



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



**Université Amar Thelidji- Laghouat**

**FACULTE DE GENIE CIVIL ET D'ARCHITECTURE**

**DEPARTEMENT : GENIE CIVIL**

## **MEMOIRE DE MASTER**

**Présenté par : Natouri Atallah**

**DOMAINE : Sciences et Technologie.**

**FILIERE : Génie Civil**

**OPTION : Structures**

### **Thème**

**Étude Comparative des Performances des Éléments Finis des  
Structures en Plaques et Coques**

#### **Jury de soutenance :**

<b>Nom et Prénom</b>	<b>Grade</b>	<b>qualité</b>
Mme. Bellakehal. H.	M.C.A	Président
Mr. Amara. S.	M.C.A	Examineur
Mr. Mouattah. K.	M.C.A	Encadreur

**Promotion : juin - 2018**

## **R E M E R C I E M E N T S**

Avant tout, je tiens à remercier ‘ Dieu le tout puissant et miséricordieux’ de m’avoir accordé une bonne santé et la volonté afin d’ élaborer et de présenter ce modeste travail.

L’écriture de remerciements est un exercice difficile où il existe des figures imposées et où la difficulté est bien souvent d’exprimer de façon très sincère le sentiment d’affection et l’attachement profond qu’éprouve une personne pour une autre.

Mes plus profonds et éternels remerciements vont à mon professeur Dr. Mouattah Kaddour qui a su encadrer ce mémoire avec beaucoup d’intelligence.

Très heureuse aujourd’hui d’avoir cet-grand honneur afin d’exprimer ma profonde reconnaissance d’un profit moral et intellectuel vis-à-vis à tous mes Enseignants de l’Université Amar Telidji Laghouat, ( Département Génie Civil) qui m’ont bien fait bénéficier de leur savoir scientifique et technique durant le cycle de mes Etudes Universitaire

J’espère que ces quelques mots de remerciement que je m’apprête à rédiger réussiront à retranscrire avec un enthousiasme mes cordialement et chaleureux sentiments à leur égards

Mes chaleureux remerciements à l’ensemble des personnes côtoyées au sein de l’Université sans oublier mes camarades de la promotion 2018.

Sans oublier, les personnes qui ont participé de près ou de loin à l’élaboration de ce travail avec un grand succès, qu’ils s’assurent que mes plumes resteront éternellement et infaillibles pour leur exprimer mes chaleureux et sincères remerciements.

# SOMMAIRE

## Introduction Générale

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

## Chapitre I : Théorie des plaques et coques

I.1 Introduction.....	3
I.2. Définition d'une plaque.....	3
I.3 Domaine d'utilisation.....	3
I.4 Différents types de plaques.....	3
I.5 Hypothèses pour l'étude des plaques minces(love-kirchhoff).....	5
I.6 Théorie des plaques épaisses.....	15
I.6.1 Champs de déplacement.....	15
I.6.2 Champs de déformation.....	16
I.7 Les plaques circulaires avec chargement axisymétriques.....	18
I.7.1 Plaques solides.....	19
I.8 Les théories des coques.....	23
I.8.1 Définition.....	23
I.8.2 Description géométrique d'une coque.....	23
I.8.3 Hypothèses de LOVE - KIRCHHOFF.....	24
I.8.4 L'analyse analytique des coques.....	24

## Chapitre II : Élément finis plaques et coques

II.1 Introduction.....	26
II.2 Principe de la méthode des éléments finis.....	26
II.3 Caractéristique d'un élément fini.....	28
II.3.1 Attributs d'un élément fini .....	28
II.4 Élément de plaque mince.....	28
II.4.1 Élément rectangulaire.....	29
II.4.2 Éléments triangulaires.....	30
II.5 Les tentatives pour surmonter les problèmes.....	31
II.5.1 Degrés de liberté supplémentaires.....	31
II.5.2 Dérivés normaux.....	32
II.5.3 Éléments composites.....	32
II.6 Élément de plaque Mindlin.....	32
II.6.2 Calcul de contrainte.....	35
II.7 Éléments Kirchhoff discrets.....	35
II.8 Éléments de coque.....	35
II.8.1 Éléments de facette.....	37
II.9 Description des éléments ( ANSYS).....	38
II.10 Description des éléments ( LISA).....	41
II.11 Description des éléments ( RDM6).....	42
II.12 Conclusion.....	42

## Chapitre III : Applications numériques

III.1 Introduction.....	43
III.2 Résultats.....	44
a) Plaque rectangulaire appuyée simplement sur les quatre bords et chargée par une force concentrée.....	44
b) Plaque circulaire encastrée chargée uniformément.....	48
c) Cylindre pincé à bords libres.....	52
III.3 Interprétation.....	56
III.4 Conclusion.....	57
Conclusion générale.....	58
Annexe	
Bibliographies	

## LISTE DES FIGURES

### Chapitre I: Théorie des plaques et coques

Fig I.1: Description d'une plaque.....	3
Fig I. 2:Différentes théories de plaques.....	5
Fig I.3: Déformation d'une plaque en flexion.....	6
Fig I.4: Les type conditions aux limites.....	12
Fig I.5: Plaque avec bord encasté sous une charge uniforme.....	20
Fig I.6: Plaque circulaire sous une force concentrée en son centre.....	22
Fig I.7: Discrétisation géométrie d'une coque.....	23

### Chapitre II : Élément finis plaques et coques

Fig II.1: Organigramme des étapes de calcul par EF.....	27
Fig II.2; L'élément SHELL181.....	39
Fig II.3: L'élément SHELL281.....	39
Fig II.4: L'élément SOLSH 190.....	40
Fig II.5: L'élément SHELL63.....	40
Fig II.6: L éléments (Tri3,Tri6,Quad4,Quad8,Quad9).....	41

### Chapitre III: Applications numériques

<b>Fig. III.1: Différents types de maillages pour la plaque carrée appuyée simplement avec charge concentrée au milieu.....</b>	<b>44</b>
<b>Fig III.2: Graphe donnant les résultats de la plaque carrée appuyée simplement avec charge concentrée au milieu pour le maillage (8X8) .....</b>	<b>46</b>
<b>Fig III.3: Graphe donnant les résultats de la plaque carrée appuyée simplement avec charge concentrée au milieu pour le rapport <math>a/h = 20</math> .....</b>	<b>47</b>
<b>Fig III.4: Différents types de maillages pour la plaque circulaire encadrée avec charge uniformément.....</b>	<b>48</b>
<b>Fig III.5: Graphe donnant les résultats de la plaque circulaire encastrement avec charge uniforme au milieu pour le rapport <math>a/h = 20</math> .....</b>	<b>50</b>
<b>Fig III.6: Graphe donnant les résultats de la plaque circulaire encastrement avec charge uniforme au milieu pour le maillage (8X8).....</b>	<b>51</b>
<b>Fig III.7: Différents types de maillages pour la cylindre pincé à bords libres avec deux charges unitaires.....</b>	<b>52</b>
<b>Fig III.8: Graphe donnant les résultats du cylindre pincé à bords libre avec deux charges unitaires pour le maillage (8X8).....</b>	<b>54</b>
<b>Fig III.9: Graphe donnant les résultats du cylindre pincé à bords libre avec deux charges unitaires le rapport <math>a/h = 20</math> .....</b>	<b>55</b>

## LISTE DES TABLEAUX

### Chapitre II : Élément finis plaques et coques

Tab II.1: Principaux types d'éléments.....34

### Chapitre III : Applications numériques

Tab III.1: Résultats  $W_c/W_t$  de la plaque carrée appuyée simplement avec charge concentrée au milieu.....45

Tab III.2: Résultats  $W_c/W_t$  pour la plaque circulaire encastree chargée uniformément.....49

Tab III.3: Résultats  $W_c/W_t$  du cylindre pincé à bords libres avec deux charges unitaires.....53

---

## NOTATIONS SYMBOLIQUES

$a, b, h$	Dimensions et épaisseur de l'élément de plaque
[B]	Matrice de déformation
E	Module de « Young » [Mpa]
$f_i(x)$	Fonction de forme
[F]	Vecteur de force
[K]	Matrice rigidité
$M_x, M_y, M_{xy}$	Moments de flexion et de torsion
$\vec{n}$	Normale
[N]	Matrice des fonctions de formes
P	Force
r	Rayon
$T_x, T_y$	Forces de cisaillement
$u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$	Déplacement et rotation d'un point quelconque
$\nu$	Coefficient de poisson
xyz	Coordonnées du repère global
[X]	Matrice des fonctions de base de l'interpolation
$[\sigma_{ij}]$	Tenseur des contraintes
$[\varepsilon_{ij}]$	Tenseur des déformations
$\partial$	Dérivée partielle
$\rho$	Densité du matériau
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformations directes suivant x et y et z respectivement
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	Déformations tangentielles
$\Pi$	Energie potentielle totale

Les autres symboles utilisés sont définis dans le texte.

## **INTRODUCTION GENERALE**

Les structures en plaques et coques minces et épaisses sont très répandues dans le domaine de génie civil, mécanique, aéronautique, marine et chimique. Ceci est dû à leurs propriétés intrinsèques qui associent légèreté (moins de poids) et rigidité. C'est pour cette raison que les structures spatiales sont conçues sous forme de coques minces.

Leur calcul nécessite l'utilisation de plusieurs théories : Love-Kirchhoff pour les plaques et coques minces où le phénomène de cisaillement transverse (CT) n'est pas pris en compte, Mindlin-Reissner pour les plaques et coques épaisses où ce phénomène est pris en compte.

Les solutions analytiques exactes ne sont pas toujours disponibles pour ce type de problèmes sauf pour des cas simples de géométrie, de conditions aux limites et de chargement. En d'autres termes, pour des conditions plus complexes, il est nécessaire de faire appel aux méthodes numériques, telles la méthode des éléments finis, la méthode des différences finies ou autres.

Le choix de la méthode des éléments finis réside dans sa polyvalence et sa flexibilité, i.e., le domaine en question peut avoir une géométrie, des conditions aux limites et/ou des chargements quelconques sans que cela puisse empêcher l'obtention d'une solution acceptable.

De ce fait, l'élaboration d'un élément fini plaque et coque selon telle ou telle théorie s'avère indispensable. Une énorme bibliothèque d'éléments existe dans la littérature. Hrabok et Hradey [1] ont examiné 88 éléments sans pour autant trancher si tel ou tel élément est le meilleur. Cette abondance pose un problème au praticien quant au choix de l'élément convenable pour le problème rencontré.

Cette étude, bien qu'encore très insuffisante, vise à dresser des tableaux dans lesquels l'analyste trouve une indication afin qu'il puisse faire un choix judicieux de l'élément fini adéquat dans un calcul précis en fonction de sa performance.

[Tapez le titre du document]

---

Ce manuscrit est organisé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous présentons la théorie des plaques et coques minces et épaisses en mettant l'accent sur les plaques rectangulaires et circulaires

Le second chapitre expose la méthode des éléments finis plaques et coques.

Le troisième chapitre est consacré à la simulation d'un certain nombre d'exemples de plaques et coque avec les différents éléments disponibles, en utilisant plusieurs logiciels ANSYS, RDM6, LISA. Des tableaux seront dressés ainsi que les courbes donnant la variation du rapport  $\frac{w_c}{w_t}$  en fonction du nombre d'élément et le rapport

dimension caractéristique/épaisseur ( $a/h$ ) avec des discussions et des remarques.

Nous terminerons ce travail par une conclusion générale.

# **CHAPITRE I**

## **Théorie des plaques**

## I.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente les théories des plaques minces et épaisses et les différentes approches de résolution. Puis nous allons étudier les plaques circulaires avec chargement axisymétrique. À la fin du chapitre, nous étudions la théorie des coques.

## I.2. Définition d'une plaque

Une plaque est un solide de forme prismatique ou cylindrique dont la hauteur notée  $h$  est petite par rapport aux dimensions des faces (Fig I.1) [2],[3].

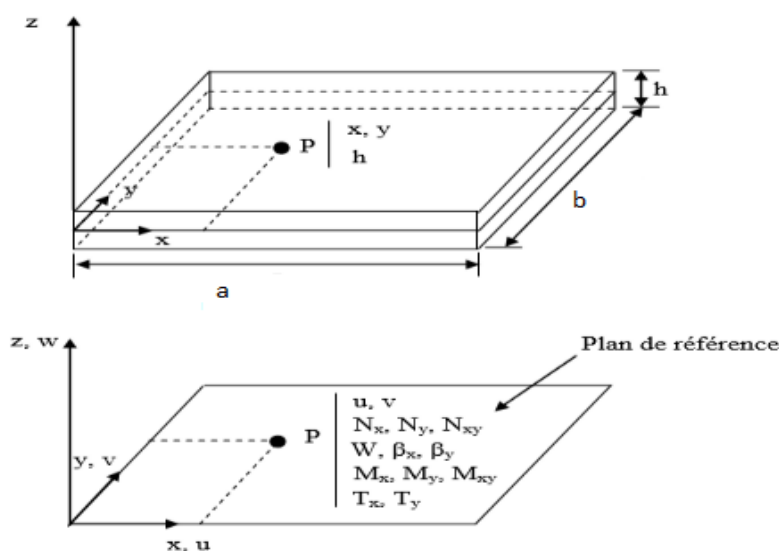


Fig I.1: Description d'une plaque

## I.3 Domaine d'utilisation

Les plaques possèdent de nombreux domaines d'application en génie civil. Elles existent sous forme rectangulaire et circulaire [4].

## I.4 Différents types de plaques

Une plaque résiste exclusivement aux charges transversales par flexion. Les propriétés flexionnelles d'une plaque dépendent beaucoup de son épaisseur en

comparaison avec d'autres dimensions. Les plaques peuvent être classées en trois groupes selon le rapport  $a/h$ ,

Où  $a$  est une dimension typique d'une plaque dans un plan et  $h$  est l'épaisseur de la plaque.

Il s'agit de :

- *Plaques épaisses* ayant des rapports  $8 \leq a/h \leq 20$ .

L'analyse de ces corps comprend toutes les composantes des contraintes, des déformations et des déplacements comme pour les corps solides utilisant les équations générales de l'élasticité tridimensionnelle.

- Plaques avec des rapports  $a/h \geq 100$ . Ces plaques sont appelées *membranes* et elles sont dépourvues de rigidité à la flexion. Les membranes supportent les charges latérales par des forces de traction axiales  $N$  (et des forces de cisaillement) agissant dans la plaque surface médiane. Ces forces sont appelées forces membranaires.

- Le groupe le plus répandu représente un type intermédiaire de plaque, appelé *plaques minces* avec  $20 \leq a/h \leq 100$ . En fonction de la valeur de Rapport  $w/h$ , le rapport de la flèche maximale de la plaque à son épaisseur.

Ce groupe est, à son tour, peut également être subdivisé en deux classes différentes : *Plaques rigides* si  $w/h \leq 0.2$ . Et *plaques flexibles* si  $w/h \geq 0.3$ .

Dans tout le développement qui suit, on retiendra la notion de plaque rigide.

En conséquent, on trouve deux théories relatives aux comportement des plaques, à savoir, la théorie des plaques minces basées sur l'hypothèse de Love Kirchhoff qui ignore le cisaillement transverse (CT) et la théorie des plaques épaisses de Mindlin-Reissner qui, contrairement à la précédente, prend compte de cet effet. Il existe des raffinements de cette théorie mais qui n'apportent pas de grandes améliorations (Fig I.2).

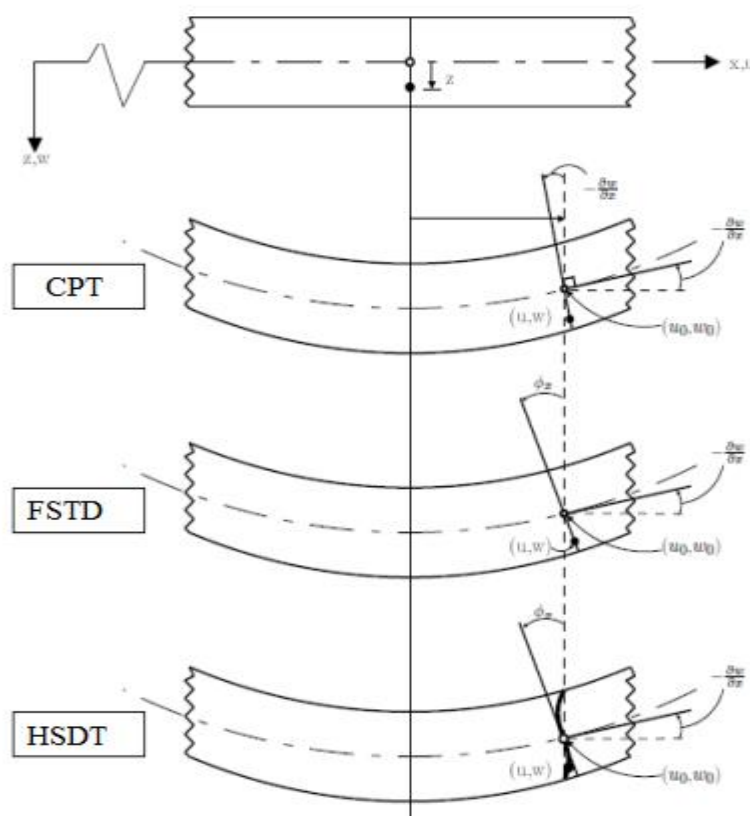


Fig I.2: Différentes théories de plaques

Où:

CPT: théorie classique des plaques;

FSTD: théorie de la plaque de déformation de cisaillement du premier ordre;

HSDT: théories de la plaque de déformation de cisaillement d'ordre supérieur.

## I.5 Hypothèses pour l'étude des plaques de Love-Kirchhoff

La théorie des plaques de Love-Kirchhoff repose sur les hypothèses suivantes [5], [6]:

- ✓ On néglige les contraintes  $\sigma_z$  et par conséquent  $\varepsilon_{zz}$  :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \tag{I.1}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \tag{I.2}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{ll}\sigma_{ij} \tag{I.3}$$

✓ Les sections droites planes d'une plaque soumise à la flexion demeurent planes et perpendiculaires au plan moyen fléchi. Ceci est vrai si la plaque est fléchie en surface cylindrique.

✓ La flèche de la plaque est petite on suppose que les points des plan moyen se déplace de la direction z unique.  $u = v = 0, w = f(x, y)$ .

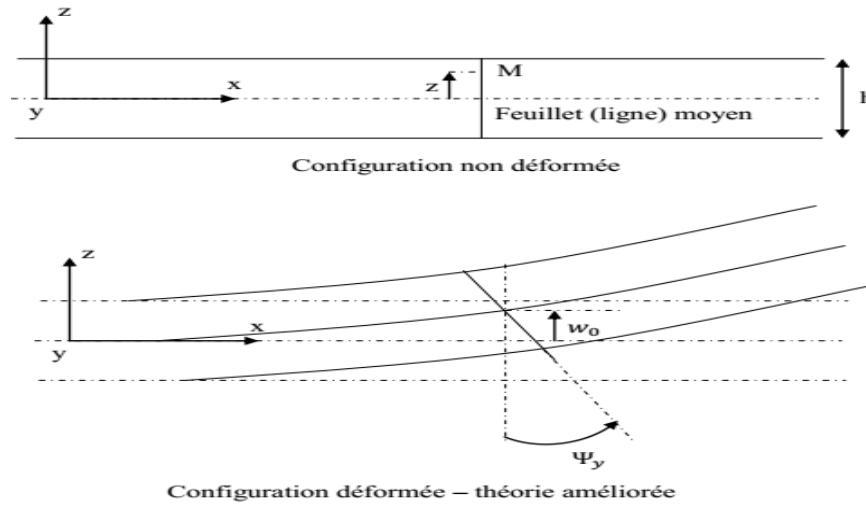


Fig I.3: Déformation d'une plaque en flexion

**Résultat:**

→ Pas d'extension ni de cisaillement dans le plan moyen :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{I.4}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 = \gamma_{yz}; \tag{I.5}$$

Donc:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{I.6}$$

$w = f_1(x, y)$  la flèche ne varie pas dans l'épaisseur.

En intégrant  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$  :

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + f_2(x, y); \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + f_3(x, y) \quad (\text{I.7})$$

Compte tenu de l'hypothèse 3 ( $z=0$ ):  $f_2(x, y) = f_3(x, y) = 0$ . Puisqu'elles représentent les valeurs de  $u$  et  $v$  en  $z=0$  (plan moyen).

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{I.8})$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{I.9})$$

Donc:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{I.10})$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (\text{I.11})$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{I.12})$$

### ✓ Loi de Hooke

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) \quad (\text{I.13})$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}) \quad (\text{I.14})$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{xy} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} (1-\nu) \varepsilon_{xy} \quad (\text{I.15})$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_{yy} = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = -\frac{Ez}{1-\nu^2} (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (\text{I.16})$$

Le reste calculé à partir des équations d'équilibre :

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + (1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \Delta w \quad (\text{I.17})$$

De même :

$$\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial y} \Delta w \quad (\text{I.18})$$

L'intégration  $z \left( \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) \right)$  et  $\frac{\partial}{\partial y} \Delta w$  indépendante de  $z$ ) les charges et réactions étant supposées perpendiculaire aux plans supérieur et inférieur de la plaque  $(z = +\frac{h}{2}; -\frac{h}{2})$

$$\sigma_{xz} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\sigma_{xx} + \sigma_{xy}) dz \quad (\text{I.19})$$

$$\sigma_{xz} = \int \frac{Ez}{(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) dz \quad (\text{I.20})$$

$$\sigma_{xz} = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) \int z dz = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{z^2}{2} + c \quad (\text{I.21})$$

$$\text{si } z = +\frac{h}{2}; -\frac{h}{2}$$

Donc:

$$\sigma_{xz} = 0 \quad (\text{I.22})$$

$$-\frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) \frac{h^2}{8} = c \quad (\text{I.23})$$

Donc :

$$\sigma_{xz} = \frac{E}{1-\nu^2} \left( z^2 - \frac{h^2}{8} \right) \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) \quad (\text{I.24})$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) \quad (\text{I.25})$$

On remarques que:  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  varient linéairement tandis que  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{yz}$  varient quadratiquement (parabolique):

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} = 0 \quad (\text{I.26})$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = - \left( \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} \right) = \left[ \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \right] \Delta^2 w \quad (\text{I.27})$$

$$\longrightarrow \sigma_{zz} = - \frac{E}{2(1-\nu^2)} \Delta^2 w \int \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right) dz \quad (\text{I.28})$$

$$\sigma_{zz} = - \frac{E}{2(1-\nu^2)} \Delta^2 w \left[ \frac{z^3}{3} - \frac{h^2}{4} z \right] + c \quad (\text{I.29})$$

$$\begin{cases} \sigma_{zz} \left( -\frac{h}{2} \right) = q \\ \sigma_{zz} \left( \frac{h}{2} \right) = 0 \end{cases} \quad (\text{I.30})$$

$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$  (pour  $z = \frac{h}{2}$ ;  $z = -\frac{h}{2}$ ) puisque les faces de la plaque  $\left( z = \frac{h}{2}; -\frac{h}{2} \right)$ .

$$\sigma_{xz} = \frac{E \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right)}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \Delta w \quad (\text{I.31})$$

$$\sigma_{yz} = \frac{E \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right)}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \Delta w \quad (\text{I.32})$$

Enfin :

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \Delta^2 w \quad (\text{I.33})$$

$\sigma_{zz}$  : Pression mutuelle des couches horizontales de la plaque (négligeable).

Mais l'équation de  $\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}$  sera utilisée pour un objectif plus important.

➤ Détermination de  $w(x, y)$  par intégration de l'équation.

$$\sigma_{zz}\left(\frac{h}{2}\right) - \sigma_{zz}\left(-\frac{h}{2}\right) = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 w \quad (\text{I.34})$$

La charge  $q(x, y)$  appliquée sur la face supérieure de la plaque:

$$\begin{cases} q(x, y) = -\sigma_{zz}\left(-\frac{h}{2}\right) \\ \sigma_{zz}\left(\frac{h}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad (\text{I.35})$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad z = -\frac{h}{2} \quad (\text{I.36})$$

$$\vec{\partial n} = q \vec{e}_z \quad (\text{I.37})$$

$$q = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 w \quad (\text{I.38})$$

Où:

$$\Delta^2 w = \frac{q(x, y)}{D} \quad (\text{I.39})$$

$\Delta^2$  est l'opérateur bilaplacien donné par :

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (\text{I.40})$$

Avec :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (\text{I.41})$$

Pour une poutre en flexion.

Les équations d'équilibre :

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy,xy}}{\partial x \partial y} + p = 0 \quad (\text{I.42})$$

Flexion des poutres équation d'équilibre  $\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - p = 0$  (I.43)

✓ **Loi de comportement en contrainte plane en fonction des moments**

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.44})$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} dz \quad (\text{I.45})$$

$$\begin{cases} M_{xx} = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ M_{yy} = -D \left[ \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (\text{I.46})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -p \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M}{D} \end{cases} \quad (\text{I.47})$$

Donc l'équation de Lagrange est réduite à deux équations du second ordre parfois préférables selon la méthode de résolution.

Pour résoudre l'équation (I.53) il faut fournir les conditions aux limites nécessaires pour que le problème soit bien posé et possède ainsi une solution unique. Pour cela, huit conditions sont nécessaires (deux pour chaque bord). Dans ce qui suit, on expose les différents types de conditions aux limites.

### ✓ Les types de conditions aux limites

Plaque rectangulaire :

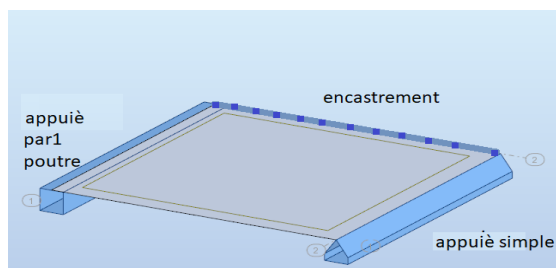


Fig I.4: Les type conditions aux limites

1. Encastrement ( $y=0$ ) Flèche et pente nulles

$$w = 0|_{y=0} \quad ; \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} = 0|_{y=0} \quad (\text{I.48})$$

2. appuis simple ( $x = a$ )

$$w = 0|_{x=a} \quad ; \quad M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0|_{x=a} \quad (\text{I.49})$$

$$w = 0|_{x=a} \quad \text{toutes les dérivées de } w(a, y) = 0 \Rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (\text{I.50})$$

Puisque :

$$M_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{I.51})$$

Donc, la condition d'appui simple peut être écrite :

$$w = 0|_{x=a} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (\text{I.52})$$

### 3. Bord libre

$y = b$  bord parfait libre. Les résultantes de la contrainte et les couple de contrainte sont nulles.

$$M_y = 0|_{y=b} \quad Q_y = 0|_{y=b} \quad M_{yx} = 0|_{y=b} \quad (I.53)$$

Ces C.L sont formulées par Poisson (au lieu de 2 seulement) donc Kirchoff a montré que les C.L imposées au moment de torsion et la force de cisaillement ne sont pas indépendantes pour la théorie de petites flèches de plaques fléchies et peuvent, alors être réduite à une seule condition.

$$M_y = 0|_{y=b} \quad V_y = 0|_{y=b} \quad (I.54)$$

Où:

$$V_y = Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \quad (I.55)$$

Où  $V_y$  est la force de cisaillement effective :

Enfin, cette C.L est écrite sous la forme :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial w}{\partial x^2} = 0|_{y=b} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = 0|_{y=b} \quad (I.56)$$

L'équation (I.39) peut être résolue soit directement par certaines méthodes telles que celle de Navier ou Lévy limitées à certains types de plaques ou par les méthodes numériques telles que la MEF ou la MDF. Elle peut être, également, résolue à l'aide des méthodes énergétiques telles que la méthode de Ritz. On exposera dans ce qui suit quelques méthodes utilisées dans la littérature.

#### ✓ Méthode de Navier

En 1820, Navier présenté à l'Académie des Sciences un article sur la solution du cintrage de plaques simplement supportées par des séries trigonométriques doubles.

Solution de la flexion d'une plaque rectangulaire simplement appuyée sur les quatre

bords par une double série trigonométrique.

$$w = 0 \quad \text{et} \quad x = 0, a \quad \text{Pour} \quad y = 0, b \quad (\text{I.57})$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{Pour} \quad x = 0, a \quad (\text{I.58})$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{Pour} \quad y = 0, b \quad (\text{I.59})$$

Dans ce cas: On peut mettre

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{I.60})$$

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{I.61})$$

$w_{mn}$  et  $p_{mn}$  coefficients sont donnés par :

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (\text{I.62})$$

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn}}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{I.63})$$

La série converge rapidement et donne :

- Précision satisfaisante peut être obtenue en prenant quelques termes.
- Moins rapide pour la seconde et la troisième dérivée de  $w(x, y)$ .
- ✓ **Méthode de Lévy**

Une série de Fourier pour une plaque simplement appuyée sur 2 bords ( $x = 0$ ;  $x = a$ )

avec des conditions arbitraires sur les 2 autres ( $y = 0$ ,  $y = b$ ). La solution générale est

donnée sous la forme :

$$w = w_p + w_h \quad (\text{I.64})$$

$w_p$  : solution particulière

$w_h$  : solution homogène (complémentaire)

$$w_p = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ A_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + B_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + \frac{m\pi y}{a} (C_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m \cosh \frac{m\pi y}{a}) \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (\text{I.65})$$

$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (\text{I.66})$$

$A_m, B_m, C_m$  et  $D_m$  des constantes à déterminer à partir des C.L sur les bords  $y = 0$  et  $y = b$ .

$$w_p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (\text{I.67})$$

$$P(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (\text{I.68})$$

Avec:

$$p_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a P(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx \quad (\text{I.69})$$

$g_m(y)$  solution de:

$$\frac{d^4 g_m(y)}{dy^4} - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{d^2 g_m(y)}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 g_m(y) = \frac{p_m(y)}{D} \quad (\text{I.70})$$

## I.6 Théorie des plaques épaisses

La théorie des plaques épaisses est une théorie qui tient en compte du cisaillement et dessinée aux calculs des petites déformations, ainsi simple à formuler [7], [8].

### I.6.1 Champs de déplacement

Dans la théorie des plaques de Reissner-Mindlin, les composantes des champs de déplacement sont données comme suit [9], [10] :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) + z\beta_\alpha(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{I.71})$$

Les rotations sont données par :

$$\theta_y \neq -\frac{\partial w}{\partial x} \quad \theta_x \neq \frac{\partial w}{\partial y} \quad (I.72)$$

Donc, les variables cinématiques indépendantes sont :

$\beta_x = \theta_y$  : La rotation du plan  $xy$  autour de  $y$  ;

$\beta_y = -\theta_x$  : La rotation du plan  $xy$  autour de  $x$ .

Le champ des déplacements s'exprime alors en fonction des trois variables par la relation suivante [10]:

$$\begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \beta_x(x, y) \\ \beta_y(x, y) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (I.73)$$

### I.6.2 Champs de déformation

Le champ de déformation est donné par :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \varepsilon_y = z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \varepsilon_x = 0 \\ 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = z \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (I.74)$$

Et par ailleurs,  $\varepsilon_{xz}$  et  $\varepsilon_{yz}$  ne sont plus nulles :

$$\begin{cases} 2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \beta_x + \frac{dw}{dx} \\ 2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \beta_y + \frac{dw}{dy} \end{cases} \quad (I.75)$$

On ne peut donc plus négliger le cisaillement.

Le vecteur et le tenseur des courbures ne peuvent plus se simplifier et restent :

$$\vec{\kappa} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \end{pmatrix} \quad (\text{I.76})$$

$$k = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) & -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{I.77})$$

Et l'on a toujours

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \varepsilon_y \end{pmatrix} = z \cdot k \quad (\text{I.78})$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = z \cdot \vec{\kappa} \quad (\text{I.79})$$

✓ **Efforts résultants de membrane:**

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz, \quad N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz \quad (\text{I.80})$$

✓ **Moments de flexions:**

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz \quad (\text{I.81})$$

✓ **Efforts tranchants:**

$$T_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz, \quad T_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz \quad (\text{I.82})$$

## I.7 Les plaques circulaires avec chargement axisymétriques

La déviation de la plaque et les résultantes de contraintes et les couples de contraintes dépendront de la position radiale  $r$  seulement. La flexion d'une plaque circulaire :

$$M_r = -D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right); \quad M_t = -D\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \nu\frac{d^2w}{dr^2}\right) \quad (\text{I.83})$$

$$Q_r = -D\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right) = -D\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right] \quad (\text{I.84})$$

L'équation différentielle de la surface déviée la plaque circulaire :

$$\Delta_r^4 w \equiv \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right) = \frac{p}{D} \quad (\text{I.85})$$

Plus clairement :

$$\frac{d^4w}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3w}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{dw}{dr} = \frac{p}{D} \quad (\text{I.86})$$

$$\Delta_r^2 w \equiv \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right) \quad (\text{I.87})$$

Apparaît dans le formulaire :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right]\right\} = \frac{p}{D} \quad (\text{I.88})$$

La solution rigoureuse des équations (I.85), (I.86) ou équation (I.88) est obtenue comme la somme de la solution complémentaire de l'équation différentielle homogène  $w_h$ , et de la solution particulière  $w_p$ ,

La solution complémentaire des équations (I.86), (I.86) ou équation (I.88) est donnée par :

$$w_h = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 \quad (\text{I.89})$$

où  $C_i (i=1,2,3,4)$  sont des constantes qui peuvent être évaluées à partir des conditions

aux limites.

La solution particulière  $w_p$  est obtenue par intégration successive de l'équation (I.88):

$$w_p = \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int \frac{rp(r)}{D} dr dr dr dr \quad (\text{I.90})$$

Si la plaque est sous un chargement uniforme  $p = p_0 = cte$ , la solution particulière est :

$$w_p = \frac{p_0 r^4}{64D} \quad (\text{I.91})$$

Pour les besoins du calcul, les quantités suivantes sont données explicitement :

$$w = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 + \frac{p_0 r^4}{64D} \quad (\text{I.92})$$

$$\frac{dw}{dr} = C_1 \frac{1}{r} + C_2 (2r \ln r + r) + 2C_3 r + \frac{p_0 r^3}{16D} \quad (\text{I.93})$$

$$M_r = -D \left[ -C_1 \frac{1-\nu}{r^2} + 2C_2 (1+\nu) \ln r + 2C_3 (1+\nu) + \frac{p_0 r^2}{16D} (3+\nu) \right] \quad (\text{I.94})$$

$$M_t = -D \left[ C_1 \frac{1-\nu}{r^2} + 2C_2 (1+\nu) \ln r + C_2 (1+3\nu) + 2C_3 (1+\nu) + \frac{p_0 r^2}{16D} (1+3\nu) \right] \quad (\text{I.95})$$

$$Q_r = -4D \left( C_2 \frac{1}{r} + \frac{p_0 r}{8D} \right). \quad (\text{I.96})$$

Quelques solutions pour des plaques circulaires axialement symétriques :

### I.7.1 Plaques solides

Considérons une plaque pleine de rayon  $a$  sous une charge axisymétrique  $p(r)$ .

Prenons l'origine du système de coordonnées au centre d'une plaque. La solution différentiel de l'équation (I.87) est donné par les expressions (I.88), (I.90). Pour la plaque pleine, qui ne contient pas de charges concentrées à  $r = 0$ , il est facile de voir les termes impliquant les logarithmes dans l'équation. (I.89) donne un moment infini de déplacement et de flexion, et la force de cisaillement pour toutes les valeurs de  $C_1$  et  $C_2$ , sauf zéro; donc,  $C_1 = C_2 = 0$ . Ainsi, pour une plaque circulaire pleine soumise à une charge répartie axisymétrique avec des conditions aux limites arbitraires, la surface

de réflexion est donnée par :

$$w = C_3 r^2 + C_4 + w_p \tag{I.97}$$

Les constantes d'intégration  $C_3$  et  $C_4$  de cette équation sont déterminées à partir des conditions aux limites spécifiées à la frontière  $r = a$ . Certains cas particuliers de plaques et de chargements couramment rencontrés en pratique [2]:

**a. Plaque avec bord encasté sous une charge uniforme  $p_0$  :**

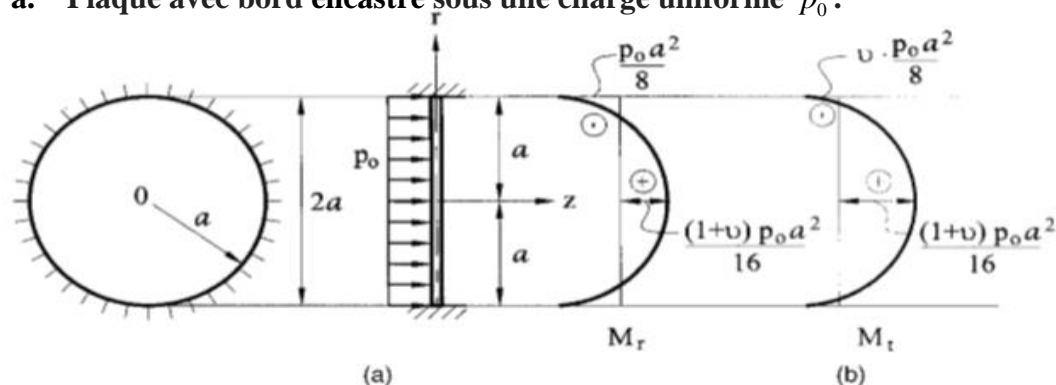


Fig I.5: Plaque avec bord encasté sous une charge uniforme

Les conditions aux limites sont

$$w = 0 \Big|_{r=a} \quad ; \quad \frac{dw}{dr} = 0 \Big|_{r=a} \tag{I.98}$$

Présentation de la surface de déflexion sous la forme de l'équation (I.97) dans les conditions (I.98), on obtient:

$$C_3 = -\frac{p_0 a^2}{32D} \quad ; \quad C_4 = \frac{p_0 a^4}{64D} \tag{I.99}$$

De même que pour la procédure du cas précédent, la flèche est alors :

$$w = \frac{p_0}{64D} (a^2 - r^2)^2 \tag{I.100}$$

La flèche maximale se produit au centre de la plaque :

$$w_{\max} = \frac{p_0 a^4}{64D} \tag{I.101}$$

Les expressions pour les moments de flexion sont calculées au moyen des équations

(I.92), (I.93), (I.94), (I.95), (I.96). En substituant  $C_3$  et  $C_4$  de l'équation (I.99) dans les équations [(I.92), (I.93), (I.94)]; (I.95), (I.96) et en faisant  $(C_1 + 3\nu)^2$  on obtient :

$$(I.102)$$

Les distributions des moments de flexion sont illustrées à la figure (Fig.I.5:(b)). Le moment de flexion maximum  $M_r$  se produit au bord de la plaque ( $r = a$ ), où :

$$\max M_r = -\frac{p_0 a^2}{8} \quad (I.103)$$

Le moment de flexion maximum  $M_t$  au centre de la plaque ( $r = 0$ ), où :

$$\max M_t = \frac{p_0 a^2 (1+\nu)}{16} \quad (I.104)$$

#### b. Plaque circulaire sous une force concentrée en son centre

Quand une charge concentrée ou ponctuelle agit au centre de la plaque, on peut mettre  $P = 0$  et ainsi  $w_p = 0$  dans équation (I.87). En se référant à l'équation (I.89), nous pouvons conclure que  $C_1$  doit être pris comme zéro pour que la déflexion soit finie à  $r = 0$ . Le terme impliquant  $C_2$  doit maintenant être retenu en raison des très fortes contraintes de cisaillement présentes au voisinage du centre. La surface de déflexion de la plaque est alors représentée comme suit [2]:

$$w = C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 \quad (I.105)$$

Les constantes  $C_2$ ;  $C_3$ ; et  $C_4$  sont évalués à partir des conditions aux limites et des conditions au point d'application de la force concentrée. Considérons la plaque avec le bord encasté chargé par une force concentrée  $P$  appliquée au centre de la plaque  $O$ , comme le montre la Fig I.6:

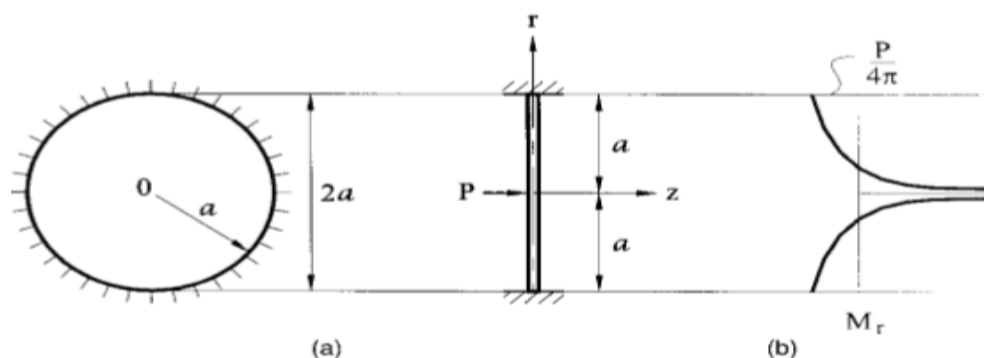


Fig I.6: Plaque circulaire sous une force concentrée en son centre

Les conditions aux limites (I.98), lorsqu'elles sont introduites dans l'équation (I.105) conduisent à :

$$C_2 a^2 \ln a + C_3 a^2 + C_4 = 0 \quad (\text{I.106})$$

$$C_2 a(2 \ln a + 1) + 2C_3 = 0 \quad (\text{I.107})$$

La condition supplémentaire peut être établie à partir de la considération suivante. Isolons un petit cylindre de rayon  $r$  au voisinage de l'application de  $P$ . De l'équilibre de ce cylindre, on obtient:

$$\sum F_z = 0; \quad Q_r(2\pi r) + p = 0 \quad \text{ou} \quad Q_r = -\frac{P}{2\pi r} \quad (\text{I.108})$$

Substituer à  $Q_r$  des les équations (I.92),(I.93),(I.94),(I.95),(I.96) dans le ci-dessus et laissant  $p_0 = 0$ , nous obtenons :

$$4DC_2 \frac{1}{r} = \frac{P}{2\pi r} \quad (\text{I.109})$$

Les constantes d'intégration sont :

$$C_2 = \frac{P}{8\pi D} \quad ; \quad C_3 = -\frac{P}{16\pi D} (2 \ln a + 1) \quad ; \quad C_4 = \frac{Pa^2}{16\pi D} \quad (\text{I.110})$$

$$w = \frac{P}{16\pi D} (2r^2 \ln \frac{r}{a} + a^2 - r^2) \quad (\text{I.111})$$

En appliquant la même procédure, on obtient la surface de flexion et les moments de flexion pour une plaque à bords simplement soutenus et soumise à une force concentrée en son centre. Pour cette plaque, les moments de flexion et de flexion sont donnés par [2].

$$M_r = \frac{P}{4\pi} (1 + \nu) \ln \frac{a}{r} \quad ; \quad M_t = \frac{P}{4\pi} [(1 + \nu) \ln \frac{a}{r} + 1 - \nu] \quad (\text{I.112})$$

## I.8 Les théories des coques

### I.8.1 Définition

Les coques ont toutes les caractéristiques des plaques, sauf que leur plan moyen n'est pas droit. Les coques sont divisées en coquilles paraboloidales cylindriques (non circulaires et circulaires), coniques, sphériques, ellipsoïdales, paraboloidales, toroidales et hyperboliques.

La théorie de coque permet de calculer les déformations et les contraintes dans une coque soumise à des charges. Il existe deux classes de coques: les coques épaisses et les coques minces.

### I.8.2 Description géométrique d'une coque

Une coque est un corps délimité par deux surfaces, la longueur du segment, qui est perpendiculaire aux surfaces courbes, est appelée l'épaisseur de la coque et est désignée par  $h$  (Fig I.7). Les structure types coques sont plus utilisée dans les constructions civiles, mécaniques et aéronautiques [5].

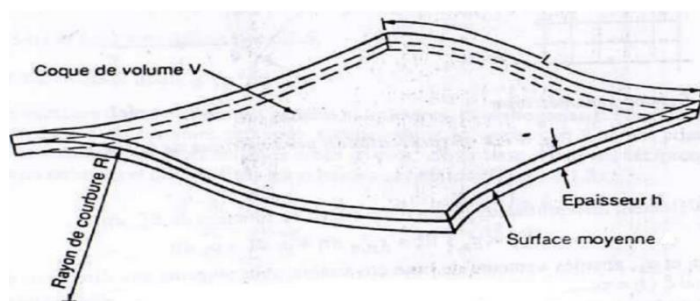


Fig I.7: Discrétisation géométrie d'une coque

### I.8.3 Hypothèses de LOVE – KIRCHHOFF

Elles peuvent s'exprimer de la manière suivante [4] :

- ✓ On suppose que les déformations et déplacement sont petits.
- ✓ hypothèse de coque mince : le champ de déplacement  $\vec{U}(x, y)$  est peu différent de  $\vec{U}(x, y, z)$ .
- ✓ Les normales surface moyenne de la coque, il n'y a de la distorsion dans tout plan.
- ✓ Les effets qui se manifestent à travers l'épaisseur, sont négligée  $\sigma_z = 0$ .

### I.8.4 L'analyse analytique des coques

Loi de Hooke s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_z - \nu\sigma_x) \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \end{array} \right. \quad (\text{I.113})$$

$E$  : est le module d'élasticité;

$\nu$  : est le coefficient de Poisson;

$G$ : est le module de cisaillement.

Et les contraintes et efforts intérieurs :

## 1. Efforts normaux

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x d_z N_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y d_z \quad (\text{I.114})$$

## 2. Efforts tangentiels

$$N_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} d_z; \quad N_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yx} d_z \quad (\text{I.115})$$

## 3. Moment de flexion

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z d_z; \quad M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z d_z \quad (\text{I.116})$$

## 4. Moment de torsion

$$M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z d_z; \quad M_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yx} z d_z \quad (\text{I.117})$$

## 5. Effort tranchants

$$T_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} d_z; \quad T_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} d_z \quad (\text{I.118})$$

# **CHAPITRE II**

**Plaques cylindrique**

**et**

**coques**

## II.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier les éléments finis des plaques et coques. Les éléments finis font partie des outils mathématiques utilisés pour résoudre numériquement les équations aux dérivées partielles avec une grande précision et ce quelque soit la géométrie de la structure et les conditions aux limites.

## II.2 Principe de la méthode des éléments finis

La MEF consiste à subdiviser le domaine étudié en un nombre fini d'éléments finis connectés entre eux par des nœuds. Ses étapes sont :

1. Discrétisation : on fait le choix de l'élément.
2. Calcul de la matrice de rigidité élémentaire.
3. Assemblage:  $IK_{globale} = \sum^{n^{\circ} \text{ éléts}} K_i^e$
4. Introduction des conditions aux limites.
5. Résolution du système algébrique obtenu.
6. Dépouillement et critique des résultats.

La MEF peut globalement être représentée par l'organigramme suivant:

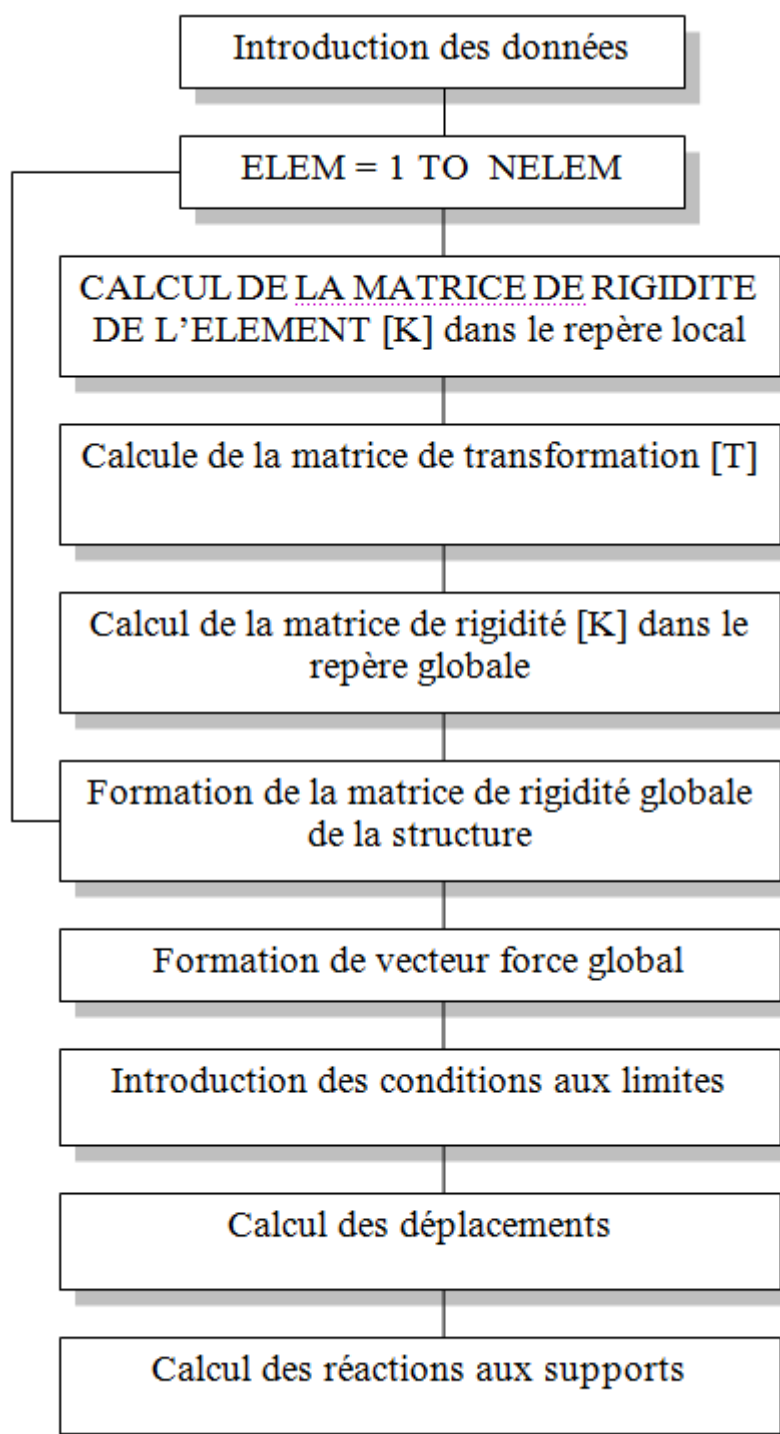


Fig II.1: Organigramme des étapes de calcul par EF

## II.3 Caractéristique d'un élément fini

### II.3.1 Attributs d'un élément fini

La nature de la division aléatoire des éléments finis permet d'isoler un élément fini dans le but de l'étudier et de le caractériser. La sélection d'un élément fini comprend les points suivants [11] :

#### **Géométrie :**

L'élément sélectionné peut faire partie d'un rectangle ou d'un triangle dans un paramètre orthogonal homogène (OXYZ) avec un nombre de nœuds en fonction de sa nature et du maillage utilisé pour lier le contrat.

#### **Matériau:**

Le matériau d'élément est défini par un module de Young  $E$ , le coefficient de poisson, la masse volumique et la limite élastique.

#### **Nœuds:**

Il est défini comme une partie qui relie les éléments les uns aux autres ou à la fin d'un élément et est basé sur le degré de liberté et les charges qui l'affectent.

#### **Degrés de liberté:**

Est la possibilité de déplacer les nœuds dans toutes les directions et la rotation et est déterminée en fonction de la qualité de l'élément.

#### **Forces nodales:**

Sont les forces résultant des charges appliquées et distribuées sur les nœuds.

## II.4 Élément de plaque mince

Ces éléments sont conçus autour de la théorie des plaques de Kirchhoff [12]:

### II.4.1 Élément rectangulaire

Le plus simple est l'élément rectangulaire à quatre nœuds avec la flèche et la rotation en tant que degrés de liberté à chaque nœud de sorte que le nombre total de degrés de liberté est de 12 et ceux-ci sont:

$$(w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, \dots, w_4, \theta_{x4}, \theta_{y4}) \quad (\text{II.1})$$

Dans la théorie de la plaque mince tout est exprimé en termes de  $w$ , nous avons donc besoin d'un polynôme pour  $w$  avec 12 termes. Un polynôme cubique en  $x$  et  $y$  a 10 termes et une quartique a 15 termes, donc nous ne pouvons pas inclure tous les termes cubiques mais seulement deux des termes quartiques. Les termes les plus couramment utilisés sont:

$$[ 1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3 ] \quad (\text{II.2})$$

C'est-à-dire  $x^3y$  et  $xy^3$  sont les termes carrés utilisés. En effet, ces termes ont les avantages suivants:

1. Le long d'une ligne parallèle à l'axe  $x$  ou  $y$  le déplacement a une variation un cube, c'est à dire qu'il est le même comme un faisceau.

2. puisqu'un cube a 4 termes, les deux valeurs finales de la déviation et de la pente (dans la direction du bord) définissent complètement la déviation cubique, et l'une des rotations est continue à travers les limites des éléments.

Bien que la déflexion et l'une des rotations soient continues à travers les limites des éléments, la seconde déviation n'est pas considérée comme un élément ayant un bord sur l'axe des  $x$ . L'équation  $w$  est exprimé comme suit:

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3 \quad (\text{II.3})$$

le long de l'axe des  $x$ ,  $y = 0$  :

$$w = a_1 + a_2x + a_4x^2 + a_7x^3 \quad (\text{II.4})$$

Ceci a quatre coefficients et donc les valeurs de  $w$  et  $M_w / M_x$  aux deux nœuds sont suffisantes pour définir complètement  $w$  le long du bord, d'où la continuité de  $w$  et  $x$ .  $M_w / M_y$  est donné par (obtenu en différenciant l'expression ci-dessus pour  $w$ ).

$$\frac{M_w}{M_y} = a_3 + a_5x + 2a_6y + a_8x^2 + 2a_9xy + 3a_{10}y^2 + a_{11}x^3 + 3a_{12}xy^2 \quad (\text{II.5})$$

Et le long de l'axe  $x$ ,  $y = 0$  :

$$\frac{M_w}{M_y} = a_3 + a_5x + a_8x^2 + a_{11}x^3 \quad (\text{II.6})$$

C'est encore un cubique en  $x$ , mais ne contient aucun des éléments trouvés dans l'expression pour  $w$ . De long le bord que nous avons seulement deux valeurs pour  $M_w / M_y$  n'est pas uniquement défini par les valeurs nodales. Par conséquent,  $M_w / M_y$  n'est pas continue à travers limites d'éléments.

En général, la dérivée normale n'est pas continue à travers les limites des éléments. Cela signifie que l'élément est non conforme. Cependant, il réussit le test de correctif, et converge donc vers réponse correct. Comme il est non-conforme, il ne donne pas une limite supérieure de l'énergie, mais il est encore un élément très utile.

Bien entendu, toutes les assiettes ne sont pas de forme rectangulaire et il serait souhaitable d'utiliser généralement des quadrilatères en forme. La réponse évidente serait de transformer l'élément rectangulaire en quadrilatère général, la courbure constante (c'est-à-dire la déformation uniforme) ne peut pas être modélisée et la convergence vers la solution correcte n'est pas garantie pour le cas du parallélogramme.

#### II.4.2 Éléments triangulaires

Tandis que les éléments quadrilatère ne fournissent pas un moyen facile de modéliser les triangles de la modélisation des formes générales des triangles. Un

simple élément triangulaire avec la déviation et deux rotations à chaque nœud a neuf degrés de liberté, un cube complet ayant 10 termes [12].

Si un seul des termes cubiques est omis, alors l'élément perd sa symétrie (il sera plus précis dans la direction  $x$  que dans la  $y$  direction, et inversement). Il est donc courant de définir deux coefficients identiques, par exemple ceux de  $x^2y$  et  $xy^2$  (c'est-à-dire  $a_8 = a_9$ ). Cela réduit le nombre de degrés de liberté à 9. Il y a le problème qui parfois n'existe pas de solution unique pour les coefficients!. Cela se produit, par exemple, si deux des côtés sont parallèles aux axes  $x$  et  $y$ . La convergence vers la bonne réponse n'est garantie que pour les triangles équilatéraux. Pour les formes plus générales, les erreurs sont parfois petites et de tels éléments ont été utilisés dans la pratique, mais ils ne sont pas recommandés.

## II.5 Les tentatives pour surmonter les problèmes

Diverses méthodes ont été essayées afin de trouver des éléments de plaques minces plus fiables. Les différentes méthodes sont [12]:

- 1) Spécifier des degrés de liberté nodaux supplémentaires (dérivatives d'ordre supérieur).
- 2) Spécifier les dérivés normaux.
- 3) Utiliser des éléments composites.

### II.5.1 Degrés de liberté supplémentaires

La variation la plus simple de ceci est de spécifier  $M_w^2 / M_x M_y$  aux nœuds. Si cela est fait pour le rectangle 4nœuds, l'élément est conforme. D'autres raffinements spécifient des dérivées plus élevées aux nœuds. Ces éléments donnent des résultats très précis dans certaines circonstances, mais les conditions aux limites peuvent être un problème et leur continuité est excessive. Problème à l'étape des changements dans les propriétés du matériau ou de l'épaisseur de la plaque parce que dans le problème réel physique les dérivés d'ordre supérieur sont pas continus. Le problème de la transformation de l'élément rectangulaire en forme plus générale reste encore à

remanier.

### II.5.2 Dérivés normaux

Un élément triangulaire très simple qui fonctionne est un élément à six degrés de liberté. La déviation est spécifiée aux sommets, et la valeur normale de  $w$  est spécifiée au milieu de chaque côté. Pour cet élément, ni la déviation ni la rotation ne sont constantes et convergent vers la bonne réponse.

### II.5.3 Éléments composites

Cette approche divise l'élément en sous-régions et utilise différentes fonctions d'interpolation sur chaque sous-région. Cette fonction est choisie de manière à préserver la continuité au sein de l'élément. Un triangle de 9 degrés de liberté développé sur ces lignes est conforme. Une variante de cette approche consiste à spécifier également les dérivées normales sur les côtés médians.

Élément peut être dérivé en utilisant le principe de l'énergie potentielle complémentaire, dans lequel l'effort plutôt que le déplacement est la variable qui est travaillée avec plus les deux approches peuvent être combinées. Cela a été fait par un certain nombre de personnes et les éléments dérivés de cette façon sont appelés éléments mixtes ou hybrides. Les détails sont trop compliqués pour aller dans les éléments ont réussi dans certaines situations, mais il n'y a pas encore un élément parfait généralement accepté.

## II.6 Élément de plaque Mindlin

Les éléments en plaques minces présentent un certain nombre de problèmes qui ne sont pas facilement surmontés. Les éléments à plaques épaisses sont l'équivalent 2-d des éléments de poutre profonde et n'ont pas les mêmes propriétés que les éléments à plaques minces. Élément continue ne présente pas de difficulté, ils ont leurs propres problèmes, mais en général ils ne sont pas aussi sévères que pour les éléments en plaques minces.

Les variables nodales sont  $w$ ,  $\theta_x$  et  $\theta_y$ , la différence étant que  $\theta_x$  et  $\theta_y$  sont

maintenant supposées indépendantes de  $w$ , c'est-à-dire que l'élément permet une déformation transversale en cisaillement, la variation de déplacement est modélisée en utilisant des fonctions de forme standard comme [12]:

$$\begin{aligned} w &= \sum N_i W_i \\ \theta_x &= \sum N_i \theta_{xi} \\ \theta_y &= \sum N_i \theta_{yi} \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

C'est-à-dire exactement de la même manière que pour les éléments de contrainte plan. Cela signifie qu'il n'y a pas de problèmes de continuité inter-éléments et que les éléments iso-paramétriques peuvent être utilisés normalement pour produire des éléments de différentes formes.

Comme avec les éléments de poutre, la matrice de rigidité peut être divisée en deux composantes  $K_b$  et  $K_s$ , où  $K_b$  prend en compte la flexion et  $K_s$  tient compte des effets de cisaillement.

$$\bar{K} = \bar{K}_b + \bar{K}_s \quad (\text{II.8})$$

Comme avec l'élément de poutre profonde si l'intégration complète est utilisée, le cisaillement parasite provoque une sous-estimation grossière de la flexion, la solution est d'utiliser un ordre d'intégration si les composantes de flexion et de cisaillement de la matrice de rigidité sont intégrées alors c'est ce qu'on appelle l'intégration réduite, souvent l'intégration complète est utilisée pour  $K_b$  et l'intégration réduite pour  $K_s$ , ce qu'on appelle l'intégration sélective, la pénalité pour l'utilisation de l'intégration sélective ou réduite est l'introduction de mécanismes.

Il y a 4 principaux types d'éléments décrits dans le tableau:

Tab II.1: Principaux types d'éléments

type d'élément	règle d'intégration			nombre des mécanismes
	type	$K_b$	$K_s$	
bilinéaire 4nœuds 12 ddl	réduit	1x1	1x1	4
	sélectif	2x2	1x1	2
	plein	2x2	2x2	0
quadratique 9nœuds 27 ddl	réduit	2x2	2x2	4
	sélectif	3x3	2x2	1
	plein	3x3	3x3	0
sérendipité 8nœuds 24 ddl	réduit	2x2	2x2	1
	sélectif	3x3	2x2	0
	plein	3x3	3x3	0
Hétérosis 9nœuds 26 ddl (seulement $\theta_y$ et $\theta_x$ au Nœud central)	sélectif	3x3	2x2	0

En utilisant l'intégration complète avec tout l'élément tend à verrouiller. En utilisant intégration réduite augmente le risque d'apparition de mécanismes. La meilleure solution est généralement l'intégration sélective.

Il convient de noter que bien que les éléments individuels aient des mécanismes, lorsque les éléments apparaissent dans un maillage, certains ou tous ces mécanismes n'existent plus car ils sont restreints par les éléments environnants. L'élément sérendipité n'a pas de mécanismes quand il est dans un maillage ni les éléments quadratiques avec une intégration sélective pour de très petits rapports d'épaisseur, on peut surmonter la prolifération des nombres numériques en utilisant la valeur vraie de l'épaisseur dans le calcul de  $K_b$ , mais en ajustant la valeur de l'épaisseur utilisée pour calculer  $K_s$  de façon à le rendre petit mais pas trop petit. Cela fonctionne parce que  $K_s$  n'est pas significatif quand l'épaisseur est très petite, donc l'erreur introduite en utilisant une valeur " incorrecte " n'a pas d'importance.

### II.6.2 Calcul de contrainte

Les contraintes doivent être calculées en utilisant les points de contrainte optimaux, ceci est particulièrement vrai pour les contraintes de cisaillement transversales qui, autrement, seraient sujettes à de grandes erreurs.

## II.7 Éléments Kirchhoff discrets

Un ensemble d'éléments pour l'élément de plats minces combine les fonctionnalités de Mindlin et de plat mince éléments, ils sont appelés éléments discrets Kirchhoff (DKT). Les détails sont très impliqués, nous allons donc regarder les idées générales, en utilisant des éléments a triangulaires version de l'élément.

1) Les deux rotations sont définies à chaque nœud, on utilise la fonction standard de forme. On suppose que la flèche  $w$  est cubique le long de chaque arête, elle est déterminée par la déviation et la dérivée tangentielle de la déviation aux deux nœuds d'extrémité d'un bord [12].

2) Les dérivées tangentielle de  $w$  sont exprimées en termes de dérivées  $x,y$   $M_w/M_x$  et  $M_w/M_y$  alors 9 ddl celles-ci étant les valeurs de  $w$ ,  $M_w/M_x$  et  $M_w/M_y$  à chaque nœud.

3) Donc il y a un total de 21 degrés de liberté ddl à ce stade. L'élément a seulement 9 ddl , Ce sont les valeurs de  $w, M_w/M_x$  et  $M_w/M_y$  à chaque nœud.

4) Le nombre de ddl est réduit à 9 en exprimant le ddl de rotation en termes de  $w$ .

5)  $M_w/M_x$  et  $M_w/M_y$  . ceci est réalisé en appliquant des contraintes.

5) Les contraintes utilisées sont:

(i) Les contraintes transversales de cisaillement sont nulles aux coins est à chaque coin:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{II.9})$$

Ceci donne un total de 6 contraintes, laissant 15 ddl

(ii) La souche transversale tangentielle  $\tau_{sz}$  est nulle au milieu.

$$\theta_s = \frac{\partial w}{\partial s} \quad (\text{II. 10})$$

Où:

$s$ : Est une coordonnée tangentielle.

Cela donne 3 contraintes , laissant 12 ddl.

(iii) A pente normale varie linéairement le long du bord, ce qui donne 3 contraintes supplémentaires et il nous reste 9 ddl.

## II.8 Éléments de coque

Nous avons déjà vu que les éléments de cintrage de plaques sont assez

compliqués et que le problème est sujet à problème, ce qui est encore plus vrai avec les éléments de coque.

Une structure de coque est une structure hachée dont la forme est tridimensionnelle. La différence entre un coque et un plaque est que les forces dans le plan sont importantes dans les structures, et que dans les flèches des plaques, elles sont ignorées. Une coque peut être incurvée seule [par exemple un cylindre], ou doublement courbé [par exemple a sphère]

Deux des principales approches adoptées dans la modélisation EF des coques sont:

### II.8.1 Éléments de facette

Un élément de plaque supporte des charges en pliant un élément de contrainte de plan qui a des forces dans le plan. Puisque cendres a des flexions et des forces dans le plan, pourquoi ne pas combiner simplement un élément de contrainte de la plante en un seul élément? . Ceci est le premier élément de coque produit, et la coque est modélisée par une série d'éléments plats dans chaque élément, l'action de la membrane est considérée indépendamment, de la même manière que les poutres dans un cadre combinent la flexion et la force axiale [12] .

Le couplage entre les flexions et les points d'actine membranaires a lieu aux intersections des éléments. Les éléments triangulaires sont les plus populaires en raison de leur plus grande aptitude à modéliser la géométrie des structures

L'avantage des éléments de facette est qu'ils sont relativement simples, une caractéristique de ceux-ci est que le déplacement ainsi que les pentes sont souvent discontinus à travers les éléments limites mais ils tendent toujours à converger. On peut utiliser diverses combinaisons d'éléments de plaque et de contrainte plane. Le diagramme ci-dessous montre un exemple. Car l'action de la membrane et de la pliant est couplée sauf à l'élément limites, l'élément de facette n'est pas particulièrement précis, et le maillage fins nécessaires pour obtenir de bons résultats, ils étaient

populaires en raison de l'absence d'alternatives fiables.

Avec des éléments de contraintes planes on a vu qu'il était généralement préférable d'utiliser des éléments quadratiques, l'inverse étant généralement le cas, la raison en est que l'élément n'est pas en train d'effectuer deux fonctions [12]:

(i) Il est la modélisation du stress local état, et (ii) il modélise la géométrie par rapport à la deuxième exigence, un élément quadratique plaque n'est pas meilleur qu'un élément linéaire et un grand nombre d'éléments plaques sera nécessaire pour représenter adéquatement la géométrie.

## II.9 Description des éléments ( ANSYS)

Un programme de simulation est disponible dans les domaines suivants (ingénierie physique, mécanique et structurale) et un certain nombre d'analyses (analyse statistique, analyse module, analyse harmonique, analyse transitoire, analyse spectre, analyse flambage). Les éléments les plus importants:

- L'élément SHELL181 à 4 nœuds avec trois degrés de liberté (UX, UY,UZ) en translation et trois en rotation à chaque nœud (ROTX, ROTY, ROTZ) et une interpolation linéaire est utilisée dans l'élément. Si l'élément triangulaire est utilisé, le nombre de nœuds devient égal à 3 nœuds. La formulation de l'élément est basée sur la contrainte logarithmique et les mesures du effort vrai. Présentation de la théorie de Mindlin-Reissner.

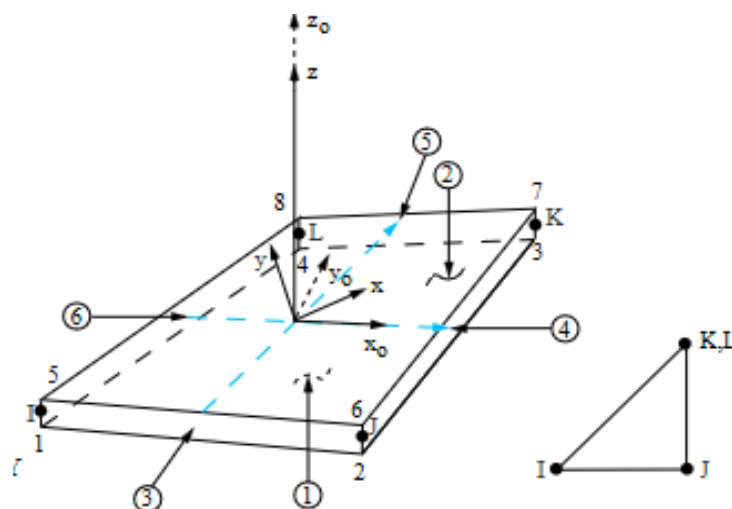


Fig II.2 L'élément SHELL181

- L'élément SHELL281 à 8 nœuds avec trois degrés de liberté (UX, UY,UZ) en translation et trois en rotation à chaque nœud (ROTX, ROTY, ROTZ) et une interpolation linéaire est utilisée dans l'élément. Si l'élément triangulaire est utilisé, le nombre de nœuds devient égal à 6 nœuds. La formulation de l'élément est basée sur la contrainte logarithmique et les mesures du effort vrai. Présentation de la théorie de Mindlin-Reissner.

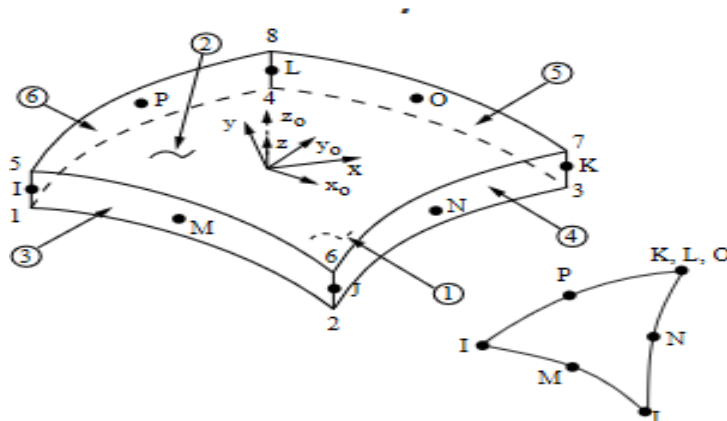


Fig II.3: L'élément SHELL281

- L'élément SOLSH190 à 8 nœuds avec trois degrés de liberté (UX, UY,UZ) à chaque nœud. L'interpolation linéaire est utilisée pour déterminer le comportement de l'élément. Si l'élément triangulaire est utilisé, le nombre de

nœuds devient égal à 6 nœuds. La formulation de l'élément est basée sur la contrainte logarithmique et les mesures du stress vrai. Présentation de la théorie de Mindlin

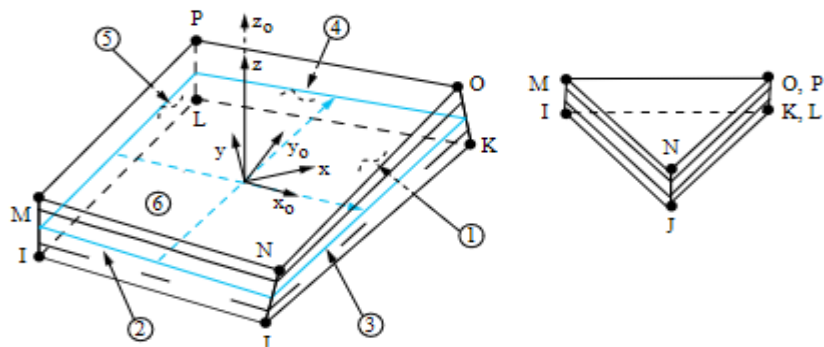


Fig II.4: L'élément SOLSH190.

- L'élément SHELL63 à 4 nœuds et possède six degrés de liberté (UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ) à chaque nœud possède à la fois des capacités de flexion et de membrane. L'élément a six degrés de liberté à chaque nœud convient de noter que c'est l'un des éléments les plus anciens où il a commencé à s'en passer. Si l'élément triangulaire est utilisé, le nombre de nœuds devient égal à 3 nœuds.

La formulation de l'élément est basée sur la contrainte logarithmique et les mesures du stress vrai. Présentation de la théorie de Mindlin-Reissner.

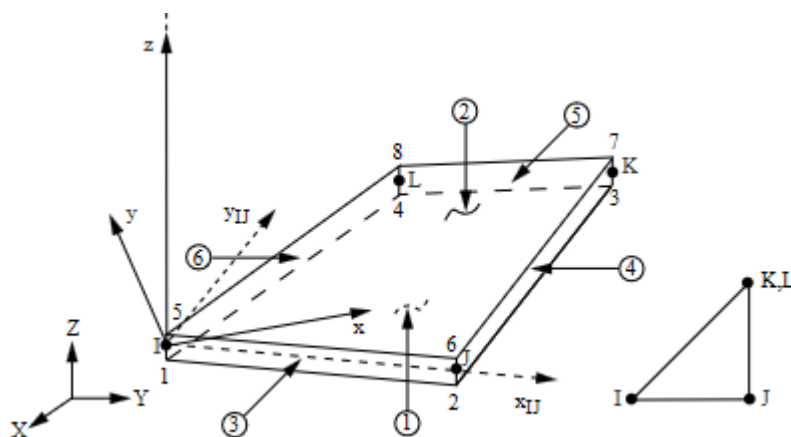


Fig II.5: L'élément SHELL 63

## II.10 Description des éléments ( LISA)

Un logiciel d'éléments finis facile à utiliser avec un modèleur intégré, et post-processeur graphique. LISA utilise différents schémas d'intégration pour les différents phénomènes physiques dans chaque forme d'élément.

Les résultats de contrainte pour les coques en analyse statique sont obtenus à partir des moments de flexion et des forces de la membrane.

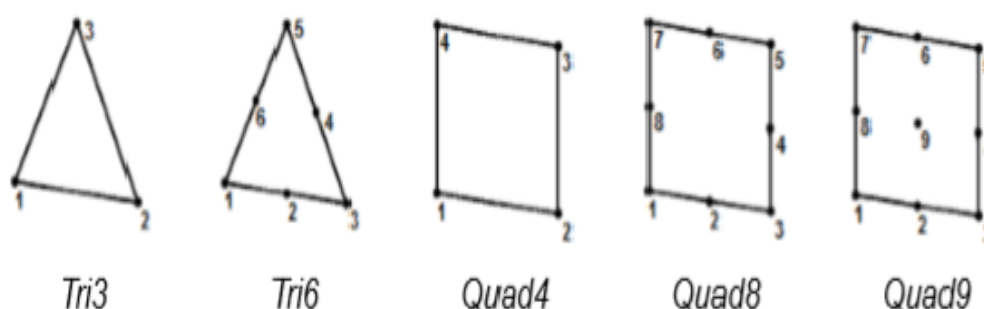


Fig II.6: Éléments (Tri3, Tri6, Quad4, Quad8, Quad9)

- Les éléments (Tri3, Tri6, Quad4, Quad8, Quad9) : Sont des éléments 3D dans les types d'analyse mécanique, les éléments utilisent une théorie de plaque de Mindlin épaisse qui sépare la flexion externe et la rigidité de cisaillement. Il inclut également la dureté de la membrane de contrainte terminale pour la déformation interne de la même manière que les éléments membranaires bidimensionnels. Chaque nœud contient 6ddl - le déplacement en (UX, UY, UZ) et la rotation autour de (ROTX, ROTY, ROTZ). Cependant, h signifie que chaque nœud est libre de tourner autour du cortex de placage naturel et ne résiste que par une petite dureté aléatoire pour assurer la stabilité numérique. Mais le format Tri3 n'est pas disponible sur l'analyse statique.

## II.11 Description des éléments ( RDM6)

Logiciel RDM6, permet de calcul des structures par la méthode des éléments finis: (DKT, DKQ, DST, MTC4) Ces éléments finis sont conçus pour des calculs en petites déplacements. Ils ne prennent pas en compte la géométrie des structures, contrairement aux éléments d'autres programmes qui peuvent être formés en utilisant plus d'éléments pour qu'ils puissent s'approcher et me donner la bonne forme. Ces éléments finis sont parmi les plus précis dans le calcul du déplacement et de l'analyse de modèle alors que :

- L'élément DKT à 3nœuds avec trois degrés de liberté (UX, UY, UZ) en translation et trois en rotation à chaque nœud (ROTX, ROTY, ROTZ) et reposent sur la théorie de Love-Kirchhoff.
- L'élément DKQ à 4nœuds avec trois degrés de liberté (UX, UY, UZ) en translation et trois en rotation à chaque nœud (ROTX, ROTY, ROTZ) et reposent sur la théorie de Love-Kirchhoff.
- L'élément DST à 3nœuds avec trois degrés de liberté (UX, UY, UZ) en translation et trois en rotation à chaque nœud (ROTX, ROTY, ROTZ) et reposent sur la théorie de Mindlin-Reissner.
- L'élément MTC4 à 4nœuds avec trois degrés de liberté (UX, UY, UZ) en translation et trois en rotation à chaque nœud (ROTX, ROTY, ROTZ) et reposent sur la théorie de Mindlin-Reissner.

## II.12 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit les éléments finis des plaques et coques, ainsi théorie Love-Kirchhoff et Mindlin-Reissner Afin de connaître les différences les plus importantes entre eux. Dans notre mémoire étude de cas sous ANSYS, LISA, RDM6 est représenté dans le troisième chapitre.

# CHAPITRE III

*Applications*

*numériques*

### III.1 Introduction

Dans le présent chapitre nous allons montrer les différentes simulations effectuées sur des exemples de plaques et coques à l'aide code ANSYS, LISA et RDM6. Une comparaison entre les types d'éléments finis sera faite et ce en jouant sur le raffinement du maillage et le rapport  $a/h$  caractéristique de la plaque et la coque.

Les exemples consistent en :

- Plaque rectangulaire appuyée simplement sur les quatre bords et chargée par une force concentrée au milieu,
- Plaque circulaire encastree chargée uniformément,
- Coque représentée par un cylindre pincé à bords libres.

Il s'agit, donc, de calculer, pour chaque exemple la flèche maximale en utilisant différents nombre et types d'éléments disponibles dans les codes de calculs utilisés en jouant pour chaque exemple sur le rapport épaisseur/dimension. Les résultats sont donnés sous forme de tableau et de courbes en les comparant au rapport solution numérique/solution analytique.

Dans le programme, seulement un quart des panneaux sont conçus en raison de la symétrie.

## III.2 Résultats

### a) Plaque rectangulaire appuyée simplement sur les quatre bords et chargée par une force concentrée au milieu:

Le problème : soit une plaque carrée (mince et épaisse) en acier simplement appuyée soumise à une charge concentrée  $P = 5000N$ , densité  $7800. \text{ kg/m}^3$ . L'acier utilisé est de FeE24 ;  $E = 200000 \text{ MPa}$ ;  $\nu = 0.3$ ,  $a=2\text{m}$ ,  $h=1\text{mm}$ ,  $10\text{mm}$ ,  $100\text{mm}$ .

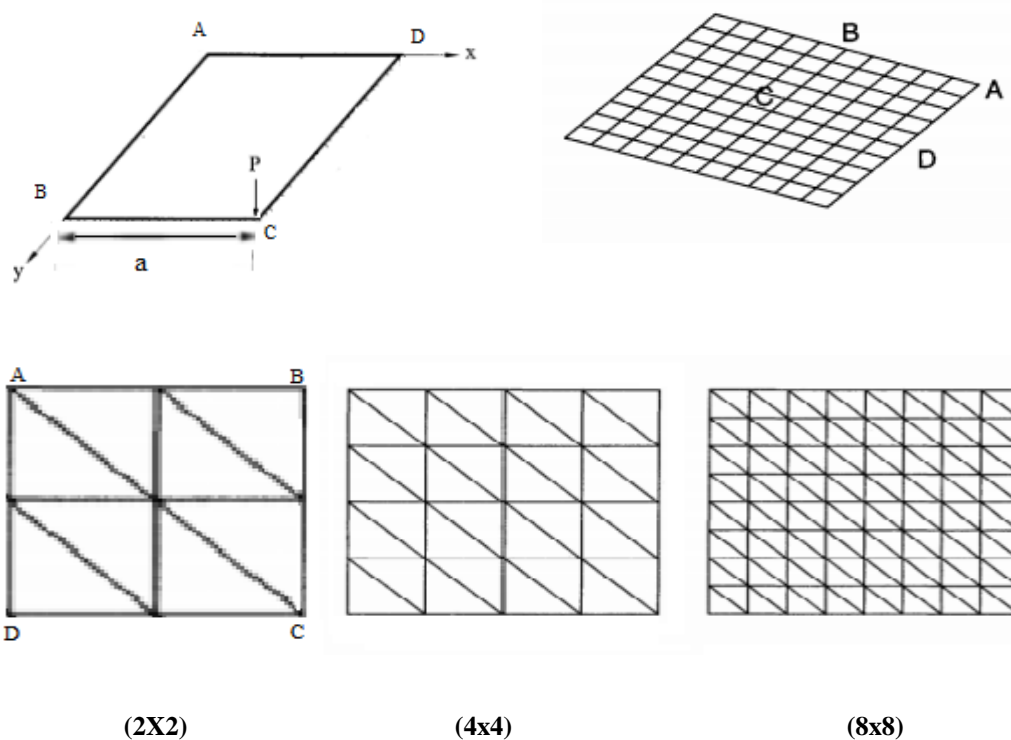


Fig. III.1: Différents types de maillages pour la plaque carrée appuyée simplement avec charge concentrée au milieu

Tab III.1: Résultats  $W_c/W_t$  de la plaque carrée appuyée simplement avec charge concentrée au milieu

	maillage	2x2			4x4			8x8		
	$a/h$	2000	200	20	2000	200	20	2000	200	20
RDM6	DKQ	0.958	0.955	0.953	0.963	0.963	0.964	0.965	0.961	0.957
	MTC4	0.940	0.939	0.937	0.909	0.904	0.900	0.950	0.935	0.935
	DKT	0.966	0.965	0.965	0.970	0.968	0.967	0.967	0.966	0.966
	DST	0.945	0.944	0.943	0.943	0.942	0.941	0.944	0.944	0.944
ANSYS	Shell181	0.910	0.920	0.923	0.915	0.914	0.917	0.925	0.925	0.923
	Shell281	0.881	0.806	0.730	0.886	0.804	0.801	0.909	0.912	0.915
	Shell63	0.511	0.504	0.504	0.520	0.511	0.512	0.560	0.543	0.541
	Solsh190	0.933	0.970	0.977	0.936	0.980	0.981	0.968	0.989	1.016
	Shell181/t	0.920	0.927	0.915	0.929	0.923	0.924	0.945	0.949	0.949
	Shell281/t	0.891	0.80	0.730	0.896	0.804	0.801	0.999	0.912	0.915
	Shell63/t	0.540	0.504	0.504	0.550	0.511	0.512	0.712	0.543	0.541
	Solsh190/t	0.953	0.970	0.977	0.966	0.980	0.981	0.969	0.989	1.016
LISA	Quad4	0.594	0.207	0.120	0.872	0.671	0.615	0.846	0.836	0.831
	Quad8	0.884	0.881	0.881	0.869	0.866	0.866	0.860	0.859	0.857
	Quad9	1.044	1.040	1.040	1.041	1.032	1.032	1.001	1.012	1.056
	TRI6	1.417	0.854	0.854	1.249	0.609	0.208	1.088	1.260	1.234

Solution analytique :  $W_c = 0.01142 \frac{pa^2}{D}$

Solution numérique :  $W_t$ .

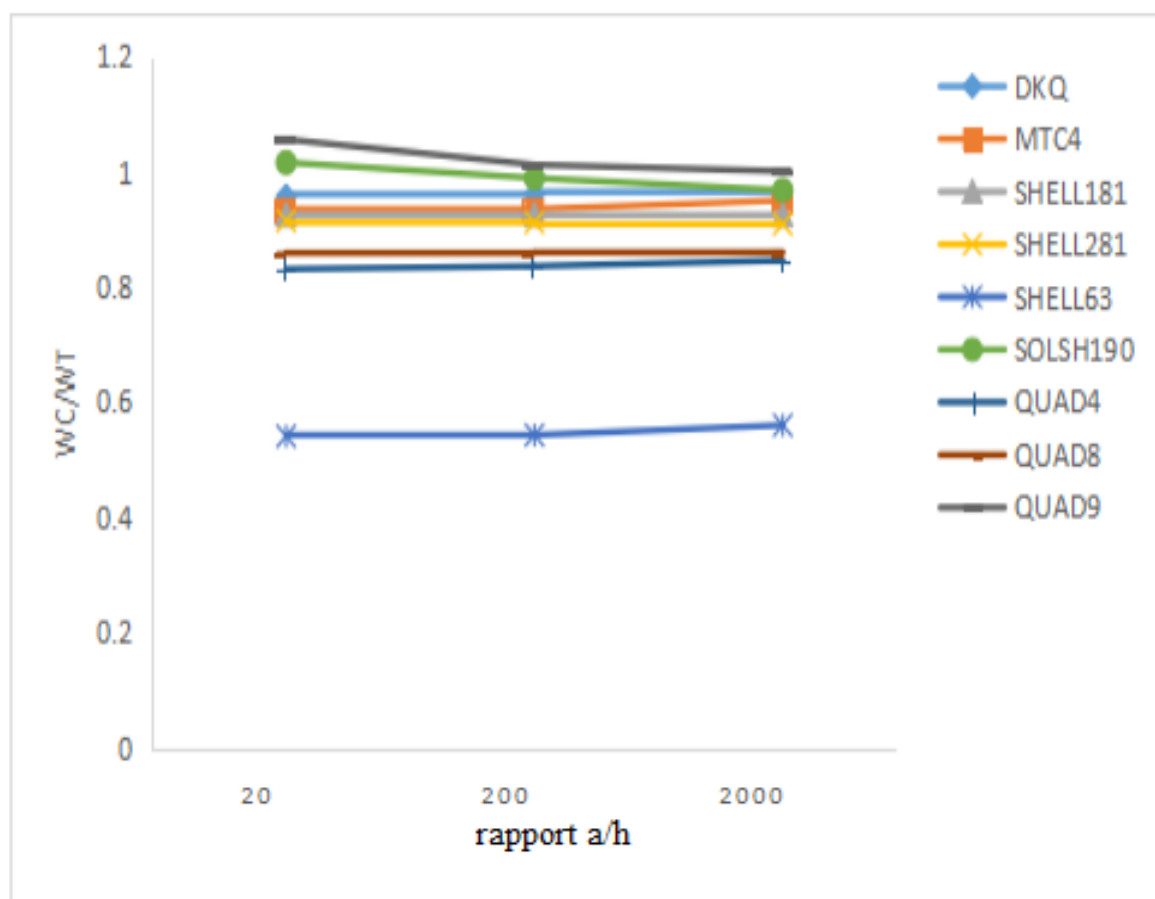
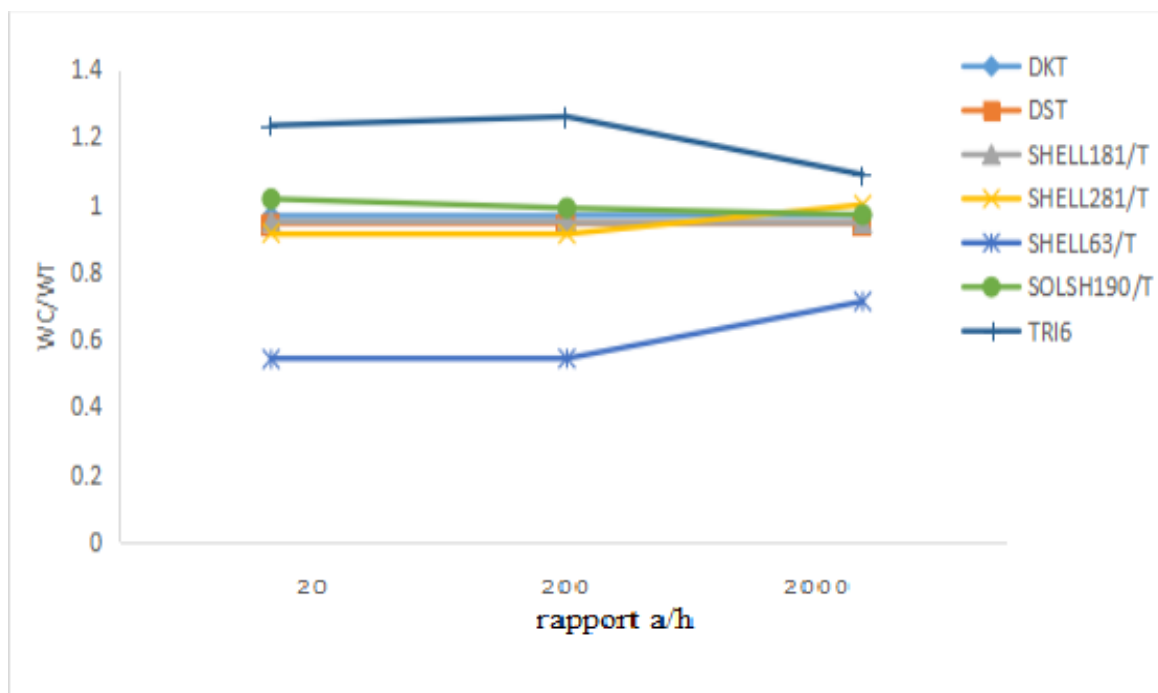


Fig III.2: Graphe donnant les résultats de la plaque carrée appuyée simplement avec charge concentrée au milieu pour le maillage (8X8)

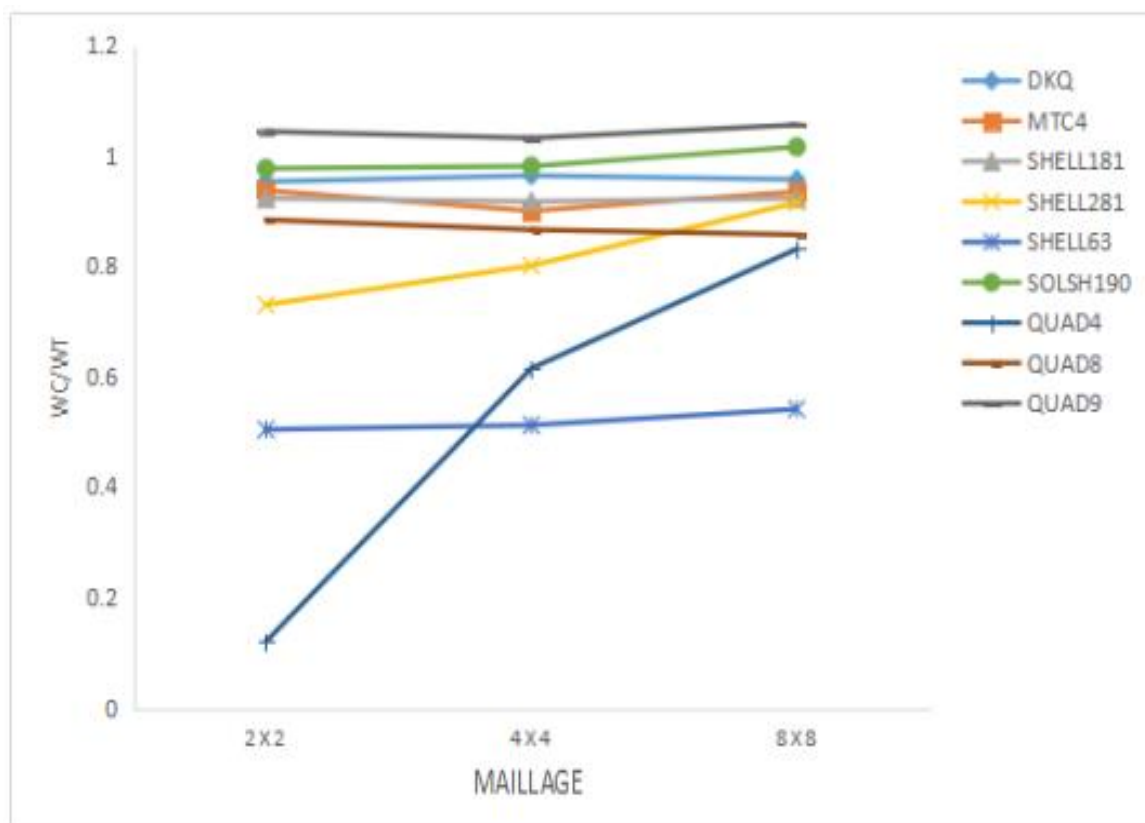
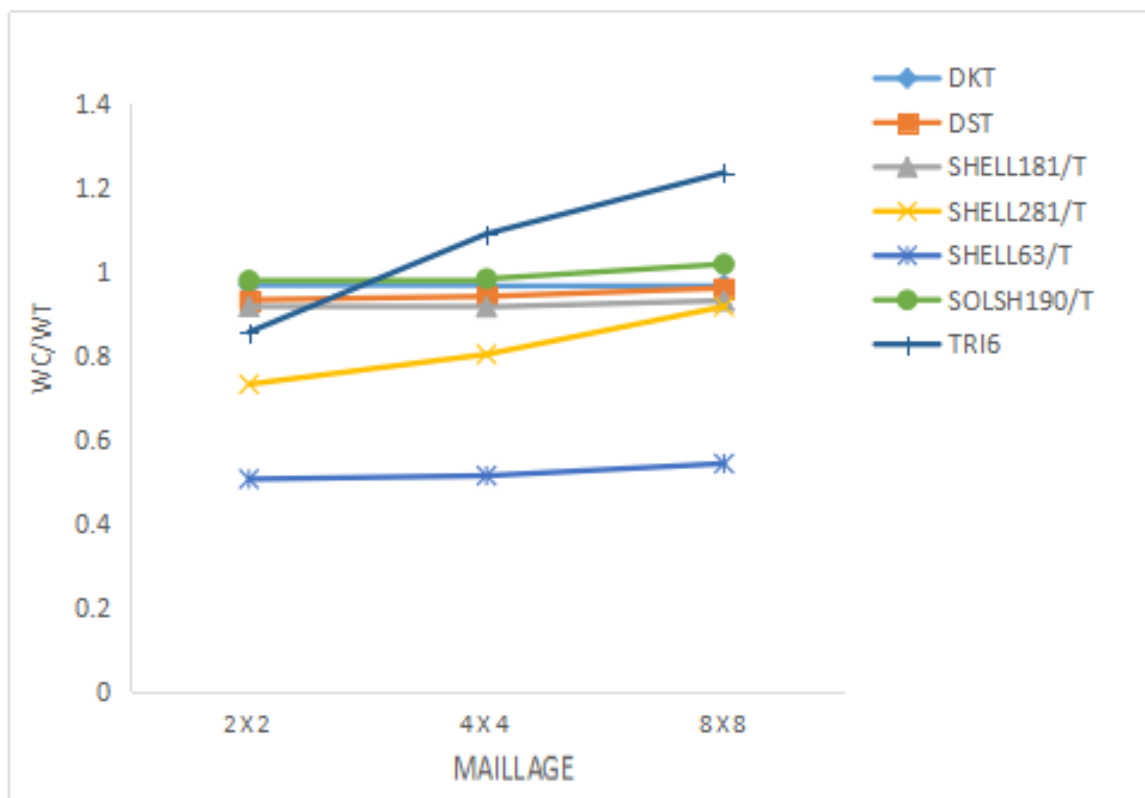


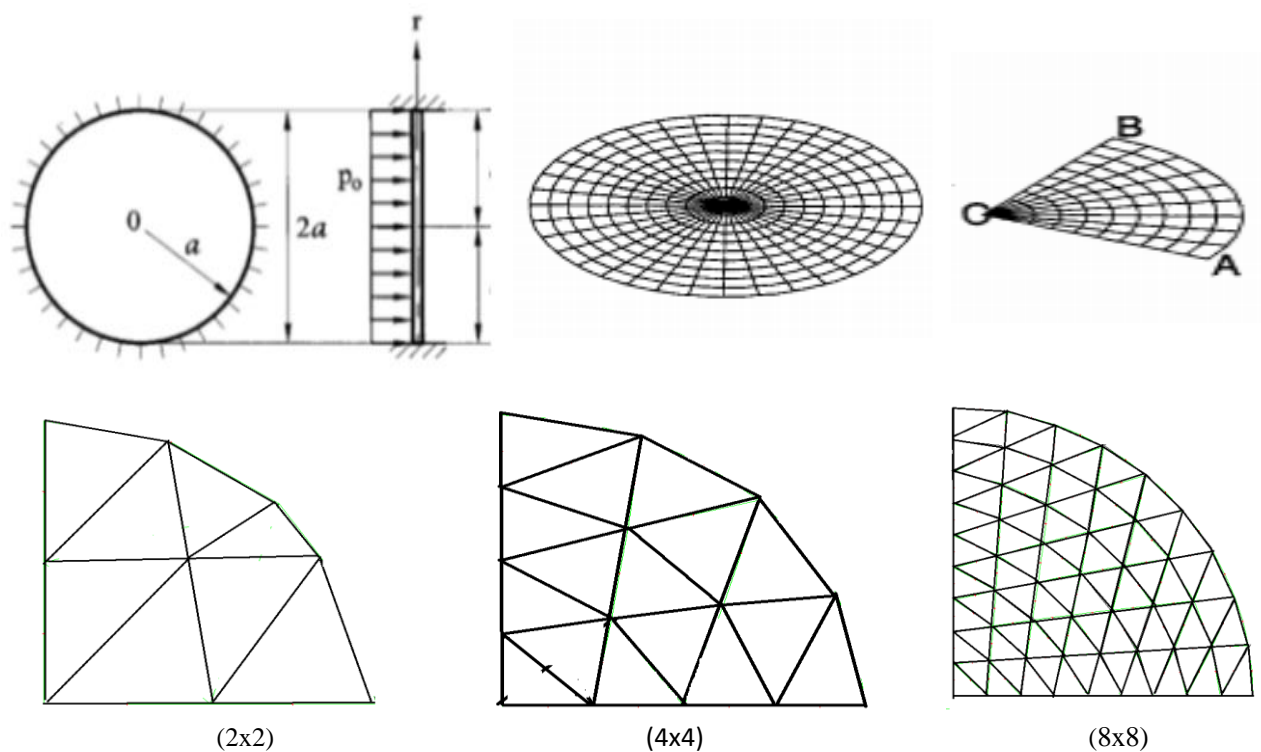
Fig III.3: Graphe donnant les résultats de la plaque carrée appuyée simplement avec charge concentrée au milieu pour le rapport  $a/h = 20$

### b) Plaque circulaire encastrée chargée uniformément

Le problème : soit une plaque circulaire (mince et épaisse) encastrée et soumise à une charge uniforme  $P = 1000N/m^2$  L'acier utilisé est de FeE24 densité  $7800 kg/m^3$ ;

L'acier utilisé est de FeE24 ;  $E = 200000 MPa$ ;  $\nu = 0.3$   $r = 2m$ ,

$h = 1mm, 10mm, 100mm$ .



**Fig III.4: Différents types de maillages pour la plaque circulaire encastrée avec charge uniformément**

Tab III.2: Résultats  $W_c/W_t$  pour la plaque circulaire encastrée chargée uniformément

	maillage	2x2			4x4			8x8		
	a/h	2000	200	20	2000	200	20	2000	200	20
RDM6	DKQ	0.957	0.954	0.951	0.962	0.959	0.954	0.963	0.960	0.954
	MTC4	0.937	0.933	0.901	0.909	0.902	0.898	0.944	0.930	0.924
	DKT	0.964	0.965	0.966	0.965	0.963	0.964	0.966	0.967	0.967
	DST	0.929	0.930	0.931	0.930	0.937	0.939	0.950	0.954	0.959
ANSYS	Shell181	0.900	0.912	0.913	0.909	0.910	0.913	0.927	0.926	0.924
	Shell281	0.881	0.806	0.730	0.886	0.804	0.801	0.912	0.913	0.916
	Shell63	0.511	0.504	0.504	0.520	0.511	0.512	0.561	0.544	0.542
	Solsh190	0.933	0.970	0.977	0.936	0.980	0.981	0.969	0.989	1.016
	Shell181/t	0.910	0.917	0.915	0.919	0.913	0.914	0.935	0.929	0.929
	Shell281/t	0.891	0.80	0.730	0.896	0.804	0.801	0.999	0.912	0.915
	Shell63/t	0.540	0.504	0.504	0.550	0.511	0.512	0.712	0.543	0.541
	Solsh190/t	0.953	0.970	0.977	0.966	0.980	0.981	0.969	0.989	1.016
LISA	Quad4	0.594	0.207	0.120	0.872	0.671	0.615	0.846	0.836	0.831
	Quad8	0.884	0.881	0.881	0.869	0.866	0.866	0.860	0.859	0.857
	Quad9	1.039	1.037	1.037	1.037	1.032	1.032	1.004	1.008	1.012
	TRI6	1.407	0.844	0.44	1.243	0.601	0.200	1.084	1.250	1.224

Solution analytique :  $W_c = \frac{pa^4}{64D}$

Solution numérique :  $W_t$ .

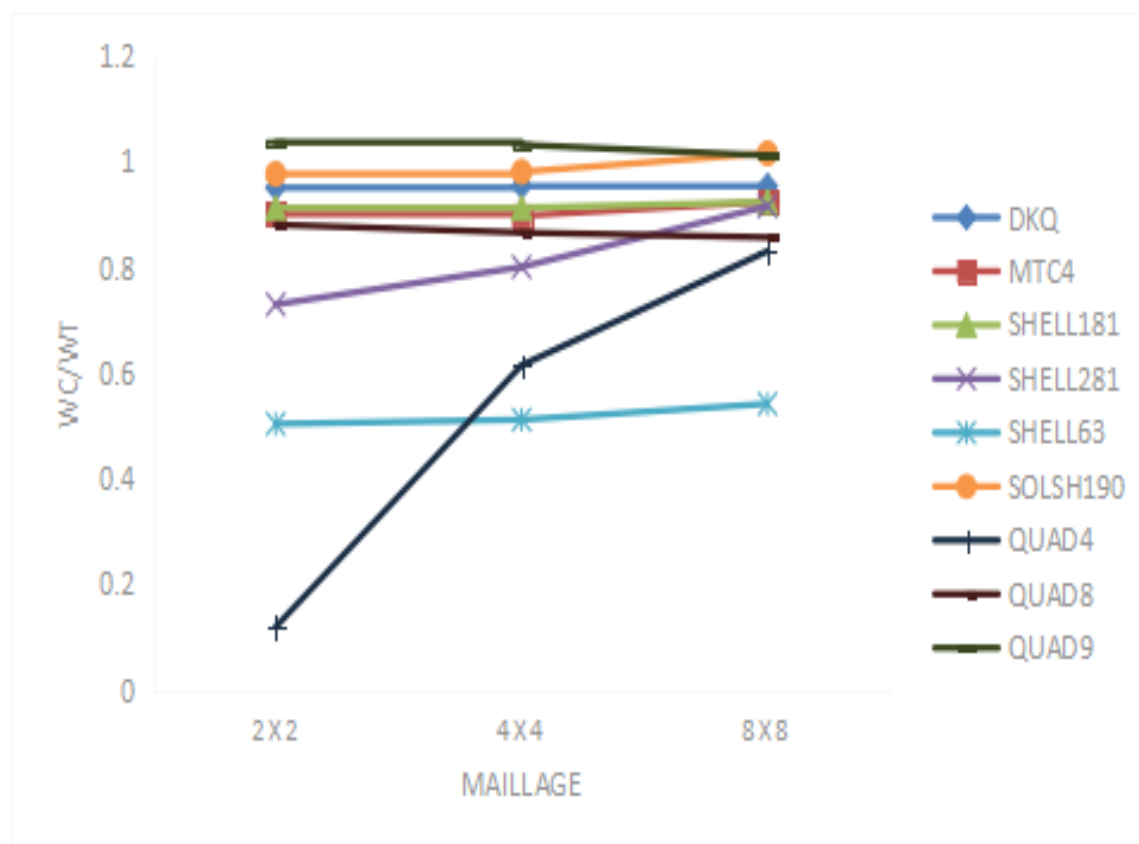
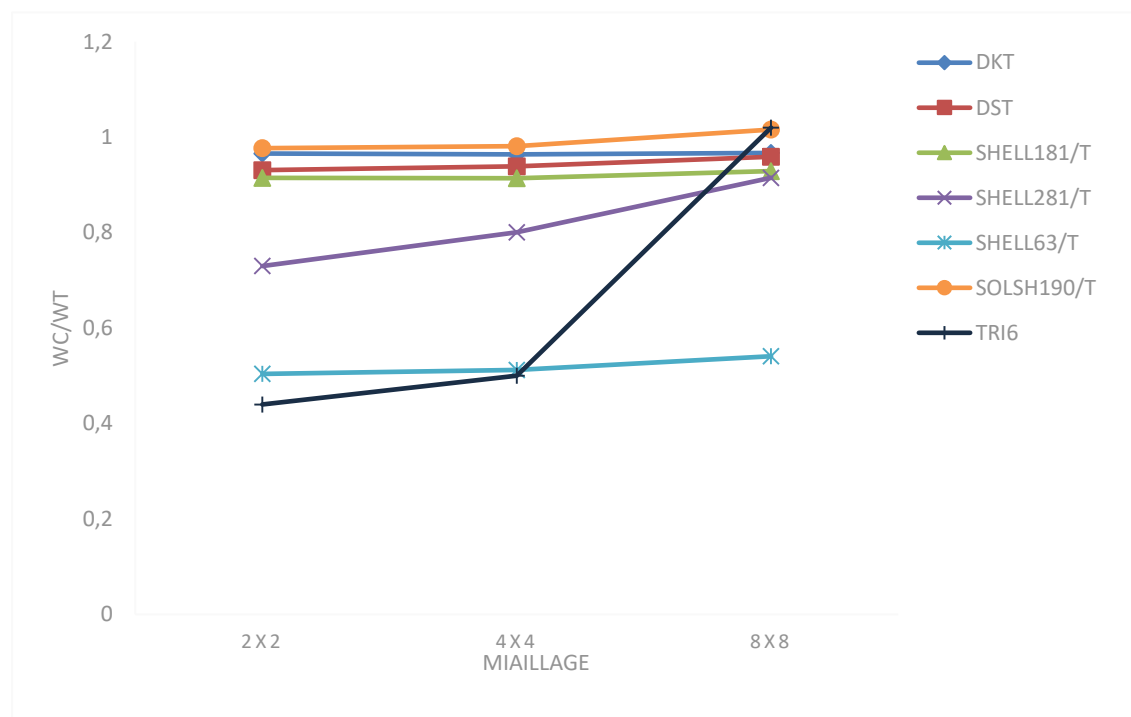


Fig III.5: Graphe donnant les résultats de la plaque circulaire encastrement avec charge uniforme au milieu pour le rapport  $a/h = 20$

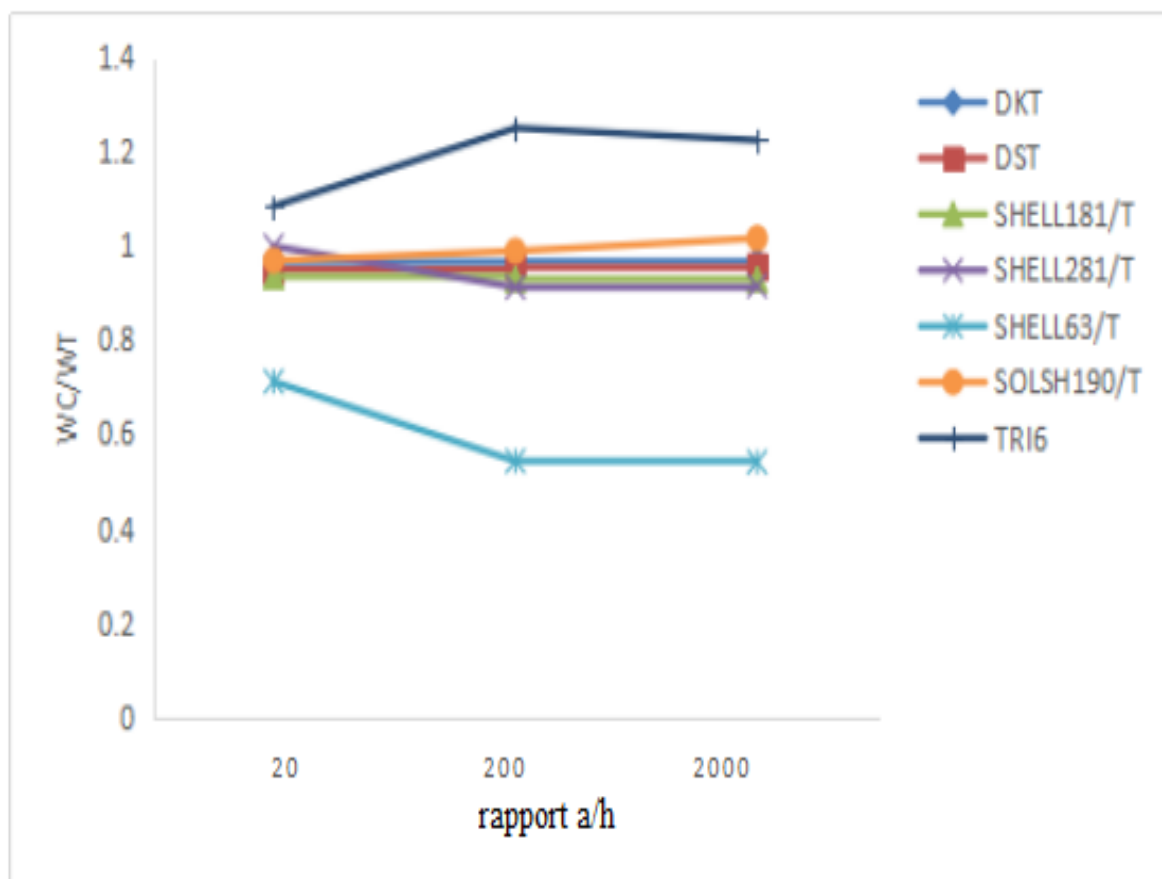
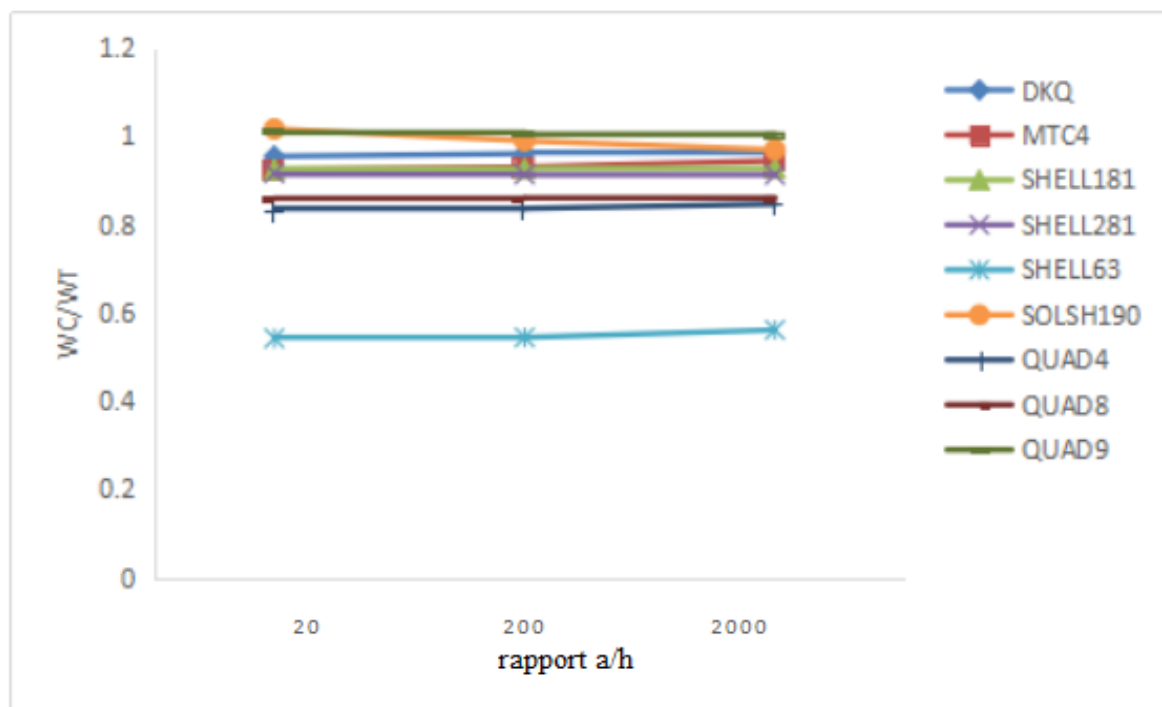
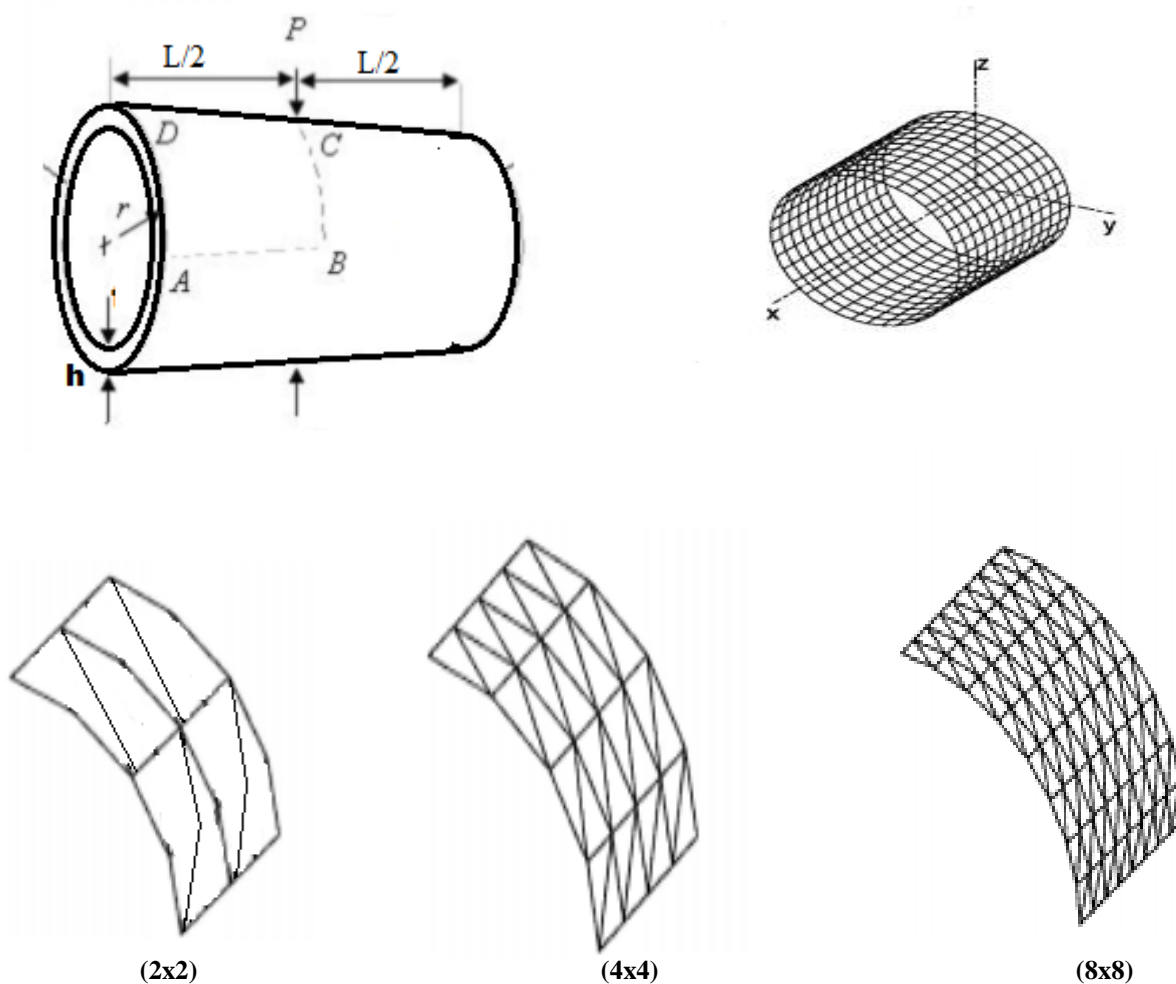


Fig III.6: Graphe donnant les résultats de la plaque circulaire encastrement avec charge uniforme au milieu pour le maillage (8X8)

**c) Cylindre pincé à bords libres**

Problème : Le cylindre pincé avec des diaphragmes rigides aux extrémités et soumis à deux charges unitaires  $P = 1N$  , verticales diamétralement opposées, les résultats concernent le déplacement vertical  $w$  de ce point en considèrent différents maillage et plusieurs rapports  $r/h$ . Les données pour le test de cylindre pincé étudié sont comme suit:

$E=30000 \text{ Mpa}$ ;  $\nu = 0.3$  ;  $L/2=3$ ;  $L=6$ ;  $r =3m$ ;  $h=1.5mm, 15mm, 150mm,$



**Fig III.7: Différents types de maillages pour le cylindre pincé à bords libres avec deux charges unitaires**

Tab III.3: Résultats  $W_c/W_t$  du cylindre pincé à bords libres avec deux charges unitaires

	maillage	2x2			4x4			8x8		
	r/h	2000	200	20	2000	200	20	2000	200	20
ANSYS	Shell181	0.920	0.932	0.933	0.915	0.919	0.921	0.945	0.945	0.943
	Shell281	0.872	0.805	0.723	0.875	0.802	0.794	0.910	0.915	0.918
	Shell63	0.501	0.501	0.501	0.530	0.521	0.522	0.570	0.553	0.551
	Solsh190	0.943	0.980	0.987	0.946	0.989	0.981	0.960	0.984	1.002
	Shell181/t	0.910	0.917	0.915	0.919	0.913	0.914	0.935	0.929	0.929
	Shell281/t	0.891	0.80	0.730	0.896	0.804	0.801	0.999	0.912	0.915
	Shell63/t	0.540	0.504	0.504	0.550	0.511	0.512	0.712	0.543	0.541
	Solsh190/t	0.953	0.970	0.977	0.966	0.980	0.981	0.969	0.989	1.016
LISA	Quad4	2.273	3.223	6.612	2.200	3.124	6.612	1.852	3.223	6.612
	Quad8	2.327	2.883	5.689	2.311	2.684	5.689	2.037	2.883	5.687
	Quad9	2.54	3.017	2.357	2.447	3.417	2.357	2.377	3.015	3.354
	TRI6	1.823	3.45	3.25	1.803	3.745	3.25	2.15	3.44	3.240

$$\text{Solution analytique : } W_c = \left\{ \begin{array}{l} (a/h) = 2000 \rightarrow W_c = 164.24 \\ (a/h) = 200 \rightarrow W_c = 11.39 \\ (a/h) = 20 \rightarrow W_c = 0.243 \end{array} \right\}$$

Solution numérique :  $W_t$ .

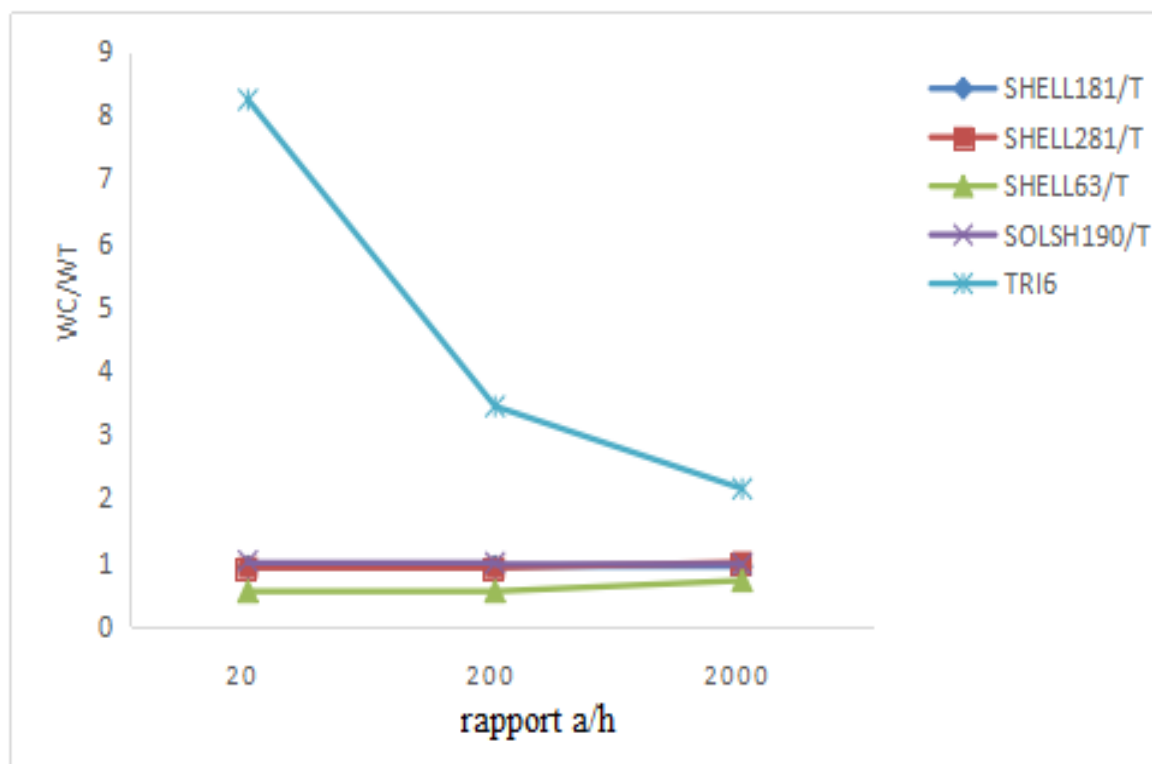
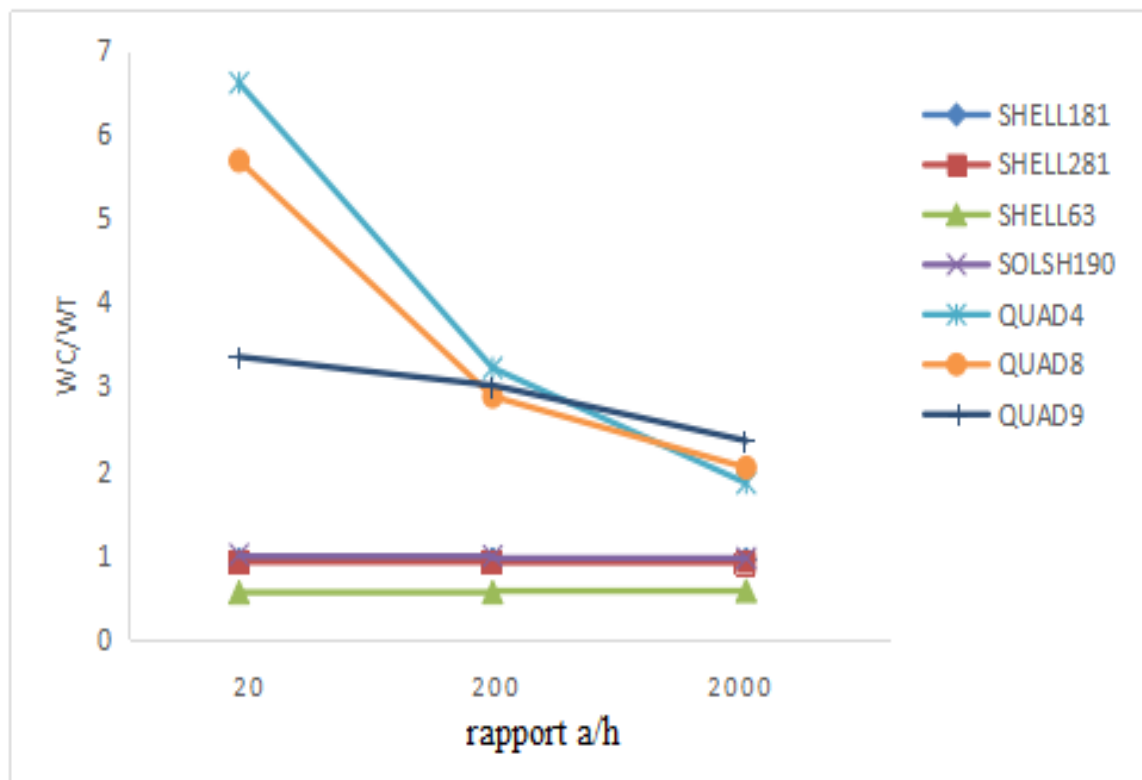


Fig II.8: Graphe donnant les résultats du cylindre pincé à bords libre avec deux charges unitaires pour le maillage (8X8)

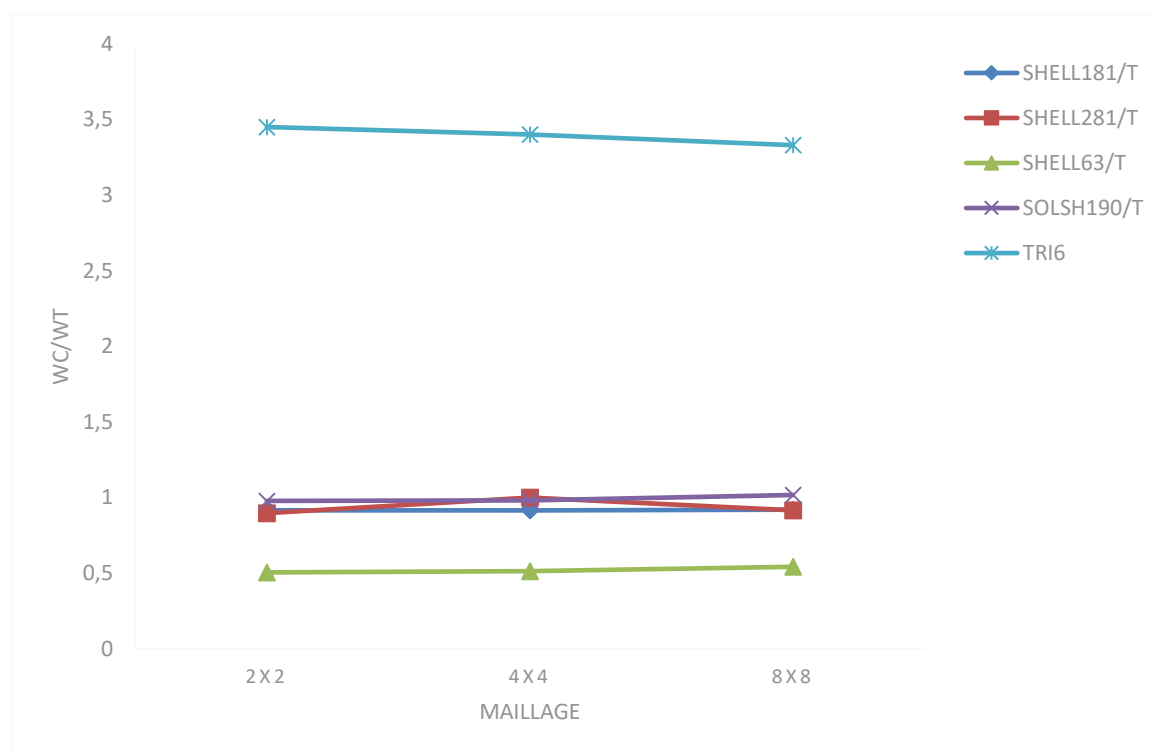
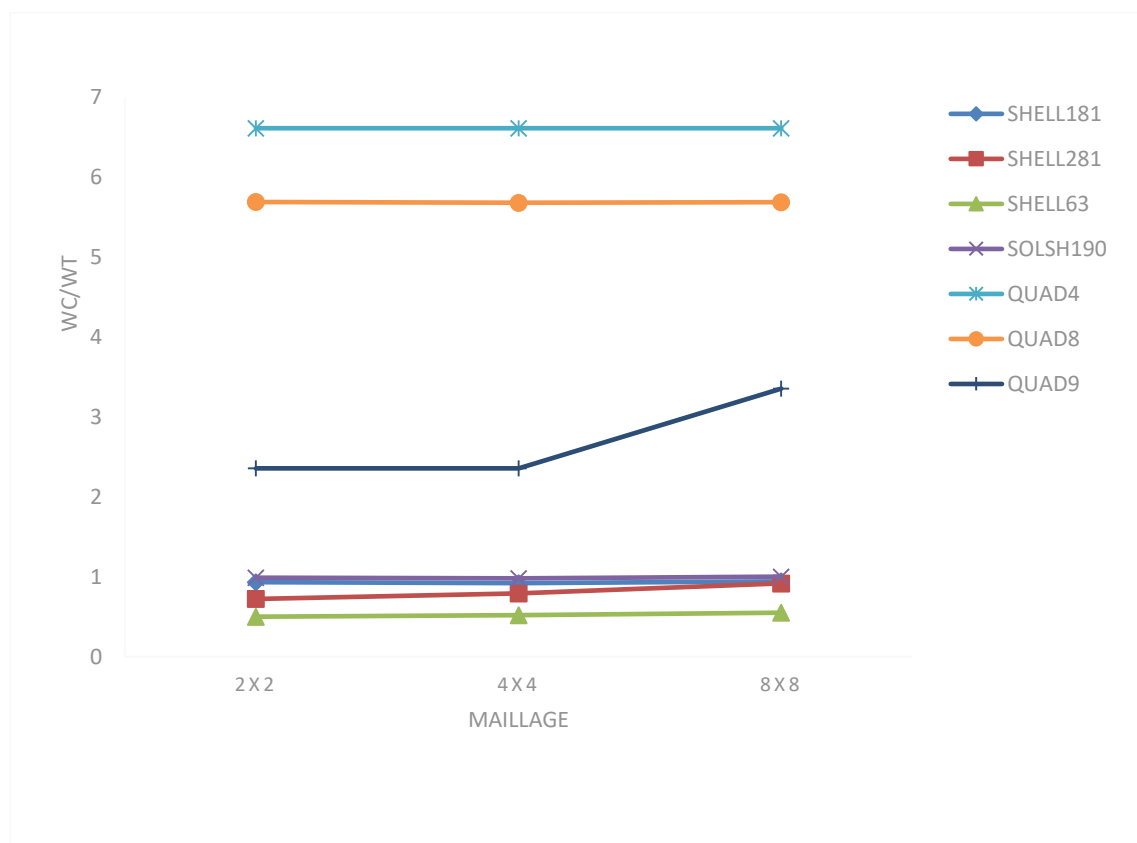


Fig III.9: Graphe donnant les résultats du cylindre pincé à bords libre avec deux charges unitaires le rapport  $a/h = 20$

### III.3 Interprétation

Nous comparons les résultats numériques obtenus dans les plaques et les coques, notre étude sera limitée à la modélisation d'un quart de la plaque pour des raisons de symétrie, et étudions le comportement de chaque élément en terme de flèche maximal .

Les résultats prouvent que les éléments (DKQ, DKT, Shell181, Shell281 Solsh190, Shell181/t, Shell281/t, Solsh190/t, Quad8, Quad9) donnent de très bons résultats mêmes pour un faible nombre d'éléments. DKT, Solsh190 et Shell181 sont les plus efficaces.

Les éléments (DKT, DKQ, Solsh190, Solsh190/t, Quad8, Quad9) la meilleur résultat pour plaque mince et épaisse. Ce qui peut favoriser l'obtention de bons résultats même pour des nombres des éléments réduits. On remarque que pour les éléments triangulaires (Shell181/t, Shell281/t, Solsh190/t) leurs résultats sont identiques à (Shell181, Shell281, Solsh190) et (DKT, DST), ainsi (DKQ, MTC4) dans tous les cas.

Les éléments (Shell63, Shell63/t, Quad4, TRI6) résultats faibles pour une plaque mince et épaisse.

On remarque que la différence entre la solution analytique  $W_i$  et celle donnée par les éléments (Shell63, Shell63/t, Quad4, TRI6) est très sensible pour un nombre d'éléments réduit.

Les éléments (DKT, DKQ, Solsh190, Solsh190/t, Shell181, Shell181/t): résultats acceptables quel que soit le rapport  $a/h$ .

Les résultats obtenus des cylindre pincé à bords libres et soumis à deux charges unitaires tableau III.3 et les figure III.8, III.9 sont résumés ainsi :

Les éléments (Shell181, Shell281 Solsh190, Shell181/t, Shell281/t, Solsh190/t, Quad8, Quad9) donnent de très bons résultats mêmes pour un faible nombre d'éléments, Solsh190 et Shell181 sont les plus efficaces.

On remarque que l'élément triangle (Shell181/t, Shell281/t,, Solsh190/t) leurs résultats sont identiques à (Shell181, Shell281, Solsh190).

### **III.4 Conclusion**

Dans le cadre de ce chapitre, nous avons fait une étude comparative entre les plaques et coques par la méthode élément finis.

Les simulations effectuées par l'utilisation des codes ANSYS, LISA et RDM6 nous ont permis de conclure que les résultats obtenus sous ANSYS sont meilleurs étant donné la qualité d'éléments qui y sont implantés.

# **Conclusion Générale**

## **CONCLUSION GENERALE**

Les structures en plaques et en coques jouent un rôle important dans le domaine du Génie Civil en raison de leurs qualités particulières. Leur étude se base sur deux théories principales, à savoir, théorie des plaques et coques minces et la théorie des plaques et coques épaisses qui sont distinguées par la prise en compte ou non du cisaillement transversal (CT).

Étant donné que le calcul des structures par les méthodes analytiques n'est pas toujours aisé, on a recours, souvent aux méthodes numériques pour surmonter cette difficulté. La méthode des éléments finis en fait partie de ces méthodes et est la plus utilisée. Le problème réside, donc, dans la conception de l'élément fini plaque ou coque qui peut procurer des résultats admissibles.

L'objectif de ce mémoire est d'explorer la bibliothèque d'éléments plaque et coque disponible dans certains codes de calcul et examiner leur performance dans la modélisation du comportement des structures en plaques et en coques. Ces codes sont ANSYS, RDM6 et LISA.

À l'issue de ce travail, il est nécessaire de souligner que le choix du type d'élément dans tout effort de calcul est très crucial à cause des problèmes numériques qui peuvent surgir à l'instar du phénomène de verrouillage.

Certains éléments comme DKQ, DKT, DST et MTC4 donnent de bons résultats même avec un nombre réduit d'éléments tandis que d'autres tels que shell63 sous ANSYS ou quad4 sont très pauvres dans ce type de modélisation même avec un maillage raffiné.

### *Conclusion générale*

---

Nous estimons, enfin, que les tableaux dressés, mais qui doivent être, bien entendu, complétés, servent de base de travail pour les analystes par éléments finis dans tout travail de calcul ultérieur.

# **BIBLIOGRAPHIES**

## **BIBLIOGRAPHIES**

[1] M.M.Hrabok et T.M. Hrudey “A review and catalogue of plate bending elements ,” *Comp. Struc*, Vol.19 , pp.479-495, 1984.

[2] E.Ventesh et T.Kranthammer, “Thin plates and shells;” New York: Springer-Verlag, 2001.

[3] M. E. Guellil, M. T. Abbas, “ Modélisation du comportement des plaques reposant sur sol élastique par la méthode des éléments finis,” Article, 2010.

[4] S. Derbane, “Modélisation des plaque par la méthode des élément finis,” Mag. mémoire, Dept. Génie. Civ., Khieder Univ., Algérie, 2012.

[5] N. Lahbaré, “ Etude de la stabilité des plaques et coques métalliques par la méthode des élément finis,” Thèse, Dept. Génie. Civ., Batna Univ., Algérie, 2007.

[6] D. André, “ Flambage de coques cylindriques minces sous chargements combinés: pression interne, compression, flexion et cisaillement ,” Thesis, Dept. Génie. Civ., Lyon, 2011.

[7] L.Sedira, “ Contribution à la modélisation de composites 2D/3D à l'aide d'éléments finis spéciaux ,” Thèse, Dept. Génie. Méc, Biskra Univ, Algérie, 2013.

[8] J. Lasry, “ Calculs de plaques fissurées en flexion avec la méthode des éléments finis étendue (XFEM) ,” Thèse, Dept. Mat et Info, France, 2009.

[9] O. Herve, “ Méthode des éléments finis ,” Conférence, Tunisie, 2010.

[10] J. Batoz, “Modélisation des structures par éléments finis ,” Volume 2, Poutres et Plaques, 1995.

[11] P. Fichou, “ La méthode des éléments finis ,”Article, (2000-2001).

[12] L.Rockery, W. Griffiths « Introduction à la Méthode des éléments Finis,” Eyrolles, 1979.

# ANNEXE

## a) Rdm6

### Modélisation et calcul :

Le problème étant symétrique par rapport aux plans  $x = 0$  et  $y = 0$ , il suffit de modéliser le quart OAB de la pièce.

Lancer le module

Fichier

Bibliothèque

→ Structure 40 avec :  $x_0 = y_0 = 0$ ,  $r = 2000$  mm (sans sous-domaines)

Mailler (Delaunay)

→ Nombre d'éléments  $\approx (2 \times 2)$ ;  $(4 \times 4)$ ;  $(8 \times 8)$

Discrétiser la structure triangle à 3 nœuds ou rectangles à 4 nœuds

Fichier

→ Flexion des plaques

- Matériau Module de Young = 200000 MPa;
- Coefficient de Poisson = 0.3;
- Densité = 7800 kg/m<sup>3</sup>
- l'épaisseur est égale à 1mm; 10mm; 100mm;
- Liaisons symetrie par rapport aux plans  $x = 0$  et  $y = 0$  ;

Cas de charges ;

Ajouter un cas de charges;

La plaque porte sur toute sa surface la charge  $P = 1000 \text{ N/m}^2$  MPa.

Calculer

Paramétrés de calcul

- Modale de kirchheff : DKT, DKQ
- Modale de Reissner /Mindlin : DKT, DKQ

## b) ANSYS

- Activer Ansys et définir le nom du travail et le type d'analyse structurelle
- établir le type d'élément et les propriétés du matériau

préprocesseur → type d'élément → ajouter

Ajouter

SHELL181 ou SHELL281 ou SHELL63 ou SOLSH190

D'accord

Fermer

Constantes réelles

Ajouter

Entrez 1 pour TK (1) 1mm ou 10mm ou 100mm

D'accord

Fermer

Accessoire matériel → modèles de matériaux de construction

Linéaire

Elastique

Isotrope

EX = 20000

PRXY = 0,3

D'accord

Matériel → Sortie

- créer un rectangle

La modélisation

Créer

Zones

Rectangle

Bydimensions

Entrez x1 2000mm

Ok

- Région de maillage

Maillage → taille cntrls → taille manuelle → global → taille

Entrez (2x2) ou (4x4) ou (8x8)

D'accord → maillage → engrener → zones → gratuit → choisir tout

- Appliquer la condition aux limites

Solution

Définir les charges

Appliquer

Construction

Déplacement

Les lignes

Appliquer

uz, uy, ux = 0

D'accord

Définir les charges → appliquer → structurel → pression → sur les zones

→ Choisir tout

Entrer la valeur=1000

D'accord

- Résoudre pour les déplacements et les contraintes

Résoudre le courant Is

D'accord

Fermer

- Afficher les résultats: liste le déplacement des nœuds sélectionnés après chaque pas de temps

Plgeneral → post-proc → liste des résultats → solution **nolal** → solution **ddl** → z-composant de déplacement

### c) LISA

Activer LISA et définir le nom du travail et le type d'analyse static 3D

Ajouter

Single node= (0;0;0),(2;0;0),(2;2;0),(0;2;0)

Ajouter

Ajouter un élément QUAD4 ou QUAD8 ou QUAD9 ou TRI6

Plaques → l'épaisseur est égale à 1mm; 10mm; 100mm;

- Matériau Module de Young = 200000 MPa;
- Coefficient de Poisson = 0.3;
- Densité = 7800 kg/m<sup>3</sup>

Fermer

Prêts et contraintes

- Liaisons symetrie par rapport aux plans  $x = 0$  et  $y = 0$  ;
- Nouveau correctif  $u_x=0, u_y=0, u_z=0$
- Nouvelle pression  $p = 1000 \text{ N/m}^2$

Fermer

Résoudre

Solution

Déplacement-z