الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES
قسم الرياضيات
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière :Mathématiques

Option : Analyse Mathématique .

Par :

Saihi Bochra

Thème

Problème de transmission entre deux fluides de Bingham dans une couche mince.

Devant le jury composé de :

Dr. Fares Yazid	Maître de conférence A	Université de Laghouat	Président
Dr. Salim Saf	Maître de conférence B	Université de Laghouat	Encadreur
Dr. Abdelaziz Rahmoune	Maître de conférence A	Université de Laghouat	Examinateur

Année Universitaire : 2023-2024

Remerciments

*Tout d'abord je remercie **Allah** le tout puissant, qui nous a donné a puissance et la volonté pour achever ce travail.*

*Je tien à remercier mon encadreur **Dr.Salim Saf** pour son soutien et son aide considérable, ses conseils précieux et ses remarques pertinentes qui mont guidé durant la réalisation de ce mémoire .*

*Je remercie vivement monsieur **Dr. Fares Yazid**, ait accepté de présider et d'honorer de sa présence le jury de soutenance du présent mémoire de master .*

*Je tiens également à remercier **Dr. Abdelaziz Rahmoune** pour avoir accepté d'examiner ce travail.*

Saihi
Bochra

Dédicace

Je dédie ce fruit de mes longues années d'études tout d'abord :

Ames très chers parents, qui sont la lumiére de ma vie, qui ont tant soufré et sacrifiés pour que je sois heureuse, pour leurs conseils et leurs encouragements.

Mon père Saihi Mohamed et Ma mère D.Masouda

Je me trouve ici grâce aux longues années de sacrifices pour m'aider à avancer dans la vie, merci pour les valeurs nobles et le soutien permanent venu de toi.

Mon cher mari : G.Sayeh

Je vous remercie pour votre confiance et votre soutien formidables et continus. J'espère que nous connaîtrons de nombreux succés ensemble jusqu'à ce que nous vieillissions .

Et je le dédie :

A tous les membres de ma famille, mon cher frère Madani, mes soeurs Zohra, Hanane, Hadil et mon cher Amel.

A tous mes amies et mes collégues avec qui j'ai partagé de trés bons moments tout le long de ces années surtout

Saihi Bochra

ملخّص

الهدف من هَاته المذكرة هو درَاسة نظرية لمشكلة الَانتقَال بين سَائلين من نوع بينغهَام *Bingham* صلبين غير قَابلين لّلضغط و لزجين في طبقة رقيقة ثنَائية الأَبعَاد في نظَام ثَابت، علَى افترَاض أن المعَاملَات الممّيزة لّسَائلين مختلفة، و من خلَال فرض شروط التلَامس بين سَائل ـ سَائل في حدود الَانتقَال الطبيعي، اي بعبَارة اخرَى استمرَارية السرعَات و استمرَارية القيود، و كذلك الشروط علَى احد حَافتي الطبقة الرقيقة. النتَائج المتحصل عليهَا لأَجل هَاته المسَائل متعلقة بَالوجود و الوحدَانية و السلوك المقَارب، تّتكون هَاته المذكرة من ثلَاثة فصول. الفصل الأَول نقدم فيه النتَائج الأَسَاسية لميكَانيك الوسَائط المستمرة، بَالَاضَافة الَى المعَادلَات المختلفة و الأَدوَات الريَاضيَاتية. في الفصل الثَاني برهنَا وجود و وحدَانية الحل الضعيف لمشكلة الَانتقَال بين السَائلين. درَاسة السلوك المقَارب لمشكلة الَانتقَال الميكَانيكي هو محور الفصل الثَالث.

كلمَات مفتَاحية : سَائل بنغهَام ـ *Bingham* ، الَانتقَال، طبقة رقيقة ، سلوك مقَارب .

Résumé

Ce mémoire vise à proposer une contribution à l'étude d'un problème de transmission entre deux fluides de Bingham incompressibles, rigides et viscoplastiques dans une couche mince bidimensionnelle en régime stationnaire, en supposant que les coefficients caractéristiques des deux fluides sont différents et en imposant à l'interface de contact fluide-fluide des conditions aux limites de transmission naturelle, c'est-à-dire continuité des vitesses et continuité des contraintes, ainsi que des conditions sur l'un des deux bords de la couche mince. Le mémoire comporte trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous introduisons les notions générales de la mécanique des milieux continus, ainsi que diverses équations et outils mathématiques. Dans le deuxiéme chapitre, nous montrons l'existence et l'unicité d'une solution faible à ce problème de transmission. Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à l'étude du comportement asymptotique d'un problème mécanique de transmission.

Mots - clés : *fluide de Bingham ; transmission ; couche mince ; comportement asymptotique.*

Abstract

This dissertation aims to propose a contribution to the study of a transmission problem between two incompressible, rigid, and viscoplastic Bingham fluids in a two-dimensional thin layer in a stationary regime, assuming that the characteristic coefficients of the two fluids are different and by imposing on the interface of fluid-fluid contact conditions at the limits of natural transmission, in other words, continuity of speeds and continuity of stresses, as well as conditions on one of the two edges of the layer thin. The dissertation includes three chapters. In the first chapter, we introduce general notations of the mechanics of continuous mediums, as well as various equations and mathematical tools In the second chapter, we showed the existence and the uniqueness of a weak solution to this transmission problem. In the third chapter, we are interested in the study of the asymptotic behavior of a mechanical problem of transmission.
Key words and phrases *: Bingham fluid ;transmission ; thin layer ; asymptotic behavior.*

Notations

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^2$, on note par :

$\bar{\mathit{\Omega}}$	l'athérence de $\mathit{\Omega}$.
Γ	la frontière de $\mathit{\Omega}$, supposée réguliére.
$\Gamma_i (i = 1, 2)$	une partie de la frontière de Γ.
$mes(\Gamma_i)$	la meseure de Lebesgue superficielle de Γ_i.
ν	la normale unitaire sortante à Γ.
$\upsilon_\nu, \upsilon_\tau$	les c omposantes normale et tangentielle du champ vectoriele υ sur $\overline{\mathit{\Omega}}$.
$C^1\left(\overline{\Omega}\right)$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur Ω.
$C^1_\infty(\Omega)$ =	l'espacedes fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact
$D(\Omega)$	contenu dans Ω
$D'(\Omega)$	l'espace de distributions sur Ω
H_1	$\{\sigma \in L^2(\mathit{\Omega})_s^{n\times n} \ / \ Div(\sigma) \in L^2(\mathit{\Omega})^n\}$.
$L^p(\Omega)$	l'espace des fonctions Lebesgue-mesurables de puissance p-ième integrable sur Ω
$H^1(\Omega)$	l'espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω.
$H^1_0(\Omega)$	l'adhérence de $D\ (\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$
$H^{-1}(\Omega)$	l'espace dual de $H^1_0(\Omega)$
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ.
$H^1_{\Gamma_i}$	l'espace $\{\ \varphi \in H^1(\Omega) \ \ : \ \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_i\}$
γ	l'application trace.

Si H est un espace de Banach réel, on utilise les notations :

H'	le dual topologique de l'espace H.
$H^n =$	$\{x = (x_i) \ / \ x_i \in H, i = \overline{1, ..., n}\}$.
$H_s^{n\times n} =$	$\{\ x = (x_{ij})/x_{ij} = x_{ji} \in H, i, j = \overline{1, ..., n}\}$.
$(.,.)_{H'\times H}$	le produit de dualité entre l'espace H' et l'espace H .
$\Vert.\Vert_H$	la norme de l'espace H .
2^H	l'ensemble de toutes les parties de H.
$x_n \longrightarrow x$	la convergence forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans H .
$x_n \rightharpoonup x$	la convergence faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans H .

Pour une fonction f, on note :

$dom(f)$	le domaine de f.
$epi(f)$	l'epigraphe de f .
$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	la dérivée de f par rapport à la i-éme composante x_i.
f'	la dérivée de f par rapport au temps.
$\frac{Df}{Dt}$	la dérivée particulaire de f .
∇f	le gradient de f .
$D(f)$	la partie symétrique du gradient de f , $D(f) = \frac{1}{2}(\nabla f + \nabla^T f)$.
$div(f)$	la divergence de f.
∂f	le sous-différentiel de f.

Autres notations :

$\liminf$	la limite inférieure.
S_n	l'espace des tenseurs symétriques d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^n$.
$Div(\sigma)$	la divergence du tenseur $\sigma \in S_n$.
$\tilde{\sigma}$	le déviateur du tenseur $\sigma \in S_n$.
$tr(\sigma)$	la trace du tenseur $\sigma \in S_n$.
δ	le tenseur identique.
$p.p$	presque partout .
$\lvert . \rvert$	la norme Euclidienne de $\mathbb{R}^n$ et S_n .
”.”	le produit scalaire Euclidienne de $\mathbb{R}^n$ et S_n .

Table des matières

Introduction **1**

1 Modélisation et outils mathématiques **4**

1.1 Modélisation 5

1.1.1 Les équations de conservation 5

1.1.2 Loi de comportement du fluide de Bingham 7

1.1.3 Condition aux limites de contact 10

1.2 Outils mathématiques 11

1.2.1 Elément d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert 11

1.2.2 Espaces fonctionnels et opérateurs divergence et déformation 15

2 Problème de transmission gouverné par le fluide de Bingham **23**

2.1 Position du problème 24

2.2 Formulation variationnelle du problème 26

2.3 Résultats d'existence et d'unicité 28

3 Comportement asymptotique d'un problème de transmission entre deux fluide de Bingham dans une couche mince **31**

3.1 Introduction et cadre fonctionnel du problème 32

3.2 Le modèle et sa formulation variationnelle 33

3.3 Comportement asymptotique 36

Conclusion et perspectives **47**

Bibliographe **48**

Introduction

Un fluide de type Bingham, qui est un milieu visco-plastique, vérifie les lois générales de la mécanique des milieux continus et a une loi de comportement non linéaire particulière. Il est utilisé pour modéliser plusieurs types de fluides, comme par exemple des peintures et la lave volcanique, d'où le grand intérêt de son étude.

Dans les écoulements de faible épaisseur, lorsque l'épaisseur diminue, l'influence relative des effets de surface par rapport aux effets de volume augmente. Il convient alors d'accorder une importance particulière â ce qui se passe â l'interface fluide solide et qui induit les conditions aux limites â imposer aux équations décrivant l'écoulement.

Usuellement, la plupart des travaux mathématiques concernant les équations de Navier-Stokes supposent des conditions d'adhérence aux parois, plus rarement des conditions de glissement ou des conditions en pression. Dans le cas des écoulements de faible épaisseur, on sait justifier [2, 6, 20] par des techniques asymptotiques l'approximation des équations de Navier-Stokes par une équation dite de Reynolds, laquelle prend en compte implicitement les conditions limites aux parois.

L'étude du comportement asymptotique a déjà été faite et des résultats ont été obtenus pour plusieurs fluides. Le premier résultat, dû à Bayada et Chambat [5] justifie l'équation de Reynolds, obtenue à partir deséquations de Stokes considé rées dans un domaine mince. L'écoulement du type Nazarov-Stokes est traité par Assemien, Bayada et Chambat [4], ainsi que par Nazarov [33] pour différentes conditions aux limites du domaine d'étude.

Pour les problémes non linéaires, plusieurs résultats sont connus, mais aucun n'englobe le cas du fluide de Bingham. Ainsi, l' écoulement d'un fluide dont la viscosité est donnée par une loi de puissance a été traité par Mikelic et Tapiéro [30, 31] et par Bourgeat, Mikelic et Tapiéro [9] Par ailleurs, Taous [41] a é tudié une classe des fluides à viscosité non linéaire, le modéle de viscosité étant celui de Litvinov [26] . En fin Bunoiu et Saint Jean Paulin [13] ont étudié une classe des fluides à viscosité non linéaire, parmi les quels ont trouve les fluides du type Cross, Carreau et Williamson. Les auteurs de [11, 12] ont étudié le même problème, dans lequel seules les conditions de Dirichlet sur la frontière ont été considérées.

Ce mémoire a pour objet l'étude d'un problème de transmission entre deux fluides incompressibles, rigides et viscoplastiques de Bingham dans une couche mince bidimensionnelle en régime stationnaire, en supposant que les coefficients caractéristiques des deux fluides sont différents et en imposant sur l'interface de contact fluide-fluide des conditions aux limites de transmission naturelles, autrement dit continuité des vitesses et continuité des contraintes, ainsi que des conditions sur l'un des deux bords de la couche mince.

Cependant, nous abordons ici un problème de transmission entre deux domaines bidimensionnels Ω_1^ε et Ω_2^ε en couche mince (les épaisseurs relatives au paramètre ε), et nous supposons qu'il n'y a pas de séparation entre les domaines pendant le processus, c'est-à-dire que le contact est bilatéral. Nous avons donc la même difficulté induite par l'absence des hypothèses de symétrie que dans le problème du revêtement. On cherche à connaitre le comportement asymptotique des fluides lorsque ε tend vers zéro.

Le travail est composé comme suit :

Le premier chapitre, aborde brièvement des notions générales pour faciliter la lecture de ce mémoire. Aussi bien que pour la bonne compréhension des problèmes traités dans la suite. Nous commençons par un rappel des notions générales de la mécanique de milieux continus : on introduit mathématiquement par l'établissement d'un système d'équations aux dérivées partielles posé sur un domaine de $\mathbb{R}^2$. Ce système comprend la loi de comportement du fluide, l'équation du mouvement et du corps ainsi que les conditions initiales et aux limites auxquelles il est soumis. La loi de comportement du fluide de Bingham traitée dans ce mémoire donnée par :

$$\left.\begin{array}{ll} \widetilde{\sigma}=\mu\varepsilon^2 D(u)+g\varepsilon\frac{D(u)}{|D(u)|} & \text{si } |D(u)|\neq 0 \\ \widetilde{\sigma}\leq g\varepsilon & \text{si } |D(u)|=0 \end{array}\right\} \text{ sur } \Omega,$$

où $\widetilde{\sigma}$ désigne le déviateur du tenseur des contraintes σ, u représente le champ des vitesses, $D(u)$ désigne le tenseur taux de déformation, $\mu\varepsilon^2$, $g\varepsilon>0$ sont les coefficients qui caractérisent le modèle de Bingham et qui représentent respectivement : la consistance (la viscosité) et le seuil de plasticité

Ce modèle est proposé par Eugène Cook Bingham (1878-1945) en 1916. lorsque $g=0$, on retrouve le modèle de Navier-Stokes (Newtonien).

Nous présentons ensuite quelques résultats classiques de l'analyse fonctionnelle non linéaire : on introduit les fonctions convexes, les opérateurs fortement monotone, les inéquations variationnelles elliptiques. Pour finir nous rappelons les espaces fonctionnels et les principales notations utilisées.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à l'étude d'un problème de transmission entre deux fluides incompressibles, rigides et viscoplastiques de Bingham dans une couche mince qui occupent deux domaines bornés Ω_1^ε et Ω_2^ε en dimension deux avec contact bilatéral et des conditions aux limites de transmission naturelles, en supposant que les coefficients caractéristiques des deux fluides sont différents. Dans ce cadre, on décrit la position du problème et les conditions aux limites, concernant le champ de vitesse, et le champ des contraintes qui nous permettent de faire la formulation variationnelle du problème mécanique de départ, puis nous étudions l'existence et l'unicité de solution faible du problème.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à l'étude du comportement asymptotique d'un problème de transmission lié par les fluides incompressibles, rigides et viscoplastiques de Bingham en régime stationnaire avec des viscosités différentes μ_1 et μ_2, dans des domaines Ω_1^ε, Ω_2^ε supposés minces, avec des conditions aux limites de transmission naturelles à l'interface de contact entre deux domaines. Nous commençons par décrire le cadre fonctionnel dans lequel nous allons travailler, et la formulation variationnelle du problème concernant le champ de vitesse et le champ de la pression. Ensuite, nous utilisons les différentes inégalités de Poincaré, Korn, Cauchy-Schwartz, Young et Hôldre pour obtenir des estimations à priori. Ce qui nous permet de faire un passage à la limite afin d'obtenir le problème limite [35, 38].

Dans ce cas nous avons obtenu [39] :

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_1\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}+\frac{\sqrt{2}}{2}g_1 sign\left(\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)+\mu_2\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}+\frac{\sqrt{2}}{2}g_2 sign\left(\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\right)$$
$$=\widehat{f_{11}}-\frac{d\widehat{p_1}}{dx}+\widehat{f_{21}}-\frac{d\widehat{p_2}}{dx}\ \text{in}\ H^{-1}(\Omega_1\cup\Omega_2).$$

Où μ_1 et μ_2 sont les consistances de milieux Ω_1 et Ω_2 respectivement, g_1 et g_2 sont le seuil de plasticité de milieux Ω_1 et Ω_2 respectivement, $\widehat{f_{i1}}$ est la première composante de la fonction $\widehat{f_i}$ qui représente une densité massique des forces extérieures de milieux Ω_i $(i=1,\ 2)$, $\widehat{u_{i1}}$ est la première composante de la fonction $\widehat{u_i}$ $(i=1,\ 2)$ et $((\widehat{u_{11}},0),(\widehat{u_{21}},0))$, $(\widehat{p_1},\widehat{p_2})$ sont le champ de vitesse et la pression des problèmes limites dans $\Omega_1\cup\Omega_2$.

Chapitre 1

Modélisation et outils mathématiques

Le but de ce chapitre est d'introduire les outils mathématiques et mécaniques nécessaires pour une bonne compréhension de la suite des problèmes traités. Il comporte deux sections.

Dans la première section, nous commençons par un rappel des résultats essentiels de la théorie des milieux continus et la loi de comportement du fluide de Bingham , puis, nous présentons le système d'équations aux dérivées partielles qui modélisent quelques problèmes aux limites modéisant le comportement fluide dans le cas stationnaire et ce dans un domaine bornéen dimension deux, ensuite nous décrivons les diférentes conditions de contact qui interviennent dans tout le document.

La deuxième section comprend des rappels sur les résultats classiques de l'analyse fonctionnelle non linéaire, on y présente ici quelques résultats fondamentaux concernant les fonctions convexes, les inéquations variationnelles elliptiques. Pour finir, nous rappelons les notions de bases ainsi que quelques résultats sur les espaces de Sobolev.

1.1 Modélisation

L'objet de cette section est d'établir le cadre physique et mathématique décrivant des problèmes de contact en mécanique des solides et des fluides utilisés dans ce mémoire en suivant [7], [14], [17], [24], [40] et [29]. Ceci se traduit mathématiquement par l'établissement d' un système d' équations aux dérivées partielles posé sur un domaine de $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$. Ce système comprend la loi de comportement du matériau ou fluide, l' équation du mouvement du corps ainsi que les conditions initiales et aux limites auxquelles il est soumis.

1.1.1 Les équations de conservation

Considérons un milieu continu qui occupe un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^2$ pendant un intervalle de temps $]0, T[$. Lorsque l'hypothèse des milieux continus est vérifiée, nous considérons un milieu continu qui occupe un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^2$ pendant un intervalle de temps $]0, T[$ régi par les principes de la thermomécanique des milieux continus qui permettent d'établir les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Nous allons préciser ici l'ensemble des équations correspondantes, dans Ω, on a :

1. **L'équation de conservation de la quantité de mouvement :**
   Soit $u(x, t)$ le champ des vecteurs vitesse à l'instant $t \in]0, T[$ des points $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ du milieu continu en mouvement par rapport au repère (ox), $\sigma(x, t)$ de composantes σ_{lm} $(l, m = 1, 2)$, est le tenseur des contraintes. La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus exprimant l'équivalence entre le tenseur des forces extérieures et le tenseur des accélérations pour un système matériel quelconque, conduit à l'équation du mouvement suivante :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u \right) = Div\sigma + f. \tag{1.1}$$

   où le vecteur f, de composantes $f_l(l = 1, 2)$, représente une densité massique des forces extérieures, $\rho = \rho(x, t)$ est la densité du milieu au point $x \in \Omega$ et Div désigne l'opérateur divergence, c'est- à-dire

$$Div\ \sigma = \frac{\partial \sigma_{lm}}{\partial x_m}, (l, m = 1, 2). \tag{1.2}$$

2. **L'équation de conservation de la masse :**
   La forme locale de la conservation de la masse s'applique seulement sur un point $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ de l'élément de volume $\partial\Omega$ du milieu. L'expression générale de

l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u.\nabla \rho + \rho div(u) = 0. \tag{1.3}$$

Le processus d'évolution modélisé par (1.1) contient un terme non linéaire par rapport aux composantes de la vitesse, dans certaines situations l'équation (1.1) peut se simplifier. S'il s'agit d'un problème statique le premier membre des équations (1.1) est identiquement nul et on les appelle équations d'équilibre

$$Div\, \sigma + f = 0 \tag{1.4}$$

Elles sont alors linéaires par rapport aux composantes σ_{lm} du tenseur des contraintes. Cette situation s'applique également lorsque le champ de vitesse u varie trés lentement par rapport au temps dans le cas où les deux termes $\rho\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\rho u.\nabla u$ sont négligeables (processus quasi-statique).

3. **L'hypothèse d'incomprèssibilité du volume pour les milieux fluides :**
Un fluide est dit incompréssible lorsque son volume demeure constant sous l'action d'une pression externe. L'hypothèse d'incompréssibilité trés réaliste physiquement, se traduit par

$$Tr D(u) = 0$$

où $D(u)$ est le tenseur des taux de déformation, de composantes

$$D_{lm}(u) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l}), 1 \leq l, m \leq 2. \tag{1.5}$$

Le milieu est dit homogène, si sa densité est indépendante de x. Donc l'équation de conservation de la masse se réduit à

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

ρ constante indépendante de x et t. Il est même possible de poser $\rho = 1$, ce qui est fait dans la suite, et revient simplement à choisir l'unité de densité de la masse.

Dans le cas du milieu non-isotherme, l'é quation de conservation de l'énergie du premier principe de la thermodynamique. Cependant, nous considérerons toujours que la température milieu sera constante dans tous les problèmes posés dans ce mémoire.

D'un point de vue mathématique, nous disposons trop d'inconnues par rapport au nombre d'équations. Il est facile de voir que les fonctions inconnues sont au nombre de cinq, représentées par les composantes σ_{lm} $(l, m = 1, 2)$ du tenseur des contraintes (symétrique) et les composantes u_l $(l = 1, 2)$ de la vitesse. Donc les équations précédentes sont insuffisantes pour décrire les mouvements des milieux continus, elles doivent être complétées par d'autres relations que l'on appelle lois de comportement, qui sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement de ces lois. Nous présentons ci-dessous la loi de comportement visco-plastique du fluide de Bingham traitée dans ce mémoire.

1.1.2 Loi de comportement du fluide de Bingham

Les lois de comportement caractérisent le comportement de chaque type de milieu continu. Bien quelles doivent respecter certaines propriétés d'invariance, leur origine est souvent expérimentale et c' est toute une série d'essais physiques qu'il faut réaliser pour obtenir une loi de comportement. On présente ici une description de la loi de comportement visco-plastique du fluide de Bingham traité dans ce mémoire en suivant [21], [22] et [32]. Le modèle de Bingham est caractérisé par la propriété suivante : le matériau commence à s'écouler seulement si les forces appliquées dépassent une certaine limite, dit seuil de plasticité . Pour décrire ce modèle, on a besoin de certaines notations.

Soient u le champ des vitesses et D le tenseur taux de déformation défini par :

$$D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^t u). \tag{1.6}$$

On considére aussi son déviateur

$$\tilde{D} = D - \frac{1}{n} tr(D)\delta, \tag{1.7}$$

où $tr(D)$ représente la trace de D et δ le tenseur identique. On note par σ le tenseur des contraintes de Cauchy et son déviateur

$$\tilde{\sigma} = \sigma + p\delta. \tag{1.8}$$

Dans l'équation (1.8) le scalaire $-p = \frac{1}{n} tr(\sigma)$ représente la partie sphérique du tenseur des contraintes. On peut identifier p avec la pression. En plus des déviateurs $\tilde{D}$ et $\tilde{\sigma}$, e un autre tenseur S est introduit comme étant la partie des contraintes qui correspond aux propriétés plastiques du matériau. Pour décrire un tel processus, on utilise une collection de fonctions réguliéres $t \mapsto (\tilde{D}(t), \tilde{\sigma}(t), S(t))$ pour $t \in [0, T]$ où $T > 0$ est la durée du processus. Le modèle rigide viscoplastique de Bingham supposé que

$$\tilde{\sigma} = S + 2\mu\tilde{D}, \tag{1.9}$$

$$f(S) = |S|^2 - g^2 \leq 0, \tag{1.10}$$

$$\tilde{D} = \lambda 2S, \tag{1.11}$$

où μ est le coefficient de viscosité ,$\frac{g}{\sqrt{2}}$ est le seuil de plasticité pour le cisaillement pur et λ est une fonction telle que

$$\begin{cases} \lambda(t) = 0 \quad si \quad f(S) < 0 \quad ou \quad f(S) = 0 \quad et \quad f'(S) < 0, \\ \lambda(t) > 0 \quad si \quad f(S) = 0 \quad et \quad f'(S) = 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

Dans (1.12), $f'(S)$ désigne la dérivée par rapport au temps de la fonction $t \longmapsto f(S(t))$ et (1.10) est la condition de Von Mises (1883-1953). En tenant compte de (1.10), l'invariant $S_{II} = \frac{1}{2}|S|^2$ ne doit pas dépasser la carré du seuil de plasticité pour le cisaillement pur $\frac{g}{\sqrt{2}}$.

D'après (1.11) et (1.12), il vient que le déviateur du tenseur taux de déformation peut varier seulemet si S reste sur la surface $f(S) = 0$, en se déplaçant le long de cette dernière. Pour tout autre processus, $\tilde{D}$ est nul. C'est la raison pour laquelle $|S| = g$ est appelé condition d'écoulement.

Dans le modèle de Bingham, on suppose toujours l'incompressibilité du volume, c'est-à-dire

$$tr(D) = 0,$$

pour n'importe quel processus de n'importe quelle durée $T > 0$.

Le modèle de Bingham peut être considéré en utilisant seulement les tenseurs D et $\tilde{\sigma}$, En effet , de (1.9) et (1.11) , on a

$$\tilde{\sigma} = (1 + 4\mu\lambda)S. \tag{1.13}$$

$$|\tilde{\sigma}| = (1 + 4\mu\lambda)|S|. \tag{1.14}$$

Si $|\tilde{\sigma}| > g$, alors de (1.10) et (1.14) on déduit que $\lambda > 0$ et de (1.12) on a $|S| = g > 0$.

L'équation (1.14) entraîne que

$$\lambda = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{|\tilde{\sigma}|}{g} - 1\right)$$

De (1.11) et (1.13), on a

$$\tilde{D} = \frac{2\lambda}{1 + 4\mu\lambda}\tilde{\sigma} = \frac{1}{2\mu}\left(1 - \frac{g}{|\tilde{\sigma}|}\right)\tilde{\sigma}.$$

Comme $tr(D) = 0$, on aura d'après (1.7) que $\tilde{D} = D$. Par conséquent

$$D = \frac{1}{2\mu}\left(1 - \frac{g}{|\tilde{\sigma}|}\right)\tilde{\sigma}.$$

Supposons maintenant que $|\tilde{\sigma}| \leq g$. Alors si $|S| = g$, de (1.14) on obtient $\lambda = 0$, et si $|S| < g$, de (1.12) on aura aussi $\lambda = 0$. D'où finalement $D = 0$. Ainsi, on obtient la loi de comportement du fluide de Bingham suivante :

$$D = \begin{cases} \frac{1}{2\mu}(1 - \frac{g}{|\tilde{\sigma}|})\tilde{\sigma} & si \quad |\tilde{\sigma}| > g. \\ \quad 0 & si \quad |\tilde{\sigma}| \leq g. \end{cases} \tag{1.15}$$

On peut aussi inverser l'équation constitutive (1.15). Si $|D| = 0$, d'après (1.15), on a $|\tilde{\sigma}| \leq g$ et si $|D| \neq 0$, on a $|\tilde{\sigma}| > g$.

Par ailleurs, on sait que $|\tilde{\sigma}| = 2\mu|D| + g$, donc si on combine cette formule avec (3) l'équation constitutive (1.15) s'écrit :

$$\begin{cases} \tilde{\sigma} = 2\mu D + g\frac{D}{|D|} & \text{Si } |D| \neq 0, \\ |\tilde{\sigma}| \leq g & \text{Si } |D| = 0. \end{cases} \tag{1.16}$$

Il facile de voir que les deux lois constitutives (1.15) et (1.16) sont équivalentes. Par conséquent, on considère (1.16) comme étant la loi de comportement du fluide de Bingham. Par ailleurs, les expériences physiques ont montré que les coefficients qui caractérisent le modèle mécanique de Bingham, autrement dit la viscosité μ et le seuil de plasticité g, dépendent de la température, ce qui explique le comportement thermique de fluide de Bingham.

Remarque 1.1.1. *Si dans la loi de comportement* (1.16)*, on prend* $g = 0$ *, on obtient la loi de comportement d'un fluide visqueux incompressible Newtonien. Par conséquent, pour* g *suffisamment petit, le fluide de Bingham peut être considérer comme un modèle voisin des fluides visqueux Newtoniens. Si* g *est strictement positif, on obtient la loi de comportement du fluide de Bingham, on observe des zones rigides au sein de l'écoulement. Quand* g *croit, ces zones rigides augmentent et peuvent bloquer complètement l'écoulement. Cette propriété s'appelle propriété de blocage. Le fluide de Bingham posséde la particularité supplémentaire, mise en évidence par la loi de comportement* (1.16) *: tant que le seuil* g *n'est pas atteint, le fluide se déforme comme un milieu rigide sans couler. On explique physiquement ce phénomène par le fait que ces fluides sont pour la plupart des suspensions de particules quasi-sphériques dans un solvant. Quand les particules sont faiblement concentrée, le seul effet de leur présence est d'augmenter la viscosité proportionnellement à la concentration des particules. Si on augmente toujours la concentration, les particules finissent par se toucher.*

Le solvants n'occupe plus que les interstices. Le liquide devient pâteux à cause des forces entre les particules en contact. Pour provoquer son écoulement, il faut vaincre toutes ces forces, ce qui permet d'expliquer l'existence du seuil g.

Un tel comportement s'observe dans le cas de certaines huiles ou de certaines boues, utilisé es dans la technique des forages pétroliers ainsi que dans certaines peintures. On l'utilise aussi pour décrire l'écoulement à haute température de certains corps solides, par exemple le processus de moulage de métaux. Pour plus d'exemples, on revoit aux ouvrages [3], [16], [19] et [34].

1.1.3 Condition aux limites de contact

Nous présenterons les différentes conditions aux limites utilisées pour la fermeture du probléme que nous utilisons par la suite dans ce mémoire. Supposons dans cette section que le milieu occupe un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$ donné par

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < h(x)\},$$

de frontière régulière notée $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, où Γ_1 est la frontière inférieure d'équation $y = 0$, Γ_2 est la frontière supérieure d'équation $y = h(x)$. On suppose que

$h :]0, 1[\to \mathbb{R}^*_+$, est une fonction de classe C^1.

— Γ, la surface où on a des conditions imposées en vitesse (condition de Dirichlet) :

$$u = 0.$$

Contact bilatéral entre deux domaines. Supposons dans ce paragraphe que le milieu occupant deux Ω_1 *et* Ω_2 de $\mathbb{R}^2$ où les deux domaines sont en contact bilatéral,i.e. il n'y a pas de séparation entre deux corps pendant le processus, il s'git d'un contact bilatéral.En posant $\Omega_1 =]0, 1[\times]0, h_1(x)[$ *et* $\Omega_2 =]0, 1[\times]h_1(x), h_2(x)[$, où $h_i :]0, 1[\to \mathbb{R}^*_+$, est une fonction de classe $C^1, i = 1, 2$.

Les frontiéres des Ω_1, Ω_2 seront notées $\partial\Omega_1 = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ *et* $\partial\Omega_2 = \Gamma_0 \cup \Gamma_2$ respectivement.Γ_0 est la surface bilatérale définie par $y = h_1(x)$.Γ_1 est la surface inférieure définie par $y = 0$ et Γ_2 est la surface supérieure définie par $y = h_2(x)$. On note par $\mathbf{n}$ le vecteur normal extérieur unitaire sur la frontiére Γ_0 orientée vers l'extérieur de Ω_1 et vers l'intérieur de Ω_2.

— Sur la surface inférieur et supérieure ,nous supposons

$$u_i = 0 \quad sur \quad \Gamma_i, i = 1, 2.$$

— Sur la frontière bilatérale entre deux domaines,nous supposons

$$u_1 - u_2 = 0 \quad sur \quad \Gamma_0,$$

$$\sigma_1 n - \sigma_2 n = 0 \quad sur \quad \Gamma_0,$$

autremennt dit continuité des vitesses et continuité des contraintes .

1.2 Outils mathématiques

Dans cette section, nous introduisons des rappels sur les résultats classiques de l'analyse fonctionnelle non linéaire, on y présente ici quelques résultats fondamentaux concernant les fonctions convexes, les inéquations variationnelles elliptiques. Pour finir, nous rappelons les notions de bases ainsi que quelques résultats sur les espaces de Sobolev.

1.2.1 Elément d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

Nous rappelons quelques résultats concernant les inéquations variationnelles elliptiques qui interviennent dans l'étude des problémes mécaniques.Nous donnons aussi quelques théorèmes de convergence faible dans un espace de Hilbert.Nous commençons par rappel sur les fonctions convexes,les fonctions semi-continues inférieurement et la différentiabilité , voir pour plus détails [10] et [18].

Fonctions convexes et différentiabilité

Etant donné un espace vectoriel réel X, soit $\Phi : X \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonction .On note par $dom(\Phi)$ l'ensemble défini par :

$$dom(\Phi) = \{u \in \mathbf{X} \quad : \quad \Phi(x) < +\infty\},$$

Φ est dite propre si $dom(\Phi) \neq \varnothing$. Φ est dit convexe si

$$\Phi(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda\Phi(u) + (1-\lambda)\Phi(v) \qquad \forall u, v \in dom(\Phi), \forall\lambda \in [0,1],$$

La fonction Φ est dite strictement convexe si cette dernière inégalité est stricte pour tout u,$v \in dom(\Phi)$ et tels que $u = v$.

Soit X un espace topologique, une fonction $\Phi : X \to \bar{\mathbb{R}}$ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) si l'ensemble $\{u \in X : \Phi(u) < \alpha\}$ est fermé pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Si une fonction Φ est s.c.i en u et si (u_n) est une suite qui converge vers u on a $\lim_{n\to\infty} inf \quad \Phi(u_n) \geq \Phi(u)$. La norme d'un espace normé est semi-continue inférieurement pour la topologie faible . On a donc , pour tout $u \in X : (u_n) \to u$ on a

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} inf \|u_n\| \geqslant \|u\| .$$

Théorème 1.2.1. *soit X un espace de Hilbert et soit $\Phi : X \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonction convexe et propre . Alors Φ est semi-continue inférieurement si et seulement si elle est semi-continue inférieurement pour la topologie faible de X .*

Proposition 1.2.1. *Soit X un epace topologique et soient $\Phi, \psi : X \to]-\infty, +\infty[$ deux fonctions semi-continue inférieurement en $u \in X$. Alors $\Phi + \psi$ est semi-continue inférieurement en u.*

Une fonction $\Phi : X \to \bar{\mathbb{R}}$ est dite Gâteaux-différentiable en un point $u \in X$ s'il existe un élément $\nabla\Phi(u) \in X$ tel que

$$\langle \Phi'(u), v \rangle_X = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\Phi(u + \lambda v) \mid_{\lambda=0} = \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \lambda^{-1} \left(\Phi(u + \lambda v) - \Phi(u)\right) \qquad , \forall v \in X.$$

L'élément $\Phi'(u)$ est appelé la différentielle au sens de Gâteaux de Φ au point u.
La fonction Φ est dite Gâteaux-différentiable si elle Gâteaux-différentiable en tout point de X, dans ce cas l'opérateur $u \to \nabla\Phi : u \in X \to \Phi'(u) \in X$ s'appelle le gradient de la fonction Φ.

Nous donnons une caractérisation de la convexité en termes de différentielle au sens de Gâteaux de la façon suivante .

Proposition 1.2.2. *Soit X un espace de Hilbert et soit $\Phi : X \to \mathbb{R}$ une fonction Gâteaux-différentiable. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) Φ *est convexe ,*

(ii) $\Phi(v) - \Phi(u) \geq \langle \Phi'(u), v - u \rangle_X \qquad \forall u, v \in X.$

(iii) $\langle \Phi'(v) - \Phi'(u), v - u \rangle_X \geqslant 0 \qquad \forall u, v \in X.$

Convergence faible dans les espaces de Hilbert.

Une suite $(f_n) \subset X$ converge faiblement dans X vers un élément $f \in X$, et on note $f_n \to f$, si pour tout $v \in X$, le produit scalaire $\langle f_n, v \rangle_X$ converge vers $\langle f, v \rangle_x$ *dans* $\mathbb{R}$. f s'appelle limite faible de la suite (f_n).

Théorème 1.2.2. ***(Théorème de représentation de Riesz-Fréchet).*** *Soit X un espace de Hilbert réel et $\langle f, \upsilon \rangle_x$un produit scalaire de X.Pour tout $\varphi \in X'$, il existe $f \in X$ unique tel que*

$$\langle \varphi, \upsilon \rangle_{X' \times X} = \langle f, \upsilon \rangle_x \quad \forall \upsilon \in X \quad et \quad \|\varphi\|_{X'} = \|f\|_X \,.$$

L'importance de ce théorème est que toute forme linéaire continue sur X peut se représenter à l'aide du produit scalaire. L'application $\varphi \to f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier $X \;\; et \;\; X'$. Donc tout espace de Hilbert est réflexif,on a le théorème suivant :

Théorème 1.2.3. *Soit (f_n) une suite bornée de X,il existe alors un élément $f \in X$ et une sous-suite de f_n telle que $f_\eta \to f$.*

Proposition 1.2.3.

(1) Toute suite faiblement convergente est bornée .

(2) Soient (f_n) une suite qui converge faiblement vers u et (g_n) une suite qui converge fortement vers g.Alors

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \langle f_n, g_n \rangle = \langle f, g \rangle_X \,.$$

(3) Si X et Y sont des espaces de Hilbert réels,et si $u \in L(X, Y)$,alors l'image par u de toute suite dans Y vers $u(x)$.

Le résultat crucial suivant est une conséquence du théorème Riesz-Fréchet et du théorème de Banach-Alaoglu .

Théorème 1.2.4. ***(Théorème de compacité faible de la boule unité fermée des espaces de Hilbert.*** *Si X est un espace de Hilbert , alors toute suite bornée dans X admet une sous-suite faiblement convergente.*

Inéquations variationnelles elliptiques

Nous commençons ce paragraphe par quelques propriétés des formes bilinéaires dans un espace de Hilbert. Donc, on considére un espace de Hilbert X muni du produit scalaire $\langle ., . \rangle_X$ et la norme associée $\|.\|_X$ et X' l'espace dual de X en notant par $\langle ., . \rangle_{X' \times X}$ pour le produit de dualité entre X et X'.

On dit qu'une forme bilinéaire $a : X \times X \to \mathbb{R}$ est :

(i) Continue , s'il existe un réel $C > 0$ tel que

$$a\,(u, \upsilon) \leq C \,\|u\|_X \,\|\upsilon\|_X \,, \quad \forall u, \upsilon \in X$$

(ii) Coercive , s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que
$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2, \quad \forall v \in X$$

Théorème 1.2.5. *(Représentation des formes bilinéaires). Soit $a : X \times X \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire,continue sur $X \times X$. Alors il existe un unique opérateur linéaire borné $A \in L(X; X')$ tel que :*

$$\forall u, v \in X : a(u, v) = \langle Au, v\rangle_{X' \times X}.$$

De plus

$$\|a\|_X = \|A\|_{L(X;X')}.$$

Nous rappelons un théorème d'existence et d'unicité pour les inéquation variationnelles de 2^{eme} espèce qu'on va utiliser dans le deuxiéme chapitre de ce mémoire .

Théorème 1.2.6. *Soit K un convexe fermé non-vide d'un espace de Hilbert X, muni de la norme $\|.\|_X$, $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et coercitive de $K \times K$ dans $\mathbb{R}$, et J une fonctionnelle de K dans $\bar{\mathbb{R}}$ convexe , semi-continue inférieurement et propre , alors pour tout forme linéaire $\mathcal{L}$ définie sur X , il existe un unique u dans X solution de l'inéquation variationnelle :*

$$a(u, v-u) + J(v) - J(u) \geq \mathcal{L}(v-u).$$

Opérateurs monotones et inéquations variationnelles

Soient $\mathbf{H}$ un espace de Banach réflexif et séparable, $\mathbf{A} : \mathbf{H} \to \mathbf{H}'$ un opérateur non linéaire , $\varphi : \mathbf{H} \to]-\infty, +\infty[$ une fonction propre et $\mathbf{f} \in \mathbf{H}'$. Un nombre considérable et problèmes aux limites en mécanique des milieux continus ont un lieu avec les problèmes suivants.

Trouver $\mathbf{u} \in \mathbf{H}$ tel que

$$\langle \mathbf{Au}, \mathbf{v} - \mathbf{u}\rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} + \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u}\rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}, \tag{1.17}$$

où $\langle ., .\rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}}$ est le produit de dualité entré $\mathbf{H}'$ et $\mathbf{H}$.

Le probème (1.17) est appelé inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce sur $\mathbf{H}$.

L'opérateur A est dit :

(i) Strictement monotone si

$$\begin{cases} \langle \mathbf{Av} - \mathbf{Au}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} & > 0. \qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}, \\ \langle \mathbf{Av} - \mathbf{Au}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} & = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{u}. \end{cases} \tag{1.18}$$

(ii) coercif si

$$\lim \frac{\langle \mathbf{Au}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}}}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}}} = +\infty \quad si \quad \lim \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}} = +\infty. \tag{1.19}$$

(iii) Hémi-continu si la fonction réel le $t \to \langle \mathbf{A}(\mathbf{u} + tv, \mathbf{v}) \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}}$ est continue pour tout $t \in \mathbb{R}$.

En ce qui concerne le problème (1.17), on a le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 1.2.7. *(Minty(1929-1986)-Browder(1927-2016))* .

Soit $\mathbf{A} : \mathbf{H} \to \mathbf{H}'$ *un opérateur Strictement monotone, borné , hémi-continu et coercif et soit* φ *une fonction convexe et semi-continue inférieurement pour la topologie faible de* $\mathbf{H}$. *Alors l'inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce* (1.17) *admet une solution unique.*

1.2.2 Espaces fonctionnels et opérateurs divergence et déformation

Nous commençons par un rappel d'analyse fonctionnelle concerant l'espace des distributions , les espaces $L^2(\Omega)$ et les notions principales de la convergence faible. Ensuite , nous présentons également les espaces de Sobolev et les principales propriétés notamment les théorèmes de trace .[1], [15], [16], [22], [23], [10] et [25].

Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

Nous allons introduire dans ce paragraphe un résumé d'analyse fonctionnelle, et quelques résultats qui interviennent dans l'étude de problème de ce mémoire .

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. On désigne par $C_0^\infty(\Omega)$ (ou $D(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω.

On munit C_0^∞ de la $\ll$ *pseudo* $-$ *topologie* $\gg$, c'est-à-dire qu'on définit une notion de convergence dans $C_0^\infty(\Omega)$.

L'espaces des distributions $D'(\Omega)$ est le $\ll$ *dual* $\gg$ de $D(\Omega)$, c'est-à-dire l'espace de formes linéaires continues sur $D(\Omega)$ .On note $\langle T, \Phi \rangle = T(\Phi)$ le produit de dualité entre une distribution $T \in D'(\Omega)$ et une fonction $\Phi \in D(\Omega)$: ce produit de dualité généralise l'intégrale usuelle $\int_{\Omega} T.\Phi \ dx$. En effet, on vérifie que si f est une fonction localement intégrable dans Ω, alors on peut définir une distribution T_f par :

$$\langle T_f, \Phi \rangle = \int_{\Omega} f.\Phi \ dx.$$

On peut aussi munir $D'(\Omega)$ d'une notion de convergence : on dit qu'une suite $T_n \in D'(\Omega)$ **Converge au sens des distributions** vers $T \in D'(\Omega)$ si, pour tout $\Phi \in D(\Omega)$,

$$\lim_{n \to +\infty} \langle T, \Phi_n \rangle = \langle T, \Phi \rangle .$$

Définissons maintenant la **dérivation au sens des distributions :** si $T \in D'(\Omega)$, la dérivée $\frac{\partial T}{\partial x_i} \in D'(\Omega)$ est définie par :

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \Phi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right\rangle, \forall \Phi \in D(\Omega). \tag{1.20}$$

Pour $1 \leq p < \infty$. on note $L^p(\Omega)$ l'espace de Lebesgue défini par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \ \ mesurable; \int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

et pour $p = \infty$, on note

$$L^{\infty}(\Omega) = \{ u : \Omega \to \mathbb{R} \ \ mesurable; \sup ess_{x \in \Omega} |u(x)| < +\infty \},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} ess \, |u(x)| = \inf \{ M > 0 \qquad |u(x)| \leq M \qquad p.p, x \in \Omega. \}$$

Pour tout $1 \leq q \leq \infty$ on notera q l'exposant conjugué de p défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec la convention $\frac{1}{\infty} = 0$. Pour tout $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q_(\Omega)$, on a $uv \in L^1(\Omega)$ et
$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} . \|v\|_{L^q(\Omega)}$ **(l'inégalité de Hölder).**

Théorème 1.2.8. ***(Théorème de la convergence dominée de Lebesgue (1875-1941)).*** *Soit (u_n) une suite de fonctions mesurable .On suppose que*

(i) $u_n(x) \to u(x)$ $p.p.x \in \Omega$,

(ii) il existe une fonction $v \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque n,

$$|u_n(x)| \geq \upsilon(x) p.p.x \in \Omega; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Alors } u \in L^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} \to 0.$$

Remarque 1.2.1. *Il résulte de l'inégalité de Hölder que si (u_n) une suite telle que $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$, et (υ_n) une suite telle que $\upsilon_n \to \upsilon$ dans $L^q(\Omega)$ .On obtient que la suite $(u_n \upsilon_n) \subset L^1(\Omega)$converge vers $u\upsilon$ dans $L^1(\Omega)$, ce qui implique*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_\Omega u_n \upsilon_n \; dx = \int_\Omega u\upsilon \; dx.$$

Le résultat suivant, qui est presque l'inverse du théorème de convergence dominée de Lebesgue, il est d'une certaine importance dans l'étude des équations non linéaires, il établit une certaine relation entre la convergence dans le sens de la norme de $L^1(\Omega)$ et la convergence presque partout sur Ω.

Théorème 1.2.9. *Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions intégrables telle que $u_n \to u$ dans $L^1(\Omega)$. Alors, il existe une sous suite $(u_{n_k})_k$ et $\upsilon \in L^1(\Omega)$ telle que*

$$u_n \to \upsilon \; p.p \; \text{ dans } \; \Omega \; \text{ et } \; |u_{n_k}| \leq \upsilon \; \text{ p.p dans } \Omega.$$

Définition 1.2.1. *Soit E un espace de Banach . Une suite $(u_n) \subset E$ converge faiblement dans E vers élément $u \in E$, et on note $u_n \to u$, si*

$$\langle f, u_n \rangle \to \langle f, u \rangle, \forall f \in E' \text{ est dual de } E \; .$$

Théorème 1.2.10. ***(de Bolzano (1781-1848) et Weierstrass (1815-1897)).***
Soit E un espace de Banach réflexif, et soit (x_n) une suite bornée dans E. Alors il existe une sous suite extraire (x_{n_k}) qui converge faiblement dans E.

Proposition 1.2.4. *Soit E un espace de Banach , et une suite $(u_n) \subset E$. Alors*

(1) $u_n \to u$ implique $u_n \rightharpoonup u$.

(2) Si $u_n \to u$, alors (u_n) est bornée et $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \|u_n\| \geq \|u\|$.

(3) Si $u_n \rightharpoonup u$ dans E et $f_n \to f$ dans E, alors il suit que $\langle f_n, u_n \rangle \to \langle f, u \rangle$.

(4) Si $u_n \to u$ dans E' et $f_n \rightharpoonup$ dans E, alors il suit que $\langle f_n, u_n \rangle \to \langle f, u \rangle$.

Définition 1.2.2. *Soit E un espace de banach . Une suite $(f_n) \subset E'$ converge faiblement étoile vers un élément $u \in E'$, et on note $f_n \rightharpoonup^* f$, si*

$$\langle f_n, u \rangle \to \langle f, u \rangle, \forall u \in E$$

Théorème 1.2.11. ***(d'Aloaglu)***

Soit E un espace de Banach séparable , et soit (f_n) une suite bornée dans E' le dual de E. Alors il existe une sous -suite extraire $(f_{n_k)}$ qui converge faiblement dans E'.

Proposition 1.2.5. *Soit E un espace de Banach , et soit (f_n) une suite dans E' le dual d'espace E.*

(1) $f_n \to f$ implique $f_n \rightharpoonup^* f$.

(2) Si $f_n \rightharpoonup^* f$, alors (f_n) est bornée et $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \|f_n\| \geq \|f\|$.

(3) Si $u_n \to u$ dans E et $f_n \rightharpoonup^* f$ dans E', alors il suit que $\langle f_n, u_n \rangle \to \langle f, u \rangle$.

(4) Si $f_n \rightharpoonup f$ dans E' implique $f_n \rightharpoonup^* f$.

(5) Si E est réflexif , alors $f_n \rightharpoonup^* f$ est équivalente à $f_n \rightharpoonup f$ dans E'.

Théorème 1.2.12. ***(Théorème de représentation de Riesz - Fréchet).***

Soit H un espace de Hilbert réel et $(.,.)_H$ un produit scalaire de H.Pour toute $\varphi \in H'$, il existe $f \in H$ unique tel que :

$$\langle \varphi, \upsilon \rangle_{H' \times H} = (f, \upsilon)_H \quad \forall \upsilon \in H \quad et \quad \|\varphi\|_{H'} = \|f\|_H .$$

Nous dirons qu'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans H converge faiblement vers $(f \in H)$ si pour tout $\upsilon \in H$,les produits scalaires (f_n, υ) convergent vers (f, υ) dans $\mathbb{R}$.Nous noterons cette convergence par le symbole $\rightharpoonup$ pour la distinguer de la convergence forte (c'est-à-dire pour la norme hilbertienne) :

$$\begin{aligned} f_n &\to f \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \|f_n - f\| = 0. \\ f_n &\rightharpoonup f \Leftrightarrow \forall \upsilon \in H, \ \lim_{n \to \infty} (f_n, \upsilon) = (f, \upsilon). \end{aligned}$$

Proposition 1.2.6.

(1) Une suite dans H qui converge fortement vers $f \in H$ converge aussi faiblement vers f.

(2) La propriété $\ll$ toute suite dans H qui converge faiblement vers $f \in H$ qui convege faiblement vers $f \in H$ converge fortement vers f $\gg$ est vraie si et seulementsi la dimension de H est finie .

(3) Toute suite faiblement convergente est bornée .

(4) Si E et F sont des espaces de Hilbert réels, et si $u \in L(E, F)$, alors l'image par u de toute suite dans E faiblement convergente vers un élément $x \in E$ est faiblement convergente dans F vers $u(x)$.

Le résultat crucial suivant est une conséquence du théorème de Riesz-Fréchet et du théorème (1.2.11) de Banach-Alaoglu.

Théorème 1.2.13. ***(Théorème de compacité faible de la boule unité fermée des espaces de Hilbert).***

Si H est un espace de Hilbert , alors toute suite bornée dans H admet une sous-suite faiblement convergente .

Rappels sur les espaces de Sobolev

Nous définissons les espaces de Sobolev qui sont les espaces de fonctions permettant de résoudre les formulation variationnelles d'equations aux dérivées partielles.Par la suite,Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^3$. Pour $p = 2, L^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables de carré sommable dans Ω.Muni du produit scalaire

$$(u, \upsilon)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\upsilon(x)dx,$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.On note

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

la norme correspondante.

Définition 1.2.3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$.L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$est défini par :*

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \;\; \textit{tel que} \;\; \forall i \in \{1, ..., d\} \; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\right\}, \tag{1.21}$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est dérivée partielle de u est la dérivée de u au sens des distributions (1.20)

Proposition 1.2.7. *L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire*

$$(u, \upsilon)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega (u(x)\upsilon(x) + \bigtriangledown u(x). \bigtriangledown \upsilon(x))dx$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|u(x)|^2 + |\bigtriangledown u(x)|^2)dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.22}$$

l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Voici l'inégalité très utile portant sur les normes de Sobolev.

Proposition 1.2.8. ***(Inégalité de Poincaré .)***

Soit Ω un ouvert de borné de $\mathbb{R}^d$, Alors il existe une constante C telle que pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\bigtriangledown u\|_{L^2(\Omega)}.$$

En particulier , $\|\bigtriangledown u\|_{L^2(\Omega)}$ *. est une norme équivalente à celle de* $H_0^1(\Omega)$ *(* $H_0^1(\Omega)$ *désigne le sous espace vectoriel des fonctions de* $H^1(\Omega)$ *nulles sur* Γ *).*

Traces des fonctions $H^1(\Omega)$

On peut mentionner le résultat suivant sur les traces des fonctions $H^1(\Omega)$.

Théorème 1.2.14. *Soit* Ω *un ouvert régulier de* $\mathbb{R}^d$ *.Alors il existe un opérateur trace , tel que :*

$$\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma) \ \ est \ \ compact.$$

On définit l'espace vectoriel $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *comme suit :*

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \{\gamma(u); u \in H^1(\Omega)\}$$

que l'on munit de la norme

$$\|f\|_{\frac{1}{2},\Gamma} = inf \left\{ \|u\|_{1,\Omega} ; \gamma(u) = f \right\}.$$

Les premières propriétés les plus remarquables et utiles à notre exposé sont les suivantes :

(1) Si $u \in H^1(\Omega$*, alors* $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *est linéaire surjectif et*
$$\|\gamma(u)\|_{\frac{1}{2},\Gamma} \leq C \|u\|_{1,\Omega} \forall u \in H^1(\Omega).$$
(2) Comme Ω *est régulier, toute fonction* $u \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$*est la trace d'une fonction* $\tilde{u} \in H_0^1(G)$*, i.e.* $\tilde{u}_{\partial\Omega} = u$*, où* G *est un ouvert de* $\mathbb{R}^d$ *contenant* $\bar{\Omega}$*.*

Sur les questiones concernant les espaces traces , voir par exemple J.L. Lions et E.Magenes .

Le théorème de trace permet de généraliser aux fonctions de $H^1(\Omega)$ la formule de Green établie pour des fonctions de classe C^1.

Dualité

Rappelons que le dual V' d'un espace de Hilbert V est l'ensemble des formes linéaires continues sur V .Par application du Théorème (1.2.12) de représentation de Riez,le dual de $L^2(\Omega)$ est identifié à $L^2(\Omega)$ lui-même .On peut aussi définir le dual d'un espace de Sobolev . En l'occurrence le dual de $H_0^1(\Omega)$ joue un rèle particulier dans la suit .

Définition 1.2.4. ***(Le dual de l'espace de Sobolev).*** *Le dual de l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$. On note $\langle L, \Phi\rangle_{H^{-1},H_0^1(\Omega)} = L(\Phi)$ le produit de dualité entre $H_0^1(\Omega)$ et son dual pour tout forme linéaire continue $L \in H^{-1}(\Omega)$ et toute fonction $\Phi \in H_0^1(\Omega)$.*

Proposition 1.2.9. ***(propriétés de l'esspaces** $H^{-1}(\Omega)$**)***

(1) L'espace $H^{-1}(\Omega)$ est caractérisé par

$$H^{-1}(\Omega) = \left\{ f = \upsilon_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_i} \quad \text{avec} \quad \upsilon_0, \upsilon_1, ..., \upsilon_d \in L^2(\Omega) \right\}.$$

(2) H^{-1} est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme :

$$\|L\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|\Phi\|_{H_0^1(\Omega)\leq 1}} \left| \langle L, \Phi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \right|.$$

Remarque 1.2.2. *Pour tout Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, ona*

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \equiv (L^2(\Omega))' \subset H^{-1}(\Omega).$$

Opérateurs divergence et déformation

Nous désignons $\mathbb{S}_n$ l'espace des tenseurs d'ordre deux sur $\mathbb{R}^n (n = 2, 3)$, et par "." et $|.|$ représentent respectivement, le produit scalaire et la norme Euclidienne induite sur $\mathbb{R}^n$ et S_n.

Ainsi,

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i \upsilon_i, \quad |\mathbf{u}| = (\mathbf{u}.\mathbf{u})^{\frac{1}{2}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\sigma.\tau = \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij}\tau_{ij}, \quad |\sigma| = (\sigma.\sigma)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}_n.$$

On utilise les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}^2(\Omega)_s^{n\times n} &= \{\sigma = (\sigma_{ij})/\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in \mathbf{L}^2(\Omega)/i, j = \overline{1, n}\}, \\
\mathbf{H}^1(\Omega)^n &= \{\mathbf{u} = (u_i)/u_i \in \mathbf{H}^1(\Omega)/i = \overline{1, n}\}, = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)^n/D(\mathbf{u}) \in \mathbf{L}^2(\Omega)_s^{n\times n}\}, \\
\mathcal{H}_1 &= \{\sigma \in \mathbf{L}^2(\Omega)_s^{n\times n}/Div(\sigma) \in \mathbf{L}^2(\Omega)^n\},
\end{aligned}$$

où $D : \mathbf{H}^1(\Omega)^n \longrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)_s^{n\times n}$ et $Div : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)^n$ sont les opérateurs de déformation et de divergence définis par

$$D(\mathbf{u}) = (D_{ij}(\mathbf{u})) : D_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{et} \quad Div(\sigma) = (\sigma_{ij,j}). \tag{1.23}$$

Comme la frontière $\mathbf{\Gamma}$ est Lipschitzienne, le vecteur normale sortant ν à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteurs $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)^n$, nous conservons la notation $\mathbf{v}$ pour désigner la trace de $\mathbf{v}$ sur $\mathbf{\Gamma}$ et on note par $\mathbf{v}_\nu$ et $\mathbf{v}_\tau$ les composantes normale et tangentielle de $\mathbf{v}$ sur la frontière, données par les formules :

$$\mathbf{v}_\nu = \mathbf{v}.\nu, \quad \mathbf{v}_\tau = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\nu \nu \tag{1.24}$$

Désignons par γ l'application trace

$$\gamma : \mathbf{H}^1(\Omega)^n \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbf{\Gamma})^n,$$

et faisons introduire les notations

$$\mathbf{H}_\Gamma = \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{\Gamma})^n = \gamma(\mathbf{H}^1(\Omega)^n) \quad et \quad \mathbf{H}'_{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{\Gamma})^n,$$

et par $\langle .,. \rangle_{\mathbf{H}'_\Gamma \times \mathbf{H}_\Gamma}$ le produit de dualité entre $\mathbf{H}'_\Gamma$ et $\mathbf{H}_\Gamma$. Pour tout $\sigma \in \mathcal{H}_1$, il existe un élément noté $\sigma\nu \in \mathbf{H}'_\Gamma$ tel que la formule de Green suivante soit satisfaite

$$\langle \sigma\nu, \gamma\nu \rangle_{\mathbf{H}'_\Gamma \times \mathbf{H}_\Gamma} = \langle \sigma, \mathbf{D}(\mathbf{v}) \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)_s^{n\times n}} + \langle \mathbf{Div}(\sigma), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)^n} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)^n.$$

En outre, si σ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons

$$\langle \sigma\nu, \gamma\nu \rangle_{\mathbf{H}'_\Gamma \times \mathbf{H}_\Gamma} = \int_\Gamma \sigma\nu.\mathbf{v}\mathbf{d}\gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)^n,$$

où $\mathbf{d}\gamma$ représente l'élément de surface. Nous définissons de façon analogue les composantes normale et tangentielle de σ sur la frontière Γ par les formule :

$$\sigma_\nu = \sigma\nu.\nu, \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu\nu. \tag{1.25}$$

Tout au long de ce mémoire, dans les problèmes mécaniques, Γ est partitionnée en deux parties mesurables et disjointes Γ_1 et Γ_2, telles que $mes(\Gamma_1), mes(\Gamma_2) > 0$.

Nous aurons besoin de l'espace des déplacements admissibles

$$V = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)^n : \mathbf{v} = 0 \quad sur \quad \mathbf{\Gamma}\}.$$

L'inégalité de Korn s'applique sur V : il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de Ω et Γ, telle que

$$\|\mathbf{D}(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)_s^{n\times n}} \geq C\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)^n} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)^n. \tag{1.26}$$

Chapitre 2

Problème de transmission gouverné par le fluide de Bingham

Dans ce travail, on a montré l'existence et l'unicité d'une solution faible de ce problème de transmissin. Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Dans la section 1, nous présentons le problème mécanique de transmission en régime permanent pour les deux fluides de Bingham . En outre, nous introduisons quelques notations et le cadre fonctionnel dans lequel nous allon travailler. Dans la section 2, nous obtenons la formulation variationnele du problème. Nous montrons dans la section 3 l'existence et l'unicité d'une solution faible de ce problème de transmission.

2.1 Position du problème

Nous considèrons deux fluides de Bingham rigides, viscoplastique et incompressibles occupant deux domaines bornés Ω_1^ε *et* Ω_2^ε *de* $\mathbb{R}^2$ On note par $\varepsilon\,(0<\varepsilon<1)$ est un petit paramétre qui tend vers zéro ,avec ses frontiéres $\partial\Omega_1^\varepsilon$ *et* $\partial\Omega_2^\varepsilon$ de classe C^1 et sont divisées en trois parties Γ_0^ε, Γ_1^ε et Γ_2^ε , telles que $mes(\Gamma_1^\varepsilon), mes(\Gamma_2^\varepsilon)>0$,données par

$$\partial\Omega_1^\varepsilon=\Gamma_0^\varepsilon\cup\Gamma_1^\varepsilon \quad et \quad \partial\Omega_2^\varepsilon=\Gamma_0^\varepsilon\cup\Gamma_2^\varepsilon,$$

où

— Γ_0^ε est l'interface de contact fluide-fluide définie par $x_2=\varepsilon h_1(x_1)$.

— Γ_1^ε est la surface inférieure définie par $x_2=0$.

— Γ_2^ε est la surface supérieure définie par $x_2=\varepsilon h_2(x_1)$.

Telle que $h_i:]0,1[\longmapsto\mathbb{R}_+^*(i=1,2)$ est une fonction de classe $C^1(]0,1[)$.
On désigne par Ω^ε le domaine $\Omega_1^\varepsilon\cup\Omega_2^\varepsilon$ et On suppose que :

$$\Omega_1^\varepsilon=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2, 0<x_1<1 \quad et \quad 0<x_2<\varepsilon h_1(x_1)\}$$

et

$$\Omega_2^\varepsilon=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2, 0<x_1<1 \quad et \quad \varepsilon h_1(x_1)<x_2<\varepsilon h_2(x_1)\}.$$

Les fluides sont soumis à des forces volumiques données de densités $f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon$ respectivement.

On note par S_2 l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^2$, et par "." et $|.|$ respectivement, le produit scalaire et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ et S_2. Ainsi, pour tout $u,v\in\mathbb{R}^2, u.v=u_lv_l, |u|=(u.u)^{\frac{1}{2}}$, et pour tout $\sigma,\tau\in S_2, \sigma.\tau=\sigma_{lm}\tau_{lm}, |\sigma|=(\sigma.\sigma)^{\frac{1}{2}}$. Ici et ci-dessous, les indices l et m sont compris entre 1 et 2 et la convention de sommation sur des indices répétés est adoptée.

On désigne par $\tilde{\sigma}_i^\varepsilon$ le déviateur du tenseur des contraintes $\sigma_i^\varepsilon=((\sigma_i^\varepsilon)_{lm})$, donné par

$$\tilde{\sigma_i^\varepsilon}=((\tilde{\sigma_i^\varepsilon})_{lm}), (\tilde{\sigma_i^\varepsilon})_{lm}=(\sigma_i^\varepsilon)_{lm}-\frac{tr(\sigma_i^\varepsilon)}{2}\delta_{lm}, i=1,2.,$$

Où $\delta=(\delta_{lm})$ est le tenseur identique.

Nous considérons les tenseurs de taux déformations défini pour chaque $u_i^\varepsilon\in H^1(\Omega_i^\varepsilon)^2$ par

$$D(u_i^\varepsilon)=(D_{lm}(u_i^\varepsilon)), D_{lm}(u_i^\varepsilon)=\frac{1}{2}((u_i^\varepsilon)_{l,m}+(u_i^\varepsilon)_{m,l}), i=1,2.$$

On note par $\mathbf{n}$ le vecteur normal extérieur unitaire sur la frontiére Γ_0^ε orientée vers l'extérieur de Ω_1^ε et vers l'intérieur de Ω_2^ε .

Pour chaque champ des vecteurs $\upsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon)$ on écrite aussi υ pour sa trace sur $\partial\Omega_i^\varepsilon$, $i = 1, 2$.

Le probléme de transmission en régime permanent pour les deux fluides de Bingham est donné par le problème mécanique suivante :

Problème (P.2.1). Trouver le champ des vitesses $\mathbf{u_i}^\varepsilon = (u_{i1}^\varepsilon, u_{i2}^\varepsilon) : \Omega_i^\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}^2$, le champ des contraintes $\sigma_i^\varepsilon = (\sigma_{i1}^\varepsilon, \sigma_{i2}^\varepsilon) : \Omega_i^\varepsilon \longrightarrow S_2, i = 1, 2$, tels que

$$Div\sigma_1^\varepsilon + f_1^\varepsilon = 0 \quad dans \quad \Omega_1^\varepsilon, \tag{2.1}$$

$$Div\sigma_2^\varepsilon + f_2^\varepsilon = 0 \quad dans \quad \Omega_2^\varepsilon, \tag{2.2}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \tilde{\sigma_1^\varepsilon} & = 2\mu_1\varepsilon^2 D(u_1^\varepsilon) + g_1\varepsilon \frac{D(u_1^\varepsilon)}{|D(u_1^\varepsilon)|} \quad si|D(u_1^\varepsilon)| \neq 0 \\ \tilde{\sigma_1^\varepsilon} & \leq g_1\varepsilon \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad si|D(u_1^\varepsilon)| = 0 \end{array}\right\} dans \quad \Omega_1^\varepsilon, \tag{2.3}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \tilde{\sigma_2^\varepsilon} & = 2\mu_2\varepsilon^2 D(u_2^\varepsilon) + g_2\varepsilon \frac{D(u_2^\varepsilon)}{|D(u_2^\varepsilon)|} \quad si|D(u_2^\varepsilon)| \neq 0 \\ \tilde{\sigma_2^\varepsilon} & \leq g_2\varepsilon \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad si|D(u_2^\varepsilon)| = 0 \end{array}\right\} dans \quad \Omega_2^\varepsilon, \tag{2.4}$$

$$divu_1^\varepsilon = 0 \quad dans \quad \Omega_1^\varepsilon, \tag{2.5}$$

$$divu_2^\varepsilon = 0 \quad dans \quad \Omega_2^\varepsilon, \tag{2.6}$$

$$u_1^\varepsilon = 0 \quad sur \quad \Gamma_1^\varepsilon, \tag{2.7}$$

$$u_2^\varepsilon = 0 \quad sur \quad \Gamma_2^\varepsilon, \tag{2.8}$$

$$u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon = 0 \quad sur \quad \Gamma_0^\varepsilon, \tag{2.9}$$

$$\sigma_1^\varepsilon.\mathbf{n} - \sigma_2^\varepsilon.\mathbf{n} = 0 \quad sur \quad \Gamma_0^\varepsilon. \tag{2.10}$$

Ici,l'écoulement dans les domaines $\Omega_1^\varepsilon \;\; et \;\; \Omega_2^\varepsilon$ sont respectivement données par (2.1) et (2.2) où les densités sont supposées égales a un pour les deux fluides.les équations (2.3) et (2.4) représentent , respectivement, la loi de comportement des deux fluides de bingham où [1] $\mu_1\varepsilon^2, \mu_2\varepsilon^2 > 0 \;\; et \;\; g_1\varepsilon, g_2\varepsilon > 0$ sont respectivement la viscositè et le seuil de plasticité du fluide de Bingham .(2.5) et (2.6) représentent la condition d'incompressibilité pour deux fluides respectivement .(2.7) et (2.8) représentent la condition sur la vitesse sur les frontières $\Gamma_1^\varepsilon \;\; et \;\; \Gamma_2^\varepsilon$ respectivement.Enfin sur la frontière Γ_0^ε, (2.9) et (2.10) représentent la condition de transmission pour l'interface liquide-liquide .

On introduit le cadre fonctionnel suivant :

$$V\left(\Omega_i^\varepsilon\right) = \{\upsilon_i \in H^1(\Omega_i^\varepsilon)^2 : div\upsilon_i = 0 \quad dans \quad \Omega_i^\varepsilon \quad et \quad \upsilon_i = 0 \quad sur \quad \Gamma_i^\varepsilon\}, i = 1, 2.$$

$$V^\varepsilon = \{(\upsilon_1, \upsilon_2) \in V\left(\Omega_1^\varepsilon\right) \times V\left(\Omega_2^\varepsilon\right) : \upsilon_1 - \upsilon_2 = 0 \quad sur \quad \Gamma_0^\varepsilon\}.$$

$V(\Omega_i^\varepsilon), i = 1,2$ qui est un espace de Hilbert pour la norme induite

$$\|v\|_{V\left(\Omega_i^\varepsilon\right)} = \|v\|_{H^1(\Omega_i^\varepsilon)^2},$$

et V^ε devient un espace de Hilbert pour la norme suivante :

$$\|(v_1, v_2)\|_{V^\varepsilon} = \|v_1\|_{V(\Omega_1^\varepsilon)} + \|v_2\|_{V(\Omega_2^\varepsilon)},$$

où

$$\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} = \left(\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega^\varepsilon)} + \sum_{1 \leq l,m \leq 2} \|\frac{\partial v_m}{\partial x_l}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega^\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On désigne par $\langle ., . \rangle_{V^{\varepsilon'} \times V^\varepsilon}$ le produit de dualité entre $V^{\varepsilon'}$ et V^ε.

Dans toute la suite on désignera par c des constantes positives diverses (probablement différentes) dépendant seulement des données du problème.

2.2 Formulation variationnelle du problème

Nous allons dériver dans cette section une formulation variationnelle du problème mécanique (2.1)-(2.10)

Lemme 2.2.1. *Supposons que* $(f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon) \in V^{\varepsilon'}$.

Soit $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)$ *solution de* (2.1)-(2.10), *alors elle vérifie le problème variationnel suivant :*

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) \text{ dans } V^\varepsilon, \text{telle que} \\ a((u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon), (v_1 - u_1^\varepsilon, v_2 - u_2^\varepsilon)) + J(v_1, v_2) - J(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) \\ \geq \int_{\Omega_1^\varepsilon} f_1^\varepsilon.(v_1 - u_1^\varepsilon) dx_1 dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_2^\varepsilon.(v_2 - u_2^\varepsilon) dx_1 dx_2, \quad \forall (v_1, v_2) \in V^\varepsilon, \end{cases} \tag{2.11}$$

où

$$\begin{aligned} a \quad &: \quad V^\varepsilon \times V^\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}, \ \forall (u_1^\varepsilon, u_1^\varepsilon), (v_1, v_2) \in V^\varepsilon \times V^\varepsilon. \\ a((u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon), (v_1, v_2)) &= 2\mu_1 \varepsilon^2 \int_{\Omega_1^\varepsilon} D(u_1^\varepsilon).D(v_1) dx_1 dx_2 \\ &\quad + 2\mu_2 \varepsilon^2 \int_{\Omega_2^\varepsilon} D(u_2^\varepsilon).D(v_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j \quad &: \quad V^\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}, \\ j(v_1, v_2) &= g_1 \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(v_1)| dx_1 dx_2 \\ &\quad + g_2 \varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(v_2)| dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Démonstration. Supposons que $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)$ solution de (2.1)-(2.10) soit suffisamment régulière. En multipliant l'équation (2.1) par $\upsilon_1 - u_1^\varepsilon$, et l'équation (2.2) par $\upsilon_2 - u_2^\varepsilon$ où $(\upsilon_1, \upsilon_2) \in V^\varepsilon$, et en utilisant la formule de Green sur le domaine $\Omega_i^\varepsilon, i = 1, 2$ on obtient

$$\int_{\Omega_1^\varepsilon} \sigma_1^\varepsilon.D(\upsilon_1-u_1^\varepsilon)dx_1dx_2+\int_{\Omega_2^\varepsilon} \sigma_2^\varepsilon.D(\upsilon_2-u_2^\varepsilon)dx_1dx_2-\int_{\partial\Omega_1^\varepsilon} \sigma_1^\varepsilon n_1.(\upsilon_1-u_1^\varepsilon)ds-\int_{\partial\Omega_2^\varepsilon} \sigma_2^\varepsilon n_2.(\upsilon_2-u_2^\varepsilon)ds$$

$$= \int_{\Omega_1^\varepsilon} f_1^\varepsilon.(\upsilon_1 - u_1^\varepsilon)dx_1dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_2^\varepsilon.(\upsilon_2 - u_2^\varepsilon)dx_1dx_2, \quad \forall (\upsilon_1, \upsilon_2) \in V^\varepsilon. \quad (2.12)$$

En utilisant maintenant la condition aux limites (2.7)-(2.10) ,on trouve

$$\int_{\partial\Omega_1^\varepsilon} \sigma_1^\varepsilon n_1.(\upsilon_1-u_1^\varepsilon)dx_1dx_2+\int_{\partial\Omega_2^\varepsilon} \sigma_2^\varepsilon n_2.(\upsilon_2-u_2^\varepsilon)dx_1dx_2 = \int_{\Gamma_1^\varepsilon} \sigma_1^\varepsilon n_1.(\upsilon_1-u_1^\varepsilon)ds+\int_{\Gamma_0^\varepsilon} \sigma_1^\varepsilon n_1.(\upsilon_1-u_1^\varepsilon)ds$$

$$+\int_{\Gamma_2^\varepsilon} \sigma_2^\varepsilon n_2.(\upsilon_2-u_2^\varepsilon)ds+\int_{\Gamma_0^\varepsilon} \sigma_2^\varepsilon n_2.(\upsilon_2-u_2^\varepsilon)ds = \int_{\Gamma_0^\varepsilon} \sigma_1^\varepsilon \mathbf{n}.(\upsilon_1-u_1^\varepsilon)ds+\int_{\Gamma_0^\varepsilon} \sigma_2^\varepsilon \mathbf{n}.(\upsilon_2-u_2^\varepsilon)ds = 0.$$

Donc (2.12) devient comme suit

$$\int_{\Omega_1^\varepsilon} \sigma_1^\varepsilon.D(\upsilon_1 - u_1^\varepsilon)dx_1dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \sigma_2^\varepsilon.D(\upsilon_2 - u_2^\varepsilon)dx_1dx_2 = \int_{\Omega_1^\varepsilon} f_1^\varepsilon.(\upsilon_1 - u_1^\varepsilon)dx_1dx_2$$

$$+ \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_2^\varepsilon.(\upsilon_2 - u_2^\varepsilon)dx_1dx_2, \quad \forall (\upsilon_1, \upsilon_2) \in V^\varepsilon.$$

Par ailleurs, on aura, en utilisant la définition de $\tilde{\sigma_i^\varepsilon}, i = 1, 2$ et les conditions d'incompressibilité (2.5) et (2.6)

$$\int_{\Omega_1^\varepsilon} \tilde{\sigma_1^\varepsilon}.D(\upsilon_1-u_1^\varepsilon)dx_1dx_2+\int_{\Omega_2^\varepsilon} \tilde{\sigma_2^\varepsilon}.D(\upsilon_2-u_2^\varepsilon)dx_1dx_2 = \int_{\Omega_1^\varepsilon} (\sigma_1^\varepsilon-\frac{tr(\sigma_1^\varepsilon)}{2}\delta).D(\upsilon_1-u_1^\varepsilon)dx_1dx_2$$

$$+\int_{\Omega_2^\varepsilon} (\sigma_2^\varepsilon-\frac{tr(\sigma_2^\varepsilon)}{2}\delta).D(\upsilon_2-u_2^\varepsilon)dx_1dx_2 = \int_{\Omega_1^\varepsilon} \sigma_1^\varepsilon.D(\upsilon_1-u_1^\varepsilon)dx_1dx_2+\int_{\Omega_2^\varepsilon} \sigma_2^\varepsilon.D(\upsilon_2-u_2^\varepsilon)dx_1dx_2.$$

Alors

$$\int_{\Omega_1^\varepsilon} \sigma_1^\varepsilon.D(\upsilon_1 - u_1^\varepsilon)dx_1dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \sigma_2^\varepsilon.D(\upsilon_2 - u_2^\varepsilon)dx_1dx_2$$

$$\leq 2\mu_1\varepsilon^2 \int_{\Omega_1^\varepsilon} D(u_1^\varepsilon).D(\upsilon_1 - u_1^\varepsilon)dx_1dx_2 + 2\mu_2\varepsilon^2 \int_{\Omega_2^\varepsilon} D(u_2^\varepsilon).D(\upsilon_2 - u_2^\varepsilon)dx_1dx_2$$

$$+g_1\varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(\upsilon_1)|dx_1dx_2-g_1\varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(u_1^\varepsilon)|dx_1dx_2+g_2\varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(\upsilon_2)|dx_1dx_2-g_2\varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(u_2^\varepsilon)|dx_1dx_2.$$

Par conséquent

$$a((u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon), (\upsilon_1 - u_1^\varepsilon, \upsilon_2 - u_2^\varepsilon)) + J(\upsilon_1, \upsilon_2) - J(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)$$

$$\geq \int_{\Omega_1^\varepsilon} f_1^\varepsilon.(\upsilon_1 - u_1^\varepsilon)dx_1dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_2^\varepsilon.(\upsilon_2 - u_2^\varepsilon)dx_1dx_2 \quad \forall (\upsilon_1, \upsilon_2) \in V^\varepsilon.$$

La preuve est terminée .□

2.3 Résultats d'existence et d'unicité

Théorème 2.3.1. *Supposons que* $(f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon) \in V^{\varepsilon\prime}$. *Alors il existe un unique* $u^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) \in V^\varepsilon$ *solution du problème variationnel* (2.11).

Démonstration. On peut facilement prouver que a une forme bilinéaire, continue et coercitive sur $V^\varepsilon \times V^\varepsilon$. En effet, soit les éléments $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon), (v_1^\varepsilon, v_2^\varepsilon), (w_1^\varepsilon, w_2^\varepsilon)$ de $V^\varepsilon \times V^\varepsilon$. et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
& a(\alpha (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) + \beta (v_1^\varepsilon, v_2^\varepsilon), (w_1^\varepsilon, w_2^\varepsilon)) \\
= \; & a((\alpha u_1^\varepsilon + \beta v_1^\varepsilon, \alpha u_2^\varepsilon + \beta v_2^\varepsilon), (w_1^\varepsilon, w_2^\varepsilon)) \\
= \; & 2\mu_1 \varepsilon^2 \int_{\Omega_1^\varepsilon} D(\alpha u_1^\varepsilon + \beta v_1^\varepsilon).D(w_1^\varepsilon) dx_1 dx_2 \\
& + 2\mu_2 \varepsilon^2 \int_{\Omega_2^\varepsilon} D(\alpha u_2^\varepsilon + \beta v_2^\varepsilon).D(w_2^\varepsilon) dx_1 dx_2 \\
= \; & \alpha \left(2\mu_1 \varepsilon^2 \int_{\Omega_1^\varepsilon} D(u_1^\varepsilon).D(w_1^\varepsilon) dx_1 dx_2 + 2\mu_2 \varepsilon^2 \int_{\Omega_2^\varepsilon} D(u_2^\varepsilon).D(w_2^\varepsilon) dx_1 dx_2 \right) \\
& + \beta \left(2\mu_1 \varepsilon^2 \int_{\Omega_1^\varepsilon} D(v_1^\varepsilon).D(w_1^\varepsilon) dx_1 dx_2 + 2\mu_2 \varepsilon^2 \int_{\Omega_2^\varepsilon} D(v_2^\varepsilon).D(w_2^\varepsilon) dx_1 dx_2 \right) \\
= \; & \alpha \left(a((u_1^\varepsilon, u_1^\varepsilon), (w_1^\varepsilon, w_2^\varepsilon)\right) + \beta \left(a((v_1^\varepsilon, v_1^\varepsilon), (w_1^\varepsilon, w_2^\varepsilon)\right),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
a((u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon), \alpha (v_1^\varepsilon, v_2^\varepsilon) + \beta (w_1^\varepsilon, w_2^\varepsilon)) &= a((u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon), (\alpha v_1^\varepsilon + \beta w_1^\varepsilon, \alpha v_2^\varepsilon + \beta w_2^\varepsilon)) \\
&= \alpha \left(a((u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon), (v_1^\varepsilon, v_2^\varepsilon)\right) + \beta \left(a((u_1^\varepsilon, u_1^\varepsilon), (w_1^\varepsilon, w_2^\varepsilon)\right).
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que la forme a bilinéaire sur $V^\varepsilon \times V^\varepsilon$.

D'autre part, pour tout,$(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon), (\upsilon_1, \upsilon_2) \in V^\varepsilon \times V^\varepsilon$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned}
|a((u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon), (\upsilon_1, \upsilon_2))| &= \left| 2\mu_1 \varepsilon^2 \int_{\Omega_1^\varepsilon} D(u_1^\varepsilon).D(\upsilon_1) dx_1 dx_2 + 2\mu_2 \varepsilon^2 \int_{\Omega_2^\varepsilon} D(u_2^\varepsilon).D(\upsilon_2) dx_1 dx_2 \right| \\
&\leq 2\mu_1 \varepsilon^2 \left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(u_1^\varepsilon)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(\upsilon_1)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + 2\mu_2 \varepsilon^2 \left(\int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(u_2^\varepsilon)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(\upsilon_2)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2\mu_1 \varepsilon^2 \|u_1^\varepsilon\|_{V(\Omega_1^\varepsilon)} \|\upsilon_1\|_{V(\Omega_1^\varepsilon)} + 2\mu_2 \varepsilon^2 \|u_2^\varepsilon\|_{V(\Omega_2^\varepsilon)} \|\upsilon_2\|_{V(\Omega_2^\varepsilon)} \\
&\leq 2\mu_1 \varepsilon^2 \|(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)\|_{V^\varepsilon} \|(\upsilon_1, \upsilon_2)\|_{V^\varepsilon} + 2\mu_2 \varepsilon^2 \|(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)\|_{V^\varepsilon} \|(\upsilon_1, \upsilon_2)\|_{V^\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\exists C \in \mathbb{R}_+^* : |a((u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon), (v_1, v_2))| \leq C \, \|(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)\|_{V^\varepsilon} \|(v_1, v_2)\|_{V^\varepsilon}$$

Ce qui prouve que la forme bilinéaire a est continue sur $V^\varepsilon \times V^\varepsilon$.

Maintenant, d'après l'inégalité généralisée de Korn, qu' il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\langle A(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon), (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)\rangle_{V^{\varepsilon\prime} \times V^\varepsilon} \geq c(\|u_1^\varepsilon\|^2_{V(\Omega_1^\varepsilon)} + \|u_2^\varepsilon\|^2_{V(\Omega_2^\varepsilon)}), \quad \forall (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) \in V^\varepsilon.$$

Alors
$$\frac{\langle A(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon), (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)\rangle_{V^{\varepsilon\prime} \times V^\varepsilon}}{\|(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)\|_{V^\varepsilon}} \geq c \frac{\|u_1^\varepsilon\|^2_{V(\Omega_1^\varepsilon)} + \|u_2^\varepsilon\|^2_{V(\Omega_2^\varepsilon)}}{\|u_1^\varepsilon\|_{V(\Omega_1^\varepsilon)} + \|u_2^\varepsilon\|_{V(\Omega_2^\varepsilon)}}, \quad \forall \, (u_1^\varepsilon, u_1^\varepsilon) \in V^\varepsilon.$$

Par passage à la limite quand $\|(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)\|_{V^\varepsilon} \longrightarrow +\infty$ nous trouvons

$$\frac{\langle A(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon), (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)\rangle_{V^{\varepsilon\prime} \times V^\varepsilon}}{\|(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)\|_{V^\varepsilon}} \geq c \lim_{r \longmapsto +\infty, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} \frac{r^2 cos^2\theta + r^2 sin^2\theta}{r cos\theta + r sin\theta} = +\infty$$

il s' en suit que la forme bilinéaire a est coercif sur $V^\varepsilon \times V^\varepsilon$.

Par ailleurs, la fonctionnelle

$$\begin{aligned} j : V^\varepsilon &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) &\longmapsto j(v_1, v_2) = g_1 \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(v_1)| dx_1 dx_2 + g_2 \varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(v_2)| dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

est continue et convexe sur V^ε, elle est donc semi-continue inférieurement sur V^ε.

En effet, pour montrer la continuité de j il suffit de considérer une suite $(v_{1n}, v_{2n}) \in V^\varepsilon$ qui converge vers (v_{1n}, v_{2n}) dans V^ε, et utiliser l' inégalité de Couchy(1789–1857)-Schwartz (1843-1921) et la continuité de g_1, g_2 sur V^ε pour obtenir

$$\begin{aligned} |j((v_{1n}, v_{2n})) - j((v_1, v_2))| &\leq \left| \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} g_1 |D(v_{1n})| dx_1 dx_2 - \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} g_1 |D(v_1)| dx_1 dx_2 \right| \\ &\quad + \left| \varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} g_2 |D(v_{2n})| dx_1 dx_2 - \varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} g_2 |D(v_2)| dx_1 dx_2 \right| \\ &\leq g_1 \varepsilon mes(\Omega_1^\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(v_{1n} - v_1)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + g_2 \varepsilon mes(\Omega_2^\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(v_{2n} - v_2)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \left(\|v_{1n} - v_1\|_{V(\Omega_1^\varepsilon)} + \|v_{2n} - v_2\|_{V(\Omega_2^\varepsilon)} \right) \\ &\leq c \, \|v_{1n} - v_1, v_{2n} - v_2\|_{V^\varepsilon}. \end{aligned}$$

De plus, pour la convexité , on a pour toute $(u_1^\varepsilon, u_1^\varepsilon), (\upsilon_1, \upsilon_1) \in V^\varepsilon, t \in [0,1]$

$$j(tu_1^\varepsilon + (1-t)\upsilon_1, tu_2^\varepsilon + (1-t)\upsilon_2) = \int_{\Omega_1^\varepsilon} g_1\varepsilon |D(tu_1^\varepsilon + (1-t)\upsilon_1)| dx_1 dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} g_2\varepsilon |D(tu_2^\varepsilon + (1-t)\upsilon_2)| dx_1 dx_2$$

$$\leq \int_{\Omega_1^\varepsilon} g_1\varepsilon |D(tu_1^\varepsilon)| dx_1 dx_2 + \int_{\Omega_1^\varepsilon} g_1\varepsilon |D((1-t)\upsilon_1)| dx_1 dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} g_2\varepsilon |D(tu_2^\varepsilon)| dx_1 dx_2$$

$$+ \int_{\Omega_2^\varepsilon} g_2\varepsilon |D((1-t)\upsilon_2)| dx_1 dx_2 \leq t \left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} g_1\varepsilon |D(u_1^\varepsilon)| + \int_{\Omega_2^\varepsilon} g_2\varepsilon |D(u_2^\varepsilon)| dx_1 dx_2 \right)$$

$$+ (1-t) \left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} g_1\varepsilon |D(\upsilon_1)| dx_1 dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} g_2\varepsilon |D(\upsilon_2)| dx_1 dx_2 \right) \leq tj(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) + (1-t)j(\upsilon_1, \upsilon_2).$$

Par conséquent le résultat d'existence et d'unicité de la solution faible résulte de théorème de Guido Stampacchia (1922-1978), voir [10].

Chapitre 3

Comportement asymptotique d'un problème de transmission entre deux fluide de Bingham dans une couche mince

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de comportement asymptotique d'un probléme mécanique de transmission entre deux fluides incompréssibles, rigides et visco-plastiques de Bingham dans une couche mince bidimensionnelle en régime stationnaire avec des viscosités différentes ,et les conditions aux limites de transmission naturelles à l'interface de contact. Ce chapitre est organisé de la manière suivante :

Dans la section 1, nous introduisons quelques notations et le cadre fonctionnel dans lequel nous allons travailler. Dans la section 2, nous présentons le problème mécanique et sa formulation variationnelle. Dans la section 3, nous nous intéressons au comportement asymptotique, pour cela nous prouvons quelques résultats de convergence concernant la vitesse et la pression lorsque l' épaisseur tend vers zéro. En outre, l'unicité d'une solution limite a également été établie.

3.1 Introduction et cadre fonctionnel du problème

On note I l'intervalle ouvert $I =]0,1[$. On introduit la fonction $h_i : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ tel que $h_i \in C^1(I), i = 1,2$.

Nous considérons les domaines suivants :

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in I \quad et \quad 0 < y < h_1(x)\right\}, \\
\Omega_1^\varepsilon &= \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \in I \quad et \quad 0 < x_2 < \varepsilon h_1(x_1)\right\}, \\
\Omega_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in I \quad et \quad h_1(x) < y < h_2(x)\right\} \\
\Omega_2^\varepsilon &= \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \in I \quad et \quad \varepsilon h_1(x_1) < x_2 < \varepsilon h_2(x_1)\right\},
\end{aligned}$$

où $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre qui tendra vers zéro. Remarquez que si $(x_1,x_2) \in \Omega_i^\varepsilon$, on a $(x,y) = (x_1, \frac{x_2}{\varepsilon}) \in \Omega_i$.

Cela nous permet de définir, pour chaque fonction $\varphi_i^\varepsilon : \Omega_i^\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}$, la fonction $\widehat{\varphi_i^\varepsilon} : \Omega_i \longrightarrow \mathbb{R}$, donnée par $\widehat{\varphi_i^\varepsilon}(x,y) = \varphi_i^\varepsilon(x_1,x_2), i = 1,2$.

$\widehat{f_i} = (f_{i1}, f_{i2}) \in L^2(\Omega_i)^2$ une fonction donnée. Nous définissons la fonction $f_i^\varepsilon \in L^2(\Omega_i^\varepsilon)^2$ tel que $\widehat{f_i^\varepsilon} = f_i, i = 1,2$.

Pour chaque domaine Ω_i^ε, nous supposons que sa frontiére $\partial\Omega_i^\varepsilon$ est de classe $C^1, i = 1,2,$ et est divisée en trois parties $\Gamma_0^\varepsilon, \Gamma_1^\varepsilon, \Gamma_2^\varepsilon$ mesurables,et $mes(\Gamma_1^\varepsilon), mes(\Gamma_2^\varepsilon) > 0$, données par $\partial\Omega_1^\varepsilon = \Gamma_0^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon$ et $\partial\Omega_2^\varepsilon = \Gamma_0^\varepsilon \cup \Gamma_2^\varepsilon$, où Γ_0^ε est la frontiére latérale définie par $x_2 = \varepsilon h_1(x_1)$. la surface inférieure Γ_1^ε est définie par $x_2 = 0$, la surface supérieure Γ_2^ε est définie par $x_2 = \varepsilon h_2(x_1)$. Nous désignons par Ω^ε le domaine $\Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon$.

On note S_2 l'espace des tenseurs symétriques sur $\mathbb{R}^2$ et par "." et $|.|$ respectivement, le produit scalaire et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ et S_2. Ainsi, pour tout $u, \upsilon \in \mathbb{R}^2, u.\upsilon = u_l \upsilon_l, |u| = (u.u)^{\frac{1}{2}}$, et pour tout $\sigma, \tau \in S_2, \sigma.\tau = \sigma_{lm}\tau_{lm}, |\sigma| = (\sigma.\sigma)^{\frac{1}{2}}$. Ici, les indices l et m sont compris entre 1 et 2 et la convention de sommation sur des indices répétés est adoptée.

On introduit le cadre fonctionnel suivant :

$$H^1_{\Gamma_i^\varepsilon}(\Omega_i^\varepsilon) = \left\{v_i \in H^1(\Omega_i^\varepsilon)^2 : v_i = 0 \quad sur \quad \Gamma_i^\varepsilon\right\}$$

$$H^{1,\varepsilon}_{div}(\Omega_i^\varepsilon) = \left\{v_i \in H^1(\Omega_i^\varepsilon)^2 : div(v_i) = 0 \quad dans \quad \Omega_i^\varepsilon\right\},$$

$$H^1_{div}(\Omega_i) = \left\{v_i \in H^1(\Omega_i)^2 : div(v_i) = 0 \quad dans \quad \Omega_i\right\},$$

$$H_2(\Omega_i) = \left\{\varphi_i \in L^2(\Omega_i) : \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \in L^2(\Omega_i)\right\}, i = 1,2. \tag{3.1}$$

$$H_2 = H_2(\Omega_1) \times H_2(\Omega_2)$$

$$L_0^2(\Omega_i^\varepsilon) = \left\{ \varphi_i^\varepsilon \in L^2(\Omega_i^\varepsilon) : \int_{\Omega_i^\varepsilon} \varphi_i^\varepsilon(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 0 \right\}$$

$$L_0^2(\Omega_i) = \left\{ \varphi_i \in L^2(\Omega_i^\varepsilon) : \int_{\Omega_i} \varphi_i(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 0 \right\}, i = 1, 2$$

$$H_{div}^\varepsilon = \left\{ (v_1, v_2) \in H_{div}^{1,\varepsilon}(\Omega_1^\varepsilon) \times H_{div}^{1,\varepsilon}(\Omega_2^\varepsilon) : v_1 = v_2 \quad sur \quad \Gamma_0^\varepsilon, v_1 = 0 \quad sur \quad \Gamma_1^\varepsilon \quad et \quad , v_2 = 0 \quad sur \quad \Gamma_2^\varepsilon \right\}$$

$$H^\varepsilon = \left\{ (v_1, v_2) \in H_{\Gamma_1^\varepsilon}^1(\Omega_1^\varepsilon) \times H_{\Gamma_2^\varepsilon}^1(\Omega_2^\varepsilon) : v_1 = v_2 \quad sur \quad \Gamma_0^\varepsilon \right\}$$

Tous ces espaces sont des espaces de Hilbert.

On désigne par $\langle ., . \rangle_{H^{\varepsilon'} \times H^\varepsilon}$ le produit de dualité entre $H^{\varepsilon'}$ et H^ε et par $\|.\|_{H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i^\varepsilon)}$ la norme de l'espace $H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i^\varepsilon), i = 1, 2$.

3.2 Le modèle et sa formulation variationnelle

Nous considèrons deux fluides de Bingham rigides , viscoplastiques et incompréssibles qui occupent les domaines $\Omega_1^\varepsilon \;\; et \;\; \Omega_2^\varepsilon$. Les deux fluides son en contact latéral, avec un frottement, le long de la partie commune Γ_0.

On note par $u_i^\varepsilon = (u_{i1}^\varepsilon, u_{i2}^\varepsilon)$ le champ de vitesse, par $\sigma_i^\varepsilon = (\sigma_{i1}^\varepsilon, \sigma_{i2}^\varepsilon)$ les tenseurs des contraintes et par $D(u_i^\varepsilon)$ les tenseurs de déformations linéarisées , $i = 1, 2$.

Nous modélisons les matériaux avec le tenseur de contrainte total de Cauchy

$$\sigma_i^\varepsilon(u_i^\varepsilon) = -p_i^\varepsilon I_2 + \widetilde{\sigma_i^\varepsilon}(u_i^\varepsilon),$$

où $\widetilde{\sigma_i^\varepsilon}$ désigne la partie déviateur, et p_i^ε la pression , i=1,2. Le fluide est supposé être incompréssible, rigide et viscoplastique, et la relation entre $\widetilde{\sigma_i^\varepsilon}$ et $D(u_i^\varepsilon)$ est donnée par le modèle de Bingham :

$$\begin{cases} \widetilde{\sigma_i^\varepsilon} = 2\mu_i \varepsilon^2 D(u_i^\varepsilon) + g_i \varepsilon \dfrac{D(u_i^\varepsilon)}{|D(u_i^\varepsilon)|} & si \quad |D(u_i^\varepsilon)| \neq 0, \\ |\widetilde{\sigma_i^\varepsilon}| \leq g_i \varepsilon & si \quad |D(u_i^\varepsilon)| = 0. \end{cases} \quad i = 1, 2,$$

où $g\varepsilon_i$ est le seuil de plasticité, $\mu_i \varepsilon^2$ est la viscosité ($g_i > 0$ et $\mu_i > 0$ sont des constantes indépendantes de ε), p représente l'indice de loi de puissance, u_i^ε est le champ de vitesse et $D(u_i^\varepsilon) = \frac{1}{2}(\nabla u_i^\varepsilon + (\nabla u_i^\varepsilon)^T), i = 1, 2.$

On note par **n** le vecteur normal extérieur unitaire sur la frontiére Γ_0 orientée vers l'extérieur de Ω_1^ε et vers l'intérieur de Ω_2^ε.

— L'équation de conservation de la quantité de mouvement

$$div(\sigma_i^\varepsilon) + f_i^\varepsilon = 0 \quad dans \quad \Omega_i^\varepsilon, i = 1,2,$$

où le vecteur $f_i^\varepsilon, i = 1,2$ de composantes f_{ij}^ε $(j = 1,2)$, représente une densité massique des forces extérieures.

— L'équation d' incompréssibilité

$$div(u_i^\varepsilon) = 0 \quad dans \quad \Omega_i^\varepsilon, i = 1,2.$$

Nous décrivons les conditions aux limites sur la frontière $\partial\Omega_i^\varepsilon$. Nous supposons que

— Sur la surface inférieure et supérieure, nous supposons

$$u_i^\varepsilon = 0, \text{ sur } \Gamma_i^\varepsilon, \; i = 1,2.$$

— Sur la frontiére bilatérale entre deux domaines,nous supposons

$$u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^\varepsilon.$$

$$\sigma_1^\varepsilon.\mathbf{n} - \sigma_2^\varepsilon.\mathbf{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^\varepsilon.$$

autrement dit continuité des vitesses est continuité des contraintes.

Le problème de transmission en régime stationnaire pour les fluides de Bingham en couche mince est donné par le problème mécanique suivant :

Problème (P.3.1). Trouver le champ des vitesses $u_i^\varepsilon = (u_{i1}^\varepsilon, u_{i2}^\varepsilon) : \Omega_i^\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}^2$., le champ des contraintes $\sigma_i^\varepsilon = (\sigma_{i1}^\varepsilon, \sigma_{i2}^\varepsilon) : \Omega_i^\varepsilon \longrightarrow S_2$ et la pression $p_i^\varepsilon : \Omega^\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}, i = 1,2$, tels que

$$\left.\begin{aligned} div \;\; \sigma_1^\varepsilon + f_1^\varepsilon &= 0 \\ div \;\; u_1^\varepsilon &= 0 \end{aligned}\right\} \quad dans \quad \Omega_1^\varepsilon, \tag{3.2}$$

$$\left.\begin{aligned} div \;\; \sigma_2^\varepsilon + f_2^\varepsilon &= 0 \\ div \;\; u_2^\varepsilon &= 0 \end{aligned}\right\} \quad dans \quad \Omega_2^\varepsilon, \tag{3.3}$$

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{\sigma_1^\varepsilon}(u_1^\varepsilon) = \sigma_1^\varepsilon(u_1^\varepsilon) + p_1^\varepsilon I_2 \\ &\tilde{\sigma_1^\varepsilon} = \mu_1\varepsilon^2 D(u_1^\varepsilon) + g_1\varepsilon\frac{D(u_1^\varepsilon)}{|D(u_1^\varepsilon)|} && si \;\; |D(u_1^\varepsilon)| \neq 0 \\ &\tilde{\sigma_1^\varepsilon} \leq g_1\varepsilon && si \;\; |D(u_1^\varepsilon)| = 0 \end{aligned}\right\} \quad dans \quad \Omega_1^\varepsilon, \tag{3.4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{\sigma_2^\varepsilon}(u_2^\varepsilon) = \sigma_2^\varepsilon(u_2^\varepsilon) + p_2^\varepsilon I_2 \\ &\tilde{\sigma_2^\varepsilon} = \mu_2\varepsilon^2 D(u_2^\varepsilon) + g_2\varepsilon\frac{D(u_2^\varepsilon)}{|D(u_2^\varepsilon)|} && si |D(u_2^\varepsilon)| \neq 0 \\ &\tilde{\sigma_2^\varepsilon} \leq g_2\varepsilon && si \;\; |D(u_2^\varepsilon)| = 0 \end{aligned}\right\} \quad dans \quad \Omega_2^\varepsilon, \tag{3.5}$$

$$u_1^\varepsilon = 0 \quad sur \quad \Gamma_1^\varepsilon \tag{3.6}$$

$$u_2^\varepsilon = 0 \quad sur \quad \Gamma_2^\varepsilon. \tag{3.7}$$

$$u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon = 0 \quad sur \quad \Gamma_0^\varepsilon. \tag{3.8}$$

$$\sigma_1^\varepsilon.\mathbf{n} - \sigma_2^\varepsilon.\mathbf{n} = 0 \quad sur \quad \Gamma_0^\varepsilon. \tag{3.9}$$

Dans toute la suite, on désignera par c des constantes positives diverses (probablement différentes) dépendant seulement des données du problème.

Formulation variationnelle

En multipliant l'equation(3.2) par $\upsilon_1 - u_1^\varepsilon$,et l'équation (3.3) par $\upsilon_2 - u_2^\varepsilon$, et en utilisant la formule de Green sur chaque sous domaine $\Omega_i^\varepsilon, i = 1, 2,$,et par addition , on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1^\varepsilon} \sigma_1^\varepsilon.D(\upsilon_1 - u_1^\varepsilon)dx_1dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \sigma_2^\varepsilon.D(\upsilon_2 - u_2^\varepsilon)dx_1dx_2 \\
&\quad - \int_{\partial\Omega_1^\varepsilon} \sigma_1^\varepsilon n_1.(\upsilon_1 - u_1^\varepsilon)ds - \int_{\partial\Omega_2^\varepsilon} \sigma_2^\varepsilon n_1.(\upsilon_2 - u_2^\varepsilon)ds \\
&\quad = \int_{\Omega_1^\varepsilon} f_1^\varepsilon.(\upsilon_1 - u_1^\varepsilon)dx_1dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_2^\varepsilon.(\upsilon_2 - u_2^\varepsilon)dx_1dx_2, \quad \forall(\upsilon_1, \upsilon_2) \in H^\varepsilon.
\end{aligned}$$

En utilisant maintenant les conditions (3.2)-(3.9), on trouve la formulation faible.

$$\left\{\begin{array}{c}
Trouver \;\; (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) \in H_{div}^\varepsilon \;\; et \;\; (p_1^\varepsilon, p_1^\varepsilon) \in L_0^2(\Omega_1^\varepsilon) \times L_0^2(\Omega_2^\varepsilon) \;\; tel \;\; que \\
\Phi((u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon), (\upsilon_1 - u_1^\varepsilon, \upsilon_2 - u_2^\varepsilon)) - (p_1^\varepsilon, div(\upsilon_1 - u_1^\varepsilon)) + (p_2^\varepsilon, div(\upsilon_2 - u_2^\varepsilon)) + J(\upsilon_1, \upsilon_2) - J(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) \\
\geq \int_{\Omega_1^\varepsilon} f_1^\varepsilon.(\upsilon_1 - u_1^\varepsilon)dx_1dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_2^\varepsilon.(\upsilon_2 - u_2^\varepsilon)dx_1dx_2, \quad \forall(\upsilon_1, \upsilon_2) \in H^\varepsilon,
\end{array}\right. \tag{3.10}$$

où

$$\begin{aligned}
\Phi((u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon), (\upsilon_1, \upsilon_2)) &= \mu_1\varepsilon^2 \int_{\Omega_1^\varepsilon} D(u_1^\varepsilon).D(\upsilon_1)dx_1dx_2 + \mu_2\varepsilon^2 \int_{\Omega_2^\varepsilon} D(u_2^\varepsilon).D(\upsilon_2)dx_1dx_2, \\
(p_i^\varepsilon, div(\upsilon_i)) &= \int_{\Omega_i^\varepsilon} p_i^\varepsilon.div(\upsilon_i)dx_1dx_2, i = 1, 2, \\
j(\upsilon_1, \upsilon_2) &= g_1\varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(\upsilon_1)|dx_1dx_2 + g_2\varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(\upsilon_2)|dx_1dx_2.
\end{aligned}$$

On sait que ce problème variationnel a une solution unique $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) \in H_{div}^\varepsilon$ et $(p_1^\varepsilon, p_1^\varepsilon) \in L_0^2(\Omega_1^\varepsilon) \times L_0^2(\Omega_2^\varepsilon)$, voir pour plus détails [40, 5, 41, 27, 28, 39].

3.3 Comportement asymptotique

Dans cette section, nous établissons quelques résultats concernant le comportement asymptotique de la solution lorsque ε tend vers zéro. Nous commençons par rappeler les lemmes suivants, voir [30, 8, 10, 18, 11, 35].

Lemme 3.3.1.

1. *L'inégalité de Poincaré (1854-1912). Pour chaque* $\upsilon_i \in H^1_{\Gamma_i}(\Omega_i^\varepsilon)^2$ *nous avons*

$$\|\upsilon_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_i^\varepsilon)^2} \leq \varepsilon \left\| \frac{\partial \upsilon_i^\varepsilon}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\Omega_i^\varepsilon)^2}, i = 1, 2. \tag{3.11}$$

2. *L'inégalité de Korn (1870-1945). Pour chaque* $\upsilon_i \in H^1_{\Gamma_i}(\Omega_i^\varepsilon)^2$ *il existe une constante positive* C_0 *indépendante de* ε*, tel que*

$$\|\nabla \upsilon_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_i^\varepsilon)^4} \leq C_0 \|D(\upsilon_i^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_i^\varepsilon)^4}, i = 1, 2. \tag{3.12}$$

Lemme 3.3.2. ***(Minty (1929-1986))****. Soit* E *un espace de Banach,* $A : E \longrightarrow E'$ *un opérateur monotone et semi-continu,* $J : E \longrightarrow]-\infty, +\infty[$ *une fonctionnelle propre et convexe. Soit* $u \in E$ *et* $f \in E'$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\langle Au; \upsilon - u\rangle_{E' \times E} + J(\upsilon) - J(u) \geq \langle f; \upsilon - u\rangle_{E' \times E} \quad \forall \upsilon \in E.$
2. $\langle A\upsilon; \upsilon - u\rangle_{E' \times E} + J(\upsilon) - J(u) \geq \langle f; \upsilon - u\rangle_{E' \times E} \quad \forall \upsilon \in E.$

Les principaux résultats de cette section sont énoncés par la proposition suivante.

Proposition 3.3.1. *Soit* $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) \in H^\varepsilon_{div}$ *et* $(p_1^\varepsilon, p_2^\varepsilon) \in L^2_0(\Omega_1^\varepsilon) \times L^2_0(\Omega_2^\varepsilon)$ *la solution du problème variationnel* (3.10)*. Alors, il existe* $(\widehat{u}_1, \widehat{u}_2) \in H_2(\Omega_1)^2 \times H_2(\Omega_2)^2$ *et* $(\widehat{p}_1, \widehat{p}_2) \in L^2_0(\Omega_1) \times L^2_0(\Omega_2)$ *tels que*

$$(\widehat{u_1^\varepsilon}, \widehat{u_2^\varepsilon}) \longrightarrow (\widehat{u}_1, \widehat{u}_2) \quad faiblement\ dans \quad H_2(\Omega_1)^2 \times H_2(\Omega_2)^2, \tag{3.13}$$

$$\left(\frac{\partial \widehat{u_{12}^\varepsilon}}{\partial y}, \frac{\partial \widehat{u_{22}^\varepsilon}}{\partial y} \right) \longrightarrow (0, 0) \quad faiblement\ dans \quad L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2) \tag{3.14}$$

$$(\widehat{p_1^\varepsilon}, \widehat{p_2^\varepsilon}) \longrightarrow (\widehat{p}_1, \widehat{p}_2) \quad faiblement\ dans \quad L^2_0(\Omega_1) \times L^2_0(\Omega_2). \tag{3.15}$$

Démonstration :

En Choisissant $(\upsilon_1, \upsilon_2) = (0,0)$ comme fonction de test dans l'inégalité (3.10), on en déduit que

$$\mu_1 \varepsilon^2 \|D(u_1^\varepsilon)\|^2_{L^2(\Omega_1^\varepsilon)^4} + \mu_2 \varepsilon^2 \|D(u_2^\varepsilon)\|^2_{L^2(\Omega_2^\varepsilon)^4} \leq \int_{\Omega_1^\varepsilon} f_1^\varepsilon . u_1^\varepsilon dx_1 dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_2^\varepsilon . u_2^\varepsilon dx_1 dx_2.$$

En utilisant les inégalités de Poincaré , Korn et par passage aux variables x et y, on obtient

$$\|\widehat{u_1^\varepsilon}\|_{L^2(\Omega_1)^2} + \|\widehat{u_2^\varepsilon}\|_{L^2(\Omega_2)^2} \leq c, \tag{3.16}$$

$$\left\|\frac{\partial \widehat{u_1^\varepsilon}}{\partial y}\right\|_{L^2(\Omega_1)^2} + \left\|\frac{\partial \widehat{u_2^\varepsilon}}{\partial y}\right\|_{L^2(\Omega_2)^2} \leq c, \tag{3.17}$$

$$\left\|\frac{\partial \widehat{u_1^\varepsilon}}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega_1)^2} + \left\|\frac{\partial \widehat{u_2^\varepsilon}}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega_2)^2} \leq \frac{c}{\varepsilon}. \tag{3.18}$$

De plus, nous utilisons la condition d'incompréssibilité (3.2) ,(3.3) et la formule de Green, pour tout fonction $(\varphi_1^\varepsilon, \varphi_2^\varepsilon) \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1^\varepsilon) \times H^1_{\Gamma_2}(\Omega_2^\varepsilon)$

$$\int_{\Omega_1} \frac{\partial \widehat{u_{12}^\varepsilon}}{\partial y} \widehat{\varphi_1^\varepsilon} dxdy + \int_{\Omega_2} \frac{\partial \widehat{u_{22}^\varepsilon}}{\partial y} \widehat{\varphi_2^\varepsilon} dxdy = \varepsilon \int_{\Omega_1} \widehat{u_{11}^\varepsilon} \frac{\partial \widehat{\varphi_1^\varepsilon}}{\partial x} dxdy + \varepsilon \int_{\Omega_2} \widehat{u_{21}^\varepsilon} \frac{\partial \widehat{\varphi_2^\varepsilon}}{\partial x} dxdy.$$

Ce qui donne, en faisant usage de (3.1)

$$\left\|\frac{\partial \widehat{u_{12}^\varepsilon}}{\partial y}\right\|_{H^{-1}(\Omega_1)} + \left\|\frac{\partial \widehat{u_{22}^\varepsilon}}{\partial y}\right\|_{H^{-1}(\Omega_2)} \leq c\varepsilon. \tag{3.19}$$

On peut alors extraire une sous-suite encore notée par $(\widehat{u_1^\varepsilon}, \widehat{u_2^\varepsilon})$ telle que

$$(\widehat{u_1^\varepsilon}, \widehat{u_2^\varepsilon}) \longrightarrow (\widehat{u}_1, \widehat{u}_2) \quad faiblement \ dans \quad L^2(\Omega_1)^2 \times L^2(\Omega_2)^2, \tag{3.20}$$

$$(\frac{\partial \widehat{u_1^\varepsilon}}{\partial y}, \frac{\partial \widehat{u_2^\varepsilon}}{\partial y}) \longrightarrow (\frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y}, \frac{\partial \widehat{u}_2}{\partial y}) \quad faiblement \ dans \quad L^2(\Omega_1)^2 \times L^2(\Omega_2)^2, \tag{3.21}$$

$$(\frac{\partial \widehat{u_{12}^\varepsilon}}{\partial y}, \frac{\partial \widehat{u_{22}^\varepsilon}}{\partial y}) \longrightarrow (0,0) \quad faiblement \ dans \quad L^2(\Omega_1)^2 \times L^2(\Omega_2)^2, \tag{3.22}$$

Soit maintenant $(\upsilon_1^\varepsilon, \upsilon_2^\varepsilon) \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1^\varepsilon)^2 \times H^1_{\Gamma_2}(\Omega_2^\varepsilon)^2$, on obtient en réglage $(u_1^\varepsilon - \upsilon_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon - \upsilon_2^\varepsilon)$ comme fonction de test dans l'inégalité (3.10), en utilisant les conditions d'incompréssibilité (3.2) et (3.3) ainsi que la formule de Green et l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\int_{\Omega_1^\varepsilon} \nabla p_1^\varepsilon . \upsilon_1^\varepsilon dx_1 dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \nabla p_2^\varepsilon . \upsilon_2^\varepsilon dx_1 dx_2$$
$$\leq \mu_1 \varepsilon^2 \left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(u_1^\varepsilon)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(\upsilon_1^\varepsilon)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ g_1 \varepsilon^{\frac{3}{2}} Meas(\Omega_1)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(\upsilon_1^\varepsilon)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \varepsilon \|\widehat{f_1^\varepsilon}\|_{L^2(\Omega_1)^2} \|\widehat{\upsilon_1^\varepsilon}\|_{H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)^2} + \varepsilon \|\widehat{f_2^\varepsilon}\|_{L^2(\Omega_2)^2} \|\widehat{\upsilon_2^\varepsilon}\|_{H^1_{\Gamma_2}(\Omega_2)^2}$$
$$+\mu_2 \varepsilon^2 \left(\int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(u_2^\varepsilon)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(\upsilon_2^\varepsilon)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} + g_2 \varepsilon^{\frac{3}{2}} \ Meas(\Omega_2)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(\upsilon_2^\varepsilon)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.23}$$

d'autre part, il est facile de vérifier que, après quelques manipulations algébriques, on trouve

$$\left(\int_{\Omega_i^\varepsilon} |D(\upsilon_i^\varepsilon)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \ \|\widehat{\upsilon_i^\varepsilon}\|_{H^1_{\Gamma_i}(\Omega_i)}, i = 1, 2. \tag{3.24}$$

Par conséquent, de (3.17), (3.18), (3.23) et (3.24) il s'ensuit que

$$\int_{\Omega_1^\varepsilon} \nabla p_1^\varepsilon . \upsilon_1^\varepsilon dx_1 dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \nabla p_2^\varepsilon . \upsilon_2^\varepsilon dx_1 dx_2 \leq c\varepsilon (\|\widehat{\upsilon_1^\varepsilon}\|_{H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)} + \|\widehat{\upsilon_2^\varepsilon}\|_{H^1_{\Gamma_2}(\Omega_2)}). \tag{3.25}$$

En passant aux variables x et y dans le cèté gauche de (3.25), on retrouve les estimations siuvantes :

$$\|\widehat{p_1^\varepsilon}\|_{L^2_0(\Omega_1)} + \|\widehat{p_2^\varepsilon}\|_{L^2_0(\Omega_2)} \leq c, \tag{3.26}$$
$$\left\| \frac{\partial \widehat{p_1^\varepsilon}}{\partial x} \right\|_{H^{-1}(\Omega_1)} + \left\| \frac{\partial \widehat{p_2^\varepsilon}}{\partial x} \right\|_{H^{-1}(\Omega_2)} \leq c, \tag{3.27}$$
$$\left\| \frac{\partial \widehat{p_1^\varepsilon}}{\partial y} \right\|_{H^{-1}(\Omega_1)} + \left\| \frac{\partial \widehat{p_2^\varepsilon}}{\partial y} \right\|_{H^{-1}(\Omega_2)} \leq \varepsilon c, \tag{3.28}$$

Par conséquent, nous pouvons extraire une sous-suite encore notée par $\left(\widehat{p_1^\varepsilon}, \widehat{p_2^\varepsilon}\right)$ telle que

$$(\widehat{p_1^\varepsilon}, \widehat{p_2^\varepsilon}) \longrightarrow (\widehat{p}_1, \widehat{p}_2) \ \ faiblement \ \ dans \ \ L^2_0(\Omega_1) \times L^2_0(\Omega_2), \tag{3.29}$$

La preuve est terminée. Cette preuve permet également de déduire que la pression limite vérifie $(\widehat{p_1}(x, y), \widehat{p_2}(x, y)) = (\widehat{p_1}(x), \widehat{p_2}(x))$. □

Proposition 3.3.2. *La limite de vitesse donnée par* (3.13) *vérifie*

$$\int_0^{h_1(x)} \widehat{u_{11}}(x, y) dy + \int_0^{h_2(x)} \widehat{u_{21}}(x, y) dy = 0 \quad \forall x \in I. \tag{3.30}$$

Démonstration : Nous savons des conditions d'incompréssibilité (3.2) et (3.3) que :

$$\int_{\Omega_1^\varepsilon} div\ u_1^\varepsilon(x_1,x_2)\varphi_1(x_1)dx_1dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} div\ u_2^\varepsilon(x_1,x_2)\varphi_2(x_1)dx_1dx_2 = 0, \quad \forall(\varphi_1,\varphi_2) \in D(I)^2.$$

Cela implique, en utilisant la formule de Green

$$\int_{\Omega_1^\varepsilon} u_{11}^\varepsilon(x_1,x_2)\frac{d\varphi_1}{dx_1}(x_1)dx_1dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} u_{21}^\varepsilon(x_1,x_2)\frac{d\varphi_2}{dx_2}(x_1)dx_1dx_2$$
$$= \int_{\Omega_1^\varepsilon} \frac{\partial u_{12}^\varepsilon}{\partial x_2}(x_1,x_2)\varphi_1(x_1)dx_1dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \frac{\partial u_{22}^\varepsilon}{\partial x_2}(x_1,x_2)\varphi_2(x_1)dx_1dx_2.$$

Par conséquent, par passage aux variables x et y, en utilisant le théorème de Fubini et la formule de Green, nous pouvons déduire

$$\int_0^1 \varphi_1(x)\left(\frac{d}{dx}\int_0^{h_1(x)} \widehat{u_{11}^\varepsilon}(x,y)dy\right)dx + \int_0^1 \varphi_2(x)\left(\frac{d}{dx}\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \widehat{u_{21}^\varepsilon}(x,y)dy\right)dx = 0,\ \forall(\varphi_1,\varphi_2) \in D(I)^2.$$

Alors,

$$\int_0^1 \varphi(x)\left(\frac{d}{dx}\int_0^{h_1(x)} \widehat{u_{11}^\varepsilon}(x,y)dy + \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \widehat{u_{21}^\varepsilon}(x,y)dy\right)dx = 0, \forall\varphi \in D(I)$$

Alors,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{h_1(x)} \widehat{u_{11}^\varepsilon}(x,y)dy + \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \widehat{u_{21}^\varepsilon}(x,y)dy\right) = 0.$$

de plus, le fait que $\left(\widehat{u_{11}^\varepsilon}, \widehat{u_{21}^\varepsilon}\right) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ et $(h_1,h_2) \in (C^1(I))^2$ donne, en utilisant l'injection de Sobolev $H^1(I) \subset C^0(\bar{I})$

$$\int_0^{h_1(x)} \widehat{u_{11}^\varepsilon}(x,y)dy + \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \widehat{u_{21}^\varepsilon}(x,y)dy \in C^0(\bar{I}).$$

Ainsi, par passage à la limite lorsque ε tend vers zéro, en tenant compte des conditions aux limites (3.6),(3.7) et (3.8) , la propriété (3.30) peut être déduite.□

Nous extrayons dans la proposition ci-dessous l'équation vérifiée par la solution limite $(\widehat{u_1},\widehat{u_2}) \in H_2 \times H_2$ *et* $(\widehat{p_1},\widehat{p_2}) \in L_0^2(\Omega_1) \times L_0^2(\Omega_2)$.

Proposition 3.3.3. *Si* $\left(\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}, \frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right) \neq (0,0)$, *alors le point limite* $(\widehat{u_1},\widehat{u_2})$ *et* $(\widehat{p_1},\widehat{p_2})$ *donné par* (3.13) *et* (3.15) *vérifie le problème de limite*

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu_1}{2}\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y} + \frac{\sqrt{2}}{2}g_1 sign\left(\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right) + \frac{\mu_2}{2}\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y} + \frac{\sqrt{2}}{2}g_2 sign\left(\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\right)$$
$$= \widehat{f_{11}} - \frac{d\widehat{p_1}}{dx} + \widehat{f_{21}} - \frac{d\widehat{p_2}}{dx} \quad dans \quad H^{-1}(\Omega). \quad (3.31)$$

Démonstration : Introduisons l'opérateur Φ défini comme suit

$$\begin{aligned}\Phi \quad &: \quad H^{\varepsilon} \to H^{\varepsilon'} \\ \left\langle \Phi\left(u_1^{\varepsilon}, u_2^{\varepsilon}\right), \left(\upsilon_1^{\varepsilon}, \upsilon_1^{\varepsilon}\right)\right\rangle_{H^{\varepsilon'}\times H^{\varepsilon}} &= \mu_1\varepsilon^2 \int_{\Omega_1^{\varepsilon}} D(u_1^{\varepsilon}).D(\upsilon_1^{\varepsilon})dx_1dx_2 + \mu_2\varepsilon^2 \int_{\Omega_2^{\varepsilon}} D(u_2^{\varepsilon}).D(\upsilon_2^{\varepsilon})dx_1dx_2.\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que Φ est monotone et semi-continu (pour plus de détails, voir les références [35, 11, 9]). De plus, nous savons que la fonctionnelle

$$(\upsilon_1^{\varepsilon}, \upsilon_2^{\varepsilon}) \in H^{\varepsilon} \longrightarrow g_1\varepsilon \int_{\Omega_1^{\varepsilon}} |D(\upsilon_1^{\varepsilon})|dx_1dx_2 + g_2\varepsilon \int_{\Omega_2^{\varepsilon}} |D(\upsilon_2^{\varepsilon})|dx_1dx_2$$

est propre et convexe. Alors, l'utilisation du lemme de Minty permet d'affirmer que (3.10) équivalent à l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}&\mu_1\varepsilon^2 \int_{\Omega_1^{\varepsilon}} D(\upsilon_1^{\varepsilon})D(\upsilon_1^{\varepsilon} - u_1^{\varepsilon})dx_1dx_2 + g_1\varepsilon \int_{\Omega_1^{\varepsilon}} |D(\upsilon_1^{\varepsilon})|dx_1dx_2 \\ &-g_1\varepsilon \int_{\Omega_1^{\varepsilon}} |D(u_1^{\varepsilon})|dx_1dx_2 + \mu_2\varepsilon^2 \int_{\Omega_2^{\varepsilon}} D(\upsilon_2^{\varepsilon})D(\upsilon_2^{\varepsilon} - u_2^{\varepsilon})dx_1dx_2 \\ &+g_2\varepsilon \int_{\Omega_2^{\varepsilon}} |D(\upsilon_2^{\varepsilon})|dx_1dx_2 - g_2\varepsilon \int_{\Omega_1^{\varepsilon}} |D(u_1^{\varepsilon})|dx_1dx_2 \\ &\geq \int_{\Omega_1^{\varepsilon}} f_1^{\varepsilon}.(\upsilon_1^{\varepsilon} - u_1^{\varepsilon})dx_1dx_2 + \int_{\Omega_1^{\varepsilon}} p_1^{\varepsilon} div(\upsilon_1^{\varepsilon} - u_1^{\varepsilon})dx_1dx_2 \\ &+ \int_{\Omega_2^{\varepsilon}} f_2^{\varepsilon}.(\upsilon_2^{\varepsilon} - u_2^{\varepsilon})dx_1dx_2 + \int_{\Omega_2^{\varepsilon}} p_2^{\varepsilon} div(\upsilon_2^{\varepsilon} - u_2^{\varepsilon})dx_1dx_2 \quad \forall\, (\upsilon_1^{\varepsilon}, \upsilon_2^{\varepsilon}) \in H^{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Notre but est maintenant de passer à la limite lorsque ε tend vers zéro. Pour cela, nous utilisons la proposition (3.3.1) et la faible semi-continuité inférieure de la fonctionnelle convexe et continue

$$(\upsilon_1^{\varepsilon}, \upsilon_2^{\varepsilon}) \in H^{\varepsilon} \longrightarrow g_1\varepsilon \int_{\Omega_1^{\varepsilon}} |D(\upsilon_1^{\varepsilon})|dx_1dx_2 + g_2\varepsilon \int_{\Omega_2^{\varepsilon}} |D(\upsilon_2^{\varepsilon})|dx_1dx_2.$$

On trouve l'inégalité limite suivante

$$\begin{aligned}&\mu_1 \int_{\Omega_1} \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\widehat{\upsilon_{11}}}{\partial y}\frac{\partial(\widehat{\upsilon_{11}} - \widehat{u_{11}})}{\partial y} + \frac{\partial\widehat{\upsilon_{12}}}{\partial y}\frac{\partial(\widehat{\upsilon_{12}} - \widehat{u_{12}})}{\partial y}\right] dxdy + g_1 \int_{\Omega_1} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{\partial\widehat{\upsilon_{11}}}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial\widehat{\upsilon_{12}}}{\partial y}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} dxdy \\ &-g_1 \int_{\Omega_1} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial\widehat{u_{12}}}{\partial y}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} dxdy + \mu_2 \int_{\Omega_2} \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\widehat{\upsilon_{21}}}{\partial y}\frac{\partial(\widehat{\upsilon_{21}} - \widehat{u_{21}})}{\partial y} + \frac{\partial\widehat{\upsilon_{22}}}{\partial y}\frac{\partial(\widehat{\upsilon_{22}} - \widehat{u_{22}})}{\partial y}\right] dxdy \\ &+ g_2 \int_{\Omega_2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{\partial\widehat{\upsilon_{21}}}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial\widehat{\upsilon_{22}}}{\partial y}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} dxdy - g_2 \int_{\Omega_2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial\widehat{u_{22}}}{\partial y}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} dxdy \\ &\geq \int_{\Omega_1} \widehat{f_1}.(\widehat{\upsilon_1} - \widehat{u_1})dxdy + \int_{\Omega_1} \widehat{p_1} div(\widehat{\upsilon_1} - \widehat{u_1})dxdy + \int_{\Omega_2} \widehat{f_2}.(\widehat{\upsilon_2} - \widehat{u_2})dxdy \\ &+ \int_{\Omega_2} \widehat{p_2} div(\widehat{\upsilon_2} - \widehat{u_2})dxdy \quad \forall\, (\upsilon_1^{\varepsilon}, \upsilon_2^{\varepsilon}) \in H^{\varepsilon}. \qquad (3.32)\end{aligned}$$

En outre, de (3.13) et (3.14) nous trouvons

$$\left(\frac{\partial \widehat{u_{12}}}{\partial y}, \frac{\partial \widehat{u_{22}}}{\partial y}\right) = (0,0) \in \Omega_1 \times \Omega_2.$$

Il suit, en gardant à l'esprit (3.30), que $\widehat{u_1}(x,y) = (\widehat{u_{11}}(x,y), 0)$ *et*, $\widehat{u_2}(x,y) = (\widehat{u_{21}}(x,y), 0)$. Cela permet également de choisir $(\widehat{v_{12}}, \widehat{v_{22}}) = (0,0)$ dans (3.32). Considérons maintenant l'opérateur Φ tel que

$$\begin{aligned} \Phi : H_2 &\longrightarrow H_2', \\ \langle \Phi(\widehat{u_{11}}, \widehat{u_{21}}), (\widehat{v_{11}}, \widehat{v_{21}})\rangle_{H_2' \times H_2} &= \frac{\mu_1}{2}\int_{\Omega_1} \frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y}\frac{\partial \widehat{v_{11}}}{\partial y} dxdy + \frac{\mu_2}{2}\int_{\Omega_2} \frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\frac{\partial \widehat{v_{21}}}{\partial y} dxdy. \end{aligned}$$

Il est clair que l'opérateur Φ est monotone et semi-continu et la fonctionnelle

$$(\widehat{v_{11}}, \widehat{v_{21}}) \in H_2 \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} g_1 \int_{\Omega_1} \left|\frac{\partial \widehat{v_{11}}}{\partial y}\right| dxdy + \frac{\sqrt{2}}{2} g_2 \int_{\Omega_2} \left|\frac{\partial \widehat{v_{21}}}{\partial y}\right| dxdy$$

est propre et convexe. Par conséquent, nous en déduisons en utilisant encore le lemme de Minty (3.3.2).

$$\begin{aligned} &\frac{\mu_1}{2}\int_{\Omega_1} \frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y}\frac{\partial(\widehat{v_{11}} - \widehat{u_{11}})}{\partial y} dxdy + \frac{\sqrt{2}}{2} g_1 \int_{\Omega_1} \left|\frac{\partial \widehat{v_{11}}}{\partial y}\right| dxdy - \frac{\sqrt{2}}{2} g_1 \int_{\Omega_1} \left|\frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right| dxdy \\ &\quad + \frac{\mu_2}{2}\int_{\Omega_2} \frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\frac{\partial(\widehat{v_{21}} - \widehat{u_{21}})}{\partial y} dxdy + \frac{\sqrt{2}}{2} g_2 \int_{\Omega_2} \left|\frac{\partial \widehat{v_{21}}}{\partial y}\right| dxdy - \frac{\sqrt{2}}{2} g_2 \int_{\Omega_2} \left|\frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right| dxdy \\ &\qquad \geq \int_{\Omega_1} \widehat{f_{11}}.(\widehat{v_{11}} - \widehat{u_{11}}) dxdy - \int_{\Omega_1} \frac{d\widehat{p_1}}{dx}(\widehat{v_{11}} - \widehat{u_{11}}) dxdy \\ &\qquad + \int_{\Omega_2} \widehat{f_{21}}.(\widehat{v_{21}} - \widehat{u_{21}}) dxdy - \int_{\Omega_2} \frac{d\widehat{p_2}}{dx}(\widehat{v_{21}} - \widehat{u_{21}}) dxdy \quad \forall (\widehat{v_{11}}, \widehat{v_{21}}) \in H_2. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Cela donne, via la formule de Green

$$\begin{aligned} &-\frac{\mu_1}{2}\int_{\Omega_1} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)(\widehat{v_{11}} - \widehat{u_{11}}) dxdy + \frac{\sqrt{2}}{2} g_1 \int_{\Omega_1} \left|\frac{\partial \widehat{v_{11}}}{\partial y}\right| dxdy - \frac{\sqrt{2}}{2} g_1 \int_{\Omega_1} \left|\frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right| dxdy \\ &-\frac{\mu_2}{2}\int_{\Omega_2} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)(\widehat{v_{21}} - \widehat{u_{21}}) dxdy + \frac{\sqrt{2}}{2} g_2 \int_{\Omega_2} \left|\frac{\partial \widehat{v_{21}}}{\partial y}\right| dxdy - \frac{\sqrt{2}}{2} g_2 \int_{\Omega_2} \left|\frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right| dxdy \\ &\quad \geq \int_{\Omega_1} \widehat{f_{11}}(\widehat{v_{11}} - \widehat{u_{11}}) dxdy - \int_{\Omega_1} \frac{d\widehat{p_1}}{dx}(\widehat{v_{11}} - \widehat{u_{11}}) dxdy + \int_{\Omega_2} \widehat{f_{21}}(\widehat{v_{21}} - \widehat{u_{21}}) dxdy \\ &\qquad - \int_{\Omega_2} \frac{d\widehat{p_2}}{dx}(\widehat{v_{21}} - \widehat{u_{21}}) dxdy \quad \forall (\widehat{v_{11}}, \widehat{v_{21}}) \in H_2. \end{aligned} \tag{3.34}$$

à cause du fait que $H^1_{\Gamma_i}(\Omega_i)$ est dense dans $H_2(\Omega_i)$, voir [8, 13], on peut prendre $\widehat{v_{11}} = \widehat{u_{11}} \pm \varphi_1$ *et* $\widehat{v_{21}} = \widehat{u_{21}} \pm \varphi_2$ dans (3.34), où $(\varphi_1, \varphi_2) \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1) \times H^1_{\Gamma_2}(\Omega_2)$ pour obtenir les inégalités suivantes :

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\mu_1}{2}\int_{\Omega_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)\varphi_1 dxdy+\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial \widehat{(u_{11}+\varphi_1)}}{\partial y}\right|dxdy\\
&-\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|dxdy-\frac{\mu_2}{2}\int_{\Omega_2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\varphi_2 dxdy\\
&+\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial \widehat{(u_{21}+\varphi_2)}}{\partial y}\right|dxdy-\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|dxdy\\
&\geq\int_{\Omega_1}\widehat{f_{11}}\varphi_1 dxdy-\int_{\Omega_1}\frac{d\widehat{p_1}}{dx}\varphi_1 dxdy+\int_{\Omega_2}\widehat{f_{21}}\varphi_2 dxdy-\int_{\Omega_2}\frac{d\widehat{p_2}}{dx}\varphi_2 dxdy\\
&\qquad\forall\left(\varphi_1,\varphi_2\right)\in H^1_{\Gamma_1}\left(\Omega_1\right)\times H^1_{\Gamma_2}\left(\Omega_2\right).
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mu_1}{2}\int_{\Omega_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)\varphi_1 dxdy+\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial (\widehat{u_{11}}-\varphi_1)}{\partial y}\right|dxdy\\
&-\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|dxdy+\frac{\mu_2}{2}\int_{\Omega_2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\varphi_2 dxdy\\
&+\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial (\widehat{u_{21}}-\varphi_2)}{\partial y}\right|dxdy-\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|dxdy\\
&\geq-\int_{\Omega_1}\widehat{f_{11}}\varphi_1 dxdy+\int_{\Omega_1}\frac{d\widehat{p_1}}{dx}\varphi_1 dxdy-\int_{\Omega_2}\widehat{f_{21}}\varphi_2 dxdy+\int_{\Omega_2}\frac{d\widehat{p_2}}{dx}\varphi_2 dxdy\\
&\qquad\forall\left(\varphi_1,\varphi_2\right)\in H^1_{\Gamma_1}\left(\Omega_1\right)\times H^1_{\Gamma_2}\left(\Omega_2\right).
\end{aligned}
$$

Remplacer dans ces deux inégalités la fonction de test (φ_1,φ_2) par $(\lambda\varphi_1,\lambda\varphi_2),\lambda>0$, en divisant les inégalités obtenues par λ. Le passage à la limite quand λ tend vers 0 implique, sous l'hypothèse $\left(\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y},\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\neq(0,0)$, que

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\mu_1}{2}\int_{\Omega_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)\varphi_1 dxdy+\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}sign\left(\frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)dxdy\\
&-\frac{\mu_2}{2}\int_{\Omega_2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\varphi_2 dxdy+\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}sign\left(\frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)dxdy\\
&\geq\int_{\Omega_1}\widehat{f_{11}}\varphi_1 dxdy-\int_{\Omega_1}\frac{d\widehat{p_1}}{dx}\varphi_1 dxdy+\int_{\Omega_2}\widehat{f_{21}}\varphi_2 dxdy-\int_{\Omega_2}\frac{d\widehat{p_2}}{dx}\varphi_2 dxdy\\
&\qquad\forall\left(\varphi_1,\varphi_2\right)\in H^1_{\Gamma_1}\left(\Omega_1\right)\times H^1_{\Gamma_2}\left(\Omega_2\right).
\end{aligned}
$$

et

$$+\frac{\mu_1}{2}\int_{\Omega_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)\varphi_1 dxdy-\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1} sign\left(\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)dxdy$$
$$+\frac{\mu_2}{2}\int_{\Omega_2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\varphi_2 dxdy-\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2} sign\left(\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)dxdy$$
$$\geq-\int_{\Omega_1}\widehat{f_{11}}\varphi_1 dxdy+\int_{\Omega_1}\frac{d\widehat{p_1}}{dx}\varphi_1 dxdy-\int_{\Omega_2}\widehat{f_{21}}\varphi_2 dxdy+\int_{\Omega_2}\frac{d\widehat{p_2}}{dx}\varphi_2 dxdy$$
$$\forall(\varphi_1,\varphi_2)\in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)\times H^1_{\Gamma_2}(\Omega_2).$$

Par conséquent, on obtient en combinant ces deux inégalités et en utilisant une intégration simple par parties

$$-\int_{\Omega_1}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\mu_1}{2}\left(\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}g_1 sign\left(\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)\right]\varphi_1 dxdy$$
$$-\int_{\Omega_2}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\mu_2}{2}\left(\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}g_2 sign\left(\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\right]\varphi_2 dxdy$$
$$=\int_{\Omega_1}\left(\widehat{f_{11}}-\frac{d\widehat{p_1}}{dx}\right)\varphi_1 dxdy+\int_{\Omega_2}\left(\widehat{f_{21}}-\frac{d\widehat{p_2}}{dx}\right)\varphi_2 dxdy$$
$$\forall(\varphi_1,\varphi_2)\in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)\times H^1_{\Gamma_2}(\Omega_2).$$

Considérons

$$\varphi\in H^1_0(\Omega):\varphi=\begin{cases}\varphi_1 & dans\ \ \Omega_1\\ \varphi_2 & dans\ \ \Omega_2\end{cases},$$

et

$$\tilde{a_1}=\begin{cases}-\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\mu_1}{2}\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}g_1 sign\left(\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)\right] & dans\ \ \Omega_1\\ 0 & dans\ \ \Omega_2\end{cases},$$
$$\tilde{a_2}=\begin{cases}0 & dans\ \ \Omega_1\\ -\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\mu_2}{2}\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}g_2 sign\left(\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\right] & dans\ \ \Omega_2\end{cases},$$
$$\tilde{b_1}=\begin{cases}\left(\widehat{f_1}-\frac{d\widehat{p_1}}{dx}\right) & dans\ \ \Omega_1\\ 0\ \ dans\ \ \Omega_2\end{cases},$$
$$\tilde{b_2}=\begin{cases}\left(\widehat{f_1}-\frac{d\widehat{p_1}}{dx}\right) & dans\ \ \Omega_1\\ 0\ \ dans\ \ \Omega_2\end{cases}.$$

Alors

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega}\left(\tilde{a_1}+\tilde{a_2}\right)\varphi dxdy &= \int_{\Omega_1}\left(\tilde{a_1}+\tilde{a_2}\right)\varphi_1 dxdy+\int_{\Omega_2}\left(\tilde{a_1}+\tilde{a_2}\right)\varphi_2 dxdy\\
&= \int_{\Omega_1}\tilde{a_1}\varphi_1 dxdy+\int_{\Omega_2}\tilde{a_2}\varphi_2 dxdy\\
&= \int_{\Omega_1}-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\mu_1}{2}\left(\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}g_1 sign\left(\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)\right]\varphi_1 dxdy\\
&+\int_{\Omega_2}-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\mu_2}{2}\left(\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}g_2 sign\left(\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\right]\varphi_2 dxdy\\
&= \int_{\Omega_1}\left(\widehat{f_{11}}-\frac{d\widehat{p_1}}{dx}\right)\varphi_1 dxdy+\int_{\Omega_2}\left(\widehat{f_{21}}-\frac{d\widehat{p_2}}{dx}\right)\varphi_2 dxdy\\
&= \int_{\Omega_1}\tilde{b_1}\varphi_1 dxdy+\int_{\Omega_2}\tilde{b_2}\varphi_2 dxdy=\int_{\Omega}\left(\tilde{b_1}+\tilde{b_2}\right)\varphi dxdy\quad \forall\varphi\in H_0^1\left(\Omega\right).
\end{aligned}
$$

Ce qui donne finalement (3.31).

Désormais, nous désignerons par $(\widehat{u_{11}},\widehat{u_{21}})\in H_2$ *et* $(\widehat{p_1},\widehat{p_2})\in L_0^2(\Omega_1)\times L_0^2(\Omega_2)$ par la solution du probléme limite (3.31).

La proposition suivante montre l'unicité de la solution limite $(\widehat{u_{11}},\widehat{p_1})$ *et* $(\widehat{u_{21}},\widehat{p_2})$.

Proposition 3.3.4. *Le problème forte limite (3.31) a une solution unique* $(\widehat{u_{11}},\widehat{u_{21}})\in H_2$ *et* $(\widehat{p_1},\widehat{p_2})\in L_0^2(\Omega_1)\times L_0^2(\Omega_2)$ *avec la condition (3.30).*

Démonstration. Supposons que le problème de limite(3.31) a au moins deux solutions $(\widehat{u_{11}},\widehat{u_{21}})\in H_2,(\widehat{p_1},\widehat{p_2})\in L_0^2\left(\Omega_1\right)\times L_0^2(\Omega_2)$ *et* $\left(\overline{\widehat{u_{11}}},\overline{\widehat{u_{21}}}\right)\in H_2,\left(\overline{\widehat{p_1}},\overline{\widehat{p_2}}\right)\in L_0^2\left(\Omega_1\right)\times L_0^2(\Omega_2)$. En particulier, $(\widehat{u_{11}},\widehat{u_{21}}),(\widehat{p_1},\widehat{p_2})$ *et* $\left(\overline{\widehat{u_{11}}},\overline{\widehat{u_{21}}}\right),\left(\overline{\widehat{p_1}},\overline{\widehat{p_2}}\right)$ sont solutions de la formulation faible (3.33).

Alors

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mu_1}{2}\int_{\Omega_1}\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\frac{\partial(\widehat{v_{11}}-\widehat{u_{11}})}{\partial y}dxdy+\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial\widehat{v_{11}}}{\partial y}\right|dxdy-\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|dxdy\\
&\quad+\frac{\mu_2}{2}\int_{\Omega_2}\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\frac{\partial(\widehat{v_{21}}-\widehat{u_{21}})}{\partial y}dxdy+\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial\widehat{v_{21}}}{\partial y}\right|dxdy-\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|dxdy\\
&\qquad\geq\int_{\Omega_1}\widehat{f_{11}}(\widehat{v_{11}}-\widehat{u_{11}})dxdy-\int_{\Omega_1}\frac{d\widehat{p_1}}{dx}(\widehat{v_{11}}-\widehat{u_{11}})dxdy\\
&\quad+\int_{\Omega_2}\widehat{f_{21}}(\widehat{v_{21}}-\widehat{u_{21}})dxdy-\int_{\Omega_2}\frac{d\widehat{p_2}}{dx}(\widehat{v_{21}}-\widehat{u_{21}})dxdy\quad\forall\left(\widehat{v_{11}},\widehat{v_{21}}\right)\in H_2
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

et

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu_1}{2}\int_{\Omega_1}\frac{\partial\overline{\widehat{u_1}}}{\partial y}\frac{\partial(\widehat{v_{11}}-\overline{\widehat{u_{11}}})}{\partial y}dxdy+\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial\widehat{v_{11}}}{\partial y}\right|dxdy-\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial\overline{\widehat{u_{11}}}}{\partial y}\right|dxdy+\\
&\quad\frac{\mu_2}{2}\int_{\Omega_2}\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\frac{\partial(\widehat{v_{21}}-\overline{\widehat{u_{21}}})}{\partial y}dxdy+\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial\widehat{v_{21}}}{\partial y}\right|dxdy-\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial\overline{\widehat{u_{21}}}}{\partial y}\right|dxdy\\
&\qquad\geq\int_{\Omega_1}\widehat{f_{11}}(\widehat{v_{11}}-\overline{\widehat{u_{11}}})dxdy-\int_{\Omega_1}\frac{d\overline{\widehat{p_1}}}{dx}(\widehat{v_{11}}-\overline{\widehat{u_{11}}})dxdy\\
&\qquad+\int_{\Omega_2}\widehat{f_{21}}(\widehat{v_{21}}-\overline{\widehat{u_{21}}})dxdy-\int_{\Omega_2}\frac{d\overline{\widehat{p_2}}}{dx}(\widehat{v_{21}}-\overline{\widehat{u_{21}}})dxdy\quad\forall(\widehat{v_{11}},\widehat{v_{21}})\in H_2,
\end{aligned}\tag{3.36}$$

Réglage $\widehat{v_{11}}=\overline{\widehat{u_{11}}},\widehat{v_{21}}=\overline{\widehat{u_{21}}}$ *et* $\widehat{v_{11}}=\widehat{u_{11}},\widehat{v_{21}}=\widehat{u_{21}}$ comme fonctions de test dans (3.35) et (3.36), respectivement. En soustrayant les deux inégalités obtenues, on peut déduire

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu_1}{2}\int_{\Omega_1}\left[\frac{\partial\overline{\widehat{u_{11}}}}{\partial y}-\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right]\frac{\partial(\overline{\widehat{u_{11}}}-\widehat{u_{11}})}{\partial y}dxdy+\frac{\mu_2}{2}\int_{\Omega_2}\left[\frac{\partial\overline{\widehat{u_{21}}}}{\partial y}-\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right]\frac{\partial(\overline{\widehat{u_{21}}}-\widehat{u_{21}})}{\partial y}dxdy\\
&\qquad\leq\int_{\Omega_1}\frac{d(\widehat{p_1}-\overline{\widehat{p_1}})}{dx}(\overline{\widehat{u_{11}}}-\widehat{u_{11}})dxdy+\int_{\Omega_2}\frac{d(\widehat{p_2}-\overline{\widehat{p_2}})}{dx}(\overline{\widehat{u_{21}}}-\widehat{u_{21}})dxdy
\end{aligned}\tag{3.37}$$

Cela conduit, en utilisant (3.37), à

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu_1}{2}\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial(\overline{\widehat{u_{11}}}-\widehat{u_{11}})}{\partial y}\right|^2dxdy+\frac{\mu_2}{2}\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial(\overline{\widehat{u_{21}}}-\widehat{u_{21}})}{\partial y}\right|^2dxdy\\
&\qquad\leq\int_{\Omega_1}\frac{d(\widehat{p_1}-\overline{\widehat{p_1}})}{dx}(\overline{\widehat{u_{11}}}-\widehat{u_{11}})dxdy+\int_{\Omega_2}\frac{d(\widehat{p_2}-\overline{\widehat{p_2}})}{dx}(\overline{\widehat{u_{21}}}-\widehat{u_{21}})dxdy\\
&=\int_0^1\left(\frac{d(\widehat{p_1}-\overline{\widehat{p_1}})}{dx}\int_0^{h_1(x)}(\overline{\widehat{u_{11}}}-\widehat{u_{11}})dy\right)dx+\int_0^1\left(\frac{d(\widehat{p_2}-\overline{\widehat{p_2}})}{dx}\int_{h_1(x)}^{h_2(x)}(\overline{\widehat{u_{21}}}-\widehat{u_{21}})dy\right)dx=0.
\end{aligned}$$

L'utilisation de (3.30) donne

$$\frac{\mu_1}{2}\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial(\overline{\widehat{u_{11}}}-\widehat{u_{11}})}{\partial y}\right|^2dxdy+\frac{\mu_2}{2}\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial(\overline{\widehat{u_{21}}}-\widehat{u_{21}})}{\partial y}\right|^2dxdy=0.\tag{3.38}$$

Ce qui donne, en gardant à l'esprit (3.38)

$$\left(\frac{\partial(\overline{\widehat{u_{11}}}-\widehat{u_{11}})}{\partial y},\frac{\partial(\overline{\widehat{u_{21}}}-\widehat{u_{21}})}{\partial y}\right)=(0,0).$$

Depuis $\left(\overline{\widehat{u_{11}}}(x,h_1(x)),\overline{\widehat{u_{21}}}(x,h_2(x))\right)=(\widehat{u_{11}}(x,h_1(x)),\widehat{u_{21}}(x,h_2(x)))=(0,0)$, on en déduit que $\left(\overline{\widehat{u_{11}}},\overline{\widehat{u_{21}}}\right)=(\widehat{u_{11}},\widehat{u_{21}})$a.e. dans $\Omega_1\times\Omega_2$. Enfin, pour prouver l'unicité de la pression,

nous utilisons l' équation (3.31), avec les deux pressions $\left(\widehat{p}_1, \overline{\widehat{p}_1}\right)$ et $\left(\widehat{p}_2, \overline{\widehat{p}_2}\right)$.
Nous trouvons

$$\frac{d(\widehat{p}_1 - \overline{\widehat{p}_1})}{dx} = 0 \quad et \quad \frac{d(\widehat{p}_2 - \overline{\widehat{p}_2})}{dx} = 0$$

Ensuite, en raison du fait que $\left(\widehat{p}_1, \overline{\widehat{p}_1}\right) \in L_0^2(\Omega_1) \times L_0^2(\Omega_1)$, $\left(\widehat{p}_2, \overline{\widehat{p}_2}\right) \in L_0^2(\Omega_2) \times L_0^2(\Omega_2)$, le résultat peut âtre facilement déduit. $\square$

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de transmission entre deux fluides de Bingham incompressibles, rigides et viscoplastiques dans une couche mince bidimensionnel en régime stationnaire, en supposant que les coefficients caractéristiques des deux fluides sont différents et en imposant à l'interface de contact fluide-fluide des conditions aux limites de transmission naturelle, c'est-à-dire continuité des vitesses et continuité des contraintes, ainsi que des conditions sur l'une des deux bords de la couche mince.

On a utilisé la formule de Green pour obtenir la formulation variationnelle (où l'inéquation de la formulation variationnelle), et on utilise le théorème de Guido Stampacchia (1922-1978) introduir dans [10] pour obtenir l'existence et l'unicité d'une solution faible.

L'étude de comportement asymptotique d'un problème mécanique de transmission entre deux fluides incompressibles, rigides et viscoplastiques de Bingham dans une couche mince bidimensionnelle en régime stationnaire avec des viscosités différentes, et les conditions aux limites de transmission naturelles à l'interface de contact fait une partie très imprortant dans ce mémoire.

Travaux perspectives

1. En considérant le cas où les coefficients caractéristiques des deux fluides sont différents et variantes.
2. L'étude d'un problème mécanique de transmission entre deux fluides incompressibles, rigides et viscoplastiques de Bingham dans une couche mince tridimensionnel.

Bibliographie

[1] R. S. Adams. *Sobolev Spaces.* Academic Press, 1975.

[2] G. Allaire. Homogenization of the navier-stokes equations with a slip boundary condition. *Comm. Pure Appl.Math.*, 44(6) :605–641, 1991.

[3] P. Apanastasiou. Flow of materials with yield. *J. of Rheology*, 31(5) :385–404, 1987.

[4] A. Assemien, G. Bayada, and M. Chambat. Inertial effects in the asymptotic behaviour of a thin film flow. *Asymptotic Analysis*, (9) :117–208, 1994.

[5] G. Bayada and M. Chambat. The trannsition between the stokes equations and the reynolds equation : a mathematical proof. Appl. Math. and Opt., 14 :73–93, 1986.

[6] G. Bayada, M. Chambat, and S.R. Gamouana. About thin film micropolar asymptotic equations. *Quart. Appl. Math.*, 59(3) :413–439, 2001.

[7] N. Benhaboucha. *Quelques problèmes mathématiques délatifs à la modélisation des conditions aux limites fluide-solide pour des écoulements de faible épaisseur*. PhD thesis, Université Claude Bernard, Lyon, 2003.

[8] F. Boughanim, M Boukrouche, and H. Smaoui. Asymptotic behavior of a non-newtonian flow with stick-slip condition. *Electronic Journal of Differential Equations*, conference 11 :17–80, 2004. 2004-Fez Conference on Differential Equations and Mechanics.

[9] A. Bourgeat and A. Mikelic. Tapiéro, r., dérivation des equations moyennées décrivant un ecoulement non newtonien dans un domaine de faible epaisseur. *C. R. Acad.*, 316(I) :965–970, 1993.

[10] H. Brezis. Equations et inéquations non linéaires dans les espaces en dualité. *Annale de l'Institut Fourier*, 30 :115–175, 1969.

[11] R. Bunoiu and S. Kesavan. Fluide de bingham dans une couche mince. *Annals of university of Craiova, Maths. Comp. Sci. Ser*, 30 :71–77, 2003.

[12] R. Bunoiu and S. Kesavan. Asymptotic behavior of a bingham fluid in thin layers. *J. Math. Anal. Appl.*, 293(2) :405–418, 2004.

[13] R. Bunoiu and J. Saint Jean Paulin. Nonlinear viscous flow through a thin slab in the lubrification case. *Rev. Roum. Math. Pures et Appliquées*, 45(4) :577–591, 2000.

[14] L. Chupin. *Modélisation et Analyse mathématique en films minces*. Institut Camille Jordan-INSA de Lyon, 2009.

[15] P. G. Ciarlet. *Elasticité Tridimensionnelle*. Paris, 1986.

[16] N. Cristescu. On the optimum die angle in fast wire drawing. *J. Mech. Work. Tech*, 3(3-4) :275–287, 1980.

[17] G. Duvaut and J.L. Lions. *Les Inéquations en Mécanique et en physique*. Paris, 1976.

[18] I. Ekeland and R. Temam. *Analyse Convexe et Problèmes Variationnels*. Paris, 1974.

[19] M. Fortin. *Calcul Numérique des Ecoulement des Fluides de Bingham et des Fluides Newtoniens Incompressibles par la Méthode des Eléments Finis*. PhD thesis, University of paris VI, 1976.

[20] V. Girault and P.A. Raviart. *Finite element approximation of the Navier Stokes equation*. Springer-Verlag, 1979.

[21] R. Ionescu and M. Sofonea. The blocking property in the study of the bingham fluid. *Int. J. Engn, Sci.*, 24(3) :289–297, 1986.

[22] R. Ionescu and M. Sofonea. *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*. Oxford University Press, 1993.

[23] Y. Kato. Variational ienqualities of bingham type in three dimensions. *Nagoya Math*, 129 :53–95, 1993.

[24] Y. Letoufa. *Sur la convergence asymptotique d'un problème aux limites non linéaire avec frottement*. PhD thesis, Université de Sétif, 2019.

[25] J. L. Lions. *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes Aux Limites Non Linéaires*. Paris, 1966.

[26] W. G. Litvinov. *Models for Laminar and Turbulent Flows of Viscous and Nonlinear Viscous Fluids*, volume 291. Recent developments in theoretical fluid mechanic, Longman Scientific ad Technical, Galdi, J.P. et Necas, J. (éd.), 1992.

[27] J. Málek. Mathematical properties of flows of incompressible power-law-like fluids that are described by implicit constitutive relations. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 31 :110–125, 2008.

[28] J. Málek, M. Růžička, and V.V. Shelukhin. Herschel-bulkley fluids, existence and regularity of steady flows, maths. *Models Methods Appl. Sci.*, 15(12) :1845–1861, 2005.

[29] F. Messelmi. *Ecoulement Dynamique du Fluide de Bingham Avec Loi de Frottement du Type Sous-Différentiel.* PhD thesis, Université de Sétif, 2010.

[30] A. Mikelic and R. Tapiero. Mathematical derivation of the power law describing polymer flow through a thin slab. *M2 A.N.*, 29 :3–22, 1995.

[31] A. Mikelic and R. Tapiéro. Mathematical derivation of the power law describing polymer flow through a thin layer. *A*, 29 :3–22, 1995.

[32] K. Mosbah, F. Messelmi and S. Saf. Unsteady flow of Bingham fluid in a two dimensional elastic domain. *Commun. Korean Math. Soc*, 39 (2024), No. 2, pp. 513–534.

[33] S.A. Nazarov. Asymptotic solution of the navier-stokes problem on the flow of a thin layer of fluid. *Siberian Math. J.*, 31 :296–307, 1990.

[34] K. Raju. *Fluid Mechanics, Heat Transfer, and Mass Transfer.* Wiley, 2011.

[35] S. Saf. *Problème de Transmission entre deux Fluides de Herschel-Bulkley dans une Couche Mince avec frottement.* PhD thesis, Université de Biskra, 2022.

[36] S. Saf, F. Messelmi. Flow of Herschel-Bulkley fluid through a three dimensional thin layer. *Studies in Engineering and Exact Sciences*, no. v.5, n.1, p. 1470-1486, 2024.

[37] S. Saf, F. Messelmi. Transmission Problem Between Two Herschel-Bulkley Fluids in a Three Dimensional Thin Layer. 68(2023), No. 3, 663-677. *Int. J. Anal. Appl*, 21(2023), 91.

[38] S. Saf, F. Messelmi, F. Yazid. Transmission problem between two Herschel-Bulkley fluids in a thin layer with different power law index. *Int. J. Nonlinear Anal. Appl*, 15 (2024) 8, 17-28 .

[39] S. Saf, F. Messelmi and K. Mosbah. Transmission problme between two Herschel-Bulkley fluids in thin layer. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math*, 68(2023), No. 3, 663-677.

[40] F. Saidi. *Sur quelques problèmes de lubrification par des fluides newtoniens non isothermes et incompressibles avec des conditions aux bords non linéaires.* PhD thesis, Université Jean Monnet-Saint-Etienne, 2004.

[41] K. Taous. Equations de reynolds pour une large classe de fluides non-newtoniens. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 322(I) :1213–1218, 1995.