

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمّار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE



Mémoire de LICENCE

Domain : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques

Par :

Benziane Ahmed-azzeddine et Oussama Maatiat

THEME

**Résolution matricielle des systèmes
différentielle à coefficients constants**

Sous la direction de monsieur : Dr Boukehila Ahcene

Année Universitaire 2014/2015

Dédicaces

Avec l'aide d'Allah, j'ai pu réaliser ce modeste travail que je dédie :

A la mémoire de mes grands parents

*A mon père mon professeur de toujours, et ma très chère mère
Pour leurs soutien et encouragements.*

A mes proches et toute ma famille.

A mes amis et tous les gens qui m'aiment.

*A tous ceux qui sont proches de mon cœur et dont je n'ai pas
cité le nom.*

Au bonheur des plus chers.

Azzeddine

Dédicaces

Avec l'aide d'Allah, j'ai pu réaliser ce modeste travail que je dédie :

A la mémoire de mes grands parents

*A mon père mon professeur de toujours, et ma très chère mère
Pour leurs soutien et encouragements.*

A mes proches et toute ma famille.

A mes amis et tous les gens qui m'aiment.

*A tous ceux qui sont proches de mon cœur et dont je n'ai pas
cité le nom.*

Au bonheur des plus chers.

Oussama

Table des matières

1	Théorèmes d'existence et d'unicité	4
1.1	Notations, définitions et notions préliminaires	4
1.2	Théorème de Cauchy-Lipschitz	5
1.3	Théorème de Cauchy-Peano-Arzéla	9
1.4	Lemmes techniques	11
2	rappel du Calcul matricielle	12
2.1	valeurs propres et vecteurs propres	12
2.2	Exemple	16
2.3	La diagonalisation d' une matrice	17
2.4	Exemples	18
2.5	Que fair lorsque la matrice (dit de transition) A est non diagonalésable?	22
2.6	Exemple	23
3	résolution matricielle du système différentielle	25
3.1	Introdiction	25
3.2	Théorème de Cauchy ,propriètes générales.	26
3.3	Méthode de résolution explicité des système linéaire à coeffitient constant (S ₁) ou (S ₂)	27
3.4	Exemples (le cas général) :	33

Notations

- _ $B(x_0, r)$ est la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r
- _ $\bar{B}(x_0, r)$ est la boule fermée centrée en x_0 et de rayon r
- _ $\text{int } I_x$ est l'intérieur de I_x
- _ \bar{A} est l'adhérence de A
- _ $S(x_0, r)$ est la sphère de centre x_0 et de rayon r
- _ V_{x_0} est voisinage de x_0

Introduction

Dans ce travail nous nous sommes intéressés par l'étude de résolution des systèmes différentiels par des méthodes matricielles .

A cet effet on a organisé notre mémoire en trois chapitres ;

Le premier chapitre est consacré à l'étude et l'existence et l'unicité de la solution dans le cas Lipchitzien ;

une démonstration a été effectuée se basant sur le théorème du point fixe

Le deuxième chapitre a pour but rappeler de calcul matriciel ; valeurs et vecteurs propres , diagonalisation des matrices ,..

Le dernier chapitre est consacré à résolution des systèmes différentiels à coefficients constants

Plusieurs applications concernant l'étude envisagée a été faites à la fin de cette étude

Chapitre 1

Théorèmes d'existence et d'unicité

1.1 Notations, définitions et notions préliminaires

soit I un intervalle de \mathbb{R} , U un ouvert de \mathbb{R}^n , f une application continue de $I \times U$ dans \mathbb{R}^n . On s'intéresse à des systèmes différentiels du type suivant

$$(E) \quad x'(t) = f(t, x(t))$$

Définition 1.1.1 Une fonction x définie sur un intervalle $I_x \subset \mathbb{R}$ à valeur dans \mathbb{R}^n est

appelée solution de (E) lorsque les propriétés suivantes sont vérifiées

- (i) $I_x \subset I, \text{int} I_x \neq \emptyset$
- (ii) $x \in C^1(I_x; U)$
- (iii) $x'(t) = f(t, x(t))$ pour tout $t \in I_x$

Notations : pour $x \in \mathbb{R}^n$, $|x|$ désigne la norme euclidienne de x .

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application différentiable en $x \in U$,

on notera indifféremment sa différentielle par $f'(x)$ ou $Df(x)$.

Définition 1.1.2 (Fonction lipschitzienne) Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application lipschitzienne de rapport k sur U si $|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$ pour tout $x_1 \in U$, et tout $x_2 \in U$

Définition 1.1.3 Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est localement lipschitzienne sur U si pour tout $x_0 \in U$, il existe un voisinage $V_{x_0} \subset U$ de x_0 tel que $f|_{V_{x_0}}$ soit lipschitzienne sur V_{x_0}

Exemple : La fonction $x \longrightarrow \sqrt[2]{x}$ est localement lipschitzienne sur \mathbb{R}_+^* , mais pas lipschitzienne

Proposition 1.1.1 Si $f \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$ alors f est localement lipschitzienne sur U

Si de plus U est convexe (ou même étoilé), et si $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C_b(U; \mathbb{R}^n)$

pour tout $i = 1, \dots, n$ alors f est lipschitzienne sur U

Définition 1.1.4 Une fonction $I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est dite continue et lipschitzienne sur U uniformément par rapport à $t \in I$ si

(i) continue sur $I \times U$

(ii) Il existe $k > 0$ tel que $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$ pour tout $t \in I$, tout $x_1 \in U$, et tout $x_2 \in U$

Définition 1.1.5 Une fonction $I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est dite continue et localement lipschitzienne par rapport à $x \in U$ uniformément en t , si

i) f continue sur $I \times U$

ii) pour tout (t_0, x_0) , il existe un voisinage $V_{t_0} \times V_{x_0} \subset I \times U$ de (t_0, x_0) ,

tel que $f|_{V_{t_0} \times V_{x_0}}$ soit lipschitzienne sur V_{x_0} , uniformément par rapport à $t \in V_{t_0}$

Proposition 1.1.2 Si $f \in C(I \times U; \mathbb{R}^n)$, si pour tout $t \in I$ $f(t, \cdot)$ est différentiable, et si $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $I \times U$, alors f est localement lipschitzienne par rapport à $x \in U$, uniformément en t

1.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

théorème 1.2.1 (théorème d'existence locale et d'unicité) soit

$f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue sur $I \times U$ localement lipschitzienne en $x \in U$

uniformément en t , pour tout $(t_0, x_0) \in I \times U$ le problème de Cauchy

$$(C) \quad x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

admet une solution (x, I_x) ($t_0 \in I_x$) de plus la solution x est unique sur I_x

Remarque : (x, I_x) est solution de (c) si et seulement si $x \in C(I_x; \mathbb{R}^n)$ et

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \text{ pour tout } t \in I_x$$

Définition 1.2.1 Un cylindre $S = [t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(x_0, R)$ est dite cylindre de sécurité pour (c) quand toute solution de (c) sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ reste contenue dans $\bar{B}(x_0, R)$

preuve de théorème : on construit d'abord un cylindre de sécurité pour (c) .

soit $D = [t_0 - \tau, t_0 + \tau] \times \bar{B}(x_0, R) \subset I \times U$, ou $\tau > 0$ et $R > 0$ sont tels que pour tout $t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ $f(t, \cdot)$ est lipschitzienne de rapport $k > 0$ sur $\bar{B}(x_0, R)$. posons $M = \max_{(t,x) \in D} |f(t, x)|$, et soit $T = \min(\tau, R/M)$

soit $\phi : x \longrightarrow \phi(x)$, l'application définie sur $C([t_0 - T, t_0 + T]; \bar{B}(x_0, R))$ par

$$\phi(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds . \text{ on verifie aisément que } \phi \text{ est une contraction sur}$$

$C([t_0 - T, t_0 + T]; \bar{B}(x_0, R))$ muni de la distance associée à la norme

$$\|x\|_* = \max_{t \in [t_0 - T, t_0 + T]} (\exp(-2k|t - t_0|) |x(t)|)$$

En effet si $x \in C([t_0 - T, t_0 + T]; \bar{B}(x_0, R))$, alors $\phi(x) \in C([t_0 - T, t_0 + T]; \bar{B}(x_0, R))$

(vérification facile). De plus

$$\begin{aligned} |\phi(y) - \phi(z)(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| ds \\ \text{et } \int_{t_0}^t |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| ds &\leq \left| \int_{t_0}^t e^{2K|s-t_0|} k |y(s) - z(s)| e^{-2K|s-t_0|} ds \right| \\ \text{et } \left| \int_{t_0}^t e^{2K|s-t_0|} k |y(s) - z(s)| e^{-2K|s-t_0|} ds \right| &\leq e^{2K|t-t_0|} \|y - z\|_{./2} \\ \text{d'où l'on déduit } \|\phi(y) - \phi(z)\| &\leq \|y - z\|_{./2} \end{aligned}$$

Définition 1.2.2 (prolongement) soient (x_1, I_{x_1}) et (x_2, I_{x_2}) deux solutions de (E).

on dit que (x_1, I_{x_1}) est un prolongement de (x_2, I_{x_2}) lorsque $I_{x_2} \supset I_{x_1}$ et $x_2|_{I_{x_1}} = x_1$. Si de plus $I_{x_2} \neq I_{x_1}$ on dit que (x_1, I_{x_1}) est un prolongement strict de (x_2, I_{x_2})

Définition 1.2.3 (Solution maximale) on dit qu'une solution (x, I_x) de (E) est une solution maximale si elle n'admet pas de prolongement strict

théorème 1.2.2 (existence locale d'une solution maximale) toute solution (x, I_x) se prolonge en une solution maximale (pas nécessairement unique)

preuve soit $I_x =]a, b[\subset I$. Nous allons montrer l'existence d'une solution maxi-

male à droite (l'existence d'une solution maximale à gauche se démontre de manière identique) On construit des prolongements successifs $(x_k,]a, b_k[)$ (i.e $]a, b_{k+1}[)$ est un prolongement de $(x_k,]a, b_k[)$. On pose $(x_k,]a, b_k[) \cong (x,]a, b[)$. On suppose que

$b_1 < \infty$, sinon la preuve est terminée .

pour tout $k \geq 1$, on pose $c_k = \sup \{c \mid (x_{k-1}, a,]a, b_{k-1}[$ admet un prolongement sur $]a, c[\}$

On a $c_k \geq b_{k-1}$. Supposons que c_k est fini à partir d'un certain rang. Le cas où c_k est infini pour tout k est étudié à la fin de la preuve . Par définition du 'sup' ,

il existe $b_k \in [b_{k-1}, c_k]$ et $x_k :]a, b_k[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ tels que $(x_k,]a, b_k[)$ est un prolongement de $(x_{k-1},]a, b_{k-1}[)$. De plus ; on peut choisir b_k

tel que $c_k - b_k < \min((c_k - b_{k-1})/k, 1/k)$ La suite $(c_k)_k$ est décroissante car l'ensemble des prolongements de x_{k-1} contient les prolongements de x_k .

Nous avons $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_k \leq \dots \leq c_k \leq c_{k-1} \leq \dots \leq c_2$ et les suites $(b_k)_k$ et $(c_k)_k$ sont adjacentes.

Soit $\bar{b} = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k$. Soit $(\bar{x}, [a, \bar{b}[)$

le prolongement commun des solution x_k (si la solution est prolongeable à \bar{b} , on prendra $[a, \bar{b}]$ comme intervalle de définition maximale sinon on prendra $]a, \bar{b}[$). Pour montrer que ce prolongement est maximal, raisonnons par l'absurde . Soit $(z,]a, c[)$ un prolongement strict de $(\bar{x}, [a, \bar{b}[)$. Alors $(z,]a, c[)$ prolonge $(x_{k-1},]a, b_{k-1}[)$ pour tout k) et donc $c \leq c_k$, par définition de c_k Par passage à la limite on obtient $c \leq \bar{b}$, ce qui est en contradiction avec $(z,]a, c[)$ est un prolongement strict de $(\bar{x}, [a, \bar{b}[)$ Le théorème est donc démontré dans le cas où c_k est fini à partir d'un certain rang . Dans le cas où $c_k = \infty$ pour tout k on peut choisir $b_k \geq k$ dans la construction précédente et on a $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \infty$

théorème 1.2.3 (Théorème d'existence de solution maximale et d'unicité) Les hypothèses sont celles du théorème d'existence locale . Pour tout $(t_0, x_0) \in I \times U$, il existe une solution maximale unique $(x, I(t_0, x_0))$ de (E) vérifiant $x(t_0) = x_0$ L'intervalle maximale $I(t_0, x_0) = (t^-(t_0, x_0), t^+(t_0, x_0))$ est ouvert dans I .

De plus t^- vérifie $t^- = \inf I$ ou $\lim_{t \searrow t^-} \min(d(x(t), \partial U), 1/|x(t)|) = 0$ de même

t^+ vérifie $t^+ = \sup I$ ou $\lim_{t \searrow t^+} \min(d(x(t), \partial U), 1/|x(t)|) = 0$

preuve : On suppose que I est ouvert .Le lecteur pourra adapter la preuve aux autres cas On pose $t^+(t_0, x_0) = \sup \{t \in I / (c) \text{ a une solution sur } [t_0, t] \}$,

$t^-(t_0, x_0) = \inf \{t \in I / (c) \text{ a une solution sur } [t, t_0] \}$,Donc (c) admet une solution sur $]t^-, t^+[$, De plus ,(c) n'a pas de solution sur $]t^-, t^+[$ (ni sur $[t^-, t^+]$),

sinon on pourrait prolonger la solution sur $]t^-, t^+ + \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$,et on aurait une contradiction avec la définition de t^+ .De la partie unicite du Théorème d'existence locale et d'unicité , il découle que la solution définie sur $]t^-, t^+[$ est unique . Vérifions la propriétés énoncée pour t^+ .Supposons que $t^+ < \sup I$.On veut montrer que :

$\lim_{t \searrow t^+} \min(d(x(t), \partial U), 1/|x(t)|) = 0$ Raisonons par l'absurde .Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite $(t_i)_i$, $t_i \nearrow t^+$, telle que $|x(t_i)| \leq 1/(2\varepsilon)$ et $d(x(t_i), \partial U) \geq 2\varepsilon$, pour tout i . Sans perte

de généralité, on supposera que $\varepsilon \leq 1/2\varepsilon$.

Posons $M = \max \{ |f(t, x)| \mid t_0 \leq t \leq t^+, |x| \leq 1/\varepsilon, d(x, \partial U) \geq \varepsilon \}$ Soit

$0 \leq \delta \leq \varepsilon/M$.Montrons que ,pour tout i ,et tout s vérifiant $0 \leq s \leq \delta$ et $s \leq t^+ - t_i$,on a $|x(t_i + s)| < 1/\varepsilon$ et $d(x(t_i + s), \partial U) > \varepsilon$ (1.1)

Pour montrer (1.1) on raisonne par l'absurde . On suppose qu'il existe i et $\beta \in [0, \min(\delta, t^+ - t_i)]$ tels que $|x(t_i + s)| \leq 1/\varepsilon$ et $d(x(t_i + s), \partial U) \geq \varepsilon$ pour tout $0 \leq s \leq \beta$ et $|x(t_i + \beta)| = 1/\varepsilon$ ou $d(x(t_i + \beta), \partial U) = \varepsilon$

Etant donné que l'on a $|f(t_i + s, x(t_i + s))| \leq M$ pour tout $0 \leq s \leq \beta$,on obtient

$$|x(t_i + \beta) - x(t_i)| \leq \int_{t_i}^{t_i + \beta} |f(s, x(s))| ds \leq \beta M \leq \delta M \leq \varepsilon$$

Par conséquent $|x(t_i + \beta)| < |x(t_i)| + \varepsilon \leq 1/(2\varepsilon) + \varepsilon \leq 1/\varepsilon$, car $\varepsilon \leq 1/(2\varepsilon)$. Mais ,on a aussi $d(x(t_i + \beta), \partial U) \geq d(x(t_i), \partial U) - |x(t_i + \beta) - x(t_i)| > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$.

On a une contradiction et (1.1) est prouvé.

De (1.1),on déduit que ,pour tout i tel que $t^+ - t_i \leq \delta$, on a :

$$|x(t) - x(s)| \leq \int_s^t |f(\tau, x(\tau))| d\tau \leq M |t - s| \quad (1,2) \quad \text{pour tout } s, t \in [t, t^+], s \leq t$$

Montrons que $\lim_{t \searrow t^+} x(t)$ existe .Soit $(t_k)_k$ une suite telle que $t_k \nearrow t^+$ et

$\lim_{k \rightarrow \infty} t_k' = t^+$. L'inégalité (1,2) montre que $(x(t_k))_k$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{R}^n . Soit y la limite de cette suite, cette limite ne dépend pas de la suite $(t_k)_k$. En effet si $(s_k)_k$ est une autre suite telle que $s_k \prec t^+$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = t^+$, et si z est la limite de $(x(s_k))_k$, on a $|z - y| \leq M \times \lim_{k \rightarrow \infty} |s_k - t_k| = 0$ donc $\lim_{t \searrow t^+} x(t)$ existe et appartient à U .

De manière analogue, on démontrerait que $\lim_{t \searrow t^+} \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau$ existe. Ceci permet de construire une solution de (C) sur $[t^-, t^+]$. Ce qui contredit le choix de t^+ . Le théorème est donc démontré.

1.3 Théorème de Cauchy-Peano-Arzéla

soit f une fonction continue sur $I \times U$ à valeur dans \mathbb{R}^n . On veut montrer l'existence locale de solution pour (c) sous cette seule hypothèse de continuité.

Soit $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \bar{B}(x_0, R_0)$ un cylindre de longueur $2T_0$ et de rayon R_0 , contenu dans $I \times U$. Notons $M = \max_{(t,x) \in C_0} |f(t,x)| < \infty$. Le théorème d'existence locale est basé sur la construction de solutions approchées pour (c) dans le cylindre $[t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(x_0, R_0)$ ou $T = \min(T_0, R_0/M)$. Pour construire de telles solutions on utilise la méthode d'Euler; on construit cette solution sur $[t_0, t_0 + T]$, la construction sur $[t_0 - T, t_0]$ est analogue. On se donne une subdivision (régulière pour simplifier) de $[t_0, t_0 + T]$: $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t_0 + T$

Le pas de la subdivision est $h = T/N$. Pour chaque subdivision de pas $h = T/N$, on définit une fonction y_N continue sur $[t_0, t_0 + T]$, et affine sur les intervalles de la subdivision, de la façon suivante :

$$y_N(t_0) = x_0$$

$$y_N(t) = y_N(t_n) + (t - t_n) f(t_n, y_N(t_n)) \text{ si } t \in [t_n, t_{n+1}]$$

Proposition 1.3.1 pour toute subdivision de pas $h = T/N$, la fonction y_N définie ci-dessus est contenue dans la boule $\bar{B}(x_0, R_0)$

preuve : soit $h = T/N$ donné. On vérifie par récurrence sur $n \leq N$ que

$$|y_N(t) - x_0| \leq M |t - t_0| \quad \text{pour tout } t \in [t_0, t_n] \quad (1,3)$$

La propriétés (1,3) est vraie pour $n = 0$. supposons la vraie pour n ,

soit $t \in [t_n, t_{n+1}]$,

$$\text{on a : } |y_N(t) - x_0| \leq |y_N(t) - y_N(t_n)| + |y_N(t_n) - x_0| \leq |f(t_n, y_N(t_n))| (t - t_n) + M(t_n - t_0) \leq M(t - t_0)$$

on a $|f(t_n, y_N(t_n))| \leq M$ car $y_N(t_n) \in \bar{B}(x_0, R_0)$, La proposition est donc démontré

Théorème 1.3.1 (Théorème de Cauchy-Peano-Arzéla) Le problème (c) admet une solution définie sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ à valeur dans $\bar{B}(x_0, R_0)$

Preuve : soit y_N la fonction définie par la méthode d'Euler. La suite $(y_N)_N$ est uniformément bornée, car toutes les solutions vivent dans $\bar{B}(x_0, R_0)$. Les fonctions y_N sont Lipschitzienne de rapport M (par construction et parce que $|f(t_n, y_N(t_n))| \leq M$ si $t_n \in [t_0 - T, t_0 + T]$ et $y_N(t_n) \in \bar{B}(x_0, R_0)$). La famille $(y_N)_N$ est donc équicontinue. D'après le Théorème d'Ascoli-Arzéla, il existe une sous-suite, que l'on indexe toujours par N pour simplifier les notations, et une fonction $y \in C([t_0 - T, t_0 + T]; \bar{B}(x_0, R_0))$, telle que $(y_N)_N$ converge vers y uniformément sur $[t_0 - T, t_0 + T]$. Pour montrer que y est solution de (c), introduisons le module de continuité de f sur

$$[t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(x_0, R_0) : \omega_f(\delta) = \max \{ |f(\tau_1, y_1) - f(\tau_2, y_2)| : |\tau_1 - \tau_2| + |y_1 - y_2| \leq \delta \}$$

Pour tout $\tau \in (t_n, t_{n+1})$, les fonctions y_N vérifient

$$|y_N'(\tau) - f(\tau, y_N(\tau))| = |f(t_n, y_N(t_n)) - f(\tau, y_N(\tau))| \leq \omega_f((M+1)h)$$

par conséquent, nous avons :

$$\left| y_N(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(\tau, y_N(\tau)) d\tau \right| \leq |t - t_0| \omega_f((M+1)h).$$

En passant à la limite dans cette estimation, on montre que y est solution de (c)

Théorème 1.3.2 (Théorème d'Ascoli-Arzéla) soit K un espace métrique compact, et soit \mathcal{F} un sous-ensemble de $C(K; \mathbb{R}^n)$. Alors \mathcal{F} est relativement compact dans $C(K; \mathbb{R}^n)$ si et seulement si \mathcal{F} est borné, et équicontinue

1.4 Lemmes techniques

Pour démontrer qu'une trajectoire quitte une région donnée en temps fini nous utiliserons parfois le lemme suivant

lemme1.4.1 Si x est une fonction de $[\alpha, \infty[$ à valeur dans \mathbb{R} , de classe C^1 . Si la limite de x quand t tend vers l'infini existe dans \mathbb{R} , et si la limite de x' quand t tend vers l'infini existe dans \mathbb{R} , alors $\lim_{t \rightarrow \infty} x'(t) = 0$

lemme1.4.2 Si x est une fonction réelle positive ou nulle, Lipschitzienne de rang k sur $[\alpha, \infty[$ et si l'intégrale $\int_{\alpha}^{\infty} x(t) dt$ converge, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$

Chapitre 2

rappel du Calcul matricielle

2.1 valeurs propres et vecteurs propres

1) Définition

Définition 1 considrons une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ on recherche un vecteur $X \neq \vec{0}$ de dimension n tel que AX soit prportinnael à X soit $AX = \lambda X$ cette relation s'ecrira encore : $AX - \lambda X = \vec{0}$ ou encore $(A - \lambda I_n)X = \vec{0}$ ou λ désignera un nombre réel.

par définiton, le vecteur X ainsi déterminé est appelé vecteur propre de la matrice A .

Remarque 1 le vecteur X cherché est dons solution du système linéaire

$(A - \lambda I_n)X = \vec{0}$ deux cas se présenteront :

1^{er} cas : si $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) \neq 0$ le système linéaire aura une solution unique qui sera $X = \vec{0}$. ce cas ne nous intéressera dans pas.

2^{ème} cas : si $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$

l'équation obtenue par cette relation nous donnera une équation polynomiale appelée polynôme caractéristique de la matrice A ; une solution de cette équation caractéristique est appelée valeur propre de la matrice A .

a) propriétés des valeurs propres

proposition 1 une matrice carrée d'ordre n admet n valeurs propres, comptées avec leur multiplicité ces valeurs propres peuvent être complexes et, si λ_k est une valeur propre complexe de partie imaginaire non nulle, alors son conjugué $\bar{\lambda}_k$

sera également une valeur propre de la matrice A avec la même multiplicité que celui de λ_k .

proposition 2 si $A \in M_n(\mathbb{R})$ et si S est une matrice carrée inversable, alors le polynôme caractéristique de la matrice A^t est $S^{-1}AS$ sera le même et par suite, ces deux matrices auront les mêmes valeurs propres.

preuve. on a : $\det(A^t - \lambda I_n) = \det(A^t - \lambda I_n^t) = \det[(A - \lambda I_n)^t] = \det(A - \lambda I_n)$, et $\det(S^{-1}AS - \lambda I_n) = \det(S^{-1}AS - \lambda S^{-1}I_n S) = \det(S^{-1}(A - \lambda I_n)S) = \det(S^{-1}) \cdot \det(A - \lambda I_n) \cdot \det(S)$ ce qui donne : $\det(S^{-1}AS - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n)$ puisque $\det(S^{-1}) = \frac{1}{\det(S)}$ nous en déduisons que : $\det(S^{-1}AS - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n)$.

proposition 3 si λ est une valeur propre non nulle d'une matrice A inversable, alors $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de A^{-1} .

preuve. on a donc $AX = \lambda X$ par conséquent : $\lambda A^{-1}X = A^{-1}AX = X$.

par suite, nous avons : $A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X$ ce qui prouve que $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de A^{-1} .

proposition 4 si λ est une valeur propre non nulle d'une matrice A , alors $\forall p \in \mathbb{N}^*, \lambda^p$ est une valeur propre de A^p .

preuve. Démontrons ce résultat par récurrence sur p .

Initialisation : on a : $A^1 X = AX = \lambda X = \lambda^1 X$, donc λ^1 est une valeur propre de A^1 .

Hérédité on suppose que λ^n est une valeur propre de A^n pour tout entier naturel non nul $n \leq p$ (p étant fixé ≥ 1) et on montre que λ^{p+1} est une valeur propre de A^{p+1} .

on a : $A^{p+1}X = A^p(AX) = A^p(\lambda X) = \lambda(A^p X) = \lambda^{p+1}X$.

par conséquent λ^{p+1} est une valeur propre de A^{p+1} .

la propriété est donc héréditaire.

Conclusion : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \lambda^p$ est une valeur propre de A^p .

proposition 5 les valeurs propres d' une matrice triangulaire sont les valeurs des éléments de la diagonale principale de la matrice.

preuve : la matrice étant triangulaire , son équation caractéristique sera :

$p(\lambda) = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) \dots (a_{nn}-\lambda) = 0$ et par suite ,ses valeurs propres seront :

$\lambda_1 = a_{11} , \lambda_2 = a_{22} \dots, \lambda_n = a_{nn}$.

b) propriétés des vecteurs propres

propriétés 6 A toute valeur propre associer au moins un valeur propre.

preuve . les valeur propre sont les solution de l'équation caractéristique :

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

par conséquent , ces valeurs propres rendent la matrice $A - \lambda_n$ non inversible ; par suite nous en déduisons l'existence d'un infinité de solutions pour l'équation caractéristique vectorielle : $AX = \lambda X$.

propriétés 7 les vecteurs propres sont définis à un facteur près.

preuve . si $AX = \lambda X$, alors on a $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad A(\alpha X) = \alpha(A X) = \alpha(\lambda X) = \lambda(\alpha X)$, donc αX sera un vecteur propre associé à valeur propre λ pour la matrice A .

propriétés 8 tout combinaison linéaire de vecteurs propres associés à une même valeur propre est elle-même vecteur propre pour cette valeur propre.

preuve. supposons que : X_1, X_2, \dots, X_p sont p vecteur propre associés à la valeur propre λ

on adonc $\forall k \in \{1, 2, \dots, p\}$ alors : $AX_k = \lambda X_k$.

si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ désignent p nombres réels quelconques , nous obtenons :

$A\left(\sum_{k=1}^p \alpha_k X_k\right) = \sum_{k=1}^p \alpha_k (AX_k) = \sum_{k=1}^p \alpha_k (\lambda X_k) = \lambda \left(\sum_{k=1}^p \alpha_k X_k\right)$. par suite , $\sum_{k=1}^p \alpha_k X_k$ sera un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre λ .

Remarque2 Une étude plus complète de l'algèbre linéaire, nous montrerait que l'ensemble des vecteurs Propres associés à une valeur propre , ensemble auquel on ajoute le vecteur nul , forme un sous-espace vectoriel de l'ensemble \mathbb{R}^n . Ce sous-espace vectoriel est appelé sous-espace propre associé à la valeur propre en question.

Proposition 9 Des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont linéairement indépendants.

Preuve. Considérons p vecteurs propres X_1, \dots, X_p de la matrices $M_n \in (\mathbb{R})$ correspondants Respectivement aux valeurs propres différentes respectives $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Nous allons démontrer le résultat à l'aide d' un raisonnement par l'absurde. Supposons donc que ces p vecteurs ne sont pas linéairement indépendants. Appelons r le nombre maximum de vecteurs qui sont linéairement indépendants parmi ces p vecteurs.

Nous avons donc $r < p$.

Pour simplifier les notations ,supposons que ces r vecteurs soient les vecteurs X_1, \dots, X_r

Le vecteur X_p sera donc combinaison linéaire de ces r vecteurs.

Il existera donc r nombres réels $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tels que : $X_p = \sum_{k=1}^r \alpha_k X_k$.

Comme nous avons : $A X_p = \lambda_p X_p$, nous en déduisons donc que : $A \left(\sum_{k=1}^r \alpha_k X_k \right) = \lambda_p \sum_{k=1}^r \alpha_k X_k$,

Soit encore : $\sum_{k=1}^r \alpha_k A X_k = \sum_{k=1}^r \alpha_k \lambda_k X_k = \lambda_p \sum_{k=1}^r \alpha_k X_k$

Nous en déduisons donc que : $\sum_{k=1}^r \alpha_k (\lambda_p - \lambda_k) X_k = \vec{0}$.

La famille $\{X_1, \dots, X_r\}$ étant libre, nous en déduisons que : $\forall k \in \{1, \dots, r\}$ on a :

$\alpha_k (\lambda_p - \lambda_k) = 0$ Et puisque pour tout k nous avons $\lambda_p \neq \lambda_k$, nous en tirons que les coefficients α_k sont tous nuls.

Par suite ,le vecteur X_p sera nul , ce qui est impossible puisqu' il est un vecteur propre.

Par conséquent l'hypothèse faite est fausse , d' où le résultat annoncé.

Proposition 10 : A une valeur propre de multiplicité q ,on peut associer au plus q vecteurs propres Linéairement indépendants.

Preuve .Ce résultat est admis.

Proposition 11 : Si la matrice A est inversible et si λ est une valeur propre non nulle de la matrice A , Alors les vecteurs propres

de la matrice A^{-1} relatifs à la valeur propre $\frac{1}{\lambda}$ sont les mêmes que ceux De la

matrice A relatifs à la valeur propre λ .

Preuve : Ce résultat provient immédiatement du résultat vu dans le paragraphe précédent relatif aux valeurs propres de la matrice A^{-1} .

Proposition 12 : Pour tout entier naturel non nul p , les vecteurs propres de la matrice A^p sont les mêmes que ceux de la matrice A .

Preuve : Ce résultat provient immédiatement du résultat vu dans le paragraphe précédent relatif aux valeurs propres de la matrice A^p .

2.2 Exemple

considérons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

le polynôme caractéristique de la matrice sera :

$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(4 - \lambda) + 3 = 0$, soit cette équation possède deux racines réelles qui sont : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.

recherchons maintenant les vecteurs propres associés pour la valeur propre $\lambda_1 = 1$:

il faut donc résoudre le système : $AX = X \iff \begin{cases} -x_2 = x_1 \\ 3x_1 + 4x_2 = x_2 \end{cases}$ en posant :

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ cela donne $\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 \text{ est quelconque (non nul)} \end{cases}$

donc tout vecteur de la forme : $X = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ sera vecteur propre (avec $x_2 \neq 0$)

pour la valeur propre $\lambda_2 = 3$:

il faut donc résoudre le système : $AX = 3X \iff \begin{cases} -x_2 = 3x_1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 3x_2 \end{cases}$ en posant :

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ cela donne $\begin{cases} x_1 = -3x_2 \\ x_2 \text{ est quelconque (non nul)} \end{cases}$

donc tout vecteur de la forme : $X = \begin{pmatrix} -3x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ sera vecteur propre (avec $x_2 \neq 0$)

propriétés

2.3 La diagonalisation d' une matrice

1) Définition

Définition 2 : Considérons une matrice carrée A d'ordre n . La matrice A est diagonale s'il existe une matrice d'ordre n , inversible S telle que la matrice $S^{-1}AS$ soit diagonale.

Remarque 3 : Puis que : $\det(S^{-1}AS - \lambda I_n) = \det[S^{-1}(A - \lambda I_n)S] = \det(S^{-1})\det(A - \lambda I_n)\det(S) = \det(A - \lambda I_n)$, nous En déduisons que la matrice $S^{-1}AS$ aura le même polynôme caractéristique que la matrice A .

Les éléments diagonaux de la matrice $S^{-1}AS$ seront donc les valeurs propres de la matrice A .

Nous noterons dans ce cas : $S^{-1}AS = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

Remarque 4 : Si la matrice A est diagonalisable ,iln'y a pas unicité de la matrice S .

2) Propriétés

Théorème 1 : La matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement si elle admet n vecteurs propres linéairement indépendants.

De plus ,les colonnes d'e la matrice S de transformation sont les vecteurs propres de la matrice A rangés dans l'ordre où apparaîtront les valeurs propres dans la matrice diagonale.

Preuve : Supposons que la matrice A soit diagonalisable et posons $S = [C_1, \dots, C_n]$ où C_i désigne la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice S .

Puisque : $S^{-1}AS = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, nous déduisons : $AS = S \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, ce qui donne encore

$$[AC_1, \dots, AC_n] = [\lambda_1 C_1, \dots, \lambda_n C_n]$$

Par conséquent : $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ on a : $AC_k = \lambda_k C_k$. Cela montre que les n colonnes de la matrice S sont les vecteurs propres de la matrice A qui sont nécessairement linéairement indépendants

Puisque $\det(S) \neq 0$ car la matrice S est inversible.

Réciproquement, si les n vecteurs propres X_1, \dots, X_n de la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ sont linéairement indépendants, on considère la matrice $S = [X_1, \dots, X_n]$.

On a alors : $S^{-1}AS = S^{-1}[AX_1, \dots, AX_n] = S^{-1}[\lambda_1 X_1, \dots, \lambda_n X_n]$

Soit encore : $S^{-1}AS = S^{-1}[X_1, \dots, X_n] \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Proposition 13 :

La matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement si le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants associés à chaque valeur propre est égal à l'ordre de multiplicité. De cette dernière comme solution de l'équation caractéristique.

Preuve : Ce résultat est admis.

Remarque 5 Compte tenu de cette propriété, nous pouvons dire qu'une matrice qui n'admet que des Valeurs propres simples est diagonalisable.

2.4 Exemples

Exemple 1 : Reprenons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ vue au début de ce chapitre.

Nous avons deux valeurs propres simples : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.

De plus, pour λ_1 , un vecteur propre était $x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et pour λ_2 on avait $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Ces deux valeurs propres étant simples, nous pouvons en déduire que la matrice A est diagonalisable.

Posons : $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et vérifions que la matrice S est inversible et que la matrice $S^{-1}AS$ est bien diagonale.

Comme $\det(S) = 2 \neq 0$, nous en déduisons que la matrice S est inversible et que :

$$S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

De plus ; ,soit encore : $S^{-1}AS = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ soit en-

$$\text{core : } S^{-1}AS = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Exemple 2 : On considère la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Recherchons les valeurs propres de la matrice A

$$\text{On a : } \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 & 0 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix}.$$

$$\text{On a : } \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ \lambda & 2 - \lambda & 1 \\ -\lambda & 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \quad (\text{on a remplacé } C_1 \text{ par } C_1 - C_2 + C_3), \text{ soit}$$

encore :

$$\det(A - \lambda I_3) = \lambda \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ -1 & 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \quad (\text{on a remplacé } L_2$$

par $L_2 - L_1 + L_1$ et L_3 par $L_3 - L_1$)

En définitive ,le polynôme caractéristique est : $p(\lambda) = -\lambda(4-\lambda)(2-\lambda) = 0$

Nous obtenons donc trois valeurs propres simples $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$ et $\lambda_3 = 2$.

La matrice A sera donc diagonalisable.

Recherchons maintenant les vecteurs propres

**Relativement à $\lambda_1 = 0$*

Il faut résoudre le système $AX = \vec{0}$ soit :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 \text{ quelconque (non nul)} \\ x_3 = -x_2 \end{cases}$$

Un vecteur propre sera donc : $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix}$.

**Relativement à $\lambda_2 = 4$*

Il faut résoudre le système : $AX=4X$ soit :

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 4x_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4x_2 \\ 2x_2 + 2x_3 = 4x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 \text{ quelconque (non nul)} \\ x_3 = x_2 \end{cases}$$

Un vecteur propre sera : $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Relativement à $\lambda_3 = 2$*

Il faut résoudre le système : $AX=2X$ soit :

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 2x_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2x_2 \\ 2x_2 + 2x_3 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \text{ quelconque (non nul)} \end{cases}$$

Un vecteur propre sera : $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

La matrice S sera : $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on aura : $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exemple 3 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Recherchons les valeurs propres de la matrice A

$$\text{On a : } \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & 1 \\ -1 & 3 - \lambda & 1 \\ 2 & 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & 1 \\ -\lambda & -\lambda & \lambda \\ 2 & 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix}, \text{ soit :}$$

$$\det(A - \lambda I_3) = \lambda \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(4 - \lambda)^2$$

Le polynôme caractéristique est donc $p(\lambda) = -\lambda(4 - \lambda)^2 = 0$.

Nous obtenons donc deux valeurs propres : $\lambda_1 = 0$ qui est simple et $\lambda_2 = 4$

Qui est double

Recherchons maintenant les vecteurs propres

**Relativement à $\lambda_1 = 0$*

Il faut résoudre le système $AX = \vec{0}$ soit :

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 \text{ quelconque (non nul)} \\ x_3 = -2x_2 \end{cases}$$

Un vecteur propre sera donc : $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

**Relativement à $\lambda_2 = 4$*

Il faut résoudre le système : $AX = 4X$ soit :

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 4x_1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 4x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + x_3 \\ x_2 \text{ quelconque (non nul)} \\ x_3 \text{ quelconque (non nul)} \end{cases}$$

Nous avons cette fois deux vecteurs propres linéairement indépendants :

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice S sera : $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on aura : $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

2.5 Que faire lorsque la matrice (dit de transition) A est non diagonalisable ?

- soit A une matrice carée $n \times n$ (réelle ou complexe).
- soit λ_k $k=1, \dots, m < n$ les valeurs propres distinctes de multiplicité $r_k \geq 1$ de la matrice A.

on suppose que la matrice A n' est pas diagonalisable, autrement dit il n' est pas possible de trouver r_k vecteur v linéairement indépendants satisfaisant $(A - \lambda_k I_k)v = 0$ (pour tout $k=1, \dots, m$).

- on peut quand même exhiber une matrice de passage H telle que $\hat{A} = H^{-1}AH$ est une matrice bloc diagonale. le nombre de bloc correspond au nombre de valeurs propres distinctes. chaque bloc associé à une valeur propre λ_k est une matrice triangulaire supérieure de dimension r_k .

- Ce changement de base sous intéresse car il permettra de résoudre un système d'équations différentielles linéaires de façon récursive.

on obtient les vecteurs de la matrice de passage de la façon suivante :

pour chaque valeur propre distincte λ_k , on procède récursivement. on commence en choisissant une base du sous espace propre engendré par la valeur propre λ_k , c'est-à-dire en choisissant q_k vecteurs $v_{k,1}, \dots, v_{k,p_k}$ non nul linéairement indépendants tels que $(A - \lambda_k I_n)v_{k,i} = 0$ pour $i=1, \dots, q_k$

on cherche alors un vecteur $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{p_k})$ tel que' il existe un vecteur w solution non nulle de :

$$(A - \lambda_k I_n)w = (v_{k,1}, \dots, v_{k,p_k})\alpha$$

si $q_k + 1 = r_k$ on s'arrête là et les colonnes de la matrice de passage associée à λ_k

sont $(v_{k,1}, \dots, v_{k,p_k}, w)$. si non on reprend l'étape précédente avec $(v_{k,1}, \dots, v_{k,p_k}, w)$ pour sous espace propre engendré par λ_k .

2.6 Exemple

soit la matrice réelle : $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ son polynôme caractéristique est

$P_A(\lambda) = (1 - \lambda)^3$ et il admet une racine triple $\lambda = 1$ les vecteurs propres sont les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \iff 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

que est de rang un .il n'existe que deux vecteurs propres linéairement

indépendants (la matrice A n'est pas diagonalisable)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

v_1 et v_2 forment une base du sous espace propre engendré par $\lambda = 1$ le système

$(A - I_3)w = \alpha v_1 + \alpha v_2$ peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} 2w_1 + 3w_2 + w_3 = \alpha_2 \\ -2w_1 - 3w_2 - w_3 = \alpha_1 \\ 2w_1 + 3w_2 + w_3 = -3\alpha_1 - 2\alpha_2 \end{cases}$$

et il n'admet de solution que si $\alpha_1 = \alpha_2$ (sinon les deux premières équations ne

sont pas compatibles). En posant $\alpha_1 = 1$, on peut choisir :

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

la matrice de transition est :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

on a :

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$\hat{A} = H^{-1}AH = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

K , dérivable par rapport à la variable réelle t sur \mathbb{R} ou I , intervalle de \mathbb{R}

* $Y : t \in I \rightarrow Y(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^n$ est une fonction dérivable sur \mathbb{R} ou un intervalle ouvert I de \mathbb{R}

* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_{nn}(K),$

* $B : t \in I \rightarrow B(t) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in K^n$ est une fonction continue sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R}

Remarque : si dans (S_2) , on fait $B(t) = 0$ et $I = \mathbb{R}$, on obtient alors (S_1) .

3.2 Théorème de Cauchy , propriétés générales.

1-Définition : Le système (S_1) est appelé système différentiel linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants dans K , d'inconnues y_1, y_2, \dots, y_n . On appelle solution de (S_1) toute fonction y définie dérivable sur \mathbb{R} à valeur dans K^n vérifiant (S_1)

le système S_2 est appelé système différentiel linéaire du premier ordre avec second membre (ou inhomogène) à coefficients constant dans K défini sur I , d'inconnues y_1, y_2, \dots, y_n , on appelle solution de S_2 toute fonction y défini sur l'intervalle I à la valeur dans K_N vérifiant (S_2) .

2-problème de cauchy. théorème de cauchy.

Résoudre un problème de cauchy et la recherche de solution(s) d'un système différentiel de type (S₁) ou (S₂) vérifiant une condition initiale donnée $Y_0 \in K^n$ en un temps donné ($t_0 \in I$) Autrement dit, on cherche à résoudre :

$$\begin{cases} Y'(t) = AY(t) + B(t) \\ Y(t_0) = Y_0 \\ Y_0 \in K^n. \end{cases} \quad \text{ou } B(t) \text{ est éventuellement nul et } t_0 \in I, (\text{ou } \mathbb{R}),$$

Théorème de Cauchy(admis) :

—Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et $Y_0 \in K^n$, il existe une unique solution du système(S₁) vérifiant $Y(t_0) = Y_0$.

—Pour tout $t_0 \in I$ et $Y_0 \in K^n$, il existe une unique solution du système(S₂) vérifiant $Y(t_0) = Y_0$.

3-Propriété de l'ensemble des solution de (S₁) ou (S₂)

—L'ensemble des solution de (S₁) est un espace vectoriel sur K

— Soit U(t) une solution particulière alors toute solution de (S₂) s'écrit :

$$Y(t) = U(t) + Z(t)$$

ou Z(t) est la solution générale du système linéaire différentiel (S₁) associé(c'est -à-dire sans second membre).

3.3 Méthode de résolution explicité des système linéaire à coefficient constant (S₁) ou (S₂)

(a) Cas n=1 :

Alors les système (S₁) et (S₂) se réduisent aux deux équations différentielle suivantes :

$$(E_1) y' = \alpha y$$

$$(E_2) y' = \alpha y + b(t)$$

La solution générale de la première (E_1) est : $y(t) = \lambda e^{at}$.

Si on impose la condition initiale $y(0) = y_0$, on obtient $\lambda = y_0$

Quant à la seconde (E_2), d'après les propriétés 3 du paragraphe I, la solution générale s'écrit :

$$y(t) = u(t) + \lambda e^{at}$$

ou $u(t)$ est une solution particulière de (E_2). Comment trouver une solution particulière de (E_2) ? On utilisera la méthode, dite de la variation de la constants que l'on verra plus tard, de façon générale, mais qui est la suivantes : On cherche $u(t)$ sous la forme $u(t) = \mu(t)e^{at}$. En injectant dans l'équation, on obtient : $\mu'(t)e^{at} = b(t)$

soit

$$\mu(t) = \int_{t_0}^t e^{as} b(s) ds \text{ d'où } u(t) = \left(\int_{t_0}^t e^{as} b(s) ds \right) e^{at}$$

Il suffit de prendre une solution particulière (d'où l'absence de constante : ici on a $u(t) = 0$).

La solution générale de (E_2) s'écrit :

$$y(t) = \left(\int_{t_0}^t e^{as} b(s) ds \right) e^{at} + \lambda e^{at}$$

Si on impose la condition initiale $y(t_0)$ on obtient $\lambda = y_0$

Remarque :

On peut généraliser l'équation E_2 en ne supposant plus le coefficient α constant mais en le prenant comme une fonction de t . On obtient une équation différentielle linéaire, avec second membre, en dimension 1, qui n'est plus à coefficient constant, de la forme :

$$(E_{2bis}) \quad y' = a(t)y + b(t)$$

Les propriétés 3 du paragraphe I restent vraies et la méthode de résolution donnée ci-dessus aussi, soit la solution s'écrit :

$$y(t) = y_0(t) + u(t)$$

avec :

$$i. y_0 \text{ solution générale } y' = a(t)y \text{ soit } y_0 = \lambda e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} = \lambda g(t)$$

ii. $u(t)$ est obtenue par la variation de la constante comme précédemment ce qui donne ,avec les même notations

$$u'(t)g(t) = b(t)$$

$$u(t) = \int_{t_0}^t \frac{b(s)}{g(s)} ds \quad \text{ou} \quad u(t) = \left(\int_{t_0}^t \frac{b(s)}{g(s)} ds \right) g(t)$$

(b) cas $n=2$

$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$. Alors les systèmes (S_1) ou (S_2) se ramènent respectivement à deux équation de type (E_1) ou (E_2) que l'on sait résoudre .

Exemple : Soit à résoudre le système (S_1) suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) \\ y'(t) = 3y(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Alors on a deux équations de type (E_2) que l'on résoud séparément . La solution est donnée par :

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 e^{2t} \\ y_0 e^{3t} \end{pmatrix}$$

ou la colonne $y_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ correspond à la valeur initiale pour $t_0 = 0$

ii. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ Considérons seulement le système (s_1) . Alors (s_2) est équivalent

à :

$$\begin{cases} x'(t) = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) \\ y'(t) = a_{22}y(t) \end{cases}$$

La deuxième équation est de type (E_1) que l'on sait résoudre . On reporte sa solution générale dans la première équation du système qui devient alors du type (E_1) ou la fonction inconnue est $x(t)$ On sait résoudre mais dans ce cas le paragraphe suivant va nous fournir un méthode plus rapide.

Le cas A générale sera vu plus tard ,pour n'importe quelle dimension d'espace .

2. Résolution explicité du système (S_1) :

Théorème :

(a) L'unique solution $Y(t)$ du système $S(t)$ dans K , de condition initiale $Y(0)=Y_0$ s'écrit :

$$Y(t) = R_A(t)Y_0$$

ou $R_A(t)$ est une matrice carrée de $M_n(K)$ indépendante de la condition initiale. $R_A(t)$ s'appelle la matrice résolvante de (S_1) et est unique

(b) $R_A(t)$ est donnée en fonction de A et t comme suit :

$$i. \text{ si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ alors } R_A(t) = \begin{pmatrix} e^{a_{11}t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{a_{22}t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{a_{nn}t} \end{pmatrix}$$

$$ii. \text{ si } A = \begin{pmatrix} a & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix} = aI_n + N \text{ avec } N \text{ triangulaire supérieure stricte}$$

dans $N^n = 0$, alors :

$$R_A(t) = e^{at} \left(I_n + tN + \frac{1}{2}t^2N^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}N^{n-1} \right)$$

$$iii. \text{ si } S = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T_n \end{pmatrix} \text{ ou } T_i (i = 1 \dots p) \text{ est une matrice d'ordre } n_i \text{ de la}$$

forme donnée dans *ii*), soit

$$T_i = \lambda I_{n_i} + N_i \text{ avec } N_i \text{ triangulaire supérieure stricte, et } n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$$

alors :

$$R_A(t) = \begin{pmatrix} R_{T_1}(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{T_2}(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_{T_p}(t) \end{pmatrix}$$

ou $R(t)$ est donnée par *ii*)

iv. Si A est quelconque dans $M_n(K)$, A est nécessairement trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ donc il existe une matrice complexe de changement de bases P telle que $P^{-1}AP=A$

est de la forme précédente (donnée dans *ii*). Alors $R_A(t) = PR_{A'}(t)P^{-1}$. De plus si A est réelle $R_A(t)$ est aussi réelle.

(c) Dans tous cas $R_A(t)$ vérifie les propriétés suivantes :

$$R_A(0) = I.$$

$$\frac{d}{dt}(R_A(t)) = AR_A(t) = R_A(t)A.$$

$$R_A(t+s) = R_A(t)R_A(s).$$

$$R_A(t) \text{ est inversible et } (R_A(t))^{-1} = R_A(-t).$$

Pour chaque cas de A donné dans (b) on vérifie successivement à la main que $Y(t) = R_A(t)Y_0$ pour les différents $R_A(t)$ proposés dans (b) est solution de (S_1) et vérifié la condition initiale. Le Théorème de Cauchy permet de déduire que c'est la solution unique. Elle se présente donc bien sous la forme énoncée dans α . L'unicité de $R_A(t)$ résulte du même théorème de Cauchy.

Exemple : Prenons pour A la matrice suivante $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ soit le système :

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y(t)$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

On relève du cas (b) *iii*) théorème ci-dessus. alors on a

$$T_1 = 2 \text{ et } T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I_2 + N_2 \text{ avec } N_2^2 = 0$$

$$\text{alors } R_{T_1} = e^{2t} \text{ et } R_{T_1} = e^t(I_2 + tN_2) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \text{ d'où :}$$

$$R_A(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } Y(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y(0).$$

On peut facilement déduire la proposition suivante :

Proposition :

l'ensemble φ des solutions de (S_1) est un espace vectoriel de dimension n sur K et de base (E_1, E_2, \dots, E_n) ou $E_1(t) = R_A(t)e_i, i = 1, 2, \dots, n$ et (e_1, e_2, \dots, e_n) est la base canonique de K^n . Les solutions (E_1, E_2, \dots, E_n) sont appelées solutions fondamentales.

3-Résolution explicite du système (S_2) :

Théorème : l'unique solution de (S_2) définie sur l'intervalle I contenant 0 avec condition initiale $Y(0) = Y_0$ est donnée par :

$$Y(t) = Z(t) + U(t)$$

ou $Z(t) = R_A(t)Y_0$ est l'unique solution du système (S_1) associé (sans second membre) avec condition initiale $Z(0) = Y_0$ (déterminée par le théorème du théorème du paragraphe 2) et $U(t)$ une solution particulière de (S_2) obtenue par la méthode de la variation de la constante soit :

$$U(t) = \int_0^t R_A(t-u)B(u)du.$$

Alors la solution $Y(t)$ est donnée par :

$$Y(t) = R_A(t)Y_0 + \int_0^t R_A(t-u)B(u)du.$$

Preuve : Elle consiste à vérifier directement, en utilisant les propriétés de $R_A(t)$, que $U(t)$ est solution de (S_2)

4-Conclusion :

Pour résoudre le système (S_2) avec condition initiale $Y(0) = Y_0$ on procède comme suit :

(a) On résout le système associé (S_1) de la façon suivante :

i. On diagonalise si possible la matrice A dans \mathbb{C} , sinon on trigonalise dans \mathbb{C} . (d'après ce que nous avons vu dans précédents)

Par changement de base de matrice P, si on pose $Z(t) = P^{-1}Z(t)$ $A^* = P^{-1}AP$, on se ramène donc au cas *b)i, b)ii* ou *b)iii* du paragraphe 2. On résout le système

$(Z(t)^*)' = A^*Z(t)^*$ avec la condition initiale $Z(0) = P^{-1}Y_0$ soit $Z(t) = R_{A^*}(t)P^{-1}Y_0$.

ii. La solution est donnée par $Z(t) = PZ(t)^* = PR_{A^*}(t)P^{-1}Y_0 = R_A(t)Y_0$ on a donc $R_A(t) = PR_{A^*}(t)P^{-1}$.

(b) On calcule la solution particulière $U(t)$ de (S_2) donnée dans le paragraphe 3 précédent.

(c) La solution cherchée est $Y(t) = Z(t) + U(t)$.

3.4 Exemples (le cas général) :

Exemple 1 :

résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$$

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène d'équation matricielle

$$X' = AX \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

la valeur propre de la matrice A est {2,3}

$$E_2(A) = \text{vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, E_3(A) = \text{vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{pour } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

pour $Y = P^{-1}X$, $X' = AX \Leftrightarrow Y' = DY$

$$Y' = DY \Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} \lambda e^{2t} \\ \mu e^{3t} \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{k}.$$

$$X' = AX \Leftrightarrow X(t) = \lambda \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{k}$$

Exemple 2 :

résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = x_1 + 3x_2 + e^t \\ y' = 2x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

C'est un système différentiel de taille 2 linéaire à coefficients constants d'équation

matricielle $X' = AX + B(t)$ avec

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

l'équation homogène : $X' = AX$.

les valeurs propres sont $\{1, 2\}$, $E_1(A) = \text{vect} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $E_2(A) = \text{vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

on a $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

et donc $X' = AX \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X$

posons $Y = P^{-1}X$. on a $Y' = P^{-1}X'$ et donc $X' = AX = DY$

posons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$Y' = DY \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = 2y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1(t) = \lambda_1 e^t \\ y_2(t) = \lambda_2 e^{2t} \end{cases} \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{k}$$

$A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

pour $Y = P^{-1}X$ est solution de $Y' = DY + C(t)$

$$C(t) = P^{-1}B(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^t + 2e^{-3t} \\ -e^t + 2e^{-3t} \end{pmatrix}$$

après résolution, on obtient

$$Y' = DY + C(t) \Leftrightarrow Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda e^{5t} - \frac{1}{16}e^t - \frac{1}{16}e^{-3t} \\ \mu e^{-3t} - \frac{1}{16}e^t + \frac{1}{2}te^{-3t} \end{pmatrix}$$

$$\text{puis } X' = AX + B(t) \Leftrightarrow X(t) = \lambda \begin{pmatrix} 2e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -te^{-3t} - \frac{1}{8}e^{-3t} \\ -\frac{1}{8}e^t + \frac{1}{2}te^{-3t} - \frac{1}{16}e^{-3t} \end{pmatrix}$$

on peut aussi procéder par variation des constantes après résolution séparée de

l'équation homogène.

Références

- [1]. Calcul Différentiel et Intégral Tome2 (**N. Piskounov Mir** 1980)
- [2]. Systèmes différentiels cours par **Boukehila Ahcene** Université de LAGHOUAT 2014-2015
- [3]. Systèmes différentiels. Rappels de cours et exercices **Farid Ammar Khodja**
- [4]. Calcul différentiel et intégral (**Tome I**), **J. Douchet + B. Zwahlen**, Éditions Presses polytechniques et romandes, ISBN10 : 2880741963 (244 pages) - Imprimé en 2007
- [5]. **J.-M. Arnaudiès et H. Fraysse** Cours de mathématiques, Dunod, 1980
- [6]. **Rached Mneimné**, Réduction des endomorphismes, **Calvage et Mounet**, Paris, 2006 (ISBN 978-2-916352-01-5)
- [7]. **Frédéric Brechenmacher**, Les matrices : formes de représentation et pratiques opératoires (1850-1930)
- [8]. **Ayres F (1978) Matrices** : Cours et problèmes, Série Schaum.