République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**Université Amar Thelidji- Laghouat**

**FACULTÉ : Génie Civil et d'Architecture**

**DÉPARTEMENT : Génie Civil**

# MÉMOIRE DE MASTER

**Présenté par : BAHADDI KACEM et ABBAS MOHAMED**

**DOMAINE :** Science et Technologie

**FILIERE :** Génie Civil

**OPTION :** Structures

## *Thème*

**Étude paramétrique sur le déversement des poutres métalliques à sections mono-symétriques**

**Jury de soutenance :**

| Nom et Prénom | Grade | Qualité |
|---|---|---|
| Mr. Bachiri Attia | M.C.B | Président |
| Mme. Kouidri Zohra | M.A.A | Examinatrice |
| Mr. Amara Salah | M.C.A | Encadreur |

**Promotion : Septembre - 2021**

# *Dédicaces*

*Ce modeste travail est dédié à :*

*Mes très chers parents, source de mon inspiration,*

*Mes chers frères Brahim ,Hammou ,Saïd et à toute ma famille BAHADDI.*

*Mes chères amies. Omar, Athman, Aissa, Mostapha, Zouhir,*

*A toute la promotion 2020/2021*

*Ce modeste travail est dédié à :*

*Mes très chers parents, source de mon inspiration,*

*Mes chers frères Amine ,Saïd et à toute ma famille ABBAS.*

*Mes chères amies .Abdenour , Omar , Aïssa, Mostapha, Zouhir,*

*A toute la promotion 2020/2021*

# *Remerciements*

Au terme de notre travail de mémoire, Nous voulons avant tout exprimer notre reconnaissance à Dieu. ALLAH pour tout.

Nous remercions nos très chers parents qui nous out guidé durant les moments les plus pénibles dece long chemin,

Nous remercions sincèrement les directeurs de mémoire *Mr. Amara Salah* pourses aides et sa disponibilité.

Nous remercions également le président et les membres de *jury* *Mr. Bachiri Attia* et *Mme.Kouidri Zohra* nous avoir accepté d'examiner notre travail.

Nous remercions tous les responsables de l'université et les enseignants du département Génie Civil.

Enfin nous remercions toutes nos famille frères et sœurs et nous amis qui nous ont encouragé à réaliser cetravail et ceux qui ont contribué de prêt ou de loin a mené à terme ce travail.

# Tables des matières

**CHAPITRE 1:**

**Introduction générale** ..... 1

1.1. Généralités… ..... 1

1.2. Objectifs du travail ..... 3

1.3. Plan général du mémoire ..... 4

**CHAPITRE 2 :**

**Théorie linéaire du déversement élastique** ..... 6

2.1. Généralités ..... 6

2.2. Principe de déversement ..... 8

2.3. Déversement élastique d'une poutre simple en flexion pure ..... 9

2.4. Recherche bibliographique sur le déversement des poutres ..... 14

2.5. Etude paramétrique sur le rapport Moment critique /Moment plastique ..... 18

2.6. Présentation du logiciel utilisé (LTBeam) et de la méthodologie appliquée ..... 20

2.7. Moment critique de déversement d'une poutre soumise à la flexion pure ..... 24

2.7.1. Influence des conditions d'appuis ..... 26

2.7.2. Influence du type de chargement ..... 28

2.7.3. Influence du point d'application de la charge ..... 30

2.7.4. Influence des appuis intermédiaires ..... 31

2.8. Aspect réglementaire sur le déversement [EC3.02] ..... 32

2.8.1. Résistance au déversement ..... 32

**CHAPITRE 3 :**

**Etude paramétrique sur facteurs influençant le devancement** ..... 37

3.1. Introduction ..... 37

3.2. Influence de certains paramètres sur la stabilité au déversement de la poutre ..... 37

3.2.1. Effet de la longueur de la poutre .....38
3.2.2. Effet de la dissymétrie de la section.....38
3.2.3. Effet du rapport des moments d'appuis..... 41
3.2.4. Effet du point d'application de la charge .....43
3.2.5. Effet de la position de la restreinte..... 46
3.2.6. Effet des conditions de restreintes aux appuis..... 48
3.2.6.1 Introduction .....48
3.2.6.2. Effet de la restreinte à la flexion latérale kv' .....50
3.2.6.3. Effet de la restreinte au gauchissement Kθ' .....51
3.2.6.4. Effet de la restreinte à la rotation Kθ..... 52
**CHAPITRE 4 :**
**Conclusions générales et perspectives……54**
4.1 Conclusions générales et perspectives .....54

# Résumé

Les méthodes de calcul du moment résistant au déversement des poutres en acier à sections variables ou constantes sont difficiles. A ce jour, plusieurs études et recherches sont en cours de réalisation par les laboratoires de recherches nationaux et internationaux pour aboutir à des méthodes de calcul pratiques et plus performantes. Dans ce mémoire, une investigation sur les facteurs principaux influençant la stabilité au déversement des poutres métalliques à sections mono-symétriques a été conduite. La méthode de calcul utilisée pour l'évaluation des moments critiques est la méthode des éléments finis en utilisant le logiciel LTbeam. Les paramètres étudiés dans notre travail sont principalement l'influence de la mono-symétrie de la section sur le moment critique de déversement élastique, la position des restreintes intermédiaires le long de la poutre et le long de la hauteur de la section, la position du point d'application de la charge vis-à-vis du centre de cisaillement ainsi que les conditions des restreintes aux appuis à savoir, la rigidité flexionnelle, la rigidité torsionnelle et la rigidité au gauchissement. Les résultats trouvés montrent l'importance capitale des facteurs considérés dans notre étude sur la stabilité au flambement latéral des poutres métalliques à sections mono-symétrique qu'il est primordial d'en tenir compte dans la pratique

**Mots clés** : Déversement, restreinte, moment critique, gauchissement, LTBeam

# Abstract

Methods of calculating critical lateral-torsional buckling moment of steel beams with variable or constant sections are difficult. To date, several studies and research are being carried out by national and international research laboratories to lead to practical and more efficient calculation methods. In this dissertation, an investigation of the main factors influencing critical lateral-torsional buckling of steel beams with mono-symmetrical sections has been carried out. The calculation method used for the evaluation of critical moments is the finite element method using the LTbeam software. The parameters studied in our work are mainly the influence of the mono-symmetry of the section on the elastic critical buckling moment, the position of the intermediate restraint along the beam and along the height of the section, the position of the application point of the load with respect to the shear center as well as the conditions of the restraints on the supports, namely bending stiffness, torsional stiffness and warping stiffness. The results found show the capital importance of the factors considered in our study on the lateral buckling stabilityof steel beams with asymmetrical sections that it is essential to take into account in practice.

**Key words:** Lateral torsional buckling, restraint, critical moment, warping, LTBeam

# ملخص

تعتبر طرق حساب العزم الحرج للعارضة المعدنية بمقاطع عرضيه متغيرة او ثابتة صعبة. حتى الان، يتم اجراء العديد من دراسات والبحوث من قبل المختبرات البحوث الوطنية والدولية للوصول الى طرق حساب عمليه وأكثر كفاءة. في هذه الأطروحة، تم اجراء بحث في العوامل الرئيسية التي تؤثر على ثبات الانحراف للعارضة المعدنية ذات المقاطع العرضي الغير متناظر. طريقة الحساب المستخدمة لتقييم العزم الحرج هي طريقه العناصر المحددة. باستخدام برامج LTbeam. العوامل المؤثرة التي تمت دراستها في عملنا هي بشكل اساسي تأثير مقطع العرض الغير متناظر على العزم المرن للحظة الحرجة، وموضع نوع المساند على طول الرافدة المعدنية وعلى طول ارتفاع المقطع العرضي وموضع تطبيق نقطة الحمل فيما يتعلق بمركز القص وكذلك شروط القيود على المساند، وهي الارتباط الانحنائي والارتباط الفتلي والارتباط الالتوائي. تظهر النتائج التي تم العثور عليها الأهمية الكبيرة للعوامل التي تم اخذها في عين الاعتبار في دراستنا حول ثبات الانبعاج الجانبي للعارضة المعدنية ذات المقاطع العرضية غير متناظرة التي من الضروري اخذها في عين الاعتبار في الممارسات العملية.

**الكلمات المفتاحية**: الانحراف ، الروابط ، عزم الحرج ، الالتواء ، LTbeam

# Notations

## Caractéristiques géométriques

| | |
|---|---|
| x, y, z | Coordonnées courantes d'un point |
| $\eta, \zeta, \xi$ | Coordonnées |
| $I_z$ | Moment d'inertie d'une section par rapport à l'axe z-z |
| $I_t$ | Moment d'inertie de torsion |
| $I_\omega$ | Moment d'inertie de gauchissement |
| $W_y$ | Module de flexion de la section transversal |
| $W_{el,y}$ | Module élastique par rapport à l'axe y-y |
| $W_{pl,y}$ | Module plastique par rapport à l'axe y-y |
| $W_{eff,y}$ | Module élastique de la section efficace par rapport à l'axe y-y |
| r | Rayon de congé d'un profil en I ou en H |
| $t_f$ | Epaisseur de la semelle de la poutre |
| $t_w$ | Epaisseur de l'âme de la poutre |
| b | Largeur de la semelle de la poutre |
| h | hauteur de la section d'une poutre |
| L | Longueur |

## Caractéristiques mécaniques

| | |
|---|---|
| E | Module d'élasticité |
| G | Module de glissement |
| $f_y$ | Limite d'élasticité |

## Coefficients et grandeurs sans dimensions

| | |
|---|---|
| $\chi_{LT}$ | Coefficient de réduction pour le déversement |
| $\overline{\lambda}_{LT}$ | Elancement réduit |
| $\alpha_{LT}$ | Facteur d'imperfection pour le déversement |

## Déplacements et déformations

| | |
|---|---|
| u, v, w | Déplacements de la poutre |
| $\theta$ | Angle de torsion |

## Sollicitations et contraintes

| | |
|---|---|
| $M_y$ | Moment fléchissant |
| $M_\eta$, $M_\zeta$ | Moments fléchissant local |
| $M_{cr}$ | Moment critique |
| $M_{yEd}$ | Moment maximal à mi-portée |
| $M_{bRd}$ | Moment de résistance au déversement |

# Tables des figures

Figure 1.1 Phénomène du déversement ..... 3
Figure 2.1 Déversement de poutre en porte à faux ..... 6
Figure 2.2 Translation et rotation d'une section d'un élément de poutre sujet a déversement… ..... 7
Figure 2.3 Comportement d'un élément fléchi… ..... 8
Figure 2.4 Déversement d'une poutre en double Té doublement symétrique, sollicitée en flexion pure ..... 10
Figure 2.5. Variation du rapport (Mcr/Mpl) en fonction de la longueur L (IPE, HEB) ... 19
Figure 2.6. Variation du rapport (Mcr/Mpl) en fonction de la longueur L (Poutre en caisson) ..... 19
Figure 2.7 Interface principal de LTbeam… ..... 21
Figure 2.8 Fenêtre pour application des différents types des charges…..... 22
Figure 2.9 Fenêtre pour calcul du moment critique ..... 22
Figure 2.10 Fenêtre pour introduction des restreintes…..... 23
Figure 2.11. Différentes restreintes utilisées dans LTBeam… ..... 23
Figure 2.12 Sections composées ayant une résistance élevée au déversement..... 25
Figure 2.13 Conditions d'appui, charges et types de sections transversales..... 25
Figure 2.14 Influence de la position des charges ..... 31
Figure 2.15 Courbes de flambement ..... 34
Figure 3.1 schémas de la section mono-symétrique étudiée ..... 37
Figure 3.2 Effet de la longueur de la poutre ..... 38
Figure 3.3 schémas de la section mono-symétrique étudiée ..... 39
Figure 3.4 Effet de la mono symétrie pour le cas d'une charge uniformément répartie… 40
Figure 3.5 Effet de la mono symétrie pour le cas de charge concentrée au milieu..... 40
Figure 3.6 Effet de la mono symétrie pour le cas de moments d'extrémités ..... 41
Figure 3.7 Rapport de moments d'extrémités ..... 43
Figure 3.8 Effet du rapport des moments d'appuis ..... 43
Figure 3.9 Différents niveaux d'application de la charge..... 45
Figure 3.10 Effet du point d'application de la charge pour le cas d'une charge répartie 45
Figure 3.11 Effet du point d'application de la charge pour le cas d'une charge Concentrée ..... 46
Figure 3.12 Phénomène de gauchissement ..... 47
Figure 3.13 Effet de la position de la restreinte ..... 48
Figure 3.14 Effet de la restreinte à la flexion latérale Kv' ..... 51
Figure 3.15 Effet de gauchissement θ' ..... 52
Figure 3.16 Effet de la restreinte à la rotation $K_\theta$ ..... 53

# Liste des tableaux

Tableau 2.1. Conditions aux limites et valeurs approchées des coefficients d'encastrement d'une poutre dont les deux appuis sont identiques ..... 28

Tableau 2.2 Valeurs des facteurs Cl, C2 et C3 pour kφ = 1.0 .....30

Tableau 2. 3.Courbe de déversement pour une section transversale .....34

Tableau 2.4. Facteurs d'imperfection et critères de choix de la courbe de déversement.....35

Tableau 2.5. Facteurs de correction kc .....36

# *CHAPITRE 1*

# *INTRODUCTION SUR LE PHENOMENE DE DEVERSEMENT ELASTIQUE DES POUTRES*

# *CHAPITRE 1*

# *INTRODUCTION SUR LE PHENOMENE DE DEVERSEMENT ELASTIQUE DES POUTRES*

## *1.1 . Généralités :*

Dans le domaine des constructions en acier, la tendance actuelle est d'aller vers des structures toujours plus élancées, toujours plus légères, en utilisant des nuances d'acier de plus en plus élevées. Cela a pour conséquence d'augmenter le risque de ruine par instabilité, et de rendre relativement plus complexe le dimensionnement de ces structures. Dans un souci d'optimisation, il devient alors nécessaire de disposer de méthodes de calcul adaptées, performantes, permettant d'analyser de façon précise le comportement des éléments structuraux. De nos jours, les trois principales méthodes utilisées sont les suivantes :

- Les méthodes expérimentales : elles sont évidemment les plus performantes mais aussi très coûteuses et difficiles à mettre en place; certains essais en taille réelle sont même difficilement envisageables, comme dans le cas des ouvrages d'art par exemple.
- L'utilisation de formules approchées : c'est la solution la plus couramment employée dans les bureaux d'études. Elles sont souvent intégrées à des codes de dimensionnement auxquels les projeteurs doivent se conformer de façon à respecter la législation en vigueur. Il existe parfois différents niveaux de précision et de qualité de ces formules, et par-là même de difficulté d'application. Cependant, le principal avantage de ces méthodes réside dans la rapidité et la facilité d'utilisation ainsi que dans la possibilité d'automatiser les calculs. Les

domaines d'application de ces formules sont en contrepartie assez limités, et leur degré de précision est variable.

- Les méthodes numériques : Elles dépendent des progrès des outils informatiques. Elles permettent d'examiner soigneusement le comportement jusqu'à la ruine des structures, et sont les plus à même représenter la réponse "réelle" des structures, après les méthodes expérimentales bien sûr. Elles sont moins coûteuses que les essais au niveau des moyens et du temps, mais nécessitent quand même une maîtrise des outils numériques et des principes du calcul non linéaire. On recense différentes méthodes de calcul numérique ; la plus connue et la plus utilisée à l'heure actuelle est certainement la Méthode des Eléments Finis. Elle autorise différents niveaux de performance et de complexité, en rapport avec le degré de précision recherché.

La maîtrise du comportement des éléments de poutre est particulièrement importante, puisque les poutres sont les éléments les plus courants des structures du Génie Civil, et plus précisément de la construction métallique. Nous nous intéresserons plus particulièrement aux types de poutres qui y sont couramment employés, c'est-à-dire les poutres à parois minces. Ces dernières ont certaines particularités : elles sont par nature très sensibles aux phénomènes d'instabilité, et si on désire optimiser leur dimensionnement, il s'avère nécessaire de tenir compte des conditions de restreintes. Ainsi, l'analyse précise du comportement de ces éléments s'avère délicate et complexe, et nécessite un investissement assez lourd.

Toute méthode de calcul devra assurer que la poutre est stable et qu'elle possède une résistance et une rigidité suffisantes pour supporter les charges appliquées. Pour les poutres métalliques ayants des sections en I, le flambement latéral global et le flambement local sont les modes types d'instabilité. L'instabilité globale, appelée aussi déversement, se manifeste par un flambement latéral et une torsion de l'ensemble de la poutre, alors que l'instabilité locale se manifeste quant à elle par le voilement local de l'âme ou de la semelle de la poutre. Le déversement résulte de la grande différence entre leurs moments d'inertie par rapport à l'axe secondaire zz et à

l'axe yy. Les codes de calcul donnent des formules de vérification de la stabilité au déversement des poutres de sections en I. Le flambement local est généralement vérifié en limitant le rapport largeur-épaisseur des éléments comprimés (âme et semelle).

On peut illustrer ce phénomène en prenant le cas de la poutre en porte-à-faux sollicitée à son extrémité par une charge concentrée verticale (fig. 1.1). Si pour une faible charge, elle ne se déforme que perpendiculairement à son axe de forte inertie (sens vertical), la partie comprimée du profilé va se dérober latéralement pour échapper à la compression si l'on augmente la charge : la poutre déverse, ce qui fait subir à chaque section, en plus de la déformation verticale, un mouvement de translation horizontal accompagné d'une rotation autour de son centre de cisaillement.

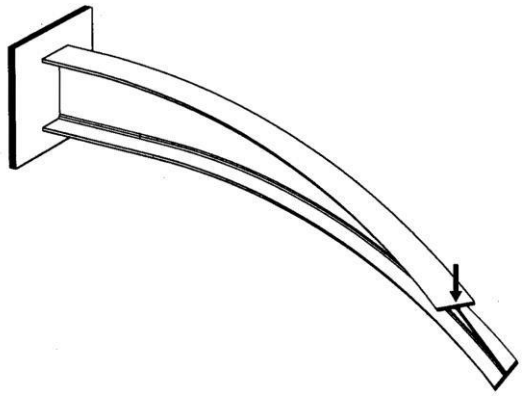


Figure 1.1 Phénomène du déversement **[Amara.08]**

### *1.2 . Objectifs du travail :*

L'évaluation de la stabilité des poutres métalliques en se basant sur des calculs simplifiés tels qu'ils sont décrits dans les règlements, n'est pas toujours une évaluation réaliste. L'hypothèse disant que les restreintes latérales aux extrémités d'une poutre se comportent comme une articulation simple ou un encastrement parfait est une approche trop simplificatrice car les investigations expérimentales montrent

que le comportement réel d'un assemblage possède des caractéristiques qui se situent entre ces deux situations extrêmes. Dans le but de simplifier les calculs des éléments structuraux, la plupart des codes de calcul des structures métalliques estiment l'effet des assemblages par l'utilisation de simples facteurs qui prennent en compte les conditions de restreintes au gauchissement et à la flexion latérale.

Pour le calcul du moment critique de déversement élastique, l'Eurocode3 considère trois cas seulement de restreinte à la flexion latérale. Flexion latérale libre au niveau des supports, flexion latérale empêchée au niveau des supports et enfin une extrémité libre à la flexion latérale et l'autre empêchée. De même pour la rotation d'extrémité de la poutre (rigidité à la torsion de l'assemblage), l'Eurocode3 ne considère que le cas d'une poutre dont les extrémités sont parfaitement bloquées contre toute rotation autour de l'axe longitudinal de la poutre. Mais en réalité, ces cas extrêmes traités par l'Eurocode3 ne sont pas les seuls cas rencontrés en pratique. Plusieurs types d'assemblages et en particulier les assemblages par plats soudés par exemple représentent des cas intermédiaires et qui ne sont pas à présent couverts par le règlement.

L'objectif de notre mémoire de fin d'études est de réaliser un travail de recherche traitant les effets de la dissymétrie de la section, des restreinte à la flexion latérale, à la torsion et au gauchissement, le niveau d'application de la charge ainsi que le type de chargement sur le moment critique de déversement élastique. Une étude de l'effet de la position des restreintes intermédiaires sur la stabilité des poutres à été également effectuée.

### *1.3. Plan général du mémoire :*

Le présent mémoire est divisé en quatre chapitres, le premier chapitre est une introduction générale sur le phénomène de déversement élastique des poutres qui présente la problématique ainsi que les objectifs du travail. Le deuxième chapitre est consacré à la théorie linéaire du déversement élastique des poutres, à la mono symétrie avec une présentation de l'aspect réglementaire ainsi qu'une recherche bibliographique sur les travaux de recherche entamés dans ce domaine. Une présentation du logiciel LTBeam est également illustrée dans ce chapitre. Le troisième chapitre traite les facteurs influençant le moment critique de déversement élastique en

utilisant le logiciel de calcul du moment critique LTBeam. Il comporte une étude détaillée de l'effet des conditions de restreintes à la flexion latérale, à la torsion et au gauchissement sur le flambement latéral des poutres métalliques mono-symétriques. L'effet du point d'application de la charge et du type de chargement sont également présentés dans ce chapitre. Une conclusion générale et des recommandations sont enfin données au chapitre quatre.

# *CHAPITRE 2*

# *THÉORIE LINÉAIRE DU DÉVERSEMENT ÉLASTIQUE*

# CHAPITRE 2

# THÉORIE LINÉAIRE DU DÉVERSEMENT ÉLASTIQUE

## 2.1. Généralités :

Les poutres fléchies sont souvent constituées de profilés en I, dont le moment d'inertie par rapport à l'axe faible (z-z) est largement inférieur à celui relatif à l'axe fort (y-y). Cette situation est souvent la cause d'un phénomène d'instabilité appelé déversement si la poutre n'est pas maintenue latéralement (Fig.2.1).

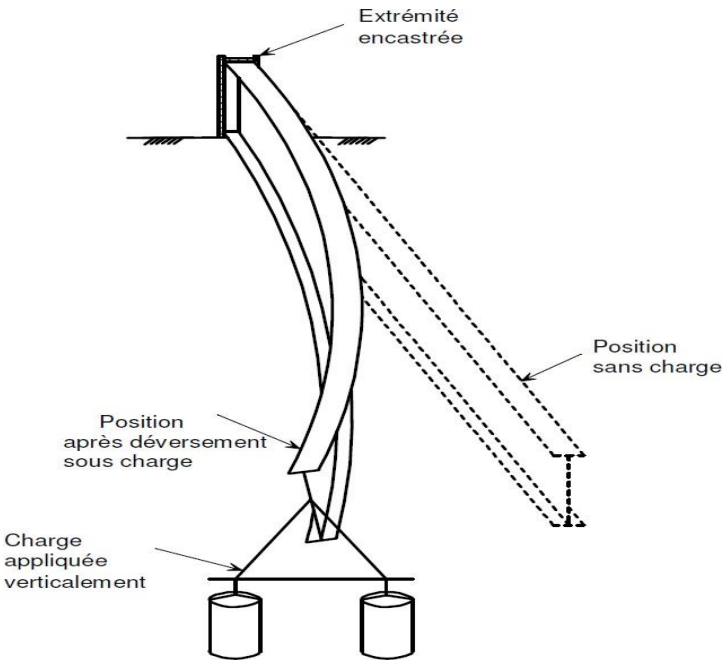



*Figure 2.1 Déversement de poutre en porte à faux*

La figure 2.1 illustre le phénomène de déversement d'une poutre parfaitement encastrée à une extrémité et chargée verticalement à l'autre extrémité libre.

Pour une charge faible, la poutre se déforme verticalement tout en restant dans le plan principal de flexion autour de son axe fort y-y. Au fur et à mesure que la charge augmente, la compression dans la semelle inférieure augmente et la partie comprimée du profilé finira par se dérober latéralement : la poutre déverse, ce qui fait subir à chaque section (en plus de la déformée verticale) une translation horizontale accompagnée d'une rotation autour de son centre cisaillement. Ce mode de ruine se

produit pour une charge (appelée charge ultime) généralement inférieure à celle qui produirait la plastification de la section au droit de l'encastrement.

On pourrait considérer le déversement comme un flambement latéral de la semelle comprimée de la poutre dans un plan horizontal. Cette vision du phénomène est trop simpliste et trop sécuritaire. En effet, il est à supposer que la moitié inférieure de la section ait tendance à flamber latéralement, elle n'est pas libre de le faire vu sa continuité avec la moitié supérieure tendue qui exige que la totalité de la section subisse une rotation. Ce raisonnement simple montre déjà que la résistance au déversement fera intervenir la rigidité de flexion transversale (par rapport à l'axe faible) et la rigidité torsionnelle de la section.

Une approche de dimensionnement des poutres sensibles à la ruine par déversement doit nécessairement prendre en compte un grand nombre de facteurs (forme de section, degré de maintien latéral, type de chargement, imperfections initiales, contraintes résiduelles) et elle est donc relativement complexe. Il est instructif d'étudier tout d'abord un modèle fondamental simple selon la théorie élastique linéaire pour ensuite le développer de sorte à inclure des cas plus généraux.

L'analogie utilisée entre la semelle comprimée d'une poutre fléchie et une barre comprimée est fort commode pour donner un aperçu physique du phénomène. Toutefois, il est clair que la partie comprimée d'une poutre ne peut flamber latéralement et prendre un déplacement transversal *v* sans rompre la continuité qui l'associe à la zone tendue de la poutre, par l'intermédiaire de l'âme (Fig. 2.2).

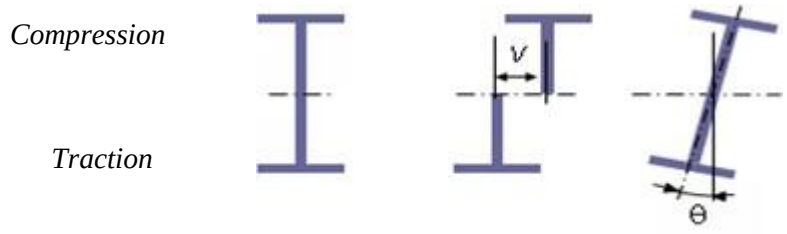



*Figure 2.2 Translation et rotation d'une section d'un élément de poutre sujet au déversement.*

En négligeant, en première approximation, la distorsion de la section droite, il est clair que la continuité dont il est question précédemment exige que les deux moitiés du profil tournent d'un même angle θ autour de leurs centres de rotation

respectifs. Il est dès lors évident que le déversement procède par flambement transversal accompagné de torsion.

### *2.2. Principe de déversement :*

La charge de ruine par déversement d'une poutre diffère de la charge critique élastique de déversement parce que d'une part, la poutre est un produit industriel et est de ce fait affectée de diverses imperfections. Une poutre n'est jamais rigoureusement symétrique et son âme rigoureusement plane tandis qu'il est pratiquement impossible d'appliquer les charges exactement dans le plan pris en compte pour le dimensionnement et l'analyse. En outre, les contraintes résiduelles engendrent une plastification prématurée de certaines zones et génèrent un comportement inélastique du matériau.

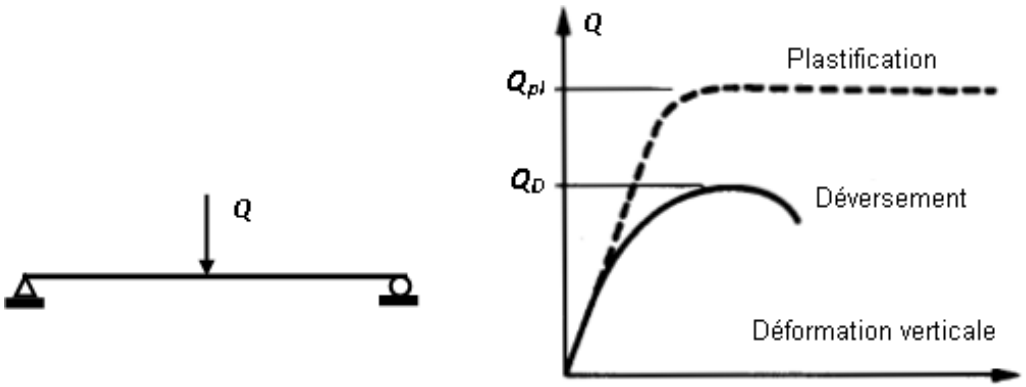



*Figure 2.3 Comportement d'un élément fléchi.*

D'une façon générale, on peut dire que la résistance ultime d'une poutre fléchie qui déverse est atteinte pour une charge $Q_D$ inferieure à la charge $Q_{pl}$ correspondant à la plastification totale de la section (Fig. 2.3). Une fois que le déversement s'est produit, la poutre montre un comportement instable similaire à celui correspondant au flambement des poteaux.

### *2.3. Déversement élastique d'une poutre simple en flexion pure :*

Des investigations analytiques et expérimentales ou des simulations numériques en utilisant les techniques des éléments finis ainsi que les accidents produits durant les phases de montage, démontrent l'évidence physique du phénomène de déversement. Comme il affecte défavorablement la capacité portante des éléments et des structures, le flambement latéral nécessite plus de considérations dans le processus d'analyse. Le phénomène de flambement latéral a été étudié dans un premier temps pour le cas fondamental d'une poutre parfaite caractérisée par une section uniforme en double té, doublement symétrique, soumise à une flexion produite par des moments d'extrémités égaux et de sens opposés $M_y$ appliqués dans le plan rigide de la section, produisant un moment de distribution uniforme tout le long de la poutre. Les appuis aux extrémités de la poutre sont du type simple concernant le comportement dans le plan de chargement ($w$=0 et $w' \neq 0$). Dans le plan latéral (par rapport à l'axe faible z-z), le déplacement latéral et la rotation autour de l'axe longitudinal sont nuls ($v$ =0 et $\varphi$ =0), tandis que la rotation par rapport à l'axe faible $v'$ et le déplacement de gauchissement $u$ sont libres (appuis à fourches). Les équations différentielles régissant le phénomène de flambement latéral sont présentées pour le cas fondamental de la poutre en double té doublement symétrique et soumise à une flexion pure autour de son axe fort. A partir de l'état déformé de la barre (Fig. 2.4), la valeur de la charge critique pour laquelle le système est en équilibre métastable peut être évaluée [Maquoi.01]. Il est à admettre encore à cet effet que :

(a) Le matériau est linéaire et infiniment élastique.

(b) La section transversale de la poutre est constante tout le long de celle-ci.

(c) Le moment d'inertie $I_z$ pour la flexion dans le plan perpendiculaire au plan de sollicitation est faible vis-à-vis du moment d'inertie $I_y$ pour la flexion dans le plan de sollicitation.

(d) Les déformations restent faibles ($\sin \varphi \approx \varphi$ et $\cos \varphi \approx 1$).

En écrivant les conditions d'équilibre et de déformation à l'état déformé, par rapport au système de coordonnées (ξ, η, ζ), les équations différentielles régissant le problème peuvent être établies [Maquoi.01].

Flexion par rapport à l'axe ζ, en tenant compte du fait que $M_\eta = M_y \cos\varphi \approx M_y$ :

$$EI_y \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + M_y = 0 \tag{2.1}$$

Flexion par rapport à l'axe η, en tenant compte du fait que $M_\zeta = M_y \sin\varphi \approx \varphi M_y$ .

$$EI_z \frac{d^2 v(x)}{dx^2} + \varphi(x) M_y = 0 \tag{2.2}$$

Torsion autour de l'axe ξ, en tenant compte du fait que $T = M_y \sin\frac{dv}{dx} \approx M_y \frac{dv}{dx}$ ;

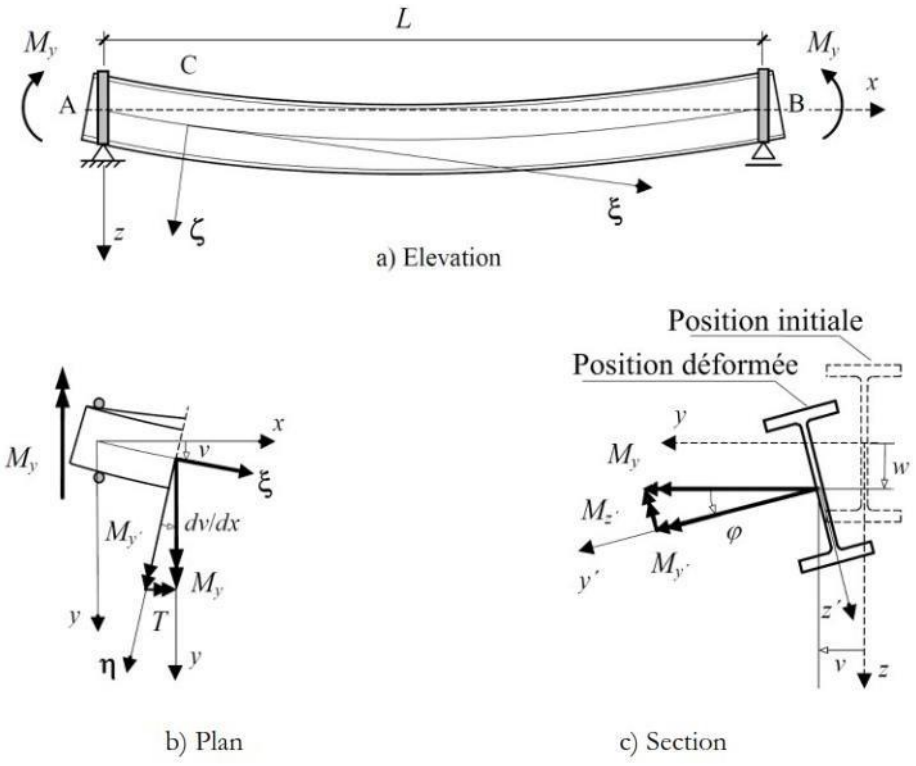



*Figure 2.4 Déversement d'une poutre en double Té doublement symétrique, sollicitée en flexion pure.*

$$EI_w \frac{d^3\varphi(x)}{dx^3} - GI_t \frac{d\varphi(x)}{dx} + M_y \frac{dv(x)}{dx} = 0 \qquad (2.3)$$

La relation (2.1) est indépendante des deux autres parce que d'une part, en raison des faibles déformations, on assimile $I_\eta$ à $I_y$ et $I_\zeta$ à $I_z$ et que d'autre part, on a admis que $I_y >> I_z$. Il en résulte que le déplacement *w* dans le plan de flexion n'affecte pas la fonction de torsion$\varphi(x)$ .

En dérivant une fois l'équation (2.3) et en remplaçant $d^2v(x)/dx^2$ par sa valeur tirée de (2.2), on obtient l'équation différentielle suivante :

$$EI_w \frac{d^4\varphi(x)}{dx^4} GI —$$

$_z$

qui est l'équation différentielle régissant la torsion$\varphi(x)$ .

En posant :

$$2\alpha = GI_t / EI_w \qquad \text{et} \qquad \beta = M_y^2/(EI_z.EI_w) \qquad (2.5)$$

L'équation (2.4) devient :

$$\frac{d^4\varphi(x)}{dx^4} - 2\alpha \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} - \beta\varphi(x) = 0 \qquad (2.6)$$

et admet pour solution :

$$\varphi(x) = A_1 e^{nx} + A_2 e^{-nx} + A_3 \cos qx + A_4 \sin qx \qquad (2.7)$$

Avec : $$n = \sqrt{\alpha + \sqrt{\beta + \alpha^2}} \qquad (2.8a)$$

$$q = \sqrt{-\alpha + \sqrt{\beta + \alpha^2}} \qquad (2.8b)$$

Les constantes d'intégration sont déterminées à partir des conditions d'appuis :

en $x = 0$ et en $x = L$ : $\varphi = 0$ (torsion nulle)

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = 0 \qquad \text{(Gauchissement libre)}$$

Ces conditions s'écrivent explicitement comme suit :

en z = 0 :

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0$$

$$A_1 n^2 + A_2 n^2 - A_3 q^2 = 0$$

d'où on tire :

$$A_3 = 0 \quad \text{et} \quad A_1 = -A_2$$

en z = $L$, compte tenu de ce qui précède :

$$2A_1 shnL + A_4 \sin qL = 0$$

$$2A_1 n^2 shnL - A_4 q^2 \sin qL = 0$$

d'où :

$$2A_1 (n^2 + q^2) shnL = 0 \quad \backslash$$

mais puisque $(n^2 + q^2)$ ne peut être nul et que $shnL$ ne peut être nul que si $n = 0$, alors $A_1 = 0$. Comme il y a déversement, la seule constante restante $A_4$ ne peut être nulle, ce qui entraîne :

$$\sin qL = 0$$

d'où : $qL = k\pi$ et $q = \frac{k\pi}{L}$ (2.9a)

où $k$ est un nombre entier.

Le mode fondamental de déversement s'obtient pour $k=1$ et la valeur du moment $M_y$ satisfaisant la condition (2.9a) est dit moment critique de déversement :

$$\sqrt{-\alpha+\sqrt{\beta+\alpha^2}}=\frac{\pi}{L} \tag{2.9b}$$

En élevant les deux membres au carré et tenant compte des définitions de α et β respectivement, on a :

$$-\frac{GI_t}{2EI_w}+\sqrt{\frac{M_y^2}{EI_zEI_w}+\left(\frac{GI_t}{2EI_w}\right)^2}=\frac{\pi^2}{L^2} \tag{2.10}$$

Le moment critique de déversement s'écrira :

$$M_{cr}=\frac{\pi}{L}\sqrt{EI_zGI_t\left(1+\frac{\pi^2}{L^2}\frac{EI_w}{GI_t}\right)} \tag{2.11}$$

Ou en termes de contraintes :

$$\sigma_{cr}^{D}=\frac{\pi}{LW_y}\sqrt{EI_zGI_t\left(1+\frac{\pi^2}{L^2}\frac{EI_w}{GI_t}\right)} \tag{2.12}$$

La présence de la rigidité de flexion latérale ($EI_z$) et des rigidités de torsion ($GI_t$ et $EI_w$) dans l'équation du moment critique est une conséquence directe des composantes latérales, et de torsion, des déformations du déversement.

L'importance relative de ces paramètres reflète le type de section transversale considérée. Ainsi le moment critique élastique d'un profil en caisson (qui possède des rigidités de flexion latérale et de torsion uniforme importantes) sera beaucoup plus élevé que celui des profils ouverts de diverses formes (dont les rigidités de flexion latérale et de torsion uniforme sont faibles). De même, parmi ces derniers, ce sont les profils à larges ailes qui présenteront les meilleures résistances au déversement, ou

encore mieux, les sections composées pour lesquelles les éléments de renfort sont ajoutés loin de l'axe faible z-z.

Il faut préciser que les équations différentielles (2.1) à (2.3) sont valables à conditions qu'aucune des déformations *v, w* ou *φ* ne soit maintenue entre appuis. Si cela était le cas (semelle supérieure de la poutre tenue latéralement, par exemple), elles s'exprimeraient différemment et le moment critique de déversement élastique serait différent.

### *2.4. Recherche bibliographique sur le déversement des poutres :*

Un grand nombre de travaux de recherche sur le déversement latéral des poutres à profilés laminés a été effectué. Dans le cadre de ces recherches, l'influence des propriétés géométriques et matérielles de la poutre, le type et le point d'application des charges, les conditions d'appuis, et les restreintes intermédiaires et au niveau des appuis sur la stabilité des poutres ont été étudiées. En majorité, les études antérieures ont porté sur des poutres avec restreintes latérales [Powell.70], [Mutton.73] et [Winter.80]).

Trahair [Trahair.79] a étudié le cas des poutres – colonnes en I mono-symétriques, simplement appuyées avec restreintes uniformes. Trahair [Trahair.93] a également fait une synthèse des différents travaux théoriques réalisés sur des poutres maintenues latéralement tout le long de la portée. Les solutions générales présentées sont soient trop compliquées pour des objectifs de conception et de calculs, soient sous formes graphiques qui sont difficiles à incorporer dans les codes de calculs.

Les règles américaines AISC LRFD [AISC.98] définissent le moment résistant du déversement élastique pour les éléments en I et en U doublement symétriques par l'expression suivante :

$$M_{cr} = C_b \frac{\pi}{L_b} \sqrt{EI_y GJ + I_y C_w \left(\frac{\pi E}{L_b}\right)^2} \tag{2.13}$$

où $C_b$ est le facteur du gradient de moment. Pour $C_b$ =1, l'équation (2.13) donne le moment critique de déversement élastique ($M_{cr0}$) pour une section prismatique en I sous l'action d'un moment constant agissant dans le plan de l'âme de la poutre [Timoshenko.61]). Cependant, dans la pratique, un chargement qui produit un diagramme des moments uniforme n'est pas courant. Dans le cas d'un diagramme des moments fléchissant non-uniforme, un facteur du moment équivalent, $C_b$ qui tient compte de la variation du diagramme des moments est utilisé. La valeur de ce facteur sans dimensions est toujours supérieure à 1.0 pour un diagramme des moments non constant. Le moment critique de déversement élastique pour un chargement quelconque peut être obtenu en multipliant le moment critique correspondant à un diagramme des moments constant ($M_{cr0}$) par le facteur $C_b$ correspondant au cas de chargement réel.

B. Suryoatmono et D. Ho. [Suryoatmono.02] ont démontré que les formules donnant les valeurs du coefficient $C_b$ présentées dans les éditions des codes AISC LRFD, ne sont pas précises pour certains cas. En utilisant les résultats basés sur la méthode des différences finies, ils ont proposé d'autres équations pour l'évaluation du coefficient $C_b$.

En utilisant les résultats obtenus par la méthode des éléments finis, J.S. Park et al [Park.04] ont proposé de nouvelles valeurs du coefficient du gradient de moment $C_b$ pour le cas des poutres munies de maintiens latéraux continus et soumises à des charges concentrées au niveau de la semelle supérieure.

Greiner et al [Greiner.99] et Salzgeber [Salzgeber.00] ont proposé des facteurs du moment équivalent pour une série complète de diagrammes des moments fléchissants. Des résultats pour des poutres mono-symétriques peuvent être trouvés dans les travaux de Balàz et Kolekovà [Balàz.02] et Helwig et al [Helwig.97]. De plus, des poutres avec restreintes au niveau des semelles supérieure et inferieure ont

été étudiées par Park et Kang [Park.03], Park et al [Park.04] et Greiner et al [Greiner.99].

M.A. Serna et al [Miguel.06], présentent une autre forme de l'expression donnant le facteur du moment uniforme équivalent $C_1$ pour n'importe quelle forme du diagramme du moment fléchissant. Dans la plupart des cas, la nouvelle expression proposée donne des résultats beaucoup plus proches des résultats numériques que ceux fournis par la même expression donnée dans les règles américaine et britannique ([AISC.86], [AISC.94], [BS.00]). La formule proposée prend en considération les conditions d'appuis à travers un paramètre relié à la longueur de flambement de la poutre.

En 2003, N.-H. Lim et al [Lim.03], étudièrent le déversement élastique des poutres en I sous l'action d'un gradient linéaire des moments et des conditions d'appuis différentes. Les moments critiques de déversement élastique sont obtenus indépendamment en utilisant : (i) la méthode de Bubnov-Galerkin et (ii) la méthode des éléments finis. Pour la méthode de Bubnov-Galerkin, le déplacement latéral, u et l'angle de rotation, $\theta$ sont représentés par des séries polynomiales. Des solutions plus précises sont obtenues à partir d'une analyse par éléments finis pour trois cas de restreintes aux appuis à travers une série complète de gradients linéaires des moments. Les résultats obtenus à partir des formules approximatives proposées de calcul du moment critique de déversement, présentent des erreurs de ±14% par rapport à ceux obtenus par la méthode des éléments finis.

Le déversement des poutres consoles, en I mono-symétriques, soumises à des charges concentrées ou uniformément reparties a été étudié par Anderson et Trahair [Anderson.72], Roberts et Burt [Roberts.85] et Wang et Kitipornchai [Wang.86], qui ont fourni des tableaux, des abaques et des expressions approximatives de calcul du moment critique de déversement élastique. De plus, l'effet des restreintes intermédiaires sur le déversement a été étudié par Wang et al ([Wang.87]).

A. Andrale et al [Andrale.07] ont étendu l'utilisation de la formule des trois facteurs (incluse dans la version ENV de l'Eurocode 3 [EC3.92]) aux poutres consoles, en prévoyant des expressions analytiques approximatives pour déterminer les coefficients $C_1$, $C_2$ et $C_3$. Ils ont étudié spécialement les poutres consoles en I (i)

symétriques et dissymétriques, (ii) avec support bloqué contre le gauchissement et libre au gauchissement, (iii) soumises à un chargement uniformément réparti et à une charge concentrée appliquée soit au niveau du centre de cisaillement soit au niveau de l'une des semelles, et ils ont examiné l'influence des conditions de restreintes au gauchissement sur le déversement élastique des poutres consoles mono-symétriques. Les expressions proposées se sont avérées précises avec une erreur de moins de 5% par rapport aux résultats numériques.

En 2007, B. Larue et al [Larue.07], développèrent un modèle simple pour le flambement élastique des poutres métalliques avec des restreintes latérales rigides et continues. Ils proposent des expressions pratiques pour déterminer le moment critique de déversement dans le cas d'une semelle bloquée contre toute déflexion latérale. Après comparaison des résultats avec ceux obtenus par différentes méthodes numériques, ils affirment que les expressions suggérées permettent une bonne approximation du moment critique de déversement.

Les éléments structuraux réalisés avec des sections formées à froid sont largement utilisés comme pannes de toitures ou lisses de bardage. Ces éléments sont fabriqués dans une variété de formes telles que des Zed, U, et Sigma qui sont particulièrement sensibles au phénomène de déversement ([Hancock.97]). Dans la littérature, le flambement local a été largement traité, par contre le déversement n'a pas été considéré par de nombreux chercheurs ([Hancock.03] et [Davies.00]). Ceci, parce que les éléments métalliques formés à froid sont souvent utilisés avec un bardage métallique qui empêche le mouvement latéral de ces éléments et donc réduit le risque de déversement. Cependant, avec l'utilisation croissante d'une variété de nouveaux systèmes de bardages composites qui offrent peu de restreintes latérale et rotationnelle à la panne, la prise en considération du déversement est devenue nécessaire. Récemment, Li [Li.04] a développé un modèle analytique pour prévoir le déversement des pannes en forme de Zed formées à froid, partiellement et latéralement restreintes et avec diverses conditions aux appuis. Le modèle a été appliqué pour prévoir les charges critiques pour des sections en Zed ([Chu.04a]) et pour des sections en U ([Chu.04b]).

En 2005, X.-t. Chu et al [Chu.05], ont étudié quantitativement l'influence des restreintes latérales sur le comportement au déversement des poutres en forme de Zed sous diverses conditions aux appuis et positions de chargement, avec et sans restreintes intermédiaires, qui est d'un intérêt pratique pour les ingénieurs. L'analyse est entamée en utilisant le modèle développé par Li ([Li.04]).

### *2.5. Etude paramétrique sur le rapport Moment critique /Moment plastique :*

Cette partie traite l'influence de la portée de la poutre sur le rapport entre le moment critique de déversement élastique et le moment plastique de la section pour un acier FeE24 . Les figures 2.5 et 2.6 montrent les résultats des calculs du rapport du moment critique sur le moment plastique ($M_{cr}/M_{pl}$) dans le cas de poutres de différenteslongueurs et sections, sur deux appuis à fourche où :

- le déplacement latéral $v$ est fixe
- la rotation de torsion θ est fixe
- la rotation de flexion latérale $v'$ est libre
- et le gauchissement $\theta'$ est libre

Les sections utilisées sont : IPE300, IPE400, HEB200, HEB300 et Caissons de 200/400/12 et 300/300/12 ~~et~~ qui sont toutes soumises à la flexion pure. Les résultats obtenus à l'issue de cette étude paramétrique illustrent parfaitement ce qui est mentionné précédemment.

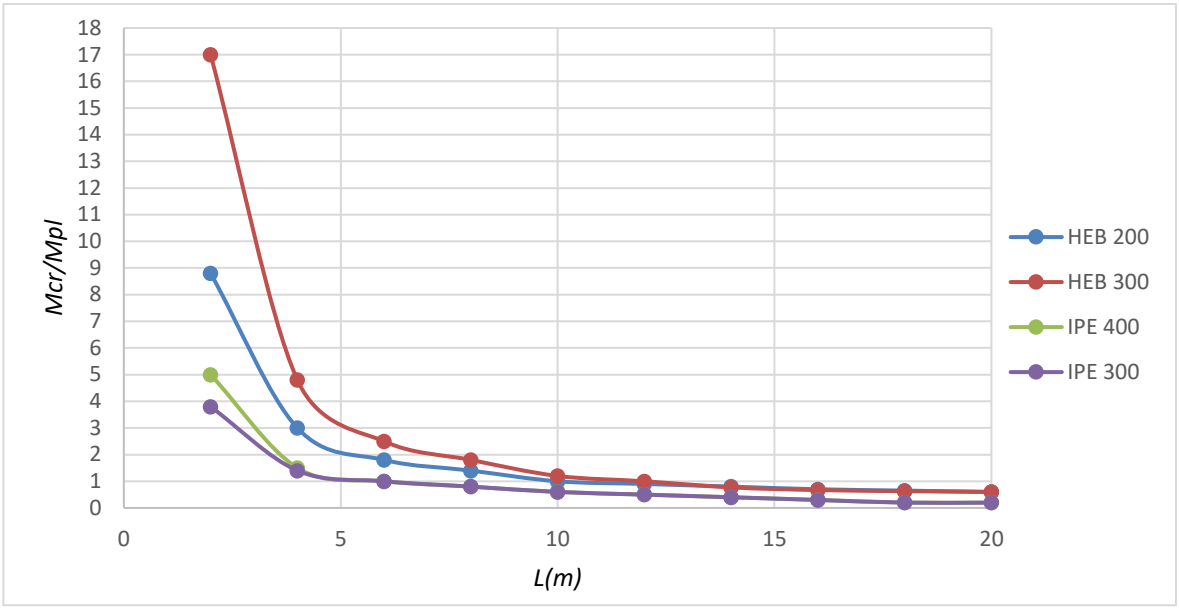



*Figure 2.5. Variation du rapport (Mcr/Mpl) en fonction de la longueur L (IPE, HEB)*

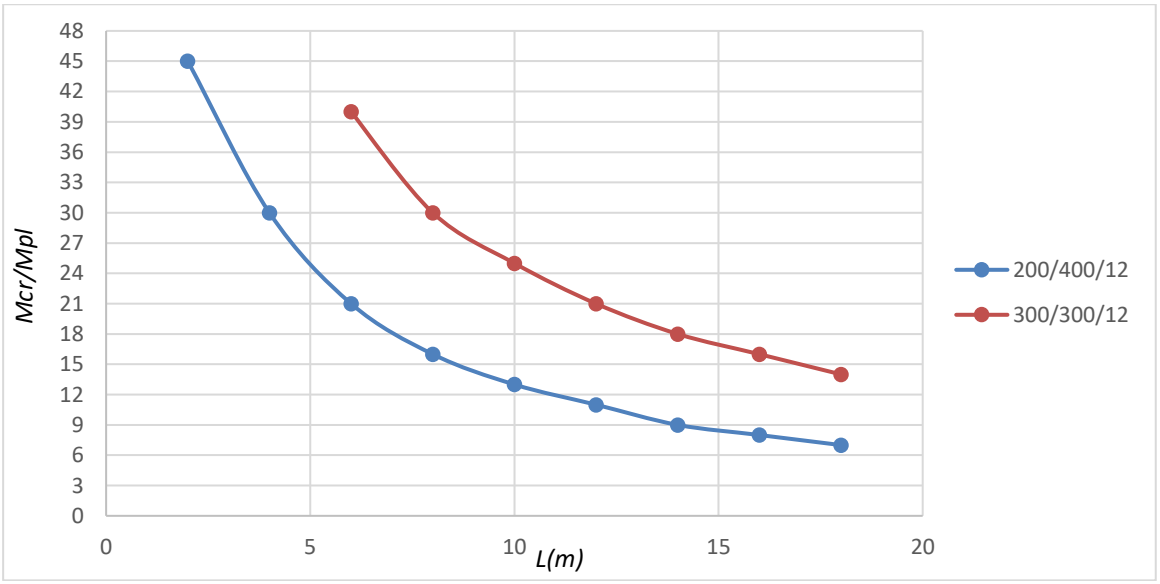



*Figure 2.6. Variation du rapport (Mcr/Mpl) en fonction de la longueur L (poutre en caisson)*

On peut constater d'après les figures 2.5 et 2.6 que le rapport $M_{cr}/M_{pl}$ diminue en augmentant la portée de la poutre pour toutes les sections étudiées (en I ou en caisson). On peut conclure que le degré de sensibilité au déversement est proportionnel à la portée de la poutre ; on peut encore dire qu'une poutre courte est susceptible de périr plus par plastification que par instabilité au déversement élastique.

### *2.6. Présentation du logiciel utilisé (LTBeam) et de la méthodologie appliquée :*

Dans le cadre d'un projet de recherche européen sur le déversement [Galéa.03], l'auteur a été amené à développer un logiciel nommé LTBEAM (lateral torsional buckling of beams) de calcul du moment critique de déversement élastique des poutres fléchies isostatiques ou continues. Ce logiciel permet de traiter un éventail très large de cas de supports en déversement (maintiens ponctuels ou répartis, au centre de gravité des sections ou en dehors, maintiens rigides ou élastiques,…) et de chargement (appliqué ou non au centre de gravité des sections). Ce logiciel a été validé avec succès par comparaison avec des résultats tirés de la littérature spécialisée ou obtenus par simulations numériques réalisées par divers partenaires européens sur différents codes par éléments finis (ANSYS, ABAQUS, …).

Il n'est pas dans l'objet de cette présentation de détailler les bases du logiciel LTBeam auxquelles un article spécifique pourrait être consacré, mais on précise ici que la modélisation du comportement de la poutre y fait appel à la technique des éléments finis de type «tronçon de poutre» (donc à 2 nœuds), ce qui impose une discrétisation de la poutre en un certain nombre de petits éléments. Les composantes de déplacement – les degrés de liberté – prises en compte à chaque nœud ainsi créé sont essentiellement :

- le déplacement latéral $v$
- la rotation de torsion θ
- la rotation de flexion latérale $v'$
- et le gauchissement θ'

La partie principale de l'interface graphique du logiciel permet de traiter directement avec :

- *Sections constantes le long de la poutre*
  - Profilés en I doublement symétriques à partir du catalogue ;
  - PRS en I mono-symétriques (semelles inégales) ou sections en Té ;
  - Toute section mono-symétrique ……..... et les propriétés
- *Restreintes latérales agissant ou non au niveau du centre de cisaillement (fig 2.2)*

- Restreintes parfaites ou élastiques aux supports avec différents degrés de libertés v,..... (voir définitions ci-dessus);
- Restreintes intermédiaires parfaites ou élastiques (1 ou 2 restreintes discrètes et /ou une restreinte continue le long de la poutre) pour différents degrés de libertés (déplacement latéral v, rotation Θ et rotation de flexion latérale v') ;

- *Chargement dans le plan de flexion*
  - Moments d'extrémités inégaux ;
  - Trois charges concentrées appliquées ou non sur le centre de cisaillement ;
  - Charge uniformément répartie ou charge trapézoïdale appliquées ou non au centre de cisaillement agissant le long de toute la portée de la poutre;
  - Moment extérieur appliqué n' importe où le long de la poutre ;

Quelques fenêtres pour l'introduction des données sont présentées ci-dessous.

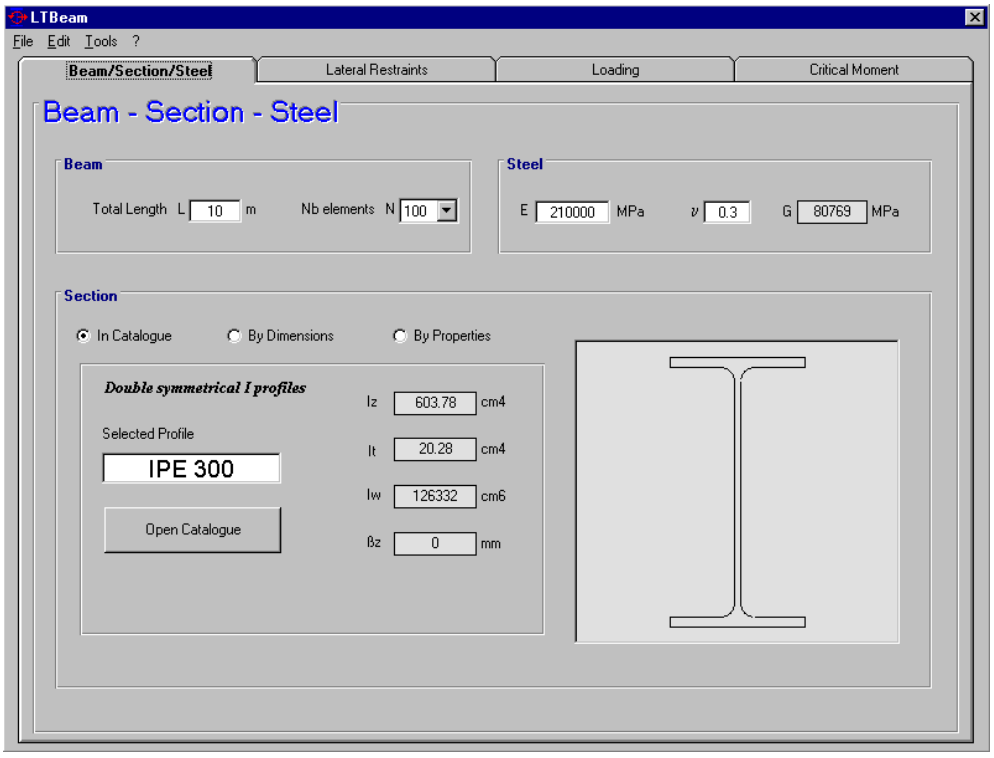



*Figure2.7 Interface principal de LTbeam*

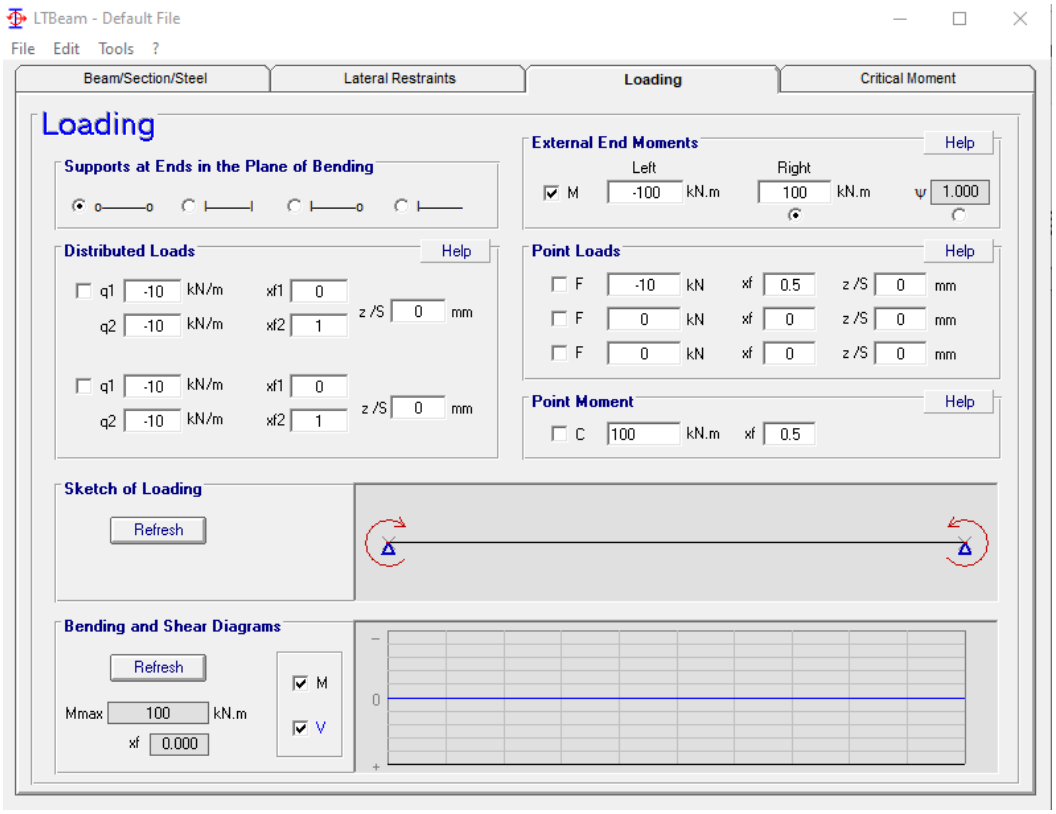



*Figure 2.8 Fenêtre pour application des différents types des charges*

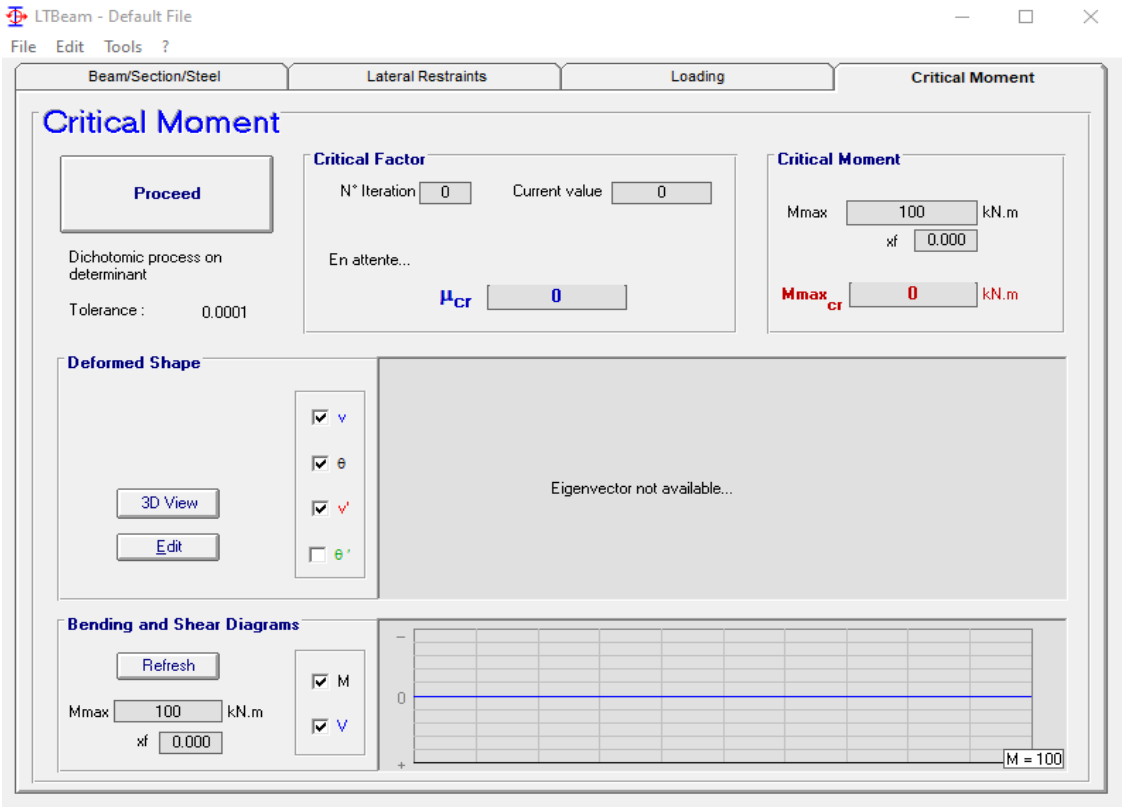



*Figure 2.9 Fenêtre pour calcul du moment critique*

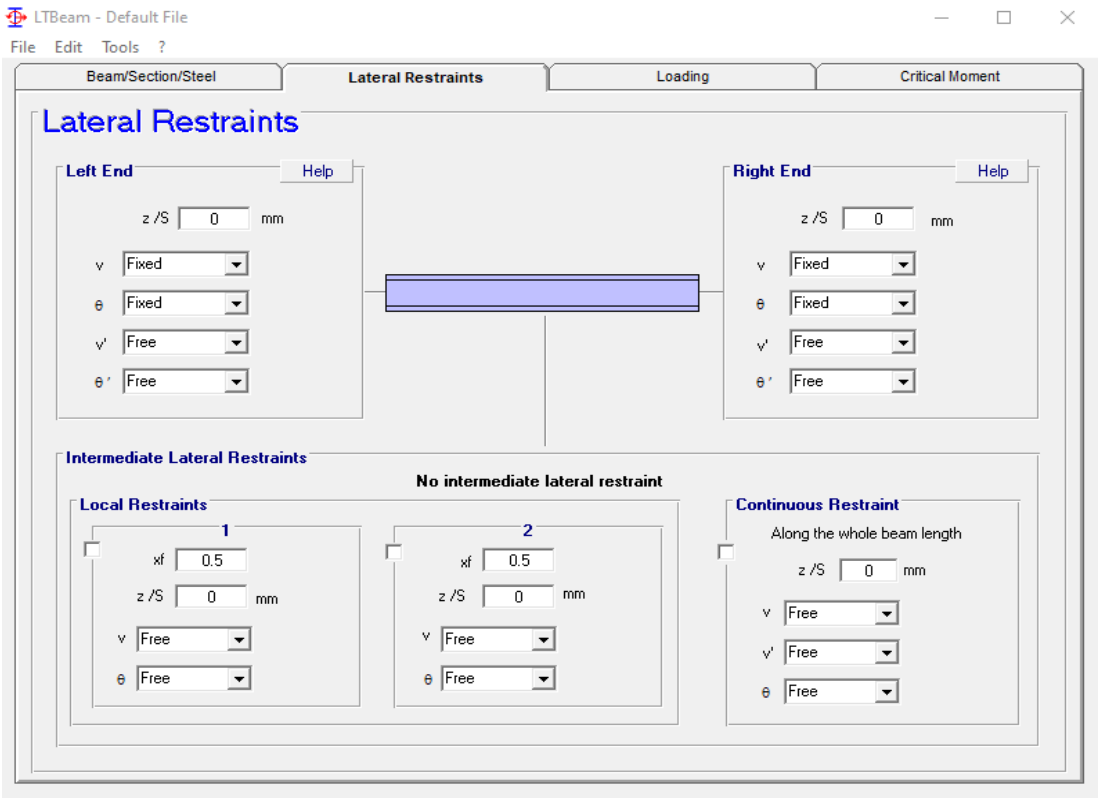



*Figure 2.10 Fenêtre pour introduction des restreintes*

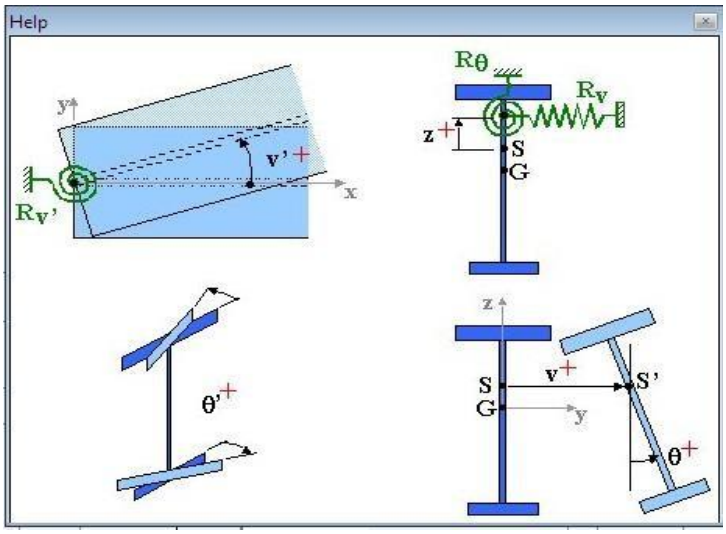



*Figure 2.11. Différentes restreintes utilisées dans LTBeam*

### *2.7. Moment critique de déversement d'une poutre soumise à la flexion pure :*

Le cas particulier de la poutre à section doublement symétrique, sur appuis à fourche et en flexion pure, se rencontre rarement en pratique dans une structure. En effet :

i. les appuis peuvent être des encastrements (souvent des encastrements élastiques) à la flexion et à la torsion et peuvent empêcher totalement ou partiellement le gauchissement ;
ii. les charges extérieures (appliquées au-dessus ou en-dessous du centre de cisaillement de la section) provoquent presque toujours une variation des moments le long de la poutre ;
iii. la section peut être dissymétrique.

C'est pourquoi des chercheurs ont proposé une formule de calcul plus générale, basée sur les mêmes hypothèses de la théorie élastique linéaire, mais, tenant compte de manière plus détaillée, du type de chargement et de son niveau d'application, des conditions d'appui et de la forme de la section.

Dans le cas d'une poutre à section constante mono-symétrique (c'est-à-dire présentant une symétrie seulement autour de l'axe faible vertical), l'expression générale du moment critique élastique correspondant à une flexion autour de l'axe fort est assez complexe (coefficients supplémentaires $C_3$ et $Z_a$). Donc Le cas particulier de la poutre simple en flexion pure ne se rencontre pratiquement jamais dans une structure réelle. De plus, les appuis d'une poutre sont souvent des encastrements élastiques à la flexion et à la torsion, les charges extérieures ne se réduisent pas à un simple moment de flexion et la section de la barre peut être dissymétrique (Fig. 2.12).

Pour les poutres non entretoisées, susceptibles de déverser, l'économie exige d'avoir recours à des sections transversales qui sont plus résistantes au flambement latéral que les poutres classiques en double Té. La formule (2.11) donnée précédemment montre que le moment critique de déversement peut être plus élevé en augmentant le moment d'inertie transversal $I_z$, le moment d'inertie de torsion $I_t$ ou le moment d'inertie de gauchissement $I_w$.

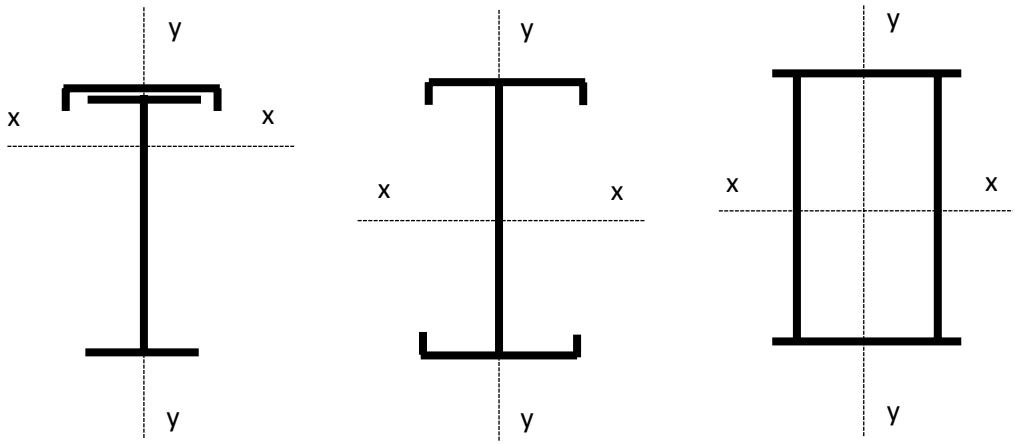



*Figure 2.12 Sections composées ayant une résistance élevée au déversement*

Ainsi, les poutres composées (Fig. 2.12) sont plus stables, par rapport aux poutres en double té de dimensions similaires, parce que la matière additionnelle est ajoutée loin de l'axe d'inertie faible. Ce sont les poutres en caisson qui ne présentent pratiquement aucun risque vis-à-vis de l'instabilité au déversement car la valeur du moment d'inertie de torsion $I_t$ peut être 100 fois celle d'une section ouverte de mêmes dimensions.

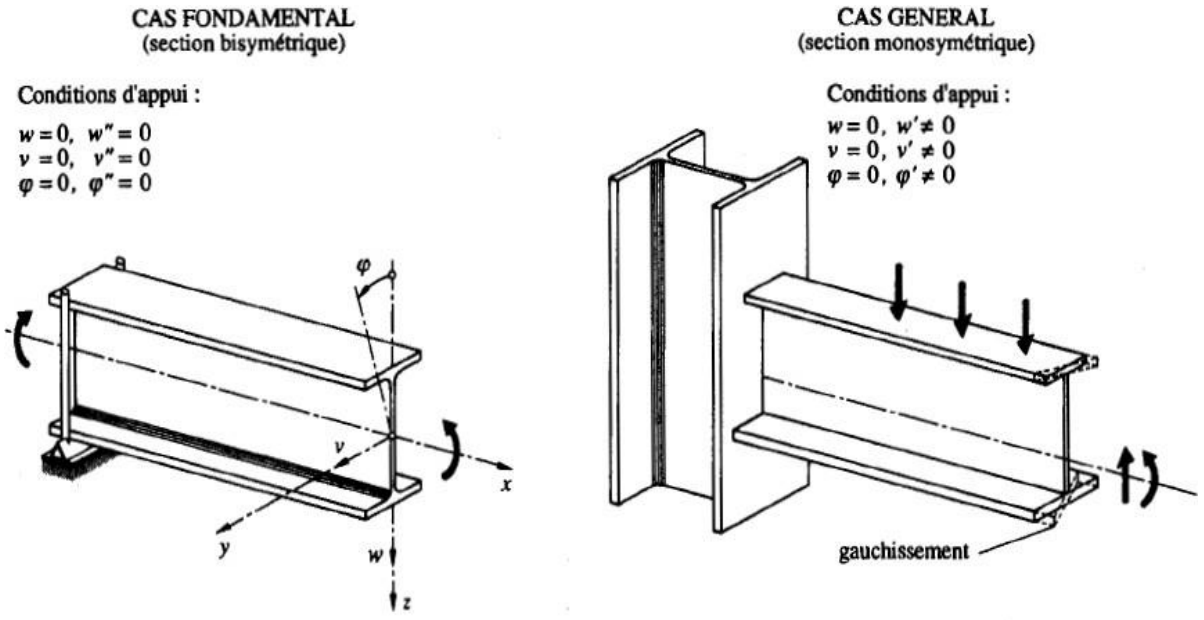



*Figure 2.13 Conditions d'appui, charges et types de sections transversales. (Hirt et al.2006)*

Clark et Hill [clark.60] ainsi que Djalaly [Djalaly.74] ont proposé sur une base empirique la formule généralisée (2.14) qui tient compte de manière plus détaillée du type de chargement de la barre et de ses conditions d'appuis. Les hypothèses de calcul sont analogues à celles énoncées dans la théorie de Timoshenko [Timoshenko.61], à la seule différence près que la section peut être dissymétrique, qu'elle peut être soumise à un chargement entre les appuis et que les conditions d'appduis sont plus générales.

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{(k_z L)^2}\left[\sqrt{\left(\frac{k_z}{k_w}\right)^2 \frac{I_w}{I_z} + \frac{(k_z L)^2 GI_t}{\pi^2 EI_t} + (C_2 Z_g - C_3 Z_j)^2} - (C_2 Z_g - C_3 Z_j)\right] \quad (2.14)$$

$C_1, C_2, C_3$ : facteurs dépendant du type de chargement et des conditions d'appui.

$k_z$ , $k_w$ : Coefficients d'encastrement aux appuis.

$Z_g = (Z_a - Z_s)$ ; avec $Z_a$ et $Z_s$ sont respectivement les cordonnées des points d'applications de la charge et le contre de cisaillement relatif au CDG de section.

$Z_j = Z_s - \left\{0.5 \int_A^0 (y^2 + z^2)(\frac{z}{I_y})\, dA\right\}$Que et un paramètre que réfecte le degré de la dissymétrie.

$z_a$ : Distance entre le centre de cisaillement C et le point d'application de la charge (Positive si ce dernier est situé entre le centre de cisaillement et la semelle tendue)

Avec la caractéristique sectorielle de la section $\beta$ ($\beta$ = 0) pour une section doublement symétrique) définie par :

$$\beta = z_C + \frac{1}{2I_y}\int_A z(y^2 + z^2)dA \quad (2.15)$$

$z_C$ : distance entre le centre de gravité G et le centre de cisaillement C (Positive si le centre de cisaillement se trouve entre le centre de gravité et la semelle comprimée).

### *2.7.1 Influence des conditions d'appuis :*

La valeur du moment critique de déversement élastique donnée par (2.14) dépend des conditions d'appuis de la poutre en flexion latérale (déplacement latéral *v* du centre de

cisaillement) et en rotation (angle φ), de même que de la possibilité de gauchissement. Les conditions d'appui en flexion latérale influencent directement le coefficient d'encastrement $k_v$, tandis que les conditions d'appui en rotation influencent le coefficient d'encastrement $k_\varphi$ Pour une poutre simple.

On a pour les deux cas extrêmes suivants :

- Cas général de la poutre sur deux appuis à fourches
  $v = v'' = 0$ d'où $k_v = 1.0$

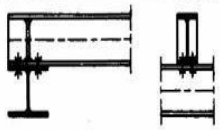
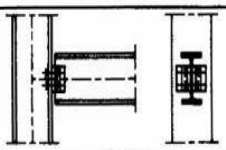
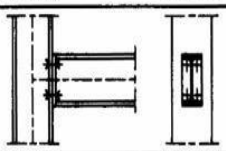
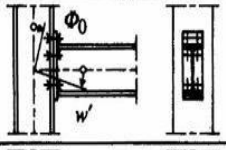
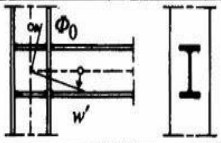
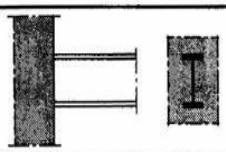
  $\varphi = \varphi'' = 0$ d'où $k_\varphi = 1.0$
- Cas particulier de la poutre parfaitement bi-encastrée, avec gauchissement empêché :
  $v = v' = 0$ d'où $k_v = 0.5$

  $\varphi = \varphi' = 0$ d'où $k_\varphi = 0.5$

Le tableau (Tableau 2.1) donne pour quelques cas concrets d'appuis les conditions aux limites et les coefficients d'encastrement correspondants. Théoriquement, pour chaque poutre présentant des conditions d'appuis différentes, il faudrait intégrer le système d'équations différentielles en tenant compte de ces conditions aux limites. Pratiquement, on peut toutefois admettre pour le dimensionnement les valeurs suivantes des coefficients d'encastrement:

- $K_v = 1.0$ pour tous les cas où les appuis de la poutre n'empêchent pas sa flexion latérale (par exemple les appuis constitués d'une colonne dont on néglige la résistance à la torsion).
- $K_v = 0.5$ pour tous les cas où les appuis de la poutre empêchent sa flexion latérale (par exemple les appuis constitués d'un élément rigide à la torsion).
- $k\varphi = 1.0$ dans tous les cas, pour autant que les appuis de la poutre empêchent une rotation des sections d'extrémité.

Tableau 2.1. Conditions aux limites et valeurs approchées des coefficients d'encastrement d'une poutre dont les deux appuis sont identiques.

| Schémas des appuis | Conditions aux limites | $k_v$ et $k_\varphi$ | Remarques |
|---|---|---|---|
|  | $w = w_0 \quad w'' = 0$<br>$v = 0 \quad v'' = 0$<br>$\varphi = 0 \quad \varphi'' = 0$ | $k_v = 1.0$<br>$k_\varphi = 1.0$ | Raidisseurs ou appuis latéraux au niveau de la membrure comprimée nécessaires afin d'empêcher la rotation de la poutre aux appuis ($w_0$ : déplacement vertical de l'appui). |
|  | $w = 0 \quad w'' = 0$<br>$v = 0 \quad v'' = 0$<br>$\varphi = 0 \quad \varphi'' = 0$ | $k_v = 1.0$<br>$k_\varphi = 1.0$ | Liaison articulée dans laquelle les cornières doivent être suffisantes pour empêcher la rotation de la poutre aux appuis. |
|  | $w = 0 \quad w'' = 0$<br>$v = 0 \quad v'' = 0$<br>$\varphi = 0 \quad \varphi'' = 0$ | $k_v = 1.0$<br>$k_\varphi = 1.0$ | Liaison semi-rigide avec gauchissement partiellement empêché par la plaque de tête. On néglige la résistance à la torsion de la colonne. |
|  | $w = 0 \quad w' = \Phi_0$<br>$v = 0 \quad v'' = 0$<br>$\varphi = 0 \quad \varphi'' = 0$ | $k_v = 1.0$<br>$k_\varphi = 1.0$ | Liaison semi-rigide avec flexion partiellement empêchée ($k_\varphi < 1.0$). On néglige la résistance à la torsion de la colonne ($\Phi_0$ : inclinaison de la colonne). |
|  | $w = 0 \quad w' = \Phi_0$<br>$v = 0 \quad v'' = 0$<br>$\varphi = 0 \quad \varphi' = 0$ | $k_v = 1.0$<br>$k_\varphi = 0.5$ | Encastrement parfait de la poutre à la torsion, gauchissement empêché par les raidisseurs. On néglige la résistance à la torsion de la colonne ($\Phi_0$ : inclinaison de la colonne). |
|  | $w = 0 \quad w' = 0$<br>$v = 0 \quad v' = 0$<br>$\varphi = 0 \quad \varphi' = 0$ | $k_v = 0.5$<br>$k_\varphi = 0.5$ | Encastrement parfait de la poutre à la flexion et à la torsion, gauchissement empêché par l'appui que l'on considère comme étant rigide à la torsion. |

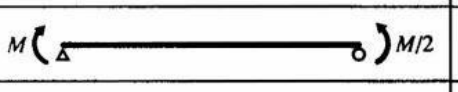
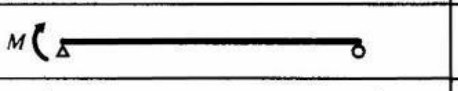
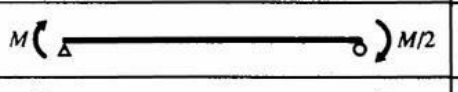
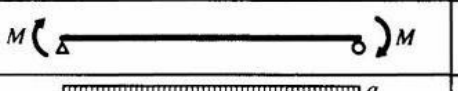
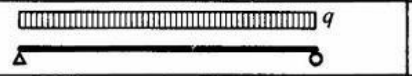
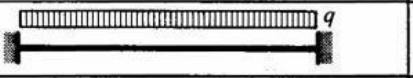
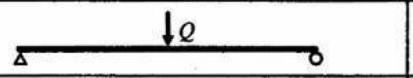
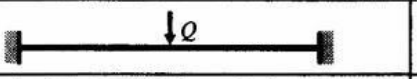
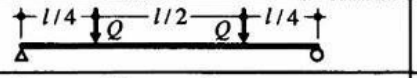
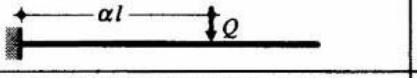
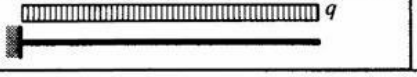
### *2.7.2 Influence du type de chargement :*

Le moment critique de déversement élastique $M_{cr}$ est fonction du type de chargement de la poutre et de son système statique (conditions d'appuis); pratiquement, on en tient compte par les facteurs C1, C2 et C3 .Le cas le plus défavorable est celui de la poutre simple sollicitée par un moment de flexion constant. Dans le cas d'un moment linéairement variable ou de charges appliquées entre les appuis, la compression maximale n'est atteinte sur toute la longueur de la poutre que dans une seule section,

ce qui se traduit par des facteurs C1, C2 et C3 plus élevés afin de tenir compte de cet effet favorable.

Le tableau (Tableau 2.2) donne les valeurs de ces trois facteurs pour les cas de charges les plus courants et pour les conditions d'appui suivantes : kv = 1.0 (cas usuel), 0.5 et 2.0 (pour la poutre en porte-à-faux) et kφ = 1.0 (valeur admise normalement). Pour des systèmes statiques dont les conditions d'appui sont telles que 0.5 < kv < 1.0, on peut soit obtenir les facteurs C1, C2 et C3 par interpolation, soit choisir kv = 1.0 (méthode conservatrice), les facteurs peuvent être trouvés dans (Boissonnade et al.

Tableau 2.2 Valeurs des facteurs Cl, C2 et C3 pour kφ = 1.0

| Mode de chargement | $k_v$ = 1.0 | | | $k_v$ = 0.5 | | | $k_v$ = 2.0 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ |
|  | 1.00 | ① | 1.00 | 1.00 | ① | 1.14 | | | |
|  | 1.32 | ① | 0.99 | 1.51 | ① | 2.27 | | | |
|  | 1.88 | ① | 0.94 | 2.15 | ① | 2.15 | | | |
|  | 2.70 | ① | 0.68 | 3.09 | ① | 1.55 | | | |
|  | 2.75 | ① | 0.00 | 3.15 | ① | 0.00 | | | |
|  | 1.13 | 0.46 | 0.53 | 0.97 | 0.30 | 0.98 | | | |
|  | 1.28 | 1.56 | 0.75 | 0.71 | 0.65 | 1.07 | | | |
|  | 1.36 | 0.55 | 1.73 | 1.07 | 0.43 | 3.06 | | | |
|  | 1.56 | 1.27 | 2.64 | 0.94 | 0.71 | 4.80 | | | |
|  | 1.05 | 0.43 | 1.12 | 1.01 | 0.41 | 1.89 | | | |
|  | | | | | | | $\frac{1.28}{\alpha}$ | 0.43 | ② |
|  | | | | | | | 2.05 | 0.83 | ② |

① Sans influence s'il n'y a pas de charge transversale

② Sans influence pour une section bi-symétrique

### *2.7.3 Influence du point d'application de la charge :*

La position du point d'application des charges extérieures, par rapport au centre de cisaillement de la section de la poutre, peut également influencer la valeur du moment critique de déversement élastique, suivant que les charges créent un moment secondaire stabilisant ou déstabilisant (Fig. 2.14). On tient compte de la position des charges en introduisant la distance $z_a$ entre le centre de cisaillement et le point d'application de la charge.

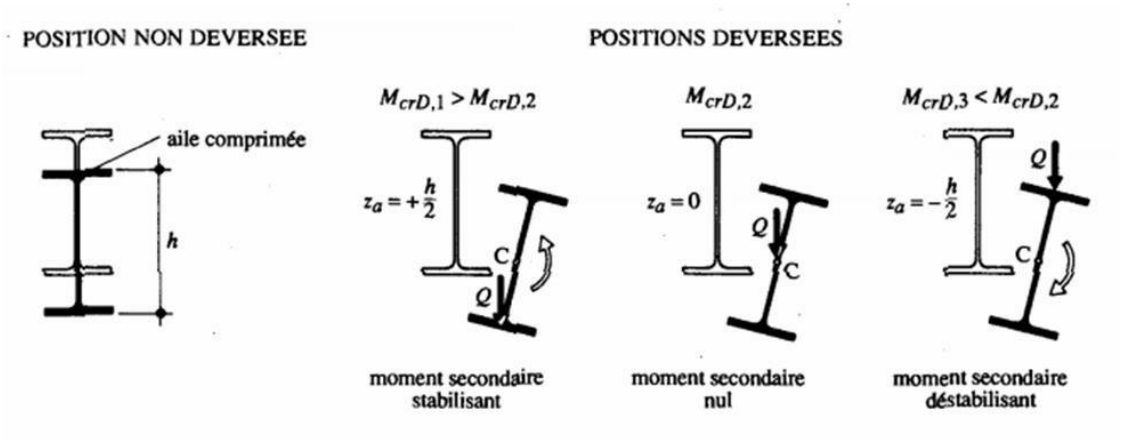



Fig.2.14. Influence de la position des charges.

Selon la position du point d'application des charges extérieures, on peut considérer les trois cas suivants :

- La charge engendre un moment secondaire stabilisant (charge suspendue, par exemple) l'hypothèse de calcul avec la charge introduite au centre de cisaillement est conservatrice ;
- La charge agit au centre de cisaillement (attache d'une solive sur l'âme d'un sommier, par exemple) : l'hypothèse de calcul avec la charge introduite au centre de cisaillement est exacte ;
- La charge engendre un moment secondaire déstabilisant, de roulement de ponts roulants ou les poutres maîtresses (stade de montage) : il est alors nécessaire d'en tenir compte du moment critique de déversement élastique.

### *2.7.4 Influence des appuis intermédiaires :*

Pour augmenter la valeur de la charge critique de déversement, on peut soit choisir une section plus importante, soit disposer des appuis latéraux intermédiaires (solution en général plus économique). On cherche à empêcher, au droit de chaque appui, tout déplacement latéral du centre de cisaillement (v = 0) et toute rotation de la section ($\varphi = 0$).

En général, on se contente d'appuyer la membrure comprimée de la poutre, ce qui est souvent la solution la plus simple du point de vue constructif. Même si une légère

rotation des sections est tout de même possible, on peut généralement la négliger et admettre φ = 0. Les appuis latéraux doivent être dimensionnés pour reprendre une force de déviation de l'ordre de 1 % de 1'effort normal de compression où M est le moment de flexion au droit de l'appui.

On voit dans les formules (2.11) et (2.14), que le moment critique Mcr peut être déterminé de différentes manières. Une seule solution exacte et simple est disponible pour être utilisée avec des conditions d'appuis parfaites (2.11). Cela conduit à l'utilisation de méthodes d'approximation pour calculer Mcr pour tous les autres cas. Chacune des méthodes d'approximation sont connues pour donner de bons résultats.

### *2.8. Aspect réglementaire sur le déversement [EC3.92] :*

Pour des poutres droites de sections uniformes avec différentes conditions d'appuis et de chargement, l'une des formules les plus connues permettant de calculer le moment critique de déversement élastique est celle des trois facteurs qui est donnée dans la version ENV de l'Eurocode 3 [EC3.92]. La formule des trois facteurs est une formule générale, applicable à n'importe quel mode de sollicitation et conditions d'appui, ainsi que pour les poutres à sections dissymétriques. La poutre doit être maintenue à ses deux extrémités contre le déplacement latéral et la rotation autour de l'axe longitudinal x-x. La formule des trois facteurs donnant le moment critique de déversement $M_{cr}$ s'écrit sous la forme de l'équation (2.14) [EC3.92].

#### *2.8.1. Résistance au déversement :*

La procédure de vérification au déversement d'une poutre consiste à comparer la valeur du moment maximal sollicitant à la valeur du moment résistant. D'après Eurocode 3 [EC3.92], la vérification d'une poutre non maintenue latéralement et soumise à une flexion selon l'axe fort doit être vérifiée vis-à- vis du déversement de la façon suivante:

$$\frac{My_{Ed}}{M_{b.Rd}} \leq 1 \qquad (2.16)$$

où :

$M_{y, Ed}$ est la valeur de calcul du moment sollicitant dans le plan principal de flexion y-y$M_{b, Rd}$ est le moment résistant de calcul au déversement donné par :

$$M_{b.Rd} = \chi_{LT} W_y f_y / \gamma_{M1} \quad (2.17)$$

Où :

$\gamma_{M1}$ : Le facteur de la sécurité partiel, la valeur recommandée qui est = 1,1;

$f_y$ : Contrainte limite élastique du matériau;

$W_y$ : Le module d'inertie de la section transversale, choisi en fonction de la classe de la section ;

$W_y = W_{pl,y}$ (module plastique) pour les sections transversales de classes 1 et 2 ;

$W_y = W_{él,y}$ (module élastique) pour une section transversale de classe 3 ;

$W_y = W_{eff,y}$ (module élastique de la section efficace) pour une section transversale de classe 4 ;

$\chi_{LT}$ est le coefficient de réduction pour le déversement.

Pour les barres fléchies à section constante, il convient de déterminer la valeur de $\chi_{LT}$ en fonction de l'élancement réduit $\bar{\lambda}_{LT}$ . ÷

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\phi_{LT} + \sqrt{\phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2}} \quad (2.18)$$

Où :

$$\phi_{LT} = 0.5\left[1 + \alpha_{LT}\left(\bar{\lambda}_{LT} - 0{,}2\right) + \bar{\lambda}^{2}_{LT}\right] \quad (2.19)$$

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_y f_y}{M_{cr}}} \quad (2.20)$$

où :

$M_{cr}$ est le moment critique pour le déversement élastique, calculé sur base des propriétés de la section transversale brute (pour une classe 4, on peut considérer It =

0) et prenant en compte les conditions de chargement, la distribution réelle des moments et les maintiens latéraux d'extrémités et intermédiaires éventuels.

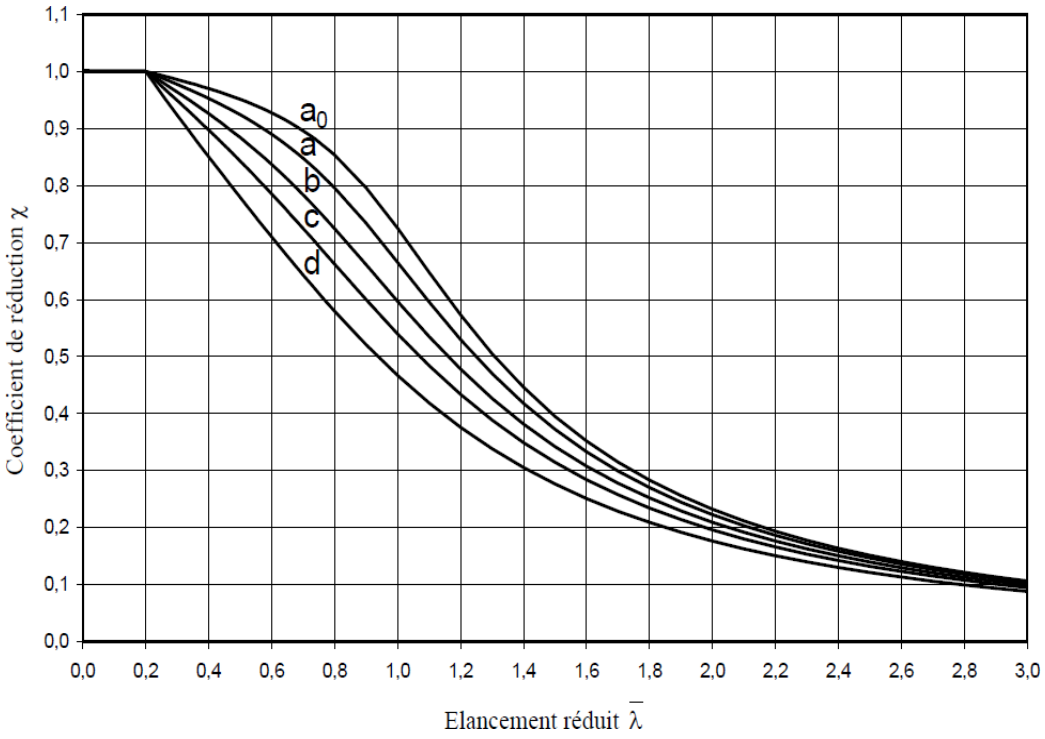



*Figure 2.15: Courbes de flambement*

Les recommandations pour le choix des courbes de déversement sont données dans le (Tableau 2.3).

*Tableau 2. 3.Courbe de déversement pour une section transversale*

| Section transversales | Limites | Courbe de déversement |
|---|---|---|
| Section en I laminées | H /b $\leq 2$ | *a* |
| | H /b $> 2$ | *b* |
| Section en I soudées | H /b $\leq 2$ | *c* |
| | H /b $> 2$ | *d* |
| Autres sections | - | *d* |

$\alpha_{LT}$: facteur d'imperfection qui correspond à la courbe de déversement appropriée et donné au tableau 2.4 ci-dessous

*Tableau 2.4. Facteurs d'imperfection et critères de choix de la courbe de déversement*

| Courbe de déversement | *a* | *b* | *c* | *d* |
|---|---|---|---|---|
| Facteur d`imperfection $\alpha_{LT}$ | 0,21 | 0,34 | 0,49 | 0,76 |

Remarque **:**

(i) les valeurs de $\chi_{LT}$ peuvent être directement tirées du graphe de courbes de flambement (Figure 2.15)

(ii) Pour un élancement $\bar{\lambda}_{LT} \leq 0{,}2$ ou pour $M_{Ed}/M_{cr} \leq 0.04$ les effets du déversement peuvent être négligés et seules les vérifications de section transversale s'appliquent.

Pour prendre en compte la forme du diagramme des moments entre les maintiens latéraux des poutres, le coefficient de réduction $\chi_{LT}$ peut être modifié de la manière suivante :

$$\chi_{LT,mod} = \frac{\chi_{LT}}{f} \leq 1 \qquad (2.21)$$

Où :

$$f = 1 - 0{,}5(1 - k_c)\left[1 - 2{,}0\left(\bar{\lambda}_{LT} - 0{,}8\right)^2\right] \qquad \text{Mais} \qquad f \leq 1 \qquad (2.22)$$

*Tableau 2.5. Facteurs de correction kc*

| Distribution de Moment | Sections de Class 1, 2, 3 | Sections de Class 4 |
|---|---|---|
|  $\psi = 1$ | 1,0 | 1,0 |
|  $-1 \le \psi \le 1$ | $\frac{1}{1,33-0,33\ \psi}$ | $\frac{1}{1,33-0,33\ \psi}$ |
|  | 0,94 | 1,0 |
|  | 0,90 | 1,0 |
|  | 0,91 | 1,0 |
|  | 0,86 | 1,0 |
|  | 0,77 | 1,0 |
|  | 0,82 | 1,0 |

# *CHAPITRE 3*

# *ETUDE PARAMETRIQUE SUR LES FACTERURS INFLUENÇANT LE DEVERSEMENT*

# CHAPITRE 3

# ETUDE PARAMETRIQUE SUR LES FACTERURS INFLUENÇANT LE DEVERSEMENT

## 3.1 .Introduction :

Une approche de dimensionnement des poutres sensibles à la ruine par déversement doit nécessairement prendre en compte un grand nombre de facteurs qui influent le moment critique de déversement élastique ( des propriétés du matériau tel que le module d'élasticité $E$ et le module de cisaillement $G$, des propriétés géométriques de la section, tel que le moment d'inertie de torsion $I_t$, le moment d'inertie de gauchissement $I_w$ et le moment d'inertie par rapport à l'axe faible de la section $I_z$, des propriétés de la poutre tel que la longueur $L$ de la poutre et les restreintes à la flexion latérale et au gauchissement au niveau des appuis et finalement des conditions de chargement, du moment où le flambement latéral est sévèrement affecté du diagramme des moments et de la position du chargement vis-à-vis du centre de cisaillement de la section) et elle est donc relativement complexe.

## 3.2. Influence de certains paramètres sur la stabilité au déversement de la poutre :

Dans cette partie on étudie l'influence de quelques facteurs sur le moment critique d'une poutre de longueur de L=8(m) et d'une section A=52.4($cm^2$) , les dimensions de cette section sont: h = 300 (mm) $t_w$ = 8(mm) $b_{f1}$ = 200(mm) $t_{f1}$ = 10(mm) $b_{f2}$ = 100(mm) $t_{f2}$ = 10(mm)

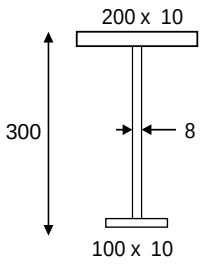



*Figure 3.1 schémas de la section mono-symétrique étudiée*

### *3.2.1. Effet de la longueur de la poutre :*

Considérons le cas fondamental d'une poutre de portée L, soumise à deux moments d'extrémités, égaux et de sens opposés. L'élancement de la poutre fléchie est un paramètre déterminant pour la stabilité au déversement. On constate que pour une section en I dissymétrique (figure 3.1) donnée, si la longueur de la poutre augmente, la poutre devient de plus en plus instable et ceci se traduit par la diminution de la valeur du moment critique de déversement présentée à la figure 3.1. Il faut noter que la rigidité au gauchissement $EI_w / L^2$ diminue quand la longueur de la poutre augmente.

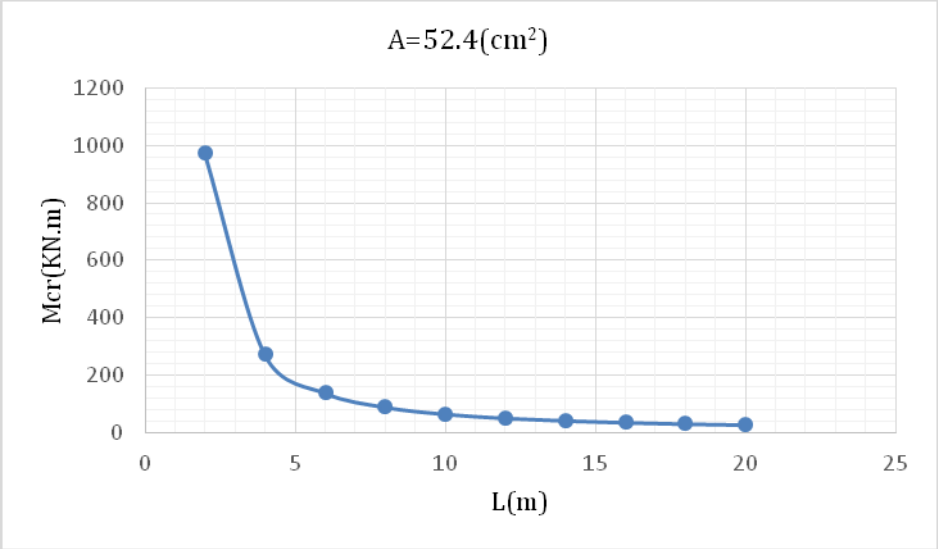



*Figure 3.2 Effet de la longueur de la poutre.*

### *3.2.2. Effet de la dissymétrie de la section :*

Le centre de cisaillement coïncide avec le centre de gravité dans le cas des sections doublement symétriques. Par contre, pour le cas des sections mono symétriques soumises à la flexion dans le plan de symétrie, le centre de gravité et le centre de cisaillement ne coïncident pas. Cette inégalité se mesure par le rapport $\psi_f = (I_{f.c} - I_{f.t}) / (I_{f.c} + I_{f.t}) \approx (I_{f.c} - I_{f.t}) / I_z$, où $I_{f.c}$ et $I_{f.t}$ sont les moments d'inertie des sections respectivement de la semelle comprimée et de la semelle tendue par rapport à l'axe faible de la section. Une section doublement symétrique

est donc caractérisée par $\psi_f$ =0.

Dans cette étude les dimensions de la petite semelle sont modifiées. La largeur et l'épaisseur de la petite semelle (inferieure) $b_{fmin}$ sont variés alors que les dimensions de la plus grande semelle ainsi que l'épaisseur de l'âme sont maintenus constants tout en gardant la section de la poutre constante, A=52.4 $cm^2$ (Fig. 3.3).

Dans ce cas les poutres sont de longueurs constantes L=8m reposant sur deux appuis à fourches. Les conditions de restreintes sont les suivantes :

- Le déplacement latéral υ est fixe
- La rotation de torsion θ est fixe
- La rotation de flexion latérale υ' est libre
- Et le gauchissement θ' est libre

Nous avons considéré trois cas de chargement suivants; charge repartie, charge concentrée au milieu et deux moments d'extrémités égaux et de sens opposés.

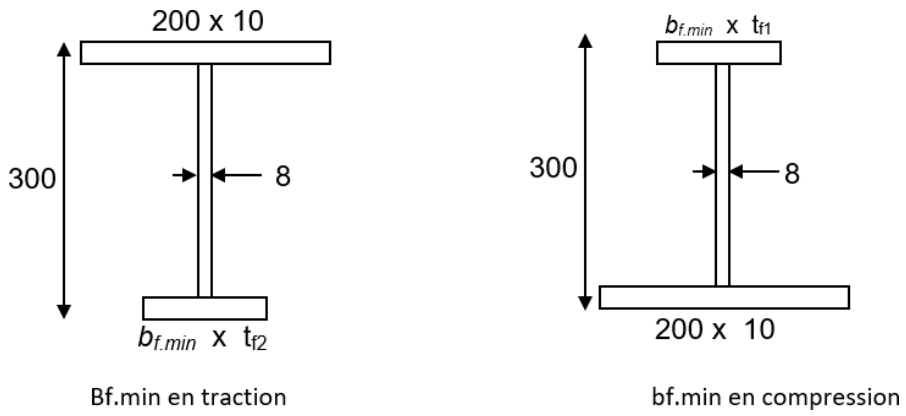



*Figure 3.3 schémas de la section mono-symétrique étudiée.*

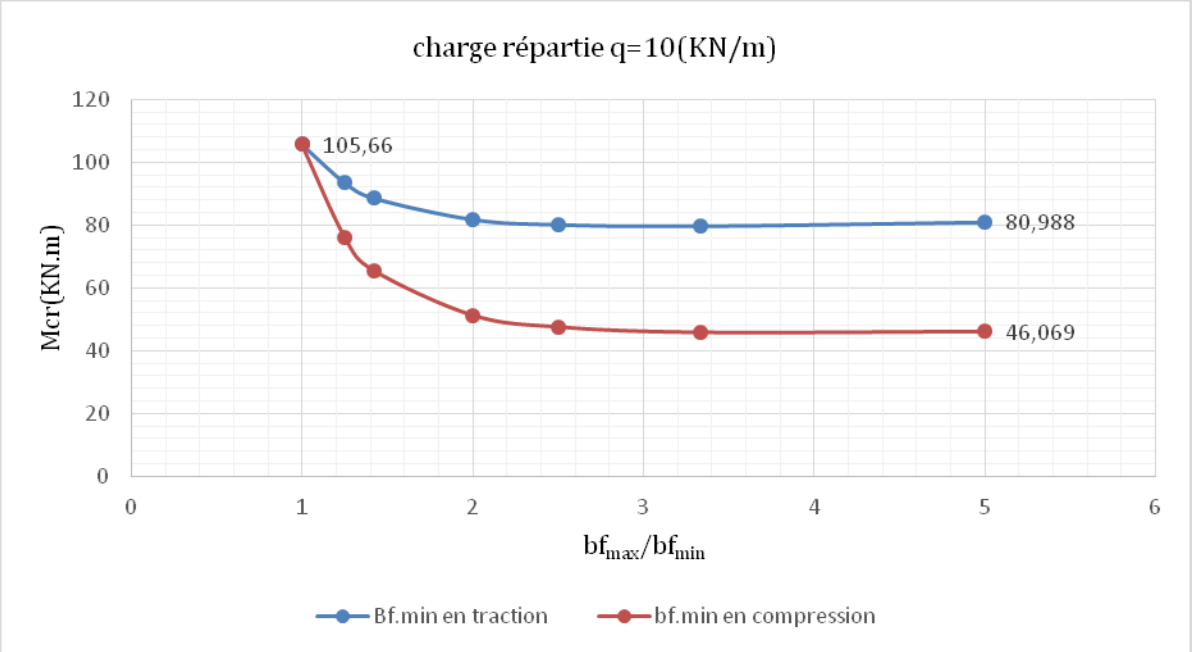



*Figure 3.4 Effet de la mono symétrie pour le cas d'une charge uniformément répartie*

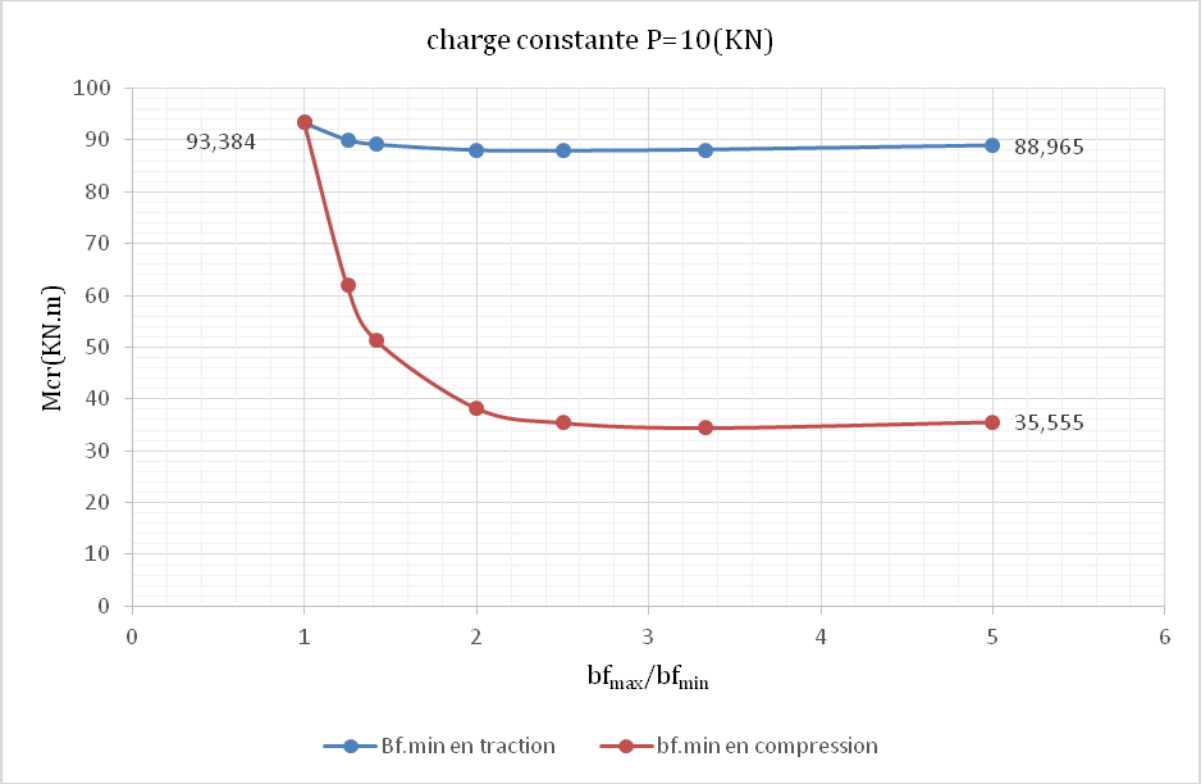



*Figure 3.5 Effet de la mono symétrie pour le cas de charge concentrée au milieu*

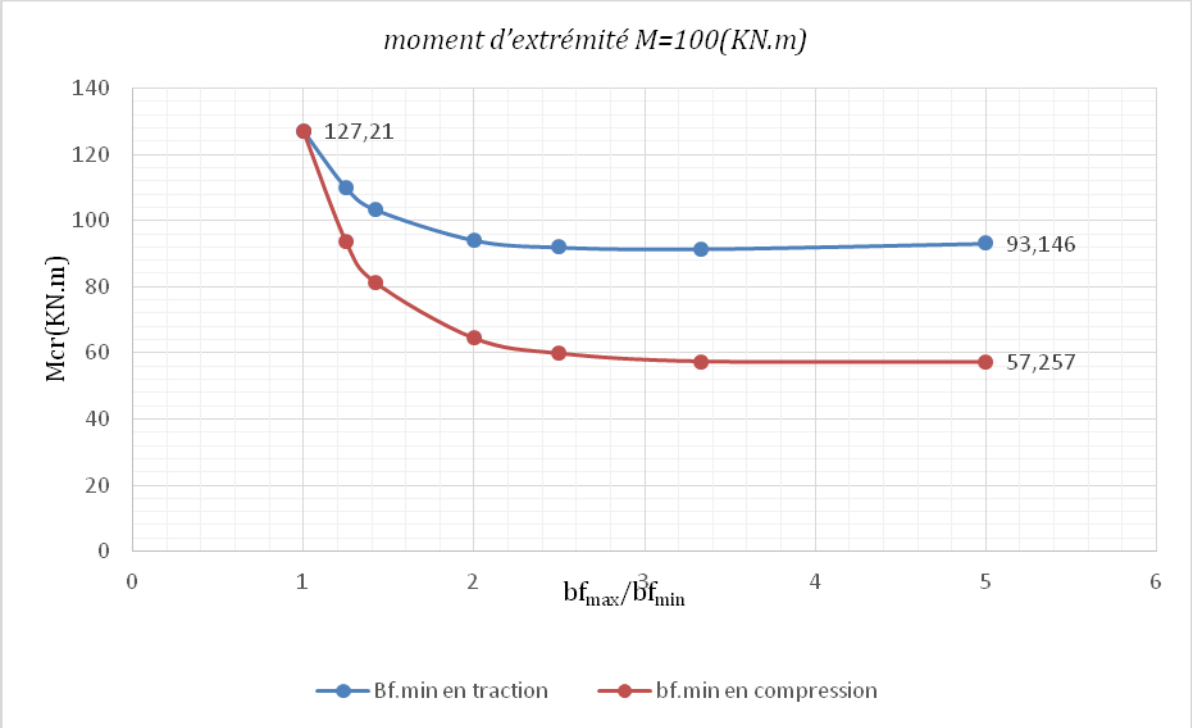



*Figure 3.6 Effet de la mono symétrie pour le cas de moments d'extrémités*

Les figures 3.4, 3.5 et 3.6 montrent l'effet de la mono-symétrie de la section sur le moment critique de déversement élastique pour les trois cas de charges, charge uniformément répartie, charge concentrée au milieu et deux moments aux droits des appuis respectivement.

Si on diminue la largeur de l'une des semelles d'une section doublement symétrique on constate une réduction monotone du moment critique élastique $M_{cr}$. L'importance de la réduction de la valeur du moment critique dépend du fait que la diminution de la largeur s'applique sur la semelle comprimée ou sur la semelle tendue. On constate d'après les figures 3.4, 3.5 et 3.6 que l'effet de variation de la semelle inferieure en compression sur le moment critique de déversement élastique est très considérable en comparaison avec celui de variation de la semelle inférieure en traction. Par conséquent, la diminution de la largeur de la semelle comprimée entraîne une plus grande réduction du moment critique élastique par rapport à celle produite par la diminution de la largeur de la semelle tendue. On peut conclure que parmi les deux semelles, la semelle comprimée est la plus susceptible de déverser.

### *3.2.3 Effet du rapport des moments d'appuis :*

Le moment critique de déversement élastique est fonction du type de chargement de la poutre et de son système statique (conditions d'appuis). Le cas le plus défavorable est celui de

la poutre simple sollicitée par un moment de flexion constant puisque la semelle est comprimée avec un effort constant sur toute sa longueur. Dans le cas d'un moment linéairement variable ou de charges appliquées entre les appuis, la compression maximale n'est atteinte dans la poutre que dans une seule section. Un diagramme des moments constant qui correspond à une flexion pure n'est pas représentatif de la distribution habituelle rencontrée en pratique dans les poutres réelles. Par conséquent, les autres cas de chargements étudiés pour lesquels on admet que la charge agit dans le plan principal rigide et ne change pas de direction quand la poutre déverse sont :

(i) Moments d'extrémités inégaux : Le diagramme des moments qui varie linéairement le long de la portée de la poutre (Fig. 3.7), est complètement déterminé par le rapport des moments d'appuis $\beta$ ($-1 \leq \beta \leq +1$) ; qui est le cas de n'importe quelle poutre continue non chargée transversalement.

(j) Charges transversales : La forme du diagramme des moments n'est pas linéaire, elle dépend de l'intensité et de la position des charges transversales le long de l'axe longitudinal x de la poutre. Ceci est le cas de n'importe quelle travée isolée de poutre, soumise à des charges transversales supposées agir au niveau du centre de gravité de la section.

(k) Combinaison de charges transversales et de moments d'extrémités : Le diagramme des moments résultant est la superposition des diagrammes dû aux moments d'extrémités et celui dû aux charges transversales. Ce type de chargement qui est le plus général, est rencontré dans n'importe quelle travée de poutre continue chargée transversalement ou de segments individuels maintenus aux extrémités.

Dans notre cas la poutre est de longueur constante L=8 m reposant sur deux appuis à fourches où :

- Le déplacement latéral $\upsilon$ est fixe
- La rotation de torsion $\theta$ est fixe
- La rotation de flexion latérale $\upsilon'$ est libre
- Le gauchissement $\theta'$ est libre

La courbe de variation du moment critique en fonction du rapport des moments d'extrémités est représentée à la figure 3.8. On peut constater d'après la figure 3.8 que le cas de chargement le plus défavorable (instabilité maximale au déversement) correspond à celui d'une poutre avec un moment constant ($\beta$=1). Par contre on peut conclure d'après la figure 3.8 que la

poutre est d'autant plus stable que le rapport des moments β s'approche de la valeur -0,5.

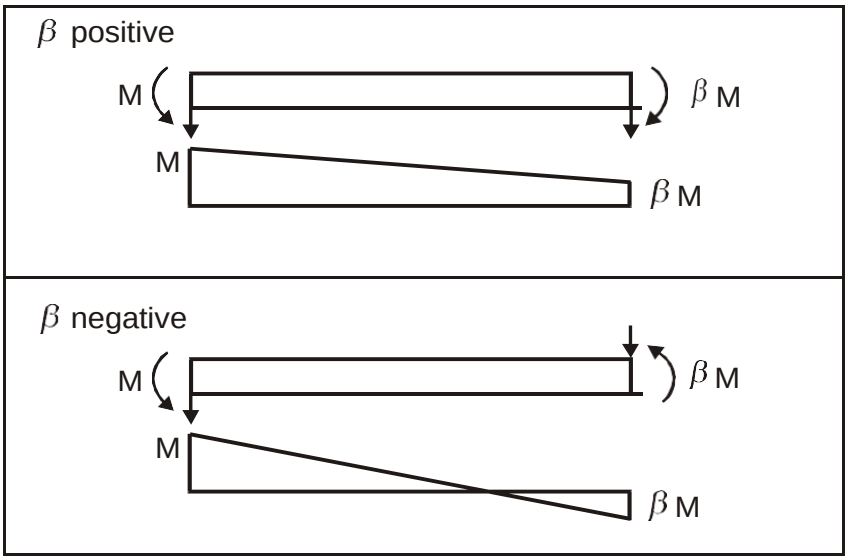



*Figure 3.7 Rapport de moments d'extrémités.*

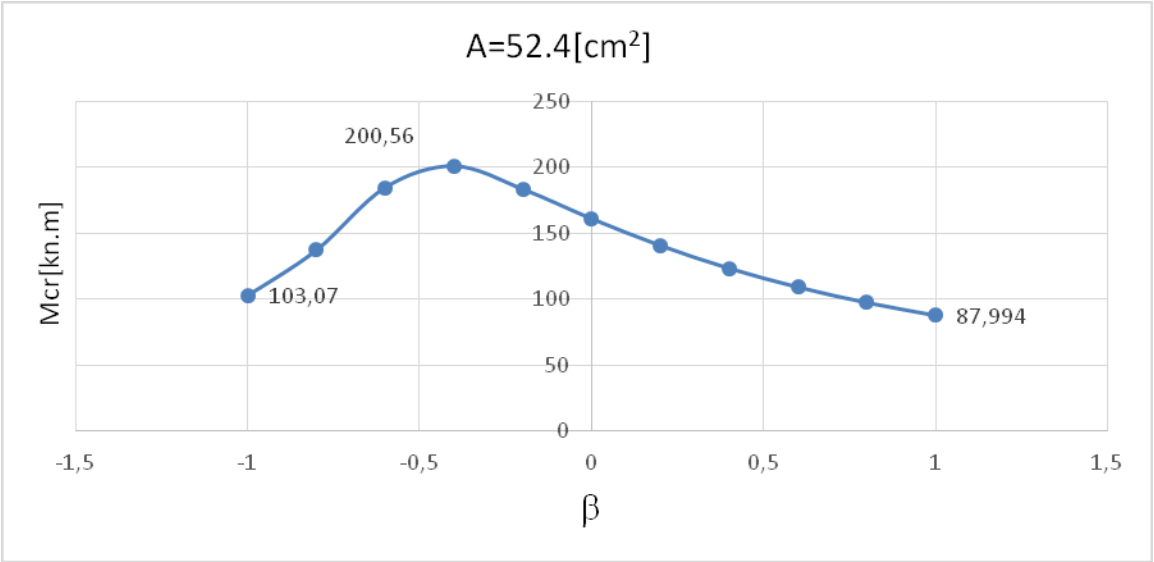



*Figure 3.8 Effet du rapport des moments d'appuis*

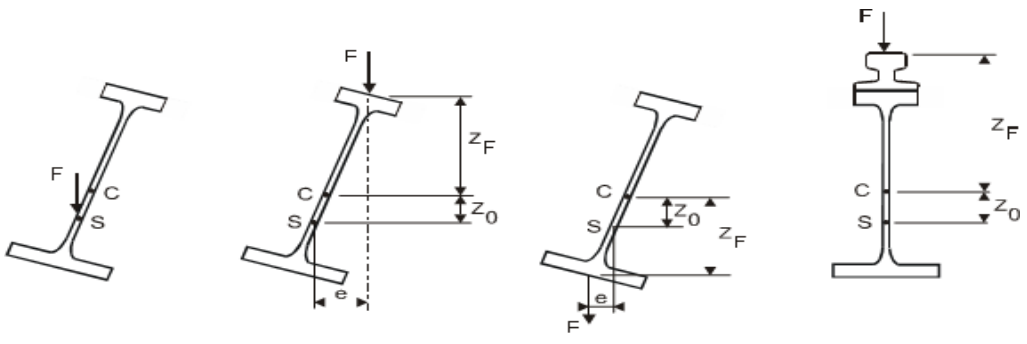
### *3.2.4. Effet du point d'application de la charge :*

Si les charges transversales transmises par l'intermédiaire de poutres secondaires attachées à l'âme de la poutre peuvent généralement être supposées agir au centre de gravité de la section, il n'en reste pas moins que les dites charges sont appliquées, dans plusieurs cas, sur la semelle

supérieure, et, dans des quelques cas particuliers, sur la semelle inférieure. Ces divers points d'application de la charge présentent des effets sur le déversement assez différents puisque, pour une distribution donnée de charges transversales, un chargement appliqué sur la semelle comprimée accentue la tendance au déversement tandis qu'un chargement sur la semelle tendue a, au contraire, un effet stabilisant. En effet, dans le premier cas, l'excentricité de la charge engendre, lorsque le déversement s'amorce, un moment de torsion qui agit dans le même sens que le mouvement ainsi produit, tandis que, dans le second cas, le moment de torsion agit en sens inverse et joue le rôle de stabilisateur.

Parfois, il est peut-être raisonnable de négliger l'effet du niveau d'application des charges lorsque celle-ci sont appliquées sur la semelle supérieure, du fait que les nombreuses membrures qui transmettent ces charges, assurent en même temps une certaine restreinte en torsion dont l'effet favorable s'avère souvent déterminant. Il importe surtout de tenir compte de l'éventuelle réduction du moment critique par une mise en charge sur la semelle supérieure, lorsqu'aucune disposition particulière ne permet de supporter la semelle comprimée.

Pour illustrer cette influence, considérons le cas d'une poutre (fig 3.9) de portée L=8m, sollicitée par des charges gravitaires dans le plan rigide de la section. Il est supposé que le sens de chargement ne change pas lors du mouvement de la poutre. Le niveau neutre d'application de telles charges coïncide avec le centre de cisaillement et le moment critique de déversement correspondant à ce niveau neutre est désigné par $M_{y.cr.n}$. Tout autre niveau d'application (dans le plan rigide) autre que le niveau neutre, est caractérisé par sa distance algébrique $Z_f$ à partir du centre de gravité, qui se trouve à $Z_0$ du centre de cisaillement.



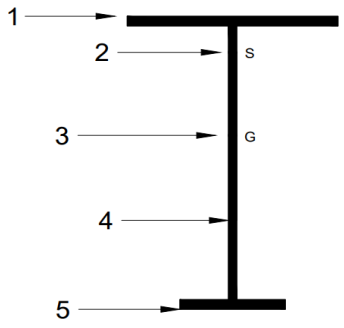



*Figure 3.9 Différents niveaux d'application de la charge*

La figure 3.9 montre plusieurs variantes correspondant à des charges appliquées respectivement aux niveaux de centre de cisaillement (2) et centre de gravité (3) , semelle supérieure(1) et semelle inferieure(5) et un point (4) entre la semelle inférieure et le centre de gravité. La poutre de section mono-symétrique et de longueur L=8m reposant sur deux appuis à fourches est soumise à deux systèmes de charges ; une charge uniformément répartie et une charge concentrée au milieu de la poutre. Les conditions de restreinte sont les suivantes :

- Le déplacement latéral υ est fixe
- La rotation de torsion θ est fixe
- La rotation de flexion latérale υ’ est libre
- Et le gauchissement θ’ est libre

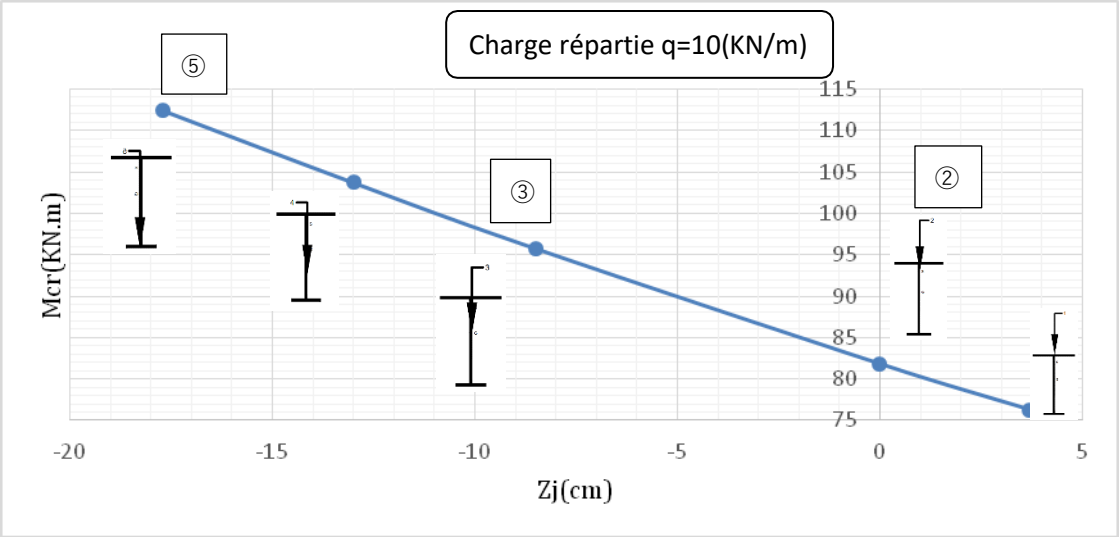



*Figure 3.10 Effet du point d’application de la charge pour le cas d’une charge répartie*

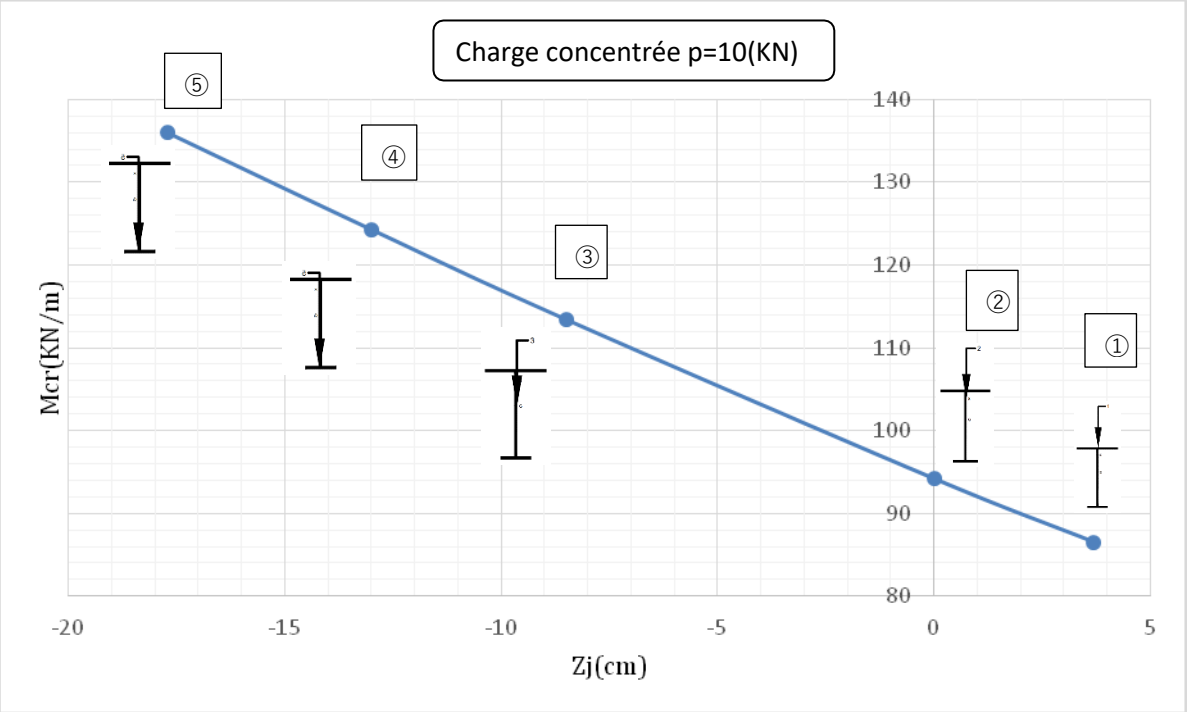



*Figure 3.11 Effet du point d'application de la charge pour le cas d'une charge concentrée*

Les figures 3.10 et 3.11 montrent que l'intensité et le signe de la distance $Z_G$ sont d'une grande importance pour la valeur de $M_{y.cr}$. On peut constater que les valeurs de $M_{y.cr}$ obtenues pour des charges agissant au niveau de la semelle supérieure sont inférieures par rapport à celles obtenues pour les mêmes charges appliquées au niveau du centre de cisaillement. De même, les valeurs de $M_{y.cr}$ obtenues pour des charges agissant au niveau de la semelle inferieure sont plus élevées par rapport à celles obtenues pour les mêmes charges appliquées au niveau du centre de cisaillement car elles possèdent un effet stabilisateur.

### *3.2.5. Effet de la position de la restreinte :*

La valeur du moment critique de déversement élastique dépend des conditions d'appuis de la poutre en flexion latérale (déplacement latéral $v$ du centre de cisaillement) et en rotation autour de l'axe longitudinal (angle φ), de même que de la possibilité de gauchissement (fig.3.12). Les conditions d'appui en flexion latérale influent directement sur le coefficient d'encastrement $k_v$, tandis que les conditions d'appui en rotation influent sur le coefficient

d'encastrement $k_{\varphi}$.

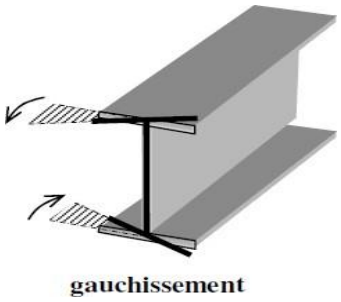



*Figure 3.12 Phénomène de gauchissement*

Il y a lieu de distinguer d'une part, les conditions aux appuis de la poutre proprement dite, et d'autre part, les restreintes assurées éventuellement à la semelle comprimée des poutres fléchies par les liaisons avec divers éléments de planchers ou de toitures. Le premier type de conditions est directement lié non seulement à la faculté de rotation de flexion (autour de l'axe fort) au droit des appuis, mais encore à la faculté de rotation de flexion transversale (autour de l'axe faible) autour de ses mêmes appuis. De manière analogue au caractère appui simple ou encastrement pour la flexion verticale dans le plan des charges extérieures, on aura à considérer le caractère d'appui simple (appui à fourche) ou d'encastrement dans le plan latéral (horizontal). En l'absence de tout support latéral de la membrure comprimée, la longueur du déversement représente la distance effective entre points supports.

Si dans le cas d'une poutre autre que la poutre de référence, des restreintes sont appliquées soit au niveau des appuis soit le long de la poutre, dans le plan de chargement ou perpendiculairement au plan de chargement, la stabilité de la poutre sera améliorée et le moment critique de déversement sera donc plus élevé.

Dans cette partie nous avons étudié l'influence de la position le long de la poutre d'une restreinte à la flexion latérale intermédiaire sur le moment critique de déversement élastique. Quatre positions de la restreinte le long de la hauteur de la section sont considérées dans cette étude ; semelle supérieure (1), centre de cisaillement (2), CDG (3) et semelle inférieure (4). La figure 3.13 montre que la position de la restreinte intermédiaire au milieu de la poutre et sur la semelle supérieure ou au niveau du centre de cisaillement correspondent au cas le plus stable de la poutre (moment critique maximal). On peut également constater d'après la figure 3.13 que la valeur du moment critique diminue lorsque la position de la restreinte intermédiaire se déplace du milieu de la poutre vers les appuis. Il est à noter enfin qu'une restreinte

intermédiaire placée sur la semelle inferieure tendue n'a aucun effet sur le moment critique et ce quelque soit sa position le long de la poutre.

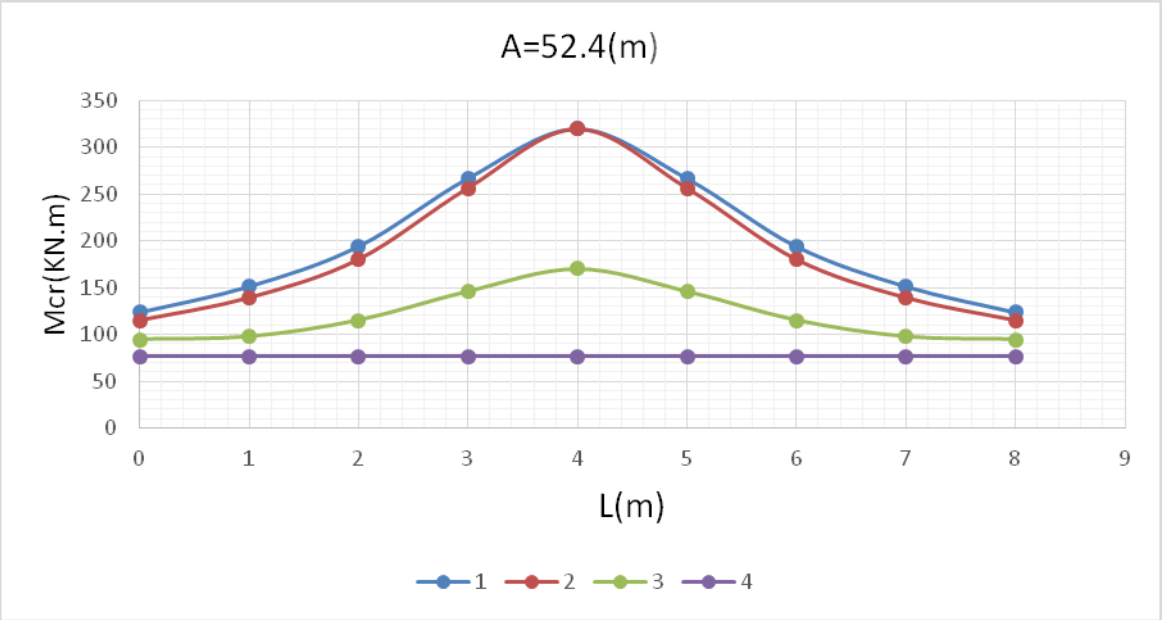



*Figure 3.13 Effet de la position de la restreinte*

1 : semelle supérieure

2 : centre de cisaillement

3 : centre de gravité

4 : semelle inferieure

Les moments critiques de déversement obtenus pour diverses conditions de restreintes sont calculés en utilisant un logiciel aux éléments finis LTBeam.

### *3.2.6 Effet des conditions de restreintes aux appuis:*

#### *3.2.6.1 Introduction :*

Comme il a été déjà mentionné précédemment, une poutre élancée soumise à l'action de charges de flexion dans son plan rigide est susceptible de déverser par combinaison de rotation et de flexion latérale de la section, si aucun support latéral n'est prévu le long de la poutre. Les poutres élancées réalisées à partir de sections rectangulaires étroites ou de sections en I avec des

largeurs de semelles réduites sont susceptibles de déverser rapidement car elles possèdent des rigidités torsionnelle et flexionnelle latérales assez faibles. Par conséquent, si des maintiens latéraux ne sont pas prévus, ces poutres peuvent flamber latéralement sous l'action des contraintes de flexion considérablement plus faibles que la contrainte limite élastique du matériau. La faible rigidité torsionnelle est un facteur déterminant, et les sections de poutres à parois minces telles que les profilés en U ou en Zed sont également très sensibles au déversement.

Les codes modernes pour les structures métalliques tels que les règlements américains ([AISC.94], [AISC.98]), le règlement britannique BS.5950 ([BS.00]) et les règlements européens ([EC3.92], [EC3.05a]), fournissent sur la base du concept des états limites, des procédures d'analyse et de calcul de la résistance au flambement latéral des poutres. Généralement, ces procédures exigent la détermination du moment critique de déversement élastique. Les imperfections initiales, les contraintes résiduelles et le flambement inélastique sont pris en compte à travers l'utilisation des courbes de flambement [Trahair.98].

Les restreintes à la flexion latérale et à la torsion, produites par les appuis aux extrémités ont un effet considérable sur le flambement latéral des poutres. Les degrés de restreintes à la flexion latérale et à la torsion développées par les supports dépendent du type d'assemblage utilisé. Plusieurs assemblages articulés rencontrés en pratique possèdent une restreinte partielle à la flexion latérale, alors que la restreinte à la torsion est généralement supposée être parfaite. Cependant, quelques assemblages tels que les assemblages par plats soudés longs ne développent que des restreintes partielles à la flexion latérale et à la torsion

Des restreintes à la flexion par rapport à l'axe faible $K_{v'}$, à la torsion $K_{\theta}$ et au gauchissement $K_{\theta'}$, prennent en considération respectivement la rigidité à la flexion latérale, la rigidité à la rotation autour de l'axe longitudinal et la rigidité au gauchissement.

Dans l'objectif d'étudier leurs influences sur le moment critique de déversement élastique, une variété d'assemblages avec différentes conditions de restreintes est étudiée en utilisant le logiciel aux éléments finis LTBeam.

Considérons la poutre à travée simple, avec des supports aux deux extrémités. Les quatre degrés de liberté des nœuds d'extrémité qui peuvent être modifiés sont :

- Le déplacement latéral $\upsilon$

- La rotation de torsion θ
- La rotation de flexion latérale ύ
- Le gauchissement θ'

Chacun d'eux peut être soit fixe, soit libre ou même quelque chose entre les deux situations et ils influencent tous le comportement global de la poutre lorsqu'elle est chargée. Ces 4 degrés de liberté sont souvent liés à la longueur de flambement efficace, en attribuant les facteurs de longueur de flambement efficace.

#### *3.2.6.2. Effet de la restreinte à la flexion latérale $k_{v'}$ :*

Dans cette section, la variation de restreinte à la flexion latérale est examinée pour un profilé en I mono-symétrique de section A=52.4 [$cm^2$], avec une longueurs de la poutre (L = 8m), soumise à deux modes de sollicitation, une charge uniformément répartie agissant au niveau du centre de cisaillement et une charge concentrée au milieu.

1. une charge verticale uniformément répartie q=10KN/m appliquée au centre de cisaillement

2. une charge concentrée F=100KN au milieu de la poutre agissant au niveau du centre de cisaillement.

Les résultats des moments critiques sont obtenus en utilisant le logiciel aux éléments finis LTBeam. Dans cette analyse, les supports d'extrémités de la poutre sont supposés maintenus contre le déplacement latéral ( $v$ est bloqué) et la rotation autour de l'axe longitudinal (x-x) ($\theta$ est bloqué) mais sont libres vis-à-vis du gauchissement ($\theta'$ est libre). La restreinte à la flexion latérale du support est modélisée par un ressort de rigidité latérale $K_{v'}$. Cette rigidité est prise égale à zéro (si aucune restreinte latérale n'est prévue), ou à l'infini (pour une restreinte parfaite). Pour évaluer le moment critique élastique $M_{cr}$ en utilisant le logiciel aux éléments finis, il a été nécessaire de faire varier la valeur de la restreinte à la flexion latérale $K_{v'}$ de zéro (restreinte libre) jusqu'à l'infini (restreinte bloquée).

La figure 3.13 représente l'évolution des moments critiques numériques en fonction de la variation de la restreinte $K_{v'}$, considérée dans cette analyse.

- Le déplacement latéral υ est fixe

- La rotation de torsion θ est fixe
- Et le gauchissement θ’ est libre

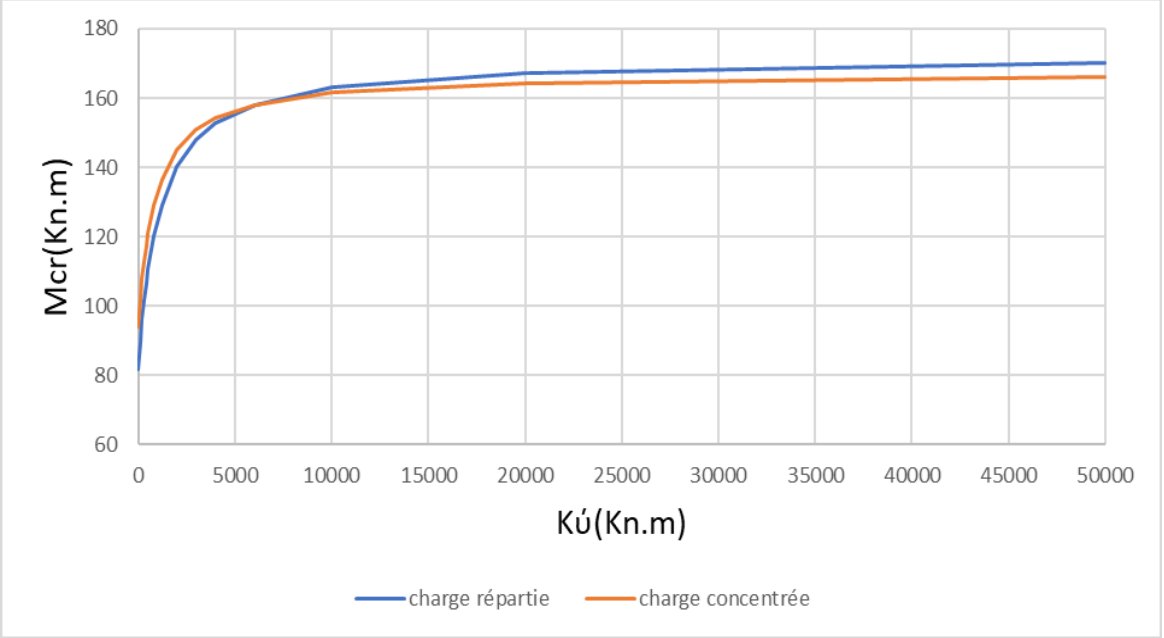



*Figure 3.14 Effet de la restreinte à la flexion latérale $K_{v'}$*

On peut constater d’après la figure 3.14 que le moment critique augmente considérablement avec l’augmentation de la restreinte à la flexion latérale et ce pour les deux types de chargement. Au-delà d’une certaine valeur de la restreinte latérale (environ 10.000 kN.m) pour le cas d’une charge répartie, les moments critiques se stabilisent autour d’une valeur maximale d’environ 170 kN.m, correspond au cas de la restreinte latérale fixe ,pour unecharge concentrée de Kú=0 jusqu’à Kú=10000 (kN.m), le moment critique varie seulement de $M_{cr}$ = 94.17kN-m jusqu’à $M_{cr}$ = 166.22kN-m.on peut constaté également que la valeur Kú=10000 (kN.m) est suffisante pour aveindre un Mcr plus éleve

### *3.2.6.3. Effet de la restreinte au gauchissement $K_{\theta'}$ :*

L’effet de gauchissement sur le moment critique est étudié dans cette partie. Les autres conditions de restreintes maintenues fixes sont les suivantes :

- Le déplacement latéral υ est fixe
- La rotation θ est fixe

- La rotation de flexion latérale υ’ est libre

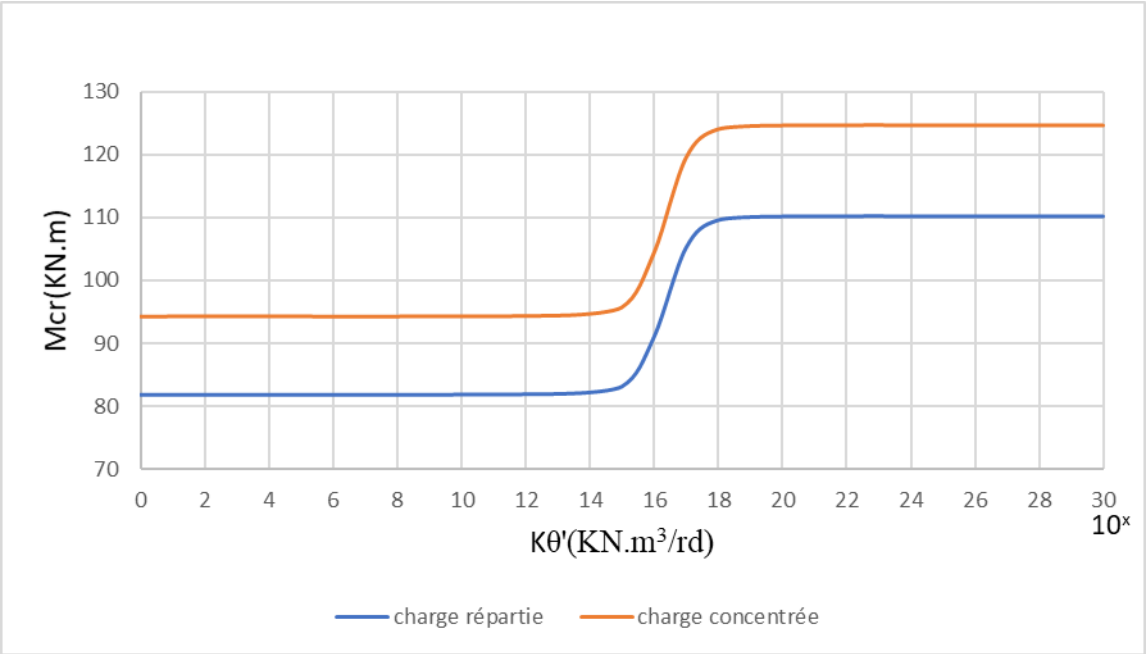



*Figure 3.15 Effet de gauchissement θ’*

La figure 3.15 montre la variation du moment critique de déversement élastique en fonction de la rigidité au gauchissement $K_{\theta}$’. Pour la charge uniformément répartie , la figure montre que le moment critique prend la valeur de 81.84 kN.m et reste constant pour une rigidité au gauchissement variant entre zéro et $10^{15}$ kN.m$^3$/rad. Pour une rigidité variant de $10^{15}$ kN.m$^3$/rad à $10^{18}$ kN.m$^3$/rad le moment critique augmente de 81.84 kN.m jusqu’à 110 kN.m. Dans le cas de la charge concentrée, le moment critique est maintenu constant à une valeur de 94.16 kN.m pour un gauchissement variant entre zéro et $10^{15}$ kN.m$^3$/rad et quand la rigidité au gauchissement est augmentée de$10^{15}$ kN.m$^3$/rad à $10^{18}$ kN.m$^3$/rad , le moment critique varie de 94.16 kN.m jusqu’à 124.72 kN.m. Au-delà de la rigidité au gauchissement de $10^{18}$ kN.m$^3$/rad le moment critique reste constant , ce qui correspond à un gauchissement bloqué et ce pour les deux cas de chargement.

#### *3.2.6.4. Effet de la restreinte à la rotation $K_{\theta}$ :*

L'effet de rotation du support $K_{\Theta}$ sur le moment critique élastique Mcr a été étudié numériquement en utilisant logiciel aux éléments finis LTBeam. L’évaluation du moment critique élastique Mcr, est basée sur les cas suivants :

Le flambement latéral d'une section en A=52.4[cm2] avec une longueur (L=8m), a été étudié pour deux cas de chargements :

1. une charge verticale uniformément répartie q=10KN/m appliquée au centre de cisaillement

2. une charge concentrée F=100KN au milieu de la poutre agissant au niveau du centre de cisaillement.

Dans cette analyse, les conditions aux appuis de la poutre sont telles que le déplacement latéral est empêché (ν est bloqué), et le gauchissement est libre (θ' est libre) et flexion latérale libre(υ' est libre).

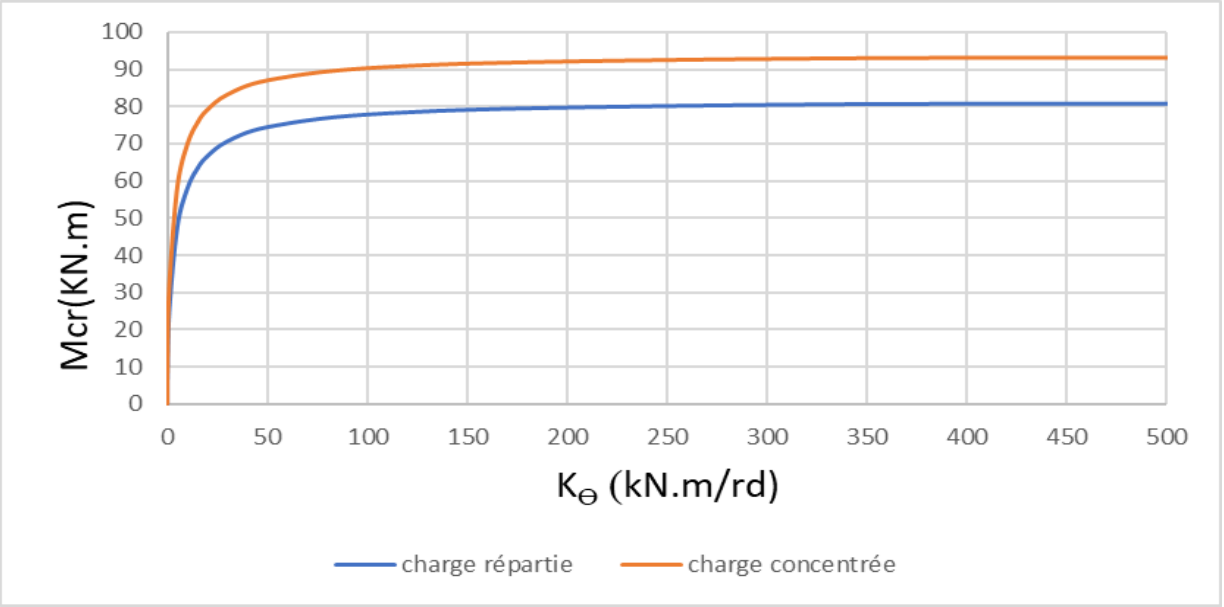



*Figure 3.16 Effet de la restreinte à la rotation $K_\Theta$*

On peut constater d'après la figure 3.16 que le moment critique augmente considérablement avec l'augmentation de la restreinte à la rotation et ce pour les deux types de chargement. Au-delà d'une certaine valeur de la restreinte latérale (environ 50 kN.m/rd), les moments critiques se stabilisent autour d'une valeur maximale d'environ 75 kN.m, pour le cas d'une charge répartie.et autour d'une valeur maximale d'environ 88 kN.m pour le cas de la charge concentrée au milieu. on peut constaté également que la valeur $K_\theta$=75 (kN.m/rd) est suffisante pour aveindre un Mcr plus éleve.

# *Chapitre 4*

# *Conclusions générales et perspectives*

# *Chapitre 4*

# *Conclusions générales et perspectives*

## *4.1 Conclusions générales et perspectives :*

Parmi les facteurs importants affectant considérablement la stabilité au flambement latéral des poutres fléchies à sections symétriques ou mono-symétriques et par conséquent le moment critique de déversement élastique est celui de la position des maintiens intermédiaires, la position du point d'application des charges ainsi que les restreintes à la flexion latérale, à la rotation et au gauchissement au niveau des appuis.

Pour évaluer correctement le moment ultime de déversement élastique des poutres fléchies, La majorité des codes de calculs, exigent la détermination du moment critique de déversement élastique $M_{cr}$. La version de l'EUROCODE 3 présente une formule dite des trois facteurs qui permet d'évaluer le moment critique élastique d'une poutre soumise à n'importe quel type de sollicitation.

Ce travail a pour objet de présenter les degrés d'influence des maintiens latéraux intermédiaires sur la stabilité au déversement des poutres à sections mono-symétriques. L'effet de la dissymétrie de la section sur le moment critique de déversement fait également partie de l'objectif de notre travail. Une étude paramétrique sur l'influence de la position du point d'application des charges par rapport au centre de cisaillement, l'influence des différentes restreintes aux appuis (à la flexion latérale, à la torsion et au gauchissement) sur la stabilité des poutres métalliques à sections mono-symétriques a été entamée.

A travers cette étude, on a pu divulguer les points suivants :

- ✓ Pour une poutre à section dissymétrique, la stabilité au déversement augmente en augmentant l'aire de la semelle comprimée par rapport à l'aire de la semelle tendue.
- ✓ Pour augmenter la valeur de la charge critique de déversement ; et par conséquent améliorer la stabilité de la poutre, on peut soit utiliser une section importante de la poutre, soit disposer des maintiens latéraux intermédiaires (solution en général

économique). Théoriquement, ces appuis doivent être conçus de manière à empêcher tout déplacement latéral ou torsion de la section correspondante. En pratique, on se contentera souvent d'empêcher le déplacement latéral de la semelle comprimée. Le maintien latéral le plus efficace est celui qui est placé à mi- portée de la poutre et qui correspond au moment critique de déversement élastique le plus élevé.

- ✓ Le moment critique de déversement élastique d'une poutre à section mono-symétrique augmente en augmentant la restreinte à la flexion latérale qui est présentée par le coefficient $K_{v'}$ ou la restreinte à la torsion qui est représentée par le coefficient $K_{\Theta}$ ou la restreinte au gauchissement représentée par le coefficient $K_{\theta'}$. On peut encore dire que la stabilité de la poutre peut être améliorée en augmentant le degré de la restreinte à la flexion latérale, à la torsion et au gauchissement.

- ✓ La sensibilité au déversement augmente avec la longueur **L** de la poutre.

- ✓ Les poutres en caissons sont plus stables au déversement que les poutres à sections ouvertes.

Nos perspectives pour des travaux futurs peuvent être résumées comme suite :

- Etablir une étude comparative entre les méthodes analytique (EC3) et numérique pour l'évaluation du moment critique correspondant à différentes conditions de chargement et de restreintes.
- Faire une étude paramétrique sur le moment ultime donné par l'EC3 pour examiner l'influence des facteurs déjà pris en considération dans notre travail.

# Bibliographie.

**[AISC.86] : AISC LRFD 1986.** American Institute of Steel Construction (AISC). Load and resistance factor design. Chicago: AISC, **1986**.

**[AISC.94] : AISC LRFD 1994.** American Institute of Steel Construction (AISC). Load and resistance factor design. Chicago: AISC, **1994**.

**[AISC.98] : AISC LRFD 1998**. American Institute of Steel Construction (AISC). Load and resistance factor design. 2nd edition. Chicago, IL: AISC, **1998**.

**[Amara.08] : S. Amara, D.E. Kerdal and J.P. Jaspart.** Effect of end connection restraints on the stability of steel beams in bending. Advanced Steel Construction Vol.4, No.3, pp. 243-259 **(2008).**

**[Anderson.72] : Anderson J. and Trahair N.** Stability of monosymmetric beams and cantilevers. Journal of Structural Division **1972**, 98(STI): 269-86.

**[Andrale.07] : A. Andrale D., Camotim P. and Providência e Costa.** On the evaluation of elastic critical moments in doubly and singly symmetric I-section cantilevers. Journal of Constructional Steel Research **2007**, 63; 894-908.

**[Balàz.02] : Balàz I. Kolekovà Y.** Critical moments. In: Ivànyi M, editor, Stability and ductility of steel structures. Budapest: Akademiai Kiado, **2002**.

**[BS.00] : BS 5950-1.** Structural use of steelwork in buildings. Code of practice for design. rolled and welded sections. British Standards Institution, **2000**.

[**Chu.04a] : Chu X.T., Li L.Y. and Kettle R.** The effect of warping stress on the lateral-torsion buckling of cold-formed Zed-purlins. Journal of Applied Mechanics (ASME) **2004**, 71(5): 742-4.

**[Chu.04b] : Chu X.T., Li L.Y. and Kettle R.** Lateral-torsion buckling analysis of partial-laterally restrained thin-walled channel-sections beams. Journal of Construct Steel Research **2004**, 60(8):1159-75.

**[Chu.05] : X.T. Chu, J.R. Rickard and L.Y. Li.** Influence of lateral restraint on lateral-torsional buckling of cold-formed steel purlins. Thin-walled structures, **2005**, 43: 800-810.

**[Clarck.60] : Clarck J.W. and Hill H.N.** Lateral buckling of beams. Proceedings ASCE, Journal of the Structural Division, Vol.86, No. ST7, **1960**.

**[Davies.00] : Davies J.M.** Recent research advances in cold-formed steel structures. Journal of Constructional Steel Research **2000**, 55: 267-88.

**[Djalaly.74] : Djalaly H.** Calcul de la résistance ultime au déversement. Construction métallique, Vol.11, No. 1et 4, **1974**, pp. 58-77 et 54-61.

**[EC3.92] : Eurocode 3, ENV 1993-1-1.** Design of steel structures, Part 1-1: General rules and rules for buildings . European Committee for standardization. Brussels, **1992**.

**[EC3.05a] : EC3 2005.** European Committee for standardization. EN 1993-1-1. Eurocode 3: Design of steel structures, Part 1-1: General rules and rules for buildings . Brussels, May **2005**.

**[Galéa.03] : Galéa Y.** Moment critique de déversement élastique de poutres fléchies. Présentation du logiciel LTBEAM. Revue de la Construction Métallique. CTICM **2003**, (2).

**[Greiner.99] : Greiner R., Ofner R. and Salzgeber G.** Lateral torsional buckling of beam-columns: Theoretical background. ECCS-validation group, report 5. **1999.**

**[Hancock.97] : Hancock G.** The behaviour and design of cold-formed purlins. Steel Construction **1997**, 15(3): 2-16.

**[Hancock.03] : Hancock G.** Cold-formed steel structures. Journal of Construct Steel Research **2003**, 59: 473-87.

**[Helwig.97] : Helwig T.A., Frank K.H. and Yura J.A.** Lateral-torsional buckling of singly symmetric I- beams. Journal of Structural Engineering **1997**, (September): 1172-9.

**[Hirt et al.2006] : Hirt, M. A., Bez, R., and Nussbaumer, A. (2006).** Construction métallique : notions fondamentales et méthodes de dimensionnement. PPUR presses polytechniques.

**[Larue.07] : B. Larue, A. Khelil and M. Gueury.** Elastic flexural-torsional buckling of steel beams with rigid and continuous lateral restraints. Journal of Constructional Steel Research 63 **(2007)** 692-708

**[Li.04] : Li L.Y.** Lateral-torsional buckling of cold-formed Zed-purlins partial-laterally restrained by metal sheeting. Thin-walled structures, **2004**, 42(7): 995-1011.

**[Lim.03] : N.-H. Lim, N.-H. Park, Y.-J. Kang and I.-H. Sung.** Elastic buckling of I-beams under linear moment gradient. International Journal of Solids and Structures **2003**, 40: 5635-5647.

**[Maquoi.01] : Maquoi R.** Constructions métalliques et mixtes. Cours dispensé à l'Université de Liège, **2001.**

**[Miguel.06] : Miguel A. Serna, Aitziber López., I. Puente and Danny J. Yong.** Equivalent uniform moment factors for lateral-torsional buckling of steel members, Journal of Constructional Steel Research 62 **(2006)** 566-580.

**[Mutton.73] : Mutton B.R. and Trahair N.S.** Stiffness requirements for lateral bracing. Journal of Structural Division. ASCE **1973**, 99(10): 2167-82.

**[Park.03] : Park J.S. and Kang Y.J.** Lateral buckling of beams with top bracing. Structural Engineering and Mechanics **2003**, 16(5): 613-25.

**[Park.04] : J.S. Park, J. Michael Stallings and Y.J. Kang.** Lateral-torsional buckling of prismatic beams with continuous top-flange bracing. Journal of Constructional Steel Research **2004**, 60; 147-160.

**[Powell.70] : Powell G. and Klingner R.** Elastic lateral buckling of steel beams. Journal of Structural Division. ASCE **1970**, 96(9): 1919-32.

**[Roberts.85] : Roberts T.M. and Burt C.A.** Instability of monosymmetric I-beams and cantilevers. International Journal of Mechanical Science, **1985**, 27(5): 313-24.

**[Salzgeber.00] : Salzgeber G.** LT-buckling curves. ECCS report no. 20. TC 8-2000-01. **2000**.

**[Suryoatmono.02] : B. Suryoatmono and D. Ho.** The moment-gradient factor in lateral-torsional buckling on wide flange steel sections. Journal of Constructional Steel Research **2002**, 58; 1247-1264.

**[Timoshenko.61] : Timoshenko S.P. and Gere J.** Theory of Elastic Stability ($2^{nd}$ ed.) , Mc Graw Hill book company, **1961**.

**[Trahair.79] : Trahair N.S.** Elastic lateral buckling of continuously restrained beam-columns. The profession of a civil engineer. Sidney: Sidney University Press, **1979**, p.61-73.

**[Trahair.93] : Trahair N.S.** Flexural-Torsional Buckling of Structures, CRC Press, Boca Raton, **1993**.

**[Trahair.98] : Trahair N.S.** Multiple design curves for beam lateral buckling. In: Usamy T, Itoh Y, editors. Stability and ductility of steel structures. Pergamon, **1998**.

**[Wang.86] : Wang C.M. and Kitipornchai S.** On stability of monosymmetric cantilevers. Engineering Structures, **1986**, 8(3): 169-80.

**[Wang.87] : Wang C.M., Kitipornchai S. and Thevendran V.** Buckling of braced monosymmetric cantilevers. International Journal of Mechanical Science, **1987**,29(5): 321-37.

**[Winter.80] : Winter G.** Lateral bracing. ASCE Transactions **1980**: 809-25.

**[Hirt et al.2006] : Hirt, M. A., Bez, R., and Nussbaumer, A. (2006).** Construction métallique : notions fondamentales et méthodes de dimensionnement. PPUR presses polytechniques.