x)$ tel que $\operatorname{Re} \langle Ax; x^* \rangle \leq 0$. Si H est un espace de Hilbert alors un opérateur $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ est dissipatif si pour tout $x \in D(A)$

$$\operatorname{Re}(\langle Ax; x \rangle_H) \leq 0.$$

Définition 1.2.8. (Densité) On dit que A est à domaine dense (ou densément défini) si $\overline{D(A)} = E$; i.e, si pour tout $x \in E$, il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $D(A)$ telle que :

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Théorème 1.2.1. [11] (Banach-Steinhaus) Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires bornés de E dans F . On suppose que :

$$\sup_{i \in I} \| A_i x \| \leq \infty, \forall x \in E,$$

alors :

$$\sup_{i \in I} \| A_i \|_{L(E,F)} \leq \infty,$$

Autrement dit, il existe une constante C telle que :

$$\| A_i x \| \leq C \| x \|, \forall x \in E, \forall i \in I.$$

1.3 Quelques propriétés spectrales

Définition 1.3.1. (Résolvante) Soit A un opérateur, l'ensemble résolvante de A est l'ensemble :

$$\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda I - A) \text{ est inversible} \}$$

Tout scalaire $\lambda \in \rho(A)$ est dit valeur résolvante.

Si $\lambda \in \rho(A)$; On appelle résolvante de A l'application :

$$R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}.$$

Définition 1.3.2. (Spectre d'un opérateur) Soit A un opérateur, le spectre $\sigma(A)$ est le complément de l'ensemble résolvante, i.e.

$$\sigma(A) = \{ \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda I - A) \text{ est non inversible} \},$$

$(\lambda I - A)$ n'est pas inversible, donc n'est pas bijectif dans un espace de Banach E . Tout scalaire $\lambda \in \sigma(A)$ est dit valeur spectrale.

Proposition 1.3.1. *(Le rayon spectral de A) Pour un opérateur borné A sur un espace de Banach E , le spectre $\sigma(A)$ est toujours compact et non vide, d'où son rayon spectral*

$$r(A) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\}$$

est finie et satisfait $r(A) \leq \|A\|$, si $\sigma(A) = \emptyset$ on pose $r(A) = 0$.

Définition 1.3.3. *Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur fermé. Alors*

$$S(A) = \sup\{\lambda, \lambda \in \sigma(A)\}.$$

est appelée la borne spectrale de A : La borne spectrale $S(A)$ est toujours dominé par la borne de croissance

$$\omega_0 = \inf\{\omega \in \mathbb{R} \text{ il existe } M_\omega \geq 1 \text{ tel que } \|S(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}, \forall t \geq 0\}.$$

Chapitre 2

Semi-groupe

2.1 Semi-groupe fortement continue à l'origine

On va rappeler quelques notions et théorèmes de la théorie de semi-groupes, nécessaires pour le développement de notre travail . Pour plus de détails, on renvoie aux ouvrages suivants : [11]

2.1.1 Introduction

On considère le problème de Cauchy du type trouver y tel que :

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

ou y_0 donnée dans un espace fonctionnel E .

Dans ce problème on a trois cas :

Cas 1 : A est constante, la solution de problème (2.1) est donnée par :

$$y(t) = y_0 e^{At} \quad \text{tel que : } e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

Cas 2 : $F=A$ ou A un opérateur borné, par exemple matrice de $n \times n$; et E est un espace de dimension finie n : La solution de (2.1) est donnée par :

$$y(t) = y_0 e^{At} \quad \text{tel que : } e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} , \forall t > 0.$$

Cas 3 : $F = B$; ou B un opérateur linéaire non borné, on prenons par exemple l'opérateur différentielle dans espace de Banach ($E = l^2(\mathbb{R}^n)$) car la majorité des opérateurs différentielles définies dans un espace de Banach (Hilbert) ne sont pas bornés. Nous ne pouvons pas écrire la solution comme suit : $y(t) = y_0 \exp(Bt)$ puisque $\exp(Bt) = \sum_{k \geq 0} \frac{(Bt)^k}{k!}$ n'est pas bien définie, alors la solution s'écrit : $y(t) = y_0 S(t)$; $t \geq 0$; ou $S(t)$ est un opérateur borné dans E , caractérisant les propriétés de $\exp(Bt)$ ci-dessus, en particulière :

$$\begin{cases} S(0) = I \\ S(t+s) = S(t)S(s) \\ \lim_{t \rightarrow 0} S(t)y_0 = y_0 \quad \text{dans } E \end{cases}$$

Définition 2.1.1. : Soit E un espace de Banach, une famille d'opérateurs linéaires bornés $S(t) : E \rightarrow E$ dépendantes du paramètre $t \geq 0$ un semi groupe si :

$$\begin{cases} S(0) = I \\ S(t+s) = S(t)S(s) \quad \forall t, s \geq 0 \end{cases}$$

Définition 2.1.2. : Semi-groupe $S(t)$ est dit fortement continues à l'origine (ou bien semi-groupe de classe C_0) si :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)x - x\| = 0 \quad \forall x \in E.$$

Définition 2.1.3. : S de classe C_0 si et si seulement si :

$$\begin{cases} S(0) = I, \\ S(t+s) = S(t)S(s) \quad \forall t, s \geq 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)x - x\| = 0 \quad \forall x \in E. \end{cases}$$

Définition 2.1.4. : Soit $S(t)$ un semi-groupe sur E , le générateur infinitésimal de $S(t)$ est l'opérateur linéaire non borné A définie par

$$A : D(A) \subset E \rightarrow E$$

$$D(A) = \{x \in E \text{ telle que } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t) - I}{t} x \text{ existe}\}$$

ou

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t) - I}{t} x, \forall x \in D(A).$$

Proposition 2.1.1. *Soit $S(t)$ est un semi-groupe sur E et A son générateur infinitésimal, si $x \in D(A)$; alors $S(t)x \in D(A)$ et on a l'égalité :*

$$S(t)Ax = AS(t)x, \forall t \geq 0.$$

Proposition 2.1.2. *: Soient $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 semi-groupe et A son générateur infinitésimal. Alors l'application :*

$$[0, \infty[\ni t \longrightarrow S(t)x \in D(A),$$

est dérivable sur $[0; \infty[$; pour tout $x \in D(A)$ et on a :

$$\frac{d}{dt}S(t)x = S(t)Ax = AS(t)x, \forall t \geq 0.$$

Proposition 2.1.3. *: Soient $\{S(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal, si $x \in D(A)$; alors $\int_0^t S(\sigma)x d\sigma \in D(A)$ et on a l'inégalité :*

$$A \int_0^t S(\sigma)x d\sigma = S(t)x - x, \forall t \geq 0.$$

Théorème 2.1.1. *: Soient $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe et A son générateur infinitésimal. Alors $x \in D(A)$ et $Ax = y$ si et seulement si :*

$$\int_0^t S(\sigma)y d\sigma = S(t)x - x, \forall t \geq 0$$

Proposition 2.1.4. *: Soient $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 semi-groupe et A son générateur infinitésimal. $D(A)$ est un sous espace vectoriel dense dans E , ($\overline{D(A)} = E$)*

Preuve. *$D(A)$ est un sous espace vectoriel vérifie que $\overline{D(A)} = E$?*

Comme

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t S(\sigma)x d\sigma = x, \forall x \in E,$$

donc il suffit de démontrer que

$$\forall x \in E, \text{ et } \forall t \geq 0; \frac{1}{t} \int_0^t S(\sigma)x d\sigma \in D(A)?$$

En effet

$$\begin{aligned}
 \frac{S(h) - I}{h} \int_0^t S(\sigma)x \, d\sigma &= \frac{1}{h} \int_0^t [S(h + \sigma)x - S(\sigma)x] \, d\sigma \\
 &= \frac{1}{h} \int_0^t S(h + \sigma)x \, d\sigma - \frac{1}{h} \int_0^t S(\sigma)x \, d\sigma \\
 &= \frac{1}{h} \int_h^{h+t} S(\sigma)x \, d\sigma - \frac{1}{h} \int_0^t S(\sigma)x \, d\sigma \\
 &= \frac{1}{h} \int_h^0 S(\sigma)x \, d\sigma + \frac{1}{h} \int_0^{t+h} S(\sigma)x \, d\sigma - \frac{1}{h} \int_0^t S(\sigma)x \, d\sigma \\
 &= \frac{1}{h} \int_h^{h+t} S(\sigma)x \, d\sigma - \frac{1}{h} \int_0^h S(\sigma)x \, d\sigma = S(t)x - x
 \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(h) - I}{h} \int_0^t S(\sigma)x \, d\sigma = S(t)x - x.$$

D'où

$$\int_0^t S(\sigma)x \, d\sigma \in D(A),$$

on a donc aussi $\frac{1}{t} \int_0^t S(\sigma)x \, d\sigma \in D(A)$.

Et comme $x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t S(\sigma)x \, d\sigma$. On déduit que $\overline{D(A)} = E$.

Proposition 2.1.5. : Soient $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 semi-groupe et A son générateur infinitésimal, alors l'opérateur A est fermé.

Preuve. $\forall x_n \in D(A)$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y$.

Est-ce que $x_n \in D(A)$ et $Ax = y$?

En effet, supposons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

$$(x_n)_n \in D(A) \text{ et } x_n \longrightarrow x \text{ et } Ax_n \longrightarrow y \text{ dans}$$

D'après théorème 2.1.1 :

$$\int_0^t S(\sigma)y \, d\sigma = S(t)x - x,$$

donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t S(\sigma)y \, d\sigma,$$

on en déduit que $x \in D(A)$ et $Ax = y$. Ainsi l'opérateur A qui fermé.

2.1.2 Unicité de l'engendrement

maintenant on va donner un résultat qui concerne l'unicité de l'engendrement pour les C_0 -semi-groupes.

Théorème 2.1.2. : Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ et $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ deux C_0 -semi-groupes ayant pour générateur infinitésimal le même opérateur A : alors :

$$T(t) = S(t); \forall t \geq 0$$

2.1.3 Propriété de la croissance exponentielle de semi-groupe

Lemme 2.1.1. :

Soit $S(t)$ un semi groupe fortement continu alors il existe $M \geq 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$ telle que

$$\| S(t) \| \leq M e^{\omega t}; \forall t \geq 0.$$

Preuve. Considérons le compact $[0; 1]$.

Comme $S(t)$ est fortement continue alors $\forall x \in E; t \rightarrow S(t)x$ est continue.

Alors du compact $[0; 1]$ par cette application est borné.

Alors

$$\exists M_x \text{ telle que } \| S(t) \| \leq M_x; \forall t \in [0, 1],$$

d'après Banach-Steinhaus

$$\exists M \text{ telle que } \| S(t) \| \leq M; \forall t \in [0, 1].$$

comme

$$S(0) = I \implies M \geq 1.$$

si $t \notin [0, 1]$; on peut écrire t sous la forme $t = n + \sigma$ ou $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in [0, 1]$.

$$S(t) = S(n + \sigma) = S(n)S(\sigma) = \underbrace{S(1 + \dots + 1)}_{n \text{ fois}} S(\sigma) = S(1)^n S(\sigma),$$

donc

$$\| S(t) \| = \| \{S(1)\}^n \| \| S(\sigma) \| \leq \| S(1)^n \| \| S(\sigma) \| \leq MM^n = Me^{n \log M} = Me^{n\omega},$$

on obtient

$$\| S(t) \| \leq Me^{n \log \omega}, n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \| S(t) \| \leq M, t \in [0, 1].$$

Finalement, on obtenons :

$$\| S(t) \| \leq Me^{\omega t}, t \geq 0 \quad \text{et} \quad M \geq 1.$$

Proposition 2.1.6. Si $S(t)$ est un semi-groupe fortement continue à l'origine vérifiant la majoration :

$$\| S(t) \| \leq Me^{\omega t};$$

Alors $S(t)$ est fortement continue en un point $s \geq 0$.

2.1.4 Type d'un semi groupe

Définition 2.1.5. On appelle type d'un semi-groupe $S(t)$ le nombre ω_0 définie par :

$$\omega_0 = \inf\{\omega \in \mathbb{R}, \quad \exists M \in \mathbb{R}^+ \quad \text{telle que } \| S(t) \| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0\},$$

$$\omega_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\log \| S(t) \|}{t} = \inf_{t \geq 0} \frac{\log \| S(t) \|}{t}$$

On a semi-groupe important.

Si $\forall t \geq 0$ on $\| S(t) \| \leq M$ le semi-groupe $S(t)$ est dit borné.

Si $\forall t \geq 0$ on $\| S(t) \| \leq 1$ le semi-groupe $S(t)$ est dit contraction.

2.1.5 Transformation de Laplace d'un C_0 -semi-groupe

Définition 2.1.6. Dans la suite, pour $\omega \geq 0$ nous désignerons par A_ω l'ensemble

$$A_\omega = \{\lambda \in \mathbb{R}; \lambda > \omega > \omega_0\}$$

soit $\lambda \in A_\omega$ et $\{S(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$, on a :

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}; \forall t \geq 0$$

et on voit que :

$$\|e^{-\lambda t} S(t)x\| \leq e^{-\lambda t} \|S(t)\| \|x\| \leq Me^{-(\lambda - \omega)t} \|x\|, \forall x \in E$$

On définit l'application :

$$R_\lambda : E \longrightarrow E$$

par

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt$$

Il est clair que $R_\lambda(x)$ est un opérateur linéaire ($R_\lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha R_\lambda(x) + \beta R_\lambda(y)$).

De plus, on a :

$$\|R_\lambda x\| \leq \int_0^\infty \|e^{-\lambda t} S(t)x\| dt \quad \text{si } (\lambda > \omega)$$

$$\|R_\lambda x\| \leq \frac{M}{\lambda - \omega} \|x\|, \forall x \in E$$

D'où il résulte que R_λ est un opérateur linéaire borné, de plus $R_\lambda = R(\lambda, A)$

Définition 2.1.7. L'opérateur

$$R_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt$$

S'appelle la transformée de Laplace du semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

Théorème 2.1.3. Si $\lambda > 0$ telle que

$$\lambda > \omega_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\log \|S(t)\|}{t},$$

alors $\lambda \in \rho(A)$ et l'intégrale $\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt$ existe.

Et :

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt$$

avec

$$R_\lambda(x) = R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$$

2.1.6 Etude de la croissance de la résolvante

On a $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda > \omega > \omega_0$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt$ est convergente.
on a :

$$e^{-\lambda t} \|S(t)x\| \leq \|x\| M_\varepsilon e^{(-\lambda + \omega_0 + \varepsilon)t} \quad \text{ou} \quad \varepsilon > 0$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon.$$

De cette manière, on peut définir l'opérateur borné

$$R(\lambda) : E \longrightarrow E$$

$$R(\lambda)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt \quad \text{telle que} \quad \lambda > \omega_0 + \varepsilon$$

et que

$$\|R(\lambda)\| \leq \frac{M_\varepsilon}{\lambda - \omega_0 - \varepsilon}$$

on a $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{R}; \lambda > \omega_0\}$,

$$R(\lambda, A) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt \quad \text{et} \quad \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M_0}{\lambda - \omega_0}.$$

Proposition 2.1.7. Soient $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe et A son générateur infinitésimal

$$R((\lambda, A))^n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t^{(n-1)} S(t) dt, n \in \mathbb{N}^*.$$

Et

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On va donner un théorème important concernant le semi-groupe .

2.1.7 Théorème de Hille-yosida

Théorème 2.1.4. [12] Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M; \omega)$ si et seulement si :

- 1) A est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = E$.
- 2) il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que $A_\omega \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in A_\omega$; on a

$$\|(\lambda I - A)^{-n}\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour fixer les idées de cet théorème on a l'exemple suivant :

Exemple 2.1.1. Soit $E = L^2(\mathbb{R})$ on considère l'application "translation"

$$S(t)y(x) = (S_t y)(x) = y(x + t), y \in L^2(\mathbb{R}^n), t \geq 0.$$

Montrons que $(S_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu :

1) $(S_0 y)(x) = y(x + 0) = y(x) = (Iy)(x)$; donc $S_0 = I$.

2) $(S_{t+s}y)(x) = y(x + (t + s)) = y(x + t) \times y(x + s) = (S_t y)(x) \times (S_s y)(x)$,

3)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \| (S_t y)(\cdot) - (Iy)(\cdot) \|_{L^2} = 0.$$

car si $y \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$; on a :

$$\frac{\| (S_t y)(\cdot) - (Iy)(\cdot) \|_{L^2}}{t} = \| y(\cdot + t) - y \|_{L^2} \leq \| y' \|,$$

qui tend vers 0 lorsque t tend vers 0; et si $y \in L^2(\mathbb{R}^n)$: on choisit

$$y_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow y \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

2.2 Semi-groupe intégrés

2.2.1 Introduction

Dans cette section , on va donner des définitions ainsi des propositions et des théorèmes concernant les semi-groupe intégrés, c'est le dernier dont nous avons besoin dans les applications des équations aux dérivées partielles à retard .

Pour plus de détails, nous consulterons [4] .

2.2.2 Propriétés élémentaires des semi-groupe intégrés

Définition 2.2.1. Soit $\{\mathcal{SI}(t)\}_{t \geq 0}$ une famille d'opérateur linéaire borné sur un espace de Banach E . On dira que $\{\mathcal{SI}(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe intégré si seulement si :

- 1) $\mathcal{SI}(0) = 0$;
- 2) pour chaque $x \in E$; l'application $t \rightarrow \mathcal{SI}(t)x$ est continue sur $[0; +\infty[$,
- 3) pour tous $s, t \geq 0$ on a

$$\mathcal{SI}(t)\mathcal{SI}(s) = \int_0^t [\mathcal{SI}(r+s) - \mathcal{SI}(r)] dr.$$

Proposition 2.2.1. Soit $\{\mathcal{SI}(t)\}_{t \geq 0} \subset A(E)$ un semi-groupe intégré. Pour tous $t, s \geq 0$ on a :

- 1) $\mathcal{SI}(t)\mathcal{SI}(s) = \int_t^{t+s} \mathcal{SI}(r) dr - \int_0^s \mathcal{SI}(r) dr$.
- 2) $\mathcal{SI}(t)\mathcal{SI}(s) = \mathcal{SI}(s)\mathcal{SI}(t)$.

Remarque 2.2.1. 1) Pour tous $t, s \geq 0$ on a

$$\begin{aligned} \mathcal{SI}(t)\mathcal{SI}(s) &= \int_t^{t+s} \mathcal{SI}(r) dr - \int_0^s \mathcal{SI}(r) dr \\ &= \int_t^{t+s} \mathcal{SI}(r) dr - \int_0^t \mathcal{SI}(r) dr - \int_0^s \mathcal{SI} dr \\ &= \int_s^{t+s} \mathcal{SI}(r) dr - \int_0^t \mathcal{SI}(r) dr \\ &= \int_0^t \mathcal{SI}(\tau+s) dr - \int_0^t \mathcal{SI}(\tau) dr \\ &= \int_0^t [\mathcal{SI}(\tau+s) - \mathcal{SI}(\tau)] dr. \end{aligned}$$

2) Soit $\{\mathcal{SI}(t)\}_{t \geq 0} \subset A(E)^1$ un semi-groupe intégré. Pour tout $n \in \mathbb{N}$; nous désignerons par C^n l'ensemble

$$\{x; \mathcal{SI}(\cdot)x \in C^n; ([0; +\infty[; E)\},$$

avec la convention $C^0 = E$.

Alors la propriétés 3) de la définition (2.2.1) peut être remplacée par :

$$\mathcal{SI}(t)x \in C^1, \quad \text{et} \quad \mathcal{SI}'(r)\mathcal{SI}(t) = \mathcal{SI}(r+t)x - \mathcal{SI}(r)x, \forall r, t \geq 0,$$

pour tout $x \in E$.

Proposition 2.2.2. Soit $\{\mathcal{SI}(t)\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe intégré. Alors : 1) pour tout $x \in C^1$ on a :

$$\mathcal{SI}(r)\mathcal{SI}'(t)x = \mathcal{SI}(r+t)x - \mathcal{SI}(t)x, \forall t, r \geq 0.$$

2) pour tout $x \in C^1$ on a :

$$\mathcal{SI}'(t)x = \mathcal{SI}''(0)\mathcal{SI}(t)x + \mathcal{SI}'(0)x, \forall t \geq 0;$$

3) pour tout $x \in C^2$ on a :

$$\mathcal{SI}''(0)\mathcal{SI}(t)x = \mathcal{SI}(t) + \mathcal{SI}''(0)x, \forall t \geq 0.$$

à vérifier .

Exemple 2.2.1. Soit $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe de classe C_0 : Alors la famille $\{S(t)\}_{t \geq 0}$

$$\mathcal{SI}(t) = \int_0^t S(s) ds$$

on va montrer que $\{\mathcal{SI}(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe intégré :

1) $\mathcal{SI}(0) = 0$.

2) $\mathcal{SI}(t)$ est continue .

3) pour tous $s; t \geq 0$ on a

$$\mathcal{SI}(t)\mathcal{SI}(s) = \int_0^t [\mathcal{SI}(r+s) - \mathcal{SI}(r)] dr.?$$

On a

$$\begin{aligned}\mathcal{SI}(t)\mathcal{SI}(s) &= \int_0^t S(r) dr \int_0^s S(\sigma) d\sigma \\ &= \int_0^t \int_0^s S(r)S(\sigma) dr d\sigma \\ &= \int_0^t \int_0^s S(r + \sigma) dr d\sigma,\end{aligned}$$

on pose $\tau = r + \sigma$, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{SI}(t)\mathcal{SI}(s) &= \int_0^t \int_r^{s+r} S(\tau)d(\tau) dr \\ &= \int_0^t \left[\left(\int_0^{s+r} S(\tau) - \int_0^r S(\tau) \right) d(\tau) \right] dr \\ &= \int_0^t [\mathcal{SI}(r + s) - \mathcal{SI}(r)] dr.\end{aligned}$$

d'où $\{\mathcal{SI}(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe intégré.

Définition 2.2.2. On appelle espace dégénéré du semi-groupe intégré $\{\mathcal{SI}(t)\}_{t \geq 0}$ l'ensemble

$$\mathcal{N} = \{x \in E, \mathcal{SI}(t)x = 0, \forall t \geq 0\}.$$

Proposition 2.2.3. Soit $\{\mathcal{SI}(t)\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe intégré alors

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 = \{x \in C_1, \mathcal{SI}'(0)x = 0\}.$$

Définition 2.2.3. On dit que le semi-groupe intégré $\{\mathcal{SI}(t)\}_{t \geq 0}$ est non-dégénéré si $\mathcal{N} = 0$.

En cas contraire, on dit que $\{\mathcal{SI}(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe intégré dégénéré.

Remarque 2.2.2. 1) \mathcal{N} est un sous-espace fermé de C^1 .

2) Le semi-groupe intégr $\{\mathcal{SI}(t)\}_{t \geq 0}$ est non-dégénéré si pour tout $t \geq 0$

$$\mathcal{SI}(t)x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Proposition 2.2.4. *Un semi-groupe intégré $\{\mathcal{SI}(t)\}_{t \geq 0}$ est non-dégénéré si et seulement si on a $\mathcal{SI}'(0)x = x$ pour tout $x \in C^1$.*

Théorème 2.2.1. *Soit $\{\mathcal{SI}(t)\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe intégré non-dégénéré. Alors $\{\mathcal{SI}'(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe sur C^1 .*

Preuve. pour tout $x \in C^1$

1) Compte tenu la proposition 2.2.4 on a :

$$\mathcal{SI}'(0)x = x \implies \mathcal{SI}'(0)x = I$$

D'après la propriété 1 de la proposition 2.2.2 on voit que :

$$\mathcal{SI}(r)\mathcal{SI}'(t)x = \mathcal{SI}(r+t)x - \mathcal{SI}(t)x, \forall t, r \geq 0,$$

On dérivée par rapport à r :

$$\mathcal{SI}'(r)\mathcal{SI}'(t)x = \mathcal{SI}'(r+t)x, \forall t, r \geq 0,$$

3) L'application

$$t \in [0, \infty] \longrightarrow \mathcal{SI}'(t)x \in C^1,$$

est continue . Alors

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{SI}'(t)x = \mathcal{SI}'(0)x.$$

Il résulte que : $\{\mathcal{SI}'(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0 semi groupe sur C^1 .

2.2.3 Générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré

Soit $\{\mathcal{SI}(t)\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe intégré non-dégénéré. Compte tenu des résultats de la section 2.1.5, nous avons la tentation de considérer pour générateur du semi-groupe intégré $\{\mathcal{SI}(t)\}_{t \geq 0}$ un opérateur linéaire

$$A : D(A) \subset E \longrightarrow E;$$

défini par

$$A = \lambda I - R^{-1}(\lambda),$$

ou

$$R(\lambda) = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \mathcal{SI}(t) dt.$$

Malheureusement, l'intégrale de l'égalité n'existe pas en général .

Définition 2.2.4. On appelle générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré $\{\mathcal{SI}(t)\}_{t \geq 0}$ un opérateur linéaire

$$A : D(A) \subset E \longrightarrow E,$$

définie par : $x \in D(A)$ et $Ax = y$ si et seulement si pour tout $t \geq 0$ on a

$$\mathcal{SI}(t)x - tx = \int_0^t \mathcal{SI}(r) dr.$$

Remarque 2.2.3. On voit que $x \in D(A)$ et $Ax = y$ si et seulement si $x \in C^1$ et

$$\mathcal{SI}'(t)x - x = \mathcal{SI}(t)y, \forall t \geq 0$$

Proposition 2.2.5. Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré $\{\mathcal{SI}(t)\}_{t \geq 0}$ Alors

$$Ax = \mathcal{SI}''(0)x; \quad \forall x \in C^2.$$

Proposition 2.2.6. Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré $\{\mathcal{SI}(t)\}_{t \geq 0}$ Alors A est un opérateur fermé.

Proposition 2.2.7. Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré $\{\mathcal{SI}(t)\}_{t \geq 0}$ Alors

$$\mathcal{SI}(t) : C^1 \longrightarrow C^2 \subset D(A),$$

et pour tout $x \in C^1$ on a :

$$A\mathcal{SI}(t)x = \mathcal{SI}''(0)\mathcal{SI}(t)x = \mathcal{SI}'(t)x - x, \forall t \geq 0$$

De plus pour tout $x \in D(A)$ on a :

$$A\mathcal{SI}(t)x = \mathcal{SI}(t)Ax; \forall t \geq 0.$$

Proposition 2.2.8. Soit $A : D(A) \subset E$ le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré $\{\mathcal{S}\mathcal{I}(t)\}_{t \geq 0}$. Pour tout $x \in E$, on a : $\int_0^t \mathcal{S}\mathcal{I}(\sigma)x d\sigma \in D(A)$ et

$$A \int_0^t \mathcal{S}\mathcal{I}(\sigma)x d\sigma = \mathcal{S}\mathcal{I}(t)x - tx, \forall t \geq 0.$$

Soient $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré $\{\mathcal{S}\mathcal{I}(t)\}_{t \geq 0}$ et

$$\varphi : [0; \infty[\rightarrow E,$$

une application continue telle que

$$\int_0^t \varphi(s) ds \in D(A), \forall t \geq 0.$$

si

$$A \int_0^t \varphi(s) ds = \varphi(t)$$

alors

$$\varphi(t) = 0, \forall t \geq 0.$$

Théorème 2.2.2. Soient $\{\mathcal{S}\mathcal{I}(t)\}_{t \geq 0}$ et $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ deux semi-groupes intégrés ayant pour générateur le même opérateur linéaire $A : D(A) \subset E \rightarrow E$. Alors pour tout $t \geq 0$ on a $\mathcal{S}\mathcal{I}(t) = U(t)$.

2.2.4 Propriétés des semi-groupes intégrés non-dégénéré exponentiellement bornés

Définition 2.2.5. On dit que le semi-groupe intégré $\{\mathcal{S}\mathcal{I}(t)\}_{t \geq 0}$ est exponentiellement borné s'il existe $M \geq 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tel que

$$\|\mathcal{S}\mathcal{I}(t)\| \leq M e^{\omega t}, \forall t \geq 0.$$

Remarque 2.2.4. Pour un semi-groupe intégré exponentiellement borné $\{\mathcal{S}\mathcal{I}(t)\}_{t \geq 0}$, l'intégrale de Laplace

$$R(\lambda) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathcal{S}\mathcal{I}(t) dt,$$

existe pour tout $\lambda \in A_\omega$.

Théorème 2.2.3. Soit $\mathcal{SI} : [0; 1[\rightarrow A(E)$ une application fortement continue pour laquelle il existe $M \geq 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tel que

$$\|\mathcal{SI}(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0.$$

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1) L'application $R : A_\omega \rightarrow A(E)$

$$R(\lambda) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathcal{SI}(t) dt,$$

est une pseudo-résolvante.

2) Pour tous $s; t \geq 0$ on a :

$$\mathcal{SI}(t)\mathcal{SI}(s) = \int_t^{t+s} \mathcal{SI}(r) dr - \int_0^s \mathcal{SI}(r) dr.$$

Théorème 2.2.4. Soient $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur linéaire fermé et $\{\mathcal{SI}(t)\}_{t \geq 0}$ une famille fortement continue pour laquelle il existe $M \geq 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tel que

$$\|\mathcal{SI}(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0.$$

et ayant l'espace non-dégénéré $\mathcal{N} = 0$.

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1) La famille $\{\mathcal{SI}(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe intégré non-dégénéré exponentiellement borné ayant pour générateur l'opérateur A .

2) $A_\omega \subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda \in A_\omega$ on a :

$$R(\lambda, A) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathcal{SI}(t) dt.$$

2.2.5 Semi-groupes intégrés localement Lipschitzien

Un semi-groupe intégré $\{\mathcal{SI}(t)\}_{t \geq 0}$ est dit localement Lipschitzien si pour tout $\tau > 0$; il existe une constante $L > 0$ tel que :

$$\|\mathcal{SI}(t) - \mathcal{SI}(s)\| \leq L|t - s|, \forall t, s \in [0, \tau]$$

Théorème 2.2.5. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1) *A est le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré et localement Lipschitzien.*
- 2) *A satisfait les conditions de Hille-Yosida.*

Théorème 2.2.6. [4] *Chaque semi-groupe intégré localement Lipschitzien est exponentiellement borné.*

2.2.6 Théorème d'arendt

Théorème 2.2.7. [4] *Un opérateur linéaire*

$$A : D(A) \subset E \longrightarrow E;$$

est le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré $\{\mathcal{SI}(t)\}_{t \geq 0}$ pour lequel il existe $M \geq 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tel que

$$\|\mathcal{SI}(t+h) - \mathcal{SI}(t)\| \leq Me^{\omega(t+h)}h, \forall t \geq 0,$$

si et seulement si

- 1) *A est un opérateur fermé .*
- 2) *Il existe $\alpha \geq \max\{0, \omega\}$ tel que $A_\alpha \subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda \in A_\alpha$ on a*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chapitre 3

Équations différentielles à retard et semi-groupes

Dans ce chapitre, nous allons voir que le cadre approprié pour les équations différentielles linéaires à retard est celle d'un problème de Cauchy abstrait dans un espace de Banach approprié, aussi nous avons donné quelques définitions et résultats sur les semi-groupes associés aux équations différentielles à retard, nécessaires pour l'élaboration de ce travail. Pour plus de détails nous référons au [1] et [5]

3.1 Modèle d'équation différentielle à retard

3.1.1 Équation de Nicholson (mouche-moutons)

En 1950, le célèbre biologiste entomologiste australien Alexandre J. Nicholson a mené une longue série d'expériences visant à en apprendre davantage sur les populations de mouches dévoreuses de viandes responsables de 90 élevages de plusieurs pays comme l'Australie, la Nouvelle Zélande et l'Afrique du sud. Cette mouche diptère ayant un corps rond à ovale de longueur varie de 4.5 à 10 millimètres avec des yeux rougeâtres et un corps verdâtre ou vert bleuté avec des remets cuivrés fait partie de la famille des "Calliphoridae" et elle est connue sous le nom "lucilie cuivrée australienne" ou tout simplement "mouches du mouton australien" ou en Latin "Lucilia cuprina" ou "Phaenicia cuprina". En outre, elle a deux paires d'ailes, la première paire étant des ailes membraneuses et la seconde paire étant des ailes postérieures réduites et modifiées connues sous le nom "d'haltères" qui sont utilisées pour la stabilisations du vol Le cycle de développement de cette mouche comprend quatre

stades de croissance : œuf, larve, pupa et adulte. La lucilie femelle gravide attirée par les plaies ou les replis laineux malodorants et humides des moutons pond en moyenne 250 œufs sur la peau de l'animal et qui vont éclore et se muent en larves carnivores une période d'incubation ne dépasse pas 24 h. Ces asticots se nourrissent des sécrétions des plaies et des tissus sous-jacents du mouton pendant trois stades larvaires de durée de 4 à 5 jours. Après la phase larvaire, les larves complètement développées se laissent tomber et s'enfoncent dans le sol pour se transformer en pupes donnant des nouvelles mouches jeunes. Motivés par les données expérimentales obtenues par Nicholson, Gurney, Blythe et Nisbet ont proposé en 1980, l'équation retardée (3.1) ci-dessous qui décrit l'évolution de la dynamique d'une population au cours du temps

$$\frac{\partial N(t)}{\partial t} = \beta N(t - \tau) \exp\left(\frac{-N(t-\tau)}{K}\right) - \delta N(t), \quad (3.1)$$

ou $N(t)$ représente l'effectif de la population à l'instant t (les lucilies cuivrées adultes à l'instant t).

$\frac{dN(t)}{dt}$ représente le taux d'évolution du nombre de la population .

β est le maximum de la croissance quotidienne d'œufs par individu.

K est le nombre maximal d'individus que le milieu peut supporter².

δ est le taux de mortalité par individu (jours⁻¹).

τ est la durée de la phase de maturation (le cycle de développement).

Plusieurs généralisations et une recherche très active s'est amorcée récemment sur cette équation, par exemple en 2004, Liu et Ge , ont étudié l'équation différentielle de type neutre du premier ordre suivante :

$$\frac{d}{dt}[x(t) - cx(t - \tau(t))] = -a(t)x(t) + b(t)x(t - \tau(t))e^{-\beta(t)x(t-\tau(t))}.$$

En conservant la même dénomination ; "équation de Nicholson ", de nouvelles modifications du modèle ont été largement considérées dans l'étude des croissances d'autres espèces.

3.2 Équations différentielles ordinaires à retard

3.2.1 Problème de Cauchy abstrait

Soient E est un espace de Banach, $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ est un opérateur linéaire et $x \in E$.

le problème de valeur initiale

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t), \text{ pour } t \geq 0 \\ y(0) = x, \end{cases} \quad (\text{PCA})$$

s'appelle le problème de Cauchy abstrait associé à valeur initiale x et l'opérateur A .

Définition 3.2.1. [1] Une fonction $y : \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ est une solution classique de (PCA) si :

- 1) y est continument différentiable,
- 2) $y(t) \in D(A)$ pour tout $t \geq 0$;
- 3) $y(t)$ satisfait (PCA) pour tout $t \geq 0$.

Proposition 3.2.1. [1] Soit $A : D(A) \subseteq E \longrightarrow E$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Alors pour tout $x \in D(A)$ la fonction :

$$y : t \longmapsto y(t) = S(t)x,$$

est l'unique solution classique de (PCA) .

Définition 3.2.2. : (Solution intégrale) Une fonction continue $y : \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ est dite solution intégrale de (PCA) si $\int_0^t y(s)ds \in D(A)$ pour tout $t \geq 0$ et

$$y(t) = x + A \int_0^t y(s)ds, \text{ pour tout } t \geq 0$$

Définition 3.2.3. [2] : On dit que le problème de Cauchy abstrait est bien posé si :

- 1) le domaine $D(A)$ est dense dans E ;
- 2) pour tout $x \in D(A)$ il existe une solution classique unique y_x de (PCA) ;
- 3) pour chaque suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $D(A)$ satisfaisant

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = 0,$$

on a :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y_{x_n}(t) = 0,$$

uniformément pour tout t dans des intervalles compacts $[0; T]$.

Théorème 3.2.1. [2] : Pour un opérateur fermé $A : D(A) \subseteq E \longrightarrow E$ associé, le problème (PCA) est bien posé si et seulement si $(A; D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continue sur E .

3.2.2 Équations différentielles à retard

Considérons d'abord l'équation différentielle ordinaire :

$$y'(t) = Ay(t), \forall t \geq 0, \tag{3.2}$$

modifions maintenant l'équation (3.2) en considérant

$$y'(t) = Ay(t - \tau), \forall t \geq 0,$$

ou $\tau > 0$.

Définition 3.2.4. [3] : Soit E un espace de Banach, considérons une fonction

$$y : [-\tau, \infty[\longrightarrow E$$

$$t - \tau \longmapsto y(t - \tau),$$

pour chaque $t \geq 0$: La fonction suivante :

$$y^t : [-\tau, 0[\longrightarrow E$$

$$s \longmapsto y(t + s),$$

s'appelle le segment d'histoire par rapport à $t \geq 0$.

La fonction d'histoire de y est alors la fonction suivante :

$$h_y : t \longmapsto y^t$$

sur \mathbb{R}_+ .

Définition 3.2.5. : Soit E un espace de Banach, une équation différentielle à retard est une équation de la forme

$$y'(t) = \frac{d}{dt}y(t)f(y(t), y^t), \quad (3.3)$$

ou $f(;\cdot)$ est une application à valeur dans E .

On voit que dans une équation différentielle à retard la valeur de la dérivée à un instant t de la solution y dépend non seulement de la valeur de y à l'instant t mais de ses valeurs prises avant cet instant (dans le passé) d'où le mot retard.

3.2.3 Approche de semi-groupes

On traite brièvement, à titre d'exemple introductif, le cas spécial où f (3.3) est la somme de deux opérateurs linéaires B et L tels que :

$B : D(B) \subseteq E \rightarrow E$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ dans E (un opérateur fermé et à domaine dense).

$L : W^{1;p}(-\tau, 0; E) \rightarrow E$ est un opérateur linéaire borné, appelé l'opérateur de retard.

$Z := E \times L^p(-\tau, 0; E)$.

Alors, pour $(\eta; \varphi) \in Z$; on considère le problème à valeur initiale dans E suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = By(t) + LY^t, \forall t \geq 0. \\ y(0) = \eta \\ y_0 = \varphi. \end{cases} \quad (3.4)$$

Dans la suite nous posons $\tau = 1$.

Définition 3.2.6. : On dit qu'une fonction $y : [-1, +\infty[\rightarrow E$ est une solution classique de (3.4) si :

- 1) $y \in C^0([-1, \infty[, E \cap C^1)([0, \infty[, E)$,
- 2) $y(t) \in D(B)$ et $y^t \in W^{1;p}(-1, 0; E)$,
- 3) y vérifié (3.4).

Lemme 3.2.1. : Soit $y : [-1, +\infty[\rightarrow E$ une fonction de $W_{loc}^{1;p}(-1, 0; E)^3$. Alors, la fonction d'histoire $h_y : t \rightarrow y^t$ de y est continument différentiable de \mathbb{R}_+ dans $L^p(-1, 0; E)$ et pour tout $t \geq 0$; on a :

$$\frac{d}{dt}h_y(t) = \frac{d}{ds}y^t.$$

Définition 3.2.7. : Désignons par $P_1 : Z \longrightarrow E$ est la projection canonique de Z sur E . De même désignons par $P_2 : Z \longrightarrow L^p(-1, 0; E)$ est la projection canonique de Z sur $L^p(-1, 0; E)$.

3.2.4 Transformation au problème de Cauchy abstrait

A partir du lemme 3.1, nous pouvons maintenant transformer les solutions de (3.4) aux solutions classiques d'un problème de Cauchy abstrait.

Proposition 3.2.2. : Soit $y : [-1, +\infty[\longrightarrow E$ une solution classique de (3.4). Alors la fonction

$$Y : \mathbb{R}_+ \longrightarrow Z \\ t \longmapsto \begin{pmatrix} y(t) \\ y^t \end{pmatrix}$$

est continument différentiable et vérifie

$$Y'(t) = AY(t), \text{ ou} \\ A = \begin{pmatrix} B & L \\ 0 & \frac{d}{ds} \end{pmatrix}$$

définie sur le domaine

$$D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \eta \\ \varphi \end{pmatrix} \in D(B) \times W^{1,p}(-1, 0; E) : \varphi(0) = \eta \right\},$$

et $\frac{d}{ds}$ désigne la dérivée distributive.

Ainsi, toute solution classique y de (3.4) donne une solution classique du problème de Cauchy abstrait sur Z .

$$\begin{cases} Y'(t) = AY(t), & t \geq 0 \\ Y(0) = \begin{pmatrix} \eta \\ \varphi \end{pmatrix} \end{cases}$$

ou

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y^t \end{pmatrix}$$

Inversement, si $(\eta, \varphi) \in D(A)$ alors pour toute solution classique $Y : \mathbb{R}_+ \longrightarrow Z$ de (3.5) avec la valeur initiale $(\eta; \varphi)$ telle que $Y(t) = \begin{pmatrix} P_1(Y(t)) \\ P_2(Y(t)) \end{pmatrix}$. Soit $y : [-1, \infty[\longrightarrow E$ la fonction

définie par :

$$y(t) = \begin{cases} P_1(Y(t)) & \text{si } t \geq 0 \\ \varphi(t) & \text{si } t \in [-1, +\infty[\end{cases}$$

alors $y^t = P_2(Y(t))$ pour chaque $t \geq 0$ et y est une solution classique de (3.4).

Lemme 3.2.2. : *L'opérateur $A : D(A) \subset Z \longrightarrow Z$ est fermé et de domaine dense dans Z .*

Corollaire 3.2.1. [3] : *Le problème abstrait de Cauchy (3.5) dans Z ; associé à l'opérateur est bien posé si et seulement si A génère un C_0 - semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ dans Z*

Définition 3.2.8. :

- 1) *Le problème (3.4) est bien posé si le problème (3.5) est bien posé, i.e. si A un générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu dans Z .*
- 2) *On suppose que (3.4) est bien posé, et soit $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ le semi-groupe généré par A dans Z . Alors pour tout $(\eta; \varphi)$ dans Z la fonction y définie par (3.6) est dite solution intégrale de (3.4).*

Proposition 3.2.3. *Soit y une solution intégrale de (3.4). Alors*

$$y^t = P_2(S(t)(\eta, \varphi)).$$

De plus :

$$\int_0^t y(s)ds \in D(B), \int_0^t y_s ds \in W^{1,p}(-1, 0; E),$$

et l'équation intégrale :

$$y(t) = \begin{cases} x + B \int_0^t y(s)ds + \int_0^t y_s ds & \text{si } t \geq 0 \\ \varphi(t) & \text{si } t \in [-1, \infty[, \text{ est valable.} \end{cases}$$

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes sur les opérateurs B et L pour que le problème (3.4) soit bien posé.

Théorème 3.2.2. *Soit $B : D(B) \subseteq E \longrightarrow E$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ dans E , soit $1 \leq p < \infty$ et soit $L : W^{1,p}(-1, 0; E) \rightarrow E$ un opérateur du retard, s'il existe des constante $t_0 > 0$ et $0 < q < 1$ telles que :*

$$\int_0^{t_0} |L(T_\tau x + S_0(\tau)f)|_E d\tau \leq q|(\eta, \varphi)|_Z,$$

pour tout $(\eta; \varphi) \in D(A)$; avec (S_0) le semi-groupe de translation dans $L^p(-1, 0; E)$ par :

$$(S_0(t)f)(s) := \begin{cases} (s+t) & \text{si } t+s \leq 0, \\ 0 & \text{si } t+s \geq 0 \end{cases}$$

et $T_t : E \rightarrow L^p(-1, 0; E)$ définie par :

$$(T_t x)(s) := \begin{cases} T(s+t)x & \text{si } -t \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } -1 \leq s \leq -t \end{cases}$$

Alors l'opérateur A génère un semi-groupe fortement continu dans Z et donc (3.4) est bien posé.

3.3 Équation différentielle partielle à retard

Dans cette section nous présentons un exemple de problème à la limite associé à des équations aux dérivées partielles à retard. On vérifie, ensuite, les conditions nécessaires pour que ce problème soit bien posé. S'intéressant à l'analyse de problèmes aux limites régis par des équations différentielles à retard à coefficients opérateurs et provenant de diverses situations concrètes gouvernées par des EDP de type elliptique et parabolique, nous avons étudié en particulier le comportement précis des solutions de ces problèmes : existence et unicité de solution. L'intérêt des techniques opérationnelles est de permettre une étude unifiée de problèmes elliptiques paraboliques et de fournir pour ceux-ci des conditions nécessaires et suffisantes d'existence, d'unicité et de régularité des solutions. Les méthodes utilisées reposent sur la construction d'une formule explicite de représentation des solutions et de son analyse en fonction des données. Pour la construction de cette formule explicite et son analyse, on utilise le calcul fonctionnel (la théorie des semi-groupes).

Problème On considère l'équation de réaction-diffusion suivante, qui modélise la conduction thermique dans une barre homogène chauffée de longueur 1, en supposant que ses deux extrémités 0 et 1 sont maintenues à une température constante $T_0 = 0$.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} y(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(t, x) - y(t, x) - (t-1, x), & 0 \leq x \leq 1, t \geq 0 \\ y(t, 0) = y(t, 1) = 0, & t \geq 0, \\ y(t, x) = \varphi(t, x), & 0 \leq x \leq 1, -1 \leq t \leq 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

$y(t; x)$ représente la température de la barre au point x , à l'instant t .

Le retard ici est $\tau = 1$, il représente la durée moyenne, en unité de temps, nécessaire pour que le système réagisse au changement de la température.

$\varphi \in L^2([-1, 0] \times]0, 1[)$. Pour écrire le problème (3.7) sous forme d'une équation à retard abstraite on définit les espaces et les opérateurs suivants :

- 1) $V = L^2(0; 1; \mathbb{R})$.
- 2) $M = V \times L^2(-1; 0; V)$.
- 3) L'opérateur $B_0 : D(B_0) \subset V \longrightarrow V$ défini par :

$$D(B_0) := H^2(0; 1; \mathbb{R}) \cap H_0^1(0; 1; \mathbb{R}),$$

et

$$B_0 y = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

- L'opérateur $B = B_0 - I$ avec $D(B) = D(B_0)$.
- L'opérateur $L : W^{1;2}(-1, 0; V) \longrightarrow V$ défini par $L(\varphi(0); \varphi) = -\varphi(-1)$.

Ainsi le problème (3.7) est une équation différentielle à retard dans V de la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = By(t) + L(y(t), y^t), t > 0 \\ y(t) = \Psi(t), \quad -1 \leq t \leq 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

avec $\Psi \in (-1, 0; V)$ une condition initiale définie par $\Psi(t)(x) = \varphi(t, x)$ pour tout $(t, x) \in [-1, 0] \times [0, 1]$.

La solution de ce problème est le même solution de problème (3.4).

On commence par montrer que l'opérateur $B_0 : D(B_0) \subset V \longrightarrow V$ engendre un C_0 semi-groupe dans V , pour cela on montre tout d'abord qu'il est dissipatif :

Soit $g \in D(B_0)$

$$\langle B_0 g, g \rangle_V = \int_0^1 \frac{d^2 g}{dx^2}(x) g(x) dx = - \int_0^1 \left| \frac{dg}{dx}(x) \right|^2 dx + \left[\frac{dg}{dx} g(x) \right] = - \int_0^1 \left| \frac{dg}{dx}(x) \right|^2 dx \leq 0,$$

donc B_0 est un opérateur dissipatif.

De plus d'après la proposition 1.3, pour tout $f \in V$ il existe $y \in D(B_0)$ unique tel que $(I - B_0)y = f$, alors en utilisant le théorème 1.3 et ensuite le théorème de Lumer Philips on conclut que B_0 est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ tel que $\|S(t)\| \leq 1$ pour tout $t \geq 0$.

On utilise la théorie des semi-groupes pour étudier les équations aux dérivées partielles à retard qui peuvent s'écrire sous la forme abstraite suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = f(y(t), y^t), t \geq 0 \\ y(0) = \eta \\ y(x) = \varphi(x), x \in [-1, 0[, \end{cases} \quad (3.9)$$

f est, en général, la somme d'un opérateur linéaire B et d'un opérateur L .

E un espace de Banach, $1 \leq p < \infty$, f un opérateur de $Z := E \times L^p(-1, 0; E)$ à valeurs dans E ; et $(\eta; \varphi)$ une condition initiale appartenant à Z .

Plus précisément, nous avons donné des conditions nécessaires sur l'opérateur f pour que le problème (3.9) soit bien posé, en utilisant, la théorie des semi-groupes.

Se basant sur l'hypothèse suivante :

(H_3) L'ensemble des valeurs initiales, pour lesquelles une unique solution forte de (3.9) existe, est sous espace vectoriel dense dans Z ; de plus, la solution dépend continument de la valeur initiale.

On a montré que les solutions de (3.9) définissent un semi-groupe fortement continue $\{S(t)\}_{t \geq 0}$; et le générateur infinitésimal A de ce semi-groupe a été caractérisé par :

$$\begin{aligned} D(A) &= \{D(f) \cap W^{1,p}(-1, 0; E)\} \\ A(\varphi(0), \varphi) &= (f(\varphi(0), \varphi), \varphi'), \end{aligned} \quad (3.10)$$

avec

$$W^{1,p}(-1, 0; E) = \{(\eta, \varphi) : \varphi \in W^{1,p}(-1, 0; E), \eta = \varphi(0)\}.$$

Ensuite, en supposant que le problème (3.9) est bien posé au sens de l'hypothèse suivante :

(H_4) L'opérateur A défini par (3.10) génère un C_0 -semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ dans Z ; tel que

$$\|S(t)\| \leq M e^{\omega t} \quad \text{pour tout } t \geq 0,$$

avec $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$; le théorème de Hille-Yosida nous a permis de trouver les conséquences de l'hypothèse (H_4) sur l'opérateur f . Ces conséquence ont été données par les propositions et la théorème suivants :

1) Le théorème 1.4.

2) Les propositions 1.4 et 1.5 dans le cas où f est de la forme suivante :

$$f(\eta; \varphi) = B\eta + L(\eta; \varphi) \text{ pour } (\eta; \varphi) \in D(f) :$$

3.3.1 Vérification des conditions nécessaires [5]

Soit A l'opérateur linéaire associé au problème à retard (3.8) défini par :

$$D(A) = \{(\varphi(), \varphi) \in M : \varphi \in H^1(-1, 0; V), \varphi(0) \in D(B)\},$$

$$A(\varphi(0), \varphi) = (f(\varphi(0), \varphi), \varphi),$$

avec

$$D(f) = \{(\eta, \varphi) \in M : \eta \in D(B) \text{ et } \varphi(-1) \in V\},$$

$$f(\varphi(0), \varphi) = B\varphi(0) + L(\varphi(0), \varphi) = B\varphi(0) - \varphi(-1).$$

L'hypothèse (H_1) est vérifiée, en effet, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(\varphi(0); \varphi) \in D(A)$; alors $\varphi(0) \in D(B)$; ce qui implique que $U_{\lambda\varphi}(0) \in D(f)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$; on conclut que :

$$\{U_{\lambda\varphi}(0) : (\varphi(0), \varphi) \in D(A)\} \subset D(f) \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}.$$

L'opérateur $L : W^{1,2}(-1, 0; V) \rightarrow V$ est continue, en effet, soit $(\varphi(0); \varphi) \in W^{1,2}(-1, 0; V)$

$$\|L(\varphi(0); \varphi)\|_V^2 = \|\varphi(-1)\|_V^2 \leq \left(\int_{-1}^0 \|\varphi(s)\|_V ds + \|\varphi(0)\|_V \right)^2 \leq 2 \left(\left(\int_{-1}^0 \|\varphi(s)\|_V \right)^2 + \|\varphi(0)\|_V^2 \right).$$

En utilisant l'intégrale de Hölder, on trouve :

$$\|L(\varphi(0); \varphi)\|_V = \sqrt{2} \|L(\varphi(0); \varphi)\|_{H^1(-1,0;V)}.$$

La fonction f est de la forme suivante :

$$f(\eta; \varphi) = B\eta + \sum_{i=1}^l B_{i\varphi}(-\tau_i) + \Psi(\eta, \varphi)$$

avec $0 < \tau_1 < \dots < \tau_l = \tau, B_l = -I_d$ dans $V, B_i = 0$ pour $i = 1, \dots, l-1$ et $\psi \equiv 0$.

avec $0 < \tau_1 < \dots < \tau_l = \tau, B_l = -I_d$ dans $V, B_i = 0$ pour $i = 1, \dots, l-1$ et $\psi \equiv 0$.

Ainsi, les propositions 1.4, la proposition 1.5 et le théorème 1.4 sont tous applicables.

1) Conditions nécessaires du théorème 1.4

Soit $(0; \varphi) \in W^{1;2}(-1, 0; V)$ alors $(0; \varphi) \in D(f)$ et on a :

$$\|f(0; \varphi)\|_V = \|L(0; \varphi)\|_V = \sqrt{2} \|(0; \varphi)\|_{H^1(-1, 0; V)}.$$

Ainsi la restriction de f à $W^{1;2}(-1, 0; V)$ est un opérateur linéaire borné.

2) Conditions nécessaires de la proposition 1.5

L'opérateur B_0 génère un C_0 -semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ tel que $\|S(t)\| \geq 1$ pour tout $t \geq 0$;

alors, d'après le théorème de la perturbation bornée [2], l'opérateur $B = B_0 - I$ génère aussi un C_0 -semi-groupe $\{\tilde{s}(t)\}_{t \geq 0}$ tel que $\|\tilde{s}(t)\| \leq e^t$ pour tout $t \geq 0$.

3) Conditions nécessaires de la proposition 1.4

L'opérateur B génère un C_0 -semi-groupe $\{\tilde{s}(t)\}_{t \geq 0}$ tel que $\|\tilde{s}(t)\| \leq e^t$ pour tout $t \geq 0$; alors, le théorème de Hille-Yosida implique que :

- 1) $D(B)$ est dense dans V et $B : D(B) \subset V \rightarrow V$ est un opérateur fermé.
- 2) $(\lambda I - B)^{-1}$ existe et $\|(\lambda I - B)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda - 1}$ pour tout $\lambda > 1$.

Ainsi il ne reste que la condition nécessaire dans 1) de la proposition 1.4 à vérifier.

Soient $v \in D(B)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(\lambda I - B - LU_\lambda)v = (\lambda I - B)v - L(v, ve^\lambda) = (\lambda I - B)v + ve^{-\lambda} = ((\lambda + e^{-\lambda})I - B)v$$

Or

$$((\lambda + e^{-\lambda})I - B)^{-1} \text{ existe et } \|((\lambda + e^{-\lambda})I - B)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda + e^{-\lambda} - 1} \quad \text{si } \lambda + e^{-\lambda} > 1.$$

Donc si on prend $\omega = 1$ on trouve :

$$(\lambda I - B - LU_\lambda)^{-1} \text{ existe et } \|(\lambda I - B - LU_\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda + e^{-\lambda} - 1} \leq \frac{1}{\lambda - \omega} \quad \text{si } \lambda > \omega.$$

Ainsi toutes les conditions nécessaires pour que l'opérateur A génère un C_0 -semi-groupe dans Z ; et par conséquent, pour que le problème (3.7) soit bien posé, sont vérifiées.

Chapitre 4

Modèles de dynamique de populations structurées en âge

Ce chapitre est consacré aux modèles de dynamique de populations structurées en âge. Ces modèles ont été utilisés pour décrire l'âge chronologique des individus. Dans les modèles linéaires en utilisant les équations intégrales de Volterra et la transformée de Laplace. Les modèles structurés en âge non linéaire ont été étudiés à partir des années 70 avec les travaux de Gurtin et MacCamy [7]. Pour plus de détails, on peut consulter les ouvrages suivants [6, 10].

4.1 Présentation du modèle [5]

Un modèle linéaire de base pour une population structurée en âge (chronologique) s'écrit sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \underbrace{-\mu(x)y(x,t)}_{\text{mortalités}}, \text{ pour } x \geq 0, \\ y(0,t) = \underbrace{\int_0^{+\infty} \beta(x)y(x,t)dx}_{\text{naissances}} \\ y(\cdot, 0) = y_0 \in L^1((0, +\infty), \mathbb{R}). \end{array} \right. \quad (4.1)$$

tel que :

$\mu(x) \in L^\infty(0; +\infty)$ est le taux de mortalité des individus.

$\beta(x)$ est le taux de reproduction .

La fonction $y(x; t)$ représente la densité de la population à l'instant t qui ont l'âge x .

$\int_{x_1}^{x_2} y(x; t) dx$ représente le nombre d'individus dans la population ayant un âge compris entre x_1 et x_2 à l'instant t ; ($x_1; x_2 \in [0; +\infty[$).

$Y(t) = \int_0^t y(x; t) dx$ est le nombre total d'individus à l'instant $t \geq 0$.

En intégrant l'équation (4.1) le long des caractéristiques on obtient alors :

$$y(x, t) = \begin{cases} \exp(-\int_{x-t}^x \mu(s))y_0(x-t), & \text{si } x \geq t, \\ \exp(-\int_0^x \mu(s))B_0(t-x), & \text{si } x \leq t \end{cases}$$

ou $B_0(t)$ est le flux des naissances. De plus, en observant que :

$$B_0(t) = \int_0^{+\infty} \beta(x)y(x, t) = \int_0^t \beta(x)y(x, t) + \int_t^{+\infty} \beta(x)y(x, t)$$

on déduit que $t \rightarrow B_0(t)$ est l'unique fonction continue satisfaisant l'équation intégrale de Volterra (linéaire) :

$$B_0(t) = I(t) = \int_0^t \beta(x) + \exp(-\int_0^x \mu(s)ds)B_0(t-x)dx,$$

ou

$$B_0(t) = I(t) = \int_t^{+\infty} \beta(x) + \exp(-\int_{x-t}^x \mu(s)ds)B_0(x-t)dx$$

Dans le contexte de l'écologie, pour prendre en compte certains mécanismes de limitation dans des populations animales ou végétales, on considère des modèles structurés en âges dit densité dépendant de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = - \underbrace{\left(\mu(x) + \int_0^{+\infty} \kappa(s)y(s, t)ds\chi(x) \right)}_{\text{compétition pour les ressources}} y(x, t), \quad \text{pour } x \geq 0, \\ y(0, t) = \exp\left(- \underbrace{\int_0^{+\infty} \sigma(s)y(s, t)ds}_{\text{imitations des naissances}} \right) \int_0^{+\infty} \beta(x)y(x, t)dx \\ y(\cdot, t) = y_0 \in L^1((0, +\infty), \mathbb{R}). \end{array} \right. \quad (4.2)$$

ou $\kappa, \chi, \sigma \in L^\infty(0, +\infty)$.

Le terme $\int_0^{+\infty} \kappa(s)y(s, t)ds\chi(x)$ rend un compte limitation par compétition des individus pour la nourriture, l'espace, etc.

Le terme $\kappa(x)$ permet de sélectionner les stades (ou les classes d'âge) pour lesquels cette compétition a lieu.

Le terme $\exp\left(-\int_0^{+\infty} \sigma(s)y(s,t)ds\right)$ décrit une limitation des naissances.

4.2 Problème semi-linéaire

L'objet de cette section est de considérer le problème (4.2) par des méthodes de semi-groupe intégré.

Pour construire une théorie de la bifurcation, la première est de reformuler le problème comme un problème semi-linéaire classique c'est-à-dire à domaine dense. Il y a deux cas :

Cas 1 : $\sigma \equiv 0$ dans le système (4.2). Dans ce cas, le problème peut être reformulé comme un problème de Cauchy semi-linéaire classique. pour cela, on considère :

$$\hat{A}\varphi = \varphi' - \mu\varphi, \text{ pour tout } \varphi \in D(\hat{A})$$

avec

$$D(\hat{A}) = \left\{ \varphi \in W^{1,1}(0, +\infty) : \varphi(0) = \int_0^{+\infty} \beta(x)\varphi(x)dx \right\}$$

et $\hat{F} : L^1(0, +\infty) \longrightarrow L^1(0, +\infty)$ l'application non linéaire

$$\hat{F} = - \left(\int_0^{+\infty} \kappa(s)\varphi(x)ds \right) \kappa\varphi.$$

Ainsi, lorsque $\sigma \equiv 0$; on peut formuler le système (4.2) comme un problème de Cauchy à domaine dense,

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = \hat{A}y(t) + \hat{F}(y(t)), & \text{pour } t \geq 0. \\ y(0) = y_0 \in L^1((0, +\infty), \mathbb{R}). \end{cases}$$

On peut alors appliquer les résultats classiques sur les problèmes semi-linéaires.

Cas 2 : $\sigma \neq 0$; pour pouvoir étudier le cas $\sigma \neq 0$; il a introduit une formulation du système (4.2) comme un problème à domaine non dense. Pour prendre en compte la condition au bord non linéaire, on commence par considérer l'espace de Banach :

$$E = \mathbb{R} \times L^1(0, +\infty),$$

muni de la norme produit usuelle :

$$\left\| \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix} \right\| = |\alpha| + \|\varphi\|_{L^1}$$

On considère $A : D(A)E \rightarrow E$ l'opérateur défini par :

$$A \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{R}} \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi(0) \\ \varphi' - \mu\varphi \end{pmatrix}$$

avec la domaine :

$$D(A) = \{0_{\mathbb{R}}\} \times W^{1;1}(0; +\infty).$$

Ainsi, le domaine de A n'est pas dense dans E ; puisque :

$$E_0 = \overline{D(A)} = \{0_{\mathbb{R}}\} \times L^1(0; +\infty) \neq E.$$

On considère :

$$F : \overline{D(A)} \rightarrow E;$$

l'opérateur défini par :

$$F \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{R}} \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp\left(-\int_0^{+\infty} \sigma(s)y(s,t)ds\right) \int_0^{+\infty} \beta(x)y(x,t)dx \\ \int_0^{+\infty} \kappa(s)y(s,t)ds\chi(x) \end{pmatrix}$$

La première composante de l'application F est à rapprocher de la condition de bord non linéaire et permet ainsi de traiter ce type de condition de bord. Enfin, en identifiant :

$$y(t, \cdot) \text{ et } v(t) = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{R}} \\ y(t, \cdot) \end{pmatrix}$$

on peut réécrire le système (4.2) comme un problème de Cauchy abstrait :

$$\begin{cases} \frac{dv(t)}{dt} = Av(t) + F(v(t)), & \text{pour } t \geq 0. \\ v(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix} = v_0 \in \overline{D(A)}. \end{cases} \quad (4.3)$$

4.3 Existence, unicité et globalité de la solution positive

4.3.1 Existence et unicité de la solution positive

Pour étudier l'existence et l'unicité de solution des problèmes de type (4.3), supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(H1) A satisfait la condition de Hille-Yosida (puisque $\overline{D(A)} \neq E$; le reste du travail se fait sur la domaine $\overline{D(A)} = E_0$).

(H2) La fonction $F : E_0 \rightarrow E$ est localement Lipschitzienne, i.e. : pour chaque compact C de E_0 il existe $K(C) > 0$; telle que :

$$\|F(v) - F(u)\|_E \leq \|v - u\|_{E_0}, \forall u, v \in E_0.$$

(H3) Le semi-groupe continue $S(t) = \frac{d}{dt} \mathcal{S}\mathcal{I}(t)$ est exponentiellement bornée, i.e. $\exists \omega \geq 0$ et $\exists M \geq 1$ deux constante telle que :

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0.$$

Pour prendre en compte la solution positive, revenons au système (4.2), qui est un cas particulier du système (4.3), la valeurs initiale non négative

$y(x; 0) = y_0 \in L^1((0; +\infty); \mathbb{R})$; ; la solution du é (4.3) est positive ce qui énonce le théorème suivant :

Théorème 4.3.1. [3] : *Le problème de Cauchy (4.3) admet au moins une solution intégrale positive dans*

$$E_0 = 0_{\mathbb{R}} \times L^1(0, +\infty).$$

En plus, elle est donnée par :

$$v(t) = \mathcal{S}\mathcal{I}'(t)v_0 + \frac{d}{dt} \int_0^t S(t-s)F(v(s))ds, \forall t \in [0, T],$$

ou $\mathcal{S}\mathcal{I}(t)$ le semi-groupe intégré engendré par l'opérateur A .

4.3.2 La globalité de la solution

On suppose aussi que le semi-groupe intégré $\{\mathcal{S}\mathcal{I}(t)\}_{t \geq 0}$ est exponentiellement borné, et que la fonction F est Lipschitzienne.

Montrons la globalité de solution par l'absurde :

Supposons que $\exists T \leq \infty$ tel que $\lim_{t \rightarrow T} |v(t)| = +\infty$

On a :

$$\begin{aligned} |v(t)| &= |\mathcal{S}\mathcal{I}'(t)v_0| + \frac{d}{dt} \int_0^t \mathcal{S}\mathcal{I}(t-s)F(v(s) - F(0))ds + |F(0)| \\ &\leq Me^{\omega t}|v_0| + Me^{\omega t}K(C) \int_0^t e^{-\omega s}|v(0) - 0|ds + |F(0)| \\ &\leq (Me^{\omega t}|v_0| + |F(0)|) + Me^{\omega t}K(C) \int_0^t e^{-\omega s}|v(0)ds. \end{aligned}$$

Appliquons le lemme de Gronwall :

$$|v(t)| \leq (Me^{\omega t}|v_0| + |F(0)|) + \int_0^t (Me^{\omega s}|v_0| + |F(0)|) \left(MK(C)e^{\omega(t-s)}e^{MK(C) \int_0^t e^{\omega(t-l)}dl} \right) ds.$$

On fait t tende vers T :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow T} |v(t)| &\leq \lim_{t \rightarrow T} (Me^{\omega t}|v_0| + |F(0)|) \\ &+ \int_0^t (Me^{\omega s}|v_0| + |F(0)|) \left(MK(C)e^{\omega(t-s)}e^{MK(C) \int_0^t e^{\omega(t-l)}dl} \right) ds. \end{aligned}$$

On trouve :

$$\begin{aligned} +\infty &\leq (Me^{\omega T}|v_0| + |F(0)|) \\ &+ \int_0^T (Me^{\omega s}|v_0| + |F(0)|) \left(MK(C)e^{\omega(T-s)}e^{MK(C) \int_0^T e^{\omega(T-l)}dl} \right) ds \leq +\infty. \end{aligned}$$

Ce qui est absurde.

D'ou la globalité de la solution.

4.4 $L^1(\mathbb{R}^d, dx)$ -unicité des solutions faibles pour l'équation de transport de masse

Les résultats de cette section peuvent-être trouvés dans [4] . On considère l'opérateur

$$\mathcal{A}f = b\nabla f, \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

ou le champ vectoriel $b : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est localement lipschitzien. Soit σ le point à infini de \mathbb{R} . Considérons l'équation

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t)dt \\ X(0) = x \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une unique solution $(X_t(x))_{0 \leq t < \tau_e}$, ou

$$\tau_e = \inf \{t \geq 0 | X_t = \sigma\}$$

est le temps d'explosion. Alors la famille $\{P_t\}_{t \geq 0}$, ou

$$P_t f(x) = f(X_t(x))1_{[t < \tau_e]}$$

est un C_0 -semi-groupe sur $L^\infty(\mathbb{R}^d, dx)$ par rapport à la topologie $\mathcal{C}(L^\infty, L^1)$ et

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t b\nabla f(X_s)ds, \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$$

Par conséquent f appartient au domaine du générateur $\mathcal{L} - (\infty)$ du C_0 -semi-groupe $\{P_t\}_{t \geq 0}$ sur L^∞ et

$$\mathcal{L}_{(\infty)} = \mathcal{A}f = b\nabla f$$

Il s'ensuit donc que $(\mathcal{A}, C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$ est un pré-générateur sur $(L^\infty(\mathbb{R}^d, dx), \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$.

Alors on peut étudier $(L^\infty(\mathbb{R}^d, dx), \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$ unicité de l'opérateur $(\mathcal{A}, C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$.

On commençons avec l'opérateur uni-dimensionnel.

$$\mathcal{A}f = bf' \quad , \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

ou b est une fonction localement lipschitzienne sur \mathbb{R} tel que $b(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

soit $\mathcal{A}^* : \mathcal{D}(\mathcal{A}^*) \subset L^1(\mathbb{R}^d, dx) \longrightarrow L^1(\mathbb{R}^d, dx)$ l'adjoint de \mathcal{A} et $h \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$ tel que

$h \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$ et $\mathcal{A}^*h = \lambda h$.

Alors h est une solution de l'équation différentielle ordinaire

$$-(bh)' = \lambda h$$

au sens des distributions. Comme bh est absolument continue, il résulte que h est absolument continue sur l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} | b(x) \neq 0\}$.

Théorème 4.4.1. [4] *Supposons que b est localement lipschitzienne et $b(x) > 0$ sur \mathbb{R} .*

Alors $(\mathcal{A}, C_0^\infty(\mathbb{R}))$ est $(L^\infty(\mathbb{R}, dx), \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$ unique si et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b(x)} dx = \infty.$$

Théorème 4.4.2. [4] *Soit b une fonction localement lipschitzienne sur \mathbb{R} tel que pour*

$c_0 < c_N \in \mathbb{R}$, $b1(\infty, c_0]$ et $b1[c_N, +\infty)$ gardent le signe constant (non-nulle). Alors

$(\mathcal{A}, C_0^\infty(\mathbb{R}))$ est $(L^\infty(\mathbb{R}, dx), \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$ unique si et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{c_0} \frac{1}{b^+(x)} dx + \int_{c_N}^{+\infty} \frac{1}{b^-(x)} dx = +\infty.$$

CONCLUSION

En conclusion de ce mémoire, mentionnons que les théories des semi-groupes et des semi-groupes intégrés ont de très vastes applications allant des équations à retard, équations paraboliques avec retard ou encore avec des conditions de bords non linéaires, non locales et éventuellement non bornées, ou encore des équation structurées en âge. Comme perspectives de recherche, nous proposons au terme de ce travail, ces deux modèles de bifurcation 1 . La première modèle c'est un cas particulier du système (4.2) : Soient $\alpha > 0$ et $\varphi > 0$; deux paramètres. On considérons le système suivant :

avec

$$\begin{cases} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = -\mu(x)y(x,t), \text{ pour } t \geq 0, x \geq 0 \\ y(0, t) = \alpha \exp\left(\int_0^{+\infty} \beta(x)y(x,t)dx\right) \int_0^{+\infty} \beta(x)y(x,t)dx \\ y(., 0) = y_0 \in L^1((0, +\infty); \mathbb{R}) \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\beta(x) = \begin{cases} (x - \tau)^n e^{-\sigma x}, & \text{si } x \geq \tau \\ 0, & \text{si } x \leq \tau. \end{cases}$$

On considère, ici, α (l'intensité des naissances) comme un paramètre de bifurcation du système. Posons

$$\alpha_0 = \left(\int_0^{+\infty} \beta(x)e^{-\mu x} dx \right)^{-1}$$

. Lorsque $\alpha < \alpha_0$; le système (4.5) admet un unique état d'équilibre positif

$$\bar{y}_\alpha(x) = e^{-\mu x} \bar{\beta}_\alpha \quad \text{ou} \quad \bar{\beta}_\alpha = \frac{\ln\left(\alpha \int_0^{+\infty} \beta(x)e^{-\mu x} dx\right)}{\int_0^{+\infty} \beta(x)e^{-\mu x} dx}$$

En étudiant les propriétés spectrales de l'équation linéaire autour de \bar{y}_α ; ainsi que les conditions de transversalité usuelles aux points de bifurcation on obtient le résultat nommé bifurcation de **Hopf**² : Soit $\tau > 0$: Sous les hypothèses ci-dessus, il existe une suite croissante $\{\alpha_k\}_{k \geq 1}$; telle que le modèle (4.5) admet une bifurcation de **Hopf** $y = \bar{y}_{\alpha_k}$: En particulier, une solution périodique non triviale bifurque de l'équilibre $y = \bar{y}_{\alpha_k}$ lorsque $\alpha = \alpha_k$.

La seconde modèle provient d'un problème épidémique concernant la propagation de la grippe : Bifurcation est tout changement qualitatif lorsque on change le paramètre de contrôle. Donc, la bifurcation est une route vers le chaos. 2Les bifurcations de Hopf. Ce

sont des bifurcations oscillantes, comme l'attracteur de L

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial s(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial s(x,t)}{\partial x} = -\delta I(t) 1_{[\rho, +\infty[}(x) s(x,t), \text{ pour } t \geq 0, x \geq 0 \\ s(0, t) = vI(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \delta I(t) \int_{\rho}^{+\infty} s(x,t) dx - vI(t) \\ s(., 0) = s_0 \in L^1((0, +\infty); \mathbb{R}) \text{ et } I(0) = I_0 \geq 0. \end{array} \right.$$

Ce modèle permet d'étudier de la perte d'immunité à un variant de la grippe qui est ici modélisé par le terme $\chi(x)$. Ceci terme, en particulier, de caractériser l'apparition d'oscillations non amorties.^{1 2}

1. Bifurcation est tout changement qualitatif lorsque on change le paramètre de contrôle. Donc, la bifurcation est une route vers le chaos.

2. Les bifurcations de Hopf. Ce sont des bifurcations oscillantes, comme l'attracteur de Lorenz

الملخص

نظرية أنصاف المجموعات المتكاملة لها تطبيقات في مجالات علمية مختلفة، نذكر منها المعادلات التفاضلية ذات تأخير، و المعادلات المتكافئة مع تأخير أو مع شروط حدية غير خطية أو غير محلية وربما غير محدودة، أو حتى المعادلات ذات الشكل الزمني مع تأخير، أو مع انتشار تسمح أنصاف المجموعات المتكاملة بالحصول على نتائج جيدة نسبياً على ديناميكيات بعض المعادلات التطورية التي لا تندرج في إطار النظرية الكلاسيكية لأنصاف المجموعات

***** الكلمات المفتاحية *****

أنصاف المجموعات ، أنصاف المجموعات المتكاملة ، المعادلات التطورية، المعادلات التفاضلية مع تأخير، نموذج ديناميكيات السكان

Abstract

The theory of integrated semi-groups has very broad applications ranging from differential equations with delay, parabolic equations with delay or with nonlinear boundary condition, nonlocal and possibly unbounded boundary conditions, as well as age-structured equations (with delay, diffusion. . .). Thus, the use of integrated semi-groups allows obtaining relatively fine results on the dynamics of certain evolutionary equations, which do not fall within the framework of the classical theory of semi-groups. Keywords : Semigroups, integrated semi-groups, evolution equations, delay differential equations, population dynamics model.

Résumé

La théorie des semi-groupes intégrés a de très vastes applications allant des équations différentielles à retard, équations paraboliques avec retard ou encore avec des conditions de bords non linéaires, non locales et éventuellement non bornées, ou encore des équations structurées en âge (avec retard, diffusion, . . .). Ainsi, l'utilisation des semi-groupes intégrés permet d'obtenir des résultats relativement fins sur la dynamique de certaines équations d'évolution qui n'entrent pas dans le cadre de la théorie classique des semi-groupes. Mots clés : Semi-groupes, semi-groupes intégrés, équations d'évolution, équations différentielles à retard, modèle dynamique de populations

References

- [1] Y. Abdelbadie. La théorie des semi-groupes et les équations aux dérivées partielles à retard. Mémoire master. Université Abou Bakr Belkaid Tlemcen. Juillet 2019.
- [2] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Masson, 1987.
- [3] A. L. Cauchy, Cours d'Analyse de l'école Royale Polytechnique, première Partie, Analyse Algébrique, 1821.
- [4] L. Dan Lemle. Semi groupes intégrés d'opérateurs, l'unicité des pré-générateurs et applications. Thèse de Doctorat. Université Blaise Pascal-Clermont-Ferrand II, 2007. Français.
- [5] D. Djaber, Semi-groupes intégrés et applications. Mémoire master. Université Larbi Ben M'Hidi- Oum El bouaghi 2021.
- [6] A. Ducrot, P. Magal, S. Ruan. Une introduction aux modèles de dynamique de populations structurées en âge et aux problèmes de bifurcations. 2010.
- [7] M. Gurtin and R. MacCamy, Nonlinear age-dependent population dynamics Arch. Ration. Mech. Anal. 54 (1974), 281-300.
- [8] J. Hadamard, Le principe de Huygens, Bull. Soc. Math France 52 (1924), 610-640.
- [9] E. Hille, Functional Analysis and Semigroups, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. 31, Amer. Math. Soc.; 1948.
- [10] I. Medjahdi, Bifurcation de Hopf pour un modèle proie-prédateur avec structure d'âge. Mémoire master. Université Abou Bakr Belkaid Tlemcen. 2019.
- [11] A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Springer Verlag, New York, Berlin, 1983.
- [12] K. Yosida, On the differentiability and the representation of one parameter semigroups of linear operators, J. Math. Soc. Japan 1 (1948), 15-21.