



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Amar Thelidji- Laghouat

FACULTE: DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT : D'ELECTRONIQUE

MEMOIRE DE MASTER

Réalisé par : Haouachi abdelnour

Ameur Ayoub

DOMAINE : Technologie

FILIERE : automatique

OPTION : automatique et informatique industriel

Thème

Introduction Aux Systèmes dynamiques Hybrides (Systèmes PWA)

Jury de soutenance :

Nom et Prénom	Grade	Qualité
kamri djekidel	MCA	Encadreur
chouireb fatima	Prof	Président
benmiloud mohammed	MAB	Examineur

Promotion : 2020/2021

شكر وعر فان

أبدأ باسم الله وحمده والثناء عليه، وشكره قبل كل شيء. فهو سبحانه أهل الثناء والحمد،
وبه الاستعانة وعليه التكلان، ولا حول ولا قوة لنا إلا به، ﴿وما توفيقي إلا بالله عليه توكلت﴾
ثم الصلاة والسلام على رسول الله الهادي الأمين، ذي الخلق العظيم، وعلى آله وصحبه
ومن سار على جه إلى يوم الدين

كما وبتقدم بالشكر الجزيل إلى مؤطرننا وأستاذنا الدكتور السيد قمري جغيدل المشرف على عملنا هذا.
نشكره على تأطيره لنا، وعلى صبره معنا خاصة في ظل ظروفنا المتذبذبة طوال مدة الاشراف. حيث لم
يتوان أبدا في تشجيعنا، ولم يدخر جهدا في إعانتنا وتزويدنا بالمراجع اللازمة
ولا أنسى أن نشكر أولياءنا الأعزاء اللذين لم يفتروا في تشجيعهم وإعانتهم لنا وكذلك لكل أساتذة

قسم الإلكترونيك

جزاهم الله عنا كل خير

وأخيرا نشكر كل من قدم لنا يد العون من قريب أو من بعيد.



Dédicace

Je dédie ce travail à :

Mes chers parents, qui m'ont toujours encouragé et soutenu dans mes études jusqu'à atteindre ce stade de formation et Toute ma famille et mes amis ,mes camarades et Tous les enseignants qui nous ont dirigés vers la porte de la réussite.

Haouachi abdelnour



Dédicace

Je

dédie ce modeste travail :

- Aux êtres les plus chers à mon cœur, ma mère et mon père, qui m'ont beaucoup soutenu durant mon cursus d'étude

- A mon en cadreur

Monsieur kamri djekidel pour son amabilité et sa disponibilité

- A tout ma famille

- A tous mes meilleurs amis

- Enfin à tous ceux et celles qui m'ont encouragé et soutenu.

Ameur Ayoub
Laghout, Juillet 2021

Table des matières

Table de ligure	vi
Notations	viii
Introduction générale	1

Chapitre 01 : Présentation des Systèmes Dynamiques Hybrides

1.1. Introduction	4
1.2. Notion de système dynamique :	4
1.2.1. Stabilité des systèmes dynamiques :	7
1.2.2. Stabilité pratique :	11
1.2.3. Inclusion différentielle :	12
1.3. Systèmes à Évènements Discrets (SED) :	15
1.4. Systèmes hybrides :	15
1.4.1. Séquence d'exécution dans un système hybride :	20
1.4.2. Bon conditionnement dans un système hybride :	22
1.4.3. Stabilité d'un équilibre dans un système hybride :	26
1.5. Conclusion :	26

Chapitre 02 : Systèmes Dynamiques À Commutation (SDC)

2.1 Étude des Systèmes à champs vecteurs discontinus.....	28
2.2 Systèmes à commutations	31
2.2.1 Systèmes commutés	33
2.2.2 Définition formelle des systèmes à commutation	34
2.2.3 Classification des signaux de commutation	35
2.2.4 Exemples de modélisations des SDC.....	36
2.3 Analyse de stabilité des SDC	38
2.3.1 Extension des notions de stabilité aux SDC.....	42

2.3.2 Stabilité des systèmes à commutation par Lyapunov	51
2.4 Systèmes commutés linéaires affines par morceaux (PWA) :	56
2.4.1 Points d'équilibre :	58
2.4.2 Mode glissant :	58
2.4.3 Exemple des système PWA:	58
2.4.4 Stabilisation pratique :	61

Chapitre 03 : Commande des Systèmes PWA à base d'Observateurs "Observateurs Hybrides"

3.1. Introduction	74
3.2. Observabilité des systèmes linéaires	74
3.2.1 Principe de fonctionnement des observateurs linéaires	75
3.2.2 Modèle mathématique de l'observateur linéaire	76
3.3. Observabilité des systèmes non linéaires	79
3.4. Observateurs et observabilité des systèmes hybrides :	80
3.4.1 Observateur de l'état discret :	82
3.4.2 Observateur de l'état continu :	82
3.4.3 Commande à base d'observateur des systèmes affines par morceaux (PWA).....	83
Conclusion générale	92
Bibliographiques	93

LISTE DES FIGURES

Fig. 1.1 : Exemple théorique d'un système hybride.....	17
Fig. 1.2 : Automate hybride du fonctionnement de la boîte de vitesse automatique.....	19
Fig. 1.3 : Circuit électrique simplifié du Buck-Boost.....	19
Fig. 1.4 : Schématisation du fonctionnement hybride du Buck-Boost.....	19
Fig. 1.5 : Schématisation du temps hybride.....	20
Fig. 1.6 : Exemple d'exécution dans un système hybride.....	22
Fig. 1.7 : Exemple de système hybride avec des commutations infiniment rapides.....	24
Fig. 1.8 : Schématisation hybride de la balle bondissante.....	25
Fig. 1.9 : Simulation de la schématisation hybride de la balle bondissante.....	25
Fig. 2.1 : Solution au sens de caratheodory (à gauche) et au sens de filipove (à droite).....	28
Fig. 2.2 : Schématisation hybride de système avec une seule discontinuité.....	31
Fig. 2.3 : Hystérésis fonction.....	33
Fig. 2.4 : Signal de commutation dépendant du temps.....	35
Fig. 2.5 : Signal de commutation dépendant de l'état.....	36
Fig. 2.6 : Un modèle d'automates hybrides pour un système dynamique avec hystérésis.....	37
Fig. 2.7 : Les deux systèmes ne sont pas stables.....	39
Fig. 2.8 : Système hybride stable issu de deux sous-systèmes instables.....	40
Fig. 2.9 : Les deux systèmes sont stables.....	40
Fig. 2.10 : Système hybride instable issu de deux sous-systèmes stables.....	41
Fig. 2.11 : les deux systèmes soient stables.....	41
Fig. 2.12 : Système hybride globale instable issu de deux sous-systèmes soient stables.....	42
Fig. 2.13 : stabilité uniforme à l'origine d'un SDC.....	44
Fig. 2.14 : Stabilité conditionnelle à l'origine d'un SDC.....	44
Fig. 2.15 : Attractivité conditionnelle de l'origine d'un SDC.....	45
Fig. 2.16 : Point de fonctionnement, points d'équilibres et cycle limite d'un SDC.....	49
Fig. 2.17 : Fonctions "Lyapunov-Like" d'un SDC formé de deux modes q_1 et q_2	52
Fig.2.18 : Circuit simplifié du Buck-Boost.....	59
Fig.2.19 : la surface de commutation.....	60

Fig.2.20 : les deux surfaces de commutation en poitillé.....	60
Fig. 2.21 : Schématisation de la stabilisabilité pratique.....	65
Fig. 2.22 : Construction simple en dimension deux (approche 1).....	70
Fig. 3.1 : structure d'un observateur linéaire connecté à un système linéaire.....	75
Fig. 3.2 : La convergence des erreurs e_i	78
Fig. 3.3 : structure d'un observateur hybride.....	81
Fig. 3.4 : Topologies usuelles de convertisseurs à commutations, Boost en a), Buck-Boost en b), Buck en c) et le convertisseur multicellulaire en d).....	85
Fig. 3.5 : Topologie du Convertisseur multicellulaire.....	85
Fig. 3.6 : Circuit Simplifié électrique du convertisseur à deux cellules.....	87
Fig. 3.7 : Courant d'inductance et son estimé en (a), tensions VC et son estimé en (b) pour des conditions initiales nulles.....	88
Fig. 3.8 : Trajectoire de la sortie du convertisseur bicellulaire sans l'utilisation d'observateur (a), stabilisation à base du multi-estimateur lorsque les deux systèmes partent de la même condition initiale nulle en (b) et en (c) lorsque le convertisseur part de zéro alors que l'observateur part du point désiré $(60\ 750)^t$	89
Fig. 3.9 : Circuit Simplifié électrique du convertisseur the multicellulaire.....	90
Fig. 3.10 : Sorties du convertisseur multicellulaire commandé à base du multi-estimateur pour les mêmes conditions initiales nulles (test en boucle fermée).....	90
Fig. 3.11 : Trajectoire de la sortie du convertisseur multicellulaire commandé à base du multi-estimateur lorsque les deux systèmes partent de conditions initiales différentes.....	91

Notations

ENSEMBLES

- \mathfrak{R} : Ensemble des nombres réels.
- \mathfrak{R}^+ : Ensemble des nombres réels positifs.
- \mathfrak{R}^{+*} : Ensemble des nombres réels strictement positifs.
- R^n : espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels.
- \mathbb{N} : ensemble des nombres entiers naturels.
- $t \in R$: variable temporelle.
- $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$: dérivée de la variable x par rapport au temps.
- x^T : transposé du vecteur x .
- $\| \cdot \|$: norme euclidienne sur R^n .
- $u(t)$: la commande.
- $x(t)$: état du système.
- $f(t)$: champs de vecteurs.
- Q : ensemble des états discrets (ou modes).
- σ : la loi de commutation.
- $A_{\sigma(t)}$: matrice dynamique du système.
- $\phi(t, x_0, q_0)$: trajectoire généralisée de SDC.
- $\epsilon\mathfrak{B}^n$: boule ouverte centrée à l'origine de rayon ϵ .
- x_e : point d'équilibre.
- x_d : point fixe désiré.
- \mathcal{X} : domaine d'évolution des états continus (ou espace continu).

ACRONYMES

- SDC : Systèmes Dynamiques à Commutation.
- SDH : Systèmes Dynamiques Hybride.

- TS à VDM : Takagi-Sugeno à Variables de Décision Mesurables
- TS à VDNM : Takagi-Sugeno à Variables de Décision Non Mesurables
- LMI : Linear Matrix Inequality (Inégalité Matricielle Linéaire)
- Lpv : Linéaire à Paramètre Variant
- ISS : Input to State Stability (Stabilité Entré Sortie)

MATRICES

- I : Matrice identité.
- $P > 0$ ($P < 0$) : Matrice définie positive (resp. négative).
- P^T : Matrice transposé.
- P^{-1} : Matrice inverse.
- $\lambda_i(A)$: Valeurs propres de A .
- $PR(\lambda_i)$: Partie réels de la valeur propre λ_i .
- λ_{max} : Valeur propre maximale.

Introduction générale

Les systèmes hybrides, c'est-à-dire les systèmes sujet à des événements discrets qui influencent les sous-systèmes à temps continu, ont été utilisés pour modéliser des applications dans l'automobile telles que le contrôle du moteur, des freins et de la stabilité, ainsi que le contrôle du trafic aérien et le contrôle des usines de fabrication. En raison de leur généralité, il est difficile de dériver des procédures rigoureuses de synthèse de contrôleurs, nous devons souvent recourir à des approximations car la généralité des modèles hybrides implique un haut niveau de complexité. Les algorithmes de contrôle hybride les plus efficaces sont basés sur un retour d'état complet. Cependant, dans la majorité des cas, seules des informations partielles sur l'état interne de l'installation hybride peuvent être mesurées. L'observabilité et la détectabilité sont des concepts d'importance fondamentale qui établissent les conditions de reconstruction de l'état d'un système et ont été minutieusement étudiés dans le domaine continu et discret mais pas aussi systématiquement pour les systèmes hybrides.

L'observabilité des systèmes hybrides implique à la fois la détection du mode discret et l'estimation de l'état continu du système dynamique. Un système hybride est dit observable lorsqu'il est possible de reconstruire l'état discret ainsi que l'état continu du système à partir des informations d'entrée/sortie disponibles.

Ce travail concerne l'étude des systèmes dynamiques hybrides et plus particulièrement une classe spécifique et très importante de ces systèmes que sont les systèmes dynamiques à commutation (SDC). Il sera question principalement, d'étudier les méthodes développées pour le contrôle et la stabilisation par commutation de ces systèmes qui nécessitent naturellement une modélisation pertinente et une analyse préalable. Nous abordons aussi les questions d'observabilité et la synthèse d'observateurs pour ces systèmes.

Ce mémoire, composé de trois chapitres principaux, en plus des introduction, conclusion et perspectives, est organisé de la façon suivante :

Chapitre I : Le premier chapitre est un résumé bibliographique sur les définitions, les méthodes de modélisation, et le calcul des solutions (exécution hybride) pratique pour les systèmes dynamiques hybrides (SDH) Ces différents concepts sont également illustrés par des exemples académiques et plus proches des applications pratiques.

Chapitre II: Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des systèmes dynamiques à commutation, dans un premier temps nous parlons de modélisation en présentant les fondements mathématiques nécessaires à l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques hybrides, leur comportement périodique et statique (point de fonctionnement, point d'équilibre, cycle limite, ..) et leurs différences avec les systèmes dynamiques continus en ce qui concerne ces comportements En mettant en évidence des exemples qui traitent ces cas, nous présenterons ensuite les extensions de la théorie de Lyapunov qui peuvent être appliquées aux systèmes dynamiques à commutation.

Chapitre III: En plus de la stabilisation pratique, le troisième chapitre est consacré à l'étude de l'observabilité des systèmes dynamiques bien transformés où cours de la dernière décennie et selon la notion d'observabilité, plusieurs critères sont apparus dans la littérature. La principale différence entre ces approches réside dans la manière dont le signal de commutation est affiché : est-ce une fonction constante et connue du temps, est-ce un signal externe inconnu, est-il le résultat d'un système dynamique discret (automatisé) ou est-il contrôlé qui est alors une entrée ? En conséquence, nous allons présenter quelques concepts et explications basés sur plusieurs références avec des exemples ainsi.

Chapitre 01 :

Présentation des Systèmes Dynamiques Hybrides

1.1. Introduction

Le contenu de ce chapitre traite les notions introductives liées aux systèmes dynamiques continus et hybrides. L'analyse et la synthèse de ces derniers reposent sur les concepts généraux développés pour les premiers.

Ce chapitre ne se veut pas être exhaustif ni complet et ne présente pas un état de l'art pour ces deux types de systèmes, plutôt on présentera seulement les notions nécessaires liées aux concepts généraux des systèmes dynamiques continus et leur extension aux systèmes hybrides. En particulier, les questions de bon conditionnement pour ces derniers seront entamées, elles sont étroitement liées à la notion de solution et d'exécution dans un système hybride.

1.2. Notion de système dynamique :

Lorsque dans un système physique, l'évolution des sorties est fonction seulement des entrées appliquées, le système est dit statique. Dans le cas où le comportement des sorties du système dépend aussi des entrées antérieures, le système est dit dynamique. La plupart des systèmes physiques livrés à eux-mêmes sont modélisables par des systèmes dynamiques. D'une manière générale, un système dynamique est une entité plus au moins isolée et constitué par un ensemble d'éléments en interaction. En vue d'analyser et de développer des techniques de commande pour ces systèmes, on a besoin de chiffrer qualitativement et quantitativement ces interactions en se basant sur les lois de la physique, d'où l'idée de recherche de modèle mathématique qui reflète au mieux toutes les dynamiques du système. Afin d'éviter de poursuivre l'évolution antérieur des signaux d'entrée, on fait souvent appel à la représentation interne du système dont les variables ont la propriété de garder toutes les informations utiles temporelles y compris celles résultant de l'application des entrées antérieures.

En plus de la caractérisation entrée/sorties des systèmes, la représentation d'états est l'outil le plus employé dans la modélisation des systèmes physiques. Historiquement, cette représentation constitue la base de toutes les méthodes de résolutions numériques employées dans la théorie de la commande de systèmes. Dans l'espace des états, un système dynamique est essentiellement caractérisé par ses n variables d'état $x(t) \in \mathbb{R}^n$ où le nombre n est appelé ordre du système, et un formalisme mathématique qui décrit le processus d'évolution. Aucun élément aléatoire n'est admis dans de tel processus pour les systèmes déterministes (les états présents du système sont totalement déterminés par ses états passés et futurs).

Définition 2.1 : Un système dynamique continu est décrit par un triplet (X, U, f) , où $X \subset \mathbb{R}^n$ est l'espace des états, $U \subset \mathbb{R}^m$ est l'ensemble des entrées externes (entrées, perturbations), et $f : X \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ vecteur décrivant les dynamiques du système telle que :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)); \quad x(t_0 \geq 0) = x_0, x \in X \text{ et } u \in U. \quad (1.1)$$

L'entrée $u(t)$ est une fonction du temps ou du temps et de l'état dans le cas de retour d'état i.e. $u = k(t, x)$, le remplacement de $u(t)$ dans l'équation précédente conduit au système autonome suivant :

$$\dot{x}(t) = f(t, x); \quad x(t_0) = x_0, x \in X. \quad (1.2)$$

Ainsi la définition de l'équilibre et l'analyse de la stabilité des systèmes seront généralement investiguées à travers ce modèle mathématique en considérant une forme particulière d'entrée. Cette question se trouve au centre d'intérêt de la théorie

des systèmes dynamiques qui s'occupe essentiellement de l'évolution des états en fonction du temps.

Une classe spéciale de (1.2) est constituée par les fonctions f qui ne dépendent pas explicitement du temps ou lorsqu'une forme particulière d'entrée est considérée dans (1.2) :

$$\dot{x}(t) = f(x); \quad x(t_0) = x_0, x \in X. \quad (1.3)$$

Remarque 1.1 :

D'une manière générale, tout système dynamique peut être décrit par l'équation différentielle générale suivante :

$$\frac{dy}{dt} = f\left(t, \frac{dy}{dt}^{n-1}, \dots, \frac{dy}{dt}, y(t)\right) \quad (1.4)$$

Où f et y sont des fonctions et $t \in \mathbb{R}^+$ est généralement considéré comme le temps. Puisque l'équation contient la $n^{ième}$ dérivée, on dira que l'équation est d'ordre n . Pour le système (1.2), l'équation $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ est du premier ordre et si le temps t est la seule variable indépendante, nous dirons que l'équation différentielle est ordinaire (ODE) sachant que l'équation (1.4) peut être rendue comme simple ODE par simple changement de variable.

Solution et trajectoire d'état : Existence et Unicité [19] [24] [25] [31] [44] [48]

Le comportement du système dynamique est complètement déterminé par la solution de l'équation différentielle 1.3, cette solution doit être unique pour une certaine condition initiale. La solution de l'équation 1.3 sur un intervalle $[t_0, t_0 + T]$ est fonction continue de x , elle est donnée par :

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+t} f(x(s)) ds \quad (1.5)$$

Cette solution est bien connue sous le nom de solution de Carathéodory qui n'est pas forcément différentiable partout (au sens de mesure de Lebesgue), en effet la solution de Carathéodory est une généralisation de la solution classique qui est continuellement différentiable. Autrement dit, la solution de type (1.5) est toujours valide i.e. l'intégrale n'a pas besoin d'être définie aux points de mesure zéro, c'est ce qui la distingue de la solution classique. L'existence et l'unicité de cette solution dépendent des caractéristiques du champ vecteur en 1.3. A noter qu'une condition suffisante pour l'existence de la solution 1.5 est la continuité en fonction du temps de $f(x, t)$. Cette condition est aussi celle de l'existence de solution classique, en effet, si $f(x, t)$ est continue alors toute solution est classique. Sachant que la continuité de $f(x, t)$ ne suffit pas pour que la solution soit unique. Une autre condition plus restrictive garantissant l'unicité de la solution est la vérification de la propriété de Lipschitz par rapport à x au voisinage de la condition initiale x_0 :

Définition 1.2 : Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite localement Lipschitz continue si $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|, \forall (x_1, x_2) \in B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$.
Où L est appelé constante de Lipschitz.

A noter que pour la stabilité asymptotique, nous avons besoin de l'existence globale de solution. Rappelons qu'une fonction peut être aussi globalement Lipschitz si la condition de la définition précédente est vérifiée pour \mathbb{R}^n , à noter que si une fonction est Lipschitz sur un domaine, elle est forcément continue sur ce domaine. D'autre part, elle est Lipschitz sur ce domaine si elle est de classe C^1 .

En effet la propriété de Lipschitz garantit que la fonction n'évolue pas plus rapidement qu'une certaine fonction linéaire ce qui n'est pas le cas des systèmes discontinus (objet

de notre étude) dont les solutions sont mieux caractérisées au sens de Krasovskii ou Filipove (voir chapitre suivant). En général, la propriété de Lipschitz au sens global est rarement vérifiée pour les systèmes physiques souvent non linéaires.

Remarque 1.2

- Si une fonction est seulement continue sur un domaine, elle n'est pas forcément Lipschitz sur ce domaine, néanmoins si elle a une dérivée partielle en x bornée, elle est donc Lipschitz : $Df(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \leq L$, L constante de Lipschitz.
- La notion de solution maximale est aussi utile, c'est une solution qui ne peut être étalée en avant dans le temps donc ne peut résulter de la troncation (en temps) d'une autre solution. Par conséquent, l'unicité de solution est liée à l'existence d'une seule solution maximale pour chaque condition initiale.
- Toutefois, l'unicité de solution classique peut être garantie sous une condition plus faible qui est liée à la notion de la continuité de Lipschitz d'un seul côté.

Remarque 1.3 :

Pour les systèmes discontinus (ou à commutations), la continuité au sens global du système n'est pas vérifiée (particulièrement aux points de mesure zéro). Par conséquent l'existence de solution n'est garantie que localement dans les intervalles de temps où la propriété de continuité est vérifiée. L'existence de solution au sens global nécessite plutôt de fortes conditions. En effet, La relaxation dans la solution de Carathéodory qui consiste à définir le champ vecteur dans (1.2) aux points de mesure zéro n'est pas toujours suffisante pour que de telle solution existe.

La solution (1.5) s'appelle aussi trajectoire du système, en adoptant la notation $x(t_0) = x_0$, la trajectoire d'un système dynamique issue d'un point x_{t_0} est l'évolution (courbe) du système passant par x_0 en t_0 et telle que à chaque instant t , la tangente à cette courbe au point $x(t)$ coïncide avec le champ de vecteurs $f(x(t))$ évalué en ce point. L'étude des systèmes dynamiques vise essentiellement à déterminer le lieu des trajectoires d'un tel système. Une notion capitale dans ce cadre est de savoir si, pour un système donné, deux états proches à un instant t de l'évolution du système vont rester proches, voire se confondre, ou s'éloigner.

Définition 1.3 : [45] un point $x = x^*$ est un point d'équilibre du système (1.3) s'il possède la propriété que lorsqu'une solution $x(t)$ évolue à partir de x^* , elle demeure en x^* tout le temps future.

Selon cette définition les points d'équilibre du système (1.3) sont les solutions réelles de l'équation :

$$f(x^*)=0, t \geq 0 \tag{1.6}$$

Sans perte de généralité on peut toujours considérer que le point d'équilibre est à l'origine ($x^* = 0$) puisque tous les points de fonctionnement désirés peuvent se ramener à l'origine par un simple changement de variable, donc on supposera que $f(t, 0)=0$ pour $t \geq 0$. Noter que dans le cas général, on n'exclut pas l'existence de plusieurs points d'équilibre, toutefois on ne considère que les systèmes autonomes dont l'origine est un équilibre isolé.

Noter pour qu'un point $x = x^*$ soit un équilibre du système non autonome (1.1), il doit y exister une entrée \bar{u} tel que $f(x^*, \bar{u})=0$.

Dépendance par rapport à la condition initiale : [21] [24] [52] [64]

La propriété de Lipschitz au sens global permet d'assurer la continuité de la solution et de donner un sens à l'équation différentielle i.e. de bien poser le problème représenté par l'équation. En effet, c'est ce qui justifie l'existence ou la recherche des algorithmes numériques de résolution ou plutôt d'approximation pour les problèmes bien posés et par conséquent leur simulation. Cela est appuyé par le théorème de propagation de la distance entre solutions ci-après qui atteste que les trajectoires de système bien posé restent proches si elles démarrent de conditions initiales proches du moins pour des échelles de temps petits.

Théorème 1.1 :

Soient $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux solutions de $[0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ du système représenté par : $\dot{x} = f(x)$ avec respectivement x_{10} et x_{20} comme conditions initiales, si f est Lipschitz continue avec une constante de Lipschitz L , alors pour tout $t \in [0, T]$

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \|x_{10} - x_{20}\|e^{Lt}$$

Ainsi il est confirmé que lorsque le champ vecteur est Lipschitz, le système représenté sera bien posé et la solution unique est continuellement dépendante de la condition initiale i.e. ses dérivées partielles sont continues par rapport au temps et à la condition initiale [64]. Cependant, pour de grandes valeurs de t , on ne peut garantir que les solutions restent proches et une étude approfondie de la sensibilité par rapport aux conditions initiales est à prévoir.

1.2.1 Stabilité des systèmes dynamiques :

La stabilité est une question centrale dans la théorie des systèmes, du point de vue commande cette propriété est la plus impérative en boucle fermée. Intuitivement parlant, un équilibre de système dynamique x^* est localement stable si lorsque sa trajectoire part d'un point du voisinage de cet équilibre ne s'éloigne pas trop. L'équilibre x^* est localement asymptotiquement stable s'il est localement stable et toutes les trajectoires qui partent de son voisinage convergent vers x^* quand $t \rightarrow \infty$. Tout au long de ce travail, nous ne faisons pas de distinction entre la stabilité de système et la stabilité de son équilibre (isolé).

Définition 1.4 : [45]

Soit le système autonome (1-3) avec $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ localement Lipschitz et un point d'équilibre isolé $x^* = 0$, le système est dit

- Stable, si $\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \geq 0, \exists \delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ tel que $\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$
- Attractif, s'il existe un voisinage $\mathcal{V}(0)$ de l'origine tel que :

$$\forall x_0 \in \mathcal{V}(0), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

L'origine est un point d'équilibre globalement attractif si $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$

- Asymptotiquement stable, s'il est stable et attractif.
L'origine est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable s'il est stable et globalement attractif.

La stabilité définie ci-dessus est dite uniforme par rapport au temps si $\delta(t_0, \varepsilon) = \delta(\varepsilon)$ i.e. indépendante de t_0 . Cette notion est très importante pour la stabilité des systèmes

dynamiques continus ; par exemple le système : $\dot{x} = x/t, x(0) = x_0$ dont la solution est $x(t) = x_0 e^{(\frac{1}{t_0} - \frac{1}{t})}$ est stable au sens de la définition ci-dessus avec $\delta(t_0, \varepsilon) = \varepsilon e^{-\frac{1}{t_0}}$ mais pas uniformément stable.

La stabilité asymptotique est très utile en pratique, mais elle ne donne aucune indication sur la rapidité de convergence de la solution vers l'équilibre, généralement on fait appel à une notion plus intéressante qui est la stabilité exponentielle.

Définition 1.5 : [45]

L'origine $x^* = 0$ du système (1-3) est dit exponentiellement stable s'il existe un voisinage $\mathbb{V}(0)$ de l'origine et deux constantes λ_1, λ_2 strictement positives tel que :

$$\|x(t)\| < \lambda_1 \|x_0\| e^{-\lambda_2(t-t_0)}, \forall x_0 \in \mathbb{V}(0), \forall t \geq t_0$$

Où dans ce cas là λ_2 s'appelle taux de convergence.

L'origine du système est un point d'équilibre globalement exponentiellement stable si $\mathbb{V}(0) = \mathbb{R}^n$.

Remarque

La notion de stabilité est très importante lors de la construction des lois de commande ou d'observation. En général, elle représente le cœur de l'automatique. L'absence de cette propriété rend le système inutilisable en pratique. L'analyse de la stabilité a fait l'objet de plusieurs travaux de recherches, dans le cas des systèmes linéaires décrits par des équations différentielles où plusieurs outils d'analyse sont disponibles. Selon les signaux d'entrées et de sorties d'un système (problème de stabilité interne ou externe), les outils de stabilité différent (stabilité asymptotique, exponentielle, stabilité Entrée-Etat...).

La stabilité interne consiste à analyser les solutions de l'équation d'état dues aux conditions initiales. Elle tient compte de tous les modes internes du système. L'élaboration des propriétés de la stabilité interne se fait par plusieurs théories où la théorie de *Lyapunov* est l'un des piliers de la stabilité en automatique. Elle est utilisée pour différentes classes de système y compris les systèmes linéaires. Alors que la stabilité entrée-état (**ISS : Input to State Stability**) est une autre forme de stabilité interne qui étudie la relation entre l'entrée du système et son état. Elle impose une contrainte plus forte que la stabilité asymptotique, puisque à une entrée bornée doit correspondre un état borne [25] [26]. La stabilité au sens de *Lyapunov* ou asymptotique n'en dit pas plus sur les systèmes non autonomes ; soumis à une entrée ou une perturbation. Dans ce cas il faut connaître l'effet de la perturbation sur l'évolution du système.

En pratique, un système dynamique est souvent soumis à des perturbations, ce qui ne peut être étudié d'un point de vue asymptotique, car un système asymptotiquement stable n'implique pas la convergence des trajectoires des solutions du même système forcé. Autrement dit, l'état ne convergera plus vers l'origine mais vers un volume dit ensemble invariant. Cela est formalisé à l'aide de fonctions de classe K, K_L, K_∞ [27]. Considérons le système suivant :

$$\dot{x}(t) = f((t), u(t)) \tag{1.7}$$

Définition 1.4 Le système (1.7) est localement stable au sens entrée état s'il existe une fonction ϕ de classe K_L , une fonction de classe K ainsi que deux constantes $k_1, k_2 \in \mathfrak{R}$ tel que :

$$\|x(t)\| \leq \phi(\|x_0\|, t) + \gamma(\|u_T\|(\cdot))k \forall t \geq 0, 0 \leq T \leq t \quad (1.8)$$

$\forall x_0 \in D$ et $u \in D_u$ satisfait $\|x_0\| < k_1$ et $\sup_{t>0} \|u_T(t)\| = \|u_T\|_{L^\infty} < k_2$.

Le système est dit ISS ou globalement ISS si $D = \mathfrak{R}^n$ et $D_u = \mathfrak{R}^n$ et (1.8) est satisfaite $\forall x_0$ et $\forall u$.

Théorie de Lyapunov

Ayant défini les concepts de stabilité et de la stabilité asymptotique. La vérification de la stabilité des équilibres peut être obtenue par l'investigation de l'énergie totale d'un système. Sachant que l'énergie du système est liée aux amplitudes des états du système, et que si l'énergie totale du système décroît (dissipation sans restauration) quand ses états tendent vers zéro, alors la trajectoire du système tend vers l'équilibre (l'origine), de là vient l'idée de l'utilisation des fonctions d'énergie. Cependant, en pratique pour la plupart des systèmes physiques où le modèle mathématique n'est pas simplifiable, il est difficile d'écrire une expression manipulable de l'énergie totale du système. Lyapunov a montré qu'au lieu de ces fonctions d'énergie, l'utilisation de certaine classe de fonctions définies positives (appelées fonctions de Lyapunov) peut être utile pour étudier la stabilité des systèmes dynamiques. Depuis alors, le concept de stabilité des systèmes dynamiques est étroitement lié à la théorie de Lyapunov. Les fondements de la théorie de Lyapunov peuvent être consultés dans n'importe quel livre de systèmes non linéaires tel que [45]. Alors que notre objectif est d'étudier l'application voire l'extension de cette théorie à la stabilité et la stabilisation des systèmes dynamiques hybrides et plus particulièrement celle des systèmes commutés objet de notre travail. Pour cela nous avons besoin de rappeler les définitions mathématiques des fonctions positives permettant de formuler les théorèmes de Lyapunov d'une façon plus condensée [45].

Définition 1.6 :

Une fonction $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ où D est un ouvert de \mathbb{R} et contient l'origine, est dite définie positive, si $V(0)=0$ et $V(x)>0 \forall x \in D - \{0\}$; si de plus $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$, elle est dite radialement non bornée.

Définition 1.7 :

Une fonction continue $\varphi : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ est dite de classe \mathcal{K} , si elle est strictement croissante et $\varphi(0)=0$; elle est de classe \mathcal{K}_∞ , si $a=\infty$ et $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r) = \infty$.

Définition 1.8 :

Une fonction continue $\varphi : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ est dite de classe \mathcal{KL} , si pour chaque s fixe, $\varphi(r, s)$ est de classe \mathcal{K} par rapport à r , et pour chaque r fixe, $\varphi(r, s)$ est décroissante par rapport à s et $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r, s) = 0$

Définition 1.10 : [45]

Une fonction $V(x)$ est appelée fonction d'énergie généralisée ou fonction de Lyapunov pour le système (1-3) si elle vérifie les conditions suivantes :

1. $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, c'est une fonction scalaire.
2. $V(0)=0$, $V(x)>0$ pour $x \neq 0$, elle est définie positive.

3. $\frac{dV}{dt}(f(x)) < 0$, le système est dissipatif.

Théorème 1.2 : [45]

S'il existe une fonction C^1 définie positive $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dont la dérivée le long de la trajectoire du système (1-3) est telle que :

- $\forall x, \dot{V} \leq 0$, alors le système (1-3) est stable.
- $\forall x \neq 0, \dot{V} < 0$, alors le système (1-3) est asymptotiquement stable.
- $\dot{V} < 0, \forall x \neq 0$ et V est radialement non bornée, alors le système est globalement asymptotiquement stable.

En utilisant les fonctions de comparaison, la variante ci-dessous est plus générale et surtout très utile pour les démonstrations de stabilité.

Théorème 1.3 : [65]

Soit le système autonome (1-3) avec un point d'équilibre isolé $x^* = 0$.

S'il existe une fonction de Lyapunov continuellement différentiable $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et deux fonctions α et β de classe \mathcal{K} tel que :

$$\alpha(\|x\|) \leq V(x) \leq \beta(\|x\|), \quad \forall x \in D \subset \mathbb{R}^n \text{ et } 0 \in D$$

L'équilibre à l'origine du système est

- Stable si : $\frac{dV(x)}{dt} \leq 0$;
- Asymptotiquement stable s'il existe une fonction $\phi(x)$ de classe \mathcal{K} telle que :

$$\frac{dV(x)}{dt} \leq -\phi(\|x\|);$$

- Exponentiellement stable s'il existe des constantes positives $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \gamma$ et p telle que :

$$\alpha(\|x\|) = \bar{\alpha}\|x\|^p$$

$$\beta(\|x\|) = \bar{\beta}\|x\|^p$$

$$\phi(\|x\|) = \gamma V(x)$$

- Quadratiquement stable si $p=2$.

Les résultats sont globaux si les fonctions sont de classe \mathcal{K}_∞ .

Théorèmes réciproques de Lyapunov :

La théorie de Lyapunov est basée sur le fait que si on arrive à trouver une fonction de Lyapunov qui satisfait certaines conditions alors le système possède certaines propriétés (ex : stabilité). Il est tout à fait naturel de se poser la question inverse : si le système possède une certaine propriété de stabilité, existe-il une fonction de Lyapunov pour le système avec des caractéristiques bien définies. Les théorèmes qui se posent de cette manière s'appellent théorèmes réciproques de Lyapunov et ne sont généralement pas dus à Lyapunov mais dégagées un peu plus tard. Certains d'entre eux sont très utiles et plus utilisés dans la stabilité des systèmes non linéaires que ceux de Lyapunov lui-même.

Exemple de théorème réciproque de Lyapunov : [22]

Considérons le système autonome suivant : $\dot{x} = f(x)$, $f(0) = 0$ avec f Lipschitz dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et continue en 0. Si l'origine est globalement asymptotiquement stable, alors il existe une fonction propre et définie positive $V(x)$ telle que $\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$.

Invariance de LaSalle : [45]

Un des outils les plus utilisés comme une extension des travaux de la stabilité de Lyapunov est le principe d'invariance de LaSalle. Sous certains comportements de solution, il est possible d'étendre la notion de stabilité asymptotique lorsque la dérivée de la fonction de Lyapunov n'est pas strictement négative. Rappelons qu'un ensemble est positivement invariant pour un système donné, si lorsque toutes les solutions qui partent de cet ensemble y restent pour tous le temps future.

Théorème 1.4 : [45]

Supposons qu'il existe une fonction C^1 définie positive $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dont la dérivée le long de la trajectoire du système (1-3) est $\dot{V} \leq 0 \quad \forall x$, et soit M le plus grand ensemble invariant contenu dans l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \dot{V}(x) = 0\}$. Alors toute trajectoire du système (1-3) borné pour $t \geq 0$ approche M lorsque $t \rightarrow \infty$. En particulier, si toutes les solutions restent bornées et $M = \{0\}$ alors le système (1-3) est globalement asymptotiquement stable (à l'origine).

En effet, ce théorème fournit une condition pour que l'ensemble invariant M soit attractif. Cela en exigeant la bornitude de toutes les solutions du système, cette propriété est vérifiée lorsque V est choisie radialement non borné (condition suffisante et pas nécessaire). La deuxième condition est que $\dot{V}(x)$ ne soit pas identiquement nulle le long de toute solution non nulle. Le résultat de ce théorème est très intéressant et d'application générale avec une extension aux cas des systèmes hybrides.

1.2.2 Stabilité pratique :

Le concept de la stabilité asymptotique des équilibres de systèmes (donc des systèmes) est tout à fait naturel en exprimant de façon intuitive les comportements des systèmes autour de points remarquables. Cependant, pour certains systèmes complexes n'ayant pas d'équilibres ou qui ne convergent pas, l'extension du concept de stabilité autour de point d'équilibre à la stabilité par rapport à un ensemble de points devient nécessaire. C'est le cas des convertisseurs en électronique de puissance ou tous les systèmes dont les modes sont instables ou du moins ne possèdent pas d'équilibre commun et doivent être maintenus en un certain point de fonctionnement. Les cycles limites dans les systèmes non linéaires sont un autre exemple de stabilité par rapport à un ensemble de points. La notion de stabilité par rapport à une région ou un ensemble de point n'est pas nouvelle, elle est liée à la ω -stabilité et aux ensembles ω -limites employés dans la conception de commande des systèmes non linéaires.

Théoriquement, deux notions sont liées à ce concept de stabilité :

- Stabilité par rapport à un ensemble invariant, dans ce cas l'invariant ne peut être quitté une fois on entre dedans. Ce concept est étroitement lié à la théorie de Lyapunov et le principe d'invariance de LaSalle [45] [40]. En effet, les niveaux de fonctions de Lyapunov sont des invariants.
- Stabilité par rapport à une région quelconque, l'approche ici est plus générale et présente une certaine flexibilité dans le sens où la trajectoire du système est autorisée à quitter temporairement la région pour y revenir finalement [78].

Plusieurs variantes et formulations ont été proposées pour ce concept de stabilité, certaines extensions ont été faites pour les systèmes hybrides et commutés [31].

Nous reviendrons sur ce concept de stabilité dans le chapitre 3 qui est complètement consacré à la stabilisation pratique des systèmes commutés affines par morceaux où nous allons présenter notre propre définition et méthode de stabilisation. Nous nous contentons de donner ici une définition au sens large des choses pour la stabilité des régions.

Définition 1.11 : (au sens large) :

Une région de points est asymptotiquement globalement stable pour un système donné si toute solution est bornée et reste proche de la région lorsqu'elle démarre de son voisinage, de plus si la solution possède un domaine temporel étendu (illimité) alors elle doit converger vers cette région.

Cycle limite :

L'analyse de stabilité des systèmes cyclique ou périodique est généralement abordée par une analyse de comportements par rapport à un ensemble de points, où généralement le point désiré ne représente pas un point d'équilibre et la commande aura comme objectif d'imposer une trajectoire fermée (cycle limite) autour d'un certain point de fonctionnement. Ce concept de stabilité (et donc la stabilité des cycles limites) est habituellement abordé en utilisant l'application de Poincaré pour en étudier la stabilité du cycle [4] [32] [33], plusieurs techniques d'applications de cette approche ont été proposées pour la stabilisation des convertisseurs d'électronique de puissance, [69] en est un bon exemple. La stabilité des cycles limites est encore un sujet de recherches bien que certains résultats soient déjà bien établis, cette approche peut être classée comme une méthode de stabilisation pratique.

1.2.3 Inclusion différentielle :

Une inclusion différentielle est une généralisation d'équation différentielle, à chaque état, une inclusion différentielle spécifie un ensemble d'évolutions possibles au lieu d'une seule. Cela est défini par une fonction multivaluée [5] [21].

Une inclusion différentielle est décrite par :

$$\dot{x}(t) \in \mathcal{F}(x(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (1.9)$$

Avec $\mathcal{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction multivaluée.

Un point x^* est un équilibre pour l'inclusion différentielle si $0 \in \mathcal{F}(x^*(t)), \forall t \in \mathbb{R}^+$.

Cette notion est très générale et peut être utilisée pour modéliser une large classe de systèmes dynamiques allant des systèmes incertains qui ne peuvent être représenté par un seul modèle aux systèmes à discontinuités ou plus généralement aux systèmes commutés auxquels cette notion est étroitement liée. D'autant plus, lorsque \mathcal{F} est un singleton, cette notion couvre bien la modélisation par équation différentielle comme cas particulier.

En général, cette modélisation est intéressante lorsque \mathcal{F} est un ensemble convexe fermé ce qui permet de faciliter l'analyse en l'associant au problème de Cauchy (existence de solution). Si \mathcal{F} ne l'est pas, le système (1.9) peut être généralisé à :

$$\dot{x}(t) \in \text{clco}(\mathcal{F}(x(t))) \quad (1.10)$$

Où clco désigne l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble \mathcal{F} , le système (1.10) est le système relaxé de (1.9), et en s'aidant du théorème de relaxation de Filipove qui atteste que toute solution de (1.9) est solution du système relaxé (1.10), dans beaucoup de cas la réciproque est vraie. En effet, sous certaines hypothèses, toute solution du système relaxé peut être approximée par une solution du système original. Ce théorème de relaxation est particulièrement très utile pour prouver la stabilité des systèmes commutés linéaires à travers les inclusions différentielles linéaires [voir chapitre 3].

Avant de pouvoir définir les solutions d'une inclusion différentielle et les conditions de leurs existences, nous rappelons ci-dessous la définition de la continuité absolue et la semi-continuité supérieure.

Définition 1.12 : [5] [21] [44]

Une fonction $x : [a, b] \rightarrow R^n$ est dite absolument continue, si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ telle que pour toute collection finie $\{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\}$ d'intervalles ouverts disjoints et contenues dans $[a, b]$ avec $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$, alors :

$$\sum_{i=1}^n |x(b_i) - x(a_i)| < \varepsilon$$

Ou équivalentement : si elle est continue et peut être écrite comme l'intégrale de sa dérivée \dot{x} : $x(t) = x(a) + \int_a^t \dot{x}(\tau) d\tau$ pour tout $t \in [a, b]$ et \dot{x} localement intégrable.

La notion de la continuité absolue (d'origine soviétique) est très importante pour l'étude des équations différentielles. Bien qu'une fonction absolument continue ne soit pas différentiable partout, sa propriété majeure est qu'elle peut être retrouvée à partir de sa dérivée. En effet, c'est le minimum requis pour le type de solution à chercher pour une équation différentielle discontinue. Une fonction absolument continue est une fonction continue et de variation bornée par conséquent toute fonction Lipschitz continue est absolument continue. Elle a donc une dérivée finie sauf aux points de mesure¹ zéro.

Définition 1.13 : [5] [21] [44]

Une fonction $x : [a, b] \rightarrow R^n$ est solution de (1.9) au sens de Carathéodory si elle est absolument continue et satisfait (1.3) pour presque tous $t \in [a, b]$.

Remarque 1.4 :

La difficulté de travailler avec les inclusions différentielles est que (1.9) possède une infinité de solution, par conséquent, l'étude de (1.9) consiste à chercher à ce que toutes les solutions satisfassent certaines propriétés (ex. stabilité), donc il est important de savoir à quelles conditions l'inclusion possède une seule solution, cela nous évite de parler des notions de stabilité forte (par rapport à toutes les solutions) et faible (par rapport à une seule solution).

Existence et unicité de solutions :

Sous certaines conditions (semblables à celles des équations différentielles), l'existence et l'unicité de solution pour une inclusion différentielle (convexe fermé) peuvent être garanties. La première est liée à la semi-continuité supérieur de fonctions multivaluées qui assure l'existence d'une solution pour chaque condition initiale, et la deuxième utilise une propriété similaire à celle de la continuité Lipschitz appelé :

¹ Mesure au sens de Lebesgue

Continuité de Lipschitz d'un seul coté « one-side Lipschitz continuity » qui garanti l'existence d'au plus une solution de l'inclusion pour chaque condition initiale, pour plus de détail voir [5] [21]. Nous allons y revenir dans le chapitre suivant.

Remarque 1.5 :

Pour attaquer les EDD, il n'y a pas que l'approche qui consiste à associer une inclusion différentielle aux équations différentielles discontinues à droite EDD (donc à la fonction multivaluée au niveau des discontinuités). D'autres approches dues à Hermes et Euler permettent de construire aussi une solution généralisée des EDD en se basant sur des algorithmes d'approximation [44].

Formalisme Hybride :

Le formalisme hybride constitue un outil mathématique très puissant, il attire l'attention des chercheurs de différentes communautés scientifiques. Son plus grand atout, est sa capacité de pouvoir prendre en charge les modèles de nombreuses applications de domaines variés. Cependant, la diversité des problèmes traités et des performances de plus en plus rudes dans la conception de produits de hautes gammes, compliquent le groupement de toutes les méthodologies associées et les outils de développements dédiés sous un même formalisme. En dehors des concepts généraux communs, les systèmes hybrides ont été divisés en classes et sous-classes selon le phénomène hybride majeur engendré et le type d'abstraction envisagée. Si on se concentre au point de vue automatique, les procédés à commander sont divisés en un phénomène majeur qui décrit l'évolution continue du procédé sujet de phénomènes secondaires transitoires pouvant être de type événementiel qui affectent le comportement des dynamiques du système. Tous les systèmes physiques pouvant être modélisés de cette manière, sont appelés systèmes à commutations. C'est à partir de ce point de vue que la théorie de la commande automatique voit les systèmes hybrides. En effet, les systèmes commutés constituent la classe des systèmes hybrides la plus importante et celle qui a reçu plus d'investigations en automatique. Cet intérêt provient du fait, que plusieurs phénomènes physiques non linéaires et/ou à dynamiques variables peuvent être décrit par des systèmes à commutations, en conséquence, presque toutes les approches proposées et les outils développés pour les systèmes hybrides concernent essentiellement les systèmes à commutations [18] [23] [31] [40] [65] [82]. Les investigations de ces systèmes s'articulent autour des questions d'analyse de la stabilité et de la stabilisation par commutations ou la conception de commande. La commande multi modèles ou multi contrôleurs ainsi que les systèmes à logique de commutation (y compris les exemples cités auparavant) ou à structure variable font partie des investigations de cette classe qui constitue l'objectif de notre travail.

A noter que la notion de systèmes commutés n'est pas nouvelle, tous les exemples réels cités et ceux de toutes les applications qui rentrent dans ce cadre, ont été déjà développés et pris en charge par différentes approches mais de manières spécifiques et surtout non systématiques. La différence entre un système dynamique continu et un système commuté est la présence de discontinuités dans le champ vecteur de ce dernier suivi de changement de comportement. Ces systèmes sont modélisables par des équations différentielles discontinues à droites (EDD) qui ont une longue histoire en mathématique et aussi en automatique avant même la notion de systèmes à commutations.

1.3. Systèmes à Évènements Discrets (SED) :

Avant de pouvoir définir les systèmes hybrides qui ne sont autres que le résultat d'interaction de systèmes à dynamiques continues et systèmes évènementiels, il est peut être judicieux de donner une définition précise de ces derniers. Certains types de systèmes se prêtent bien à l'abstraction des dynamiques continues en faveur du caractère évènementiel, on dira que sont naturellement évènementiels, des exemples typiques sont les systèmes de production, systèmes des transports aériens et ferroviaires, systèmes de communication ainsi que les systèmes du web-services. Dans tous ces systèmes, l'activité est conditionnée par l'instant d'occurrence d'évènements tels que fin d'exécution de tâches et/ou arrivée d'un produit...etc.

Définition 1.14 :

Les systèmes à évènements discrets (SED) sont des systèmes dynamiques qui évoluent en accord avec l'occurrence abrupte d'évènements à des intervalles irréguliers.

Ces systèmes sont essentiellement caractérisés par un espace d'états discrets et des transitions entre états conditionnées par l'occurrence d'évènements. Par conséquent, l'évolution dans ces systèmes peut s'exprimer en termes de séquences d'états où la durée de séjour dans chacun des états n'est pas systématiquement connue i.e. le temps n'apparaît pas explicitement comme dans le cas des systèmes continus. Les moyens les plus employés pour l'étude des comportements logiques des SED sont basés sur la théorie des langages et des automates, on notera l'importance des puissants outils graphiques : les Réseaux de Pétri et le Grafcet.

1.4. Systèmes hybrides :

Comme il a été déjà mentionné, lorsque dans un système dynamique il y a interaction de dynamiques continues et évènementielles, le système résultant est dénommé système hybride. Cette interaction permet de modéliser un grand nombre de phénomènes de dynamiques variées qui ne peuvent être rencontrées dans les systèmes purement continus ou discrets. Par extension, lorsque dans un même système physique certaines variables varient très rapidement (ou quasi-instantanément) par rapport à d'autres, une formulation hybride du système peut être plus avantageuse. Les systèmes hybrides ont gagné un grand intérêt ces trois dernières décennies de façon que des journées d'étude et des numéros spéciaux de journaux leurs ont été consacrés par ex : [IEEE, AC, avril 98] [Automatica Mars 99] [International Journal for robust and nonlinear control 2001] ...etc. D'autant plus, certaines monographies et notes de lectures sous formes de livres ont été entièrement dédiées à ce domaine [Antsaklis 97, Mateev et Savkin 2000, Vanderschaft 2000, Johanssen 2003, ...Etc.] sans oublier la fameuse conférence HSCC (Hybrid Systems Computation and Control) qui se tient régulièrement chaque année depuis 1999. Actuellement, une transaction spécialisée dans les systèmes hybrides existe depuis 2007 dans le célèbre journal [Nonlinear Analysis : Hybrid Systems]. Du point de vue théorique, le point de départ pour aborder ces systèmes, est la formulation hybride et l'obtention de modèle mathématique qui combine les deux aspects continu/discret. Différentes approches ont été proposées par les deux principales communautés travaillant dans le domaine. La première est la représentation par automates qui associe les dynamiques continues aux automates finis [3], cette représentation est liée à la théorie des graphes qui est plus proche aux informaticiens. La seconde est basée sur la formulation par équations différentielles et la spécification de l'arrivée des évènements [18] [37] [40] [65], ce

point de vue est proche de la modélisation des systèmes continus en automatique. En effet, dans ces représentations, le système hybride est vu comme une collection de dynamiques continues et des transitions discrètes spécifiées par des fonctions de réinitialisation ou de transition. Depuis alors, plusieurs variantes de ces représentations ont été proposées. Les systèmes hybrides constituent une classe de systèmes très riche de notion multidisciplinaire de façon qu'une définition claire et/ou de modèle unifié ne soient pas envisageables. En conséquence, les modèles ainsi que les développements associés dépendent du profil du chercheur et/ou de l'application envisagée et les résultats les plus remarquables ne sont exploitables que par classes de systèmes hybrides. En technologie, beaucoup de systèmes physiques incarnent ce double aspect continu/discret que se soit au niveau du modèle mathématique ou de la structure de commande du système. On pourra penser à l'équation du mouvement d'un mobile dont la vitesse varie continuellement et subissant une variation instantanée à l'encontre d'obstacle (ex : collision) ou le changement discontinu de l'évolution de la tension et du courant électrique dans un circuit électronique causé par l'ouverture ou la fermeture d'un commutateur. De même en commande moderne, l'implémentation d'algorithmes numériques sur un processeur pour commander un processus continu évoque cette interaction où les états discrets commandent la logique de décision. D'une manière générale, la commande hybride résulte de l'organisation hiérarchique des systèmes de contrôle/commande de processus complexes, où les dynamiques continues constituent le niveau d'abstraction le plus bas alors que la logique de gestion de l'occurrence des événements discrets (évoquant le changement de comportements) constitue bien le plus haut niveau d'abstraction du système. En plus de la modélisation des systèmes hybrides, les problèmes associés à la commande hybride concernent essentiellement l'analyse de la stabilité et la stabilisation de ces systèmes. Ces questions ont été largement investiguées par les chercheurs du monde entier, les résultats bien établis sont résumés et détaillés dans les articles de référence [23][31][36][37][49][50][54][82].

Vu les différentes manières d'aborder ces systèmes selon les nombreux domaines d'application, la nature multidisciplinaire de la notion de systèmes hybrides a été reconnue. Ce qui a conduit au développement de plusieurs formalismes qui servent actuellement comme outils de description pour ces systèmes. Le choix entre ces formalismes de description est un compromis entre la puissance de modélisation et le pouvoir de décision pour le dégagement de propriétés quantitatives et qualitatives. Nous retenons la définition relative aux systèmes autonomes (objet de notre travail) suivante [52].

Définition 1.15 :

Un système dynamique hybride se définit par un 8-tuplet H :

$$H = \{Q, X, F, Init, D, E, G, R\}$$

Où :

- $Q = \{q_i, i = 1, 2, \dots, m\}$: est l'ensemble fini des états discrets ou modes.
- $X \subseteq \mathbb{R}^n$: est l'espace des états continus avec une partition $\{X_i\}_{i=1}^m$.
- $F = \{f_{q_i}, q_i \in Q\}$: est une collection de champs vecteurs $f_{q_i}: Q \times X \rightarrow X$ avec f_{q_i} Lipchitz sur D_{q_i} .
- $D = \{D_{q_i}, q_i \in Q\}$: est une collection de domaines d'invariant pour chaque mode $D: Q \rightarrow \{X_i\}_{i=1}^m$.
- $Init \subseteq Q \times X$: est l'ensemble des états initiaux.

- $E \subseteq Q \times Q$: est l'ensemble d'arcs représentant les transitions possibles d'un mode à un autre.
- $G = \{G(e_{ij}), e_{ij} = (q_i, q_j) \in E\}$: est un ensemble de gardes ; $G : E \rightarrow \{X_i\}_{i=1}^m$ en supposant que $\forall e_{ij} \in E, G(e_{ij}) \neq \emptyset$.
- $R : E \times X \rightarrow \{X_i\}_{i=1}^m$: est une collection de fonctions de réinitialisation en supposant que $\forall e_{ij} \in E$ et $\forall x \in G(e_{ij}), R(e_{ij}, x) \neq \emptyset$.

Dans l'évolution d'un système hybride, l'état du système peut être décrit par les deux variables : variable continue $x \in X$ et une autre discrète $q_i \in Q$. Cet état est représenté par $(x, q_i) \in X \times Q$.

Dans ce formalisme de description des systèmes hybrides, l'évolution est décrite par une succession de phases continues séparées par des évènements (possible multiple) pendant lesquels des actions discrètes se produisent provoquant la réinitialisation des deux variables discrète et continue. Cela peut bien sûr produire des discontinuités dans les variables temporelles. Cette évolution traduit le changement de comportement ou commutation entre modes provoquée lorsque les variables atteignent certains seuils dans l'espace d'états (commutation dépendante de l'état) ou dans le domaine temporel lorsque des temps de séjours sont prédéfinis (commutation dépendante du temps) ou tout simplement par l'arrivée d'évènement externe (commutation contrôlée).

A titre d'introduction, un exemple de fonctionnement ou d'exécution académique de la littérature est montré par la figure suivante :

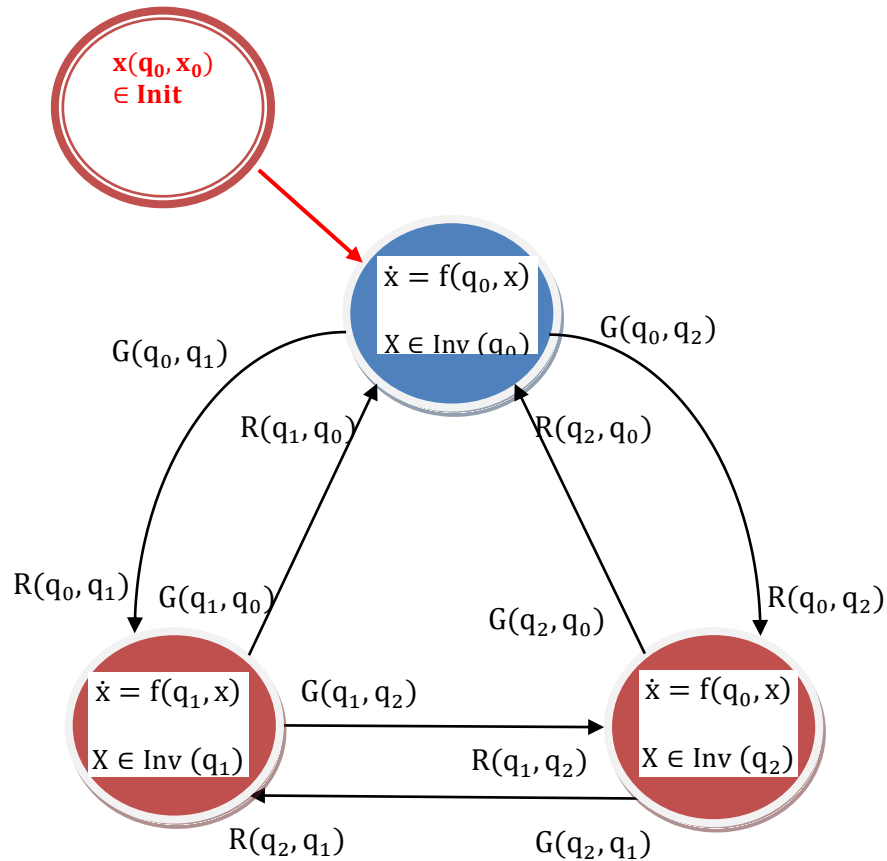


Fig. 1.1. Exemple théorique d'un système hybride

A partir de l'instant initial ($t = t_0$), $q(t_0) = q_0$ et la valeur initiale de la variable continue $x(t_0) = x_0$ appartenant au domaine D_{q_0} . Cette dernière évolue alors en suivant

l'équation différentielle $\dot{x}(t) = f_{q_0}(x(t))$, lorsque la trajectoire $x(t)$ atteint la garde $G(q_0, q_1)$ en un instant t_1 , on dira que la transition est validée et l'état discret peut prendre la valeur q_1 , alors que l'état continu sautera de la valeur actuelle $x(t_1^-)$ à une nouvelle valeur $x(t_1)$ avec $x(t_1) = R((q_0, q_1), x(t_1^-)) \in X_1$. A partir de là, le système évoluera selon la dynamique continue $\dot{x}(t) = f_{q_1}(x(t))$. Le même processus se répètera pour toutes les transitions futures.

Il n'est pas toujours évident de décrire le fonctionnement d'un système dynamique réel par un système hybride selon le formalisme ci-dessus. En particulier, les définitions des gardes et des règles d'initialisation peuvent très être difficiles à exprimer. Dans ce chapitre d'introduction, nous nous limitons à des exemples simples et illustratifs pour montrer le fonctionnement et familiariser le lecteur avec le formalisme hybride.

Exemple 1.1 : boite de vitesse automatique [24] [36] :

Le système de control de la boite vitesse automatique est un système commuté autonome conçu pour provoquer le changement automatique des gammes de vitesses V pour un véhicule en marche. Deux données sont transmises par le système de control du moteur du véhicule à la boite de vitesse pour commuter d'une gamme des vitesses à une autre en changeant le rapport de transmission (selon le rendement pré-spécifié du véhicule qui dépend de la vitesse désirée) qui sont le couple développé $T(t)$ (selon l'accélération a) et la vitesse angulaire $\omega(t)$.

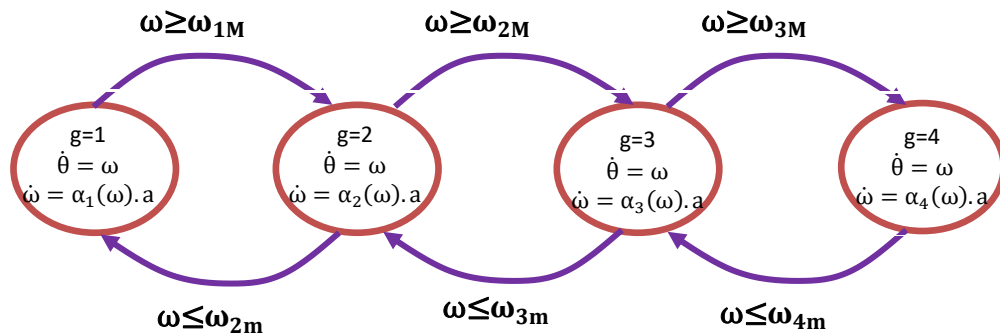
Selon la gamme du véhicule V_4, V_5 ou V_6 , la boite des vitesses aura 4, 5 ou 6 états discrets, chaque état discret q_i ($i=1, 2, \dots, 6$) correspond à un rapport de transmission (moteur) p_i et donc à une dynamique continue associée f_i . A chaque instant, la vitesse linéaire du véhicule $v_i(t)$ est liée à la vitesse angulaire du moteur $\omega(t)$ par la relation $v_i(t) = 1/p_i \omega(t)$, le changement automatique de la gamme des vitesses au niveau de la boite se produit lorsque la vitesse angulaire atteint les valeurs max et min pré-spécifiées et donc les commutations se font selon le principe suivant :

$$V_{i,i+1} = \left\{ v \in \mathbb{R} \mid v = \frac{1}{p_i} \omega_{\text{Max}} \right\}$$

$$V_{i+1,i} = \left\{ v \in \mathbb{R} \mid v = \frac{1}{p_{i+1}} \omega_{\text{min}} \right\}$$

L'automate associé est représenté ci-après où les commutations entre les différentes dynamiques se font lorsque le contrôleur (le détecteur d'évènements) détecte v_{Max} ou v_{min} de la gamme associée.

Pour le calcul des fonctions de garde et les dynamiques continues associées à chaque mode de fonctionnement du système, le vecteur d'état du système est généralement augmenté par l'état x_c du correcteur continu employé. Une bonne conduite (pas de changement brusque ni de l'accélération ni de la vitesse) impose des contraintes additionnelles sur les instants de commutations entre les gammes des vitesses au niveau de la boite pour plus de détail voir [24] [36].



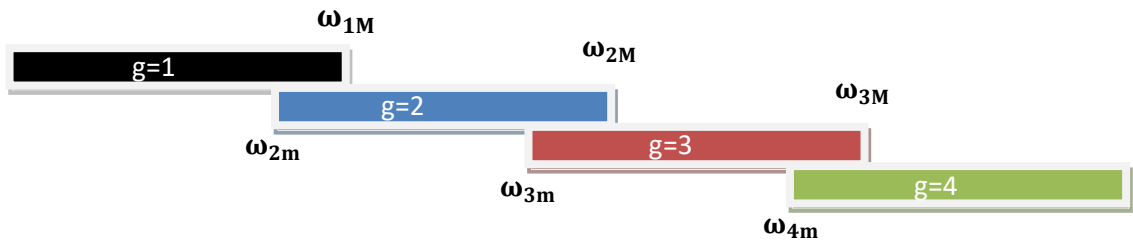


Fig. 1.2. Automate hybride du fonctionnement de la boîte de vitesse automatique.

Exemple 2 Convertisseur DC-DC de type Buck-Boost

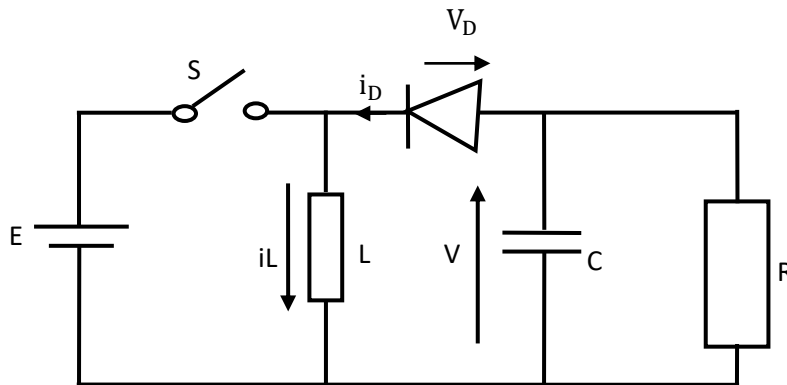


Fig. 1.3. Circuit électrique simplifié du Buck-Boost.

En considérant le schéma simplifié du circuit Buck-Boost avec des composants parfaits. Si on ne permet pas au courant dans l'inductance de s'annuler en excluant le mode de fonctionnement discontinu, la manipulation du commutateur commandé conduit aux deux modes de fonctionnement suivants :

1. Commutateur fermé et diode bloquée.
2. Commutateur ouvert et diode conductrice.

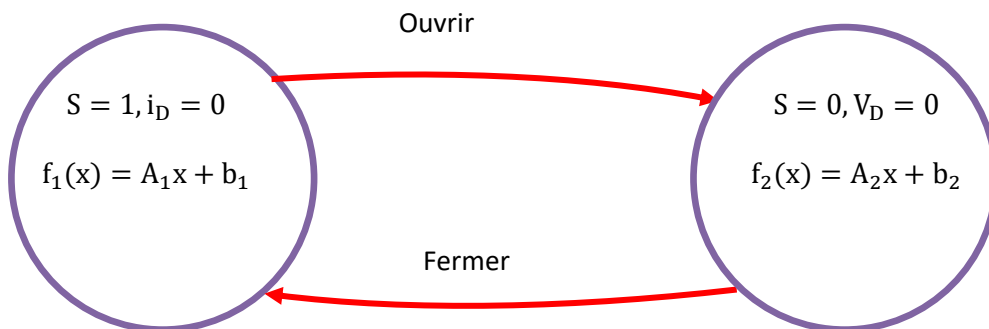


Fig. 1.4. Schématisation du fonctionnement hybride du Buck-Boost

En mode 1, il y a transfert d'énergie à l'inductance sous forme magnétique alors que la capacité alimente la charge. Lorsqu'on ouvre le commutateur, le circuit se trouve en mode 2 pendant lequel l'énergie emmagasinée dans l'inductance est restituée vers la capacité et la charge. Si on laisse le temps à l'inductance de se décharger

complètement, la diode se bloque et le courant dans l'inductance s'annule, le circuit passera en mode discontinu c'est ce mode qui a été exclu du fonctionnement. Noter que la description du convertisseur multicellulaire le plus simple (à deux paires d'interrupteurs) avec ce formalisme nécessite beaucoup de calcul pour définir les domaines invariants et les fonctions de gardes.

1.4.1. Séquence d'exécution dans un système hybride :

Une exécution dans un système hybride est représentée par l'évolution temporelle des états hybrides, elle est essentiellement caractérisée par des segments de temps pendant lesquels les dynamiques continues évoluent et des instants de temps bien précis de l'arrivée d'évènements qui causeraient les transitions et par suite les changements de comportements [19][31][48]. Une version simplifiée de la définition du temps hybride ou séquence de temps proposée dans [52] est la suivante :

Définition 1.16 : (temps hybride ou séquence de temps)

Un temps hybride est un ensemble ordonné d'intervalles de temps $T = \bigcup_{i=0}^{i=N} I_i$ fini ou infini tels que :

- $I_i = [t_i, t_{i+1}^-]$ pour $0 \leq i < N$;
- Si $N < \infty$, $I_N = [t_N, t_{N+1}^-]$ avec $t_N \leq t_{N+1}^-$ ou $I_N = [t_N, t_{N+1})$ pour $t_N < t_{N+1}^-$ ou bien carément $I_N = [t_N, \infty)$.
- $t_i \leq t_{i+1}^- = t_{i+1}$ pour tout i .

Le temps qui s'écoule entre l'instant de l'arrivée de l'évènement t_i^- de la $i^{\text{ème}}$ transition et l'instant de l'achèvement de cette transition t_i est supposé très faible i.e. $[t_i^-, t_i] \ll$ et donc des transitions instantanées sont envisagées. Par conséquent, le temps hybride T d'un système sera complètement caractérisé par la séquence des instants de commutation t_i i.e. $\langle T \rangle = \{t_i, i = 1, 2, \dots N\}$.

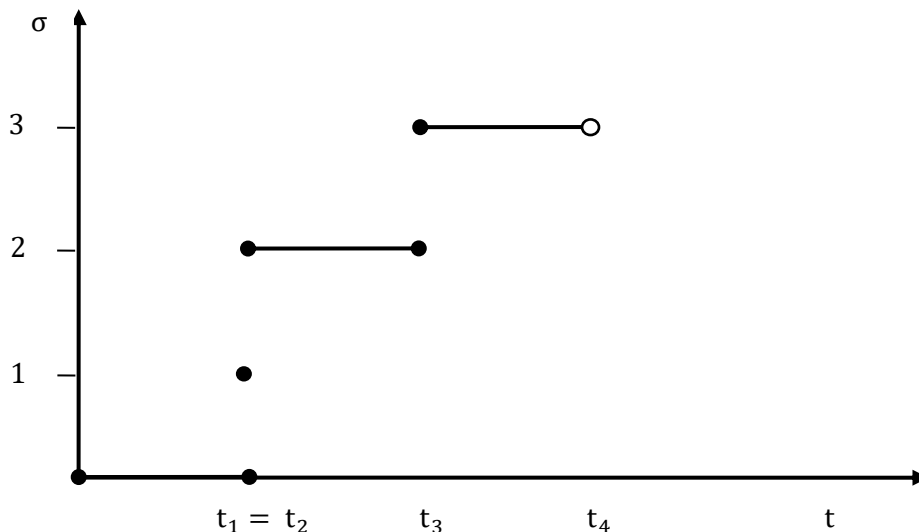


Fig. 1.5. Schématisation du temps hybride

Remarque 1.6 :

A noter que $x_i(t_{i+1}^-)$ représente un point de sortie du domaine D_{q_i} (donc appartient à la frontière ou bordure de D_{q_i}) plus précisément si I_i est un intervalle fermé alors $x_i(t_{i+1}^-)$ est un point de la bordure de D_{q_i} ou si I_i est un intervalle ouvert plutôt c'est $\lim_{t \rightarrow t_{i+1}^-} x_i(t)$ qui appartient à la bordure de D_{q_i} .

Trajectoire hybride [52] :

Une trajectoire hybride (T, q, x) est constitué d'un temps hybride $T = \bigcup_{i=0}^{i=N} I_i$ et de deux séquences de fonctions $q = \{q_i(\cdot)\}_{i=0}^{i=N}$ avec $q_i(\cdot): I_i \rightarrow Q$ et $X = \{X_i(\cdot)\}_{i=0}^{i=N}$ avec $X(\cdot): I_i \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Exécutions d'un système hybride [18] [19] [24] [31] [48] [52] :

Une exécution d'un système hybride autonome est une trajectoire hybride (T, q, x) de ses variables d'états. La trajectoire hybride est admissible si elle respecte les règles de définition de l'automate.

Définition 1.17 :

Une exécution d'un automate hybride est une trajectoire hybride (T, q, x) qui satisfait les conditions suivantes :

- Condition initiale: $(q_0(t_0), x_0(t_0)) = (q_0, x_0) \in \text{Init}$.
- Évolution du mode discret : $(q_i(t_{i+1}^-), q_{i+1}(t_{i+1})) \in E, x_i(t_{i+1}^-) \in G(q_i(t_{i+1}^-), q_{i+1}(t_{i+1})), x_{i+1}(t_{i+1})) \in R((q_i(t_{i+1}^-), q_{i+1}(t_{i+1})), x_i(t_{i+1}^-))$.
- Évolution continue : pour tout i ,
 1. $q_i(t) = q_i(t_i)$ pour tout $t \in I_i$.i.e. $q_i(\cdot): I_i \rightarrow Q$ est constante dans I_i .
 2. $x_i(\cdot): I_i \rightarrow X$ est solution de $\dot{x}_i = f(q_i(t), x_i(t))$ pour $t \in I_i$ et $x_i(t_i)$ comme condition initiale.
 3. Pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}^-), x_i(t) \in \text{Dom}(q_i(t))$.

Cette exécution est conforme avec la définition de l'automate en (2.15). La deuxième condition qui montre comment s'effectue la transition, mérite d'être clarifiée, en effet, elle montre la relation entre l'état hybride juste avant la transition i.e. $(q_i(t_{i+1}^-), x_i(t_{i+1}^-))$ et celui juste après i.e. $(q_{i+1}(t_{i+1}), x_{i+1}(t_{i+1}))$ en précisant que $x_i(t_{i+1}^-)$ appartient à la garde de l'arc de la transition et $x_{i+1}(t_{i+1})$ appartient à la réinitialisation de la transition correspondante. Il est évident que la garde de la transition peut être attribuée à la validation de cette transition. Enfin, on notera qu'une transition doit s'effectuer (forcer) si l'état continu essaye de sortir du domaine invariant correspondant à l'état discret associé.

Classification des exécutions :

Une exécution (T, q, x) est dite :

- Finie, si $N < \infty$ et I_N est fermé.
- Infinie, si $N = \infty$ ou $\sum_{i=0}^{i=N} (t_{i+1}^- - t_i) = \infty$.
- Zeno, si $N = \infty$ et $\sum_{i=0}^{\infty} (t_{i+1}^- - t_i) < \infty$.

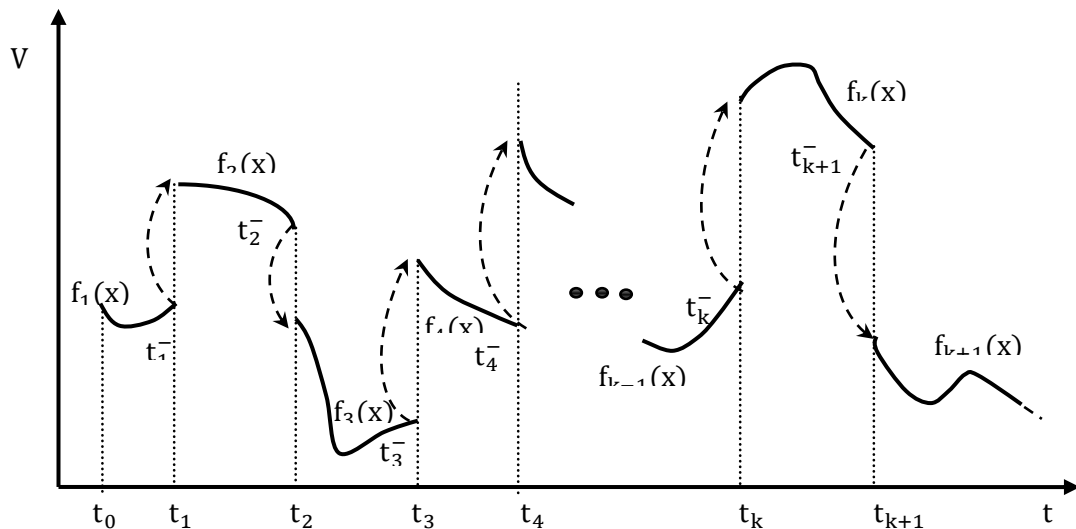


Fig. 1.6 Exemple d'exécution dans un système hybride.

Exécution périodique :

Il est important de noter que les exécutions dans les systèmes hybrides peuvent aussi présenter un comportement périodique. Mais déterminer sous quelles conditions un système hybride accepte ce genre d'exécutions est une opération très complexe. D'autant plus, très peu d'outils mathématiques disponibles sont aptes à analyser les solutions périodiques des systèmes hybrides. Néanmoins, certaines tentatives de généralisation du théorème de Poincaré Bendixon aux inclusions différentielles et systèmes hybrides existent déjà et plusieurs versions d'équivalent hybride du théorème sont proposées.

Rappelons que la définition de comportement périodique de systèmes hybrides ne diffère en rien de celle des systèmes classiques :

Définition 1.18 (Exécution périodique) :

Une exécution (T, q, x) est dite périodique, si elle est infinie et il existe un $T_p > 0$ tel que :

$$\forall t \in T, q(t + T_p) = q(t) \text{ et } x(t + T_p) = x(t) : T_p \text{ est la période de l'exécution.}$$

La notion de sensibilité des trajectoires par rapport aux paramètres et aux conditions initiales ainsi que la théorie de stabilité de Lyapunov sont généralement utilisées pour analyser ce genre de solutions [32] [33] [69] [71].

1.4.2. Bon conditionnement dans un système hybride :

Systèmes hybrides déterministes et non bloquants :

La notion du non blocage est liée à l'existence d'exécution pour toutes les conditions initiales alors que le déterminisme indique son unicité. Nous avons déjà vu que pour un système dynamique continu décrit par une équation différentielle, ces deux propriétés sont vérifiées si le champ vecteur est Lipschitz continu. Cela n'est pas aussi simple pour les systèmes hybrides [4] [19] [24] [31] [38] [52] :

- L'existence et l'unicité de trajectoire sont assurées pendant l'évolution continue par la propriété de Lipschitz des champs vecteurs.

- Reste à définir ces deux notions aux moments des transitions :

Définition 1.19 : [52]

D'une manière générale, un système hybride (autonome) est déterministe si une transition n'est possible que lorsque l'évolution continue est bloquée. De plus si une transition est autorisée alors toutes les autres sont bloquées et la variable continue ne peut être réinitialisée qu'à une seule valeur. Il est déterministe et non bloquant si chaque fois qu'une évolution continue est bloquée (la variable continue atteint la frontière d'un domaine) alors une transition est possible.

L'existence et l'unicité d'exécutions d'un système hybride pour toute condition initiale est formellement mieux exprimé par le lemme suivant :

Lemme 1.1 : [24] [52]

Un système hybride accepte une exécution maximale unique si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. *S'il est non bloquant i.e. pour tout état de transition (q_i, x) ,
 $\exists q_j$ tel que $(q_i, q_j) \in E$ et $x \in G(q_i, q_j)$.*
2. *S'il est déterministe i.e. pour tout état (q_i, x) ,*
 - *Si $x \in G(q_i, q_j)$ pour un certain $(q_i, q_j) \in E$, alors (q_i, x) est un état de transition et $R(q_i, q_j, x)$ est un singleton.*
 - *Si $(q_i, q_j) \in E$ et $(q_i, q_k) \in E$ avec $q_j \neq q_k$, alors $x \notin G(q_i, q_j) \cap G(q_i, q_k)$.*

Remarque 1.7 :

Le non blocage est une condition majeure pour l'évolution du système hybride alors que le déterminisme qui assure l'unicité d'exécution, est une propriété non nécessaire mais désirable pour faciliter l'analyse et la simulation du système. Cependant, dans certaines applications, il est plutôt préférable de travailler avec des systèmes hybrides non déterministes en considérant toutes les exécutions possibles pour modéliser les incertitudes du système physique et de son environnement.

Les conditions de non blocage et de l'unicité d'exécution peuvent être aussi définies à partir des ensembles atteignables et les états de transitions. L'atteignabilité est une notion très importante dans l'étude des systèmes hybrides, elle consiste à regrouper tous les états que la trajectoire du système peut atteindre dans un ensemble appelé ensemble atteignable. Alors que les états de transitions sont définis par tous les états à partir desquels l'évolution continue n'est plus possible.

Dépendance continue de l'exécution par rapport à la condition initiale :

De même que pour les systèmes dynamiques continus, l'exécution dans un système hybride dépend énormément des conditions initiales. C'est une propriété qui exige la continuité du système hybride, elle est impérative pour que le modèle hybride puisse représenter les systèmes réalistes. Par définition, un système hybride est continu si lorsque deux de ses exécutions démarrent de conditions initiales proches restent proches. Par conséquent, on peut toujours imposer une aussi petite distance entre les conditions initiales de façon que les exécutions empruntent la même séquence initiale de commutations. La continuité du système hybride par rapport aux conditions initiales est formellement exprimée par le théorème suivant :

Théorème 1.5 : [31] [52]

Un système hybride H (avec $Init_H = Dom_H = Atteig_H$) est continu si,

1. H est déterministe
2. $\forall (q_i, q_j) \in E, G(q_i, q_j) \cap D(q_i)$ est un domaine ouvert de $\partial D(q_i)$.
3. $\forall (q_i, q_j) \in E, R((q_i, q_j), (\cdot))$ est une fonction continue.
4. Pour toute évolution non bloquante à partir de $(q_0, x_0) \in Init_H$, on a une évolution non bloquante à partir de $\mathbb{V}(q_0, x_0)$.

Se sont les conditions qui assurent la continuité du système hybride par rapport aux conditions initiales et permettent sa simulation. En effet, la dernière condition montre que l'exécution ne peut atteindre les bordures $\partial D(q_i)$ tangentielllement.

Exécutions Zeno : [81]

D'après la définition (classification) du Zenonnesse, le phénomène Zeno est rencontré lorsqu'il y a une infinité de transitions en un temps fini appelé temps Zeno, cela se traduit par des transitions qui se rapprochent de plus en plus sur ce temps. Ce qui fait que lors de la simulation numérique, après un certain temps, on ne peut plus distinguer les instants de commutations successives t_i . Par conséquent, le problème que pose l'existence de ce phénomène dans les systèmes hybrides est qu'on ne peut plus prévoir le comportement du système sur ce temps Zeno et les conclusions tirées des résultats de simulations peuvent être erronées. Ce phénomène est spécifique aux systèmes hybrides et à commutation, il ne peut y exister dans un système dynamique purement continu ou discret. De tel comportement ressemble bien à une dichotomie de l'axe des temps qui ne s'arrête jamais bien que la convergence soit assurée. Le nom Zeno provient d'un ancien (~490 Avant Jésus Christ) philosophe grec Zeno et de son école Ealina. Ce phénomène aussi simple qu'il soit posait un problème mathématique, il n'a été rigoureusement décrit et résolu qu'au vingtième siècle et récemment reconnu comme un phénomène fondamental pour les systèmes hybrides.

Théoriquement ce phénomène peut être illustré par l'exemple suivant [24] :

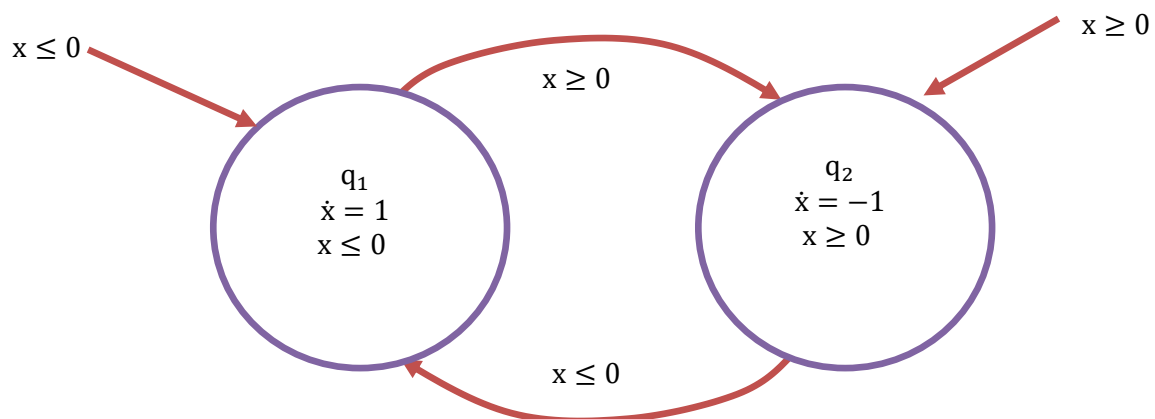


Fig. 1.7 Exemple de système hybride avec des commutations infiniment rapides.

Il est claire que ce système accepte une infinité d'exécutions toutes de types Zeno à partir de n'importe quelles conditions initiales. En effet, le point $x=0$ est atteint à partir

d'un point (t_0, x_0) en un temps fini $t = t_0 + \|x_0\|$ puis de perpétuelles commutations se produisent sans de réelle progression dans le temps. Ce phénomène est aussi observé dans le cas de chute libre d'une balle bondissante.

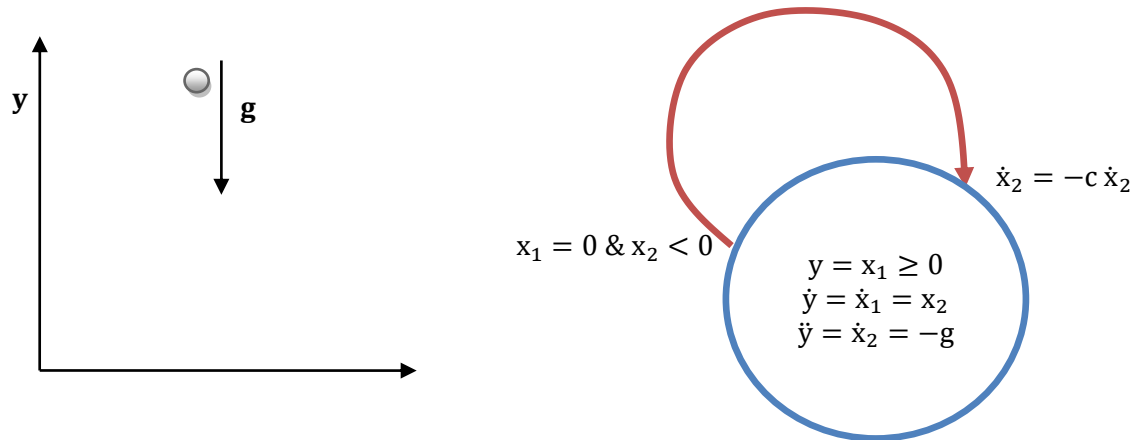


Fig. 1.8 Schématisation hybride de la balle bondissante.

Chute libre : $\ddot{y} = -g$, Collision : $y^+(t) = y^-(t) = 0$ & $\dot{y}^+(t) = -c\dot{y}^-(t)$ avec $c \in [0,1]$ coefficient d'absorption d'énergie à l'impact, g est l'accélération due à la gravité terrestre.

Il est clair que cet exemple de système hybride est déterministe et sans blocage mais avec saut et réinitialisation. Les instants d'impacts peuvent être facilement calculés.

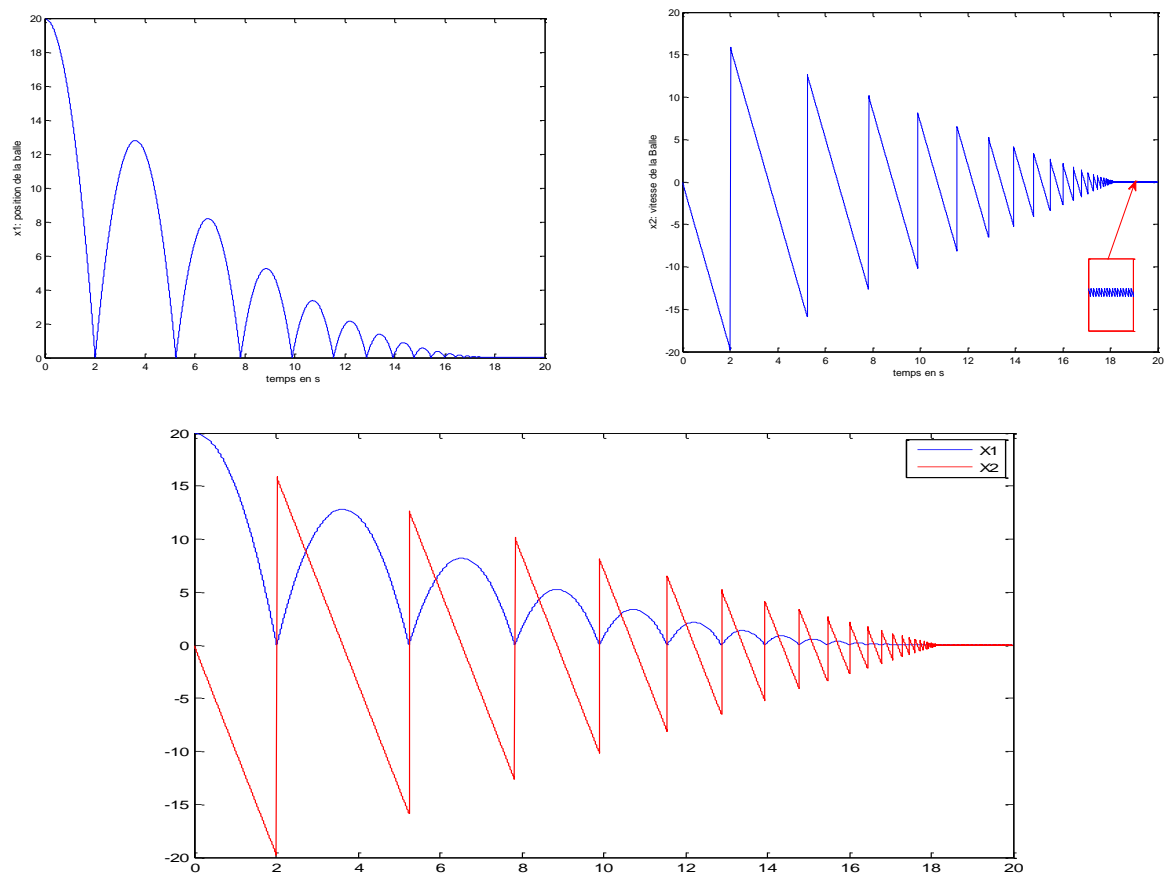


Fig. 1.9 Simulation de la Schématisation hybride de la balle

L'étude du phénomène Zeno est très importante, car des conclusions erronées de la simulation des systèmes peuvent être tirées si celui-ci est ignoré. Cependant, l'ignorance ou l'obtention de conditions d'exclusion de ce phénomène qui est réel et intrinsèque, n'est pas toujours la bonne solution dans la simulation des systèmes hybrides physiques avec une précision finie. Plutôt, l'extension de l'évolution au-delà du temps Zeno par des dynamiques équivalentes ou la régularisation du fonctionnement en considérant toutes les dynamiques ignorées du système constituent bien les approches les plus pratiques pour se charger du problème.

1.4.3. Stabilité d'un équilibre dans un système hybride :

Nous ne voulons pas aborder le concept de stabilité pour un système hybride en général, plutôt nous préférons détailler ce concept dans le chapitre suivant pour les systèmes commutés qui représentent la classe la plus importante des systèmes hybrides où toutes les notions communément utilisées dans les systèmes dynamiques sont transposables. Nous pouvons nous contenter des définitions suivantes :

Définition 1.20 : [52] [54]

$x^* = 0 \in R^n$ est un point d'équilibre pour le système hybride \mathcal{H} , si :

- $f(q,0)=0$ pour tout $q \in Q$ et
- $((q_1, q_2) \in E) \wedge (0 \in G(q_1, q_2)) \implies R(q_1, q_2, 0) = \{0\}$.

Autrement dit, $(q_0, 0) \in \text{Init}$ et $(\tau, q, x) \in \mathcal{H}_{(q_0,0)}$, alors $x(t)=0$ pour tout $t \in \tau$.

De même l'extension de la notion de stabilité d'équilibre aux systèmes hybrides est directe :

Définition 1.21 : [24] [52] [54]

Soit $x^* = 0 \in R^n$ un équilibre du système hybride \mathcal{H} , cet équilibre est stable, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ telle que pour toute exécution $(\tau, q, x) \in \mathcal{H}_{(q_0, x_0)}$ avec $\|x_0\| < \delta$, $\|x(t)\| < \varepsilon$ pour tout $t \in \tau$.

Définition 1.22 : [24] [52] [54]

Soit $x^* = 0 \in R^n$ un équilibre du système hybride \mathcal{H} , cet équilibre est asymptotiquement stable, s'il est stable et il existe $\delta > 0$ telle que pour toute exécution $(\tau, q, x) \in \mathcal{H}_{(q_0, x_0)}^\infty$ avec $\|x_0\| < \delta$, $\lim_{t \rightarrow \tau_\infty} x(t) = 0$ pour tout $t \in \tau$.

Une extension du théorème 2.2 aux systèmes hybrides peut être directement obtenue.

1.5. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons essayé de faire une démarche progressive pour la représentation des systèmes dynamiques en rappelant les notions de base pour les systèmes dynamiques continus et leurs extensions aux systèmes hybrides ou à structures variables. Le choix d'exemples élémentaires dans la démarche conduit certainement à une meilleure compréhension du phénomène hybride. L'approfondissement des concepts de stabilité ou de stabilisation de ces systèmes a été plutôt réservé aux systèmes commutés qui représentent une classe particulière en relation directe avec nos travaux dans le chapitre suivant.

Chapitre 02 :
Systemes Dynamiques À Commutation
(SDC)

2.1 Étude des Systèmes à champs vecteurs discontinus

L'une des motivations d'étudier les systèmes discontinus provient du fait que la modélisation de certains systèmes technologiques (ex. mécaniques ou électriques) conduit souvent à des équations différentielles discontinues à droites (EDD). Ces dernières résultent aussi de l'approximation des systèmes fortement non linéaires par des systèmes continus par morceaux et l'obtention de systèmes commutés. Les systèmes discontinus sont largement investigués, toutefois certains phénomènes restent incompréhensibles et/ou inconnus jusqu'à maintenant. Ces systèmes sont principalement caractérisés par des transitions entre régions d'espace d'états et la traversée de surfaces de séparation aux niveaux des discontinuités, le problème se complique d'avantage lorsque le système comporte de nombreuses discontinuités et/ou la surface de séparation est commune à plusieurs (plus de deux) régions de l'espace des états. L'étude des équations différentielles discontinues nécessite la généralisation du concept de solution, en effet lorsque les discontinuités à droite sont par rapport à la variable x dans le cas de notre système (2.1) alors la solution n'est pas facile à décrire [21] [38][44] [48].

Supposons que notre système (2-1) possède une discontinuité en un certain point x à partir du quel il change de comportement comme suit :

$$\dot{x} = \begin{cases} f_-(x) & \text{si } \varnothing(x) < 0 \\ f_+(x) & \text{si } \varnothing(x) > 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

Naturellement, cette discontinuité divise l'espace d'états en deux parties par un hyperplan $\varnothing(x) = 0$: on notera par $X^+ = \{x \in \mathbb{R}^n | \varnothing(x) > 0\}$, l'ensemble des x où les dynamiques du système sont décrites par : $\dot{x} = f_+(x)$ et par $X^- = \{x \in \mathbb{R}^n | \varnothing(x) < 0\}$, l'ensemble des x où les dynamiques du système sont décrites par : $\dot{x} = f_-(x)$. Le système ci-dessus est représenté par une équation différentielle discontinue ce qui conduit à la perte de la propriété de Lipschitz ainsi que tous ses avantages.

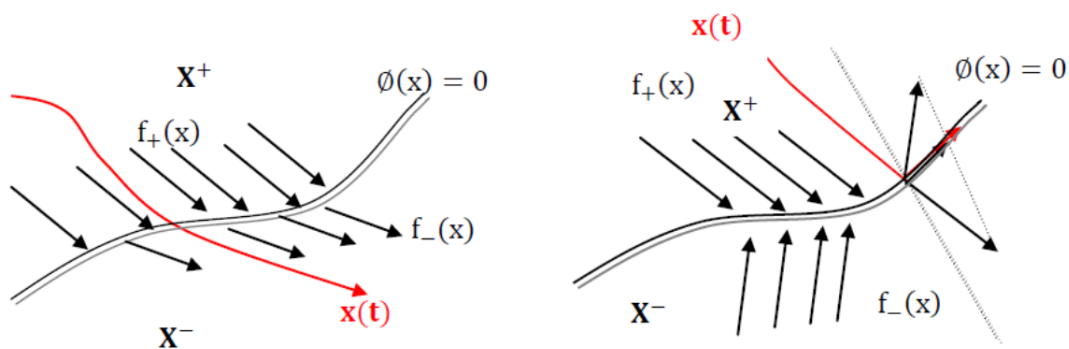


Fig.2.1 solution au sens de caratheodory (à gauche) et au sens de filipove (à droite)

Pour tous les x appartenant à la surface de commutation $\varnothing(x) = 0$, lorsque les deux champs vecteurs $f_-(x)$ et $f_+(x)$ pointent vers la même direction (c.à.d. tous deux vers X^+ ou X^-), l'évolution du système sera celle du domaine d'arrivée. En supposant que $\varnothing(x)$ est différentiable, en désignant par F_+ et F_- les deux projections respectivement de $f_-(x)$ et $f_+(x)$ sur la normale (qui pointe vers X^+), alors en tout point x de la surface de commutation nous avons : $F_+ = \frac{\nabla\varnothing(x)f_+(x)}{\|\nabla\varnothing(x)\|}$ et $F_- = \frac{\nabla\varnothing(x)f_-(x)}{\|\nabla\varnothing(x)\|}$ avec $\nabla\varnothing(x) = \partial\varnothing(x)/\partial x$ gradient de \varnothing au point x . Cela conduit à $(F_-(x) \cdot F_+(x)) > 0$

lorsque les deux champs vecteur pointent vers la même direction, alors que $(F_-(x)).(F_+(x)) < 0$ est obtenue dans les deux autres situations suivantes :

- $F_+(x) > 0$ ($f_+(x)$ pointe vers X^+) et $F_-(x) < 0$ ($f_-(x)$ pointe vers X^-), on a répulsion de la surface de discontinuité des deux cotés. Pour un x de la surface de commutation qui satisfait ces deux conditions, il y a (au moins) deux trajectoire à suivre : l'une allant vers X^+ selon les dynamiques $\dot{x} = f_+(x)$ et l'autre vers X^- selon les dynamiques $\dot{x} = f_-(x)$.
- $F_+(x) < 0$ ($f_+(x)$ pointe vers X^- en s'éloignant de X^+ où il est défini) et $F_-(x) > 0$ ($f_-(x)$ pointe vers X^+ en s'éloignant de X^- où il est défini), il y a attraction vers la surface de discontinuité des deux cotés. Par conséquent, il est impossible d'aller vers X^- ou X^+ lorsqu'on rentre dans la surface de commutation et donc pas de solution ni pour $\dot{x} = f_+(x)$ ni pour $\dot{x} = f_-(x)$.

Ainsi, nous avons deux solutions dans le premier cas (non unicité de la solution) et pas de solution dans le deuxième cas (non existence de solution) c'est les conséquences de perte des propriétés de Lipschitz aux niveaux des discontinuités. Cette situation et surtout l'absence de solution pose un problème conceptionnel pour la stabilité et la stabilisation des systèmes à discontinuités. Une première solution consiste à relaxer le système par une petite hystérésis Δ ou un petit retard Δt temporel au niveau de la commutation ce qui permet de provoquer les commutations juste à coté de l'hypersurface $\emptyset(x) = 0$ et le résultat sera production de commutations rapides. Si $\Delta \rightarrow 0$ ou $\Delta t \rightarrow 0$, les commutations deviennent infiniment rapides conduisant au phénomène de chattering, dans le cas limite le changement se fait par un glissement le long de la surface de commutation et le phénomène associé s'appelle mode glissant ; phénomène qui a attiré l'attention de plusieurs chercheurs.

Une des solutions est due à Filipove¹ [1][21][44] qui proposait une troisième dynamique moyenne de celles du voisinage de la surface de commutation (approximée par une combinaison convexe des deux autres dynamiques) selon laquelle le système évolue ou plutôt glisse le long de la surface de commutation : $\dot{x} = \lambda f_+(x) + (1 - \lambda)f_-(x)$ avec $0 \leq \lambda \leq 1$. Et notre système à discontinuité devient :

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x) = f_+(x) & \text{si } \emptyset(x) > 0 \\ f_3(x) = \lambda f_+(x) + (1 - \lambda)f_-(x) & \text{si } \emptyset(x) = 0 \\ f_2(x) = f_-(x) & \text{si } \emptyset(x) < 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

Où plusieurs valeurs sont assignées au second membre du système (du coté droit de $\emptyset(x) = 0$), par conséquent il peut être représenté par une inclusion différentielle $\dot{x} \in \mathcal{F}$ pour laquelle un concept de solution existe [5].

Remarque 2.1 : [21] [31] [44]

- *En effet, dans le cas de commutation simple (surface commune à seulement deux dynamiques), il est toujours possible de trouver une unique dynamique pour le mode glissant mais pas nécessairement linéaire. Par suite l'existence et l'unicité de la solution de Filipove ci-dessus ne pose pas de problème dans ce cas. Par contre, dans le cas de commutations multiples (surface commune à plusieurs dynamiques), l'unicité du mode glissant est difficile à prouver et généralement non assurée, d'autant plus, la preuve d'attractivité devient un problème très compliqué. Cela est souvent rencontré lorsque certains phénomènes physiques sont négligés dans l'approche de modélisation.*

¹ Une autre version est développée par Utkin pour les systèmes non autonomes

- *Le mode glissant peut aussi se produire quand les champs vecteurs sont tangents par rapport à la surface de commutation i.e. $(F_+(x) \cdot (F_-(x))) = 0$, $\Phi(x) = 0$, dans ce cas les modes sont glissants d'ordres supérieurs. Se sont des modes glissants non réguliers, si on désire affecter aux modes glissants non réguliers des dynamiques différentes de celle proposée par Filipove, notre système (2.2) aura plus de 3 comportements.*
- *L'étude de commutations multiples et du mode glissant non réguliers est un problème très compliqué et sort du cadre de notre travail. Nous ne considérons que le mode glissant simple et régulier donc attractif défini ci-dessous.*

Définition 2.1 : [40]

Soit $X_0 = X^+ \cap X^- \subseteq \{x | \Phi(x) = 0\}$ une surface commune des deux bordures de X^+ et X^- définie (par ex) par : $\{x | \Phi(x) \geq 0 \text{ pour } x \in X^+\}$, donc la région (ou l'ensemble de points) :

$$S_0 = \{x \in X_0 | F_+(x) < 0 \wedge F_-(x) > 0\} \quad (2.3)$$

est appelé région du mode glissant régulier pour notre système, si cette région est non vide, le système a un mode glissant attractif sur S_0 .

Cette définition fournit indirectement un test de l'existence de mode glissant régulier. La définition suivante permet de dégager une propriété importante du mode glissant attractif, qui nous paraît très utile pour caractériser le mode glissant dans le cas des systèmes hybrides et commutés.

Définition 2.2 :

un système a un mode glissant attractif en un point x_ , s'il a une trajectoire qui atteint x_* mais n'a pas de trajectoire qui part d'une condition initiale x_* .*

Si on désire que le système évolue en mode glissant régulier pendant un intervalle de temps $[t_1, t_2]$, la résolution se fait en imposant $\Phi(x) = 0$ pour $t \in [t_1, t_2]$ et donc aussi $\partial\Phi(x(t))/\partial t = 0$ pour $t \in [t_1, t_2]$. Ce qui conduit à :

$$\frac{\partial\Phi(x(t))}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial\Phi(x(t))}{\partial x} [\lambda f_+(x) + (1 - \lambda)f_-(x)] = 0 \quad (2.4)$$

A partir de laquelle λ est déterminée, l'injection de l'expression de λ dans f_3 permet de dégager les dynamiques du mode glissant. Une démarche similaire à celle présentée a été proposée par Navarro-Lopez [60] pour représenter les systèmes dynamiques discontinus avec entrée de commande par un système dynamique hybride.

Remarque 2.2 :

Nous nous sommes limités au cas simple d'une seule discontinuité, les travaux de Filipove sont d'application générale lorsque le système présente plusieurs discontinuités donc représenté par une fonction continue par morceaux.

L'automate hybride pouvant décrire le système augmenté (2.2) est simplement celui du (2.1) augmenté d'un troisième mode (celui de Filipove).

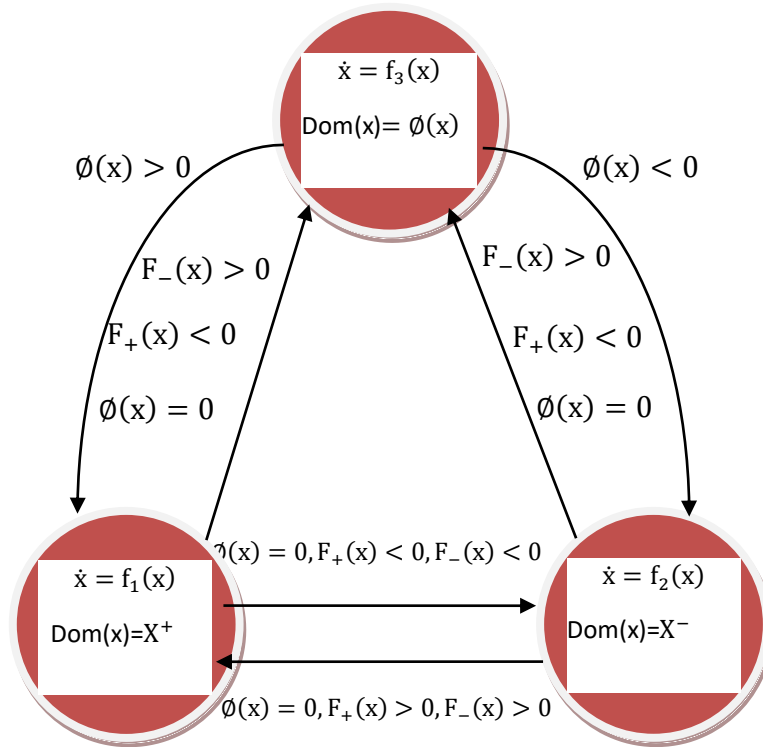


Fig. 2.2. Schématisation hybride de système avec une seule discontinuité.

2.2 Systèmes à commutations

Les systèmes commutés sont présents dans différents domaines de la science et de la technologie comme le contrôle aéronautique et automobile, les télécommunications, le contrôle du trafic, les procédés chimiques, etc.

Le système commuté est une classe spéciale de systèmes à structure hybride ou variable. Semblable aux systèmes à structure variable, la dynamique des systèmes commutés est décrite par différentes équations différentielles dans différentes régions de l'espace et le changement de dynamique se produit lorsque les trajectoires traversent les frontières entre régions. Les systèmes à structure variable peuvent avoir un type particulier de solutions, les solutions dites de mode glissant. La théorie et les différentes applications des solutions de mode glissant dans le contrôle sont étudiées dans de nombreux livres et articles. Contrairement à la théorie du mode glissant, le cas où le système à structure variable n'a pas de solution de mode glissant n'est pas suffisamment étudié. Pour séparer ces deux cas, nous appelons des systèmes à structure variable sans solutions de mode glissant des systèmes commutés. Dans la théorie des systèmes hybrides, le changement de la dynamique des systèmes peut se produire par l'action d'automates ou par d'autres raisons. Dans ce mémoire, la stabilité des systèmes commutés est étudiée. Le problème de la stabilité des systèmes commutés n'est pas simple. Tout d'abord, nous donnons quelques exemples illustrant différents aspects de ce problème et montrant que la stabilité de tous les sous-systèmes n'est pas suffisante pour assurer la stabilité du système commuté globale. À savoir, un système commuté globale, formé par des sous-systèmes stables et instables peut être asymptotiquement stable en fonction de la nature des commutations, c'est-à-

dire en fonction des régions dans lesquelles ces sous-systèmes agissent. Si certains des sous-systèmes sont instables et d'autres sont asymptotiquement stables, le système commuté peut être instable ou asymptotiquement stable ou il peut avoir des solutions périodiques. En outre, dans certains cas, la stabilité de système commuté ne dépend ni de la structure.

Un système dynamique à commutations est un système hybride où la variable discrète $q(t)$ n'est pas vue comme une variable d'état discrète mais soit comme une variable de contrôle de la dynamique continue, soit comme un évènement sans mémoire. Selon cette description, on peut définir les systèmes à commutations comme suit [HAU12]

Définition 2.3 : [84]

(Loi de commutations). Une loi de commutations $\sigma(t), \sigma: \mathbb{R}^+ \rightarrow I$ est une fonction constante par morceaux qui prend ses valeurs dans l'ensemble d'indices de modes I . On peut distinguer dans la littérature deux types de systèmes à commutations : ceux dont les commutations sont autonomes dans le sens où la commutation s'effectue car une condition

de grade est remplie ($\exists(i, i') \in I_2$ tel que $x \in G(i, i')$ et que la condition d'invariance ne l'est plus ($\exists(i, i') \in I_2$ tel que $x \notin D_i$ et $x \in D_{i'}$) et ceux dont la commutation présente un aspect contrôlé, c'est-à-dire que l'état discret change en fonction d'une commande externe.

Sauf mention contraire, on se placera dans le cas de systèmes commutés autonomes invariants dans le temps de la forme

$$x = F_i(x, t), t \in \mathbb{R}^+, i \in I \tag{2-5}$$

Avec l'état $x \in \mathbb{R}^n$ et $f_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ des champs de vecteurs. Par la suite, deux cas seront envisagés :

- Soit les champs de vecteurs sont linéaires, c'est-à-dire $\forall i \in I, f_i(x) = A_i x$

$$x(t) = A_i(x) \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad i \in I \tag{2.6}$$

- Soit les champs de vecteurs sont affines, c'est-à-dire $\forall i \in I, f_i(x) = A_i x + B_i$

$$\dot{x}(t) = A_i(x) + B_i \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad i \in I. \tag{2.7}$$

Définition 2.4 : [84]

(Système à commutations [85]). Soit une famille de fonctions suffisamment régulières : $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, paramétrée par un ensemble d'applications $I = \{t_i\}_{j=0}^S$ tel que

$$R(a, x^j(t^-_{j+1})) = x^{j+1}(t^+_{j+1}) \text{ avec } x^j(t^-_{j+1}) = x^{j+1}(t^+_{j+1}) \tag{2.8}$$

On écrit alors le système à commutation comme :

$$\dot{x} = f_\sigma(x(t)) \tag{2.9}$$

Si $\forall i \in I$, la fonction F_i est affine, on a :

$$\dot{x}(t) = A_\sigma x(t) + B_\sigma \tag{2.10}$$

2.2.1 Systèmes commutés

Un système commuté est un système dynamique qui consiste en un nombre de sous-systèmes à variable continue et une règle logique qui orchestre la commutation entre ces sous-systèmes. Mathématiquement, ces sous-systèmes sont généralement décrits par une collection d'équations différentielles ou différentielles indexées.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), q(t)), \quad (2.11)$$

$$q(t+) = \delta(x(t), q(t)) \quad (2.12)$$

avec la condition initiale $\{q(t_0), x(t_0)\} \in \text{Init}$, où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état continu, et $q(t) \in Q = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$ représente la collection de modes discrets.

La règle logique qui orchestre la commutation entre ces sous-systèmes génère des signaux de commutation, qui sont généralement décrits comme des classes de fonction constantes par morceaux, $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow Q$. Constante par morceaux, nous entendons que le signal de commutation $\sigma(t)$ a un nombre fini de discontinuités sur tout intervalle fini de \mathbb{R} .

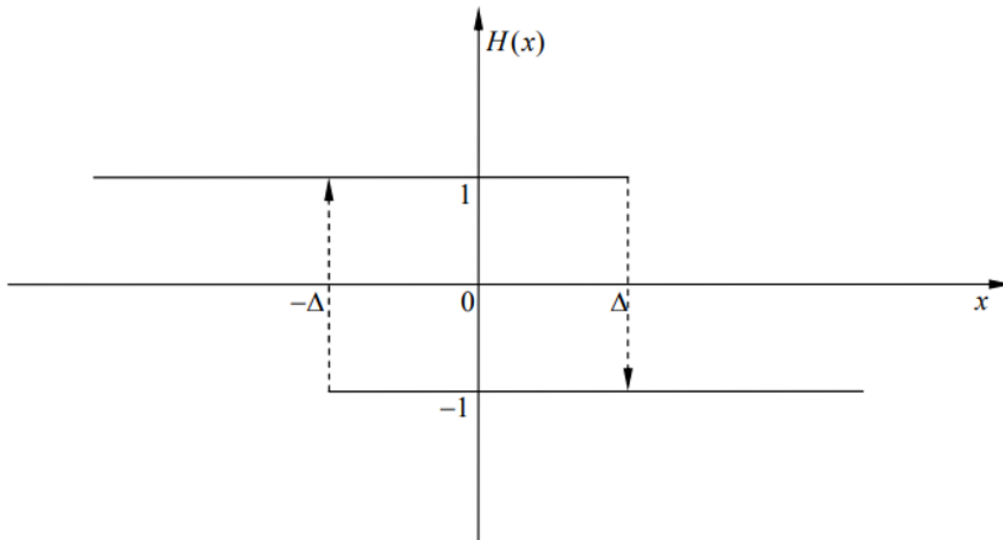


Fig. 2.3. Hystérésis fonction

Exemple 2.1. Un système dynamique avec hystérésis présente des effets de retard car ses paramètres et son évolution dépendent non seulement de son environnement actuel mais aussi de son histoire passée. L'hystérésis se produit dans de nombreux systèmes industriels, économiques et biomoléculaires. Un système dynamique simple avec hystérésis peut être représenté par une équation différentielle, $\dot{x} = H(x)$, avec un $H(x)$ discontinu comme le montre la figure 2.3.

Les systèmes dynamiques avec hystérésis peuvent être modélisés par un système avec deux modes discrets $Q = \{q_1, q_2\}$, et

$$f(x, q_1) = 1, f(x, q_2) = -1,$$

$$\delta(x, q_1) = \begin{cases} q_1 & x \leq \Delta \\ q_2 & x \geq \Delta \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\delta(x, q_2) = \begin{cases} q_1 & x \leq -\Delta \\ q_2 & x \geq -\Delta \end{cases} \quad (2.13)$$

avec la condition initiale $Init = \{q_1, q_2\} \times R$.

2.2.2 Définition formelle des systèmes à commutation

Les systèmes à commutation représentent une classe de systèmes dynamiques hybrides [86,87] qui fascine par sa simplicité structurelle et par la complexité des phénomènes qu'elle peut décrire. Formellement, un système à commutation en temps continu est défini par la relation

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(t, x(t), u(t)), \quad (2.14)$$

où $\sigma(t), \sigma : R^+ \mapsto I = \{1, 2, \dots, N\}$ représente une fonction constante par morceaux, nommée loi de commutation, qui prend des valeurs dans un ensemble d'indices I . $x(t) \in R^n$ représente l'état du système, $u(t) \in R^m$ la commande, et $f_i(\cdot, \cdot, \cdot), \forall i \in I$ sont des champs de vecteurs décrivant les différents régimes de fonctionnement du système. De façon similaire, un système à commutation en temps discret est défini par

$$x(k+1) = f_{\sigma(k)}(k, x(k), u(k)), \quad (2.15)$$

avec $\sigma : Z^+ \rightarrow I$.

La loi de commutation $\sigma(t)$ (ou $\sigma(k)$ pour les systèmes en temps discret) spécifie le régime (sous-système) actif. Seul un sous-système est actif à un instant donné. Le choix du sous-système actif peut être lié à un critère temporel, à des régions ou surfaces déterminées dans l'espace d'état, à un paramètre extérieur, de manière générale au fonctionnement d'un automate. Les modèles (2.14) et (2.15) sont très généraux. Cependant, ils peuvent être affinés moyennant certaines hypothèses. Par exemple, si $u(t)$ n'est pas présent, alors le modèle (2.14) désigne un système autonome. Si les champs de vecteurs des sous-systèmes prennent la forme

$$A_i x(t), \forall i \in I, \quad (2.16)$$

Alors on obtient un système à commutation linéaire

$$\dot{X}(t) = A_{\sigma(t)} x(t). \quad (2.17)$$

Une taxonomie des systèmes à commutation peut être définie par rapport à la loi de commutation σ . Dans ce contexte, on peut identifier un aspect contrôlé (quand la loi de commutation représente une commande externe) et, par opposition, un aspect autonome (la commutation est provoquée par le franchissement d'une frontière dans l'espace d'état).

Une synthèse des différentes autres classes de systèmes à commutation et des problématiques qui leur sont associées est donnée dans [85, 88, 89, 90] et [91].

2.2.3 Classification des signaux de commutation

Dans les systèmes commutés, le mécanisme de commutation est important pour de nombreuses raisons ; l'une de ces raisons est la stabilité, et les critères d'observabilité dépendent également de la loi de commutation $\sigma(t)$. Dans [85], l'auteur a discuté trois types de commutation que nous présenterons ici.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}(x(t)) + B_{\sigma(t)}(u(t)) \\ y = C_{\sigma(t)}(x(t)), x_0 \in R^n, x(t^+) = J_{\sigma(t)}(x(t^-)) \end{cases} \quad (2.18)$$

A- Commutation en fonction du temps

Le signal de commutation dans ce cas est uniquement défini par le temps, c'est-à-dire que l'état continu et les autres paramètres de (2.18) n'affectent pas le comportement de commutation. Pour un temps initial donné t_0 , sur l'intervalle de temps $[t_0; t_3)$ avec $t_0 < t_3 < \infty$, il peut être donné par

$$\sigma : [t_0; t_3) \mapsto I_N \quad (2.19)$$

Ce type de commutation existe pour le cas de la commande en boucle ouverte. La figure (Fig.2.4) représente ce type de commutation

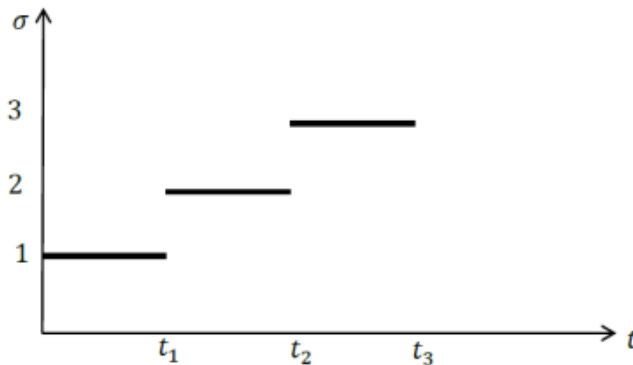


Fig. 2.4: Signal de commutation dépendant du temps.

B- Commutation dépendante de l'état

Dans ce type de commutation, le système (2.18) bascule d'un mode à un autre si l'état continu du système satisfait à la condition de transition. L'idée de commutation dépendante de l'état peut être comprise en considérant un espace d'états continu qui est divisé en de nombreuses régions de fonctionnement par les surfaces de commutation. Chaque région d'exploitation définit son sous-système correspondant. Lorsque la trajectoire du système traverse une surface de commutation, elle saute vers un nouveau sous-système, comme le montre la figure (Fig.2.5). Sur cette figure, les lignes à têtes de flèches indiquent la partie continue de la trajectoire et les lignes en

pointillés indiquent les surfaces de commutation. Le signal de commutation peut être présenté comme suit

$$\sigma(t) = \psi(x(t)) \quad t > t_0 \quad (2.20)$$

C- Commutation contrôlée

Dans ce cas, la commutation peut être contrôlée par le concepteur pour obtenir le comportement souhaité pour le système. Ce type de commutation peut être : une commutation et / ou un état dépendant du temps [92]

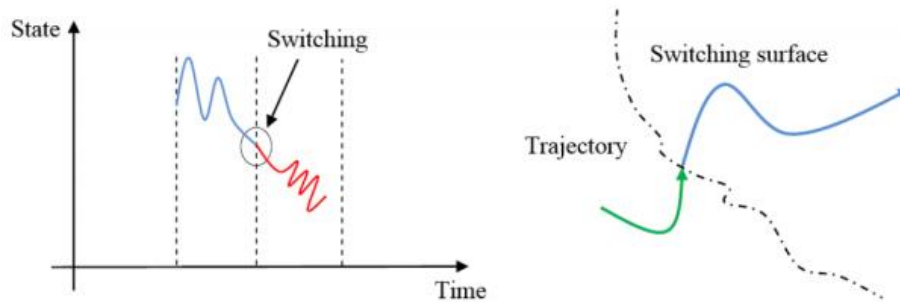


Fig. 2.5: Signal de commutation dépendant de l'état.

$$\sigma(t) = \psi(\sigma(t), x(t)), t > t_0 \quad (2.21)$$

2.2.4 Exemples de modélisations des SDC

Pour beaucoup de systèmes physiques, il est possible d'identifier différents modes de fonctionnement. L'ensemble de ces systèmes définissent la classe des systèmes à commutations. Par exemple, on peut définir des systèmes à cycle de fonctionnement, comme un moteur thermique à 4 temps. Les différentes commutations d'un système sont gérées par une loi de commutations. Celle-ci peut être utilisée pour définir la commande du système, comme dans le cas des convertisseurs de puissance, on parlera alors de commutations contrôlées. Si cette loi est définie par toutes autres variables que la commande (comme le temps, l'état continu, la sortie du système, ...), comme dans le cas d'un moteur thermique, les commutations seront dites autonomes. Afin d'étudier ces systèmes, différentes modélisations peuvent être utilisées. Certaines sont issues d'une approche discrète, comme un automate hybride ou un réseau de Pétri hybride et d'autres sont plutôt fondées sur une approche continue avec une représentation d'état hybride ou un Bond Graph hybride [86].

Dans le cadre de cette mémoire, la classe des systèmes linéaires à commutations sans saut est étudiée. Tout au long de ce mémoire, deux types de modélisations sont utilisées : une représentation d'état hybride et un automate hybride. Les modèles formels correspondants sont rappelés ci-dessous.

À titre d'illustration, revenons à l'exemple d'hystérésis.

Exemple 2.2. Un système avec hystérésis peut être modélisé comme un automate hybride. En particulier, nous traçons sa représentation graphique du modèle d'automates hybrides dans la figure 2.6.

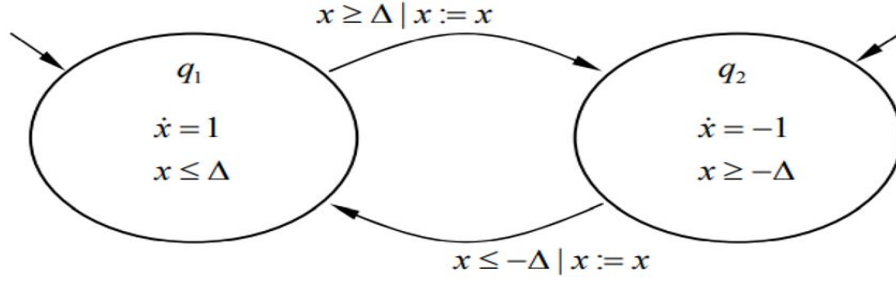


Fig. 2.6 Un modèle d'automates hybrides pour un système dynamique avec hystérésis.

Comme indiqué ci-dessus, tout système commuté peut être modélisé comme un automate hybride. Par contre, tout automate hybride sans sauts dans les états (c'est-à-dire que le mappage de réinitialisation R est l'identité) peut-être écrit comme un système commuté avec les mêmes $Q, X, f, Init$

$$\delta(x, q) = \begin{cases} q & x \in Inv(q) \\ q' & x \in G(q, q') \end{cases} \quad (2.22)$$

et comme illustré dans l'exemple suivant.

Exemple 2.3. L'exemple de régulation de température peut être écrit comme un système commuté avec

$$f(x, OFF) = -x, f(x, ON) = -x + 100,$$

$$\delta(x, OFF) = \begin{cases} OFF & x \leq 69 \\ ON & x \geq 70 \end{cases} \quad (2.23)$$

$$\delta(x, ON) = \begin{cases} OFF & x \leq 70 \\ ON & x \geq 71 \end{cases} \quad (2.24)$$

2.2.4.1. Représentation d'état hybride

La forme générale d'une représentation d'état hybride se définit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t) \\ \dot{y}(t) = C_{\sigma(t)}x(t) + D_{\sigma(t)}u(t) \end{cases} \quad (2.25)$$

où $u(t) \in \mathbb{R}^h, x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement les signaux d'entrée, l'état continu et la sortie du système et $\sigma(t) : t \mapsto \{1, \dots, Q\}$, avec $Q \in \mathbb{N}$, désigne le signal de commutations et indique le mode actif du système parmi les Q modes possibles. La fonction $\sigma(t)$ est constante par morceaux et continue à droite dont la valeur change à chaque instant de commutation $t_k \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{N}$. Entre chaque commutation, l'état discret est défini par $\sigma(t) = \sigma_k \in \{1, \dots, Q\}$. On a donc

$$\sigma(t) = \sigma_k \quad t_{k*1} \leq t \leq t_k$$

avec $t_0 = 0$. Ce type de modélisation ne permet pas de représenter facilement la fonction de transition associée aux modes. C'est-à-dire qu'à chaque instant de commutation t_k , les Q modes possibles sont considérés. Ce modèle peut être utilisé d'une manière générale lorsque la fonction de transition est supposée inconnue. Dans

la littérature, on introduit souvent l'hypothèse de temps de séjour minimum pendant lequel aucune commutation ne se produit.

Hypothèse 2.1 (*Temps de séjour minimum*) *Etant donné un système hybride, il existe une constante $T\delta > 0$ telle que la classe admissible des signaux de commutations satisfait l'inégalité $t_{k+1} - t_k \geq T\delta$ pour tous $k \geq 0$. Dans tout le mémoire, on suppose que le système est tel que les instants de commutation vérifient la condition du temps de séjour minimum.*

2.3 Analyse de stabilité des SDC

Pour un système donné, il est intéressant d'étudier sa stabilité pour connaître son comportement et ses performances après un temps suffisamment grand. Cet intérêt pour la stabilité a commencé par la question majeure de Lagrange (1736-1813) concernant le problème de la stabilité du système solaire et a motivé la recherche mathématique dans ce sens. Puis, en mathématiques et en automatique, la notion de stabilité de Lyapunov (1857-1918) apparaît dans l'étude des systèmes dynamiques. Bien que cette notion de stabilité reste assez intuitive avec les expériences et/ou les simulations, Lyapunov reste le premier à avoir formulé mathématiquement cette idée à la fin du 19^{ème} siècle. Depuis, il est une référence et parle souvent de la stabilité des systèmes au sens de Lyapunov. L'idée consiste à dire que, si un système démarre autour d'un point x à un instant $t = 0$, et que ses trajectoires formées par tous les points décrivant les états possibles du système restent autour de ce point x à tout instant $t > 0$, alors x est stable au sens de Lyapunov. De plus, si tous ces points convergent vers x alors x est asymptotiquement stable. Même après les grandes évolutions des logiciels de simulation, le fait de simuler une trajectoire du système depuis un état initial donné, n'est pas suffisant pour évaluer le comportement global du système, puisque, à chaque condition initiale correspond une trajectoire différente donc, pour étudier correctement le comportement du système en général, il faudrait simuler à partir d'une infinité de points initiaux, ce qui est loin d'être réalisable. Lyapunov nous a donné une méthode facile à manipuler pour tester la stabilité à l'origine : soit un système donné, s'il existe une fonction qui s'annule uniquement à l'origine, définie strictement positive ailleurs, et qui décroît (resp. Décroît strictement) quand le système évolue dans le temps, alors on peut conclure que le système est stable autour de l'origine (resp. Asymptotiquement stable). Cette fonction est appelée fonction de Lyapunov et généralement notée $V(x)$. Elle définit, en quelque sorte, l'énergie du système en n'importe quel point de l'espace d'état.

Dans la littérature, par exemple nous trouverons principalement trois façons d'étudier la stabilité des Systèmes Dynamiques à Commutation (SDC). Citons-les par degré de complexité croissante :

1. La séquence de commutation est inconnue à priori, on s'intéresse alors à la stabilité sous commutation arbitraire.
2. Vérifier que le système est stable pour une séquence de commutation donnée.
3. Étudier l'existence puis la conception d'un signal de commutation qui garantit la stabilité du système.

Pour une présentation intuitive, considérons dans un premier temps un espace d'état continu de dimension deux de même que l'espace d'état discret. Si, pour une commutation arbitraire, le système commuté est Asymptotiquement Stable (A.S), alors il n'y aura pas de problème de conception de la commande. Sinon il faut chercher les contraintes de commutation qui rendent le système à commutation stable. Ces contraintes peuvent conduire à des événements d'état ou des événements du temps. Le respect de ces contraintes permet d'obtenir une loi de commande qui stabilise le système. On verra par la suite toutes les conditions nécessaires et suffisantes de stabilité des SDC commandés arbitrairement ou avec commutations sous contraintes.

La stabilité des systèmes à commutation ne dépend pas seulement de la dynamique de chaque sous-système, mais également des propriétés des signaux de commutation. Par conséquent, l'étude de stabilité des systèmes à commutation peut être divisée en deux types de problèmes. L'une est l'analyse de la stabilité des systèmes à commutation sous des signaux de commutation donnés (peut-être arbitraires, commutations lentes, ...etc.) ; l'autre est la synthèse de mécanisme de commutation stabilisants le système à commutation [93].

Exemple 2.3 En considérant le système à commutation simple suivant, il est constitué de deux modes instables :

$$\dot{x} = A_\sigma x + b_\sigma, \sigma = \{1, 2\}, \text{ où}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -100 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ -100 & 1 \end{bmatrix}, \text{ Avec } b_1 = b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Les deux modes sont bien instables (voir figure 2.7) puisque les deux valeurs propres sont :

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm j31.623$$

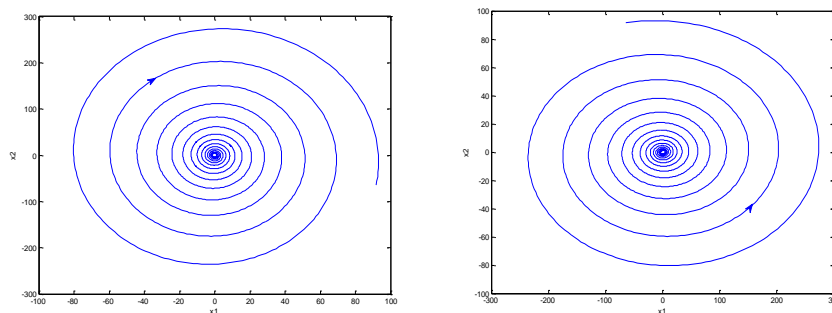


Fig. 2.7 : Les deux systèmes ne sont pas stables

Si on définit les conditions de gardes comme suit :

$$G(1,2) = \{x \in R^2 \text{ et } x_2 = -x_1\}, G(2,1) = \{x \in R^2 \text{ et } x_2 = 0\}$$

Selon cette loi de commutation, le système commuté globale est asymptotiquement stable (voir figure ci-dessous) malgré que les deux sous-systèmes soient instables.

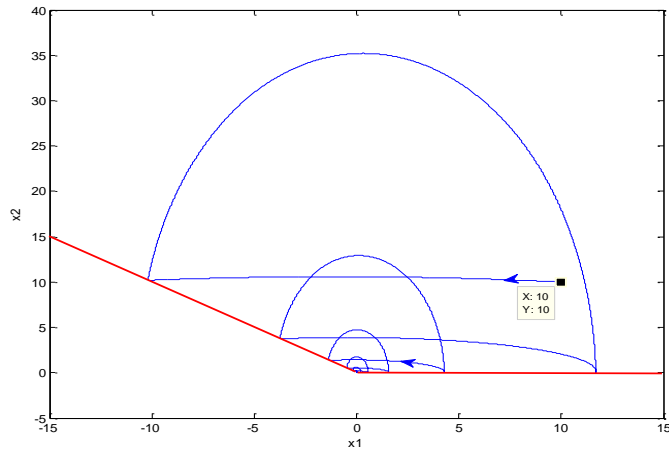


Fig. 2. 8 : Système hybride stable issu de deux sous-systèmes instables.

Exemple 2.4 De même en considérant cette fois-ci un système à commutation simple mais constitué de deux modes stables :

$\dot{x} = A_\sigma x + b_\sigma$, $\sigma = \{1, 2\}$, où

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -100 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ -100 & -1 \end{bmatrix}, \text{ Avec } b_1 = b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Les deux modes sont bien stables (voir figure 2.9) puisque les deux valeurs propres sont :

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm j31.623$$

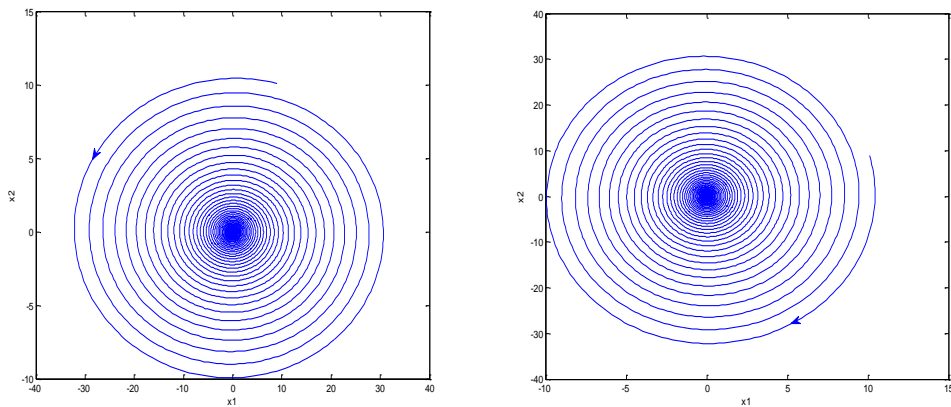


Fig.2.9 : Les deux systèmes sont stables.

En définissant les conditions de gardes suivantes :

$$G(1,2) = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ et } x_2 \leq -0.6x_1\}, \quad G(2,1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ et } x_2 \leq 5x_1\}$$

Alors cette loi de commutation conduit bien à un système commuté globale instable (voir figure ci-dessous) malgré que les deux sous-systèmes soient stables.

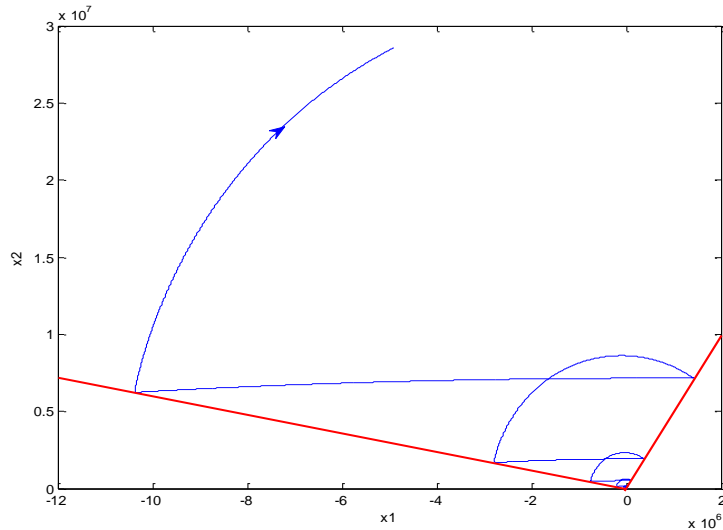


Fig.2.10 : Système hybride instable issu de deux sous-systèmes stables.

Ce n'est pas toujours évident d'observer les surfaces de commutations dans le plan de phase du système commuté globale puisque sa trajectoire est une concaténation de celles des deux modes. Donc une certaine continuité dans la trajectoire du système commuté globale voir exemple suivant.

Exemple 2.5 Par exemple en considérant toujours un système à commutation simple mais constitué de deux modes stables :

$\dot{x} = A_\sigma x + b_\sigma, \sigma = \{1, 2\}$, où

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -6 & -19 \\ 18 & -4 \end{bmatrix}, \text{ Avec } b_1 = b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Evidemment, les deux modes sont stables (voir figure 2.11) et les deux valeurs propres sont :

$$\lambda_{1,2} = -5 \pm j6.3246$$

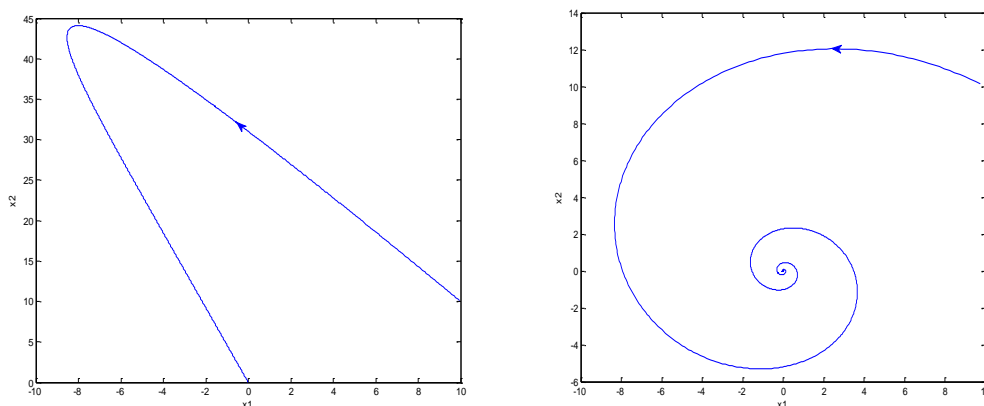


Fig.2.11 : les deux systèmes soient stables.

Si les conditions de gardes sont définies par :

$$G(1,2) = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ et } x_1 x_2 < 0\}, \quad G(2,1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ et } x_1 x_2 \geq 0\}$$

Comme précédemment, cette loi de commutation conduit bien à un système commuté globale instable (voir figure ci-dessous) malgré que les deux sous-systèmes soient stables.

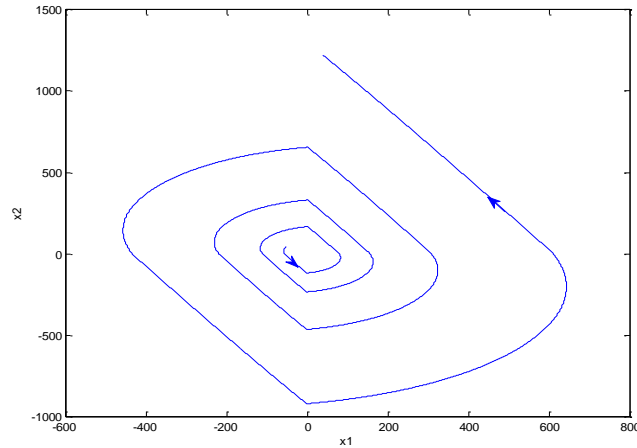


Fig.2.12 : système a commutation globale instable issu de deux sous-systèmes soient stables.

2.3.1 Extension des notions de stabilité aux SDC

Avant de continuer à présenter comment nous pouvons analyser la stabilité des systèmes de commutation par la méthode de Lyapunov, il est nécessaire de se rappeler quelques définitions élémentaires, quelques concepts et quelques outils sur la stabilité des systèmes continus par Lyapunov.[94, 95].

Pour un système physique, les configurations à énergie minimale sont caractérisées par les points d'équilibre et les phénomènes périodiques. Le concept de stabilisation de ces systèmes est traduit par la recherche d'une telle configuration plutôt qu'une autre. Par contre, la stabilité, qui est portée par les propriétés qualitatives des solutions des SDC $\phi(t)$, peut être définie par :

- L'état hybride (x, q) dans sa globalité, dans ce cas on parle de la propriété globale (stabilité totale ou absolue, attractivité totale, etc.). Ces notions n'ont en général que peu d'intérêt.
- Seulement la partie continue x et ce indépendamment de la partie discrète ou du signal de commutation, on parle alors de la propriété uniforme par rapport à q ou σ .
- l'état continu x connaissant le signal de commutation σ . On parle de propriété conditionnelle.

Dans ce travail, et afin de faciliter la présentation des modèles ainsi que la recherche du signal de commutation, nous travaillerons uniquement sur des SDC (2.25) stationnaires dans lesquels le temps n'apparaît pas explicitement dans les équations différentielles. Les sous-systèmes considérés dans les SDC sont autonomes (dans le sens où ils ne dépendent pas d'une commande continue) :

$$\dot{x} = f_{\sigma}(x), \quad x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n \quad (2.25)$$

et dans le cas linéaire :

$$\dot{x} = A_{\sigma}x, \quad x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n \quad (2.26)$$

Remarque 2.3

– Dans le cas où les sous-systèmes ne sont pas autonomes, on suppose qu'il existe un feedback qui les rend autonomes en boucle fermée.

– Les sous-systèmes linéaires de degré n affines en l'état peuvent toujours se transformer en sous-systèmes autonomes de dimension $n + 1$.

$$\dot{x} = A_\sigma x + B_\sigma \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_\sigma & B_\sigma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

2.3.1.1 Définitions de stabilité d'un SDC

On rappelle quelques définitions sur la stabilité à l'origine des SDC. Elles sont très générales car on peut toujours ramener l'étude de la stabilité d'un système à l'étude de sa stabilité à l'origine par un simple changement de variables.

Définition 2.5 : (Stabilité Uniforme et Conditionnelle par rapport à σ) Un SDC est dit :

✓ *Uniformément Stable (U.S) à l'origine par rapport à σ (voir figure 2.13)*

si : $\forall \epsilon > 0$,

$\exists \delta(\epsilon) > 0$ tel que : $\forall x_0 \in \mathcal{X} : x_0 \in \delta(\epsilon)B^n, \Rightarrow \Phi(t, x_0, q_0) \in \epsilon B^n, \forall t \geq 0, \forall \sigma(t)$

✓ *Conditionnellement Stable (C.S) à l'origine par rapport à σ (voir figure*

2.14) si : $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon, \sigma(t)) > 0$ tel que : $\forall x_0 \in \mathcal{X} : x_0 \in \delta(\epsilon, \sigma(t))B^n, \Rightarrow \Phi|_{\sigma(t)}(t, x_0) \in \epsilon B^n, \forall t \geq 0$.

$\Phi(t, x_0, q_0)$ étant la trajectoire généralisée du SDC et $\Phi|_{\sigma(t)}(t, x_0)$ la trajectoire continue du SDC connaissant son signal de commutation hybride $\sigma(t)$.

B^n est la boule ouverte unité centrée à l'origine ($B^n = \{x \in \mathfrak{R}^n : \|x\| < 1\}$) et ϵB^n est la boule ouverte centrée à l'origine de rayon ϵ .

C.à.d. que la stabilité uniforme d'un SDC par rapport au signal de commande σ est traduite par la stabilité de sa solution généralisée hybride φ pour n'importe quelle exécution hybride e_{IH} . Cette définition est illustrée par la figure 2.13. Par contre, la stabilité conditionnelle est traduite par la stabilité de la solution hybride du SDC-C après une exécution suivant le signal de commutation σ donné. Cette définition est illustrée par la figure 2.14.

Autrement dit, la stabilité uniforme d'un SDC est traduite par la stabilité du SDC sous commutation arbitraire et la stabilité conditionnelle traduit la stabilité sous contrainte d'un SDC.

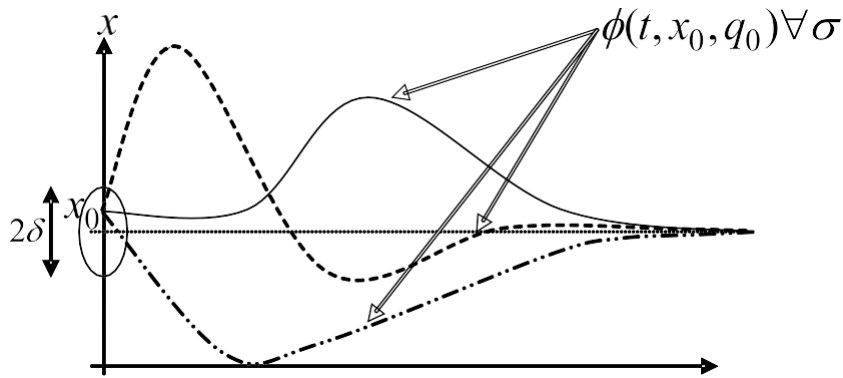


Fig. 2.13 – stabilité uniforme à l'origine d'un SDC

- **Définition 2.6 :** (Attractivité Uniforme et Conditionnelle par rapport à σ) Un SDC est dit :

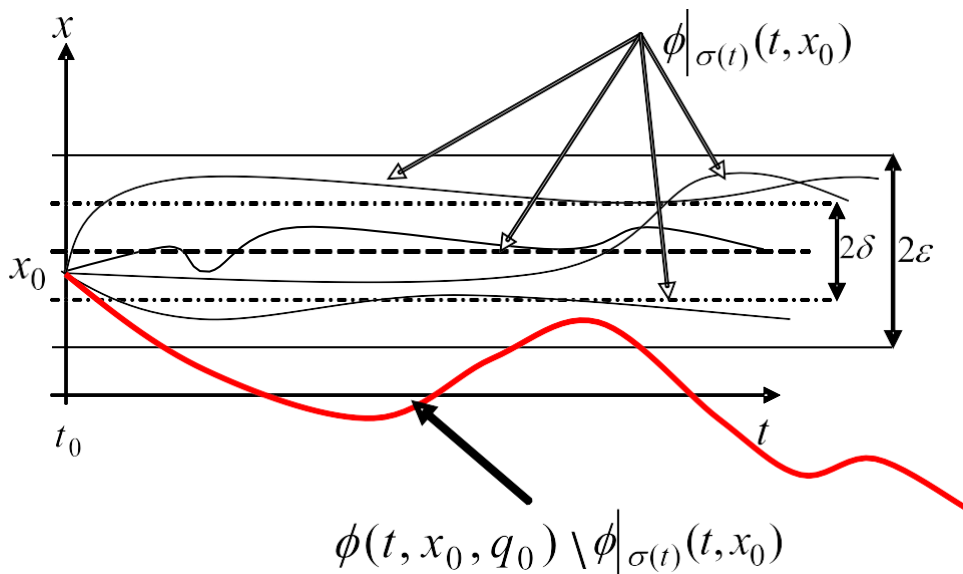


Fig. 2.14 – Stabilité conditionnelle à l'origine d'un SDC

– Uniformément Attractif (U.A) à l'origine par rapport à σ , si : $\exists \delta > 0$ tel que : $\forall x_0 \in \mathcal{X} : x_0 \in \delta B^n \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, x_0, q_0)\| = 0, \forall t \geq 0, \forall \sigma(t)$.

– Conditionnellement Attractif (C.A) à l'origine par rapport à σ , si $\exists \delta(\sigma) > 0$ tel que : $\forall x_0 \in \mathcal{X} : x_0 \in \delta(\sigma) B^n \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi|_{\sigma(t)}(t, x_0)\| = 0$.

L'attractivité uniforme par rapport à σ traduit qu'en s'écartant légèrement du point d'équilibre, la solution généralisée hybride φ pour n'importe quelle exécution hybride e_{IH} . Du système, revient sur ce point après un certain temps (même infini). Par contre l'attractivité conditionnelle traduit qu'en s'écartant légèrement du point d'équilibre, la solution hybride du SDC-C après une exécution suivant un signal de commutation σ donné, revient sur ce point après un certain temps (même infini). Cette définition est illustrée par la figure 2.15.

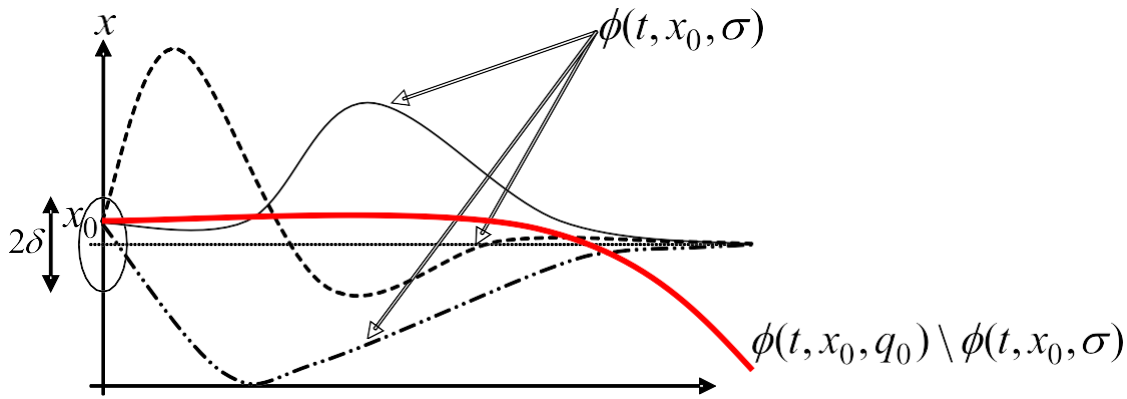


Fig. 2.15 – Attractivité conditionnelle de l'origine d'un SDC

Il est important de rappeler qu'un point équilibre peut-être attractif sans être stable (il

suffit qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\phi(t, x_0, q_0)$ diverge, i.e $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t, x_0, q_0)\| = \infty$

et vice-versa (par exemple les oscillateurs).

De même que la stabilité, l'attractivité uniforme d'un SDC est traduite par une attractivité sous commutation arbitraire, et l'attractivité conditionnelle est traduite par l'attractivité sous contrainte du SDC.

On peut par la suite, définir la stabilité asymptotique qui est, pour un système donné, la combinaison de sa stabilité et de son attractivité.

- **Définition 2.7:** (Stabilité Asymptotique Uniforme et Asymptotique Conditionnelle par rapport à σ)

L'origine d'un SDC est Uniformément Asymptotiquement Stable, U.A.S, (resp. Conditionnellement, C.A.S) si elle est U.S et U.A (respectivement C.S et C.A).

Le concept de stabilité exponentielle contient une information supplémentaire qui est la rapidité de convergence vers l'origine.

- **Définition 2.8:** (Stabilité Exponentielle Uniforme et Exponentielle Conditionnelle par rapport à σ) L'origine d'un SDC est dite :

- ✓ U.E.S Uniformément Exponentiellement Stable si : $\exists \delta > 0, \exists \alpha > 0$ et $\exists \beta \geq 1$ tels que : $\forall x_0 \in \mathcal{X} : x_0 \in \delta B^n \Rightarrow \phi(t, x_0, q_0) \in \beta \exp(-\alpha t) \|x_0\| B^n, \forall t \geq 0, \forall \sigma(t)$.
- ✓ C.E.S Conditionnellement Exponentiellement Stable si : $\exists \delta(\sigma(t)) > 0, \alpha(\sigma(t)) > 0$ et $\exists \beta(\sigma(t)) \geq 1$ tels que : $\forall x_0 \in \mathcal{X} : x_0 \in \delta(\sigma(t)) B^n \Rightarrow \phi(\sigma(t), x_0) \in \beta \exp(-\alpha t) \|x_0\| B^n, \forall t \geq 0$.

α est appelé le taux (ou rapidité) de convergence exponentielle : il est dit uniforme ou non selon le type de stabilité exponentielle considérée.

Cette rapidité, dans les SDC, dépend bien évidemment de la façon dont le système commute, donc du signal de commutation lui-même, σ , puisque le type de stabilité dépend de ce signal.

2.3.1.2 Comportement périodique et stationnaire

D'une façon générale, pour un système donné, quand le temps tend vers l'infini la solution en temps continu $x(t)$ peut atteindre un point stationnaire. Pour les systèmes commandés, ce point stationnaire est typiquement le point fixe désiré ou l'état stable de fonctionnement. Le système peut aussi atteindre un comportement périodique qui définit les conditions de fonctionnement du système dans son état stable. Ces caractéristiques en régime permanent se retrouvent aussi dans les SDC.

2.3.1.3 Point d'équilibre

Dans chaque sous-système dynamique continu stable du SDC (2.25) il existe un point d'équilibre. On parle donc de point d'équilibre d'un mode. Le point x_e est un point d'équilibre du mode $q \in Q$ s'il vérifie $f_q(x_e) = 0$. Il peut être isolé (quand il n'a pas d'autres points d'équilibre autour) ou une partie d'un ensemble de points d'équilibres.

Les points d'équilibre peuvent être stables, instables, asymptotiquement stables.

Définition 2.9 L'état $x_e \in X$ est un point d'équilibre pour le système à commutation si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, x(t, x_e, \sigma) = x_e, \forall \sigma.$$

Définition 2.10 Un point d'équilibre x_e d'un sous-système du SDC (2.25) est :

- Stable si, $\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|x(0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \epsilon, \forall t \geq 0$$

- Instable s'il n'est pas stable.
- Asymptotiquement stable s'il est stable et δ peut être choisi tel que :

$$\|x(0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e.$$

- Globalement Asymptotiquement Stable s'il est stable et, que, pour tout point initial $x(0)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$

2.3.1.4 Cycle limite

Dans l'étude des systèmes continus, on parle généralement des phénomènes oscillatoires qui se produisent dans la dynamique du système. On dit qu'un système donné oscille (avec une amplitude constante) quand il présente une solution périodique, $x(t+T) = x(t), \forall t \geq t_0$, après chaque durée T appelée période du système (ou d'oscillation) [96]. L'image dans l'espace d'état de la solution périodique est une trajectoire fermée, appelée généralement orbite périodique. Un cycle limite est un cas spécial d'une orbite périodique dans laquelle la trajectoire est en même temps fermée et isolée (indiquant la nature d'attractivité ou de répulsion des trajectoires passant non loin du cycle). Ainsi, même s'il existe plusieurs trajectoires fermées dans l'espace d'état, seules celles qui sont isolées sont des cycles limites. Concernant les

systèmes linéaires, ils peuvent avoir plusieurs trajectoires fermées, mais elles ne sont jamais isolées. Les cycles limites ne concernent donc que les systèmes non linéaires donc les systèmes hybrides et plus particulièrement les systèmes à commutation. C'est la raison pour laquelle les cycles limites sont très difficiles à étudier car les outils existants et développés dans la théorie des systèmes linéaires ne peuvent pas être appliqués ou ne sont pas toujours efficaces. La motivation derrière l'étude des cycles limites est basée sur leur importance dans les applications réelles et le manque d'outils mathématiques pour les étudier.

Comme les points d'équilibre, les cycles limites peuvent être stable, instables ou asymptotiquement stables.

Considérons la solution généralisée d'un SDC passant par x_0 à l'instant t_0 . Le phénomène périodique aura lieu quand :

$$\phi(t + T) = \phi(t), t > t_0, T > 0.$$

L'image de cette solution dans l'espace d'état est une orbite fermée représentant un cycle limite γ défini par :

$$\gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x(t) = \phi(t), 0 < t < T\}.$$

Pour donner les définitions sur la stabilité du cycle γ , on a besoin d'introduire le concept de voisinage d'une orbite, pour cela on définit :

$$U_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(x, \gamma) < \epsilon\}$$

Avec $\text{dist}(x, \gamma)$, la distance minimum entre le point x et le point de γ le plus proche, tel que,

$$\text{dist}(x, \gamma) = \inf_{y \in \gamma} \|x - y\|.$$

Maintenant la stabilité du cycle limite peut être définie :

Définition 2.11 Un cycle limite γ est dit :

– *Stable*, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$x_0 \in U_\delta \Rightarrow x(t) \in U_\epsilon, \forall t \geq 0$$

– *Instable*, s'il n'est pas stable

– *Asymptotiquement Stable*, s'il est stable et que δ peut être choisi tel que :

$$x_0 \in U_\delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x(t), \gamma) = 0$$

– *Globalement Asymptotiquement Stable*, s'il est stable et que pour tout $x(0)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x(t), \gamma) = 0, \forall x(0) \in \mathbb{R}^n$$

Cette définition est réduite à la définition 2.10 si γ représente juste un point d'équilibre. Une solution périodique d'un SDC forme donc un cycle limite de commutation et une région de fonctionnement (orbite fermée) autour du point désiré x_d . Il existe une infinité de cycles limites autour de x_d définis par différentes

conditions initiales. Ces cycles peuvent être, par exemple, les résultats d'une commande qui utilise la commutation pour atteindre un point désiré.

Dans les cas réels, on essaye toujours de faire fonctionner les SDC autour d'un point de fonctionnement désiré, alors l'étude en régime permanent se réduit à étudier un cycle limite qui est périodique et stationnaire.

- **Théorème 2.1** Soient $x_{ij}, \forall \{i, j\} \in \mathcal{Q}$, les points de commutation du SDC (2.25) du mode i au mode j . Si ces points convergent vers des points fixes x_{ij}^0 , on dit que la solution du SDC tend vers un cycle limite hybride.

En effet, si les points de commutation x_{ij} sont convergents, on a un signal de commutation qui se répète, donc la même séquence de modes ainsi que les mêmes temps de séjour dans ces modes. A partir de l'unicité de la solution pour un état initial hybride donné $(t_i, x(t_i), q_j, \{i, j\} \in \mathcal{Q})$, l'orbite formée par les trajectoires issues de ces points et les dynamiques respectives à la séquence des modes sera une orbite fermée et stationnaire. La trajectoire du système dans l'espace d'état réel tend vers un cycle limite hybride.

Des événements d'état qui ont lieu périodiquement forment une séquence de commutation répétitive et stationnaire. Donc un cycle limite de commutation peut localiser une région autour d'un point de fonctionnement désiré ou bien le point désiré même, si le système est Zeno.

Soit $\varepsilon_0 \subseteq \varepsilon$ l'ensemble des transitions d'une telle séquence de commutation répétitive qui forme un cycle limite hybride. On nommera l'exécution due à cet ensemble de transitions e_{IH_0} . Deux cas sont possibles pour le fonctionnement du SDC, voir figure 2.16 pour l'illustration :

– **Point de fonctionnement :**

x_f est un point de fonctionnement du SDC dit "SDC-Zeno" si son exécution e_{IH} tend vers e_{IH_0} et que les points de commutation x_{ij} tendent vers x_f pour tout $(i, j) \in \varepsilon_0$.

Le système commute donc à une fréquence infiniment grande irréalisable en pratique.

– **Cycle limite hybride :**

γ est un cycle limite hybride du SDC si son exécution e_{IH} tend vers e_{IH_0} et que les points de commutation x_{ij} tendent vers x_{ij}^0 pour tout $(i, j) \in \varepsilon_0$ avec $x_{ij}^0 \neq x_{ij}^0$.

2.3.1.5 Cas des SDC linéaires par morceaux

Les systèmes linéaires par morceaux (2.28) sont des SDC caractérisés par un ensemble de sous-systèmes linéaires affines en l'état :

$$\dot{x} = A_\sigma x + B_\sigma \quad (2.28)$$

Avec $x \in IR^n$ l'état continu du SDC, et σ un signal de commutation qui représente la commande, et assure le changement entre les dynamiques de ses sous-systèmes

$$\sigma(t) \in \mathcal{Q} = \{1, \dots, M\} \quad \forall t \geq 0 \quad (2.29)$$

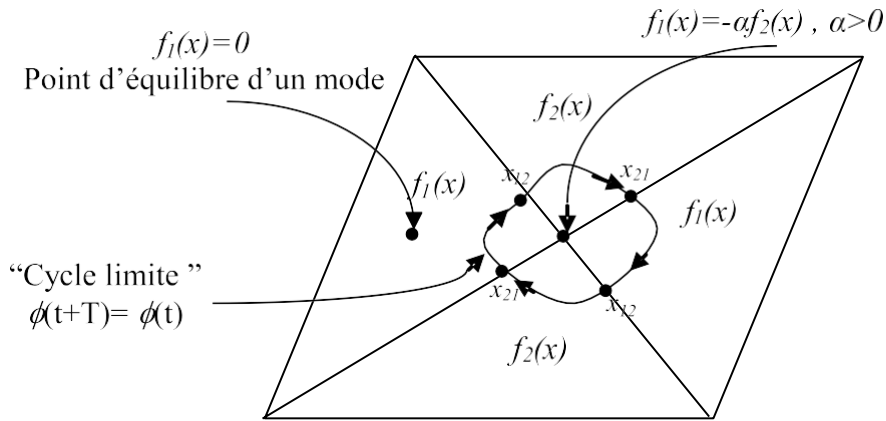


Fig. 2.16 : Point de fonctionnement, points d'équilibres et cycle limite d'un SDC

Ce changement de mode a lieu dans l'espace d'état, quand la trajectoire continue $x(t)$ arrive sur une surface de commutation. Ces surfaces sont généralement représentées par :

$$S_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid G_{(i,j)} = 0, \{i, j\} \in \mathcal{Q}\}. \quad (2.30)$$

Qui représentent la commutation du mode i au mode j .

les auteurs ont considéré que ces surfaces étaient des hyperplans de type

$$S_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid C_{ij}x + d_{ij} = 0\}$$

Où C_{ij} est un vecteur de dimension n et $\{i, j\} \in \{1, \dots, N\}$.

On définit $XX_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma(t) = i\}$ pour $i \in \mathcal{Q}$.

Proposition 2.1 [97]

Considérons le SDC (2.28) - (2.29). On suppose qu'il existe une solution périodique γ avec k commutations par cycle, représentées par k points de commutation x_{ij}^0 sur k surfaces de commutation différentes et une période du cycle $T = T_1 + T_2 + \dots + T_k$, avec $T_i = > 0 \forall i \in \{1, \dots, k\}$ les temps de séjour dans chaque mode du cycle. Alors $\forall x_{ij} \in S_{ij}, \forall x_{li} \in S_{li}$ avec $\{i, j, l\} \in \mathcal{Q}^3$, et x_{ij} est un point de commutation qui succède au point de commutation x_{li} , on aura :

$$\begin{cases} x_{ij} = e^{A_i T_i} x_{li} + (e^{A_i T_i} - I) A_i^{-1} B_i, \forall (i, j), (l, i) \in \varepsilon_0 \\ C_{ij} x_{ij} + d_{ij} = 0, \forall (i, j) \in \varepsilon_0 \\ (C_{ij} (e^{A_i T_i} x_{li} + (e^{A_i T_i} - I) A_i^{-1} B_i) + d_{ij})^2 > 0 \forall t \in [0, T_i[, \forall (l, i) \in E_0, \forall (i, j) \in \varepsilon \end{cases} \quad (2.31)$$

et la solution périodique du cycle limite hybride γ peut être obtenue avec une condition initiale $x_{ij}^0 \in S_{ij}$ par

$$x_{ij}^0 = [I - e^{A_{k-i+1}T_{k-i+1}} \cdots e^{A_i T_i}] \sum_{n=1}^{k-1} e^{A_k T_k} \cdots e^{A_{n+1} T_{n+1}} (e^{A_n T_n} - 1) A_n^{-1} B_n + (e^{A_k T_k} - 1) A_k^{-1} B_k.$$

La première égalité de (2.31) représente la solution du point de commutation à partir du point de commutation précédent, suivant la dynamique du mode actif. La deuxième égalité confirme l'appartenance du point de commutation à une surface de commutation. La troisième condition garantit que la trajectoire entre deux points de commutation successifs ne coupe aucune surface de commutation. Pour trouver le point fixe $x_{ij}^0 \in S_{ij}$ du cycle limite hybride γ , on résout récursivement l'évolution de la trajectoire du cycle. Le résultat désiré peut être obtenu par la méthode de Poincaré sachant que $x_{ij} = x_{ij}^0$. Pour plus de détails sur la démonstration de la proposition 2.1, le lecteur peut se référer aux travaux de Gonçalves et Rubensson.

2.3.1.5.1 Stabilité du cycle limite hybride

Soit un SDC. On suppose qu'il existe un cycle limite hybride γ périodique de période T . La stabilité de ce cycle sera déterminée par la méthode de Poincaré ou Poincaré Maps. Il est possible d'analyser la stabilité locale en utilisant la méthode de Poincaré. L'idée est de perturber un point de commutation et d'analyser comment la perturbation évolue pendant un cycle de commutation. La trace de la perturbation pendant un cycle est représentée avec une matrice de transition en temps discret. Les valeurs propres de la matrice déterminent si la perturbation diminue après un cycle d'évolution ou non. Ceci indique la stabilité du cycle limite.

Considérons une trajectoire entre deux surfaces de commutation successives, S_{ij} et S_{li} $\{(i, j), (l, i)\} \in \varepsilon_0^2$, définie par la première égalité de (2.31). La perturbation du point x_{jl} due à une perturbation sur le point de commutation x_{li} est donnée par

$$dx_{ij} = \frac{\partial x_{ij}}{\partial x_{li}} dx_{li} + \frac{\partial x_{ij}}{\partial T_i} dT_i = e^{A_i T_i} dx_{li} + (A_i x_{li} + B_i) dT_i \quad (2.32)$$

où dT_i est le petit changement de temps de séjour dans le mode i . Par la suite, on introduit la notion de déviation sur un hyperplan de commutation S_{ij} , due à une perturbation sur le point de commutation x_{ij} et sur le temps de séjour T_i dans le mode i :

$$dS_{ij} = C_{ij} \frac{\partial x_{ij}}{\partial x_{li}} dx_{li} + C_{ij} \frac{\partial x_{ij}}{\partial T_i} dT_i = C_{ij} e^{A_i T_i} dx_{li} + C_{ij} (A_i x_{ij} + B_i) dT_i \quad (2.33)$$

Les contributions de dx_{ij} et de dT_i devraient donner une déviation virtuelle zéro sur la surface de commutation puisque le point de commutation appartient à l'hyperplan de commutation

$$dS_{ij} = 0 \Rightarrow dT_i = - \frac{C_{ij} e^{A_i T_i}}{C_{ij} (A_i x_{ij} + B_i)} dx_{li} \quad (2.34)$$

Ceci nous permet de trouver la trace de la perturbation sur x_{ij} due à celle de x_{li} en combinant les équations (2.32) et (2.34)

$$dx_{ij} = \left(I - \frac{(A_i x_{ij} + B_i) C_{ij}}{C_{ij} (A_i x_{ij} + B_i)} \right) e^{A_i T_i} dx_{li} \quad (2.35)$$

La stabilité du cycle limite est donc liée à la stabilité de ces points de commutation $x_{ij}, (i, j) \in \varepsilon_0$. Ces points sont stables si la Jacobienne de l'application "Poincaré" de la relation (2.10) a toutes ses valeurs propres à l'intérieur du cercle unitaire [4].

Proposition 2.2 *Considérons le SDC (2.28) -(2.29). On suppose qu'il existe un cycle limite γ , avec une période de cycle T , qui est transversal ($C_{ij}(A_i x_{ij} + B_i) \neq 0$) à toutes les surfaces de commutation $S_{ij}, (i, j) \in E_0$ aux points respectifs x_{ij} . Soit $W_i, i \in \{1, \dots, k\}$ telle que*

$$W_i = \left(I - \frac{(A_i x_{ij} + B_i) C_{ij}}{C_{ij}(A_i x_{ij} + B_i)} \right) e^{A_i T_i} \quad (2.36)$$

γ est un cycle limite localement stable, si les valeurs propres de la fonction $W = W_k W_{k-1} \cdots W_2 W_1$ sont toutes à l'intérieur du cercle unitaire. Il est instable si au moins une valeur propre de W est à l'extérieur du cercle unité.

2.3.2 Stabilité des systèmes à commutation par Lyapunov

Le théorème suivant donne un résultat standard relatif à la stabilité asymptotique des systèmes SLS en utilisant des fonctions de Lyapunov.

- **Théorème 2.2** [98] *Le système SLS est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une fonction de Lyapunov*

$$V(\varepsilon_k, k) \quad (2.37)$$

Telle que :

$$\alpha_1(\|\varepsilon_k\|) \leq V(\varepsilon_k, k) \leq \alpha_2(\|\varepsilon_k\|) \quad (2.38)$$

Et sa différence le long de la solution de (2.5) vérifie

$$\mathcal{L} = V(\varepsilon_{k+1}, k+1) - V(\varepsilon_k, k) \leq \alpha_0(\|\varepsilon_k\|) \quad (2.39)$$

Avec α_0, α_1 et α_2 des fonctions k^∞

Cette théorie tire des conclusions très générales difficiles à mettre en œuvre dans la pratique, car l'existence de (ε_k, k) ne peut être systématiquement vérifiée. La fonction quadratique de Lyapunov est un outil général pour étudier la stabilité des systèmes linéaires. Récemment, ce concept a été largement intégré dans les systèmes SDH en général et des systèmes SLS en particulier, Dans le cadre de ce mémoire nous nous intéressons qu'à l'analyse de la stabilité et à la stabilisation des PWA par une fonction de Lyapunov quadratique commune.

2.3.2.1 Application de la théorie de Lyapunov aux SDC

En plus des difficultés rencontrées dans l'analyse de stabilité des systèmes continus, qui parfois reste très compliquée, les systèmes à commutation imposent des conditions supplémentaires pour conclure sur leur stabilité. Cela vient de l'influence des changements brusques de dynamique et de l'influence des dynamiques discrètes sur les dynamiques continues et vice versa. Les exemples présentés constituent une façon intuitive pour montrer ces influences et les conditions sur l'état du SDC à respecter au moment de la commutation.

Ces conditions supplémentaires à vérifier et à prendre en considération pour les SDC augmentent, d'un côté, la complexité du problème de stabilité, et de l'autre, l'intérêt de l'étude de la stabilité de ces systèmes. Néanmoins, dans la littérature, il existe plusieurs exemples qui prouvent qu'en général nous ne pouvons pas conclure sur la stabilité du SDC en étudiant séparément les composantes continues.

- **Théorème 2.3** [98] (*Théorème de stabilité par Lyapunov pour les SDC*) Soit $x_e = 0$ (l'origine) un point d'équilibre du SDC autonome (1.3), avec $x(0) = x_0$ et $\sigma(0) = q_0$. On suppose qu'il existe un ensemble $D \subseteq \mathcal{Q} \times \mathbb{R}^n$ tel que $(q, x_e) \in D$ pour certains $q \in \mathcal{Q}$. S'il existe une fonction $V : D \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 telle que : $\forall q \in \mathcal{Q}$
 - $V(q, x_e) = 0$
 - $V(q, x) > 0, \forall (q, x) \in D - \{0\}$
 - $\dot{V}(q, x) = \frac{dV(q, x)}{dt} = \frac{\partial V(q, x)}{\partial x} f_q(x) \leq 0$ (resp. < 0), $\forall (q, x) \in D$

Alors l'origine est stable (resp. Asymptotiquement stable).

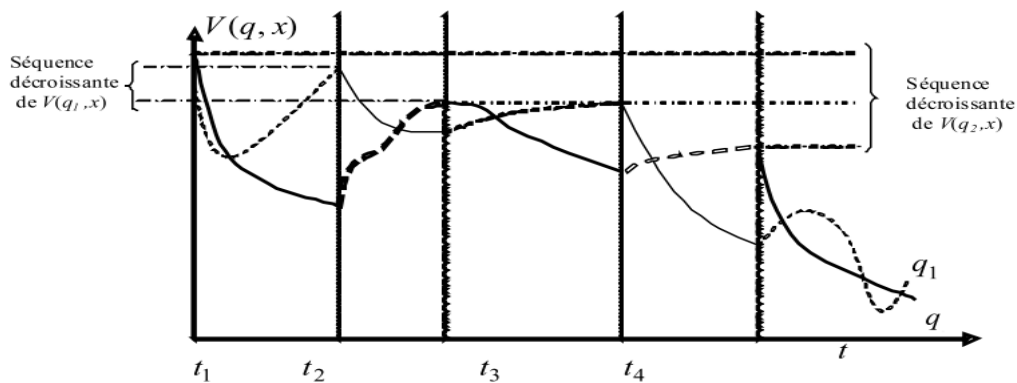


Fig. 2.17 : Fonctions "Lyapunov-Like" d'un SDC formé de deux modes q_1 et q_2

2.3.2.1.1 Fonction de Lyapunov Quadratique Commune (FLQC)

Les théorèmes 2.1 et 2.2 de stabilité par Lyapunov des systèmes continus peuvent avoir des extensions directes qui fournissent des outils de base pour l'étude de la stabilité uniforme des systèmes à commutation (2.25) et (2.26). L'obtention de ces extensions nécessite l'existence d'une fonction de Lyapunov unique et commune à tous les modes du SDC ((2.25) ou (2.26)) qui aura son dérivé négatif le long sa trajectoire hybride e_{IH} . (suivant une exécution acceptée). Ici on s'intéresse à l'obtention de la condition de G.U.A.S (Globalement Uniformément Asymptotiquement Stable) et/ou G.C.A.S (Globalement Conditionnellement Asymptotiquement Stable) du SDC

- **Théorème 2.4** [98] Soit $x_e = 0$ (l'origine) un point d'équilibre du système (2.25), avec $(x(0) = 0, \sigma(0) = q_0)$. Soit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble qui contient l'origine. S'il existe une fonction $V : D \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 telle que :

$V(x)$ est définie positive sur D

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} f\sigma(x) \leq 0 \text{ (resp. } < 0 \text{)}, \forall x \in D, \forall \sigma \in \mathcal{Q} \quad (2.40)$$

alors l'origine est globalement uniformément stable (resp. Globalement Uniformément Asymptotiquement stable).

Ce théorème est connu dans le domaine hybride de même que le théorème 2.3 en continu. Une fois que la fonction V du théorème 2.4 existe, le SDC (2.25) est convenablement stable avec des commutations arbitraires. Pour avoir la stabilité du SDC sous commutations arbitraires, trois conditions sont nécessaires :

1. le SDC soit autonome de la forme du (2.25),
2. tous les sous-systèmes sont stables individuellement,
3. l'origine est un point d'équilibre stable à tous les modes

Alors, il n'est plus nécessaire de faire le contrôle de commutation pour la stabilité. Si non, nous devons trouver la bonne commutation entre les sous-systèmes et nous avons besoin de plus de restriction sur les moments de commutations pour garantir la stabilité du système.

L'existence d'une FLQC est une condition suffisante, mais n'est pas nécessaire pour la stabilité des SDC.

En utilisant la relation avec les inclusions différentielles, des auteurs ont exprimés ce problème de stabilité en termes de fonction de Lyapunov quasi-quadratique en reformulant le SDC (2.25) sous forme d'une inclusion différentielle.

- **Théorème 2.5** [98] *L'origine $x = 0$ de l'inclusion différentielle*

$$\dot{x} \in F = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_M\} \quad (2.41)$$

est asymptotiquement stable si et seulement si, il existe une fonction de Lyapunov $V(x)$ strictement convexe, homogène (du second ordre) et quasi-quadratique :

$$V(x) = x^T P(x)x$$

$$P(x) = P^T(x) = P(\tau x), \forall x \neq 0 \text{ et } \tau \neq 0$$

dont la dérivée satisfait l'inégalité :

$$\dot{V} \leq -\gamma \|x\|^2, \gamma > 0.$$

Autrement dit, l'origine de l'inclusion différentielle linéaire (2.41) dans IR^n est asymptotiquement stable, si et seulement si, il existe un nombre $m \geq n$, une matrice $L \in IR^n$ de rang n et M matrices.

$$\Gamma_s = (\gamma_{ij}^{(k)})_{i,j=1}^m \in IR^{m \times m}, \forall k = \{1, \dots, M\},$$

à diagonale dominante négatives, tels que la relation

$$A_k^T \mathcal{L} = \mathcal{L} \Gamma_k^T, \forall k = \{1, \dots, M\}$$

soit vérifiée.

Ceci implique que la stabilité des systèmes à commutation est liée à l'existence d'une fonction de Lyapunov commune pour l'ensemble des sous-systèmes. D'un point de vue pratique, la recherche numérique ou analytique d'une telle fonction $V(x) =$

$x^T P(x)x$, ou aussi d'une matrice L , n'est pas aisée. Cette difficulté à obliger les auteurs à limiter leurs recherches à des fonction de Lyapunov quadratiques de la forme.

$$V(x) = x^T P x$$

avec P une matrice constante.

Une condition suffisante de stabilité des SDC linéaires de la forme (2.26) est l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique.

L'existence d'une telle fonction pour le système (2.26) peut être exprimée en termes d'inégalités matricielles linéaires LMI (Linear Matrix Inequality - LMI)

$$A_q^T P + P A_q < 0, \quad \forall q \in \mathcal{Q}$$

dont la solution peut être trouvée par des algorithmes d'optimisation convexe

- **Théorème 2.6** [98] *Considérons le système (2.26), S'il existe une matrice P , S.D.P ($P = P^T > 0$), telle que*

$$A_q^T P + P A_q \leq 0 \text{ (resp. } < 0), \forall q \in \mathcal{Q} \quad (2.42)$$

Lors l'origine est globalement stable (resp. Globalement exponentiellement stable) à l'origine et la fonction $V(x) = x^T P x$ est une fonction de Lyapunov de ce système.

L'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune peut, une fois trouvée, être utiliser dans la stabilisation des SDC. Cette existence se traduit par une stabilité ou une stabilisabilité quadratique.

2.3.2.1.2 Partition de l'espace des états :

En plus du caractère naturel du partage de l'espace des états des systèmes commutés, il est évident qu'on peut utiliser la partition de l'espace des états pour exploiter les idées proposées dans les fonctions de Lyapunov multiples sans qu'on sache les trajectoires aux instants des commutations.

Les deux problèmes majeurs dans la partition de l'espace des états sont la construction des régions et l'assurance de la continuité de la fonction de Lyapunov multiple aux niveaux des surfaces de commutation. Par exemple, on peut supposé que toutes les partitions associées aux champs vecteurs peuvent être approximées par des régions coniques. Ces dernières facilitent la formulation de la question d'analyse des systèmes commutés linéaires affines, mais posent de grands problèmes dans la phase de synthèse lorsque les régions sont inconnues (à déterminer). D'autres types de partitions basées sur les approximations polytopique ou ellipsoïdale sont plus connus et largement utilisés par les célèbres Johansson & Rantzer ainsi que Morari & ses coéquipiers, les résultats de leurs formulations sont facilement manipulables aux surfaces des commutations (aux prix de certaines complexités géométriques). En effet, la géométrie des régions est généralement très complexe, elle fait intervenir l'approximation d'une forme par une autre, maximisation de volumes ou l'inclusion d'une forme dans une autre, ces techniques sont largement investiguées en commande optimale et prédictive où les objectifs sont bien définies par des fonctions de coût.

Si on prend un système commuté simple " linéaire", la partition est comme suit :

$$\dot{x} = A_i x, \quad i = 1, \dots, m \quad \text{pour tout } x \in \Omega_i. \quad (2.43)$$

Où les $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^n$ sont des régions de l'espace d'intérieurs disjoints tel que : $\bigcup_i \Omega_i = \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Les surfaces de commutation du mode i vers le j sont définies par l'intersection des deux bordures :

$$S_{i,j} \subseteq \partial\Omega_{i,j} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j. \quad (2.44)$$

Ces surfaces représentent généralement des hyperplans et sont telles que $S_{i,j} \neq \emptyset$ pour deux régions adjacentes. La partition est telle que la fonction de Lyapunov V constituée par la concaténation d'un ensemble de fonction de Lyapunov $V_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$V = \sum_1^m \alpha_i V_i, \quad \alpha_i = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad V_i = x^t P_i x. \quad (2.45)$$

Dans la théorie de Lyapunov, les régions Ω_i sont caractérisées par :

$$\Omega_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \dot{V}_i(x) = \frac{\partial V}{\partial x} A_i x \leq 0 \right\}. \quad (2.46)$$

En ce qui concerne le comportement des fonctions d'énergie aux niveaux des surfaces des commutations $S_{i,j}$, la description dépend de l'approche suivie, c'est là où interviennent les différentes définitions de la fonction de Lyapunov multiple de la section précédente. On peut exiger que V_i soit égale à V_j aux moments des commutations, $V_i \geq V_j$ ou même autoriser $V_i \leq V_j$ pour un certain temps, ou si on connaît $x(t)$ aux instants des commutations, utiliser par exemple la formule « complexe » de Decarlo.

Le plus naturel est de considérer $V_i \geq V_j$ lors de la transition du mode i vers j , c'est simple et conduit à la stabilité (stabilisation) du système commuté mais c'est très conservative. En effet, dans ce cas, on exige de l'énergie du mode i soit supérieur à celle du mode j qu'il ne lui est pas physiquement lié. Dans ce cas, nous avons :

$$\Omega_{i,j} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid V_i \geq V_j \right\}. \quad (2.47)$$

En supposant que les régions Ω_i et $\Omega_{i,j}$ peuvent être décrites (ou approximées) par des régions coniques, nous aurons :

$$\Omega_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x^t Q_i x \geq 0 \right\}. \quad (2.48)$$

$$\Omega_{i,j} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x^t Q_{i,j} x \geq 0 \right\}. \quad (2.49)$$

L'application de la S-procédure [16] [65], nous obtenons les conditions de stabilité suivantes :

S'il existe des matrices $P_i^t = P_i > 0$ et des réels $\delta_i > 0, \delta_{i,j} > 0$ telle que :

$$\begin{cases} A_i^t P_i + P_i A_i + \delta_i Q_i \leq 0, & \forall i = 1, \dots, m \\ P_j - P_i + \delta_{i,j} Q_{i,j} \leq 0, & \forall i, j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (2.50)$$

Alors le système commuté est asymptotiquement stable.

Cette formulation simple et élégante est moins conservative que l'utilisation de fonction de Lyapunov commune, et contraint les \dot{V}_i d'être négative seulement dans les régions d'activation des modes correspondants. Elle peut être facilement résolue par LMI du Matlab. Cependant, les régions coniques se prêtent mal aux systèmes commutés affines et surtout lors de la synthèse où les régions sont inconnues.

2.3.2.1.3 Optimisation géométrique :

Dans beaucoup de cas la partition naturelle de l'espace d'état d'un système commuté est adoptée, elle est implicitement donnée par la définition du système. C'est le cas ci-dessus lorsque les surfaces de séparation sont définies par des hyperplans, les régions formées par l'intersection des hypersurfaces associés sont directement sous forme polyédrale. Cependant, bien que ces résultats soient globaux, si le système commuté linéaire provient de linéarisation autours de certains points singuliers, l'estimation de la région d'attraction devient nécessaire pour en assurer la validité des domaines d'approximation. Maximiser les volumes de ces régions d'invariance sous forme polyédrale est pratiquement impossible, on fait souvent recours à l'inclusion de ces régions dans des ellipsoïdes. En commande, la maximisation ou la minimisation de volume de régions convexes est souvent liée à la forme ellipsoïdale dont on sait manipuler [16].

Alors si plutôt les régions de notre système ci-dessus sont des polyèdres donnés par :

$$\mathcal{P}_i = \{x \in \mathbb{R}^n | a_i^t x \leq 1\}. \quad (2.51)$$

Dont-on veut prouver l'invariance par rapport à l'ellipsoïde centré à l'origine.

$$\varepsilon_i = \{x \in \mathbb{R}^n | x^t R_i^{-1} x \leq 1\}. \quad (2.52)$$

L'ellipsoïde ε_i est contenu dans \mathcal{P}_i si et seulement si

$$\max\{a_i^t x | x \in \varepsilon_i\} \leq 1. \quad (2.53)$$

Ce qui est équivalent [16] à : $a_i^t R_i a_i \leq 1, \forall i \in \mathbb{I}$, par suite nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.3: [16]

Si l'optimisation convexe suivante :

$$\text{minimiser } \log \det R_i^{-1} \left| \begin{array}{l} R_i > 0 \\ R_i A_i^t + A_i R_i < 0 \\ a_i^t R_i a_i \leq 1 \end{array} \right.$$

a une solution, alors le système commuté $\dot{x} = A_i x$ est asymptotiquement stable avec une région d'attraction $\varepsilon_i = \{x \in \mathbb{R}^n | x^t R_i^{-1} x \leq 1\}$ dont le volume est maximum dans le polyèdre $\mathcal{P}_i = \{x \in \mathbb{R}^n | a_i^t x \leq 1\}$.

2.4 Systèmes commutés linéaires affines par morceaux (PWA) :

Si ce travail vise essentiellement les convertisseurs d'énergie, alors il s'articule automatiquement autour des systèmes. En effet, la classe des systèmes PWA est d'extrême importance en électronique de puissance puisque la modélisation de la plupart des circuits à commutation conduit à ce modèle. D'autant plus toutes interconnexions de circuits contenant des saturations, des relais ou des composants à zones mortes se réduisent à l'étude de systèmes PWA. Plus généralement l'importance de cette classe de systèmes provient du faite que les modèles PWA représentent le meilleur approximant de tout autre phénomène non linéaire complexe [6] [35] [40].

Le système général affine par morceaux suivant, capture toute la classe des systèmes PWA :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + b_i + \check{B}_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) + c_i + D_i u(t) \end{cases}, \quad i \in \mathbb{I} = \{1, \dots, m\} \ \& \ x \in \Omega_i. \quad (2-54)$$

Toutefois, nous ne pouvons parler des systèmes PWA sans citer l'approche générale proposée par M. Johansson et al et détaillée dans son fameux livre [40]. Ce livre qui constitue une extension de ses travaux de thèse et les résultats d'une série de publications de Rantzer et Johansson est actuellement la meilleure référence sur les systèmes PWA. Bien que notre travail est mené toute autrement, nous préférons présenter un bref résumé de ces précieux travaux. L'approche proposée et présentée ci-dessous, elle est essentiellement basée sur la continuité de fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux, voici un résumé de ce qui été présenté dans [40] :

Lorsque le système est autonome on obtient le système affine suivant :

$$\dot{x} = A_i x + b_i, \quad i \in \mathbb{I} = \{1, \dots, m\} \quad \text{pour tout } x \in \Omega_i \quad (2-55)$$

De même que précédemment, les $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^n$ sont des régions polyédrale fermées de l'espace d'intérieurs disjoints tel que : $\cup_i \Omega_i = \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Les surfaces de commutation $S_{i,j} \subseteq \Omega_{i,j} \subseteq \mathbb{R}^n$ du mode i vers le mode j sont définies par l'intersection des deux bordures :

$$S_{i,j} = \text{int}(\Omega_{i,j}) = \text{int}(\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j). \quad (2-56)$$

$\text{Int}(\cdot)$ et $\partial(\cdot)$ désignent respectivement l'intérieur d'un ensemble et sa bordure, $S_{i,j} \neq \emptyset$ pour deux régions adjacentes. Si nous nous intéressons à l'équilibre "isolé" au point $x^* = 0$, il n'y a aucune raison que tous les sous-systèmes possèdent ce point comme un équilibre commun.

Il est donc convenable de séparer les deux ensembles suivants :

$$\mathbb{I}_0 = \{i \in \mathbb{I} | b_i = 0\}. \quad (2-57)$$

$$\mathbb{I}_1 = \{j \in \mathbb{I} | 0 \notin \Omega_j\}. \quad (2-58)$$

Si les régions sont des polyèdres (convexes) fermés, elles peuvent être décrites par l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces i.e. pour chaque région Ω_i , il existe une matrice G_i et un vecteur g_i d'un côté, alors que les surfaces de commutation sont déjà décrites aussi par des hyperplans tel que :

$$\Omega_i = \{x \in \mathbb{R}^n | G_i x + g_i \geq 0\}. \quad (2-59)$$

$$S_{i,j} = \{x \in \mathbb{R}^n | h_{i,j}^t x + g_{i,j} = 0\}. \quad (2-60)$$

Où l'inégalité \geq est appliquée par élément, afin d'éliminer le terme affine le changent de variable suivante a été adopté :

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2-61)$$

Ce qui conduit à :

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}_i \bar{x}, \quad \bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & b_i \\ 0_{1 \times n} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2-62)$$

Si la région Ω_i sera décrite dans cet espace augmenté par :

$$\Omega_i = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^{n+1} | \bar{G}_i \bar{x} \geq 0\}, \quad \bar{G}_i = [G_i \ g_i]. \quad (2-63)$$

Alors on aura, le modèle général du système PWA dans cet espace augmenté.

Noter qu'une très grande simplification est obtenue lorsque s'il y a continuité des champs vecteurs aux surfaces de commutation.

2.4.1 Points d'équilibre :

La vérification si un sous-système possède un point d'équilibre dans sa région correspondante, est déterminé de la façon suivante :

$$x_i^{eq} = \{x | A_i x + b_i = 0, G_i x + g_i \geq 0\}. \quad (2.64)$$

Si la matrice A_i est inversible, l'obtention de ce point est facile. En effet, on aura à résoudre seulement :

$$x_i^{eq} = -G_i A_i^{-1} b_i + g_i \geq 0. \quad (2.65)$$

Si cette inéquation n'est pas vérifiée pour un certain (G_i, g_i) c'est que le sous-système i n'a pas d'équilibre dans la région qu'on lui a associée.

Lorsque cet équilibre existe, on peut toujours le ramener à l'origine.

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} x - x_i^{eq} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -x_i^{eq} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{x} = T \bar{x}. \quad (2.66)$$

Par la transformation $\bar{x} = T^{-1} \bar{z}$, on obtient un système PWA avec un équilibre à l'origine.

2.4.2 Mode glissant :

Comme nous l'avons déjà vu, on peut facilement vérifier si le système possède un mode glissant attractif en faisant le test suivant :

Pour une surface de commutation $S_{i,j}$ incluse dans le domaine $\Omega_{i,j}$, $S_{i,j} = \{x \in \mathbb{R}^n | h_{i,j}^t x + g_{i,j} = 0\}$, nous avons un mode attractif pour des $x \in S_{i,j}$ telle que :

$$S_{i,j} = \{x \in \Omega_{i,j} | h_{i,j}^t (A_i x + b_i) < 0 \wedge h_{i,j}^t (A_j x + b_j) > 0\}. \quad (2.67)$$

Si $S_{i,j} \neq \emptyset$ alors le système admet un mode glissant attractif en tout $x \in S_{i,j}$. Cela peut se faire en rédigeant un algorithme qui traduit ces conditions.

2.4.3 Exemple de système PWA :

Pour les circuits électriques en particulier les convertisseurs représentables par un modèle PWA, il est facile d'obtenir sans calcul une fonction ayant les propriétés de fonction Lyapunov commune à tous les modes en se basant seulement sur des considérations physiques. Puisque il n'y a pas de sauts pour ces systèmes, cette fonction est continue et sa dérivée est continue sauf aux points de commutations.

Exemple 2.6 (convertisseur Buck-Boost):

Figure.n représente un circuit simplifié d'un convertisseur bien connu appelé buck-boost. Sous des conditions normales de fonctionnement, la diode est conductrice lorsque l'interrupteur physique est ouvert ($\rho = 1$) et bloquée quand l'interrepteur est fermé ($\rho = 0$).

Le vecteur d'état $x = \begin{pmatrix} i \\ v \end{pmatrix}$ est composé du courant dans l'inductance et la tension aux bornes de la capacité avec la convention de signe indiquée dans la figure.

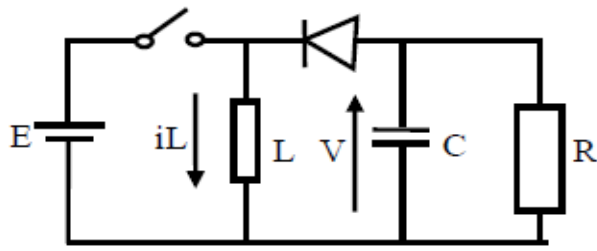


Fig.2.18 Circuit simplifié du Buck-Boost

$$\begin{cases} A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}; & b_1 = \begin{bmatrix} E/L \\ 0 \end{bmatrix} \\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}; & b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases};$$

Les valeurs normalisées sont données par : $E=1, R=1, L=1$ et $C=1$.

Les matrices correspondantes au modèle sont données par :

L'équation d'état est :

$$\dot{x} = A_{\sigma}x + b_{\sigma}$$

C'est à dire :

$$\begin{pmatrix} \dot{i} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\rho}{L} \\ -\frac{\rho}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1-\rho}{L} \\ 0 \end{pmatrix} E$$

Stratégies de commande:

Une commande à retour d'états peut être déduite si on dispose d'une fonction d'énergie de Lyapunov. Plusieurs approches et techniques de commande à retour d'états peuvent être envisagées. Une première consiste à choisir à tout instant une valeur de ρ_i de façon à rendre $\dot{V}_{\rho} < 0$, comme on peut permettre à \dot{V}_{ρ} de prendre certaines petites valeurs positives.

Stratégie de descente maximum:

Le plus simple consiste à choisir une valeur de ρ_i de façon à ce que tous les termes de \dot{V}_{ρ} soient négatifs ou nuls. cette stratégie utilise toujours la valeur la plus négative de \dot{V}_{ρ} . Cette stratégie conduit à un mode glissant ou phénomène zéno, ce glissement se produit le long de la surface de commutation si les conditions d'atteignabilité sont satisfaites.

Stratégie de minimum de commutation :

Une autre stratégie qui permet de réduire le nombre de commutations, consiste à garder la même valeur de ρ_i jusqu'à ce que la trajectoire atteinte la surface de commutation définie par $\dot{V}_{\rho} = 0$ et de changer ρ_i de façon à ce que $\dot{V}_{\rho} < 0$. Même si cette stratégie évite le glissement le long de la surface de commutation, la fréquence des commutations s'accélère en s'approchant de la référence.

Pour les convertisseurs, les modes ou les sous-systèmes ne partagent pas un même point d'équilibre (équilibre commun), la stabilisation de ces systèmes se fait autour d'un point de fonctionnement désiré.

Points de fonctionnement admissibles :

Pour les circuits à commutation, l'objectif est de trouver une loi de commutation de façon à ce que la sortie ait une valeur pré-spécifiée. On peut utiliser la même approche

pratiquée sur le modèle moyen où le rapport cyclique ρ est considéré comme variable de commande continue mais bornée entre zéro et 1.

Par exemple en considérant l'énergie stockée dans l'inductance et la capacité comme étant une fonction d'énergie, alors la matrice $P = \text{diag}(L, C)$ et on aura directement l'expression de la dérivée de la fonction de Lyapunov .

En spécifiant d'abord $v_0 = -1V$, d'où $i_0 = 2A$.

Si à tout instant on choisi (commute) ρ de façon à obtenir la plus faible valeur de \dot{V}_ρ , on aura des commutations très rapides et on observe bien un mode glissant voir figure 2.19. Dans ce cas la surface de commutation (représentée en pointillé) est donnée par les deux conditions de glissement.

Dans le cas où on commute seulement lorsque \dot{V}_ρ devient nulle, on aura pas de mode glissant mais la fréquence de commutation augmente en s'approchant de la référence comme le montre la figure 2.20, le phénomène de chattering est observé. Là aussi, nous avons représenté les deux surfaces de commutation en pointillé.

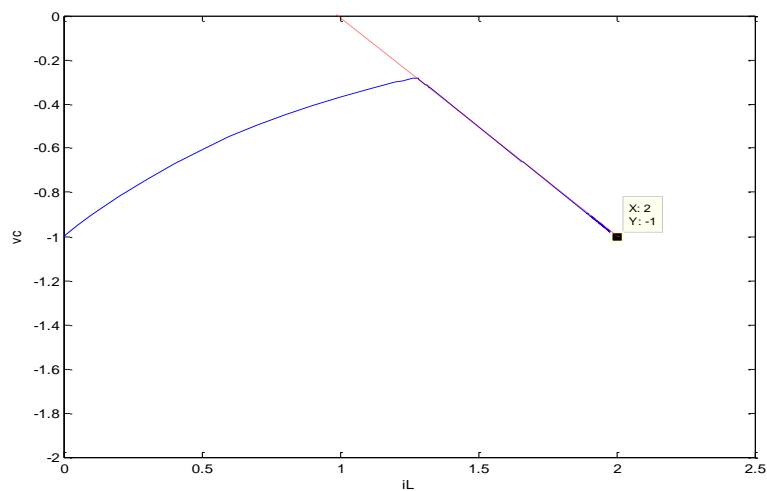


Fig. 2.19 : la surface de commutation.

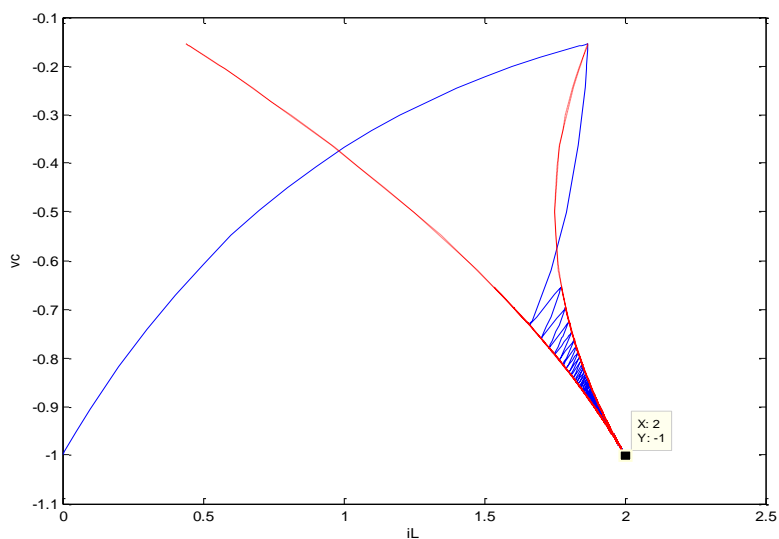


Fig. 2.20 : les deux surfaces de commutation en pointillé.

2.4.4 Stabilisation pratique :

La majorité des systèmes physiques sont décrits par des modèles mathématiques non linéaires dont la commande n'est pas toujours possible. Historiquement, ce problème est abordé en commençant par une linéarisation de ces systèmes autour de certains points de fonctionnement. Les sous-systèmes linéaires obtenus possèdent généralement un terme affine et on obtient une approximation PWA du système non linéaire. Les domaines de validité de ces sous-systèmes sont généralement séparés par les forts non linéarités ou les discontinuités présentes dans le système d'origine. Les systèmes PWA ont une longue histoire en génie électrique dans la commande à relais et les éléments à saturation ou à zone morte ainsi que tous les circuits à commutation et en mécanique pour modéliser les systèmes à frottements. Les sous-systèmes appelés aussi modes d'un modèle PWA n'ont aucune raison de partager le même point d'équilibre, en effet certains sous-systèmes peuvent ne pas avoir d'équilibre du tout. Ce fait est une exception par rapport à l'abondante littérature sur la stabilité et la stabilisation des systèmes commutés autour d'équilibre commun (typiquement l'origine). Par conséquent, l'objectif de la régulation dans la plupart des applications des systèmes PWA, est de maintenir par commutation ces systèmes autour de certain point de fonctionnement désiré qui ne représente pas un équilibre commun. Évidemment, ce point ne peut pas être atteint, et de perpétuelles commutations sont nécessaires pour maintenir le système autour de ce point.

En s'aidant de la notion de stabilité pratique, nous allons voir [42] une méthode générale de stabilisation des systèmes PWA autour d'un point désiré qui ne représente pas un équilibre commun. Afin de faciliter son application aux convertisseurs d'énergie en minimisant le nombre de capteurs à implanter, la méthode a été complétée par un multi-estimateur des états du système PWA est présenté sans aborder les questions générales d'observabilité et de contrôlabilité.

2.4.4.1 Stabilisation pratique et travaux antérieurs :

Nous avons déjà signalé que lorsqu'un système n'a pas d'équilibre ou ne converge pas, la notion de stabilisation du système par rapport à un ensemble de points devient intéressante. Nous référençons cette façon de voir les choses par stabilisation pratique. En effet, cette notion de stabilité par rapport à une région ou un ensemble de point n'est pas nouvelle, elle est liée à la ω -stabilité et aux ensembles ω -limites employés dans la conception de commande des systèmes non linéaires [31][64]. D'autres concepts de stabilité ou de stabilisation pratiques des systèmes commutés sont plutôt liés au domaine temporel et la notion de temps de séjour. La raison d'existence de ces notions est dû au faite que l'utilité d'un système physique est jugée par le comportement de celui-ci pendant un certain temps fini et non seulement par les propriétés globales conclues à partir de la théorie de Lyapunov. En effet, un système peut être asymptotiquement stable au sens de Lyapunov et inutilisable en pratique à cause des caractéristiques de son transitoire. D'autre part, un système instable au sens de Lyapunov, peut présenter des comportements acceptables pendant un intervalle de temps pré-spécifié. Ces idées ont conduit à la notion de stabilité (donc de stabilisation aussi) en un intervalle de temps fini pré-spécifié², la stabilité en un temps fini ou infini engage indirectement aussi les régions de stabilité pour plus de détail voir [26][80] et

² A ne pas confondre la notion de stabilité en un intervalle de temps fini et la stabilité en un temps fini habituellement appelé temps d'établissement.

les références citées dedans, quelques extensions et applications directe de cette approche aux systèmes PWA ont été proposée.

D'abord, nous allons brièvement exposer les deux principales (seules) approches de stabilisation pratique reconnues pour leurs applicabilités aux systèmes PWA, puis nous faisons une discussion de leurs avantages et inconvénients par rapport à l'approche que nous allons présenter.

2.4.4.1.1 Stabilisation pratique : approche de Zhai & Michel [46][78][80]

Dans ces travaux, et pour le système commuté suivant :

$$\dot{x} = f_{\sigma}(x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.68)$$

$\sigma(t) = i_k \in \mathbb{I} = \{1, 2, \dots, N\}$, $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$ et $t_{k+1} - t_k \geq T$

Deux régions Ω_1 et Ω_2 sont considérées pour l'ensemble des conditions initiales et l'espace des états respectivement, ces régions ne contiennent pas nécessairement l'origine. Ils définissent leur concept de stabilité pratique généralisé (GP-stabilité) par : lorsque l'état initial est dans Ω_1 , alors l'état du système reste toujours dans Ω_2 .

Définition 2.12 : [80]

Le système ci-dessus est pratiquement stable par rapport à $(\Omega_1, \Omega_2, t_0, T_f)$ où Ω_1, Ω_2 sont deux ensembles non vides de \mathbb{R}^n tel que $\Omega_1 \subset \Omega_2$, si $x(t_0) \in \Omega_1 \implies x(t) \in \Omega_2$, $\forall t \in I = [t_0, t_0 + T_f)$.

Le problème est le suivant, étant donnés Ω_1, Ω_2, t_0 et T_f déterminer le temps de séjour $T > 0$ de façon que le système sans équilibre commun en (2.68) soit pratiquement stable par rapport à $(\Omega_1, \Omega_2, t_0, T_f)$, pour tout signal de commutation $\sigma(t)$ défini ci-dessus.

Le problème est attaqué en utilisant des fonctions de Lyapunov multiples i.e. $V(x)$ est une concaténation de $V_{\sigma(t)} \in \{V_1, V_2, \dots, V_N\}$, et on a le théorème suivant :

Théorème 2.7 : [46]

Soient Ω_1, Ω_2, t_0 et une constante T_f avec $\Omega_1 \subset \Omega_2$, le système (2.68) est pratiquement stable par rapport à $(\Omega_1, \Omega_2, t_0, T_f)$ et le signal de commutation $\sigma(t)$, s'il existe un temps de séjour $T > 0$ et des fonctions scalaires $V_{\sigma(t)}$ différentiables, définies positives et radialement non bornées dans Ω_2 et un réel positif $0 < \mu \leq 1$ tel que :

- i. $\dot{V}_i(x) \leq 0, \forall i \in S, \forall t \in I$ et $\forall x \in \Omega_2$.
- ii. $V_{i_{k+1}}(x(t_{k+1})) \leq \mu V_{i_k}(x(t_{k+1} - T)), \forall i_k, i_{k+1} \in \mathbb{I}, i_k \neq i_{k+1}, \forall t \in I$ et $x(t_{k+1}) \in \Omega_2$.

Une application de ces résultats aux systèmes PWA a été aussi présentée, le résultat est énoncé ci-dessous pour le système suivant :

$$\dot{x} = A_{\sigma}x(t) + b_{\sigma} \quad (2.69)$$

Où la définition des régions suivante a été adoptée :

$$\Omega_1 = \bigcap_1^N \Omega_{1_i}, \quad \Omega_{1_i} = \{x \in \mathbb{R}^n | (x - x_{ei})^t P_i (x - x_{ei}) + d_i < \alpha\}$$

$$\Omega_2 = \bigcup_1^N \Omega_{2_i}, \quad \Omega_{2_i} = \{x \in \mathbb{R}^n | (x - x_{ei})^t P_i (x - x_{ei}) + d_i < \beta\}$$

Avec $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, α, β deux scalaires positifs vérifiant : $\alpha < \beta$ et $d_i \geq 0$ alors que les équilibres des sous-systèmes sont donnés par $x_{ei} = -A_i^{-1}b_i$ si A_i non singulière.

Théorème 2.8 : [46]

Soient α, β, t_0 et T_f des réels donnés avec $\alpha < \beta$ et soient Ω_1, Ω_2 les deux régions définies ci-dessus avec $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Le système (2.69) est pratiquement stable par rapport à $(\Omega_1, \Omega_2, t_0, T_f)$ et le signal de commutation $\sigma(t)$, s'il existe un temps de séjour $T > 0$, des matrices définies positives $P_i, i \in \mathbb{I}$, des scalaires $0 \leq d_i < \alpha$ et un nombre positif μ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_i^t P_i + P_i A_i < 0 \\ \left[\begin{array}{cc} e^{A_i^t T} P_j e^{A_i T} - \mu P_i & e^{A_i^t T} P_j \Delta x_{e_{ij}} \\ * & \Delta x_{e_{ij}}^t P_j \Delta x_{e_{ij}} + d_j - \mu d_i \end{array} \right] \\ \mu < \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}^{\bar{N}(t_0, T_f)} \end{array} \right.$$

$\forall i, j \in \mathbb{I}, i \neq j$ et $\bar{N}(t_0, T_f)$ est le nombre maximum de commutation dans l'intervalle de temps (t_0, T_f) et $\Delta x_{e_{ij}} = x_{ei} - x_{ej}$.

Ce théorème peut facilement être modifié pour servir à la question de stabilisation.

2.4.4.1.2 Stabilisation pratique : approche de Xuping Xu et Zhai [76] [77] :

Dans cette méthodologie, l'idée n'est pas très loin de la notre dans la mesure où l'approche utilise une définition de la stabilité (stabilisation) pratique explicitement fonction des régions et ne fait aucune allusion au temps de séjour. Un autre point commun avec notre approche, est que les régions de stabilité pratique sont aussi liées aux niveaux d'énergie du système. Cependant, la démarche suivie, les hypothèses faites sur le système PWA à stabiliser ainsi que la formulation du problème n'ont rien à voir avec l'approche que nous avons proposé. Faisons brièvement d'abord le point sur ce qui a été proposé dans ce contexte.

Nous rappelons d'abord les définitions de stabilité pratique qui ont été utilisées pour le même système commuté (2.68) et sous la même loi de commutation S :

Définition 2.13 (Stabilité ϵ -pratique) :

Soit le système commuté (2.68) sous la loi de commutation S , étant donné un $\epsilon > 0$, le système est dit ϵ -pratiquement stable sous S , s'il existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tel que :

$$x(0) \in B(0, \delta) \Rightarrow x(t) \in B(0, \epsilon), \quad \forall t \geq 0$$

Définition 2.14 (Stabilisabilité ϵ -pratique) :

Le système commuté (2.68) est dit pratiquement stabilisable si pour tout $\epsilon > 0$, il existe une loi de commutation $S = S(\epsilon)$ telle que le système est ϵ -pratiquement stable sous S .

D'après les définitions de l'attractivité pratique et la stabilisabilité pratique dans [76], nous pouvons dégager la définition de stabilisabilité asymptotique ϵ -pratique suivante :

Définition 2.15 (Stabilisabilité asymptotique ϵ -pratique) :

Ayant une région D autour de l'origine, le système commuté (2.68) est dit pratiquement asymptotiquement stabilisable si pour tout $\epsilon > 0$ et $x(0) \in D$, il existe une loi de commutation $S = S(\epsilon)$ et $T = T(x(0)) > 0$ telle que : $x(t) \in B(0, \epsilon), \forall t \geq T$.

Si $D = \mathbb{R}^n$, alors le système commuté (2.68) est pratiquement globalement asymptotiquement stabilisable.

En résumé, d'après les remarques des auteurs dans [76], il devrait exister une loi de commutation S_0 qui permet de ramener la trajectoire issue de $x(0) \in D$ à $B(0, \delta)$ en un certain temps $T(x(0)) > 0$ et une autre loi de commutation S_1 qui permet de ramener la trajectoire vers $B(0, \varepsilon)$. Une concaténation de S_0 et une version retardée de S_1 permet de construire une loi de commutation S qui ramène directement la trajectoire en $B(0, \varepsilon)$ et on a le théorème suivant :

Théorème 2.8 : [76][77]

Supposons qu'il existe une fonction d'énergie $V(x)$ pour le système commuté (2.68), soit $\rho > 0$ donné et soit la région $\Omega_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n | V(x) \leq \rho\}$ bornée. Le système commuté (2.68) est pratiquement asymptotiquement stabilisable en Ω_ρ si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- a. $\min_{i \in S} \frac{\partial V}{\partial x} f_i(x) < 0$, pour $x \in \Omega_\rho - \{0\}$,
- b. $0 \in \text{Int } C$ où $C = \text{co}\{f_i(0)\}$, $i \in \mathbb{I}$.

Si la condition en a est vérifiée pour $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, alors le système (2.68) est globalement pratiquement asymptotiquement stabilisable.

2.4.4.2 Discussion des approches de stabilisation pratique:

On notera d'abord que la première approche est plus générale dans la mesure où le point de fonctionnement désiré est seulement fonction des équilibres de chacun des modes. Cependant, l'application directe de la méthode nécessite que toutes les matrices A_i soient inversibles, mais le vrai conservatisme de la méthode (à notre avis) est l'utilisation du temps de séjour, la contrainte imposée par ce facteur aussi utile qu'elle soit n'est pas facilement exploitable pour certaines applications. Bien que la seconde approche soit plus référenciée pour la stabilisation pratique, son idée n'est pas nouvelle. En effet, la seconde approche représente une petite extension de la méthode introduite par Decarlo et al (2000) [23] et complétée par Bolzern (2004) [12]. L'apport de Xuping Xu et al [76][77] est l'introduction de régions de stabilité dans la démarche de Bolzern sans toutefois lever le réel conservatisme présent dans la méthode initiale. Rappelons que ce conservatisme se manifeste par la condition b dans le théorème précédent, nous pensons que cette condition n'a aucune raison d'être en pratique. Dans la seconde approche, l'auteur a aussi fait une proposition d'algorithme numérique pour le calcul de la région d'attraction, réellement, cette tentative ne paraît pas facile à appliquer et nécessite de réelle investigation.

Indépendamment de ces travaux, il a été proposé en [42][43] une approche générale pour la stabilisation des systèmes commutés affines par morceaux PWA.

L'approche proposée n'a pas de contraintes conservatrices telles que le temps de séjour [78][80] ou la condition en b du théorème précédent [76][77]. De plus, la formulation du problème dans cette approche est élégante et sous forme BMI abordable par certains logiciels. Encore plus, contrairement à toutes les autres approches, la méthodologie suivie permet d'obtenir exactement les coordonnées du point de convergence autre que le point désiré, par conséquent la distance par rapport au point désiré et donc l'erreur est connue avec précision. Bref, c'est une méthodologie qui nous paraît intéressante, de plus elle a été complétée par un multi-estimateur bien adapté dont les erreurs convergent asymptotiquement vers zéro.

2.4.4.2.1 Première variante de l'approche proposée en (D.Kamri et al en [42]) :

Dans ce qui suit, la variable σ est remplacée par i et la variable t est omise du modèle (2.69) pour la clarté de l'exposé de la méthode, et le modèle affine considéré est le suivant :

$$\dot{x} = a_i x + b_i \quad (2.70)$$

L'objectif consiste à chercher une loi de commande permettant d'amener la trajectoire du système de n'importe quel condition initiale x_0 vers un voisinage quantifiable $B(x_a, \varepsilon_\alpha)$ centré en x_a et essayer de le maintenir autour ; en définissant la stabilisabilité pratique des systèmes commutés affines par morceaux comme suit :

Définition 2.16 : [42]

Le système (2.69) est globalement pratiquement asymptotiquement stabilisable en un point $x_a \in \mathbb{R}^n$, si pour tout scalaire $\varepsilon_p \geq \varepsilon_{pmin}$, il existe un ε_α avec $0 < \varepsilon_\alpha \leq \varepsilon_p$ et une loi de commutation qui permet d'amener la trajectoire du système de n'importe quel point de départ $x_0 \in \mathbb{R}^n$ vers $B(x_a, \varepsilon_\alpha)$ et de le maintenir dans $B(x_a, \varepsilon_p)$ pour tout le temps future.

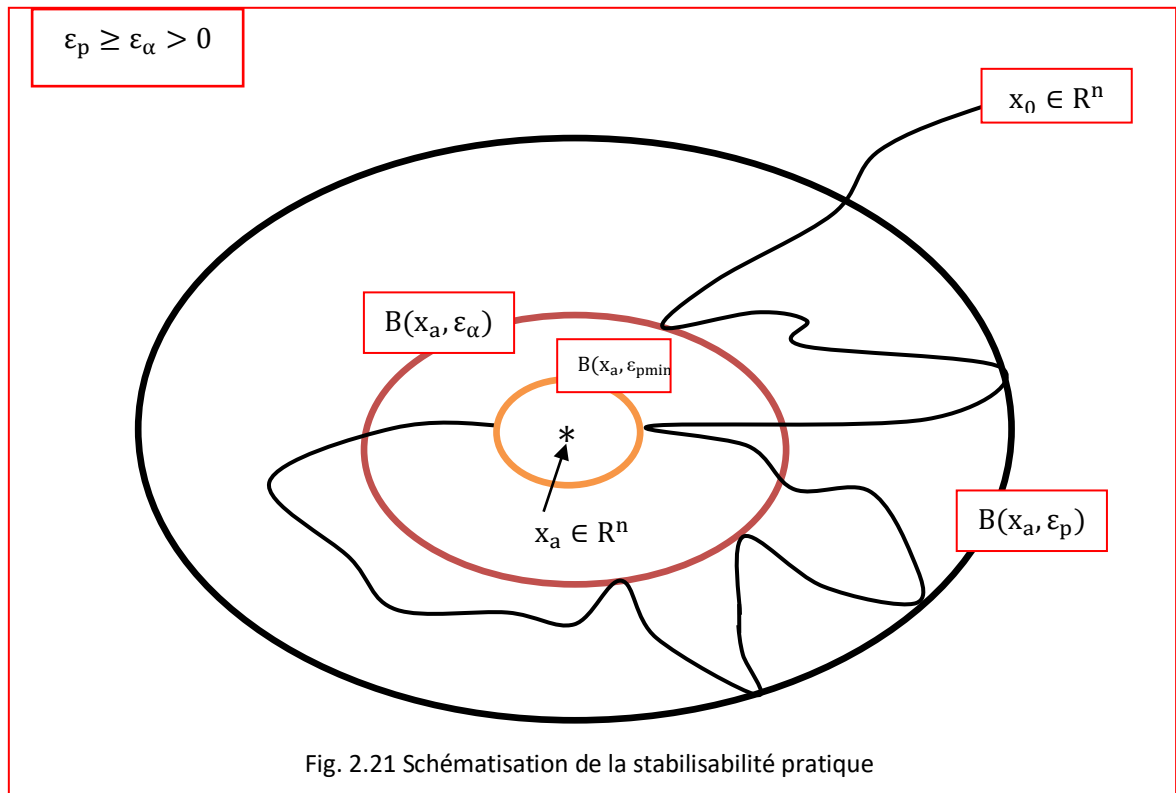


Fig. 2.21 Schématisation de la stabilisabilité pratique

Précisément, l'objectif est de chercher cette loi de commutation dépendante de l'état et les scalaires $\varepsilon_p, \varepsilon_\alpha$. Nous allons montrer que pour les systèmes PWA, le ε_p doit être supérieure à un certain minimum ε_{pmin} qu'on peut calculer avec précision.

Pour les systèmes PWA sans équilibre commun, le choix du point de fonctionnement x_a se fait sans conservatisme selon l'équilibre du modèle moyen. Donc x_a doit être choisi parmi les points qui vérifient:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i (a_i x_a + b_i) = 0 \quad \text{avec } 0 \leq \alpha_i \leq 1 \text{ and } \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1. \quad (2.71)$$

Ce choix est justifié par l'emploi de modèle moyen particulièrement en circuiteries électriques et valable pour tous les systèmes PWA n'ayant pas un équilibre commun. Il est évident qu'on ne peut s'approcher de ce point sans commutations forcées et rapides, les commutations rapides ne sont pas désirables en général et nécessitent un traitement spécifique.

Pour ce problème de synthèse, on associe à chaque sous-système i une région Ω_i d'activation, en considérant une partition de l'espace d'état en régions Ω_i , à condition que $\cup \Omega_i$ recouvre tout l'espace \mathbb{R}^n . Dans ce cas, l'objectif sera de déterminer ces régions et la loi de commutation dépendante de l'état de façon que la commutation entre les modes éventuellement instables du système (2.70) résulte en un système global stable.

Sans perte de généralité, le problème à l'origine peut être considéré, le système (2.70) s'écrit :

$$\dot{x} = a_i x + B_i, \quad B_i = a_i x_a + b_i \quad (2.72)$$

Afin de faciliter la manipulation des formes quadratiques et la formulation LMI, nous adoptons le changement de variable suivant :

$$z = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

Ce qui conduit au système commuté linéaire ci dessous, qu'on appellera système augmenté pour faire allusion à l'espace de représentation en dimension $(n+1)$.

$$\dot{z} = A_i z \quad \text{avec } A_i = \begin{bmatrix} a_i & B_i \\ 0_{1 \times n} & 0 \end{bmatrix} \text{ et } i \in I_m. \quad (2.74)$$

Finalement, notre problème de stabilisation se réduit à la stabilisation du système (2.71) au point :

$$z^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.75)$$

Stabilisation quadratique [42]

Nous observons que nous n'avons pas besoin de considérer tout l'espace d'état augmenté de dimension $(n+1)$, puisque notre nouveau système (2.74) est défini seulement dans le domaine suivant :

$$\mathcal{X} = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} | z_{n+1} = 1\} \quad (2.76)$$

Malheureusement, nous allons voir que cette observation ne peut nous être très utile vue la difficulté de résolution des BMI (LMI) dans un domaine pareil.

Dans ce qui suit, nous allons essayer de développer une technique de synthèse systématique en utilisant une fonction de Lyapunov quadratique commune. Cela en dégageant des conditions de stabilisation de notre système augmenté par rapport à une partition du domaine \mathcal{X} , nous allons voir que ceci n'est possible que par le passage à travers une partition de l'espace augmenté \mathbb{R}^{n+1} .

Soient Σ_i des régions quadratiques de l'espace \mathbb{R}^{n+1} , définies par:

$$\Sigma_i = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} | z^t Q_i z \geq 0\} \quad \text{avec } Q_i \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} \text{ et } i \in \mathbb{I}. \quad (2.77)$$

Considérons la fonction suivante comme fonction candidate de Lyapunov pour notre système (2.74):

$$V_1(z) = z^t P_1 z \quad \text{avec} \quad P_1 = \begin{bmatrix} 2p & \alpha_p \\ \alpha_p^t & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad p = p^t > 0. \quad (2.78)$$

Où $z \in \mathbb{R}^{n+1}$, $p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\alpha_p \in \mathbb{R}^n$.

Soit le domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ défini par :

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t p x < \varepsilon_p\}. \quad (2.79)$$

Ce domaine a une extension dans le domaine \mathcal{X} , définie par :

$$\check{D} = \left\{ z \in \mathcal{X} \mid z^t \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z < \varepsilon_p \right\}. \quad (2.80)$$

Puisque la fonction candidate de Lyapunov dans (2.78) n'est pas positive dans tout le domaine \mathcal{X} , nous allons essayer de prouver sa positivité seulement dans une partie de \mathcal{X} représenté par $\{\mathcal{X} - \check{D}\}$ et se contenter ainsi de la stabilisabilité pratique du système. Cependant, même dans ce sous-domaine $\{\mathcal{X} - \check{D}\}$ nous ne pouvons prouver directement la positivité de cette fonction ; la matrice P_2 suivante est utilisée comme intermédiaire pour la démonstration.

$$P_2 = \begin{bmatrix} p & \alpha_p \\ \alpha_p^t & \varepsilon_p \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_p > 0. \quad (2.81)$$

Soit $\dot{V}_{1i}(z)$ la dérivée temporelle de $V_1(z)$ le long de la trajectoire du i ème sous-système dans (2.74) définie par :

$$\dot{V}_{1i}(z) = \frac{\partial V_1(z)}{\partial z} \frac{dz}{d\xi} \quad \text{avec} \quad \frac{dz}{d\xi} = A_i z \quad \text{et} \quad \xi \in \mathbb{R}^+ \quad (2.82)$$

Et on aura :

$$\dot{V}_{1i}(z) = z^t [A_i^t P_1 + P_1 A_i] z. \quad (2.83)$$

Stratégie de Contrôle des Commutations :

Dans cette approche, on associe à chaque sous-système i du système augmenté une région d'activation Σ_i . Cette région est définie de façon que la dérivée $\dot{V}_{1i}(z)$ de son sous-système associé soit négative dans cette région. Une des stratégies de contrôle des commutations bien connue par son caractère stabilisant est basée sur la sélection du sous-système ayant la plus grande décroissance de sa fonction de Lyapunov $V_1(z)$:

$$\sigma(z) = \underset{i \in \mathbb{I}_m}{\operatorname{argmin}} \{ \dot{V}_{1i}(z) \}. \quad (2.84)$$

Où $\sigma(z) = i$, est l'indice du mode à activer.

Lemme 2.1 : [42]

S'il existe une matrice symétrique définie positive $p \in \mathbb{R}^{n \times n}$, des matrices $Q_i \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$, un vecteur $\alpha_p \in \mathbb{R}^n$ et un scalaire positive ε_p telle que:

$P_2 > 0$ et $\dot{V}_{1i}(z)$ est négative quand $z \in \Sigma_i$ et $i \in \mathbb{I}$ avec $\cup \Sigma_i = \mathbb{R}^{n+1}$, alors en utilisant la stratégie de contrôle de commutations de la plus grande pente, toutes les trajectoires du système (2.74) convergent vers le domaine \check{D} . Donc, le système est pratiquement asymptotiquement stabilisable au point $z^ \in \check{D}$ pour toute condition initiale $z_0 \in X$. ■*

Démonstration :

Précisant que $V_1(z^*) = 0$ et $z^* \in \check{D}$.

De (2.82) nous avons $x^t p x \geq \varepsilon_p$ pour tout $x \in \{R^n - D\}$, ce qui se traduit dans le domaine \mathcal{X} par:

$$z^t \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z \geq z^t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_p \end{bmatrix} z \text{ pour tout } z \in \{\mathcal{X} - \check{D}\}. \quad (2.85)$$

Donc $z^t \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z - z^t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_p \end{bmatrix} z \geq 0$ pour tout $z \in \{\mathcal{X} - \check{D}\}$. Si $P_2 > 0$ (ceci est vérifiable comme un LMI) i.e. $z^t P_2 z > 0$ pour $z \in R^{n+1}$, et puisque $\mathcal{X} \subset R^{n+1}$ alors pour tout $z \in \mathcal{X}$, nous avons:

$$z^t \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z + z^t \begin{bmatrix} 0 & \alpha_p \\ \alpha_p^t & 0 \end{bmatrix} z + z^t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_p \end{bmatrix} z > 0.$$

En ajoutant la quantité positive $(z^t \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z - z^t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_p \end{bmatrix} z)$ (positive pour $z \in \{\mathcal{X} - \check{D}\}$) au terme à gauche, l'inégalité stricte reste valable pour $z \in \{\mathcal{X} - \check{D}\}$ et nous obtenons:

$$V_1(z) = z^t \begin{bmatrix} 2p & \alpha_p \\ \alpha_p^t & 0 \end{bmatrix} z > 0 \text{ pour tous } z \in \{\mathcal{X} - \check{D}\}. \quad (2.86)$$

D'autre part, nous avons :

$$\dot{V}_{1i}(z) = z^t \begin{bmatrix} 2(a_i^t p + p a_i) & a_i^t \alpha_p + 2p B_i \\ 2B_i^t p + \alpha_p^t a_i & 2B_i^t \alpha_p \end{bmatrix} z. \quad (2.87)$$

Où $\dot{V}_{1i}(z^*) \neq 0$ pour $B_i \alpha_p \neq 0$.

Si $\dot{V}_{1i}(z) < 0$ pour $z \in \Sigma_i$ et $i \in \mathbb{I}$ avec $\cup \Sigma_i = R^{n+1}$ (ceci est vérifiable comme un LMI) donc nous avons: $\dot{V}_{1i}(z) < 0$ pour tout $z \in \mathcal{X}_i$ avec $\mathcal{X}_i = (\mathcal{X} - \check{D}) \cap \Sigma_i$ et

$$\cup \mathcal{X}_i = \cup ((\mathcal{X} - \check{D}) \cap \Sigma_i) = (\mathcal{X} - \check{D}) \cap (\cup \Sigma_i) = (\mathcal{X} - \check{D}).$$

En résumant les résultats obtenus comme suit [42] :

- $V_1(z^*) = 0$ et $z^* \in \check{D}$.
 - $V_1(z) > 0$ pour tout $z \in \{\mathcal{X} - \check{D}\}$.
 - $\dot{V}_{1i}(z) < 0$ pour tout $z \in \mathcal{X}_i$ et $i \in \mathbb{I}$.
 - $\cup \mathcal{X}_i = (\mathcal{X} - \check{D})$.
- (2.88)

Bien sure, cela veut dire qu'en utilisant la stratégie de contrôle des commutations de la plus grande pente, $V_1(z)$ converge vers \check{D} qui contient z^* et donc le système (2.75) est pratiquement asymptotiquement stabilisable en ce point.

Remarque 2.4 :

D'après la démonstration ci-dessus, $\cup \mathcal{X}_i = (\mathcal{X} - \check{D})$ est vérifiée si $(\mathcal{X} - \check{D}) \subseteq (\cup \Sigma_i)$ même si les régions Σ_i ne recouvrent pas tout l'espace augmenté R^{n+1} mais ce fait ne peut être exploité. En effet, la seule condition mathématique disponible (qu'on peut

exploiter comme LMI) pour la propriété de recouvrement, est l'existence de scalaires positives θ_i telle que $\sum_1^m \theta_i Q_i \geq 0$ qui est suffisante pour assurer le recouvrement de tout l'espace \mathbb{R}^{n+1} ($\cup \Sigma_i = \mathbb{R}^{n+1}$). Ce qui veut dire que la nécessité $\cup \Sigma_i = \mathbb{R}^{n+1}$ ou de sa condition suffisante $\sum_1^m \theta_i Q_i \geq 0$.

Note d'application : [42]

Rappelons que la stabilisabilité pratique ne garantit pas qu'on puisse stabiliser au point désiré, nous pouvons seulement ramener la trajectoire du système dans un petit domaine \check{D} et le maintenir à l'intérieur. Ceci est largement suffisant tant que le point désiré est seulement un équilibre moyen (équilibre fictif). Cependant, pour de meilleure précision, une petite valeur de ε_p est souhaitable. Même s'il paraît qu'on peut choisir ε_p arbitrairement petit d'après $p > 0$, nous nous sommes limités à ε_p minimale qui assure $P_2 > 0$ et $\dot{V}_{1i}(z) < 0$. Normalement, si on savait résoudre les LMI dans \mathcal{X} alors on peut rendre ε_p extrêmement petit. Le recours de résoudre les LMI dans tout l'espace n'est pas sans prix, cela conduit à une surestimation de la valeur effective de ε_p et affecte légèrement les matrices obtenues. Heureusement, les résultants peuvent être améliorés en spécifiant un domaine de convergence plus petit dans \check{D} (voir Fig. 2.21). En effet, nous avons les implications suivantes :

$$\begin{cases} \dot{V}_{1i}(z) < 0, z \in \Sigma_i \\ \cup \Sigma_i = \mathbb{R}^{n+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{V}_{1i}(z) < 0, z \in \mathcal{X}_i \\ \mathcal{X}_i = X \cap \Sigma_i \wedge \cup \mathcal{X}_i = X \end{cases} \Rightarrow \dot{V}_{1i}(z) < 0, z \in \check{D}$$

D'autant plus, $\min_z V_1(z)$ dans \check{D} est atteint en $z^{**} = \begin{pmatrix} x^{**} \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $x^{**} = \frac{-p^{-1}\alpha_p}{2}$. Par conséquent, $V_1(z)$ a tendance à converger obligatoirement vers ce minimum sans pouvoir l'atteindre puisqu'à l'intérieur du domaine délimité par $V_1(z) = 0$, $V_1(z)$ n'est pas positive. Sachant que z^{**} est différent de z^* mais nécessairement très proche quand ε_p est petit.

Soit $\check{D}_{\alpha 0}$ le plus petit domaine centré en z^* et contient z^{**} , il est définie dans X par :

$z^t \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z \leq z^{**t} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z^{**}$, plus précisément, nous avons :

$$\check{D}_{\alpha 0} = \left\{ z \in \mathcal{X} \mid z^t \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z \leq \frac{\alpha_p^t p^{-1} \alpha_p}{4} \right\}. \quad (2.89)$$

Ce domaine est une extension du domaine $D_{\alpha 0}$ défini dans \mathbb{R}^n par: $x^t p x \leq x^{**t} p x^{**}$, et nous avons:

$$D_{\alpha 0} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x^t p x \leq \frac{\alpha_p^t p^{-1} \alpha_p}{4} \right\}. \quad (2.90)$$

Alors que le complément de Schur [16] permet de conclure directement à partir $P_2 > 0$ que $\alpha_p^t p^{-1} \alpha_p < \varepsilon_p$ donc $\check{D}_{\alpha 0} \subset \check{D}$ ou équivalamment $D_{\alpha 0} \subset D$.

Ce qui conduit à :

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{p \min} = \frac{\alpha_p^t p^{-1} \alpha_p}{4}. \quad (2.91)$$

Pour clarifier l'application de la méthode, nous allons faire une toute petite modification en proposant d'élargir le domaine $\check{D}_{\alpha 0}$ comme suit :

Puisque $\min_z V_1(z)$ est en z^{**} qui est sur la bordure de $\check{D}_{\alpha 0}$, il peut être pratique d'arrêter les commutations un peu avant d'atteindre ce domaine. Par exemple quand la trajectoire atteint le domaine $\check{D}_{\alpha 1}$ (qui peut aussi représenter une extension d'un certain domaine $D_{\alpha 1}$ de \mathbb{R}^n) définie par:

$$\check{D}_{\alpha_1} = \left\{ z \in \mathcal{X} \mid z^t \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z \leq \alpha_p^t p^{-1} \alpha_p \right\}. \quad (2.92)$$

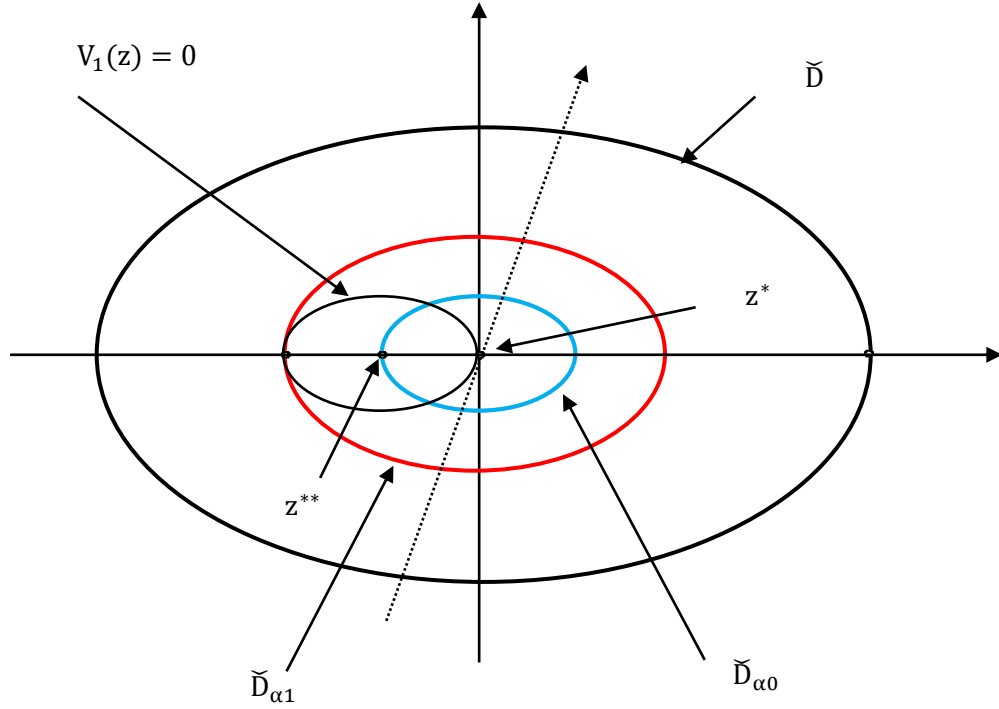


Fig. 2.22. Construction simple en dimension deux (approche 1)

Théorème 2.9 : [42]

S'il existe des matrices symétriques q_i , une matrice symétrique définie positive p , des vecteurs $\alpha_p \in \mathbb{R}^n, \alpha_{q_i} \in \mathbb{R}^n$, des scalaires positifs $\gamma, \delta_i, \theta_i, \varepsilon_p$ et des scalaires β_{q_i} tel que pour tout $i \in \mathbb{I}$, l'optimisation suivante:

Min ε_p telles que :

- 1) $\begin{bmatrix} p & \alpha_p \\ \alpha_p^t & \varepsilon_p \end{bmatrix} > 0$.
- 2) $\begin{bmatrix} 2(\alpha_i^t p + p \alpha_i) + \delta_i q_i + \gamma I_n & \alpha_i^t \alpha_p + 2p B_i + \delta_i \alpha_{q_i} \\ 2B_i^t p + \alpha_p^t \alpha_i + \delta_i \alpha_{q_i}^t & 2B_i^t \alpha_p + \delta_i \beta_{q_i} \end{bmatrix} < 0$.
- 3) $\sum_1^m \theta_i \begin{bmatrix} q_i & \alpha_{q_i} \\ \alpha_{q_i}^t & \beta_{q_i} \end{bmatrix} \geq 0$.

Conduit à une solution avec un ε_p très petit, alors en utilisant la stratégie de contrôle des commutations de la plus grande pente, toutes les trajectoires du système (2.74) convergent vers le domaine :

$$\check{D}_{\alpha_1} = \left\{ z \in \mathcal{X} \mid z^t \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z \leq \alpha_p^t p^{-1} \alpha_p \right\}.$$

Ainsi, le système est pratiquement asymptotiquement stabilisable au point $z^* \in \check{D}_{\alpha_1}$ à partir de n'importe quelle condition initiale $z_0 \in \mathcal{X}$.

Note :

Quand la minimisation de ε_p n'est pas formulée, l'utilisateur peut imposer une borne supérieure très petite ε_0 sur ε_p .

Sachant que l'objectif est bien sûr de chercher pour le système (2.74), les régions Σ_i et la fonction de Lyapunov $V_1(z)$ comme définies dans (2.77) & (2.78) et en s'aidant de la S-Procédure, nous avons :

$$V_1(z) = z^t P_1 z \text{ and } \Sigma_i = \{z \in \mathbf{R}^{n+1} | z^t Q_i z \geq 0\}. \quad (2.93)$$

Avec les structures de matrices suivantes :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2p & \alpha_p \\ \alpha_p^t & 0 \end{bmatrix} \text{ et } Q_i = \begin{bmatrix} q_i & \alpha_{qi} \\ \alpha_{qi}^t & \beta_{qi} \end{bmatrix}; P_1, Q_i \in \mathbf{R}^{(n+1) \times (n+1)}.$$

La suite de la démonstration de ce théorème se trouve dans [42]

Stratégie pratique de contrôle des commutations : [42]

Lorsque la stratégie de contrôle des commutations est basée sur la sélection du sous-système ayant la plus grande pente (négative) associée à sa fonction d'énergie, on obtient une grande satisfaction en pratique si on arrête de commuter une fois $\check{D}_{\alpha 1}$ est atteint et on redémarre les commutations lorsque la trajectoire du système essaye de sortir du domaine \check{D} . Cette stratégie limite la fréquence des commutations lorsqu'on s'approche du point désiré. Toutefois, quand ε_p est très petit, il n'y a pas de différence significative entre les deux domaines $\check{D}_{\alpha 1}$ et \check{D} par conséquent, l'indésirable phénomène de glissement peut apparaître. En effet, à cause de la nature de la stratégie de commutation, ce phénomène peut même apparaître plus loin du point désiré.

Pour le cas de synthèse de loi de commutation dépendante de l'état, une possibilité qui s'offre à nous, est de faire appel à la technique d'utilisation d'hystérésis. Elle consiste à imposer une borne supérieure sur la dérivée de Lyapunov du mode actif : $\max(\dot{V}_{1i}(z)) = -\varepsilon z^t z$ avec $\varepsilon > 0$ et autoriser la commutation seulement lorsque la dérivée $\dot{V}_{1i}(z)$ associée au mode actif atteint cette nouvelle borne. Cette technique est combinée avec la stratégie de contrôle des commutations pratique pour exclure ce phénomène.

2.4.4.2.2 Deuxième variante de l'approche proposée en (D. Kamri et al en [43]) :

Puisque l'équilibre moyen n'est qu'une notion mathématique, l'énergie d'un système physique (réel) décrit par un modèle PWA ne peut jamais être nulle en un tel point fictive. Alors que dans la théorie de Lyapunov, le choix de la fonction d'énergie peut être crucial pour la stabilité et la stabilisation du système étudié. Pourquoi doit-on donc respecter la règle de Lyapunov ($V(0)=0$) dans ce cas? Réellement, il a été décidé que pour stabiliser de tels systèmes, la meilleure façon est de choisir une fonction d'énergie qui ne s'annule pas en ce point d'équilibre moyen qui n'est pas un équilibre réel du système physique. Toutefois, lorsqu'on veut s'approcher de ces points, on préfère atteindre (par commutation) ce voisinage avec le minimum d'énergie possible pour obtenir de bons résultats et réduire le nombre de commutations. D'autant plus, on doit pouvoir maintenir la trajectoire du système plus près de ces points, cela n'est possible que grâce à des commutations forcées et rapides.

L'approche proposée dans [43] est plus directe et demande moins d'efforts de calcul que celle de la variante précédente [42]. En effet, en [43] on a directement déterminé

une matrice $P_2 (= \begin{bmatrix} p & \alpha_p \\ \alpha_p^t & \varepsilon_p \end{bmatrix}, \varepsilon_p > 0)$ pour la fonction d'énergie.

Note sur la simulation :

Vu que la valeur numérique obtenue par la résolution des LMI de la quantité $\alpha_p^t p^{-1} \alpha_p$ est toujours très faible dans les deux variantes pour un ε_0 de l'ordre de 10^{-5} . Il n'y a pas une différence significative entre les deux valeurs ε_{pmin} obtenues par les deux variantes et on a :

$$\frac{\alpha_p^t p^{-1} \alpha_p}{4} \cong \alpha_p^t p^{-1} \alpha_p \quad (2.94)$$

Lorsqu'on a repris les deux exemples de convertisseurs précédents, la simulation montre que les résultats de stabilisation pratique ne peuvent se distinguer dans les deux variantes présentées de l'approche de stabilisation pratique. Ainsi, il n'est pas nécessaire d'alourdir le manuscrit par des courbes presque identiques, nous allons les voir indirectement dans la présentation des résultats du multi-estimateur d'états dans le chapitre suivant.

Chapitre 03 :

Commande des Systèmes PWA à base
d'Observateurs

"Observateurs Hybrides"

3.1. Introduction

En général, pour des raisons techniques et économiques, l'état du système n'est pas complètement accessible. En effet, la complexité de la réalisabilité technique ainsi que des coûts prohibitifs pour l'implantation de plusieurs capteurs peuvent réduire considérablement le nombre d'états mesurés. On peut alors considérer que pour la grande majorité des systèmes, la dimension du vecteur d'état est supérieure à celle du vecteur de sortie. Cette considération signifie que le vecteur x ne peut pas être complètement mesuré ou déduit des sorties. Cependant, moyennant des conditions d'existence, l'état peut être reconstruit à l'aide d'un observateur ce résultat est inspiré par des travaux de *Luenberger* (voir [16]).

Ainsi, l'observabilité d'un processus est un concept très important en engineering. En effet, pour reconstruire les états inaccessibles d'un système, il faut connaître, à priori, si les variables d'état sont observables ou non. L'observabilité d'un système est la propriété qui permet de dire si l'état peut être déterminé uniquement à partir de la connaissance des signaux d'entrées et de sorties.

3.2. Observabilité des systèmes linéaires

Beaucoup de recherches se sont intéressées à l'étude et à la résolution des problèmes d'estimation du vecteur d'état des systèmes linéaires. Parmi ces recherches on trouve les recherches de Kalman-Bucy qui propose le filtre de Kalman pour la reconstruction d'état d'un système stochastique. Les recherches de *Lunberger*[10] propose une nouvelle théorie de l'observateur dite observateur de *Lunberger*. Son idée est d'ajouter au modèle un terme de correction entre la sortie et la sortie estimée. Cette approche est utilisée pour les systèmes linéaires invariants dans le temps [11].

Soit un système continu décrit par l'équation d'état déterministe suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

Où les valeurs $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$ et $y(t) \in R^p$ représentent respectivement l'état, la commande et la sortie du système. Les matrices A , B et C sont des matrices constantes de dimensions appropriées. L'observabilité du système linéaire (3.1) est garantie si et seulement si :

$$\text{rang}(O) = \text{rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{(n-1)} \end{pmatrix} = n$$

Par conséquent le système linéaire (3.1) est observable, si le rang de la matrice d'observabilité O est égal à la dimension n de ce système.

Définition 3.1 (Critère de Kalman)

L'observabilité du système (3.1) est garantie si le rang de la matrice d'observabilité est égal à n . On dit alors que la paire (A, C) est observable.

Définition 3.2 Le système (3.1) est observable si étant donné l'instant t_0 , il existe un instant t_1 fini tel que la connaissance de la sortie $y(t_0, t_1)$ et de l'entrée $u(t_0, t_1)$ permet de déterminer de manière unique l'état x_0 ($t_0 \neq x_0$) et ceci quelque soit l'entrée du système.

Remarque 3.1

La notion d'observabilité est très importante pour les systèmes dont on ne peut pas mesurer tout le vecteur d'état, alors il doit être estimé.

3.2.1 Principe de fonctionnement des observateurs linéaires

La structure de l'observateur indiquée sur la Figure (3.1) fait intervenir tout d'abord un estimateur fonctionnant en boucle ouverte, celui-ci est tout simplement le modèle d'état du système. Comme, lors du fonctionnement normal, le système est soumis à son environnement, le modèle ne peut pas refléter l'action de cet environnement sur les états du système. On introduit alors une matrice L qui permet d'annuler l'écart entre la sortie du système et celle de l'observateur. Cette matrice intervient aussi sur la dynamique de l'observateur elle est déterminée de sorte que la dynamique de l'observateur soit plus rapide que celle du système. En effet, ce n'est qu'en régime permanent des sorties que l'erreur peut être annulée. C'est donc à ce moment-là que l'observateur reconstitue convenablement l'évolution des états ; la structure d'observateur d'état linéaire est décrite sur la figure suivante :

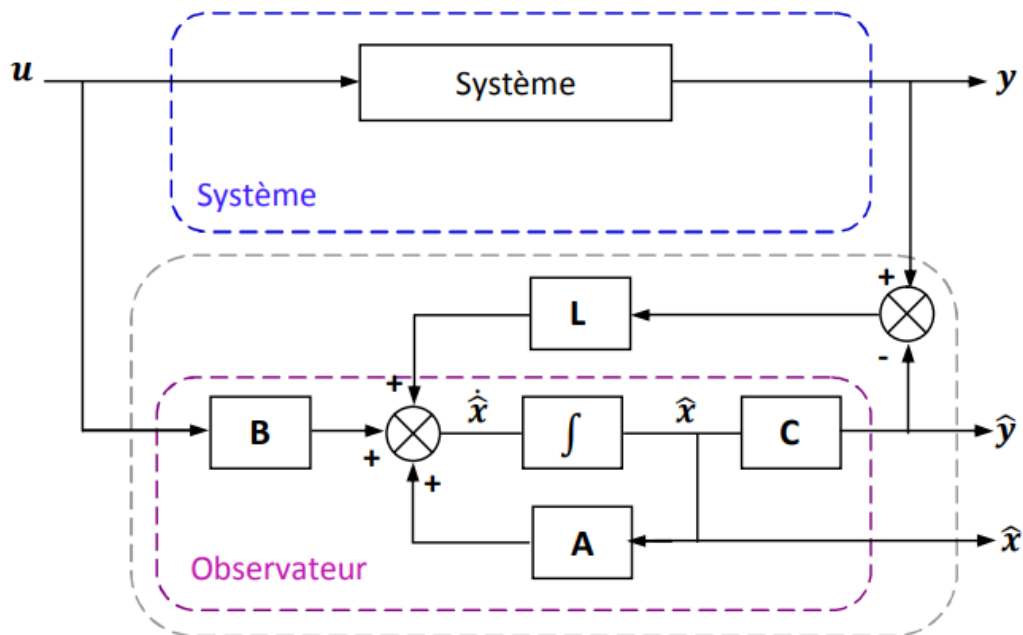


Fig.3.1 : structure d'un observateur linéaire connecté à un système linéaire

La sortie du système y est comparée à la sortie estimée \hat{y} et la différence est pondérée par le gain de *Luenberger*, noté L . Le résultat de cette pondération est utilisé comme contre réaction dans les équations de l'observateur afin de rendre nulle l'erreur d'observation. Le problème consiste alors à déterminer le gain L de l'observateur, il

est calculé de façon à annuler l'erreur d'observation avec une dynamique satisfaisante. Puisqu'il permet de modifier les valeurs propres de la matrice $(A - LC)$ qui sont déterminantes dans le comportement dynamique de l'observateur [100].

3.2.2 Modèle mathématique de l'observateur linéaire

Soit le modèle d'état d'un système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.2)$$

Le modèle de l'observateur est alors donné par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (3.3)$$

On vient corriger l'évolution de l'état grâce au modèle en fonction de l'écart $(y - \hat{y})$ constaté entre la sortie observée et la sortie reconstruite par l'observateur.

Le modèle de l'observateur peut alors être réécrit sous la forme :

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \quad (3.4)$$

Cette relation montre bien que l'observateur reconstruit l'état en fonction de la commande et la mesure y .

Pour ce type d'observateur, il suffit de choisir le gain L de l'observateur de manière à ce que les valeurs propres de la matrice $(A - LC)$ soient dans le demi-plan complexe gauche c'est-à-dire de façon que la matrice $(A - LC)$ soit une matrice *Hurwitz*.

La matrice L est appelée matrice de gain et doit être choisie de manière à ce que l'erreur sur l'état converge exponentiellement vers 0.

Exemple d'application

Soit le système linéaire représenté par sa représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_3(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (3.5)$$

Tel que :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = (1 \ 0 \ 0) \quad (3.6)$$

Étude d'observabilité :

$$\text{rang}(O) = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 3 \quad (3.7)$$

$\det(O) = 16 \neq 0$ elle est de rang plein donc le système est observable.

Remarque 3.2 La matrice d'état A est sous la forme modale. Á la première colonne de A il correspond un élément non nul dans C , le système est donc observable.

Le système (3.5) est linéaire et observable, il est possible de construire un observateur de *Luenberger* sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \hat{\dot{x}}(t) = (A - LC) \hat{x}(t) + B u(t) + Ly(t) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\text{Avec : } \hat{x}(t) = \begin{pmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$\hat{x}(t)$: est le vecteur d'état estimé.

1- Calcul analytique du gain L d'observateur :

Avec le choix de pôles désirés $p = [-3 \ -4 \ -4.5]$, le polynôme caractéristique désiré s'écrit sous la forme :

$$P(\lambda) = \lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \beta_2\lambda^2 + \beta_1\lambda + \lambda_0 \quad (3.10)$$

Avec : β et λ sont des spécifications désirées.

D'où le polynôme caractéristique désiré est :

$$P_d = (\lambda + 3)(\lambda + 4)(\lambda + 4.5) = \lambda^3 + 11.5\lambda^2 + 43.5\lambda + 5 \quad (3.11)$$

Le polynôme caractéristique de l'observateur s'écrit :

$$P_{obs}(\lambda) = \det|\lambda I - (A - LC)| = \begin{vmatrix} \lambda + 2 + l_1 & -1 & 0 \\ l_2 & \lambda & 0 \\ \lambda + l_3 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} \quad (3.12)$$

$$P_{obs}(\lambda) = \lambda^3 + (6 + l_1)\lambda^2 + (4l_1 + l_2 + 12)\lambda + (8 + 4l_1 + 2l_2 + l_3)$$

Par identification entre le polynôme caractéristique désiré et le polynôme de l'observateur :

$$\begin{cases} l_1 + 6 = 11.5 \\ 4l_1 + l_2 + 12 = 43.5 \\ 8 + 4l_1 + 2l_2 + l_3 = 54 \end{cases} \quad (3.13)$$

D'où :

$$L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.5 \\ 9.5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

On peut aussi procéder d'une autre manière pour déterminer le gain L de l'observateur en utilisant une fonction de Lyapunov quadratique $V(e(t)) = e^T(t) P e(t)$ pour avoir un problème sous forme de LMI.

L'erreur d'estimation est donnée par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (3.15)$$

La dynamique d'erreur d'estimation est :

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) \quad (3.16)$$

On utilise une fonction de Lyapunov quadratique. La stabilité asymptotique est assurée si $\dot{V}(e(t)) < 0$.

$$\dot{V}(e(t)) = \dot{e}^T(t)P e(t) + e^T(t)P \dot{e}(t) \quad (3.17)$$

$$\dot{V}(e(t)) = [(A - LC)e(t)]^T P e(t) + e^T(t)P [(A - LC)e(t)] \quad (3.18)$$

$$\dot{V}(e(t)) = e^T(t)(A - LC)^T P e(t) + e^T(t)P (A - LC)e(t) \quad (3.19)$$

$$\dot{V}(e(t)) = e^T(t)(A^T P + PA - C^T L^T P - PLC)e(t) \quad (3.20)$$

$\dot{V}(e(t)) < 0$ si seulement si :

$$(A^T P + PA - C^T L^T P - PLC) < 0 \quad (3.21)$$

On pose : $M = PL$. Delà, on aboutit à :

$$A^T P + PA - C^T M^T - MC < 0 \quad (3.22)$$

Après résolution de la LMI (3.22), on obtient P et M . Le gain de l'observateur est alors donné par : $L = P^{-1}M$. La dynamique de l'erreur d'estimation est la suivante :

La dynamique de l'erreur d'estimation est la suivante :

$$\dot{e}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} e(t) \quad (3.23)$$

Les résultats de simulation sont donnés par la figure suivante :

Les courbes montrent bien que les estimées convergent vers les états du système au bout d'un temps négligeable grâce à l'observateur de *Luenberger*. L'erreur d'estimation tend d'une manière asymptotique vers zéro, ce qui illustre la performance et la bonne convergence de l'observateur utilisé.

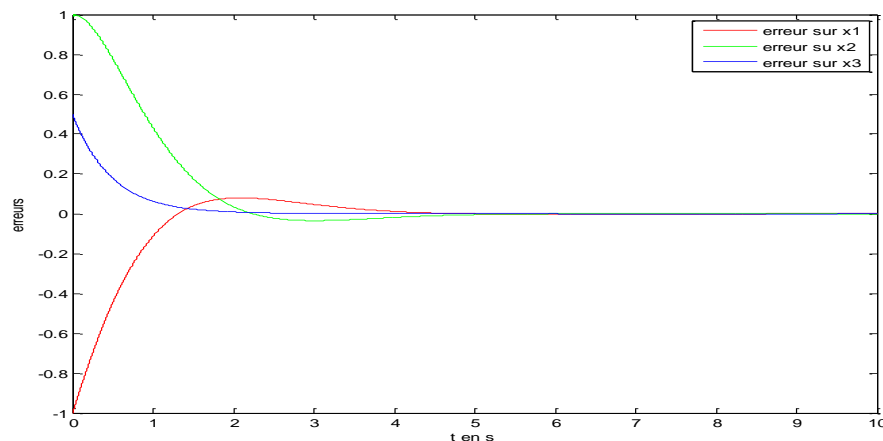


Figure 3.2 – La convergence des erreurs e_i .

3.3. Observabilité des systèmes non linéaires

Pour les systèmes non linéaires, le problème de l'observation se complique dans la mesure où, contrairement au cas linéaire, l'observabilité dans ce cas dépend de l'entrée appliquée et des conditions initiales [9]. De ce fait, la notion d'observabilité pour les systèmes non linéaires est décrite par plusieurs définitions.

Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u(t) \\ y(t) = h(x) \end{cases} \quad (3.24)$$

Avec $x(t_0) = x_0$ où :

$x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$ et $y(t) \in R^p$ représente respectivement le vecteur d'état, vecteur d'entrée et le vecteur de sortie du système dynamique. f et h représentent deux fonctions non linéaires de R^n .

Définition 3.3 (indistinguabilité)

Une paire de deux états initiaux $(x_0^1, x_0^2) \in R^n \times R^n$ tel que $x_0^1 \neq x_0^2$ est dit indistinguable dans l'espace d'état X si, $\forall t \geq 0$ et $\forall u \in U$ telle que les trajectoires des sorties $y(t, x_0^1, u(t))$ et $y(t, x_0^2, u(t))$ issues respectivement de x_0^1 et x_0^2 , restent toujours dans X tout au long de la durée $[0, t]$ vérifiant $y(t, x_0^1, u(t)) = y(t, x_0^2, u(t))$. Par la suite nous disons la paire (x_0^1, x_0^2) est distinguable.

Définition 3.4 (Observabilité)

Le système (3.24) est observable s'il n'admet aucune paire indistinguable. L'une des complexités de l'étude de l'observabilité d'un système non linéaire est que cette propriété dépend du domaine d'étude considéré. A titre d'exemple, considérons le système suivant :

$$\dot{x}(t) = u(t) \quad x(t) \in \mathfrak{R} \quad (3.25)$$

$$y(t) = \sin x(t) \quad (3.26)$$

Il est clair que la paire $(x, x + 2k\pi)$ est indistinguable et donc le système n'est pas observable. Par contre si on considère l'intervalle $D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, alors le système est observable pour $x \in D$. Ceci nous amène à définir l'observabilité locale dite "observabilité faible".

Définition 3.5 (Observabilité faible)

Le système (3.24) est localement ou faiblement observable, s'il existe un voisinage D Pour tout x tel que pour tout voisinage \check{D} de x qui est contenu dans D , il n'existe aucun état indistinguable de x en \check{D} où les trajectoires évoluent à l'intérieur de \check{D} .

Définition 3.6 (Observabilité au sens du rang)

Considérons le système (3.24). La paire (f, h) est observable en $x_0 \in D \subset \mathfrak{R}$ si la condition de rang ci-dessous est satisfaite

$$\text{Rang}\{dh \ dL_f h \ dL_f^2 h \ \dots \ dL_f^{n-1} h\} = n \quad (3.27)$$

Il faut noter aussi que l'observabilité dépend souvent de l'entrée, parce que certaines entrées u ne permettent pas de discerner tous les couples d'état initiaux distincts, cela est le cas du système non linéaire décrit par le modèle non linéaire (3.24).

Remarque 3.3

La conception d'observateurs pour des systèmes linéaires bénéficie d'une abondante littérature avec une variété de méthodes puissantes. Ces observateurs sont caractérisés par leur simplicité, stabilité et facilité de mise en œuvre. A partir d'un choix judicieux des gains d'observateurs, il est possible d'établir une erreur d'estimation qui converge asymptotiquement vers zéro ce qui permet de corriger et de commander le système rapidement comme c'est le cas pour l'observateur de Luenberger.

À noter que les observateurs linéaires se basent sur un modèle linéaire qui ne reflète pas le comportement réel du système, alors que la plupart des systèmes réels sont des systèmes non linéaires. Par ailleurs, si un modèle non linéaire est considéré, il est spécifique et de ce fait toutes ces procédures d'estimation sont toutes liées à la structure du modèle utilisé. De plus, la notion d'observabilité dépend de l'entrée du système et n'est pas définie de façon globale mais elle est singulière et propre au modèle non linéaire utilisé. Il est difficile à priori, étant donné les travaux actuels, de trouver une théorie générale sur l'estimation de l'état non linéaire. L'extension directe des méthodes développées dans le contexte des modèles linéaires au cas des modèles non linéaires est délicate. Cependant, ces techniques sont parfois difficiles à appliquer à cause des contraintes imposées.

3.4. Observateurs et observabilité des systèmes hybrides :

La nature hybride est exprimée par une certaine dépendance à des phénomènes discrets correspondant à des états, des dynamiques ou des commandes discrètes. Intuitivement, l'état du système hybride peut être décrit par deux composantes complémentaires couplées : une composante discrète $\sigma(t)$, décrivant les dynamiques rapides, et une composante continue $x(t)$ décrivant les dynamiques continues du système.

De ce fait, la composante discrète du système contrôle la composante continue qui, rétroactivement, détermine, à chaque instant, l'ensemble des transitions possibles dans le système. L'ensemble résultant constitue ce que l'on appelle l'automate (ou le système) hybride.

Le problème d'estimation représente un autre domaine d'intérêt pour la commande des systèmes hybrides et commutés, ce problème a reçu un grand intérêt et plusieurs investigations ont été faites ces dernières décennies. Une étude approfondie de cette question sort du cadre de ce travail, néanmoins nous allons exploiter une technique simple d'estimation des états d'un système PWA, qui une fois associée à l'approche de commande présentée auparavant permet de surmonter le problème d'implantation des capteurs. Des définitions et des résultats précis d'observabilité et de conception d'observateurs hybrides peuvent être trouvés dans [9] [20] [75]. Parmi les premières propositions concrètes pour la conception d'observateur hybride asymptotique se trouve dans [2] et [9]. Dans [2], la synthèse d'observateur hybride a été formulée sous forme

LMI lorsque le mode actif est connu. Une extension de la méthode au cas général lorsque le mode actif est inconnu, est présentée dans [9]. Une autre approche générale d'estimation des états qui est applicable aux systèmes PWA, est considérée dans [29] où un test d'observabilité efficace est proposé au prix d'un certain effort de calcul. Une méthode d'estimation partielle des états a été aussi nécessaire pour achever la commande à retour de sortie dans [70].

L'objectif d'un observateur hybride consiste en une construction capable de fournir une évaluation du mode en cours d'évolution $\hat{\sigma}(t) \in Q$ donc une identification du mode actif et une estimation du vecteur d'état $\hat{x}(t)$. Pour cela l'observateur hybride doit comporter deux parties : un observateur discret et un observateur continu comme indiqué sur la figure ci après. A partir de la connaissance des données entrée-sortie continues disponibles, une évaluation de l'indice du mode actif (l'état discret) $\hat{\sigma}(t)$ est calculée. Cette information sera utilisée par l'observateur (linéaire) par morceaux pour construire l'évaluation $\hat{x}(t)$ du vecteur d'état continu x .

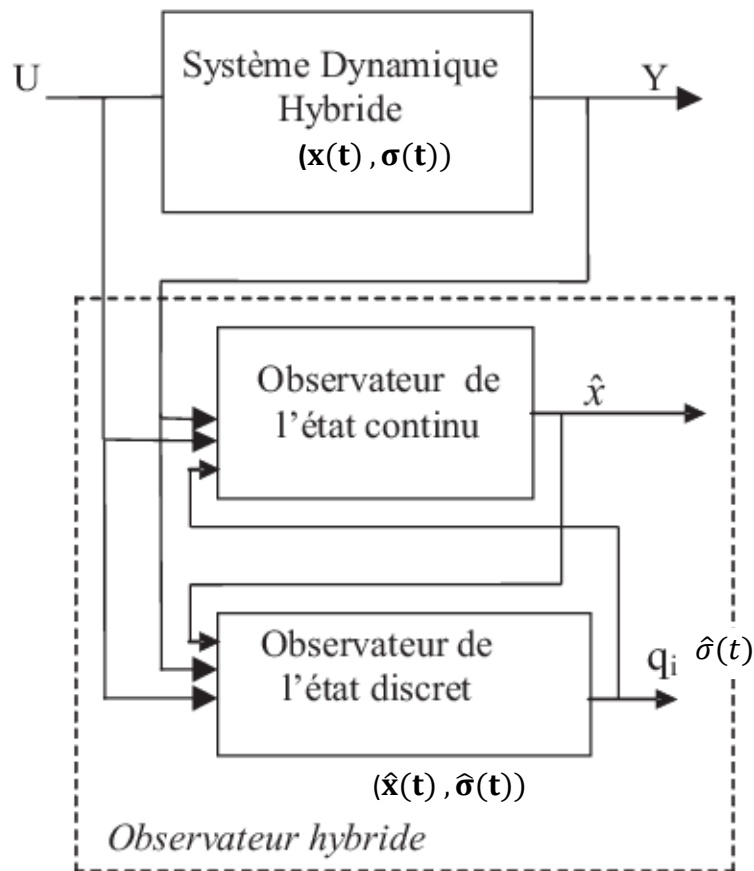


Fig.3.3 : structure d'un observateur hybride.

Contrairement à l'observabilité des systèmes classiques où le concept a une caractérisation claire et simple, ce concept est associé à plusieurs notions pour les systèmes hybrides et commutés. En effet, pour les systèmes hybrides, selon que la séquence de modes peut ou ne peut être observé et selon son utilisation dans la reconstruction de l'état continu ainsi que la nature déterministe ou stochastique du problème, on peut trouver plusieurs définitions et caractérisations de l'observabilité des systèmes hybrides.

À noter qu'avant toute synthèse d'observateur, on doit d'abord se demander si sa conception est possible. La notion d'observabilité et certaines propriétés des entrées

appliquées au système fournissent des conditions nécessaires à la synthèse d'un observateur.

Remarque 3.4

En général, les résultats de synthèse d'observateurs hybrides se catégorisent essentiellement selon que le mode actif est connu ou non. La méthode d'estimation se simplifie énormément lorsque le mode actif est connu puisque l'évolution du mode de l'observateur le suit à condition qu'il y a une synchronisation. D'autre part, si le mode actif doit être estimé, on ne peut montrer la convergence de l'erreur d'estimation de l'état continu, celle-ci sera erronée s'il y a possibilité que la reconnaissance du mode actif est mal estimée. Néanmoins, on peut prouver qu'elle restera bornée (Juloski et al., 2002; Pettersson, 2005b).

3.4.1 Observateur de l'état discret :

Souvent, on associe la reconnaissance du mode actif à l'identification des instants de commutations, généralement en supposant un temps de séjour minimum entre commutations successives et une caractérisation simple des surfaces de commutation. Cette approche est la base de plusieurs travaux concernant l'observabilité des systèmes hybrides (Vidal et al., 2002) et (Balluchi et al., 2002). Un résultat bien établi pour les systèmes discrets peut être trouver dans (Birouche et al., 2006) en se basant sur la définition de la matrice commune étendue d'observabilité d'ordre k définit ci-dessous, alors que beaucoup de travaux se sont enchainés jusqu'à maintenant avec même une généralisation au cas des systèmes non autonomes.

$$G_k = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_m \\ C_1 A_1 & C_2 A_2 & \dots & C_m A_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_1 A_1^{k-1} & C_2 A_2^{k-1} & \dots & C_m A_m^{k-1} \end{pmatrix}$$

3.4.2 Observateur de l'état continu :

L'observation de la partie continue repose généralement sur l'idée de Luenberger et son extension aux systèmes à commutations pour synthétiser un observateur linéaire par morceaux.

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A_i \hat{x} + b_i + L_i(s - \hat{s}). \\ \hat{s} = C_i \hat{x} \text{ si } \hat{\sigma}(t) = i \in Q. \end{cases}$$

Où $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des états estimés, L_i sont les gains du multi-observateur.

Pour chaque pair $(\sigma, \hat{\sigma}) \in Q \times Q$, les dynamiques de l'erreur d'estimation sont données par :

$$\tilde{x} = x - \hat{x}$$

Qu'on peut exprimer par : $\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = (A_i - L_i C_i) \tilde{x}$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = (A_i - L_i C_i) \tilde{x} \text{ si } \hat{\sigma}(t) = \sigma(t) = i \in Q. \\ \dot{\tilde{x}} = (A_i - L_i C_i) \tilde{x} + \vartheta(t) \text{ si } \sigma(t) = j \text{ et } \hat{\sigma}(t) = i \neq j. \end{cases}$$

Avec

$$\vartheta(t) = \left((A_j - A_i) - L_i(C_j - C_i) \right) x(t) + (b_j - b_i)$$

Où $\vartheta(t)$ représente la différence des dynamiques lorsque le mode estimé est différent du vrai mode active.

L'objectif de la synthèse de l'observateur continu consiste à assurer la stabilité de l'erreur d'estimation et à calculer les gains L_i . Cette dernière opération peut se faire on-line ou offline selon de la possibilité de détection en temps réel.

Dans le cas d'estimation on-line, il y aura toujours un retard entre la détection de l'instant de commutation et l'identification effective du mode actif. Cet asynchronisme qui se matérialise par la présence du terme $\vartheta(t)$ empêche d'assurer la convergence asymptotique de l'erreur. Néanmoins, on pourrait calculer les gains L_i pour que l'erreur soit entrée-état stable (ISS) voir [Jiang et al 1999 et Daafous 2005].

3.4.3 Commande à base d'observateur des systèmes affines par morceaux (PWA)

La majorité des résultants de stabilisation des systèmes commutés et en particulier ceux des systèmes affines par morceaux PWA sont bases sur l'idée de retour d'états où une complète connaissance de l'état du système est nécessaire. Cependant en pratique, la totalité des états du système n'est généralement pas disponible, c'est le cas des exemples de convertisseurs d'énergie auxquels nous nous intéressons. En effet pour ces circuits, les tensions aux bornes des capacités ne sont pas toujours accessibles aux mesures ce qui nécessite leurs estimations.

Dans ce chapitre, nous allons utiliser un multi-estimateur simple basé sur l'extension de l'observateur de Luenberger. Cependant, en associant le multi-observateur à l'approche de commande présentée, le mode discret actif est déterminé par la méthode de contrôle des commutations. Par exemple dans le cas des convertisseurs, si un signal de contrôle approprié est utilisé pour sélectionner le mode de l'observateur à partir de celui du circuit, alors le mode actif convenable est à chaque instant disponible sans aucun retard temporel. De ce fait, lorsqu'on considère que les systèmes commutés sans sauts, la synthèse de l'observateur se réduit donc au calcul des gains du multi-observateur qui assurent la convergence des erreurs [99].

Les dynamiques continues du pseudo- observateur de Luenberger sont données par:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = a_i \hat{x} + b_i + L_i(s - \hat{s}). \\ \hat{s} = C_i \hat{x}. \end{cases} \quad (3.28)$$

Où $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, est le vecteur des états estimés et L_i sont les gains du multi-observateur.

Si on associe à chaque erreur individuelle une région de l'espace $\bar{\Omega}_i$ de façon que ces dernières recouvrent tout l'espace \mathbb{R}^n . Alors, les dynamiques de l'erreur d'estimation sont données par :

$$\tilde{x} = x - \hat{x} \quad (3.29)$$

Qu'on peut exprimer par :

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = (a_i - L_i C_i) \tilde{x}, \text{ pour } \tilde{x} \in \bar{\Omega}_i \quad (3.30)$$

Avec $\bar{\Omega}_i = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n | \tilde{x}^t \bar{q}_i \tilde{x} \geq 0\}$.

Noter bien que ces erreurs d'estimation sont aussi gouvernées par un système commuté ; par conséquent, il n'est pas suffisant de stabiliser chaque mode d'erreur à part. Similairement à ce qui a été fait dans la stabilisation, nous allons utiliser une pseudo-fonction de Lyapunov commune en faisant une partition de l'espace des erreurs.

En utilisant la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$\bar{v}(\tilde{x}) = \tilde{x}^t \bar{p} \tilde{x} \text{ avec } \bar{p} = \bar{p}^t > 0. \quad (3.31)$$

Pour $\tilde{x} \in \bar{\Omega}_i$, la dérivée temporelle le long de la trajectoire du ième mode d'erreur est donnée par:

$$\dot{\tilde{v}}_i(\tilde{x}) = \tilde{x}^t(a_i^t \bar{p} + \bar{p} a_i - C_i^t L_i \bar{p} - \bar{p} L_i C_i) \tilde{x}. \quad (3.32)$$

La précision de l'estimation des états dans (3.28) est confirmée par la convergence des erreurs correspondantes en (3.29), cette convergence est à son tour, établit par la stabilité à l'origine du système commuté en (3.30).

Le théorème suivant résume les conditions de stabilité au sens de Lyapunov pour le système commute en (3.30).

Théorème 3.1 [100]:

S'il existe des matrices symétriques \bar{q}_i , une matrice symétrique définie positive \bar{p} , des vecteurs W_i et des scalaires positifs $\bar{\gamma}$, $\bar{\mu}_i$, $\bar{\theta}_i$ telle que pour tout $i \in \mathbb{I}$, la BMI suivante:

- 1) $\bar{p} > 0$.
- 2) $a_i^t \bar{p} + \bar{p} a_i + \bar{\mu}_i \bar{q}_i + \bar{\gamma} I_n - C_i^t W_i^t - W_i C_i \leq 0$.
- 3) $\sum_1^m \bar{\theta}_i \bar{q}_i \geq 0$.

Est faisable, alors toutes les erreurs du système (3.30) convergent asymptotiquement vers zéro et les gains du multi-observateur sont donnés par: $L_i = \bar{p}^{-1} W_i$. ■

Ce théorème affirme indirectement que les états estimés en (3.28) représentent une bonne estimation des états de notre système, et donc peuvent être utilisé dans la commande à retour d'états du système.

Une démonstration complète de ce théorème peut être trouvée dans [100]

Application en Électronique de Puissance

L'utilisation des convertisseurs DC/DC à commutations présente beaucoup d'avantages par rapport à celle de leurs homologues linéaires tels que :

- Le fonctionnement à haute fréquence de commutation qui permet de réduire le volume de l'inductance nécessaire et éventuellement du transformateur employé.
- Ils peuvent abaisser ou augmenter la tension d'entrée en inversant leurs polarités.
- Ils peuvent fonctionner pour une large gamme de tension d'entrée.
- Et évidemment un meilleur rendement.

Sans toutefois oublier la présence d'harmoniques indésirables en entrée et en sortie comme effet des commutations ce qui complique énormément la technique de commande associée. Les topologies usuelles les plus utilisées de convertisseurs DC/DC à commutations (qui peuvent être isolés ou non) auxquelles nous avons appliqué notre approche de commande et d'observation sont les suivantes :

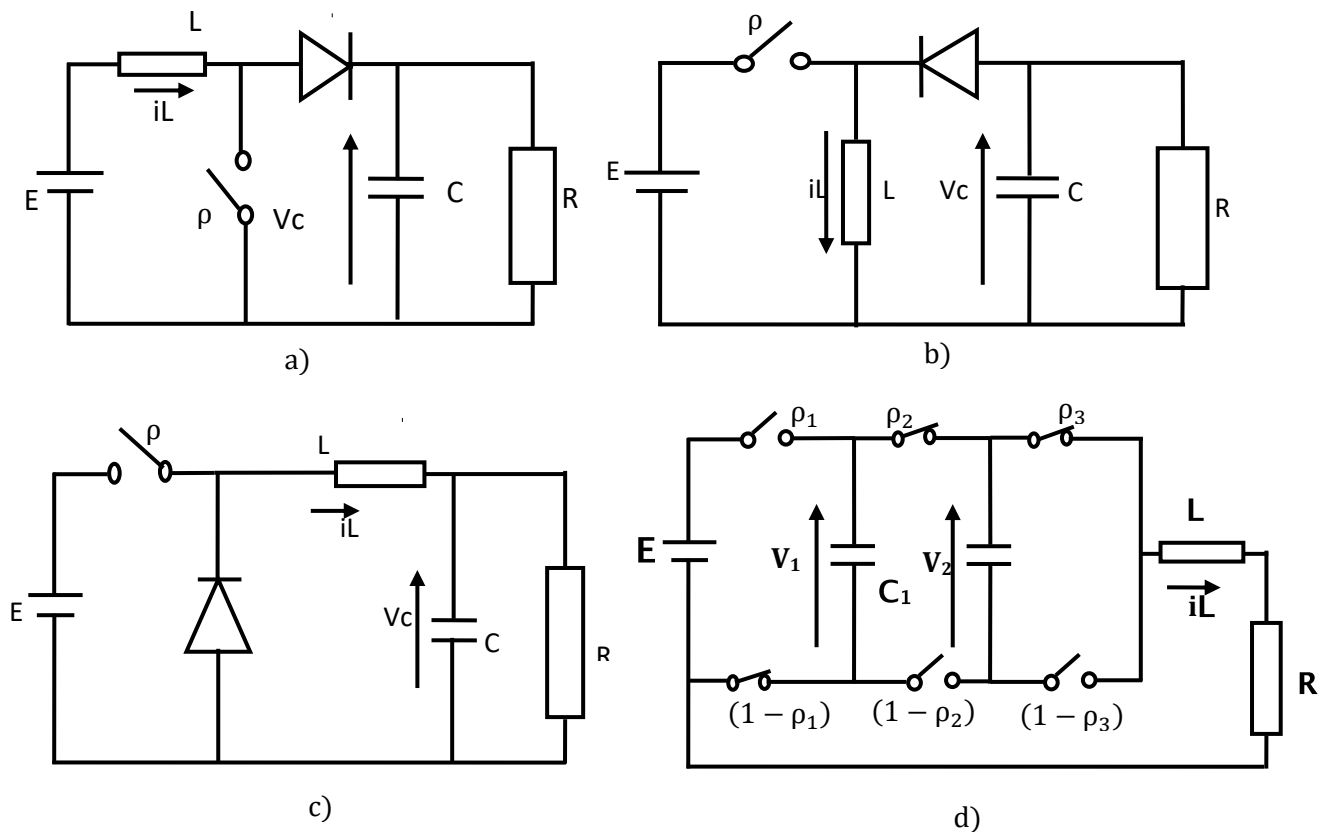


Fig. 3.4 Topologies usuelles de convertisseurs à commutations, Boost en a), Buck-Boost en b), Buck en c) et le convertisseur multicellulaire en d).

Il n'est pas difficile de mener l'opération de la modélisation de tous ces circuits et obtenir finalement les modèles de systèmes affines par morceaux (PWA) objet de notre travail. En effet, la modélisation directe permet d'écrire explicitement les équations de ces circuits à topologies variables sous la forme de systèmes multi-affines (à commutations) et bénéficier ainsi de l'utilisation des outils puissants développés pour ces derniers et notamment l'approche présentée au chapitre 2.

Convertisseurs multicellulaires :

L'inconvénient majeur des convertisseurs à un seul commutateur ou interrupteur est que ce dernier (typiquement un MOSFET) doit être capable de bloquer une haute tension (de l'ordre du double de la tension d'entrée) et particulièrement, lorsqu'il est alimenté par un courant alternatif redressé. En effet, les convertisseurs à un seul commutateur ne représentent pas la bonne solution pour les convertisseurs de puissance aussi parce que le commutateur doit être traversé par un fort courant. Pour se faire, d'autres topologies à plus d'un commutateur peuvent être utilisées. Le convertisseur multicellulaire (figure ci-dessous) en fonctionnement hacheur donc pour lequel une puissance (courant & tension) de sortie est bien précisée en est un bon exemple.

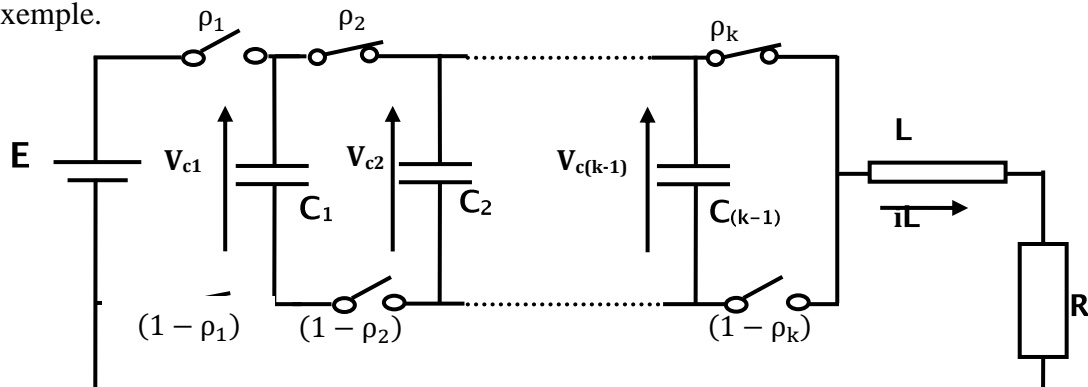


Fig. 3.5 Topologie du Convertisseur multicellulaire

En notant par V_{c_i} la tension aux bornes de la capacité C_i , $\forall i=1,(k-1)$. Le système est constitué de $2k$ commutateurs fonctionnant par paires; pour chaque paire j , une commande ρ_j est appliquée à l'interrupteur en haut de la cellule j et son complément $\bar{\rho}_j$ à celui en bas de la même cellule.

Toujours en se plaçant dans de conditions idéalisées i.e. interrupteurs parfaits, source et composants aussi parfaits et la convention $\rho_j=1$ lorsque l'interrupteur j (du haut de la cellule j) est fermé et $\rho_j=0$ lorsqu'il est ouvert.

Ils existent plusieurs façons de mener l'opération de modélisation des convertisseurs multicellulaires, néanmoins le modèle instantané suivant permet d'obtenir directement le modèle d'états et sert de référence pour expliquer le fonctionnement du convertisseur.

$$\begin{cases} \dot{i}_L = -\frac{R}{L}i_L + \frac{E}{L}\rho_1 + \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{k-1}V_{c_j}(\rho_{j+1} - \rho_j) \\ \dot{V}_{c_j} = \frac{i_L}{C_j}(\rho_j - \rho_{j+1}) \\ y = (1 \ 0 \ \dots \ 0)x \end{cases} ; \quad j = 1, k-1 \text{ et } x = \begin{bmatrix} i_L \\ V_{c1} \\ \vdots \\ V_{c(k-1)} \end{bmatrix}.$$

Le modèle peut être mis directement sous la forme de système à commutations :

$\dot{x} = a(\rho)x + b(\rho)$, avec

$$a(\rho) = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{\rho_2 - \rho_1}{L} & \dots & \frac{\rho_k - \rho_{k-1}}{L} \\ \frac{\rho_1 - \rho_2}{C_1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \frac{\rho_{k-1} - \rho_k}{C_{k-1}} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, b(\rho) = \begin{pmatrix} \frac{\rho_1 E}{L} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; x = \begin{pmatrix} i_L \\ V_{c1} \\ \vdots \\ V_{c(k-1)} \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{pmatrix}.$$

Commande des convertisseurs multicellulaires:

Afin de sécuriser le fonctionnement du convertisseur i.e. pas de surtensions aux niveaux des interrupteur et réduire les harmoniques en sortie, un bon conditionnement du convertisseur multicellulaire est nécessaire, il requiert donc un niveau de tension stable pour chacune des capacités flottantes. Cela dépend évidemment des éléments du système et des valeurs de tension et du courant désirées en sortie.

Commande en boucle ouverte :

Plusieurs techniques de commande ont été employées pour la stabilisation des tensions intermédiaires des convertisseurs multicellulaires. Les plus classiques sont des stratégies à boucle ouverte qui consistent à réaliser un équilibrage « naturel » par MLI (Modulation en Largeur d'Impulsion) pour un rapport cyclique fixé et décalé de $2\pi/k$ sur chaque cellule, cette technique a l'inconvénient de nécessiter un long temps d'équilibrage et un problème avec les convertisseurs à nombre de cellules paire. Une amélioration du temps d'équilibrage a été obtenue par l'adjonction carrément de circuits d'équilibrage utilisant un filtre RLC série en parallèle avec la charge afin d'amplifier les harmoniques permettant l'équilibrage naturel des tensions. Toutefois, l'équilibrage en boucle ouverte présente des réponses très oscillatoires et n'a aucune garantie de robustesse. Néanmoins, en plus de sa simplicité, il a l'avantage de ne pas avoir besoin des tensions intermédiaires ce qui évite la complication des observateurs.

Commande en boucle fermée :

Pour des raisons de robustesse et d'assurance de rapidité d'équilibrage, les techniques de commande des convertisseurs multicellulaires les plus avancées ont été appliquées en boucle fermée. En conséquence, une nécessité de disposer de toutes les tensions intermédiaires pour achever l'opération de commande à retour ce qui rend le développement de multi-observateur indispensable pour l'estimation de ces dernières. En plus des méthodes de régulation classique, une multitude d'approches et techniques avancées ont été développées pour commander les convertisseurs multicellulaires à base des modèles instantanés, moyens ou linéarisés. Pour en citer seulement les plus connues, la méthode stabilisante du Supélec est basée sur le modèle Bonds Graph et la formulation PCH est très intéressante, simple et demande moins d'efforts de calcul. La méthode la plus intéressante du point de vue dynamique d'équilibrage et utilisation du modèle instantané, est celle de la commande par mode glissant. Les approches à commande prédictive ou optimale sont moins simples et demandent plus de calcul pour la mise en œuvre.

Approche Pratique de commande à base d'observateur commuté:

Nous avons présenté dans le chapitre précédent une approche pratique complète de commande par commutations pour les systèmes commutés PWA de façon générale. L'approche a bien prouvé son efficacité sur le plan commande, nous allons l'associer au multi-estimateur précédent afin de commander les convertisseurs multicellulaires.

Exemple 5.2 : convertisseur multicellulaire (k=2) [99]

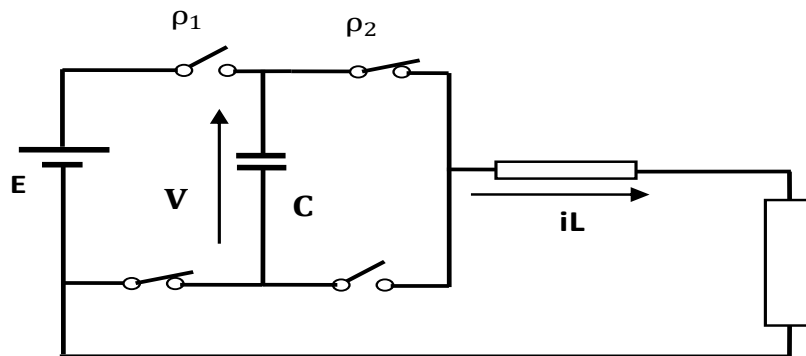


Fig. 3.6. Circuit Simplifié électrique du convertisseur à deux cellules

$$a(\rho) = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{\rho_2 - \rho_1}{L} \\ \frac{\rho_1 - \rho_2}{C_1} & 0 \end{pmatrix}, b(\rho) = \begin{pmatrix} \frac{\rho_1 E}{L} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} iL \\ V_C \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}$$

$E=1500V$, $R=10\Omega$, $L=0.001H$, and $C_1=C_2=0.00004F$.
Selected reference: $iL_0=60A$, $V_{C0}=E/2=750V$.

L'application de l'approche est parfaitement adaptée au contrôle et observation des convertisseurs multicellulaires (à plus de deux modes). Contrairement aux systèmes bimodaux, elle présente de très bonnes performances de robustesse vis-à-vis des fluctuations de la source et de la charge pour les circuits multicellulaires.

Les résultats de simulation représentés dans la figure 3.7 montrent bien que l'approche de commande permet de stabiliser la tension flottante VC et le courant IL

au point désiré avec une grande précision. La même figure ci-dessous confirme aussi la bonne qualité du multi-estimateur où une convergence rapide des erreurs d'estimation est observée. D'autre part, nous avons représenté dans la figure 3.8 les trajectoires du système (VC, IL) obtenues en boucle fermée d'abord pour l'approche de commande seule c.à.d. sans l'utilisation de l'observateur fig 3.8-a puis celle du convertisseur lorsque la stabilisation est basée sur les états estimés fig 3.8-b ; et enfin l'habilité du multi-estimateur de piloter le système même dans le pire cas où celui-ci démarre de condition initiale différente de celle du convertisseur fig 3.8-c.

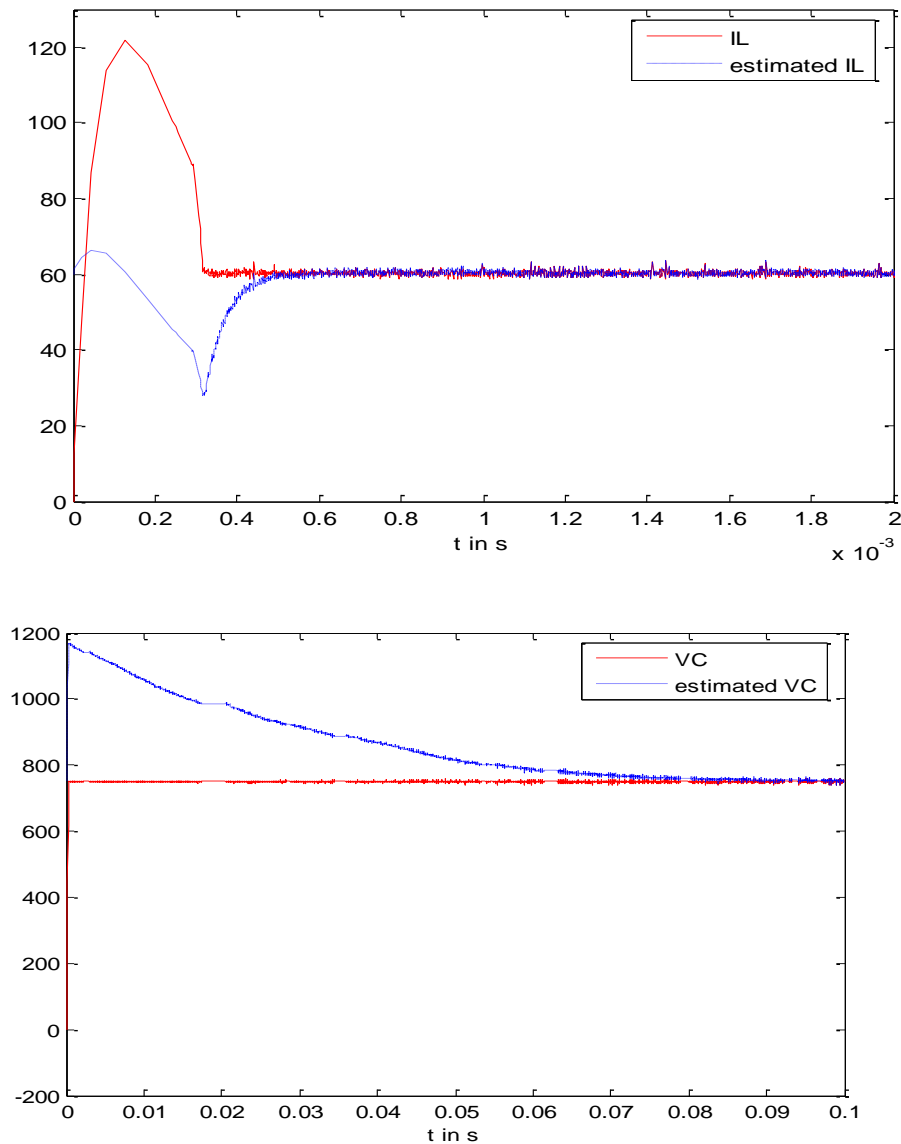


Fig. 3.7. Courant d'inductance et son estimé en (a), tensions VC et son estimé en (b) pour des conditions initiales nulles.

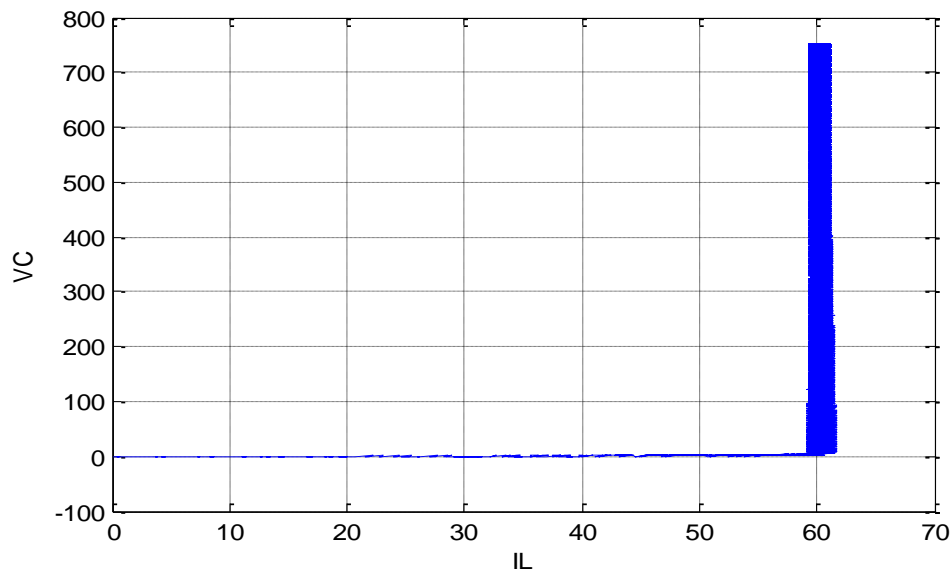
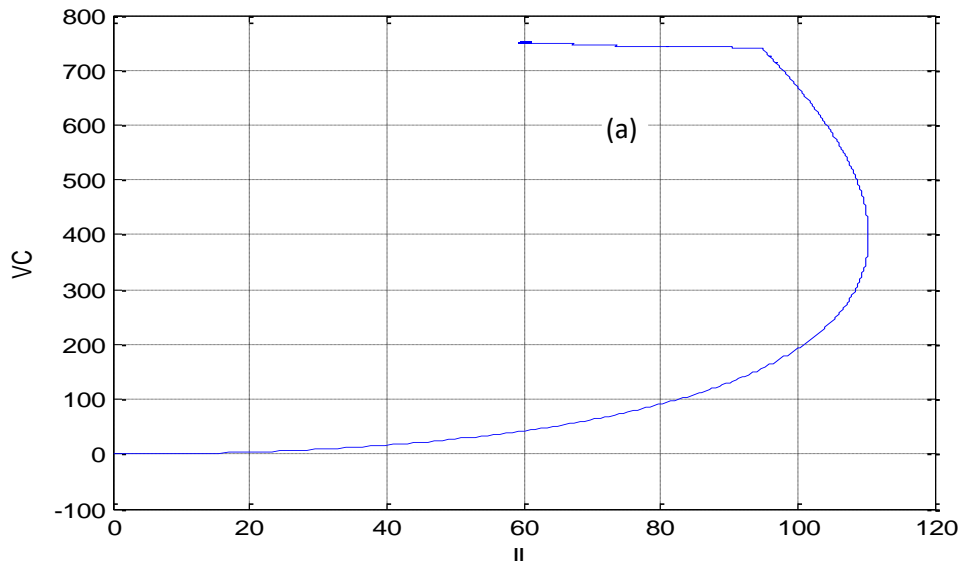
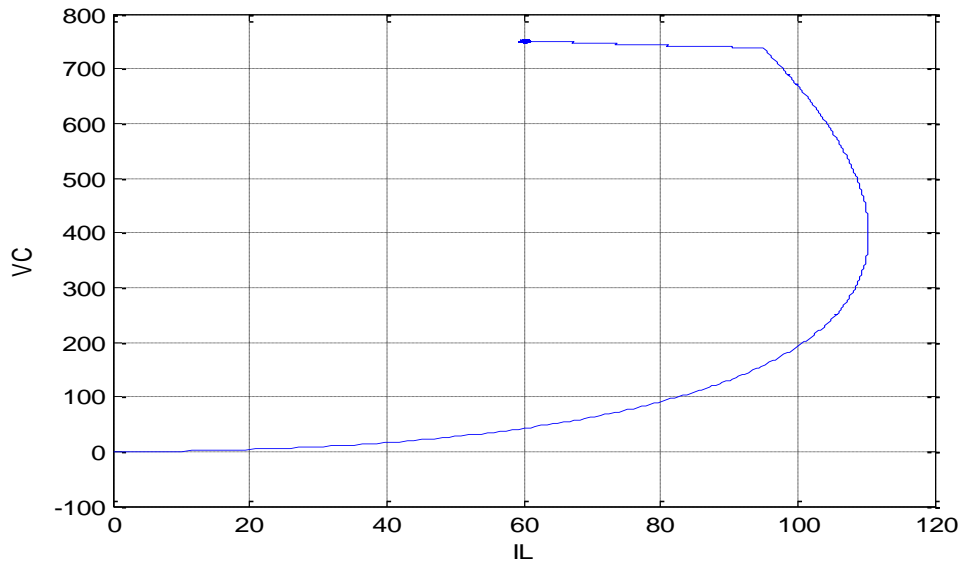


Fig. 3.8 : Trajectoire de la sortie du convertisseur bicellulaire sans l'utilisation d'observateur (a), stabilisation à base du multi-estimateur lorsque les deux systèmes partent de la même condition initiale nulle en (b) et en (c) lorsque le convertisseur part de zéro alors que l'observateur part du point désiré (60 750)!

Exemple 5.2 : convertisseur multicellulaire (k=3) [99]

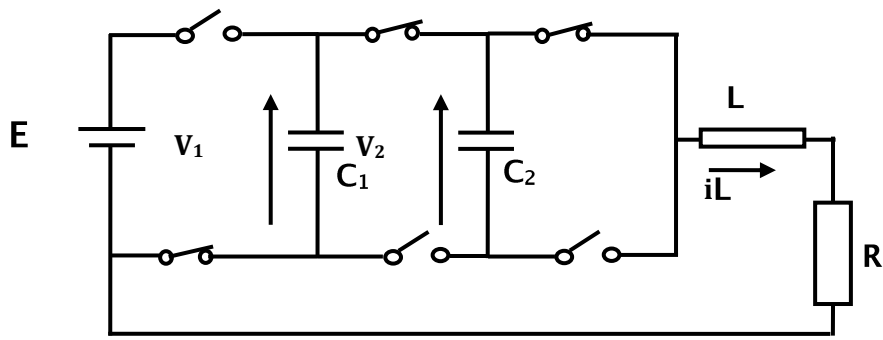


Fig. 3.9. Circuit Simplifié électrique du convertisseur multicellulaire.

$$a(\rho) = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{\rho_2 - \rho_1}{L} & \frac{\rho_3 - \rho_2}{L} \\ \frac{\rho_1 - \rho_2}{C_1} & 0 & 0 \\ \frac{\rho_2 - \rho_3}{C_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, b(\rho) = \begin{pmatrix} \frac{\rho_1 E}{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; x = \begin{pmatrix} iL \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix}.$$

$R=20\Omega$, $E=90V$, $L=0.075H$, and $C_1=C_2=0.001F$.

Le point de fonctionnement sélectionné est donné par : $iL_0=2A$, $V_{10}=E/3$, $V_{20}=2E/3$.

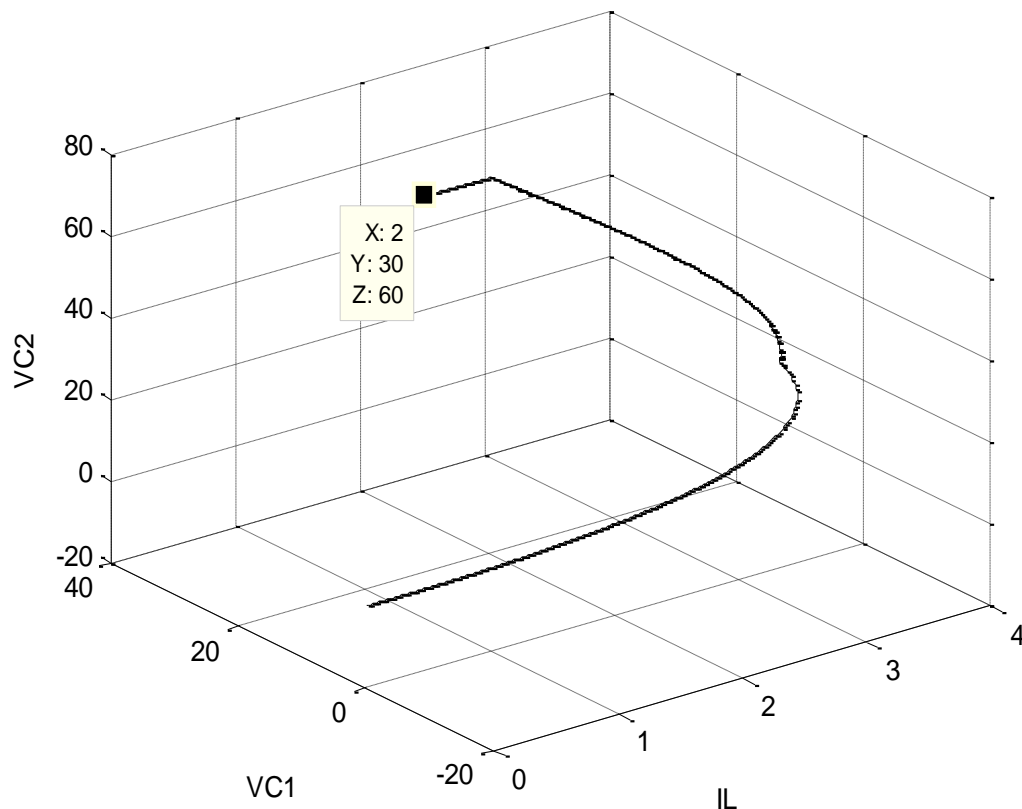


Fig. 3.10 : Sorties du convertisseur multicellulaire commandé à base du multi-estimateur pour les mêmes conditions initiales nulles (test en boucle fermée).

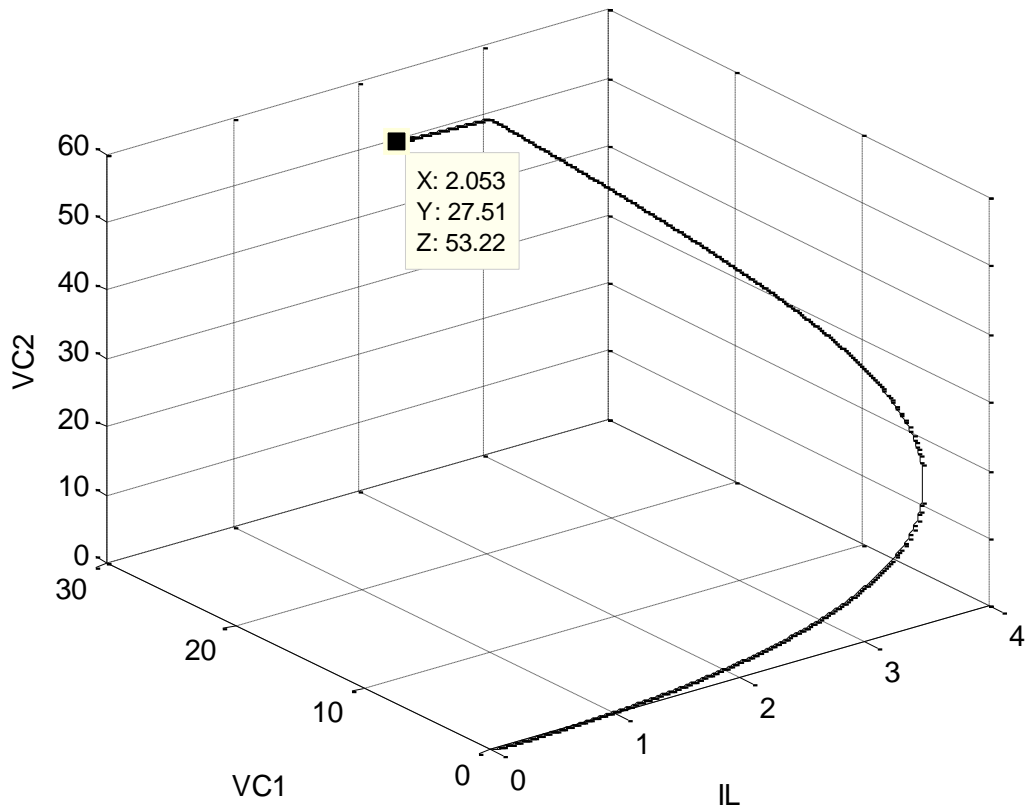


Fig. 3.11 : Trajectoire de la sortie du convertisseur multicellulaire commandé à base du multi-estimateur lorsque les deux systèmes partent de conditions initiales différentes

Ce circuit possède 8 modes ($2^3 = 8$) de fonctionnement, à chaque combinaison des commutateurs $\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix}$ correspond une configuration du circuit i.e. un mode de fonctionnement. De très bons résultats de simulation sont présentés ci-dessus où les figures suivantes représentent un ensemble d'exécutions de l'algorithme de régulation à partir de différentes conditions initiales. Les performances du multi-estimateur sont réaffirmées pour les systèmes PWA à plus de deux modes. En effet, les résultats de simulation pour les convertisseurs multicellulaires, sont impeccables pour le test en boucle ouverte/ fermée du multi-estimateur si les deux systèmes partent de la même condition initiale. Cependant, la situation est un peu différente pour le test en boucle ouverte du pire cas i.e. lorsque le système et l'observateur ne démarrent pas des mêmes conditions initiales, une erreur d'estimation constante persiste elle est surtout réduite en boucle fermée voir (figure 3.11).

En pratique, l'utilité du multi-estimateur est d'éviter les mesures difficiles (ou impossibles) et son rôle principal est de fournir ces informations à la boucle de retour, si on veut que le multi-estimateur développé soit irréprochable même pour le pire cas, un procédé de réinitialisation (RESET) simultanée des deux système peut être prévu .

Conclusion générale

En général, les systèmes dynamiques hybrides. Et leurs problèmes de commande et d'observabilité sont difficiles et la plupart des approches de la commande exacte des systèmes nécessitent la disponibilité d'un modèle mathématique. L'objectif principal de ce travail est de mettre en évidence les idées principales concernant la commande et l'observabilité des systèmes Hybride (SDH).

Dans la première partie de ce travail, nous avons essayé de faire une démarche progressive pour la représentation des systèmes dynamiques en rappelant les notions de base pour les systèmes dynamiques continus et leurs extensions aux systèmes hybrides. Le choix d'exemples élémentaires dans la démarche conduit certainement à une meilleure compréhension du phénomène hybride.

Dans la deuxième partie du travail, nous avons parlé des systèmes dynamiques à commutation et leur différent type ainsi la modélisation de ces systèmes, et ensuite nous avons passé à l'étude de stabilité et la stabilisation en utilisant des approches mathématiques complexe et des simulations sur les (SDC) en a vu que la stabilité de ces sous-systèmes n'a pas de relation directe avec la stabilité générale des systèmes a commutation

Dans la dernière partie du travail, nous avons parlé de l'observabilité des systèmes dynamique hybride, spécialement sur l'observabilité des systèmes a commutation et on a présenté l'idée et la manière d'appliquer une Commande à base d'observateur des systèmes affines par morceaux (PWA) sur un système dynamique à commutation avec l'exemple du Convertisseurs multicellulaires

Enfin, j'espère que nous n'avons présenter notre introduction sur la commande et l'observabilité des systèmes dynamique hybride (SDH) et les systèmes a commutations (SDC) d'une façon compréhensive et efficace, En ce qui concerne les sujets futurs je souhaite de compléter notre travail sur ce domaine et même avec la possibilité de voir dans la recherche des autres techniques de stabilité et d'observabilité parce ce que c'est un domaine très intéressant et essentiel dans l'automatique.

Bibliographique.

- [1] M. Ahmadi, H. Mojallali, R. Wisniewski, R. I. Zainanabadi : Robust stability analysis of nonlinear switched systems with Filippov- solutions. hi: 7 IFAC symposium on robust control design. Aalborg. Denmark; 2012.
- [2] A. Alessandri, P. Coletta: Switching observers for continuous-time and discrete time linear systems. In Proc. of the ACC. Arlington, Virginia, 2516-2521, 2001.
- [3] R. Alur. C. Courcoubetis. T. Henzinger. & P.H. Ho: Hybrid Automata: An Algorithmic Approach to the Specification and Verification of Hybrid Systems. Pages 209-229 of: Hybrid Systems. Lecture Notes in Computer Science. vol. 736. 1993, Springer
- [4] Antoine Girard. Analyse Algorithmique des Systemes Hybrides. these Phd. Institut National Polytechnique de Grenoble. France, 2004.
- [5] J. Aubin, A. Cellina: Differential Inclusions: Set-Valued Maps and Viability Theory. Number 364 in Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag. Berlin, 1984.
- [6] S. Azuma, J. Imura. T. Sugie. Lebesgue piecewise affine approximation of nonlinear systems, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems 4 (2010) 92-102.
- [7] A. Bacciotti. Stabilization by means of state space depending switching rules. Systems & Control Letters, 53(3-4). pp. 195-201, 2004.
- [8] Babaali. M.: Switched linear systems: Observability and observers. PhD Thesis, Georgia Institute of Technology, School of Engineering. USA, 2004.
- [9] Balluchi, A.; Benvenuti. L.; Di Benedetto. M. D.; Sangiovanni-Vincentelli, A. L.: Design of observers for hybrid systems. Lect. Notes in Computer Science. 2289, 7689, 2002.
- [10] A. Bemporad. G. Ferrari-Trecate, M. Morari, Observability and controllability of piecewise affine and hybrid systems, IEEE Transaction on Automatic Control. 45. 2000, 1864-1876.
- [11] F. Blanchini. Nonquadratic Lyapunov functions for robust control. Automatica. 31(3):451-461. 1995.
- [12] P. Bolzem. W. Spinelli. Quadratic stabilization of a switched affine system about a nonequilibrium point. in: Proceedings of the American control conference, 2004. pp.3890-3895.
- [13] J. Buisson, H. Cornerais. and P. Richard. "Analysis of the bond *graph* model of hybrid physical systems with ideal switches." Journal of Systems and Control Engineering. vol. 216. no. 11. pp. 47-72. 2002.
- [14] J. Buisson. H. Connerais. M. Zainea. H. Gueguen, and E. Godoy. Formal approach to compute hybrid automata model for linear physical systems with switches. In Proceedings of the 2004 IEEE Conference on Computer Aided Control Systems Design. volume 1. pages 47-52. Taipei. Taiwan. 2004.
- [15] J. Buisson, H. Cormerais, P.Y. Richard: On the stabilisation of switching electrical power converters. In Hybrid Systems: Computation and Control. ser. LNCS. M. Morari and L. Thiele. Eds. Springer, 3414, 184-197, (2005).
- [16] S. Boyd. L. El Ghaoui. E. Feron. H. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM studies in applied mathematics. SIAM. Philadelphia. P.A. 1994.
- [17] S. Boyd and L. Vandenberghe. Convex optimization with engineering applications. Lecture Notes, Information Systems Laboratory. Stanford University. 2001. <http://www.stanford.edu/class/ee364>
- [18] M. S. Branicky. General hybrid dynamical systems: Modeling, analysis, and control, In R. Alur. T. Henzinger. and E. D. Sontag. editors, Hybrid Systems III Verification and Control: Lecture Notes in Computer Science. volume 1066. pages 186-200. Springer-Verlag. Berlin. 1996.

- [19] P. Collins: Generalized hybrid trajectory spaces. In Proc. 17th Int. Symp. Mathematical Theory of Networks and Systems. Kyoto Japan, P. 2101-2109.
- [20] P. Collins, J. H. van Schuppen: Observability of Piecewise-Affine Hybrid Systems. In Hybrid Systems: Computation and Control. In Lecture Notes in Computer Science. R. Alur and G. J. Pappas. Eds. vol. 2293, Springer-Verlag. 265-279.2004.
- [21] J. Cortes. Discontinuous Dynamical Systems. IEEE Control Systems Magazine. 23(3). 36-73, 2008.
- [22] W.P. Dayawansa and C.F. Martin. A converse Lyapunov theorem for a class of dynamical systems which undergo switching. IEEE Transactions on Automatic Control. 44(4). pp. 751-760. apr. 1999.
- [23] R. DeCarlo, M. Branicky. S. Pettersson. B. Lennartson. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems, in: Proceedings of the IEEE. 88 (7). 2000 1069-1082.
- [24] De Schutter. W.P.M.H. Heemels. Modeling and Control of Hybrid Systems, Lecture Notes of the DISC Course October 2006. Delft Center of Systems and Control, Delft University of Technology. Mekelweg 2, 2628 CD Delft, The Netherlands, <http://www.dsc.tudelft.nl>
- [25] Didier Henion. Stabilité des Systèmes linéaires incertains à commande contrainte, these Phd. Mstitut National des sciences appliquees Toulouse. France. 1999.
- [26] Emmanuel Moulay. Une Contribution A L'etude De La Stabilité en temps Fini et de la stabilisation. these Phd. runiversite des sciences et technologie de Lille. France. 2005
- [27] R. Erickson and D. Maksimovic. Fundamentals of Power Electronics. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, The Netherlands. second edition. 2001.
- [28] Mine Fatima El Guezar. Modelisation Et Simulation Des Systemes Dynamiques Hybrides Affines Par Morceaux : Exemples En Electronique De Puissance. these Phd, l'Institut National des Sciences Appliquees de Toulouse, 2009.
- [29] Ferrari-Trecate. G.: Mignone, D.: Morari, M.: Moving horizon estimation for hybrid systems. IEEE Trans A.C., 47, 1663-1676. 2002.
- [30] L. Fridman and A. Levant. Sliding modes of higher order as a natural phenomenon in control theory. In F. Garofalo and L. Glielno. editors. Robust Control via Variable Structure Lyapunov Techniques, volume 217 of Lecture Notes in Control and hffonnation Science. pages 107 133. Springer Verlag. 1996.
- [31] R. Goebel. R.G. Sanfelice. and A.R. Teel. Hybrid dynamical systems. IEEE Control Systems Magazine, 29(2), pp. 28-93.2009.
- [32] J.M. Goncalves. Constructive Global Analysis of Hybrid Systems. Massachussets Institute of Technology. Phd thesis 2000.
- [33] J.M. Goncalves. A. Megretski, MA. Dahleh. Global analysis of piecewise linear systems using impact maps and surface Lyapunov functions. IEEE Transaction on Automatic Control 2003:48(12):2.089-106.
- [34] Guy Cohen. Convexite Et Optimisation. Ecole Nationale des Pouts et Chaussees et INRIA. Edition 2000 & correction 2006.
- [35] A. Hassibi, S. Boyd. Quadratic Stabilization and Control of Piecewise-Linear Systems, in: Proceedings of the American Control Conference. 1998. pp.3659-3664.
- [36] J. Hespanha, Stabilization through hybrid control. in UNESCO Encyclopedia of Life Support Systems. 2004. www.ec.e.uc.sb.eduRhespanhai.../6-43-28-7-hy-stab.pdf
- [37] Ye. Hui. Michel, Anthony, & Hou. Ling. 1998. Stability Theory for Hybrid Dynamical Systems. IEEE Transactions on Automatic Control. 43(4), 461-474.
- [38] J. I. linura and A. van der Schaft. Characterization of well posedness of piecewise linear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 45(9):1600-1619.2000.
- [39] B. Ingalls. E. D. Sontag. and Y. Wang. An infinite-time relaxation theorem for differential inclusions. In Proceedings of the 2002 -American Mathematical Society. volume 131. pages 487-499.
- [40] M. Johansson. Piecewise Linear Control Systems: A Computational Approach. ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences, M. Thonia and M. Month. Eds. Sprin2er. -Verla2, 284. 2003.

- [41] Julie IVIELIN. Synthèse de lois de commande pour les systèmes à commutations avec contraintes de performances. Phd these. Institut National Polytechnique de Lorraine. France. 2011.
- [42] D. Kaniri. R. Bourdais. J. Buisson, C. Larbes: Piecewise-Affine systems Practical Stabilization: A BMI Approach. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 6, 859-870. 2012.
- [43] D. Kamri. C. Larbes: Observer Based Control for DC/DC converters: Practical Switching Control, *Arab Journal of Science and Engineering (AJSE)*. Arab J Sci Eng (2014), 39. 4089-4102.
- [44] Khalil Al-Shaninmri. Filippov's Operator and Discontinuous Differential Equations. Mathematic Phd thesis 2006. Louisiana State University. USA.
- [45] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River. N.J. second edition. 1996.
- [46] R. Kuiava. R.A. Ramos. H.R. Pota, L.F.C. Alberto: Practical Stability of Continuous-Time Switched Systems Without a Common Equilibria and Governed by a Time-Dependent Switching Signal. 9th IEEE International Conference on Control and Automation. Santiago. Chile. 2011.
- [47] F. Lantnabhi-Lagaregue, *HandBook of Hybrid Systems Control*. edited by JUNE LUNZE Ruhr-Universität Bochum. Germany 2009.
- [48] J. Leth_ Rafael Wisniewski. On formalism and stability of switched systems. *J. Control Theory Appl.* 2012 10 (2) 176-183. DOI 10.1007/st 1768-012-0138-3.
- [49] Liberzon, A.S. Morse_ Basic problems in stability and design of switched systems. *WEE Control Systems Magazine* 19 (5) 59-70. 1999.
- [50] Vu_ Linh. & Liberzon. Daniel. 2005. Common Lyapunov Functions for Families of Commuting Linear Systems. *Systems and Control Letters*, 54, 405-416.
- [51] H.Lin. P.J. Antsaklis,.: Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of Recent Results, *IEEE Trans A.C.*, 54, 2, 308-322, (2009).
- [52] J. Lygros. K.H. Johansson, S. N. Simic. J. Zhang. S. Sastry: Dynamical properties of hybrid automata. *IEEE Transactions on Automatic Control* 48(1) :2-17, 2003.
- [53] S. Mariethoz and al. Comparison of Hybrid Control Techniques for Buck and Boost DC-DC Converters. *IEEE Transaction on Control systems technology*. 18 (5). 2010 1126 -1145.
- [54] A. N. Michel and B. Hu. Towards a stability theory of general hybrid dynamical systems. *Automatica*, 35:371-384. 1999.
- [55] Mohammad Ahmed: Sliding mode control for switched mode power supplies. PhD Thesis. Lappeenranta University of Technology. Finland. 2004.
- [56] Mohamed Abdallah Trabelsi. Modélisation et Commande des Systèmes Physiques Topologic Variable : Application au Convertisseur Multicellulaire. Phd these. Institut National des Sciences Appliquées de Lyon. 2009.
- [57] A. P. Molchanov and E. S. 1³), catnitskii. Lyapunov functions that specify necessary and sufficient conditions for absolute stability of nonlinear systems III. *Automation and Remote Control*. 47:620 630. 1986.
- [58] A.P. Molchanov and Y.S. Pyatnitskiy. Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory. *Systems and Control Letters*. 13(1) :59-64. 1989.
- [59] Morari. M. Buisson. J. ; de Schutter. B.: Papafotiou. G.: Report on the assessment of hybrid control methods for electric energy management problems. HYCON Deliverable. Tech. Rep. IST contract number 511368, 2006.
[http://control.ee.ethz.ch/hiycon/downloads free/HIYCON_D4a51.pdf](http://control.ee.ethz.ch/hiycon/downloads/free/HIYCON_D4a51.pdf)
- [60] E.M. Navarro-Lopez: Hybrid modeling of a discontinuous dynamical system including switching control. Available at: <http://vml.v.staff.cs.manchester.ac.uk/~navarro/papers/enavarro-chaos09.pdf>

- [61] Yu. Nesterov and A. Netirovsky. Interior-point polynomial methods in convex programming. volume 13 of Studies in Applied Mathematics. SIAM, June 1994.
- [62] Y. Nesterov. Introductory Lectures on Convex Optimization: A Basic Course. volume 87 of Applied Optimization. Kluwer. Boston. 2004.
- [63] P. Peleties and R. DeCarlo. Asymptotic stability of m-switched systems using lyapunov-like functions. in Proc. of the 1991 ACC. 1991, pp. 1679-1684.
- [64] N. Petit et P. Rouchon. Autotnatique : Dynamique et Controle des Systemes, Polycopier de cours. Centre d'automatique et systemes. unite mathematique et systemes, Mines ParisTech. Fevrier 2009.
- [65] S. Pettersson. Analysis and design of hybrids systems, PhD Dissertation, Chalmers University. Goteborg Sweden. 1999.
- [66] S. Petterson and B. Leirnatson. Stabilization of hybrid systems using a minprojection strategy. In Proceedings of the 2001 American Control Conference. pages 223-228. Arlington. USA. jute 2001.
- [67] Pettersson. S.: Synthesis of switched linear systems. In Proc.42^{ad} IEEE conf. Decision control. Maui. HW, USA, 5283-5288. 2003.
- [68] Prajna. Stephen, Sc Rantzer. Anders. 2005. On the Necessity of Barrier Certificates. In: Proceedings of the 16th IFAC World Congress. IFAC.
- [69] P. Riedinger. Contribution a la commande des systemes complexes. I-IDR de l'Institut National Polytechnique de Lorraine. France. 2010.
- [70] L. Rodrigues, S. Boyd. Piecewise Affine slab systems using convex optimization. Systems and Control Letters. 54 (2005) 835-853.
- [71] A.A. Salinas-Varela. G.B. Stan. M.J. Gonsalves. Global Asymptotic Stability of the Limit Cycle in Piecewise Linear versions of the Goodwin Oscillator. Department of Engineering. University of Cambridge. 2008. Available at vv.N.vv.:b2.ic.ukiresearchig.stan/IFAC2008.pdf.
- [72] C. Scherer and S. Weiland. Linear matrix inequalities in control. DISC courses. Lecture Notes. 1999. Compilation November 2004.
- [73] R. Shorten. F. Wirth. O. Mason. K. Wulff. and C. King. Stability criteria for switched and hybrid systems. SIAM Rev. 49(4) :545-592. 2007.
- [74] Z. Sun. Stabilizability and insensitivity of switched linear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 49, no. 7. pp. 1133-1137. Jul. 2004.
- [75] Vidal. R.; Chiuseo, A.; Soatto S.; Sastry. S.: Observability of linear hybrid systems. Hybrid Systems, Computation and Control. Springer—Verlag, 2623. LNCS. Berlin Heidelberg, 526-539.2003.
- [76] X. XII and G. Zhai. Practical stability and stabilization of hybrid and switched systems. IEEE Transactions On Automatic Control. 50(11) :1897-1903. 2005.
- [77] X. Xu, G. Zhai. and S. He. On practical asymptotic stabilizability of switched affine systems. Nonlinear Analysis Hybrid Systems. pages 196-208. 2008.
- [78] G. Zhai and A.N. Michel. On practical stability of switched systems. hi Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control. pages 3488-3493. december 2002.
- [79] G. Zhai. H. Lin. & P. Antsaklis. 2003. Quadratic Stabilizability of Switched Linear Systems with Polytopic Uncertainties. International Journal of Control. 76(7), 747-753
- [80] G. Zhai. Anthony N. Michel, Generalized Practical Stability Analysis of Discontinuous Dynamical Systems. hit. J. Appl, Math. Comput. Sci. V (14). N (1). pp. 5— 12, 2004. Vol. 14. No. 1.
- [81] Zhang, K. H. Johansson. J. Lygeros. and S. Sastry. Zeno hybrid systems. Intern. J. Robust Nonlinear Control. 11 :435-451, 2001.
- [82] Zhendong. S.: Ge, S. Shuzhi.: Analysis and synthesis of switched linear control systems. Automatica, 41. 181 — 195. 2005.
- [83] Zhendong. S.: Ge, S. Shuzhi.: Switched Linear Systems: Control and Design. Springer. 2005.

- [84] P. Hauroigné, P. Riedinger, and C. Jung. Observer-based output-feedback of a multicellular converter: Control Lyapunov Function – sliding mode approach. In Proceedings of the 2012 IEEE Conference on Decision and Control, Soumis, 2012.
- [85] D. Libezon. 2003 Switching in systems and Control. ISBN 0-8176-4297-8. Birhauser, 2003
- [86] J. Zaytoon. Systèmes dynamiques hybrides. Hermès Science Publication, Paris, 2001.
- [87] A. van der Schaft and H. Schumacher. An introduction to hybrid dynamical systems. Springer, Berlin, 2000.
- [88] R.A. Decarlo, M.S. Branicky, S. Pettersson, and B. Lennartson. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 88(7) :1069–1082, 2000.
- [89] Z. Sun and S. Ge. Analysis and synthesis of switched linear control systems. Automatica, 41(2) :181–195, 2005.
- [90] R. Bourdais, L. Hetel, J. Daafouz, and W. Perruquetti. stabilité et stabilisation d'une classe de systèmes dynamiques hybrides. Journal Européen Systèmes Automatisés, acceptée, à paraître.
- [91] R. Shorten, F. Wirth, O. Mason, K. Wulff, and C. King. Stability criteria for switched and hybrid systems. Invited paper for SIAM Review, Accepted for publication, 2007.
- [92] M. Benmiloud, (2011). Modélisation, analyse et commande des systèmes dynamique hybrides. Laghouat, Algeria.
- [93] H. Lin and P. J. Antsaklis, "Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results," IEEE Transactions on Automatic control, vol. 54, pp. 308- 322, 2009.
- [94] K. H. Khalil. Nonlinear Systems. Prentice-Hall, Inc, 2 edition, 1996.
- [95] S. Sastry. Nonlinear systems: analysis, stability, and control. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [96] S. Wiggins. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Springer, 1990.
- [97] J. M. Gonçalves. Constructive Global Analysis of Hybrid Systems. Phd thesis, Massachusetts Institute of Technology, September 2000.
- [98] J. Ben Salah. Analyse et commande des systèmes non linéaires complexes : Application aux systèmes dynamiques à commutation. LYON, France, 2009.
- [99] Djekidel Kamri: "**Observer-based practical control technique for multicell converters**", 2015 3rd International Conference on Control, Engineering & Information Technology (CEIT), DOI: [10.1109/CEIT.2015.7233177](https://doi.org/10.1109/CEIT.2015.7233177) Publisher: IEEE .
- [100] B Tounsi « Etude comparative de groupes électrogènes embarqués à large gamme de vitesse variable associant machines à aimants permanents et conversion statique » Thèse de Doctorat, Laboratoire Plasma et Conversion d'Energie de l'ENSEEIH, Toulouse 2007.

ملخص: هذه المذكرة تقدم أو تعتبر كمدخل للأنظمة الديناميكية الهجينة (SDH)، حيث تهدف إلى دراستها وتعريفها بشكل عام على أساس الدراسات والرسائل التي استندنا إليها وخلصنا إلى أن النظام الهجين هو أي نظام قادر على عرض خصائص مستمرة وغير مستمرة في نفس الوقت.

بما أن الميدان واسع جدا ويحتوي على عدة تطبيقات متعددة التخصصات، نستطيع ان نقوم بالأبحاث والدراسات التي تخصهم (تحت زوايا مختلفة) وحسب وجهات نظر مختلفة. هذا العمل يهدف بالأساس (أو أساسا) إلى نشر وتعميم هذا الميدان الهام جداً الذي يخرج من برنامج التخرج. بالفعل هذه الشكلية المختلطة تشكل مجموعة منهجيات دراسات بناء لمبادئ الفهم للأنظمة المعقدة. هذه المنهجيات تسمح بدراسة التصرفات والسلوكيات الأنظمة البسيطة والمعقدة لمختلف الميادين. بما أن وجهة نظر الأوتوماتيكي اعتمد لتقديم عام لهذه الأنظمة الهجينة، إذن اهتمام خاص اعطي للبحث عن التمثيل الموحد للنماذج الهجينة لفسح لتحرير وتوفير الخصائص الأساسية لوجود وحدانية الحل وتمديد وتوسع وانتشار المفاهيم المرتبطة بالتحليل الاستقرار وموجز التحكم، والعمل الذي قمنا والذي هو بين يديكم يندرج في هذا الإطار!

وبعد ما قمنا بتقديم هذه الأنظمة المتحركة والمختلطة بجمع طرف من الكتابات والأبحاث المرتبطة بهم في المرحلة الأولى، أما في المرحلة الثانية فانصب اهتمامنا على حالة هامة وأساسية وتتمثل في الأنظمة المتحركة التحويلية. وفي الإطار بالذات تفضلنا بتقديم أمثلة تصميم وكذلك بعض التقنيات لاستقرار وتثبيت أنظمة ذات التبديل وبالخصوص الأنظمة المنقسمة إلى قطع. أخيرا ولكي نكمل هذا العمل، من الضروري التحدث عن إمكانية ملاحظة SDH وأنظمة التبديل. حيث تم تقديم توليف مراقب بسيط بتبديل Luenberger تم تقديمه بمساعدة محاكاة مثال في إلكترونيات الطاقة.

الكلمات المفتاحية: النمذجة الهجينة، التحكم في الاستقرار، الاستقرار، الأنظمة الديناميكية الهجينة (SDH)، أنظمة التبديل الديناميكي (SDC)، دورة الحد الهجين، وظيفة Lyapunov، المراقبة، المراقب.

Résumé : Ce mémoire de Master présente une introduction aux systèmes dynamiques hybrides. Puisque le domaine des SDH est très vaste et englobe plusieurs applications multidisciplinaires, les recherches et les études les concernant peuvent être menées de plusieurs points de vu. Ce travail vise essentiellement à vulgariser ce domaine très important et qui sort du programme de graduation. En effet, le formalisme hybride constitue un groupement de méthodologies d'études constructives des principes de compréhension des systèmes complexes. Ces méthodologies permettent d'étudier les comportements de systèmes simples et complexes de différents domaines. Puisque le point de vu automatique est adopté pour la présentation générale de ces systèmes hybrides, alors une attention particulière a été donnée à la recherche de représentation unifiée de modèles hybrides, au dégagement de propriétés fondamentales telles que l'existence et l'unicité de solution et à l'extension des concepts liés à l'analyse de la stabilité et la synthèse de commande, c'est dans ce cadre de travail que notre étude est menée.

Après avoir présenté ces systèmes dynamiques hybrides en compilant une partie de la littérature et des recherches qui s'y rapportent dans la première étape, dans la deuxième étape nous nous sommes intéressés à un cas important et fondamental, à savoir, les systèmes dynamiques à commutation. Dans ce contexte, nous avons présenté certains exemples de modélisation, ainsi que quelques techniques de stabilisation des systèmes à commutations et en particulier les systèmes affines par morceaux (PWA).

Enfin, pour compléter les techniques de stabilisation à retour d'états, il est nécessaire de parler de l'observabilité des SDH et celle des systèmes à commutation. La synthèse d'un observateur commuté de Luenberger simple a été présentée en s'aidant de la simulation d'un exemple en électronique de puissance.

Mots-clés : Modélisation hybride, commande stabilisante, stabilité, Systèmes Dynamiques Hybrides (SDH), Systèmes Dynamiques à Commutation (SDC), cycle limite hybride, fonction de Lyapunov, Observabilité, Observateur.

Abstract: This study presents an introduction to hybrid dynamical systems from automatic view point, the fundamentals questions that will be addressed are hybrid modeling, stabilizing control and observability. The aim is to make a good graduate level presentation without tackling all these questions in depth. Proving some stabilizing concepts for switched systems and showing their simulating results are of prior objective.

After presenting these hybrid dynamical systems by compiling part of the literature and related research in the first step, in the second step we brought to light an important and fundamental case, namely, the switching dynamic system where we present its modeling, as well as some stabilizing techniques in addition to practical examples which show them.

Finally, to complete the state feedback stabilizing control techniques, some notions of observability and hybrids observers are introduced. The design of simple switched observer based Luenberger techniques is presented with simulating results of power electronic example.

keywords: Hybrid modeling, stabilizing control, stability, Hybrid Dynamic Systems (SDH), Observability and Hybrid Observer.