

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITÉ AMAR TËLÉDJI DE LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES
قسم الرياضيات
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Présenté par :

BENFERHAT Mouna

THEME

*Méthode des sous et sur solutions appliquée à une certaine classe
d'équation différentielle fractionnaire*

Soutenance publique devant le jury composé de :

| | | |
|---------------------|-------|-----------|
| Dr.ABDESSELAM Nawel | M.C.B | Président |
| Dr.MERRAD Boulerbah | M.A.A | Examineur |
| Dr.GAGUI Abdelmalek | M.C.B | Examineur |
| Dr.BOUKEHILA Ahcene | M.C.A | Encadreur |

Année Universitaire 2022/2023

Notations

EDF l'équation différentielle fractionnaire .

$L^p(\Omega)$ L'espace des fonctions f réelles sur Ω telle que f est mesurable.

$C^n(\Omega)$ L'espace des fonctions f qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à n continues sur Ω .

$AC([a, b])$ L'espace des fonctions absolument continues sur un intervalle $[a, b]$.

$\mathcal{L}\{f\}$ Transformations de Laplace .

$p.p$ Presque partout .

$\mathcal{L}^{-1}\{f\}$ La transformée de Laplace inverse.

$I f(x)$ Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

$D f(x)$ Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

${}^c D f(x)$ Dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

${}^H I h(t)$ Intégrale fractionnaire au sens de Hadamard.

${}^{Hc} D h(t)$ Dérivée fractionnaire au sens de Caputo–Hadamard .

$\mathcal{P}(X)$ Sous-ensembles tel que X un espace Banach $(X, \|\cdot\|)$.

ملخص

في هذه المذكرة تطرقنا لدراسة الحلول لنوع خاص من المعادلات التفاضلية الكسرية عن طريق استخدام طريقة الحل العلوي والحل السفلي ، بالإضافة لدراسة الحل الموجب لنوع آخر من المعادلات ووجود الحل ووحدانيته ، بتطبيق نظرية الحل الوحيد لباناخ وشودر وكذلك كارين بوهاننبلاست.

الكلمات المفتاحية

المعادلات التفاضلية الكسرية ، طريقة الحل العلوي والحل السفلي ، نظرية الحل الوحيد.

Abstract

In this memo , we have dealt with the study of solutions to a special type of fractional differential equations by using the method of the upper and the lower solution, in addition to study the positive solution to another type of equations was studied and the existence of the solution by applying the fixed point theorem of Banach and Bohnenblust-Karlin .

key words :

Fractional differential equations - Upper and lower solution method - Fixed point theorem.

Résumé

Dans ce mémoire , nous avons traité l'étude des solutions d'un type particulier d'équations différentielles fractionnaires en utilisant la méthode de sous et sur de la solution, en plus l'étude de la solution positive à un autre type d'équations fractionnaire.

L'existence de la solution est établit en appliquant le théorème du point fixe de Banach et de Bohnenblust-Karlin.

mots clés :

Équations différentielles fractionnaires - Méthode de la solution supérieure et inférieure - Théorème de point fixe.

Remerciements

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remercions Dieu pour la force, la volonté et le courage que m'a donné pour accomplir cet œuvre sous le meilleur visage.

*Je tiens à remercier **Dr.BOUKEHILA Ahcene** pour son veille à notre encadrement, ses recommandations et de ses précieux conseils.*

*Je remercie aussi **Dr.ABDESSELAM Nawel** qui nous a honorés d'accepter de présider le jury pour cette thèse de maitrise en présence du superviseur.*

*Remercier **Dr.MERRAD Boulerbah** et **Dr.GAGUI Abdelmalek** pour leur approbation de la revue des travaux.*

BENFERHAT

Mouna

Dédicace

*V*oir ce memo, qui n'est qu'un résultat de longues années du cursus.

*T*out d'abord, les parents qui ont combatus pour que je sois ce que je suis aujourd'hui, merci de croire en moi, et de me soutenir dans toutes mes situations « Mon seigneur, pitié soit sur eux comme mon petit protégé »."

A ma chère petite famille, mon frère « Amine », et mes sœurs « Sarah », et « Maram », prier Dieu de vous donner la santé, le bien-être, la prospérité et de vous voir au plus haut rangs.

A mes collègues avec qui j'ai partagés les moments les plus précieux à mon parcours d'étude « Louiza, Reguia, Zineb, ... » et d'autres, vous remercier pour tout et la grâce de la compagnie.

*A*ux enseignants qui ont veillés sur nous pour atteindre ce niveau-là, merci pour votre soutient que vous avez donné.

BENFERHAT

Mouna

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|---|-----------|
| Introduction. | 1 |
| 1 Rappel sur le calcul fractionnaire | 2 |
| 1.1 Définition et Propriété | 2 |
| 1.1.1 Espaces fonctionnels | 2 |
| 1.1.2 Fonctions spéciales | 4 |
| 1.2 Dérivée et intégrale fractionnaire | 9 |
| 1.2.1 Dérivée et intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville | 9 |
| 1.2.2 Dérivée et intégrale fractionnaire au sens de Caputo | 15 |
| 1.2.3 Dérivée et intégrale fractionnaire au sens de Hadamard | 18 |
| 1.2.4 Dérivée et intégrale fractionnaire au sens de caputo-Hadamard | 18 |
| 1.3 Relation entre la dérivée de Riemann-Liouville et Caputo | 19 |
| 1.4 Relation entre l'intégration de Caputo et Caputo-Hadamard | 22 |
| 2 Existence et unicite de la solution dans certains problèmes fractionnaires par la méthode des sous et sur solution | 23 |
| 2.1 Préliminaires | 23 |
| 2.2 Quelques théorèmes du point fixe | 25 |
| 2.2.1 Théorème du point fixe de Banach | 25 |
| 2.2.2 Théorème du point fixe de Bohnenblust-Karlin | 25 |
| 2.2.3 Théorème de point fixe de Schauder | 26 |
| 2.3 Définition des sous et sur solution | 27 |
| 2.4 Résultat d'Existence de solution par la méthode de sous et sur solution | 28 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3 | Résultat d'existence des solution Positives de certains problèmes fraction- | |
| | naires | 35 |
| 3.1 | Existence de solutions positives | 35 |
| | Bibliographie. | 46 |

Quand on a introduit la notion de dérivée , on s'est rendu compte qu'on peut appliquer le concept de dérivée à fonction dérivée elle-même et par la même introduire la dérivée seconde , puis les dérivées successives d'ordre entier. L'intégration opératrice inverse de la dérivée peut éventuellement être comme une dérivée d'ordre " **moins un** " on peut aussi se demander si ces dérivées d'ordre successifs ont un équivalent d'ordre fractionnaire .La théorie de dérivée fractionnaire ou bien d'ordre fractionnaire est aussi ancienne que le calcul classique tel que connu de nos jours .Ses origines remontent à la fin du 17^{ème} siècle , l'époque où Isaac Newton et Gottfried Wilhelm Leibniz ont développés les fondements du calcul différentiel et intégral. En particulier ,Leibniz aintroduit le symbole $\frac{d^n f}{dx^n}$ pour désigner la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'une fonction f quand il a annoncé dans une lettre à Guillaume l'Hopital datée du 30 septembre 1695 avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$ qui lui a répondu : que signifie $\frac{d^n f}{dx^n}$ si $n = \frac{1}{2}$.

Ce mémoire se décompose en trois chapitres

Le premier chapitre est la notion générale du calcul fractionnaire.

Le deuxième chapitre est consacré à la définition des sous et sur solution et les théorèmes de points fixe comme Banach et Karlin et d'appliquer cette méthode à une certaine équation fractionnaire.

Le dernier chapitre représente l'étude des solutions positives à une certaine équation fractionnaire par la méthode des sous et sur solution.

CHAPITRE 1

RAPPEL SUR LE CALCUL FRACTIONNAIRE

1.1 Définition et Propriété

1.1.1 Espaces fonctionnels

On rappelle quelques définitions d'analyse fonctionnelle qui sont utilisées dans les définitions des intégrales et dérivées fractionnaires.

I) Espaces des fonctions P-intégrales

Définition 1.1.1. [26] Soit $\Omega = [a, b]$ ($-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$) un intervalle fini ou infini de \mathbb{R} et $1 \leq p \leq \infty$. L'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions (classes) f réelles sur Ω telle que f est mesurable et

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty,$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_{\infty} = \inf \{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

II) Espaces des fonctions absolument continues

On désigne par $C^n(\Omega)$, $n \in N(= 0, 1, \dots)$, l'espace des fonctions f qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à n continues sur Ω , muni de la norme :

$$\|f\|_{C^n} := \sum_{k=0}^n \max_{x \in \Omega} |f^{(k)}(x)|, n \in \mathbb{N}.$$

En particulier si $n = 0$, $C^0(\Omega)$ l'espace des fonctions f continues sur Ω muni de la norme

$$\|f\|_C := \max |f(x)|.$$

Définition 1.1.2. On note par $AC([a, b])$ l'espace des fonctions absolument continues sur un intervalle $[a, b]$; constitué des fonctions f qui sont des primitives de fonctions Lebesgue-sommables :

$$f \in AC([a, b]) \iff \exists \varphi \in L^1([a, b]) \text{ telle que } f = c + \int_a^x \varphi(t) dt$$

Définition 1.1.3. On note par $AC^n([a, b])$, $n \in \mathbb{N}^*$; l'espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$ constitué des fonctions f à valeurs dans \mathbb{R} qui ont des dérivées continues sur $[a, b]$ jusqu'à l'ordre $(n - 1)$ et telle que $f^{(n-1)} \in AC([a, b])$; c'est à dire :

$$AC^n([a, b]) := \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} : f^{(k)} \in C([a, b]), k = 0 \dots n - 1, f^{(n-1)} \in AC([a, b])\}.$$

Remarque 1.1.1. En particulier $AC^1([a, b]) = AC([a, b])$.

Une caractérisation des fonctions de cet espace est donnée par le lemme suivant :

Lemme 1.1.1. Une fonction $f \in AC^n([a, b])$, $n \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si elle est représentée sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

1.1.2 Fonctions spéciales

Dans cette partie, nous introduisons les fonctions Gamma et Bêta qui seront utilisées ultérieurement. Ces fonctions jouent un rôle fondamental dans la théorie du calcul fractionnaire et ses applications.

1) La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$ qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels positifs (et même aux nombres complexes à parties réelles positives).

Définition 1.1.4. [?] Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$: La fonction Gamma $\Gamma(\alpha)$ est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad (1.1)$$

avec $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(0^+) = +\infty$

Propriétés 1.1.1. Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(\alpha)$ est la relation de récurrence suivante

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha), \operatorname{Re}(\alpha) > 0. \quad (1.2)$$

qu'on peut la démontrer par une intégration par parties

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha + 1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^\alpha dt = [-e^{-t} t^\alpha]_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \\ &= \alpha \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \\ &= \alpha \Gamma(\alpha) \end{aligned}$$

Il convient de noter que la propriété (1.2) nous permet d'établir que

$$\Gamma(n + 1) = n!, n \in \mathbb{N}$$

En effet, on a $\Gamma(1) = 1$ et donc

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1! \\
\Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2! \\
\Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3! \\
&\dots \quad \dots\dots \quad \dots \\
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1) = n!
\end{aligned}$$

La fonction Gamma peut être représentée aussi par la limite

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^\alpha}{(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}, \operatorname{Re}(\alpha) > 0.$$

II) La fonction Bêta

Tout comme la fonction Gamma, la fonction Bêta fait aussi partie des fonctions de base du calcul fractionnaire. Cette fonction fournit un outil fondamental quand elle est combinée avec la fonction Gamma.

Définition 1.1.5. [?] La fonction **Bêta** ou intégrale eulérienne de première espèce est définie pour tous α et β

par :

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt, \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Re}(\beta) > 0$$

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par l'équation suivante :

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Re}(\beta) > 0$$

Propriétés 1.1.2. La fonction Bêta est symétrique i.e. :

$$(a) \quad B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha), \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Re}(\beta) > 0$$

$$(b) \quad \alpha B(\alpha, \beta+1) = \beta B(\alpha+1, \beta)$$

$$(c) \quad B(\alpha+1, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} B(\alpha, \beta)$$

$$(d) \quad B(1, \beta) = \frac{1}{\beta}$$

$$(e) \quad \frac{\partial}{\partial x} B(\alpha, \beta) = B(\alpha, \beta) \left(\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\Gamma'(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \right)$$

III) La fonction d'erreur complémentaire (erfc) :

Définition 1.1.6. [10] La fonction d'erreur complémentaire est une fonction entière, définie comme :

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt,$$

avec

$$\operatorname{erfc}(-\infty) = 2,$$

$$\operatorname{erfc}(0) = 1,$$

$$\operatorname{erfc}(+\infty) = 0,$$

Proposition 1.1.1. [10] Les relations suivantes sont intéressantes à mentionner

$$- \operatorname{erfc}(-x) = 2 - \operatorname{erfc}(x).$$

$$- \int_0^{\infty} \operatorname{erfc}^2(t) dt = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}.$$

$$- \int_0^{\infty} \operatorname{erfc}(t) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

IV) Transformations de Laplace :

Définition 1.1.7. [15] La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ est définie par :

$$f(s) = \mathcal{L}\{f(t), s\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, t > 0$$

Définition 1.1.8. [8] La transformée de Laplace inverse d'une fonction $F(s)$ est définie par :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s), t\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds, c = \operatorname{Re}(s) > c_0.$$

Tel que c_0 se trouve dans le demi-plan droit de la convergence absolue de l'intégrale de Laplace

V) Produit de convolution :

Le produit de convolution de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ est défini par :

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)dx$$

VI) **Propriété de la transformé de Laplace :**

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}, G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors on a les propriétés suivant :([18])

$$1/ \mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

$$2/ \mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s)$$

3/ Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre n :

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\} = s^n F(s) + \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} [f^{(k)}(t)]_{t=0}$$

VII) **Les transformées de Laplace de certaines fonctions importantes :**

On a $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

La fonction $F(s)$ est appelée la transformée de Laplace de $f(t)$.

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}, \quad \alpha > -1, s > 0.$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s - a}, \quad s > a.$$

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad |s| > |a|.$$

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a}, \quad s^\alpha > |a|.$$

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(at^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-\beta} k!}{(s^\alpha - a)^{k+1}}, \quad s^\alpha > |a|.$$

VIII) **Les transformées de Laplace inverses de certaines fonctions importantes :**

La fonction $f(t)$ est appelée la transformée de Laplace inverse de $F(s)$.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha}\right\} = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha > 0$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)^\alpha}\right\} = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-ax}, \quad \alpha > 0$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)^\alpha}\right\} = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\alpha x}, \quad \alpha > 0.$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha - a}\right\} = t^{\alpha-1} E_\alpha(at^\alpha), \quad \alpha > 0.$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right\} = \frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt}), \quad a \neq b.$$

IX) La fonction Mittag-Leffler :

Alors que la fonction Gamma est une généralisation de la fonction factorielle, la fonction Mittag-Leffler est une généralisation de la fonction exponentielle, ce qui est d'une grande importance pour le calcul fractionnaire.

Définition 1.1.9. (Fonction à un paramètre). [15] La fonction Mittag-Leffler introduite pour la première fois comme un paramètre fonction par la série :

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}.$$

Définition 1.1.10. (Fonction à deux paramètres) [15] La généralisation à deux paramètres est introduite par Agarwal :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \beta, \alpha > 0, \beta, \alpha \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}.$$

Il est appelé fonction à deux paramètres de type Mittag-Leffler.

Propriétés 1.1.3. [15] Certaines de ses propriétés intéressantes sont

- $E_{1,1}(z) = e^z$.
- $E_{2,1}(z^2) = \cosh(z)$.
- $E_{2,2}(z^2) = \frac{\sinh(z)}{z}$.
- $E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z)$.
- $E_{\frac{1}{2},1}(z) = e^{z^2} \operatorname{erfc}(-z)$.

1.2 Dérivée et intégrale fractionnaire

Le but de cette partie est de définir des notions fondamentales sur les dérivées et les intégrales fractionnaires, en l'occurrence nous introduisons les deux plus importantes approches à savoir celles de Riemann-Liouville et de Caputo ainsi que quelques-unes de leurs propriétés.

1.2.1 Dérivée et intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

I) Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

[15] Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, b pouvant être fini ou infini.

Une primitive de f est donnée par :

$$I f(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Pour une primitive seconde on aura :

$$I^2 f(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(u) du.$$

En utilisant le théorème de Fubini, on peut écrire

$$I^2 f(x) = \int_a^x (x-t) f(t) dt.$$

Plus généralement, l'intégration successive de la fonction $f(x)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} I^n f(x) &= \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t) dt, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy. En généralisant cette relation, l'intégrale d'ordre non entier de la fonction $f(x)$ peut être définie en utilisant la fonction Gamma $\Gamma(n) = (n-1)!$ donc, on peut définir l'intégration fractionnaire comme suit :

Définition 1.2.1. [?] Si $f \in C[a, b], \Omega = [a, b](-\infty < a < b < +\infty), a \in \mathbb{R}_+^*$ les intégrales fractionnaires à gauche et à droite de Riemann-Liouville $I_{a^+}^\alpha f$ et $I_{b^-}^\alpha f$ d'ordre α sont définies respectivement par :

$$I_{a^+}^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{(1-\alpha)}} dt, (x > a), \quad (1.3)$$

$$I_{b^-}^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{(1-\alpha)}} dt, (x < b), \quad (1.4)$$

Lorsque $\alpha = n \in \mathbb{N}$, les définitions (1.3) et (1.4) coïncident avec les intégrales n -ième de la forme :

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{(n)} f(x) &= \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{b^-}^{(n)} f(x) &= \int_x^b dx_1 \int_{x_1}^b dx_2 \dots \int_{x_{n-1}}^b f(x_n) dx_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{n-1} f(t) dt. \end{aligned}$$

Théorème 1.2.1. Soit $\alpha > 0, \beta > 0$ et $f \in L^p([a, b]), p \geq 1$ L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété suivant :

$$I_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\beta f(x) = I_{a^+}^{\alpha+\beta} f(x). \quad (1.5)$$

Proposition 1.2.1. soit $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$. on a :

$$I_{a^+}^\alpha (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-a)^{\alpha+\beta-1},$$

et

$$I_{b^-}^\alpha (b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (b-x)^{\beta+\alpha-1},$$

Exemple 1.2.1. Considérons la fonction $f(x) = (x-a)^\beta$, Alors

$$I_{a^+}^\alpha (x-a)^{\beta-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^{\beta-1} dt,$$

Pour évaluer cette intégrale on pose le changement $t = a + (x-a)\tau$, il s'ensuit que $dt = (x-a)d\tau$; d'où

$$\begin{aligned} I_{a^+}^\alpha (x-a)^{\beta-1} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a - (x-a)\tau)^{\alpha-1} (a + (x-a)\tau - a)^{\beta-1} (x-a) d\tau, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a)^\alpha (x-a)^{\beta-1} (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} d\tau \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} d\tau. \end{aligned}$$

En utilisant la fonction bêta on obtient :

$$\begin{aligned} I_{a^+}^\alpha (x-a)^{\beta-1} &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-a)^{\alpha+\beta-1}. \end{aligned}$$

On voit bien que c'est une généralisation du cas où $\alpha = 1$, on a

$$\begin{aligned} I_{a^+}^\alpha (x-a)^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+1)} (x-a)^\beta = \frac{(\beta-1)\Gamma(\beta-1)}{\beta\Gamma(\beta)} (x-a)^\beta \\ &= \frac{(\beta-1)\Gamma(\beta-1)}{(\beta-1)\beta\Gamma(\beta)} (x-a)^\beta = \frac{1}{\beta} (x-a)^\beta. \end{aligned}$$

grâce à la relation bien connue (1.2)

De la même manière, on montre que

$$I_{a^+}^\alpha (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (b-x)^{\beta+\alpha-1}.$$

Définition 1.2.2. Intégrales fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α d'une constante $f(t) = c$ est donnée par :

$${}^R D_t^{-\alpha} C = I_a^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1+\alpha)} (t-a)^\alpha.$$

Proposition 1.2.2. Soient α et β deux nombres complexes et $f \in C^0([a, b])$:

$$(a) \quad \frac{d}{dt} (I_a^\alpha f)(t) = (I_a^{\alpha-1} f)(t), \operatorname{Re}(\alpha) > 1.$$

$$(b) \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} ((I_a^\alpha f)(t) = f(t), \operatorname{Re}(\alpha) > 0.$$

$$(c) I_a^\alpha (I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f, (\operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Re}(\beta) > 0)$$

II) Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville[15]

Pour définir leurs dérivées, Riemann et Liouville adoptent une méthode simple, par exemple la dérivée d'ordre un demi au sens de R-L d'une fonction f est donnée par :

$$D^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{d}{dx} \left(I^{\frac{1}{2}} f \right) (x),$$

c'est à dire la dérivée (ordinaire) de l'intégrale fractionnaire d'ordre un demi.

Définition 1.2.3. *soit $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$, Les dérivées fractionnaires à gauche et à droite de Riemann-Liouville $D_{a^+}^\alpha f$ et $D_{b^-}^\alpha f$ d'ordre α sont définies respectivement par :*

$$\begin{aligned} D_{a^+}^\alpha f(x) &= \left(\frac{d}{dx} \right)^n (I_{a^+}^{n-\alpha} f(x)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, x > a. \end{aligned} \quad (1.6)$$

et

$$\begin{aligned} D_{b^-}^\alpha f(x) &= \left(-\frac{d}{dx} \right)^n (I_{b^-}^{n-\alpha} f(x)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx} \right)^n \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt, x < b. \end{aligned} \quad (1.7)$$

En particulier, quand $\alpha = n \in \mathbb{N}$ alors

$$D_{a^+}^0 f(x) = D_{b^-}^0 f(x) = f(x),$$

et

$$D_{a^+}^n f(x) = f^{(n)}(x), D_{b^-}^n f(x) = (-1)^n f^{(n)}(x)$$

où $f^{(n)}(x)$ est la dérivée ordinaire de $f(x)$.

Remarque 1.2.1. *les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville de la fonction f en un point x est à caractère non local, elle dépend de toutes les valeurs de*

$f(x)$ dans l'intervale (a, x) , une condition suffisante pour que l'intégrale fractionnaire d'une fonction f existe est que $f \in AC^n([a, b])$.

Remarque 1.2.2. si $0 < \alpha < 1$ alors,

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x - t)^{\alpha - n - 1} f(t) dt, (x > a),$$

et

$$D_{b-}^{\alpha} f(x) = -\frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b (t - x)^{\alpha - n - 1} f(t) dt, (x < b).$$

Remarque 1.2.3. On voit bien que dans le cas où

$\beta = 0$, les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville d'une constante ne sont pas nulles en generale

$$D_{a+}^{\alpha} c = \frac{c}{\Gamma(1 - \alpha)} (x - a)^{-\alpha}; \quad D_{b-}^{\alpha} c = \frac{c}{\Gamma(1 - \alpha)} (b - x)^{-\alpha} \quad (0 < \alpha).$$

Proposition 1.2.3. Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, alors pour $j = 1, 2, \dots, n$, on a

$$D_{a+}^{\alpha} (x - a)^{\alpha - j} = D_{b-}^{\alpha} (b - x)^{\alpha - j} = 0$$

Corollaire 1.2.1. 1) la relation $D_{a+}^{\alpha} f(x) = 0$ est vraie si et seulement si

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j (x - a)^{\alpha - j},$$

où $c_j \in \mathbb{R}$, ($j = 1, 2, \dots, n$) sont des constantes arbitraires. Dans le cas particulier, où $0 < \alpha < 1$, la relation $D_{a+}^{\alpha} f(x) = 0$ est vraie ssi

$$f(x) = c(x - a)^{\alpha - 1}, c \in \mathbb{R}$$

2) la relation $D_{b-}^{\alpha} f(x) = 0$ est vraie si et seulement si

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j (b - x)^{\alpha - j}$$

où $c_j \in \mathbb{R}$, ($j = 1, 2, \dots, n$) sont des constantes arbitraires. Dans le cas particulier, où $0 < \alpha < 1$, la relation $D_{b-}^{\alpha} f(x) = 0$ est vraie ssi

$$f(x) = c(b - x)^{\alpha - 1}, c \in \mathbb{R}$$

3) dans le cas particulier ou $a = 0$, l'équation différentielle fractionnaire

$$D_{0+}^{\alpha} f(t) = 0$$

admet la solution

$$f(t) = c_1 t^{\alpha - 1} + c_2 t^{\alpha - 2} + c_3 t^{\alpha - 3} + \dots + c_n t^{\alpha - n}$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, ($i = 1, 2, \dots, n$) et $n = [\alpha] + 1$

Proposition 1.2.4. *Soit $\alpha > 0$ et $f \in AC^n[a, b]$ Alors*

$$I_{0+}^\alpha D_{0+}^\alpha f(t) = u(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + c_3 t^{\alpha-3} + \dots + c_n t^{\alpha-n}$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, ($i = 1, 2, \dots, n$) et $n = [\alpha] + 1$

III) **Transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville :**

[30] La transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ est :

$$\mathcal{L}\{ {}_a^R D_t^{-\alpha} f(t) \} = \frac{F(t)}{s^\alpha},$$

où

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

1.2.2 Dérivée et intégrale fractionnaire au sens de Caputo

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, plusieurs auteurs y compris Caputo (1967-1969) ont rendu compte que cette définition doit être révisée, car les problèmes appliqués en visco-élasticité, mécanique des solides et en rhéologie, exigent des conditions initiales physiquement interprétables par des dérivées classiques, ce qui n'est pas le cas dans la modélisation par l'approche de Riemann-Liouville qui exige la connaissance des conditions initiales des dérivées fractionnaires.

En utilisant une approche différente de celle de R-L, Caputo a défini la dérivée fractionnaire à l'opposé de R-L en appliquant l'opérateur de la dérivation puis celui de l'intégrale (R-L font l'inverse, ils intègrent puis ils dérivent). c'est à dire la dérivée d'ordre un demi par exemple, au sens de Caputo sera donnée par :

$${}^C D^{\frac{1}{2}} f(x) = I^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} f(x)$$

Cependant la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est toujours une généralisation de la dérivée ordinaire dans le sens ${}^C D^n = \frac{d^n}{dx^n}$ si $n \in \mathbb{N}$.

Définition 1.2.4. *oit $\alpha > 0$ avec $n = [\alpha] + 1$, si f est une fonction telle que $f \in AC^n([a, b])$, alors les dérivées fractionnaires (à gauche et à droite) d'ordre α de f au sens de Caputo existent sur $[a, b]$ et sont définies par*

$$\begin{aligned} {}^C D_{a+}^{\alpha} f(x) &= I_{a+}^{n-\alpha} D^n f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} {}^C D_{b-}^{\alpha} f(x) &= (-1)^n I_{b-}^{n-\alpha} D^n f(x) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt. \end{aligned}$$

En particulier quand $0 < \alpha < 1$ et $f \in AC([a, b])$,

$$\begin{aligned} {}^C D_{a^+}^\alpha f(x) &= I_{a^+}^{1-\alpha} Df(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f'(t) dt. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} {}^C D_{b^-}^\alpha f(x) &= -I_{b^-}^{1-\alpha} Df(x) \\ &= \frac{(-1)}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{-\alpha} f'(t) dt. \end{aligned}$$

Remarque 1.2.4. Si $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$, alors ${}^C D_{a^+}^n f(x)$ et ${}^C D_{b^-}^n f(x)$ sont données par :

$${}^C D_{a^+}^n f(x) = f^{(n)}(x), \quad {}^C D_{b^-}^n f(x) = (-1)^n f^{(n)}(x).$$

En particulier

$${}^C D_{a^+}^0 f(x) = {}^C D_{b^-}^0 f(x) = f(x).$$

Remarque 1.2.5. La dérivée fractionnaire au sens de Caputo est aussi à caractère non local.

Exemple 1.2.2. calculons la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction $f(x) = (x-a)^\beta$, soit $\alpha > 0$ tel que $n-1 \leq \alpha < n$ et $\beta > 0$ alors on a

$$\begin{aligned} {}^C D_{a^+}^\alpha (x-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f'(t) dt \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (t-a)^{\beta-n} dt, \end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable $t = a + s(x - a)$ on obtient

$$\begin{aligned}
 {}^C D_{a+}^\alpha f(x) &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)}(x - a)^{\beta - \alpha} \int_a^1 (1 - s)^{n - \alpha - 1} (s)^{\beta - n} ds \\
 &= \frac{\Gamma(\beta + 1)B(n - \alpha, \beta - n + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)}(x - a)^{\beta - \alpha} \\
 &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)}(x - a)^{\beta - \alpha}.
 \end{aligned}$$

De même on trouve

$${}^C D_{b-}^\alpha (b - x)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)}(b - x)^{\beta - \alpha}.$$

En particulier on a

$${}^C D_{a+} C^{te} = {}^C D_{b-} C^{te} = 0$$

donc la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une constante est nulle.

I) Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens caputo :

Lemme 1.2.1. La Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de caputo d'ordre α tel que $n - 1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{L}\{{}^C D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha - k - 1} f^{(k)}(0).$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{{}^C D^\alpha f(t)\} &= \mathcal{L}\{D^{-(n-\alpha)} [D^n f(t)]\}, \\
 &= \frac{\mathcal{L}\{D^n f(t)\}}{s^{n-\alpha}}, \\
 &= \frac{s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)}{s^{n-\alpha}}, \\
 &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)
 \end{aligned}$$

1.2.3 Dérivée et intégrale fractionnaire au sens de Hadamard

Rappelons quelques définitions et propriétés de l'intégration fractionnaire de Hadamard et différenciation. Soit $\delta = t \frac{d}{dt}$ Et mettre

$$AC_{\delta}^n(J, \mathbb{R}) = \{y : J \rightarrow \mathbb{R} : \delta^{n-1}y(t) \in AC(J, \mathbb{R})\}$$

Définition 1.2.5. [20] L'intégrale fractionnaire d'Hadamard d'ordre $r > 0$ pour a la fonction $h \in L^1([1, +\infty), \mathbb{R})$ est définie comme

$${}^H I_1^r h(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{r-1} \frac{h(s)}{s} ds,$$

à condition que l'intégrale existe.

Définition 1.2.6. [20] La dérivée fractionnaire d'Hadamard d'ordre $r > 0$ appliqué à la fonction $h \in L^1([1, +\infty), \mathbb{R})$ est défini comme

$$({}^H D_1^r h)(t) = \delta^n ({}^H I_1^{n-r} h)(t),$$

où $n - 1 < r < n, n = [r] + 1$, et $[r]$ est la partie entière de r .

1.2.4 Dérivée et intégrale fractionnaire au sens de caputo-Hadamard

Définition 1.2.7. [16] Pour une fonction donnée $h \in AC^n([a, b], \mathbb{R})$, tel que $0 < a < b$; la dérivée fractionnaire de Caputo - Hadamard d'ordre $r > 0$ est défini comme suit

$${}^{H_c} D^r y(t) = {}^H D_1^r \left[y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta^k y(a)}{k!} \left(\log \frac{s}{a} \right)^k \right] (t),$$

où $Re(\alpha) \geq 0$ et $n = [Re(\alpha)] + 1$.

1.3 Relation entre la dérivée de Riemann-Liouville et Caputo

La relation entre la dérivée fractionnaire de Caputo et celle de Riemann-Liouville sur l'intervalle $[a, b]$ est décrite par le théorème suivant :

Théorème 1.3.1. *Soit $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$ Si f possède $n - 1$ dérivées en a et si $D_{a^+}^\alpha f, D_{b^-}^\alpha f$ existent, alors*

$${}^C D_{a^+}^\alpha f(x) = D_{a^+}^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right].$$

et

$${}^C D_{b^-}^\alpha f(x) = D_{b^-}^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (b-x)^k \right].$$

En particulier, quand $0 < \alpha < 1$ les relations précédentes prennent les formes suivantes :

$${}^C D_{a^+}^\alpha f(x) = D_{a^+}^\alpha [f(x) - f(a)].$$

et

$${}^C D_{b^-}^\alpha f(x) = D_{b^-}^\alpha [f(x) - f(b)].$$

Remarque 1.3.1. *En utilisant les dérivées fractionnaires de R-L calculées précédemment de $(x-a)^k$ on trouve :*

$${}^C D_{a^+}^\alpha f(x) = D_{a^+}^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha}, (n = [\alpha] + 1)$$

et

$${}^C D_{b^-}^\alpha f(x) = D_{b^-}^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (b-x)^{k-\alpha}, (n = [\alpha] + 1).$$

En particulier, quand $0 < \alpha < 1$ on a :

$${}^C D_{a^+}^\alpha f(x) = D_{a^+}^\alpha f(x) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}$$

et

$${}^C D_{b^-}^\alpha f(x) = D_{b^-}^\alpha f(x) - \frac{f(b)}{\Gamma(1-\alpha)} (b-x)^{-\alpha}$$

Remarque 1.3.2. *Si $\alpha \in \mathbb{N}^*$ la dérivée de Caputo coïncide avec celle de R-L dans les cas suivants :*

$$(1) {}^C D_{a+}^{\alpha} f(x) = D_{a+}^{\alpha} f(x) \text{ si } f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n+1)}(a) = 0 (n = [\alpha] + 1).$$

$$(2) {}^C D_{b-}^{\alpha} f(x) = D_{b-}^{\alpha} f(x) \text{ si } f(b) = f'(b) = \dots = f^{(n+1)}(b) = 0 (n = [\alpha] + 1).$$

En particulier, quand $0 < \alpha < 1$ nous avons si $f(a) = 0$

$${}^C D_{a+}^{\alpha} f(x) = D_{a+}^{\alpha} f(x)$$

et

$${}^C D_{b-}^{\alpha} f(x) = D_{b-}^{\alpha} f(x)$$

si $f(b) = 0$.

Les théorèmes suivants expriment certaines propriétés de l'opérateur de dérivation de Caputo.

Théorème 1.3.2. Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Caputo existent. Alors pour tous $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$, ${}^C D^{\alpha}(\lambda f + \gamma g)$ existe, et l'on a

$${}^C D^{\alpha}(\lambda f(x) + \gamma g(x)) = \lambda {}^C D^{\alpha} f(x) + \gamma {}^C D^{\alpha} g(x).$$

Théorème 1.3.3. [?] Soient $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$ et $f \in C^n[a, b]$ Alors les opérateurs fractionnaires de Caputo ${}^C D_{a+}^{\alpha}, {}^C D_{b-}^{\alpha}$ sont continues sur $[a, b]$; ${}^C D_{a+}^{\alpha} \in C[a, b]$ et ${}^C D_{b-}^{\alpha} \in C[a, b]$, de plus si α n'est pas entier alors ${}^C D_{a+}^{\alpha}$ et ${}^C D_{b-}^{\alpha}$ sont bornés de $C^n[a, b]$ dans $C_a[a, b]$ et $C_b[a, b]$ respectivement. De plus on a :

$$\|{}^C D_{a+}^{\alpha} f\|_{C_a} \leq k_{\alpha} \|f\|_{C^n}$$

et

$$\|{}^C D_{b-}^{\alpha} f\|_{C_b} \leq k_{\alpha} \|f\|_{C^n}$$

où

$$k_{\alpha} = \frac{(b-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)(n-\alpha+1)}$$

Théorème 1.3.4. Si $\alpha > 0$, tel que $n = [\alpha] + 1$ et si $f \in C[a, b]$, alors :

$${}^C D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f(x) = {}^C D_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} f(x) = f(x).$$

En d'autre terme la dérivée fractionnaire de Caputo est toujours l'inverse gauche de l'intégrale fractionnaire.

preuve : soit $f \in C[a, b]$, et $\alpha > 0$, et comme $D^k I_{a^+}^\alpha f(a) = 0$, pour $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$, alors on a pour :

$$\begin{aligned} {}^C D_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\alpha f(x) &= D_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\alpha f(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

En d'autre terme la dérivée fractionnaire de Caputo est toujours l'inverse gauche de l'intégrale fractionnaire.

Théorème 1.3.5. Soient $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$ si $f \in AC^N([a, b])$, alors on a

$${}^C D_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

et

$${}^C D_{b^-}^\alpha I_{b^-}^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(b)}{k!} (b-x)^k.$$

En particulier, si $0 < \alpha < 1$ et $f(x) \in AC[a, b]$, alors on a :

$${}^C D_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\alpha f(x) = f(x) - f(a),$$

et

$${}^C D_{b^-}^\alpha I_{b^-}^\alpha f(x) = f(x) - f(b).$$

preuve : On a par définition

$${}^C D^\alpha f(x) = I_{a^+}^{n-\alpha} D^n f(x),$$

en appliquant à gauche les opérateurs d'intégration $I_{a^+}^\alpha, I_{b^-}^\alpha$ on trouve :

$$\begin{aligned} {}^C D_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\alpha f(x) &= I_{a^+}^\alpha I_{a^+}^{n-\alpha} D^n f(x) \\ &= I_{a^+}^n D^n f(x) \\ &= I_{a^+}^n D_{a^+}^n f(x) \\ &= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 {}^C D_{b^-}^\alpha I_{b^-}^\alpha f(x) &= I_{b^-}^\alpha I_{a^+}^{n-\alpha} D^n f(x) \\
 &= I_{b^-}^n D^n f(x) \\
 &= I_{b^-}^n D_{b^-}^n f(x) \\
 &= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k f^{(n)}(b)}{k!} (b-x)^k.
 \end{aligned}$$

1.4 Relation entre l'intégration de Caputo et Caputo-Hadamard

Lemme 1.4.1. [16] soit $y \in AC_\delta^n([a, b], \mathbb{R})$ où $C_\delta^n([a, b], \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ alors :

$${}^H I_1^r ({}^{H_c} D^r y)(t) = y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta^k y(a)}{k!} \left(\log \frac{t}{a} \right)^k,$$

CHAPITRE 2

EXISTENCE ET UNICITE DE LA SOLUTION DANS CERTAINS PROBLÈMES FRACTIONNAIRES PAR LA MÉTHODE DES SOUS ET SUR SOLUTION

2.1 Préliminaires

Soit $(C(J, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ l'espace de Banach des fonctions continues y de J à \mathbb{R} avec la norme uniforme usuelle

$$\|y\|_\infty = \sup_{t \in J} |y(t)|$$

Par $L^1(J, \mathbb{R})$ nous dénotons l'espace Banach de toutes les fonctions intégrables de Lebesgue $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ avec la norme

$$\|y\|_{L^1} = \int_1^T |y(t)| dt.$$

Indiquer par $AC(J, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions absolument continues de J en \mathbb{R} .

Pour un espace Banach donné $(X, \|\cdot\|)$, nous définissons les sous-ensembles suivants de $\mathcal{P}(X)$:

$$\begin{aligned} P_{cl}(X) &= \{Y \in \mathcal{P}(X) : Y \text{ est fermée} \}, \\ P_b(X) &= \{Y \in \mathcal{P}(X) : Y \text{ est borné} \}, \\ P_{cp}(X) &= \{Y \in \mathcal{P}(X) : Y \text{ est compact} \}, \end{aligned}$$

$$P_{cv}(X) = \{Y \in \mathcal{P}(X) : Y \text{ est convexe}\},$$

$$P_{cp,cv}(X) = P_{cp}(X) \cap P_{cv}(X).$$

Définition 2.1.1. Une carte multivalorisée $G : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ est dite convexe(fermé) évalué si $G(x)$ est convexe (fermé) pour tous $x \in X$. Une carte multivalorisée G est délimitée sur des ensembles délimités si $G(B) = \cup_{x \in B} G(x)$ est délimité en X pour tous $B \in P_b(X)$ (c-à-d. $\sup_{x \in B} \{\sup\{|y| : y \in G(x)\} \}$ existe).

Définition 2.1.2. Une carte multivalorisée $G : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ est appelée supérieure semi-continue (s.s.c.) sur X si pour chaque $x_0 \in X$, le set $G(x_0)$ est un nonempty sous-ensemble fermé de X , et pour chaque ensemble ouvert N de X contenant $G(x_0)$, il existe un quartier ouvert N_0 de x_0 tel que $G(N_0) \subset N$. G est dit être complètement continu si $G(B)$ est relativement compact pour chaque $B \in P_b(X)$.

Définition 2.1.3. Laisser $G : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ être complètement continu sans vide. Alors G est s.s.c si et seulement si G a un graphique fermé (c-à-d $x_n \rightarrow x_*, y_n \rightarrow y_*, y_n \in G(x_n)$ implique $y_* \in G(x_*)$). G a un point fixe s'il y a $x \in X$ tel que $x \in G(x)$.

Nous dénotons par $\text{Fix } G$ l'ensemble de points fixes de l'opérateur multivalorisé G .

Définition 2.1.4. Une carte multivalorisée $G : J \rightarrow P_{cl}(\mathbb{R})$ est dite mesurable si pour chaque $y \in \mathbb{R}$, la fonction :

$$t \rightarrow d(y, G(t)) = \inf\{|y - z| : z \in G(t)\}$$

est mesurable.

Lemme 2.1.1. [25] Que G soit une carte multivalorisée entièrement continue avec des valeurs compactes non vides, alors G est s.s.c. si et seulement si G a un graphique fermé.

2.2 Quelques théorèmes du point fixe

Dans cette section nous rappelons quelques théorèmes célèbres du point fixe

2.2.1 Théorème du point fixe de Banach .

Ce théorème connu aussi sous le nom de l'application contractante se trouve à la base de la théorie du point fixe. Ce théorème garantit l'existence d'un point fixe unique pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui même.

Définition 2.2.1. (Point fixe) Soit T une application d'un ensemble X dans lui même. On appelle point fixe tout point $x \in X$ tel que $T(x) = x$.

Théorème 2.2.1. [2] (Principe de contraction de Banach) Soit (M, d) un espace métrique complet et soit $T : M \rightarrow M$ une application contractante i.e qu'il existe $0 < k < 1$ telle que $d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y), \forall x, y \in M$, alors T admet un unique point fixe $x^* \in M$, de plus pour tout $x \in M$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = x^*$ et,

$$d(T^n(x), x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, T(x)).$$

Preuve :La preuve est bien connue. Elle établit que toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ définie inductivement par $x_{n+1} = T(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge vers $x^* = T(x^*)$. En ce qui concerne l'unicité en effet, nous obtenons la contradiction suivante en supposant l'existence de deux points fixes distincts x_1^* et x_2^* pour une contraction T

$$d(x_1^*, x_2^*) = d(T(x_1^*), T(x_2^*)) \leq kd(x_1^*, x_2^*) < d(x_1^*, x_1^*), \text{ c'est à dire, } k \geq 1 \text{ d'où la}$$

contradiction.

2.2.2 Théorème du point fixe de Bohnenblust-Karlin

[5] Que X soit un espace Banach et $K \in \mathcal{P}_{cl,cv}(X)$, et supposons que l'opérateur $G : K \rightarrow \mathcal{P}_{cl,cv}(K)$ est semi-continu supérieur et l'ensemble $G(K)$ est relativement compact en X . Alors G a un point fixe en K .

Rappelons quelques définitions et propriétés de l'intégration fractionnelle et de la différen-

ciation d'Hadamard. Que $\delta = t \frac{d}{dt}$, et définir

$$AC_\delta^n(J, \mathbb{R}) = \{y : J \rightarrow \mathbb{R} : \delta^{n-1}y(t) \in AC(J, \mathbb{R})\}.$$

2.2.3 Théorème de point fixe de Schauder

Théorème 2.2.2. *Que Ω soit un sous-ensemble convexe non vide d'un espace normé. Que N soit une cartographie continue de Ω dans un sous-ensemble compact de Ω , alors N a un point fixe en Ω .*

2.3 Définition des sous et sur solution

on a le problème suivant :

$$(1) \quad {}^{Hc}D^r y(t) \in F(t, y(t)) ; \text{pour } t \in J = [1, T],$$

à l'état limite

$$(2) \quad L(y(1), y(T)) = 0,$$

où $T > 1$, ${}^{Hc}D^r$ est le dérivé fractionné Caputo-Hadamard de l'ordre $0 < r \leq 1$, $F : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une carte multiévaluée, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est la famille de tous les sous-ensembles non vides de \mathbb{R} ; et $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée.

Définition 2.3.1. Une fonction $y \in AC(J, \mathbb{R})$ est considérée comme une solution de (1)-(2) s'il existe une fonction $v \in S_{F \circ u}$ telle que ${}^{Hc}D^r y(t) = v(t)$ a.e. J et la condition limite $L(y(1), y(T)) = 0$ est satisfaite.

Définition 2.3.2. On dit que le fonctionnement avec $w \in AC(J, \mathbb{R})$ est une solution supérieure de (1) - (2) si $L(w(1), w(T)) \geq 0$ et il existe une fonction $v_1 \in S_{F \circ u}$ telle que ${}^{Hc}D^r w(t) \geq v_1(t)$ a.e. J .

De même, on dit qu'une fonction $u \in AC(J, \mathbb{R})$ est une solution inférieure de (1) - (2) si $L(u(1), u(T)) \leq 0$, et il existe une fonction $v_2 \in S_{F \circ u}$ telle que ${}^{Hc}D^r u(t) \leq v_2(t)$ a.e. J .

2.4 Résultat d'Existence de solution par la méthode de sous et sur solution

Théorème 2.4.1. *Supposons que les hypothèses suivantes s'appliquent :*

(H1) $F : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}_{cp,c}(\mathbb{R})$ est Carathéodory,

(H2) Il existe $u, w \in C(J, \mathbb{R})$, solutions inférieure et supérieure, respectivement pour le problème (1) - (2) tel que $u \leq w$,

(H3) La fonction $L(., .)$ est continue sur $[u(1), w(1)] \times [u(T), w(T)]$, et non croissante en ce qui concerne ses deux arguments,

(H4) Il existe $l \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ telle que

$$H_d(F(t, y), F(t, \bar{y})) \leq l(t)|y - \bar{y}|; \forall y, \bar{y} \in \mathbb{R},$$

et $d(0, F(t, 0)) \leq l(t); a.e.t \in J$.

Alors le problème (1) - (2) a au moins une solution y définie sur J de telle sorte que

$$u \leq y \leq w.$$

Preuve : Considérer le problème modifié suivant

$$(3) \quad {}^{Hc}D^r y(t) \in F(t, \tau(y(t))); \text{ pour } t \in J,$$

$$(4) \quad y(1) = \tau(y(1)) - L(\bar{y}(1), \bar{y}(T)),$$

$$\text{où} \quad \tau(y(t)) = \max\{u(t), \min\{y(t), w(t)\}\},$$

$$\text{et} \quad \bar{y}(t) = \tau(y(t)).$$

Une solution à (3) - (4) est un point fixe de l'opérateur $N : C(J, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(C(J, \mathbb{R}))$ défini par

$$N(y) = \left\{ h \in C(J, \mathbb{R}) : h(t) = y(1) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} \nu(s) \frac{ds}{s} \right\}$$

où

$$\begin{aligned} \nu &\in \{v \in \tilde{S}_{F \circ \tau}^1 : v(t) \geq v_1(t) \text{ sur } A_1 \text{ et } v(t) \leq v_2(t) \text{ sur } A_2\}, \\ S_{F \circ \tau}^1 &= \{v \in L^1(J, \mathbb{R}) : v(t) \in F(t, (\tau y)(t)), t \in J\}, \\ A_1 &= \{t \in J : y(t) < u(t) \leq w(t)\}, A_2 = \{t \in J : u(t) \leq w(t) < y(t)\}. \end{aligned}$$

Remarque 2.4.1. (1) Pour chacun $y \in C(J, \mathbb{R})$; l'ensemble $\tilde{S}_{F \circ \tau}^1$ est non vide. En fait, (H1) implique qu'il existe $v_3 \in S_{F \circ \tau}^1$; donc nous définissons

$$v = v_1 \chi_{A_1} + v_2 \chi_{A_2} + v_3 \chi_{A_3},$$

où

$$A_3 = \{t \in J : u(t) \leq y(t) \leq w(t)\}.$$

Puis par décomposition, $v \in \tilde{S}_{F \circ \tau}^1$

(2) Par définition de τ , il est clair que $F(\cdot, \tau y(\cdot))$ est une carte à multi-valeurs L^1 – Carathodory avec des valeurs convexes compactes et il existe $\phi \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ tel que

$$\|F(t, \tau y(t))\|_{\mathcal{P}} \leq \phi_1(t) \text{ pour chaque } y \in \mathbb{R}.$$

(3) depuis $\tau(y(t)) = u(t)$ pour $t \in A_1$, et $\tau(y(t)) = w(t)$ pour $t \in A_2$ puis de (H3), l'équation (4) implique que

$$|y(1)| \leq |u(1)| + |L(u(1), u(T))| \leq |u(1)| + |L(y(1), y(T))| = |u(1)| \text{ sur } A_1,$$

et

$$y(1) = w(1) - L(w(1), w(T)) \leq w(1) - L(y(1), y(T)) = w(1) \text{ sur } A_2.$$

Ils montrent que,

$$|y(1)| \leq \min\{|u(1)|, |w(1)|\}.$$

que

$$R := \min\{|u(1)|, |w(1)|\} + \frac{\|\phi_1\|_{L^1}}{\Gamma(r+1)} (\log T)^r,$$

et considérer le sous-ensemble fermé et convexe de $C(J, \mathbb{R})$,

$$B = \{y \in C(J, \mathbb{R}) : \|y\|_{\infty} \leq R\}.$$

Nous montrerons que l'opérateur $N : B \rightarrow \mathcal{P}_{cl,cv}(B)$ satisfait à toutes les hypothèses du théorème 2.2.2. La preuve sera donnée en 6 étapes.

Étape 1 : $N(y)$ est convexe pour chaque $y \in B$.

Laisser h_1, h_2 appartenir à $N(y)$, alors il existe $\nu_1, \nu_2 \in \tilde{S}_{F \circ \tau}^1$ de sorte que pour chaque $t \in J$, nous avons, pour $i = 1, 2$,

$$h_i(t) = y(1) + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{r-1} \nu_i(s) \frac{ds}{s}.$$

que $0 \leq d \leq 1$. Alors, pour chaque $t \in J$, nous avons

$$(dh_1 + (1-d)h_2)(t) = y(1) + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{r-1} [d\nu_1(s) + (1-d)\nu_2(s)] \frac{ds}{s}.$$

Puisque $S_{F \circ \tau(y)}$ est convexe (parce que F a des valeurs convexes), nous avons

$$dh_1 + (1-d)h_2 \in N(y).$$

Étape 2 : N Les ensembles délimités en ensembles délimités en B .

Pour chaque $h \in N(y)$ il existe $\nu \in \tilde{S}_{F \circ \tau(y)}^1$ tels que

$$h(t) = y(1) + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{r-1} \nu(s) \frac{ds}{s}.$$

De (H1) à (H3), pour chaque $t \in J$ nous avons

$$\begin{aligned} |h(t)| &\leq |y(1)| + \left| \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s} \right)^{r-1} \frac{\nu(s)}{s} ds \right| \\ &\leq \min\{|u(1)|, |w(1)|\} + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s} \right)^{r-1} \frac{|\nu(s)|}{s} ds \\ &\leq \min\{|u(1)|, |w(1)|\} + \frac{\|\phi_1\|_{L_1}}{\Gamma(r+1)} (\log T)^r \end{aligned}$$

ainsi

$$\|h\|_\infty \leq R.$$

Étape 3 : N cartes délimitées en ensembles équicontinus de B .

que $t_1, t_2 \in J$, $t_1 < t_2$, que $y \in B$ et $h \in B$. puis

$$\begin{aligned}
 |h(t_2) - h(t_1)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^{t_1} \left[\left(\log \frac{t_2}{s} \right)^{r-1} - \left(\log \frac{t_1}{s} \right)^{r-1} \right] \nu(s) \frac{ds}{s} \right| \\
 &+ \left| \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{t_1}^{t_2} \left(\log \frac{t_2}{s} \right)^{r-1} \nu(s) \frac{ds}{s} \right| \\
 &\leq \frac{\|\phi_1\|_{L_1}}{\Gamma(r)} \int_1^{t_1} \left[\left(\log \frac{t_2}{s} \right)^{r-1} - \left(\log \frac{t_1}{s} \right)^{r-1} \right] \frac{ds}{s} \\
 &+ \frac{\|\phi_1\|_{L_1}}{\Gamma(r)} \int_{t_1}^{t_2} \left(\log \frac{t_2}{s} \right)^{r-1} \frac{ds}{s} \\
 &\rightarrow 0 \text{ comme } t_1 \rightarrow t_2.
 \end{aligned}$$

En conséquence des trois étapes ci-dessus, nous pouvons conclure de l'Arzelá-Ascoli théorème que $N : C(J, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(C(J, \mathbb{R}))$ est entièrement continu.

Étape 4 : N a un graphique fermé.

que $y_n \rightarrow y_*$, $h_n \in N(y_n)$ et $h_n \rightarrow h_*$. nous devons montrer que $h_* \in N(y_*)$. $h_n \in N(y_n)$ signifie qu'il existe $\nu_n \in \tilde{S}_{F \circ \tau(y)}^1$ de sorte que, pour chaque $t \in J$,

$$h_n(t) = y(1) + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{r-1} \nu_n(s) \frac{ds}{s}.$$

Nous devons montrer qu'il existe $\nu_* \in \tilde{S}_{F \circ \tau(y_*)}^1$ de sorte que, pour chaque $t \in J$,

$$h_*(t) = y(1) + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{r-1} \nu_*(s) \frac{ds}{s}.$$

Puisque $F(t, \cdot)$ est supérieur semi-continu, alors pour chaque $\epsilon > 0$, il existe un nombre naturel $n_0(\epsilon)$ tel que, pour chaque $n \geq n_0$ nous avons

$$\nu_n(t) \in F(t, \tau y_n(t)) \subset F(t, y_*(t)) + \epsilon B(0, 1) \text{ pour } t \in J.$$

Puisque $F(\cdot, \cdot)$ a des valeurs compactes, il existe une suite $\nu_{n_m}(\cdot)$ telle que

$$\nu_{n_m}(\cdot) \rightarrow \nu_*(\cdot) \text{ pour } m \rightarrow \infty,$$

et

$$\nu_*(t) \in F(t, \tau y_*(t)) \text{ pour } t \in J.$$

pour chaque $w \in F(t, \tau y_*(t))$ on a

$$|\nu_{n_m}(t) - \nu_*(t)| \leq |\nu_{n_m}(t) - w| + |w - \nu_*(t)|.$$

alors

$$|\nu_{n_m}(t) - \nu_*(t)| \leq d(\nu_{n_m}(t), F(t, \tau y_*(t))).$$

Nous obtenons une relation analogue en intercalant les rôles de ν_{n_m} et ν_* et il s'ensuit que

$$|\nu_{n_m}(t) - \nu_*(t)| \leq H_d(F(t, \tau y_n(t)), F(t, \tau y_*(t))) \leq l(t) \|y_n - y_*\|_\infty.$$

pour

$$\begin{aligned} |h_{n_m}(t) - h_*(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(r)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{r-1} |\nu_{n_m}(s) - \nu_*(s)| \frac{ds}{s} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(r+1)} (\log T)^r \int_1^T l(s) ds \|y_{n_m} - y_*\|_\infty. \end{aligned}$$

donc

$$\|h_{n_m} - h_*\|_\infty \leq \frac{1}{\Gamma(r+1)} (\log T)^r \int_1^T l(s) ds \|y_{n_m} - y_*\|_\infty \longrightarrow 0 \text{ ssi } m \longrightarrow \infty.$$

Par conséquent, Lemma 2.1.1 implique que N est supérieur semi-continu

Étape 5 : Chaque solution y de (3) - (4) satisfait

$$u(t) \leq y(t) \leq w(t) \text{ pour tout } t \in J.$$

Laissez y être une solution de (3) - (4) : Nous prouvons que

$$u(t) \leq y(t) \text{ pour tout } t \in J.$$

Supposons que non. Alors il existe t_1, t_2 avec $t_1 < t_2$ tel que $u(t_1) = y(t_1)$ et

$$u(t) > y(t) \text{ pour tout } t \in (t_1, t_2).$$

Compte tenu de la définition de τ , on a

$${}^{Hc}D^r y(t) \in F(t, u(t)) \text{ pour tout } t \in (t_1, t_2).$$

Il existe donc $v \in S_{F \circ \tau(u)}$ avec $v(t) \geq v_1(t)$ a.e. on $(t_1; t_2)$ de sorte que

$${}^{Hc}D^r y(t) = v(t) \text{ pour tout } t \in (t_1, t_2).$$

Une intégration sur $(t_1, t]$, avec $t \in (t_1, t_2)$ rendements

$$y(t) - y(t_1) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{t_1}^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{r-1} \nu(s) \frac{ds}{s}.$$

Puisque u est une solution inférieure à (1) - (2) puis

$$u(t) - u(t_1) \leq \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{t_1}^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{r-1} \nu_1(s) \frac{ds}{s}, t \in (t_1, t_2).$$

Il ressort de $y(t_1) = u(t_1)$ et $\nu(t) \geq v_1(t)$ que

$$u(t) \leq y(t), \forall t \in (t_1, t_2)$$

C'est une contradiction, puisque $u(t) > y(t)$ pour tous $t \in (t_1, t_2)$: Par conséquent

$$u(t) \leq y(t), \forall t \in J.$$

De façon analogue, nous pouvons prouver que

$$y(t) \leq w(t), \forall t \in J.$$

cela montre que

$$u(t) \leq y(t) \leq w(t), \forall t \in J.$$

Par conséquent, le problème (3)-(4) a une solution y satisfaisant $u \leq y \leq w$.

Étape 6 : Toute solution du problème (3) - (4) est une solution de (1) - (2) .

Supposons que y est une solution du problème (3) - (4). Alors, nous avons

$${}^{Hc}D^r y(t) \in F(t, \tau(y(t))) \text{ pour } t \in J,$$

et

$$y(1) = \tau(y(t)) - L(\bar{y}(1), \bar{y}(T)).$$

Depuis, pour tous $t \in J$, nous avons

$$u(t) \leq y(t) \leq w(t),$$

Alors,

$$\tau(y(t)) = y(t).$$

Nous obtenons ainsi

$${}^{Hc}D^r y(t) \in F(t, y(t)) \text{ pour } t \in J ,$$

et

$$L(y(1), y(T)) = 0.$$

Il suffit de prouver que

$$u(1) \leq y(1) - L(y(1), y(T)) \leq w(1).$$

supposer que

$$y(1) - L(y(1), y(T)) < u(1).$$

Depuis $L(u(1), u(T)) \leq 0$ nous avons

$$y(1) \leq y(1) - L(u(1), u(T)).$$

Puisque $L(\cdot, \cdot)$ n'augmente pas par rapport à ses deux arguments, alors nous obtenons

$$y(1) \leq y(1) - L(u(1), u(T)) \leq y(1) - L(y(1), y(T)) < u(1) :$$

Par conséquent, nous obtenons $y(1) < u(1)$; ce qui est une contradiction. De même, nous pouvons prouver que

$$y(1) - L(y(1), y(T)) \leq w(1).$$

Par conséquent, y est une solution à (1) - (2). Ceci conclut que le problème (1)-(2) a une solution y satisfaisant $u \leq y \leq w$.

CHAPITRE 3

RÉSULTAT D'EXISTENCE DES SOLUTIONS POSITIVES DE CERTAINS PROBLÈMES FRACTIONNAIRES

Ce chapitre concerne l'existence de solutions positives pour le problème de valeur limite suivant pour l'équation différentielle fractionnaire non linéaire.[31]

$$D_{0+}^{\alpha}y(t) + f(t, y(t)) = 0, n - 1 \leq \alpha < n, 0 < t < 1, \quad (3.1)$$

$$y^{(i)}(0) = 0, i = 0, \dots, n - 2,$$

$$y(1) = \sum_{k=0}^m \lambda_k \int_0^{\eta_k} y(s) ds, \quad (3.2)$$

où $f \in C([0, 1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ est une fonction donnée $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, 0 < \eta_k < 1, \lambda_k > 0, \forall k = 0, \dots, m$.

Tout d'abord nous résolvons le problème linéaire, puis nous construisons les solutions inférieures et supérieures. Par Schauder théorème de point fixe, nous établissons l'existence d'au moins une solution positive pour le problème de valeur limite (3.1)-(3.2) se situant entre ces deux fonctions. Les résultats obtenus sont illustrés par un exemple

3.1 Existence de solutions positives

Lemme 3.1.1. *Supposons que $h \in C(0,1) \cap L^1(0,1)$ et $n - 1 \leq \alpha < n, n \geq 2$. Ensuite la solution au problème de la valeur limite*

$$D_{0+}^{\alpha}y(t) + h(t) = 0, t \in (0, 1), \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
 y^{(i)}(0) &= 0, i = 0, \dots, n-2, \\
 y(1) &= \sum_{k=0}^m \lambda_k \int_0^{\eta_k} y(s) ds, \lambda_k > 0.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

est donnée par

$$y(t) = \int_0^1 G(t, s) h(s) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\xi} \sum_{k=0}^m \lambda_k \int_0^1 H(\eta_k, s) h(s) ds.$$

où $\xi = 1 - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \lambda_k \eta_k^\alpha > 0$ et :

$$G(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}, & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}, & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

$$H(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \begin{cases} t^\alpha(1-s)^{\alpha-1} - (t-s)^\alpha, & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ t^\alpha(1-s)^{\alpha-1}, & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Preuve : Que y soit une solution au problème de la valeur limite fractionnelle (3.3)-(3.4).

Par (3) de Corollaire 1.2.1, il cède

$$y(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + c_3 t^{\alpha-3} + \dots + c_n t^{\alpha-n} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \tag{3.5}$$

En tenant compte des conditions (3.4), nous obtenons

$$c_2 = c_3 \dots = c_n = 0,$$

et puis

$$\begin{aligned}
 y(1) &= c_1 - I^\alpha h(1) = \sum_{k=0}^m \lambda_k \int_0^{\eta_k} y(s) ds \\
 &= \sum_{k=0}^m \lambda_k (-I^{\alpha+1} h(\eta_k) + \frac{c_1}{\alpha} \eta_k^\alpha) \\
 &= - \sum_{k=0}^m \lambda_k I^{\alpha+1} h(\eta_k) + c_1 \sum_{k=0}^m \frac{\lambda_k}{\alpha} \eta_k^\alpha,
 \end{aligned}$$

qui implique

$$c_1 = \frac{1}{\xi\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} h(s) ds - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \lambda_k \int_0^{\eta_k} (\eta_k - s)^\alpha h(s) ds \right)$$

La solution du problème (3.3)-(3.4) est donc la suivante :

$$y(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\xi\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} h(s) ds - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \lambda_k \int_0^{\eta_k} (\eta_k - s)^\alpha h(s) ds \right]$$

Enfin, certains calculs donnent

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ &+ \left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + t^{\alpha-1} \frac{\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \lambda_k \eta_k^\alpha}{\Gamma(\alpha) \left(1 - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \lambda_k \eta_k^\alpha \right)} \right) \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ &- \frac{t^{\alpha-1} \sum_{k=0}^m \lambda_k}{\xi\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^{\eta_k} (\eta_k - s)^\alpha h(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}) h(s) ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ &+ \frac{t^{\alpha-1}}{\xi\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^m \lambda_k \int_0^{\eta_k} (\eta_k^\alpha(1-s)^{\alpha-1} - (\eta_k - s)^\alpha) h(s) ds \\ &+ \frac{t^{\alpha-1}}{\xi\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^m \lambda_k \int_{\eta_k}^1 \eta_k^\alpha(1-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ &= \int_0^1 G(t, s) h(s) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\xi} \sum_{k=0}^m \lambda_k \int_0^1 H(\eta_k, s) h(s) ds. \end{aligned}$$

La preuve est remplie.

Lemme 3.1.2. *Les fonctions G et H sont continues non négatives et satisfont*

$$0 \leq G(t, s) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}, \quad 0 \leq H(t, s) \leq \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, \quad 0 \leq t, s \leq 1.$$

Maintenant, nous définissons le concept de solutions supérieures et inférieures pour le problème de la valeur limite fractionnelle (3.1)-(3.2).

Définition 3.1.1. Une fonction $\beta \in C[0, 1]$ est appelée solution inférieure du problème de la valeur limite fractionnaire (3.1)-(3.2), si

$$\begin{aligned} -D_{0+}^\alpha \beta(t) &\leq f(t, \beta(t)), \quad t \in (0, 1), \\ \beta^{(i)}(0) &\leq 0, \quad i = 0, \dots, n-2, \\ \beta(1) &\leq \sum_{k=0}^m \lambda_k \int_0^{\eta_k} y(s) ds. \end{aligned}$$

Définition 3.1.2. Une fonction $\gamma \in C[0, 1]$ est appelée une solution supérieure du problème de valeur limite fractionnaire (3.1)-(3.2), si

$$\begin{aligned} -D_{0+}^\alpha \gamma(t) &\geq f(t, \gamma(t)), \quad t \in (0, 1), \\ \gamma^{(i)}(0) &\geq 0, \quad i = 0, \dots, n-2, \\ \gamma(1) &\geq \sum_{k=0}^m \lambda_k \int_0^{\eta_k} y(s) ds, \quad \lambda_k > 0. \end{aligned}$$

Définir l'opérateur $F : C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R})$ par

$$Fy(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, y(s)) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\xi} \sum_{k=0}^m \lambda_k \int_0^1 H(\eta_k, s) f(s, y(s)) ds,$$

alors y est une solution du problème (3.1)-(3.2) si et seulement si y est un point fixe de F .

Réglage

$$\begin{aligned} p(t) &= \int_0^1 G(t, s) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\xi} \sum_{k=0}^m \lambda_k \int_0^1 H(\eta_k, s) ds \\ &= \frac{-t^\alpha + t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^{\alpha-1}}{\xi} \sum_{k=0}^m \frac{\lambda_k}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{-\eta_k^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + \frac{\eta_k^\alpha}{\alpha} \right) \\ &= \frac{t^{\alpha-1}(1-t)}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^{\alpha-1}}{\xi \Gamma(\alpha + 1)} \sum_{k=0}^m \lambda_k \eta_k^\alpha \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\eta_k}{\alpha + 1} \right) \\ &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[(1-t) + \frac{1}{\xi} \sum_{k=0}^m \lambda_k \eta_k^\alpha \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\eta_k}{\alpha + 1} \right) \right] \end{aligned}$$

alors la fonction

$$g(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, p(s)) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\xi} \sum_{k=0}^m \lambda_k \int_0^1 H(\eta_k, s) f(s, p(s)) ds, t \in [0, 1]$$

est une solution positive au problème suivant

$$\begin{aligned} -D_{0+}^\alpha g(t) &= f(t, p(t)), t \in (0, 1), \\ g^{(i)}(0) &= 0, i = 0, \dots, n-2, \\ g(1) &= \sum_{k=0}^m \lambda_k \int_0^{\eta_k} g(s) ds. \end{aligned}$$

par conséquent

$$a_1 p(t) \leq g(t) \leq a_2 p(t), \quad 0 < t < 1, \quad (3.6)$$

où

$$a_1 = \min \left\{ 1, \min_{t \in [0, 1]} f(t, p(t)) \right\}, \quad a_2 = \max \left\{ 1, \max_{t \in [0, 1]} f(t, p(t)) \right\}. \quad (3.7)$$

Nous avons les résultats suivants :

Théorème 3.1.1. *Supposer que les conditions suivantes sont remplies*

(H1) *Il existe une fonction $\varphi \in L^1([0, 1], \mathbb{R}_+)$ et une fonction continue $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, de sorte que*

$$f(t, y) \leq \varphi(t) \psi(|y|),$$

pour tout $t \in [0, 1]$ et $y \in \mathbb{R}$.

(H2) *Il existe une constante $\rho > 0$ telle que*

$$\psi(\rho) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\xi \Gamma(\alpha + 1)} \sum_{k=0}^m \lambda_k \eta_k^\alpha \right) \|\varphi\|_{L^1} < \rho. \quad (3.8)$$

(H3) *$f(t, p(t)) \neq 0$, pour $t \in [0, 1]$ et il existe une constante $\mu, 0 < \mu < 1$ telle que pour tous $k, 0 < k < 1$, nous avons*

$$k^\mu f(t, u) \leq f(t, ku), u \in \mathbb{R}_+. \quad (3.9)$$

Alors le problème (3.1)-(3.2) a au moins une solution positive $y \in C[0, 1]$ satisfaisant

$$\beta(t) \leq y(t) \leq \gamma(t), t \in [0, 1].$$

Où β et γ sont respectivement les solutions inférieures et supérieures au problème (3.1)-(3.2) définie comme suit :

$$\beta(t) = k_1 g(t), \gamma(t) = k_2 g(t), \quad (3.10)$$

$$k_1 = \min(1, r)k_3, k_2 = \max(1, R)k_4, \quad (3.11)$$

$$r = \min(f(t, y(t)), t \in [0, 1], \|y\| \leq \rho),$$

$$R = \max(f(t, y(t)), t \in [0, 1], \|y\| \leq \rho),$$

$$k_3 = \min\left(\frac{1}{a_2}, a_1^{\frac{\mu}{1-\mu}}\right), k_4 = \max\left(\frac{1}{a_1}, a_2^{\frac{\mu}{1-\mu}}\right). \quad (3.12)$$

preuve : Prouvons que F est un opérateur totalement continu.

que $y \in B_\rho = \{y \in C[0, 1] : \|y\| \leq \rho\}$, nous avons

$$\begin{aligned} Fy(t) &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \\ &+ \frac{1}{\xi \Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^m \lambda_k \eta_k^\alpha \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds. \end{aligned}$$

grâce à la condition (H1) nous obtenons

$$Fy(t) \leq \psi(\rho) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\xi \Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^m \lambda_k \eta_k^\alpha \right) \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \varphi(s) ds,$$

compte tenu de (3.8) elle produit

$$\|Fy\| \leq \psi(\rho) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\xi \Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^m \lambda_k \eta_k^\alpha \right) \|\varphi\|_{L^1} < \rho.$$

ainsi F est uniformément limité sur B_ρ et $F(B_\rho) \subset B_\rho$.

que $t_1, t_2 \in [0, 1], t_1 < t_2$, puis

$$\begin{aligned} |Fy(t_2) - Fy(t_1)| &\leq \frac{(t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1})}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}] f(s, y(s)) ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \\ &+ \frac{(t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1})}{\xi} \sum_{k=0}^m \lambda_k \int_0^1 H(\eta_k, s) f(s, y(s)) ds. \end{aligned}$$

Par l'aide de la condition (H1) nous obtenons

$$\begin{aligned}
 |Fy(t_2) - Fy(t_1)| &\leq \psi(\rho)\|\varphi\|_{L^1} \\
 &\times \left(\frac{(t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1})}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1})}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(t_2 - t_1)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1})}{\xi\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{k=0}^m \lambda_k \eta_k^\alpha \right), \\
 &\leq \frac{\psi(\rho)\|\varphi\|_{L^1}(t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1})}{\Gamma(\alpha)} \left(2 + \frac{1}{\alpha\xi} \sum_{k=0}^m \lambda_k \eta_k^\alpha \right) \\
 &\quad + \frac{\psi(\rho)\|\varphi\|_{L^1}(t_2 - t_1)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.
 \end{aligned}$$

qui tend à 0 comme $t_2 \rightarrow t_1$. Donc $F(B_\rho)$ est équicontinu. Par Arzela-Ascoli Théorème nous concluons que F est complètement continu. En appliquant Schauder point fixe théorème 2.2.2 , il s'ensuit que F a un point fixe $y \in B_\rho$. Faisons remarquer que la solution y satisfait

$$rp(t) \leq y(t) \leq Rp(t), \forall t \in (0, 1). \quad (3.13)$$

Maintenant, nous prouvons que $\beta(t) \leq y(t) \leq \gamma(t), t \in [0, 1]$. En combinant (3.6) et (3.10) , nous obtenons les estimations suivantes pour $t \in (0, 1)$

$$k_1 a_1 \leq \frac{\beta(t)}{p(t)} \leq k_1 a_2, \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{k_2 a_2} \leq \frac{p(t)}{\gamma(t)} \leq \frac{1}{k_2 a_1}, \quad (3.15)$$

en outre (3.11) implique

$$k_3 a_2 \leq 1, k_4 a_1 \geq 1. \quad (3.16)$$

Soit $t \in (0, 1)$, de (3.11),(3.14)-(3.16) nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \frac{\beta(t)}{p(t)} &\leq k_1 a_2 \leq \min(1, r)k_3 a_2 \leq r, \\
 \frac{p(t)}{\gamma(t)} &\leq \frac{1}{k_2 a_1} \Rightarrow \frac{\gamma(t)}{p(t)} \geq k_2 a_1 = \max(R, 1)k_4 a_1 \geq R,
 \end{aligned}$$

donc

$$\beta(t) \leq rp(t), \gamma(t) \geq Rp(t), \forall t \in [0, 1] \quad (3.17)$$

A partir de (3.13) et (3.17), elle cède

$$\beta(t) \leq y(t) \leq \gamma(t) \text{ pour tout } t \in [0, 1]$$

Enfin, nous prouverons que $\beta(t) = k_1 g(t)$, $\gamma(t) = k_2 g(t)$ sont respectivement des solutions inférieures et supérieures au problème (3.1)-(3.2).

Grâce à (3.12), nous obtenons les estimations suivantes :

$$(k_3 a_1)^\mu \geq k_3, \text{ et } (k_4 a_2)^\mu \leq k_4 \quad (3.18)$$

$$(k_1 a_1)^\mu \geq k_1, \text{ et } (k_2 a_2)^\mu \leq k_2 \quad (3.19)$$

En utilisant (3.9), (3.14) et (3.19), nous obtenons pour tout $t \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} f(t, \beta(t)) &= f\left(t, \frac{\beta(t)}{p(t)} p(t)\right) \geq \left(\frac{\beta(t)}{p(t)}\right)^\mu f(t, p(t)) \\ &\geq (k_1 a_1)^\mu f(t, p(t)) \geq k_1 f(t, p(t)), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} k_2 f(t, \beta(t)) &= k_2 f\left(t, \frac{p(t)}{\gamma(t)} \gamma(t)\right) \geq \left(\frac{p(t)}{\gamma(t)}\right)^\mu f(t, \gamma(t)) \\ &\geq k_2 (k_2 a_2)^{-\mu} f(t, \gamma(t)) \geq f(t, \gamma(t)), \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{cases} -D_{0+}^\alpha \beta(t) = k_1 f(t, p(t)) \leq f(t, \beta(t)) & t \in (0, 1), \\ -D_{0+}^\alpha \gamma(t) = k_2 f(t, p(t)) \geq f(t, \gamma(t)) & t \in (0, 1), \end{cases}$$

et

$$\beta^{(i)}(0) \leq 0 \dots \forall i = 0, \dots, n-2, \beta(1) \leq \sum_{k=0}^m \lambda_k \int_0^{\eta_k} y(s) ds,$$

$$\gamma^{(i)}(0) \geq 0 \dots \forall i = 0, \dots, n-2, \gamma(1) \geq \sum_{k=0}^m \lambda_k \int_0^{\eta_k} y(s) ds,$$

$\beta(t) = k_1 g(t)$ et $\gamma(t) = k_2 g(t)$ sont respectivement des solutions inférieures et supérieures au problème (3.1)-(3.2). La preuve du théorème 3.1.1 est obtenue.

Exemple 3.1.1. *Considérer le problème de la valeur limite fractionnelle (3.1)-(3.2) avec*

$$\alpha = 2.5, \lambda_1 = 0.25, \lambda_2 = 0.75, \eta_1 = 0.5, \eta_2 = 0.25,$$

$$f(t, y) = 1 + t + \frac{1}{100} \left(\frac{\Gamma(\alpha + 1)|y|}{(1 - t) + \frac{1}{\xi} \sum_{k=0}^m \lambda_k \eta_k^\alpha \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\eta_k}{\alpha + 1} \right)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

que nous dénotons par (P), le

$$p(t) = 0.30009t^{\frac{3}{2}}(1.019595 - t),$$

$$f(t, p(t)) = 1 + t + 0.01t^{\frac{3}{4}}.$$

$$\xi \approx 0.97295 > 0.$$

Pour $\mu = \frac{1}{2}$ et pour $0 < k < 1$, il est facile de vérifier

$$\begin{aligned} k^{\frac{1}{2}} f(t, y) &= k^{\frac{1}{2}} + k^{\frac{1}{2}} t + \frac{1}{100} \left(\frac{\Gamma(\alpha + 1)|y|}{(1 - t) + \frac{1}{\xi} \sum_{k=0}^m \lambda_k \eta_k^\alpha \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\eta_k}{\alpha + 1} \right)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 1 + t + \frac{1}{100} \left(\frac{\Gamma(\alpha + 1)|y|}{(1 - t) + \frac{1}{\xi} \sum_{k=0}^m \lambda_k \eta_k^\alpha \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\eta_k}{\alpha + 1} \right)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq f(t, ky) \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} |f(t, y(t))| &\leq 2 \left(1 + \frac{1}{200} \left(\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(1 - t) + \frac{1}{\xi} \sum_{k=0}^m \lambda_k \eta_k^\alpha \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\eta_k}{\alpha + 1} \right)} \right)^{\frac{1}{2}} \right) |y|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2(1 + 0.0751886|y|^{\frac{1}{2}}) = \varphi(t)\psi(|y|), \end{aligned}$$

donc

$$\varphi(t) = 2, \psi(|y|) = (1 + 0.0751886|y|^{\frac{1}{2}}).$$

Si on choisit $\rho = 2$, ça donne

$$\psi(\rho) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\xi\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^m \lambda_k \eta_k^\alpha \right) \|\varphi\|_{L^1} - \rho = -0.3008 < 0,$$

ainsi (3.3) est satisfait. Puisque $f(t, p(t))$ augmente dans t alors

$$\min_{t \in [0,1]} f(t, p(t)) = \min_{t \in [0,1]} (1 + t + 10^{-2}t^{\frac{3}{4}}) = 1,$$

$$\max_{t \in [0,1]} f(t, p(t)) = \max_{t \in [0,1]} (1 + t + 10^{-2}t^{\frac{3}{4}}) = 2.01,$$

par conséquent, $f(t, p(t)) \neq 0$. Puisque toutes les conditions du théorème 3.1.1 sont remplies, le problème de la valeur limite fractionnelle (P) a donc au moins une solution positive de sorte que $\beta(t) \leq y(t) \leq \gamma(t)$, $t \in [0, 1]$. Trouvons les formes explicites des fonctions g, β et γ . Par calcul, nous obtenons

$$a_1 = 1, a_2 = 2.01, r = 1, R = 2.184174, k_1 = k_3 = 0.49751,$$

$$k_4 = 2.01, k_2 = 4.390189$$

$$g(t) = 0.36506t^{1.5} - 0.75225t^{2.5}(0.4 + 0.11429t + 0.84263 \times 10^{-3}t^{0.75}),$$

$$\beta(t) = 0.181621t^{1.5} - 0.374251t^{2.5}(0.11429t + 1.4746 \times 10^{-3}t^{0.75} + 0.4),$$

$$\gamma(t) = 1.602682t^{1.5} - 3.302519t^{2.5}(0.11429t + 1.4746 \times 10^{-3}t^{0.75} + 0.4)$$

Conclusion

Dans ce mémoire , nous avons étudié la solution d'un certain type d'équations différentielles fractionnaires en utilisant la méthode de sous et sur de la solution , en plus l'étude de la solution positive à un autre type d'équations fractionnaire a établie.

L'existence de la solution est établit en appliquant le théorème du point fixe de Banach et de Bohnenblust-Karlin.

Pour les perspectives on essaye d'appliquer cette méthode à une classe élargie d'équations fractionnaires.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. P. Agarwal, Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems. *J. Math. Anal. Appl.* 272, 368–379 (2002).
- [2] R. P. Agarwal, Y. Zhou and Y. He : Existence of fractional neutral functional differential Equations, *Comput.Math. Appl.* 59 (3) (2010), 1095-1100.
- [3] D. Baleanu, G. C. Wu, S. D. Zeng, Chaos analysis and asymptotic stability of generalized Caputo fractional differential equations, *Chaos, Solitons and Fractals*, 1–7 (2017).
- [4] M. Benchohra, Juan J. Nieto, A. Ouahab, Existence results for functional integral inclusions of Volterra type, *Dynam. Systems Appl.* 14 (2005), 57–69.
- [5] H. F. Bohnenblust, S. Karlin, On a theorem of Ville. Contribution on the theory of games, in : *Annals of Mathematics Studies*, Vol. 24, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1950, pp. 155–160.
- [6] D. Boucenna, A. Guezane-Lakoud, Juan J. Nieto, R. Khaldi, On a multipoint fractional boundary value problem with integral conditions, *Journal of Nonlinear Functional Analysis*, Vol. 2017(2017), Article ID 53, pp. 1-13.

- [7] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer New York Dordrecht Heidelberg London (2010).
- [8] Changpin Li and Fanhai Zeng. *Numerical methods for fractional calculus*, volume 24. CRC Press, 2015.
- [9] K. Diethelm, *The Analysis of fractional differential equations. An application oriented exposition using differential operators of Caputo type*. Springer, Heidelberg, 2010.
- [10] Eric Weisstein. 'Erfc.' From MathWorld A Wolfram Web Resource, 2020 (accessed February 3, 2020). <https://mathworld.wolfram.com/Erfc.html>.
- [11] A. Frioui, A. Guezane-Lakoud, R. Khaldi, Fractional boundary value problems on the half line. *Opuscula Math.* 37 (2017), no. 2, 265–280.
- [12] A. Guezane-Lakoud, Initial value problem of fractional order. *Cogent Math.* 2 (2015).
- [13] A. Guezane-Lakoud, R. Khaldi, On a boundary value problem at resonance on the half line. *J. Fract. Calc. Appl.* 8 (2017), no. 1, 159–167.
- [14] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, 2000.
- [15] Ignor Podlubny and Kenneth V. Thimann (Eds.). *Fractional Differential Equations : An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. Mathematics in science and engineering 198. Academic Press, 1st edition, 1999.

- [16] F. Jarad, T. Abdeljawad, D. Baleanu, Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives, *Adv. Diff. Equa.*, 142 (2012), pp. 1–12.
- [17] Juan J. Nieto, R. Rodriguez-Lopez, Monotone method for first-order functional differential equations, *Comput. Math. Appl.* 52 (2006), 471–484.
- [18] Kai Diethelm (auth.). *The Analysis of Fractional Differential Equations : An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*. Lecture Notes in Mathematics 2004. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 2010.
- [19] U. N. Katugampola, Existence and uniqueness results for a class of generalized fractional differential equations, *Bull. Math. Anal. Appl.*, 6(4), (2014) pp. 1–15.
- [20] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, Vol. 204, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.
- [21] M. A. Krasnoselskii, Some problems of nonlinear analysis, *Amer. Math. Soc. Transl.*, Vol. 10, pp. 345–409 (1958).
- [22] R. Magin, Fractional calculus in bioengineering, *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, Vol. 32, 195–377 (2004).
- [23] D. Matignon, Stability result on fractional differential equations with applications to control processing, In *IMACS. SMC Proc.*, Lille, France, pp. 963–968 (1996).
- [24] K.B. Oldham, J. Spanier, *The fractional calculus*. Academic Press, New York (1974).

- [25] Sh. Hu, N. Papageorgiou, Handbook of Multivalued Analysis, Volume I : Theory, Kluwer, Dordrecht, Boston, London, 1997.
- [26] Podlubny, I : Fractional Differential Equations. Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, San Diego (1999).
- [27] K. R. Prasad , B. M. B. Krushna : Lower and upper solution for general twopoint fractional orded boundary value problems. J. App. Eng. Math. V.5, N.1, 2015, 80–87.
- [28] Rezapour, S., Samei, M.E. :On the existence of solutions for a multi-singular pointwise deÖned fractional q-integro-dişerential equation. Bound.Value Probl. 2020, 38 (2020).
- [29] Y. A. Rossikhin, M. V. Shitikova : Application of fractional derivatives to the analysis of damped vibrations of viscoelastic single mass system, Acta Mech, (1997).
- [30] Saeed Kazem. Exact solution of some linear fractional differential equations by laplace transform. International Journal of Nonlinear Science, 16(1) :3–11, 2013.
- [31] S. Sun, Y. Zhao, Z. Han, M. Xu, Uniqueness of positive solutions for boundary value problems of singular fractional differential equations. Inverse Probl. Sci. Eng. 20 (3), 299–309 (2012).