

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE AMMAR TELIDJI
LAGHOAT



FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES DE L'INGENIEURIE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUE ET INFORMATIQUE

MEMOIRE EN VUE DE L'OBTENTION D'UN DIPLOME
DE LICENCE EN MATHEMATIQUE
DOMAINE : MATHS & INFORMATIQUE
OPTION : MATHEMATIQUE

Thème

LES METHODES NUMERIQUES POUR RESOUDRE UNE EQUATION
DE TYPE
PARABOLIQUE ET HYPERBOLIQUE
PAR LES ELEMENTS FINIS ET LES DIFFERENCES FINIS

Encadré par :

Prof : Mme ABDESSELAM NAWEL

présenté par :

- BAHLOUL Souleymane.
- SACI Riadh.
- LASSAKEUR Imrane.

N° D'ordre : /2014-PFE /DGI

Dédicace

Au terme de ce travail, je tiens remercier le BON DIEU tout puissant qui m'a donné la force et la volonté de réaliser ce modeste travail.

Je dédie ce travail aux deux êtres qui me sont les plus chères dans ce monde

A vous.....ma mère.

A vous.....mon père.

Je les remercie pour tous ce qu'ils faits pour moi, pour leurs encouragements, conseils, et leurs patience tout au long des années d'étude.

A toute la famille BAHLOULI et BENLMAOUAZ et DEGHMICH.

A mon encadreur Mme : ABDESSELAM NAWEL.

Je le dédie aussi à mes enseignants de primaire et moyenne et secondaire, en particulier à BELKHADEM TAHAR, BEN ATIYA SAAD, ZIRARKA BACHIR, AZZOUZI BELKACEM et BORDJ AHMED.

A mes amis : CHERIF, TAYEB, ABDELKADER, ABDELHAK, TAKICHI, Ahmed, AZZO, TOUFIK, SALAH, HAMMA, DJAMEL...

A tous les enseignants de département de mathématique surtout le professeur : MOKHTARI ABDELKADER.

BAHLOUL SLIMAN.

1. ESPACES VECTORIELS [5] :

On dit que l'ensemble E est un espace vectoriel sur \mathbb{K} , ou un \mathbb{K} -espace vectoriel, si :

- est muni d'une loi interne $+$ pour laquelle E est un groupe commutatif.
- il existe une application $(\alpha, u) \rightarrow \alpha u$ de $\mathbb{K} \times E$ dans dite loi externe telle que :
 - $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall (u, v) \in E^2$:
 - $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u, \quad \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
 - $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u, \quad 1u = u$

2 .SOUS-ESPACE VECTORIEL [5] :

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} soit F une partie de E .

On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si :

- F Est stable pour les deux lois : $\begin{cases} \forall (u, v) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K} \\ u + v \in F \text{ et } \lambda u \in F \end{cases}$
- Muni des lois induites, F est un espace vectoriel.

3. ESPACE DE HILBERT [4]:

On appelle espace de Hilbert un espace vectoriel muni d'un produit scalaire dont l'espace normé induit est complet.

4. ESPACE DE SOBOLEV [4]:

On s'intéresse aux espaces de sobolev qui représentent l'avantage d'être mieux problèmes d'évolution de la physique.

Adaptés aux plus de détails, on pourra consulter des ouvrages spécialisés tels que.

Dans un système dynamique l'état est représenté à chaque instant par une fonction définie sur une région spatiale donnée, l'état devient un élément d'un espace vectoriel de dimension infinie (en générale).

Les espaces $L^p(\Omega)$ jouent un role privilégié.

Soit Ω une région spatiale ouverte de \mathbb{R}^n , on definit l'epace $D(\Omega)$ des fonctios indefiniment diffrentiables à support compacte dans Ω et $D'(\Omega)$ le dual topologique de $D(\Omega)$.

DÉFINITION (4.1) :

On appel espace (des classe) des fonctions $L^p(\Omega)$, l'espace de fonctions f tel que :

$$\left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p},$$

Est un espace de Banach.

Cas particulier l'espace des fonctions de carrée sommable $L^2(\Omega)$.

En munissant $L^2(\Omega)$ des produit scalaire définie par :

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f \cdot \bar{g} dx,$$

On peut montrer qu'il est un espace de Hilbert.

A partir de l'espace $L^2(\Omega)$, on définit les espaces de sobolev, d'ordre m , $H^m(\Omega)$.

DÉFINITION (4.2) :

On appelle espace de sobolev d'ordre m ($m \in \mathbb{N}$) le sous espace $H^m(\Omega)$ et $D'(\Omega)$ définie par :

$$H^m(\Omega) = \{f \in D'(\Omega) / f \in L^2(\Omega) \text{ et } \partial^q f \in L^2(\Omega), |q| \leq m\}$$

$$\partial^q = \partial_{x_1}^{q_1} \dots \partial_{x_n}^{q_n} \text{ et } |q| = \sum_{i=1}^{i=n} q_i \quad q = (q_1, \dots, q_n),$$

Et ayant pour norme

$$\|f\|_{H^m(\Omega)}^2 = \sum_{|q| \leq m} \|\partial^q f\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Cette norme munit l'espace $H^m(\Omega)$ d'une structure de Hilbert avec le produit scalaire

$$(f, g)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|q| \leq m} (\partial^q f, \partial^q g)_{L^2(\Omega)}.$$

Soit X un espace de Banach, $]a, b[$ un ouvert de \mathbb{R}^n . On introduit maintenant des espaces spécifiques aux problèmes d'évolution : les espaces $L^p(a, b, X)$.

DÉFINITION (4.3) :

a / On désigne par $L^p(a, b, X)$ ($1 \leq p < \infty$) l'espace des (classes de) fonctions $f:]a, b[\rightarrow X$ telles que

$$t \rightarrow f(t)$$

i/ f est mesurable pour dt ,

$$\text{ii/ } \|f\|_{L^p(a,b,X)} = \left(\int_a^b \|f(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} < \infty.$$

b / On désigne par $L^\infty(a, b, X)$ ($1 \leq p < \infty$) l'espace des (classes de) fonctions f de $]a, b[$ dans X vérifiant i/ et

iii/ f est bornée presque sur $]a, b[$,

Et on a

$$\|f\|_{L^\infty(a,b,X)} = \inf\{ M > 0 \quad \|f(t)\|_X \leq M \quad \text{p.p sur }]a, b[\}.$$

PROPOSITION (4.1) :

L'espace $L^p(a, b, X)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

PROPOSITION (4.2) :

Si X est un espace de Hilbert, alors l'espace $L^2(a, b, X)$ est aussi un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(f, g)_{L^2(a,b,X)} = \int_a^b (f(t), g(t))_X dt.$$

Du fait que la boule unité est compacte faiblement étoilé ([4]).

PROPOSITION (4.3):

Si X est un espace de Banach réflexif séparable et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée dans $L^\infty(a, b, X)$ alors il existe une sous suite, encore notée $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui converge faiblement étoilé.

5. FORME BILINÉAIRE

a est une forme bilinéaire sur $V \times V$ si :

1. a est définie de $V \times V$ dans \mathbb{R} ,
2. a est linéaire par rapport à chaque argument.

6. COMMENT CLASSIFIER UNE EDP DU SECOND ORDRE ?

Une équation du second ordre définie dans \mathbb{R}^2 et du type

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \quad (\text{I})$$

Si $b^2(x, y) - 4a(x, y)c(x, y) > 0$ dans un domaine $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$, alors (I) est dite **hyperbolique**.

On prend comme exemple dans le cas hyperbolique l'équation des **ondes**.

Où l'équation des ondes s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t = 0) = u_0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t = 0) = u_1 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Si $b^2(x, y) - 4a(x, y)c(x, y) = 0$ dans un domaine $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$, alors (I) est dite **parabolique**.

On prend comme exemple dans le cas parabolique l'équation de la **chaleur**.

Où l'équation de chaleur s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t = 0) = u_0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

6.1 LES CONDITIONS AUX LIMITES HOMOGÈNES DE DIRICHLET :

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

6.2 LA FORMULE DE TRAPÈZE :

$$\int_a^b u(x) = \frac{b-a}{2} (u(a) + u(b)).$$

I. MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS [8]

1. INTRODUCTION :

La méthode des éléments finis est une méthode numérique pour résoudre des équations différentielles partielles.

La méthode consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous format variationnelle (comme minimisation de l'énergie en général) dans un espace de dimension infinie.

La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres comme, par exemple, ses valeurs en certains points ou nœuds du maillage.

L'idée de base de la méthode des éléments finis est de remplacer l'espace de Hilbert V sur lequel est posée la formulation variationnelle par un sous-espace V_h de dimension finie. Le problème «**approché**» posé sur V_h se ramène à la simple résolution d'un système linéaire, dont la matrice est appelée **matrice de rigidité**. Par ailleurs on peut choisir le mode de construction de V_h de manière à ce que le sous-espace V_h soit une bonne approximation de V et que la solution u_h dans V_h de la formulation variationnelle soit «**proche**» de la solution exacte u dans V .

2. APPROXIMATION INTERNE GÉNÉRALE :

Nous considérons à nouveau le cadre générale du formalisme variationnelle introduit [1] étant donné de Hilbert V , une forme bilinéaire continue et coercive $a(u, v)$, est une forme linéaire continue $l(v)$, on considère la formulation variationnelle :

Trouver $u \in V$ tel que $a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V$ (2.1)

l'**approximation interne** de (2.1) consiste à remplacer l'espace de Hilbert V par un sous-espace de dimension finie v_h , c'est-à-dire à chercher la solution de :

Trouver $u_h \in V_h$ tel que $a(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$. (2.2)

3. MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS (PRINCIPES GÉNÉRAUX) :

Le principe de la méthode des éléments finis est de construire des espaces d'approximation interne V_h dont la définition est basée sur la notion géométrique de **maillage** du domaine Ω . Un maillage est un pavage de l'espace en volumes élémentaires très simples : triangles, tétraèdres, parallélépipèdes.

Dans ce contexte le paramètre h de V_h correspond à la **taille maximale des mailles** ou cellules qui composent le maillage. Typiquement une base de V_h sera constitué de fonctions dont le support est **localisé** sur une ou quelques mailles. Ceci aura deux conséquences importantes : d'une part, dans la limite $h \rightarrow 0$, l'espace V_h sera de plus en plus « gros » et approchera de mieux en mieux l'espace V tout entier, et d'autre part, la matrice de rigidité k_h du système linéaire sera **creuse**, c'est-à-dire que la plupart de ses coefficients seront nuls (ce qui limitera le coût de la résolution numérique).

4. ÉLÉMENTS FINIS EN DIMENSION $N = 1$:

Pour simplifier l'exposition nous commençons par présenter la méthode des éléments finis en une dimension d'espace. Sans perte de généralité nous choisissons le domaine $\Omega =]0,1[$.en dimension 1 un maillage est simplement constitué d'une collection de points $(x_j)_{0 \leq j \leq n+1}$ (comme pour la méthode des différences finies) tels que :

$$x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1.$$

Le maillage sera dit **uniforme** si les points x_j sont équidistantes, c'est-à-dire que :

$$x_j = jh \quad \text{Avec} \quad h = \frac{1}{n+1} \quad 0 \leq j \leq n + 1.$$

Les points x_j sont aussi appelés les **sommets** (ou nœuds) du maillage .par souci de simplicité nous considérons, pour l'instant, le problème modèle suivant :

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

Dont nous savons qu'il admet une solution unique dans $H_0^1(\Omega)$ si $f \in L^2(\Omega)$. Dans tout ce qui suit on notera \mathbb{P}_k l'ensemble des polynômes à coefficients réels d'une variable réelle de degré inférieur ou égale à k

4.1 ÉLÉMENTS FINIS \mathbb{P}_1 :

La méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 repose sur l'espace discret des fonctions globalement continues et affines sur chaque maille

$$V_h = \{v \in C([0,1])$$

$$\text{Tel que } v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1 \text{ pour tout. } 0 \leq j \leq n\} \quad (2.4)$$

Et sur son sous-espace

$$V_{0h} = \{v \in V_h \text{ tel que } v(0) = v(1) = 0\} \quad (2.5)$$

La méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 est alors simplement la méthode d'approximation variationnelle interne appliqué aux espaces V_h ou V_{0h} définis par (2.4) et (2.5).

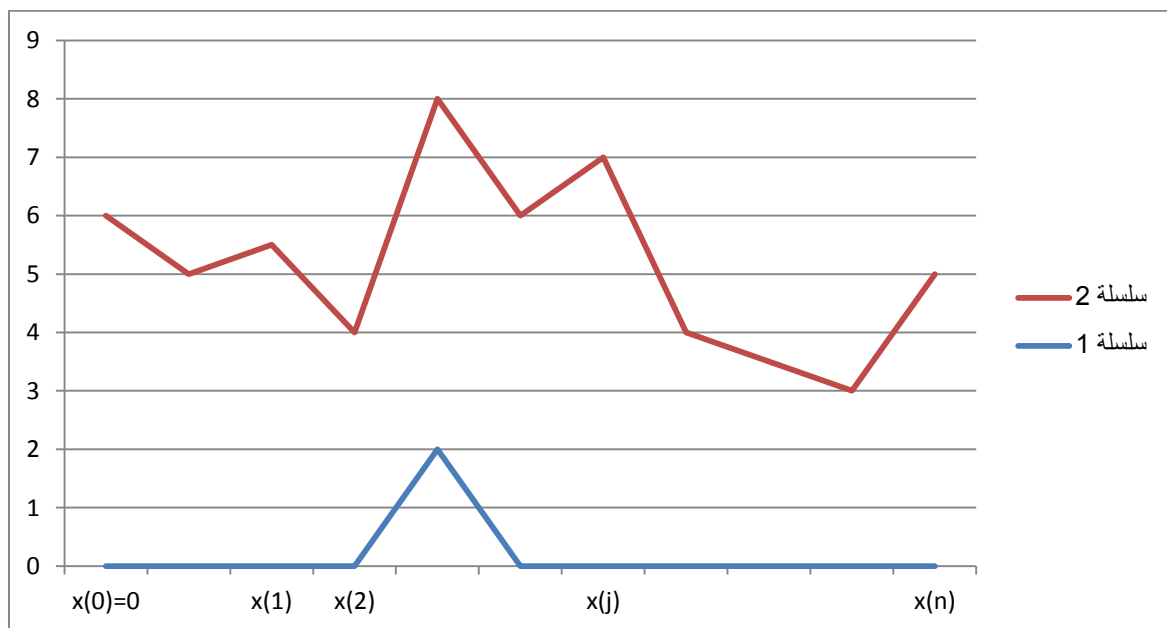


FIG 2.1: maillage de $\Omega =]0, 1[$ et de fonction de base en éléments finis \mathbb{P}_1 .

On peut représenter les fonctions de V_h ou V_{0h} , affines Par morceaux, à l'aide de fonctions de base très simples.

Introduisons la « fonction chapeau » Φ définie par :

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Si le maillage est uniforme, pour $0 \leq j \leq n + 1$, on définit les fonctions de base

(voir la figure 1.1)

$$\Phi_j(x) = \Phi\left(\frac{x - x_j}{h}\right).$$

Cet exemple des éléments finis à nouveau de comprendre l'intérêt de la formulation variation elle. En effet les fonctions de V_h ne sont pas deux fois dérivables sur le segment $[0,1]$ et cela n'a pas de sens de résoudre, même de manière approchée, l'équation (2.3) (en fait la dérivée seconde d'une fonction de V_h est une somme de masses de Dirac aux nœuds du maillage !). Au contraire, il parfaitement légitime d'utiliser des fonctions de V_h dans la formulation variationnelles (2.2) Qui ne requiert qu'une seule dérivée.

Décrivons la **résolution pratique** du problème de Dirichlet (2.3) par la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 . la formulation vaiationnelle (2.2) de l'approximation interne devient ici :

Trouver $u_h \in V_{0h}$ tel que :

$$\int_0^1 u'_h(x) v'_h(x) dx = \int_0^1 f(x) v_h(x) dx \quad \forall u_h \in V_{0h}$$

On décompose u_h sur la base des $(\phi_j)_{1 \leq j \leq n}$ et on prend $v_h = \phi_i$ ce qui donne

$$\sum_{j=1}^n u_h(x_j) \int_0^1 \phi'_j(x) \phi'_i(x) dx = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx.$$

En notant

$$U_h = (u_h(x_j))_{1 \leq j \leq n}, \quad b_h = \left(\int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx. \right)_{1 \leq i \leq n}$$

Et en introduisant la **matrice de rigidité** :

$$K_h = \left(\int_0^1 \phi'_j(x) \phi'_i(x) dx \right)_{1 \leq i, j \leq n},$$

La formulation variationnelle dans V_{0h} revient à résoudre dans \mathbb{R}^n le système linéaire :

$$K_h U_h = b_h.$$

Comme les fonctions de base ϕ_j ont un petit support, l'intersection des supports de ϕ_j et ϕ_i est souvent vide et la plupart des coefficients de K_h sont nuls.

Un calcul simple montre que :

$$\int_0^1 \phi'_j(x)\phi'_i(x)dx = \begin{cases} -h^{-1} & \text{si } j = i - 1 \\ 2h^{-1} & \text{si } j = i \\ -h^{-1} & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Et la matrice k_h est tridiagonale :

$$k_h = h^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir le second membre b_h il faut calculer les integrales :

$$(b_h)_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\phi_i(x)dx \quad \text{si } 1 \leq i \leq n.$$

L'évaluation exacte du second membre b_h peut être difficile ou impossible si la fonction f est compliqué.

En pratique on a recours à des formules de quadrature (ou formules d'intégration numérique) qui donnent une approximation des intégrales définissant b_h .

Par exemple on peut utiliser la formule des Trapèzes :

$$\frac{1}{x_{i+1}-x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(x)dx \approx \frac{1}{2}(\psi(x_{i+1}) + \psi(x_i)).$$

Cette formule est exacte pour les fonctions ψ affines. Si la fonction ψ est régulière quelconque, alors cette formule est simplement approchée avec un reste de l'ordre de $\mathcal{O}(h^2)$.

La résolution du système linéaire $\mathcal{K}_h U_h = b_h$ est la partie la plus coûteuse de la méthode en termes de temps de calcul.

II. MÉTHODES DES DIFFÉRENCES FINIES[1]

1. INTRODUCTION :

La méthode des différences finis est aussi une méthode numérique consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage.

2. LE PRINCIPE DE LA MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIS :

A part dans quelques cas très particuliers, il est impossible e calculer explicitement des solutions des différents modèles présentés ci-dessus.

Il est donc nécessaire d'avoir recours au calcul numérique sur ordinateur pour estimer qualitativement et quantitativement ces solutions.

Le principe de toutes les méthodes de résolution numérique des équations aux dérivées partielles est d'obtenir des valeurs numériques discrètes (c'est-à-dire en nombre fini) qui **approchent** la solution exacte.

Il existe de nombreuses méthodes d'approximation numérique des solutions d'équations aux dérivées partielles, nous présentons maintenant une des plus anciennes et des plus simples, appelée méthode des différences finies (nous verrons plus loin une autre méthode, dite des éléments finis), pour simplifier la présentation, nous nous limitons à la dimension un d'espace, nous n'aborderons pour l'instant que les principes pratiques de cette la méthode, c'est-à-dire la construction de ce qu'on appelle des schémas numérique.

3. MÉTHODES DES DIFFÉRENCES FINIES CLASSIQUES [3]

Le moyen le plus simple pour construire une formule du type

$$h \sum_{k=-m}^m \alpha_k u_{i-k} = \sum_{k=-m'}^{m'} \beta_k f(x_{i-k}), \quad (2.6)$$

Consiste à revenir à la définition de la dérivée. Si $f'(x_i)$ existe, alors :

$$f'(x_i) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}. \quad (2.7)$$

En remplaçant la limite par le taux d'accroissement, avec h fini, on obtient l'approximation

$$u_i^{FD} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}, \quad 0 \leq i \leq n - 1. \quad (2.8)$$

La relation (2.8) est un cas particulier de (2.6) où $m = 0$, $m' = 1$, $\beta_{-1} = 1$, $\beta_0 = -1$, $\beta_1 = 0$.

Le second membre de (2.8) est appelé différence finie progressive.

L'approximation que l'on fait revient à remplacer $f'(x_i)$ par la pente de la droite passant par les points $(x_i, f(x_i))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, comme le montre la Figure 2.2.

Pour estimer l'erreur commise, il suffit d'écrire le développement de Taylor de f (qui sera toujours supposée assez régulière) :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(\delta_i), \text{ où } \delta_i \in]x_i, x_{i+1}[.$$

Ainsi,

$$f'(x_i) - u_i^{FD} = -\frac{h}{2}f''(\delta_i).$$

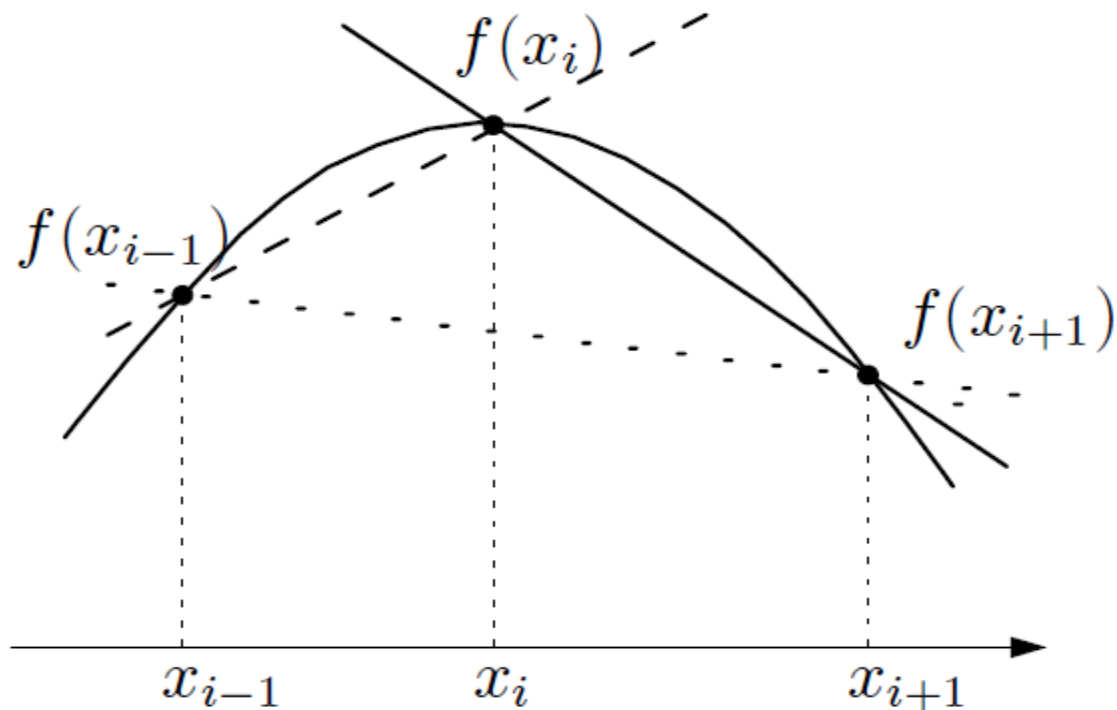


Fig. 2.2. Approximation par différences finies de $f'(x_i)$: rétrograde (trait discontinu), progressive (trait plein) et centrée (pointillés).

Au lieu de (2.2), on aurait pu utiliser un taux d'accroissement centré, obtenant alors l'approximation suivante :

$$u_i^{CD} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}, \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad (2.9)$$

$m = 0$, Le schéma (2.9) est un cas particulier de (2.6) où $\alpha_0 = 1$, $m' = 1$, $\beta_{-1} = 1/2$, $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = -1/2$.

Le second membre de (2.9) est appelé différence finie centrée.

Géométriquement, l'approximation revient à remplacer $f'(x_i)$ par la pente de la droite passant par les points $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ (voir Figure 2.2)

En écrivant à nouveau le développement de Taylor on obtient

$$f'(x_i) - u_i^{CD} = -\frac{h^2}{6} f'''(\delta_i).$$

La formule (2.9) fournit donc une approximation de $f'(x_i)$ qui est du second ordre par rapport à h .

Enfin, on peut définir de manière analogue la différence finie rétrograde par

$$u_i^{BD} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

à laquelle correspond l'erreur suivante :

$$f'(x_i) - u_i^{BD} = \frac{h}{2} f''(\delta_i).$$

Les valeurs des paramètres dans (2.6) sont $m = 1$, $\alpha_0 = 1$, $m' = 1$ et $\beta_{-1} = 0$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = -1$.

Des schémas d'ordre élevé, ou encore des approximations par différences finies de dérivées de u d'ordre supérieur, peuvent être construits en augmentant l'ordre des développements de Taylor. Voici un exemple concernant l'approximation de f'' , si $f \in C^4([a, b])$ on obtient facilement

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{24} \left(f^{(4)}(x_i + \theta_i h) + f^{(4)}(x_i - \omega_i h) \right), \quad 0 < \theta_i, \omega_i < 1,$$

d'où on déduit le schéma aux différences finies centrées

$$u_i'' = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}, \quad 1 \leq i \leq n - 1, \quad (2.10)$$

Auquel correspond l'erreur

$$f''(x_i) - u_i'' = -\frac{h^2}{24} \left(f^{(4)}(x_i + \theta_i h) + f^{(4)}(x_i - \omega_i h) \right).$$

La formule (2.10) fournit une approximation de $f''(x_i)$ du second ordre par rapport à h .

2. DIFFÉRENCES FINIES COMPACTES

Des approximations plus précises de f' sont données par les formules suivantes (que nous appellerons différences compactes) :

$$\begin{aligned} \alpha u_{i-1} + u_i + \alpha u_{i+1} \\ = \frac{\beta}{2h} (f_{i+1} - f_{i-1}) + \frac{\gamma}{4h} (f_{i+2} + f_{i-2}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Où $i = 2, \dots, n - 2$ et où on a posé pour abrégé $f_i = f(x_i)$.

Les coefficients α, β et γ doivent être déterminés de manière à ce que les relations (1) conduisent à des valeurs de u_i qui approchent $f'(x_i)$ à l'ordre le plus élevé par rapport à h . Pour cela, on choisit des coefficients qui minimisent l'erreur de consistance.

$$\begin{aligned} \sigma_i(h) = \alpha f_{i-1}^{(1)} + f_i^{(1)} - \alpha f_{i+1}^{(1)} \\ - \left(\frac{\beta}{2h} (f_{i+1} - f_{i-1}) + \frac{\gamma}{4h} (f_{i+2} - f_{i-2}) \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Cette formule est obtenue en “injectant” f dans le schéma numérique (2.11).

Pour abrégé, on pose $f_i^{(k)} = f^{(k)}(x_i)$, $k = 1, 2, \dots$

Plus précisément, en supposant que $f \in C^5([a, b])$ et en écrivant le développement de Taylor en x_i , on trouve

$$f_{i\pm 1} = f_i \pm hf_i^{(1)} + \frac{h^2}{2}f_i^{(2)} \pm \frac{h^3}{6}f_i^{(3)} + \frac{h^4}{24}f_i^{(4)} \pm \frac{h^5}{120}f_i^{(5)} + 0(h^6),$$

$$f_{i\pm 1}^{(1)} = f_i^{(1)} \pm hf_i^{(2)} + \frac{h^2}{2}f_i^{(3)} \pm \frac{h^3}{6}f_i^{(4)} \pm \frac{h^4}{24}f_i^{(5)} + 0(h^5).$$

Par substitution dans (2.12), on obtient

$$\begin{aligned} \sigma_i(h) = & (2\alpha + 1)f_i^{(1)} + \alpha \frac{h^2}{2}f_i^{(3)} + \alpha \frac{h^4}{12}f_i^{(5)} - (\beta + \gamma)f_i^{(1)} \\ & - \frac{h^2}{2} \left(\frac{\beta}{6} + \frac{2\gamma}{3} \right) f_i^{(3)} - \frac{h^4}{60} \left(\frac{\beta}{2} + 8\gamma \right) f_i^{(5)} + 0(h^6). \end{aligned}$$

On construit des schémas du second ordre en annulant le coefficient de $f_i^{(1)}$, c'est-à-dire $2\alpha + 1 = \beta + \gamma$; des schémas d'ordre 4 en annulant aussi le coefficient de $f_i^{(3)}$: $6\alpha = \beta + 4\gamma$; et des schémas d'ordre 6 en annulant aussi le coefficient de

$$f_i^{(5)} : 10\alpha = \beta + 16\gamma.$$

Le système linéaire formé par ces trois dernières relations est non singulier.

Ainsi, il existe un unique schéma d'ordre 6 et il correspond aux paramètres

$$\alpha = 1/3, \quad \beta = 14/9, \quad \gamma = 1/9$$

Il existe en revanche une infinité de méthodes du second et du quatrième ordre.

Parmi celles-ci, citons un schéma très utilisé qui correspond aux coefficients $\alpha = 1/4, \beta = 3/2, \gamma = 0$.

Des schémas d'ordre plus élevé peuvent être construits au prix d'un accroissement supplémentaire du stencil.

Les schémas aux différences finies traditionnels correspondent au choix $\alpha = 0$ et permettent de calculer de manière explicite l'approximation de la dérivée première de f en un nœud, contrairement aux schémas compacts qui nécessitent dans tous les cas la résolution d'un système linéaire de la forme $Au = Bf$ (avec des notations évidentes).

Pour pouvoir résoudre le système, il est nécessaire de se donner les valeurs des variables u_i pour $i < 0$ et $i > n$.

On est dans une situation particulièrement favorable quand f est une fonction périodique de période $b - a$, auquel cas $u_{i+n} = u_i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Dans le cas non périodique, le système (2.11) doit être complété par des relations aux nœuds voisins des extrémités de l'intervalle d'approximation.

Par exemple, la dérivée première en x_0 peut-être calculée en utilisant la relation :

$$u_0 + \alpha u_1 = \frac{1}{h} (\mathcal{A}f_1 + \mathcal{B}f_2 + \mathcal{C}f_3 + \mathcal{D}f_4),$$

Et en imposant

$$\mathcal{A} = -\frac{3 + \alpha + 2\mathcal{D}}{2},$$

$$\mathcal{B} = 2 + 3\mathcal{D},$$

$$c = -\frac{1 - \alpha + 6D}{2}$$

Afin que le schéma soit au moins précis à l'ordre deux.

1 MÉTHODE NUMÉRIQUE DANS LE CAS PARABOLIQUE [8]

1.2 INTRODUCTION :

Dans cette section, nous montrons comment la méthode des éléments finis (présentée au chapitre 2) s'adapte à la résolution numérique de l'équation de la chaleur : on utilise des éléments finis pour la discrétisation spatiale, et des différences finies pour la discrétisation temporelle.

1.2 SEMI-DISCRÉTISATION EN ESPACE

Il s'agit de discrétiser en espace seulement la formulation variationnelle de l'équation de la chaleur.

Pour cela, comme dans le cas des problèmes elliptiques, nous construisons une approximation variationnelle interne en introduction un sous-espace V_{0h} de $H_0^1(\Omega)$, de dimension finis.

Typiquement, V_{0h} sera un sous-espace d'élément finis P_h ou (Q_k) sur un maillage triangulaire (ou rectangulaire).

La semi-discrétisation est donc l'approximation variationnelle suivant :

Trouver $u_h(t)$ fonction de $]0, T[$ à valeurs dans V_{0h} telle que :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle u_h(t), v_h \rangle_{L^2(\Omega)} + a(u_h(t), v_h) = \langle f(t), v_h \rangle_{L^2(\Omega)} \forall v_h \in V_{0h}, 0 < t < T, \\ u_h(t = 0) = u_{0,h} \end{cases} \quad (3.1)$$

Où $u_{0,h} \in V_{0h}$ est une approximation de la donnée initiale u_0 .

Cette méthode d'approximation est aussi connue sous le nom de « méthode des lignes ».

On peut adapter le cadre abstrait du Théorème 8.2.3 [3] pour montrer que (3.1) admet une unique solution, mais il est beaucoup plus simple et parlant de vérifier que (3.1) est en fait un système **d'équations différentielles ordinaires** à coefficients constants dont on calcule facilement l'unique solution.

De manière pratique, pour résoudre (3.1) on introduit une base $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n_{dl}}$ de V_{0h} (typiquement, la base des éléments finis), et on cherche $u_h(t)$ sous la forme :

$$u_h(t) = \sum_{i=1}^{n_{dl}} U_i^h(t) \phi_i \quad (3.2)$$

Avec $U^h = (U_i^h)_{1 \leq i \leq n_{dl}}$ le vecteur des coordonnées de u_h .

Il est important de noter que dans (3.2) les fonctions de base ϕ_i ne dépendent pas du temps et que seules les coordonnées $U_i^h(t)$ sont des fonctions du temps t .

De même, on pose :

$$u_{0,h}(t) = \sum_{i=1}^{n_{dl}} U_i^{0,h} \phi_i,$$

et (3.11) devient, pour tout $1 \leq i \leq n_{dl}$,

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n_{dl}} \langle \phi_j, \phi_i \rangle_{L^2(\Omega)} \frac{dU_i^h(t)}{dt} + \sum_{j=1}^{n_{dl}} \alpha(\phi_j, \phi_i) U_i^h(t) = \langle f(t), \phi_i \rangle_{L^2(\Omega)} \\ U_i^h(t=0) = u_i^{0,h} \end{cases}$$

Introduisant la matrice de masse \mathcal{M}_h définie par :

$$(\mathcal{M}_h)_{ij} = \langle \phi_j, \phi_i \rangle_{L^2(\Omega)} \quad 1 \leq i \leq n_{dl}$$

Et la matrice de rigidité \mathcal{K}_h définie par :

$$(\mathcal{K}_h)_{ij} = \langle \phi_j, \phi_i \rangle_{L^2(\Omega)} \quad 1 \leq i \leq n_{dl}$$

L'approximation variationnelle (3.1) est équivalent au système linéaire d'équation différentielle ordinaire à coefficients constants

$$\begin{cases} \mathcal{M}_h \frac{du^h}{dt}(t) + \mathcal{K}_h U^h(t) = b^h(t), & 0 < t < T, \\ U^h(t=0) = U^{0,h} \end{cases} \quad (3.3)$$

Avec $b_i^h(t) = \langle f(t), \phi_i \rangle_{L^2(\Omega)}$.

L'existence et l'unicité, ainsi qu'une formule explicite, de la solution de (3.3) s'obtient classiquement par simple diagonalisation simultanée de \mathcal{M}_h et \mathcal{K}_h .

Comme il est difficile et coûteux de diagonaliser (3,3), en pratique on résout numériquement (3.3) par discrétisation et marche en temps.

1.3 DISCRÉTISATION TOTALE EN ESPACE-TEMPS :

Après avoir discrétisé l'équation de la chaleur en espace par une méthode d'éléments finis, on termine la discrétisation du problème en utilisant une méthode de différences finies en temps.

Concrètement, on utilise des schémas de différences finies pour résoudre le système d'équations différentielles ordinaires (3.3) issu de la semi-discrétisation en espace.

Nous allons donc retrouver de nombreux schémas, puis réécrivons le système sans mentionner la dépendance par rapport au paramètre h de maillage spatial

$$\begin{cases} \mathcal{M} \frac{du}{dt}(t) + \mathcal{K}U(t) = b(t), \\ U(t=0) = U^0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Pour simplifier l'analyse on va supposer que $b(t)$ est continu sur $[0, T]$.

On découpe l'intervalle de temps $[0, T]$ en n_0 intervalles ou pas de temps $\Delta t = \frac{T}{n_0}$ et on pose :

$$t_n = n\Delta t \quad 0 \leq n \leq n_0.$$

On note U^n l'approximation de $U(t_n)$ calculé par un schéma.

Pour calculer numériquement des solutions approchées de (3.4)

Le schéma le plus simple et le plus utilisé et le θ -schéma

$$\mathcal{M} \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \mathcal{K}(\theta U^{n+1} + (1 - \theta)U^n) = \theta b(t_{n+1}) + (1 - \theta)b(t_n). \quad (3.5)$$

Lorsque $\theta = 0$, on appelle (3.5) **schéma explicite**, lorsque $\theta = 1$, **schéma implicite**, et pour $\theta = 1/2$, schéma de Crank-Nicholson.

On peut réécrire (3.5) sous la forme :

$$(\mathcal{M} + \theta \Delta t \mathcal{K})U^{n+1} = (\mathcal{M} - (1 - \theta) \Delta t \mathcal{K})U^n + \Delta t(\theta b(t_{n+1}) + (1 - \theta)b(t_n)). \quad (3.6)$$

Remarquons qu'en générale la matrice \mathcal{M} n'est pas diagonale, et donc que, même pour le schéma explicite, il est nécessaire de résoudre un système linéaire pour calculer U^{n+1} en fonction de U^n et du second membre (sauf si on utilise une formule d'intégration numérique qui rende \mathcal{M} diagonale).

Évidemment, on peut construire une foule de schémas.

Ces schémas sont consistants, et on peut analyser leur précision (uniquement par rapport à la variable de temps).

2. MÉTHODE NUMÉRIQUE DANS LE CAS HYPERBOLIQUE[3]:

2.1 INTRODUCTION

Les méthodes numériques pour résoudre l'équation des ondes sont très semblables (dans le principe, mais pas toujours dans la pratique) à celles que nous avons pour l'équation de chaleur.

2.2 SEMI-DISCRÉTISATION EN ESPACE :

On discrétise en espace seulement la formulation variationnelle (8.25) [3] de l'équation des ondes (3.8).

Pour cela, on construit une approximation variation elle interne en introduisant un sous-espace V_{0h} de $H_0^1(\Omega)$, en dimension finie (typiquement, un sous-espace d'élément finis).

La semi-discrétisation de (8.25) [3] est donc l'approximation variationnelle suivante : trouver $u_h(t)$ fonction de $]0, T[$ à valeur dans V_{0h} telle que

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \langle u_h(t), v_h \rangle_{L^2(\Omega)} + a(u_h(t), v_h) = \langle f(t), v_h \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall v_h \in V_{0h}, 0 < t < T \\ u_h(t = 0) = u_{0,h}, \quad \frac{\partial u_h}{\partial t}(t = 0) = u_{1,h} \end{cases} \quad (3.7)$$

Où $u_{0,h} \in V_{0h}$ et $u_{1,h} \in V_{0h}$ sont des approximations des données initiales u_0 et u_1 .

Pour montrer que (3.7) admet une unique solution et la calculer de manière pratique, on introduit une base $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n_{dl}}$ de v_{0h} (qui ne dépend pas du temps), et on Cherche $u_h(t)$ sous la forme :

$$u_h(t) = \sum_{i=1}^{n_{dl}} u_i^h(t) \phi_i,$$

avec $u^h = u_i^h$ $1 \leq i \leq n_{dl}$ le vecteur des coordonnées u_h .

En posant

$$\begin{cases} u_{0,h} = \sum_{i=1}^{n_{dl}} u_i^{0,h} \phi_i, \\ u_{1,h} = \sum_{i=1}^{n_{dl}} u_i^{1,h} \phi_i, \\ b_i^h(t) = \langle f(t), \phi_i \rangle_{L^2(\Omega)}, 1 \leq i \leq n_{dl}, \end{cases}$$

L'approximation variationnelle (3,7) est équivalente au système linéaire d'équations différentielles ordinaires d'ordre 2 à coefficients constants

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_h \frac{d^2 U^h}{dt^2}(t) + \mathcal{K}_h U^h(t) &= b^h(t), \quad 0 < t < T, \\ U^h(t=0) &= U^{0,h}, \quad \frac{dU^h}{dt}(t=0) = b^{1,h}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

Où on trouve les mêmes matrices de masse \mathcal{M}_h et de rigidité \mathcal{K}_h que pour l'équation de la chaleur

$$(\mathcal{M}_h)_{ij} = \langle \phi_i, \phi_j \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad (\mathcal{K}_h)_{ij} = a \langle \phi_i, \phi_j \rangle \quad 1 \leq i, j \leq n_{dl}$$

L'existence et l'unicité ainsi qu'une formule explicite, de la solution de (3.8) s'obtiennent facilement par simple diagonalisation simultanée des matrices \mathcal{M}_h et \mathcal{K}_h .

Comme il est difficile et couteux de diagonaliser (3.8), en pratique on résout numériquement (3.7) par discrétisation et marche en temps.

2.3 DISCRÉTISATION TOTALE EN ESPACE-TEMPS :

On utilise une méthode de différence finis en temps pour résoudre le système d'équations différentielles ordinaires (3.8).

Pour simplifier les notations, nous réécrivons le système (3.8) sans mentionner la dépendance spatiale en h :

$$\begin{cases} \mathcal{M} \frac{d^2 U}{dt^2}(t) + \mathcal{K}U(t) = b(t) \\ U(t=0) = U_0, \quad \frac{dU}{dt}(t=0) = U_1, \end{cases} \quad (3.9)$$

Où on suppose que $b(t)$ est continue sur $[0, T]$.

On découpe l'intervalle de temps $[0, T]$ en n_0 pas de temps $\Delta t = T/n_0$, on pose $t_n = n\Delta t$ $0 \leq n \leq n_0$ et on note U^n l'approximation de $U(t_n)$ calculé par un schéma.

Pour $0 \leq \theta \leq 1/2$ on propose le θ -schéma :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{(\Delta t)^2} + \mathcal{K}(\theta U^{n+1} + (1 - 2\theta)U^n + \theta U^{n-1}) \\ = \theta b(t_{n+1}) + (1 - 2\theta)b(t_n) + \theta b(t_{n-1}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Lorsque $\theta = 0$, on appelle (3.10) schéma explicite.

Pour démarrer le schéma il faut connaître U^0 et U^1 , ce qu'on obtient grâce aux conditions initiales :

$$U^0 = U_0 \text{ et } \frac{U^1 - U^0}{\Delta t} = U_1.$$

Un schéma plus fréquemment utilisé car plus générale est le schéma de new-mark.

Pour résoudre le système « amorti » :

$$\mathcal{M} \frac{d^2 U}{dt^2}(t) + C \frac{dU}{dt}(t) + \mathcal{K}U(t) = b(t)$$

On approche $U(t)$, $dU/dt(t)$, $d^2U/dt^2(t)$ par trois suites U^n , \dot{U}^n , \ddot{U}^n

$$\begin{cases} \mathcal{M}\ddot{U}^{n+1} + C\dot{U}^{n+1} + \mathcal{K}U^{n+1} = b(t_{n+1}) \\ \dot{U}^{n+1} = \dot{U}^n + \Delta t(\delta\ddot{U}^{n+1} + (1-\delta)\ddot{U}^n) \\ U^{n+1} = U^n + \Delta t\dot{U}^n + \frac{(\Delta t)^2}{2}(2\theta\ddot{U}^{n+1} + (1-2\theta)\ddot{U}^n) \end{cases} \quad (3.11)$$

avec $0 \leq \delta \leq 1$ et $0 \leq \theta \leq 1/2$.

Lorsque la matrice d'amortissement est nulle ($C = 0$), on peut éliminer les suites, \dot{U}^n , \ddot{U}^n et (8.69) est équivalent à :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} \frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{(\Delta t)^2} &+ \mathcal{K} \left(\theta U^{n+1} + \left(\frac{1}{2} + \delta - 2\theta \right) U^n + \left(\frac{1}{2} - \delta + \theta \right) U^{n-1} \right) \\
 &= \theta b(t_{n+1}) + \left(\frac{1}{2} + \delta - 2\theta \right) b(t_n) + \left(\frac{1}{2} - \delta + \theta \right) b(t_{n-1})
 \end{aligned}
 \tag{3.22}$$

Remarquons que pour $\delta = 1/2$ le schéma de Newmark redonne le θ -schéma.

En pratique, plus δ est grand, plus le schéma est dissipatif et robuste (les erreurs numériques passées s'amortissent plus vite), même s'il est moins précis.

RÉFÉRENCE :

[1] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, Fausto Saleri, Méthodes Numériques Algorithmes, analyse et applications, Imprimé en février 2007, Springer.

[2] Nguyen Thi Thuy Tang, éléments finis du classique au iso géométrique, mémoire de master (2012), université de Nice-Sophia Antipolis.

[3] Grégoire Allaire, Introduction à l'analyse Numérique et optimisation, école polytechnique, 2006.

[4] H.Brezis, Analyse fonctionnelle, Masson, Paris(1987).

[5] Jean-Michel Ferrard, klub prépa.