الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITÉ AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES
قسم الرياضيات
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse fonctionnelle et applications.

Par : Souani Hidayet Nabila

Thème

Stabilité exponentielle d'un système de type Bresse en Thérmoelasticité avec un amortissment non linéaire

Devant le jury composé de :

Ouchenane Djamel	Professeur	Université de Laghouat	Président
Khalili Zineb	Maitre de conférance B	Université de Laghouat	Encadreur
Choucha Abedelbaki	Maitre de conférance A	Université de Laghouat	Examinateur

Année Universitaire : 2023-2024

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents, à Mes efants mon Frère et Mon Mari , à toute ma famille.

à mon professeur superviseur ZINEB KHALILI. à Tous mes enseignants à mes amis sans exception.

Remerciement

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce mémoire.

Tout d'abord, je remercie chaleureusement mon directeur de mémoire Mme Zineb Khalili, pour sa disponibilité, ses précieux conseils et son accompagnement tout au long de mon travail. Sa rigueur et son expertise m'ont permis de mener à bien cette recherche.

Je remercie également les membres du jury, Dr.D.Ouchenane et Dr.A.Choucha, pour avoir accepté d'évaluer ce mémoire et pour leurs remarques et suggestions constructives qui m'ont aidé à améliorer ma réflexion.

Enfin, je n'oublie pas ma famille et mes amis, pour leur soutien indéfectible, leur patience et leur encouragement constant durant cette période de travail intense.

ملخص

في هذه المذكرة ، ندرس وجود و وحدانية الحل وكذا استقراراه للنظام الحراري الخطي احادي البعد من نوع براس بوجود التأخير مع حد اللزوجة والصوت الثاني (صدى الصوت) ، لقد برهنا وجود و وحدانية الحل باستعمال نظرية $Semi - groupe$

وبرهنا استقرار الحل على انه أسي باستعمال طريقة الطاقة التي تعتمد على دوال ليبانوف.

الكلمات المفتاحية :

نظام براس ، دوال ليابونوف ، الاستقرار الأسي ، المرونة الحرارية

Résumé

Dans ce mémoire, on considère un système thermoélastique linéaire unidimensionnel avec un terme de retard, forçage et historique infini. Nous démontrons que le problème est bien posé, on utilisant la théorie de semi-groupe pour établir l'existence et l'unicité de la solution et on démontré que la stabilité de la solution est exponentielle, par l'utilisation de la méthode l'énergie qui est basée sur les fonctions de Lyapunov.

Mots clés :

Système de Bresse, thermoélasticité, stabilité exponentielle, fonctionnelle de Lyapunov

.

Abstract

In this memory, we consider a one-dimensional linear thermo-elastic of bresse system with delay term, forcing and past history. We prove firstly the well-posedness of our problem with initial boundary conditions and under some assumption , by using the semigroupe theory. Secondly, by using the energy method, we show an exponential stability result.

Keywords :

Bresse system, thermo-elastic, exponential stability, Lyapunov functional .

Table des matières

Notations

$\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$	Espace des fonctions continues.
$L^p(\Omega)$	Espace de Lebesgue, $1 \leq p \leq \infty$
$D(\Omega) = \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$	Espace des fonctions tests.
$D'(\Omega)$	Espace des distributions.
$W^{1,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev, $1 \leq p \leq \infty$
$W_0^{1,p}(\Omega)$	La fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega), 1 \leq p < \infty$
E'	Espace dual de E
E''	Espace dual de E'.
$\langle ., \rangle$	Produit Scalaire dans la dualité E', E.
$H^1(\Omega), H_0^1(\Omega), H^2(\Omega)$	Espaces de Sobolev.
p.p.	presque partout.
$\| \cdot \|$	Une norme associée à un produit scalaire.

Introduction

le système de Bresse est un modèle mathématique débuté en 1859, qui décrit par Le scientifique Charles Bresse , et il se compose de trois équations d'ondes couplées données par :

$$\begin{cases} P_1\varphi_{tt} = Q_x + (N + F_1) \\ P_2\psi_{tt} = M_y - Q + F_2 \\ P_1\omega_{tt} = N_x - IQ + F_3 \end{cases} \tag{1}$$

où

$$\begin{cases} N = (\omega_x - lQ) \\ Q = k\left(\varphi_x + l\omega_x + \psi\right) \\ M = \psi_x \end{cases} \tag{2}$$

tel que N, Q et M sont la force axiale, la force de cisaillement et le moment de flexion et φ, ψ, ω sont les déplacements longitudinaux, Verticaux et d'angle de cisaillement.

• Il est facile de voir que pour $l = 0$ où le déplacement longitudinal w n'est pas pris en compte, le système (2) devien un système de Timochenko .

Dans ce mémoire, on s'intérsse à l'étude du problème suivant

$$\begin{cases} p_1\varphi_{tt} - k\left(\varphi_x + lw + \psi\right)_x - k_0 l\left(w_x - l\varphi\right) + \mu_1\varphi_t(x,t) + \mu_2\varphi_t(x,t-\tau) = 0, \\ p_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k\left(\psi_x + lw + \psi\right) + \int_0^\infty g(s)\psi_{xx}(x,t-s)ds + y\theta_x + f(\psi) = 0, \\ p_1 w_{tt} - k_0\left(w_x - l\varphi\right)_x + kl\left(\varphi_x + lw + \psi\right) = 0, \\ p_3\theta_t + kq_x + y\psi_{tx} = 0, \\ \alpha q_t + \beta q + k\theta_x = 0, \end{cases} \tag{3}$$

avec $(x,t) \in (0,1) \times (0,\infty)$, et les conditions aux limites initiales

$$\begin{cases} \varphi(0,t) = \varphi_x(1,t) = \psi_x(0,t) = \psi(1,t) = \omega(1,t) = \theta(0,t) = q(1,t) = 0, \\ \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \, \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \\ \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \psi(x,0) = \psi_0(x), \\ \omega_t(x,0) = \omega_1(x), \omega(x,0) = \omega_0(x), \\ (x,0) = q_0(x), \, \theta(x,0) = \theta_0(x), \\ \varphi_t(x,t-\tau) = f_0(x,t-\tau), \end{cases} \tag{4}$$

avec $\tau > 0$ est un délait et μ_1 et μ_2 sont des nombres réels positifs, la fonction θ est la différence de température, q est le flux de chaleur, et p_1, p_2, p_3 , $k_0, b, y, k, \alpha, \beta$ sont des composants positifs.

Dans l'étude du notre problème , nous aurons besoin de préciser quelques notations relatives au problème considéré et de supposer quelques hypothèses utiles pour obtenir les résultats visés.

• **Hypothèses**

Nous supposons que la fonction de relaxation g satisfait les hypoesthèses suivantes :

$(\mathbf{G1})g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$est une fonction C^1 telle que :

$$g(0) > 0, b - \int_0^\infty g(s)ds = b - g_0 = L > 0. \tag{5}$$

(**G2**) Soit ω une constante positive avec

$$g'(t) \leqslant -\omega g(t), \forall t \geqslant 0, \tag{6}$$

et nous supposons que le terme de $f\ (\psi(x,t))$ satisfont centaines hypothèse

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$|f\ (\psi_2) - f\ (\psi_1)\Big| \leqslant K_0 \left(|\psi_1|^\theta - |\psi_2|^\theta\right)\Big|\ \psi_1 - \psi_2\Big) \tag{7}$$

Pour tout $\psi^1, \psi^2 \in \mathbb{R}$, et $K_0, \theta > 0$

$$0 \leqslant \hat{f}(\psi) \leqslant f(\psi)\psi \text{ pour tout } \psi \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

avec

$$\hat{f}(z) = \int_0^z f(s)ds. \tag{9}$$

Ce travail constitue trois chapitres, le premier chapitre contient des rappels sur quelques outils mathématiques. On donne des définition sur les espaces fonctionnelles, citer quelques inegalités , nécessaires et on a terminé par la théorie de Semi-groupe.

Le seconde chapitre sera consacré à l'existence et l'unicité de la solution du problème considéré. La preuve est basée sur certaines hypothèses sur les données initiales et la théorie de Semi-groupe. Nous commençons par démontré que le problème considéré est équivalent à un problème de première ordre qu'on précisera. Ensuite, nous montrons des propositions importantes qui assurent l'existence et l'unicité de la solution. Dans le dernièr chapitre, on montre que le comportement asymptotique de la solution est dépend du comportement de la fonction noyau g . Nous donnons la décroissance exponentielle de la solution, en construisant une fonction Lyapunov L, qui est équivalente à la fonctionnelle d'énergie du problème considéré

Chapitre 1

Généralités et Notions de Base

1.1 Rappel sur les Espaces

1.1.1 Espace Vectoriel Normé (EVN)

Un espace vectoriel normé (EVN) est une espace vectoriel muni d'une norme.

Définition 1.1.1 :
Un espace vectoriel E est dit normé lorsqu'il est muni d'une norme, c-à-dire d'un application $\mathbb{N} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisait les hypothèses suivant

- Séparation :

$\forall x \in E$, N(x)=0 $\Longrightarrow x = 0_E$.

- homogénéité :

$\forall(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

- Sous-activité : (inégalité triangulaire)

$\forall(x, y) \in E^2$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

Définition 1.1.2 *(**Espace Complet**) Un espace métrique complet est un espace métrique dans le quel toute suite de Cauchy est convergente.*

Quelques Exemples 1.1.1 *:*

1. *L'intreval réel fermè [0,1] muni de la distance usuelle est complet*
2. *$\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ mini de la distance usuelle $d((x,y) = |x|$ sont complet*

1.1.2 Espace de Banach

Un espace normé est dit complet si toute suite de Cauchy est convergente un espace complet est appelé espace de Banach .

1.1.3 Espace de Hilbert :

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelée espace de Hilbert s'il est complet au sens de la norme associée au produit scalaire .

Définition 1.1.3 *(**Espace Dual**) Soient $(K,+,\times)$ un corps commutatif et E un K espace vectoriel , on appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E vers K , (c-à-d) application $\phi : E \Longrightarrow K$ tel que :*

$\forall (x,y) \in E^2$, $\forall \lambda \in K$, $\phi(\lambda x + y) = \lambda\phi(x) + \phi(y)$ *l'ensemble L(E,K) des formes linéaires sur E est un K -espace vectoriel appelé l'espace dual de E et noter E^**

1.1.4 Espace $L^p(\Omega)$:

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebsgue , les fonction f seront considérés de Ω dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.4 :

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on définit

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \textit{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty\}$$

On défini sur $L^p(\Omega)$ la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

si $p = +\infty$:$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ *tel que* $\exists\, c \in \mathbb{R}$ *vérifiant* : $|f| \leq c.pp$ *sur* $\Omega\}$.*On définit sur* $L^\infty(\Omega)$ *la norme :*

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = inf\,\{c \in \mathbb{R}\ tq\ |f| \leq c.pp\ sur\Omega\}\,.$$

1.1.5 Espaces de Sobolev

Définition 1.1.5 *Pour* $m \in \mathbb{N}$, *on définit l'espace de sobolev d'ordre* $m \in \mathbb{N}$ *par :*

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\right\}.$$

Où :

$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n), \alpha_j \in \mathbb{N}, |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ *et* $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}, \cdots \partial_1^{\alpha_n}$; *où* $\partial_j = \frac{\partial}{\partial_{xj}}$.

On munit $H^m(\Omega)$ *du produit scalaire :*

$$\langle u, v\rangle_m = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx,$$

et la norme associé à ce produit scalaire :

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^m(\Omega)} &= \left(\textstyle\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\textstyle\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega \|D^\alpha u(x)\|_2^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Espaces de Sobolev $(W^{m,p}(\Omega)(m \in \mathbb{N}, p \in [1, +\infty])$

Définition 1.1.6 *Soients* $(m, p) \in \mathbb{N} \times [1, +\infty]$, *on note* $D^\alpha f = L_a$. *Donc on défini* $W^{m,p}(\Omega)$ *par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega)\ tq : \forall \alpha \in \mathbb{N}^n\ avec\ |\alpha| \leq m, \exists\, \mathcal{L}_a \in L^p(\Omega)\}\ \ vérifiant :$$
$$\int_\Omega f(x) D^\alpha Q(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \mathcal{L}_a(x) \varphi(x) dx, \forall Q \in D(\Omega).$$

On définit sur $W^{m,p}(\Omega)$ *la norme*

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|\mathcal{L}\|_{L^p(\Omega)}.$$

Si $1 \leq p \leq +\infty$, *on peut considérons sur* $W^{m,p}(\Omega)$ *la norme équivalente*

$$\|f\|_{W^{m,p}}(\Omega) = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|\mathcal{L}\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Cas particuilier :

1. $W^{0,p} = L^p(\Omega)$
2. $p = 2 : W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

1.2 Quelques Inégalités Utiles

1.2.1 Inégalités de Cauchy-shwartz

Lemme 1.2.1 :

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\forall x_1, x_2 \in L^2(\Omega)$,

$$x_1 x_2 \leq \|x_1\| \|x_2\|,$$

où

$$\Big| \int_\Omega x_1 x_2 d\mu \Big| \leq \left(\int_\Omega |x_1|^2 d\mu\right)^{\dfrac{1}{2}} \left(\int_\Omega |x_2|^2 d\mu\right)^{\dfrac{1}{2}}.$$

Démonstration

La premier consiste à étudier la fonction suivante :

$$f(\lambda) = \int_\Omega (x_1\lambda + x_2)^2 d\mu.$$

La première chose que nous pouvons remarquer est que :

$$(x_1\lambda + x_2)^2 \geq 0 \Longrightarrow f(\lambda) \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ensuite, essayons de développer $f(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
f(\lambda) &= \int_\Omega (x_1^2\lambda^2 + x_2^2 + 2x_1\lambda x_2)d\mu \\
&= \int_\Omega x_1^2\lambda^2 d\mu + \int_\Omega x_2^2\lambda^2 d\mu + \int_\Omega 2x_1\lambda x_2 d\mu \\
&= \lambda \int_\Omega x_1^2 d\mu + \int_\Omega x_2^2 d\mu + 2\lambda \int_\Omega x_1 x_2 d\mu.
\end{aligned}$$

La deuxième chose que nous pouvons remarquer est que $f(\lambda)$ est un polynôme du deuxième degré positive. Par conséquent son descriminant $\Delta \leq 0$, alors :

$$\left(2\int_\Omega x_1x_2 d\mu\right)^2 - 4\int_\Omega x_1^2 d\mu \int_\Omega x_2^2 d\mu \leq 0 \Longrightarrow 4\left(\int_\Omega x_1x_2 d\mu\right)^2 \leq 4\int_\Omega x_1^2 d\mu \int_\Omega x_2^2 d\mu.$$

Il ne nous reste plus qu'à simplifier par 4 et nous obtenons l'inégalité de Cauchy-Schwarz

1.2.2 Inégalités de Hölder

Soient $p, q \in [1, +\infty]$ telles que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p} = 1$. Alors pour tous $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q \ : \ fg \in L^1(\Omega)$ et on a :

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)}\|g\|_{L^1(\Omega)}$$

$$\left(i.e. \begin{cases} \int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} (\int_\Omega |g(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}} & \text{si } p, q \in]1, +\infty[, \\ \int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \|g\|_{L^\infty(\Omega)} (\int_\Omega |f(x)|dx & \text{si } p = 1 \text{ et } q = +\infty \end{cases} \right).$$

Démonstration

Premier cas : p ou q vaut $+\infty$. Supposons $q = +\infty$, et donc p = 1. Alors $g \leq \|g\|_{L^\infty}$, donc $|fg| \leq |f|\|g\|_{L^\infty}$ par conséquent :

$$\|fg\|_{L^1} = \int_\Omega |fg|dx \leq \|g\|_{L^\infty} \int_\Omega |f|dx = \|g\|_{L^\infty}\|f\|_{L^1}.$$

Deuxième cas : p et q sont finis. L'inégalité de Hölder est évidente si $\|f\|_{L^p} = 0$ ou $\|g\|_{L^q} = 0$. En effet par exemple $\|f\|_{L^p} = 0$ alors $|g| = 0$. Donc $|fg| = 0$ et par conséquent $\|fg\|_{L^1} = 0$. Nous supposons donc maintenant que $\|f\|_{L^p} \neq 0$ et $\|g\|_{L^p} \neq 0$.

Rappelons la concavité du logarithme :

$$\forall \alpha \in [0,1], \forall x, y > 0,\ ln(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha ln(x) + (1-\alpha) ln(y).$$

En posant $\alpha = \dfrac{1}{p}$, et donc $1-\alpha = \dfrac{1}{q}$, ainsi que que $x = |f_1|^p$ et $y = |f_1|^q$, on obtient :

$$ln\Big(\frac{|f_1|^p}{p} + \frac{|g_1|^q}{q}\Big) \geq \frac{1}{p} ln(|f_1|^p) + \frac{1}{q} ln(|g_1|^q) = ln(|f_1 g_1|),$$

et donc par croissance de l'exponentielle

$$\frac{|f_1|^p}{p} + \frac{|g_1|^q}{q} \geq |f_1 g_1|.$$

$$f_1 = \frac{f}{\|f\|_{L^p}}\ f_1 = \frac{g}{\|g\|_{L^q}}$$

on obtient :

$$\frac{fg}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}} \leq \frac{1}{p}\frac{|f|^p}{\|f\|_{L^p}^p} + \frac{1}{q}\frac{|g|^q}{\|g\|_{L^q}^q}.$$

En intégrant chaque membre, la croissance de l'intégrale implique :

$$\int_\Omega \frac{fg}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^p}} dx \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

ce qui est l'inégalité attendue.

1.2.3 Inégalité de Young

Lemme 1.2.2 *:*

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ nous avons :

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon}$$

ϵ est une constante positive.

Démonstration

Prenant le résultat bien connu

$$(2\epsilon a - b)^2 \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{R},$$

pour tous $\epsilon > 0$, on a :

$$4\epsilon^2 a^2 + b^2 - 4\epsilon ab \geq 0.$$

Cela implique

$$4\epsilon ab \geq 4\epsilon^2 a^2 + b^2,$$

par conséquence

$$ab \geq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon},$$

Cela achève la démonstration.

Lemme 1.2.3 *:*

L'inégalité de Young affirme que pour tous a et b réels positifs ou nuls, et tous p et q réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, (sont conjugués), on a :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

L'égalité a lieu si et seulement si $a^p = b^q$. L'inégalité de Young est un cas particulier de l'inégalité arithmético-géométrique. Son nom vient de William Henry Young.

Démonstration

Soit I = [0, 1], et $f : I \to \mathbb{R}$ intégrable ,telle que :

$$f(x) = \begin{cases} p \; log \; a, & 0 \leq x \leq \frac{1}{p}, \\ q \; log \; b, & \frac{1}{q} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

pour $a, b \geq 0$, et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, et soit $\phi(t) = exp(t)$ une fonction convexe, utilisant l'inégalité de Jensen, on obtient :

$$\phi\Big(\frac{1}{\mu(I)}\int_I f(x)dx\Big) \leq \frac{1}{\mu(I)}\int_I \phi(f(x))dx.$$

et par conséquence, on a :

$$\frac{1}{\mu(I)}\int_I \phi(f(x))dx \int_0^1 expf(x)dx.$$

1.2.4 Inégalité du Minkowisky

Soit (x, A, μ) un espace mesuré avec $x \neq \varnothing$, $p \in [1, +\infty[$ et deux fonctions f, g $\in L^p(x)$,

alors :

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

C'est-à-dire :

$$\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{1/p}.$$

L'espace $L_p(x)$ étant un espace vectoriel, $f+g$ est dans $L_p(x)$.
Si $\|f+g\|_p = 0$, (l'inégalité est vérifié).

On suppose maintenant que $\|f+g\|_P > 0$.
On a :

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_P^p &= \textstyle\int_x |f+g|^p d\mu \\
&\leq (\textstyle\int_x |f| + |g|)|f+g|^{p-1} d\mu \\
&= \textstyle\int |f||f+g|^{p-1} d\mu + \int |g||f+g|^{p-1} d\mu \\
&\leq \big(\textstyle\int |f|^p d\mu\big)^{\frac{1}{p}} + \big(\int |g|^p d\mu\big)^{\frac{1}{p}} \int |f+g|^{(p-1)\frac{p}{p-1})} d\mu \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p)(\tfrac{\|f+g\|_p^p}{\|f+g\|_p^p}).
\end{aligned}$$

En multipliant les deux côtes par $(\frac{\|f+g\|_p^p}{\|f+g\|_p^p})$, on obtient l'inégalité cherché.

1.3 Les Opérateurs

1.3.1 Operateur Linéaire

Définition 1.3.1 :

Soient E et F deux espaces vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, et $A : E \longrightarrow F$. On dit que l'opèrateur A est linèaire si :

i) $\forall x, y \in E \quad A(x+y) = A(x) + A(y)$,

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad A(\lambda x) = \lambda A(x)$.

1.3.2 Operateur Dissipatif

Définition 1.3.2 :

Soit $A : D(\mathcal{A}) \subset H \to H$ un opérateur linéaire non-borné. On dit que A est dissipatif si

$$\langle \mathcal{A}v, v\rangle \leq 0 \qquad \forall v \in D(\mathcal{A})$$

$\mathcal{A}$ est maximal Im(I + A) = H i.e

$$\forall f \in H, \quad \exists u \in D(\mathcal{A}) \;\; \textit{tel que} \;\; u + \mathcal{A}u = f.$$

On dit que A est monotone si $-\mathcal{A}$ est dissipatif i.e $\langle Au, u\rangle \geq 0$ pour tout $u \in D(A)$.

1.3.3 Opérateur Maximale Monotone

Theoréme :

Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ il existe une fonction unique

$$u \in C^1\Big([0, +\infty[\,;\; H\Big) \cap C\Big([0, +\infty[\,;\; D(A)\Big)$$

De plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad \text{et} \quad \Big|\, \frac{du}{dt}(t) \,\Big| = |Au(t)| \leq |Au_0| \;\; \forall t \geq 0$$

1.4 Semi-groupe Fortement Continue

Définition 1.4.1 :

On appelle l'application S : $[0, +\infty[$ *semi-groupes fortement continu dans H vérifie les propriétés suivantes :*

i) S(0)=Id.

ii) S(t+s)=S(t)S(s), $\forall t, s \geq 0.$

iii) $\forall x \in H$, *l'application S(.)x est continue sur* $[0, +\infty[$ *dans H.i.e*

$$\lim_{0\to 1} \|S(t)x - x\|_H = 0, \quad \forall x \in H,$$

Dans la suite, on appelle une telle application semi-groupe de classe C_0 *et on la note par* C_0*-semi-groupe.*

Proposition 1.4.1 :

Si $(S(t))_{t\geq 0}$ *est un* C_0*-semi-groupe dans H, alors l'opérateur adjoint* $(S^*(t))_{t\geq 0}$ *est aussi semi- groupe de classe* C_0 *dans H.*

1.4.1 Générateur Infinitisémal

Définition 1.4.2 :

On appelle générateur infinitésimal du C_0*-semi-groupe* $S(t)_{t\geq 0}$, *tout opérateur A défini sur l'ensemble*

$$\{D(A) = x \in H \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe}\}$$

Par

$$A(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}, \quad \forall x \in D(A)$$

Parfois on note $\{e^{At}\}_{t\geq 0}$. *pour* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Théorème 1.4.1 :

Si A est un générateur infinitésimal de semi-groupe S(t), alors A est un opérateur fermé.

Proposition 1.4.2 :
Le domaine D(A) d'un générateur infinitésimal A de semi-groupe (SA(t)) est un espace vectoriel dense dans H.

1.4.2 Théorème de Hille-Yosida

Théorème 1.4.2 ***(Hille-Yosida)*** *Soit X un espace de Banach et* $A : D(A) \subset X \mapsto X$ *un opéateur non borné,on a l'équivalence.*

1. *(A, D(A)) est m-dissipatfà domaine dense*

2. *(A, D(A)) est le générateur infinitisimal d'un semi groupe de contraction.*

(A, D(A)) opérateur fermé à domaine dense, vérifié
$[0, \infty] \subset \rho(A)$ *et* $\|R_{\lambda\|_{\mathcal{L}(X)}} \leq \frac{1}{\lambda}$ *pour tout* $\lambda > 0$.

Ainsi ce hypothese pour tout conditions initiale $x_0 \in D(A)$ *il existe une solution fort*

$t \to x(t)$ *dans* $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, (D(A), \|\|_{D(A)})) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, (X_1, \|\|_X))$ *lorsque la condition initiale et*

prise quelconque dans X on a une solution faible $t \to x(t) = S(t)x$ *de class seulment* $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, (X, \|\|_X))$.

1.4.3 Théorème de Lax-Milligram

Définition 1.4.3 *On dit qu'une forme bilinéaire* $a(u, v) : H \times H \to \mathbb{R}$ *est*

- continue s'il existe une constante C elle que.

$$|a(u, v)| \leq C|u||v| \quad \forall u, v \in H$$

- coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ *telle que*

$$a(v, v) \geq \alpha|v|^2 \quad \forall v \in H.$$

Corollaire 1.4.1 *(Lax-Millgram)*

Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive . Alors pour tout $\varphi \in H'$ il existe $u \in H$ unique tel que

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in H \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

Chapitre 2

L'existence et L'unicité de la Solution

Dans ce chapitre, on étudiera l'existence et l'unicité de la solution du problème (3 -4) en utilisant les théorie des semi-groupes

2.1 Position du Problème

Introduisons une nouvelle variable suivante

$$Z(x,p,t) = \varphi_t\left(x, t-\tau p\right), x \in (0,1), p \in (0,1), t \geqslant 0$$

comme

$$Z_t(x,p,t) = \frac{\partial \varphi_t\left(x, t-\tau p\right)}{\partial\left(t-\tau p\right)} \times \frac{\partial\left(t-\tau_p\right)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_t\left(x, t-\tau p\right)}{\partial\left(t-tp\right)}$$

et

$$Z_p(x,p,t) = \frac{\partial \varphi_t\left(x, t-\tau p\right)}{\partial\left(t-\tau p\right)} \times \frac{\partial\left(t-\tau p\right)}{\partial p} = -\tau \frac{\partial \varphi_t\left(x, t-\tau p\right)}{\partial\left(t-\tau p\right)}$$

Alors, on obtient l'équation :

$$\tau Z_t(x,p,t) + Z_p(x,p,t) = 0, (x,p,t) \in (0,1) \times (0,1) \times (0,+\infty) \tag{10}$$

d'autre part , on a

$$n^t(x,s) = \psi(x,t) - \psi(x,t-s), s \geqslant 0$$

donc, on obtient

$$n_t^t(x,s)+\eta_s^t(x,s)=\psi_t(x,t) \tag{11}$$

Alors, on peut reécrit notre problème comme suit

$$\begin{cases}\rho_1\varphi_{tt}-k(\varphi_x+lw+\psi)_{xx}-lk_0(w_x-l\varphi)+\mu_1\varphi_x(x,t)+\mu_2 z(x,1,t)=0,\\ \tau Z_t(x,\rho,t)+Z_\rho(x,\rho,t)=0,\\ \rho_2\psi_{tt}-L\psi_{xx}+k(\varphi_x+lw+\psi)+\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}^t(x,s)ds+\gamma\theta_x+f(\psi(x,t))=0,\\ \rho_1 w_{tt}-k_0(w_x-l\varphi)+lk(\varphi_x+lw+\psi)=0,\\ \rho_3\theta_t+q_x+\gamma\psi_{tx}=0,\\ \alpha q_t+\beta q+\theta_x=0,\\ \eta_t(x,s)+\eta_x(x,s)=\psi(x,t),\end{cases} \tag{12}$$

avec $(x,\rho,t)\in(0,1)\times(0,\tau)\times(0,\infty)$, et les conditions aux limites initiales données par

$$\begin{cases}\varphi(0,t)=\varphi(1,t)=\psi_x(0,t)=\psi(1,t)=w_x(0,t)\\ \quad =w(1,t)=\theta(0,t)=q(1,t)=0,\\ \varphi(x,0)=\varphi_0(x),\varphi_t(x,0)=\varphi_1(x),\psi(x,0)=\psi_0(x),\\ \psi_t(x,0)=\psi_2(x),\omega(x,0)=\omega_0(x),\omega_t(x,0)=\omega_1(x),\\ \theta(x,0)=\theta_0(x),q(x,0)=q_0(x),\\ \varphi_t(x,-t)=f_0(x,t),z(x,1,t)=f(x,t-\tau),\\ \eta^t(x,0)=0,\eta^t(0,s)=\eta^t(1,s)=0,\forall s\geqslant 0,\\ \eta^0(x,s)=\eta_0(s)=0,\forall s\geqslant 0.\end{cases}, \tag{13}$$

et ε une constante positive satisfaite la condition suivante

$$\tau\mu_2<\varepsilon<\tau\left(2\mu_1-\mu_2\right) \tag{14}$$

2.2 Problème de premier ordre

Pour utiliser l'approche de semi-groupe on reécrit notre système comme un système de première order, donc on suppose que

$$U = (\varphi, u, z, \psi, v, y, \theta, q, \phi)^{\top},$$

et on reécrit notre problème comme suit

$$\begin{cases} U'(t) = AU(t) + F, \\ U(0) = \left(\varphi_0, \varphi_1, f_0(., -\tau), \psi_0, \psi_1, w_0, w_1, \theta_0, q_0, \eta_0\right), \end{cases} \tag{15}$$

Ou A l'opérateur différentiel définie par

$$A \begin{pmatrix} \varphi \\ u \\ z \\ \psi \\ v \\ w \\ \omega \\ \theta \\ q \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ \frac{k}{\rho_1}\left(\varphi_x + lw + \psi\right)_x + \frac{k_0 l}{\rho_1}\left(w_x - l\varphi\right) - \frac{\mu_1}{\rho_1}u - \frac{\mu_2}{\rho_1}z(.,1) \\ -\left(\frac{1}{\tau}\right) z_\rho \\ v \\ \frac{L}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}\left(\varphi_x + lw + \psi\right) + \frac{1}{\rho_2}\int_0^\infty g(s)\phi_{xx}(s)ds - \frac{\gamma}{\rho_2}\theta_x \\ \omega \\ \frac{k_0}{\rho_1}\left(w_x - l\varphi\right)_x - \frac{kl}{\rho_1}\left(\varphi_x + lw + \psi\right) \\ -\frac{1}{\rho_3}q_x - \frac{\gamma}{\rho_3}v_x \\ -\frac{\beta}{\alpha}q - \frac{k}{\alpha}\theta_x \\ -\phi_s + v \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$F=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\-\frac{1}{\rho_2}f(\psi)\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{17}$$

On considére l'espace suivant

$$\begin{aligned}
&H^1_*(0,1)=\left\{h\in H^1(0,1):h(0)=0\right\},\\
&\tilde{H}^1_*(0,1)=\left\{h\in H^1(0,1):h(1)=0\right\}\\
&H^2_*(0,1)=H^2(0,1)\cap\tilde{H}^1_*(0,1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&H=H^1_*(0,1)\times L^2(0,1)\times L^2\left((0,1),H^1_0(0,1)\right)\\
&\times\tilde{\tilde{H}}^1_-(0,1)\times L^2(0,1)\times\tilde{H}^1_*(0,1)\times L^2(0,1)\\
&\times\tilde{H}^1_*(0,1)\times L^2(0,1)\times L^2(0,1)\times L^2(0,1)\\
&XL^2_g\left(R^+,H^1_0(0,1)\right),
\end{aligned} \tag{18}$$

oū $L^2_g\left(\mathbb{R}^+_1,H^1_0(0,1)\right)$ désigne l'espace de Hilbert de H^1_0 des fonctions valorisées $\mathbb{R}^+$ avec le produit scalaire

$$(V_1,V_2)_{L_g}\left(\mathbb{R}^+,H^1_0(\Omega)\right)=\int_0^1\int_0^1 g(s)V_1(s)V_{2x}(s)dsdx \tag{19}$$

2.3 L'existence de la solution

nous montrons sous l'hypothèse (14) que l'opérateur A est dissipative, en effet

$$U=(\varphi,u,z,\psi,v,\omega,\theta,q,\phi)^{\top}$$

$$\bar{U}=(\bar{\varphi},\bar{u},\bar{z},\bar{\psi},\bar{v},,\bar{\theta},\bar{q},\bar{\phi})^{T}$$

avec le produit scalaire

$$\begin{aligned}\langle U,\bar{U}\rangle_{H}&=k\int_{0}^{1}(\varphi_{x}+\psi+l\omega)\left(\bar{\varphi}_{x}+\bar{\psi}+\mid l\bar{\omega}\right)dx+p_{2}\int_{0}^{1}v\bar{v}dx\\&+\rho_{1}\int_{0}^{1}\omega\bar{\omega}dx+k_{0}\int_{0}^{1}(\omega_{x}-l\varphi)\left(\bar{\omega}_{x}-l\bar{\varphi}\right)dx+L\int_{0}^{1}\bar{\psi}_{x}dx+\rho_{1}\int_{0}^{1}\bar{v}\bar{v}dx\\&+\varepsilon\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\bar{z}\bar{z}dpdx+p_{3}\int_{0}^{1}\theta\bar{\theta}dx+\alpha\int_{0}^{1}q\bar{q}dx+\int_{0}^{1}\int_{0}^{\infty}g(s)\phi_{x}(s)\phi(s)dxds,\end{aligned}\tag{20}$$

pour la dissipativité de l'opérateur A , on doit calculer :

$$\begin{aligned}\langle AU,U\rangle_{H}=&K\int_{0}^{1}(U_{x}+v_{+}/\omega)\left(\varphi_{x}+l\omega+\psi\right)dx+K_{0}\int_{0}^{1}(\omega_{x}-lu)\\&\text{-}\ (\omega_{x}-L\varphi)\,dx+k\int_{0}^{1}(\varphi_{x}+L_{w}+\psi)\,Udx\\&+k_{0}L\int_{0}^{1}(\omega_{x}-L_{\varphi})\,udx-\mu_{1}\int_{0}^{1}U^{2}dx\\&-N_{2}\int_{0}^{1}z(x,1)Udx+L\int_{0}^{1}\psi_{xx}Vdx\\&-k\int_{0}^{1}(\varphi_{x}+L\omega+\psi)\,vdx-y\int_{0}^{1}\theta_{x}vdx\\&+K_{0}\int_{0}^{1}(\omega_{x}-L\varphi)\,\omega dx-KL\int_{0}^{1}(\varphi_{x}+L\omega+\psi)\,\omega dx\\&+L\int_{0}^{1}V_{x}\psi xdx+\int_{0}^{1}\int_{0}^{\infty}g(s)\phi_{x}(s)\left(-\phi_{s}+V\right)dxds\\&-\int_{0}^{1}9x\theta dx-y\int_{0}^{1}U_{x}\theta dx-\beta\int_{0}^{1}q^{t}dx-\int_{0}^{1}\theta_{x}qdx-\varepsilon\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}zz_{\rho}d\rho dx\end{aligned}\tag{21}$$

Le fait que

$$-\beta\int_0^1 q^2dx-\mu_1\int_0^1 u^2dx-\mu_2\int_0^1 z(x,1)udx+\int_0^1\int_0^\infty g(s)\phi_x(s)$$
$$(-\phi_s+v)\,dxds-\frac{\xi}{\tau}\int_0^1\int_0^1 z(x,p)z_p(x,p)dpdx$$
$$=-\beta\int_0^1 q^2dx-\mu_1\int_0^1 u^2dx-\mu_2\int_0^1 z(x,1)udx+\int_0^1\int_0^\infty g(s)\phi_x(s)$$
$$(-\phi_s+v)\,dxds-\frac{\varepsilon}{2\tau}\int_0^1 zz^2(x,1)-z^2(x,0)\Big\}\,dx$$
$$=-\beta\int_0^1 q^2dx-\mu_1\int_0^1 u^2dx-\mu_2\int_0^1 z(x,1)udx+\int_0^1\int_0^\infty g(s)\phi_x(s)\,(-\phi_s+y)\,dxds$$
$$=-\frac{\varepsilon}{2\tau}\int_0^1 z^2(x,1)dx+\frac{\xi}{2\tau}\int_0^1 u^2dx, \tag{22}$$

utilisant l'inégalité de Young, nous trouvons

$$\begin{aligned}\langle AU,U\rangle_H \leqslant{}& -\beta\int_0^1 q^2dx+\left(-\mu_1+\frac{\mu_2}{2}+\frac{\varepsilon}{2\tau}\right)\int_0^1 U^2dx\\ &+\left(\frac{\mu_2}{2}-\frac{\xi}{2\tau}\right)\int_0^1 z^2(x,1)dx\\ &+\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^\infty g'(s)\left|\phi_x(x,s)\right|^2dsdx.\end{aligned} \tag{23}$$

Utilisant (G1) et (G2) donc l'opérateur A est dissipative

Lemme 2.3.1 *L'opérateur I - A est Surjectif*

Preuve : nous devons montrer pour toute $\mathcal{F}=(f_{1,},f_{2,}f_3,f_4,f_{5,},f_6,f_7f_8,f_{9,}f_{10})^\top\in H$ il existe

$$U-AU=\mathcal{F}_1^1 \tag{24}$$

$$
\begin{cases}
-U+\varphi=f_1\in H_1^1+(0,1),\\
-K\left(\varphi_x+L\omega+\psi\right)_x-K_0L\left(\omega_x-L\varphi\right)+p_1u+u_1u+u_2z(\cdot,1)=p_2f_2\in l^2(0,1),\\
\tau Z_t+Z_p=f_3\in L^2\left((0,1),H^1(0,1)\right),\\
-V+\psi=f_4\in \tilde{H}_n^1(0,1),\\
-L\psi_{xx}+K\left(\varphi_x+L\omega+\psi\right)+p_2V-\int_0^\infty g(s)\phi_{x_x}(s)ds+y\theta_x=p_2f_5\in L^2(0,1),\\
-\omega+\omega=f_6\in \tilde{H}_0^1(0,1),\\
-K_0\left(\omega_+-L\varphi\right)_x+KL\left(\varphi_x+L\omega+\psi\right)+p_1\omega=p_1f_7\in L^2(0,1),\\
q+yV_x+p_3\theta=p_3f_8\in L^2(0,1),\\
(\beta+\alpha)q+\theta\lambda=\alpha f_9\in L^2(0,1),\\
\phi+\phi_s-V=f_{10}\in L^2(0,1)
\end{cases}
\tag{25}
$$

à partir de (25) nous définissons

$$
\theta=\frac{\alpha}{k}\int_0^x f_9(y)\cdot dy-\frac{\alpha}{k}(\beta+\alpha)\int_0^x q(y)dy, \tag{26}
$$

donc $\theta(0,t)=0$.

Insérer $u=\varphi-f_2, v=\psi-f_4, \omega=w-f_6 et$(25) en (26),on a

$$
\begin{cases}
-K\left(\varphi_x+L\omega+\psi\right)_x-K_0L\left(\omega_x-L\varphi\right)+p_1\varphi+u_1u_2+\mu_2z(-,1)=h_1\in L^2(0.1),\\
-L_{\psi_{xx}}+k\left(\phi_x+l\omega+\psi\right)+p_z\psi-\int_0^\infty g(s)\phi_{xx}(s)ds-y(\beta+\alpha)q=h_2\in L^2(0.1),\\
-K_0\left(\omega_x-l\varphi\right)_x+KL\left(\varphi_x+L\omega+\psi\right)+p_1\omega=h_3CL^2(0,1),\\
9x+(B+\alpha)\int_0^x q(y)dy-y\psi_x=h_4\in L^2(0.1),\\
z^2+\tau^{-1}z_p=h_5\in L^2(0.1),\\
\phi+\phi_s-V=h_6\in L^2(0,1),
\end{cases}
\tag{27}
$$

où

$$\begin{cases} h_1 = p_1\left(f_1 + f_2\right), \\ h_2 = p_2\left(f_4 + f_5\right) - \frac{\alpha}{k} \text{ y } f_9, \\ h_3 = p_1\left(f_6 + f_7\right) \ , \\ h_4 = yf_{4x} + p_3\left(f_8 - \frac{\alpha}{k}\int_0^x f_9(y)dy\right) \ , \\ .h_5 = z + \tau^{-1}z_p, \\ h_6 = \phi + \phi_s - V. \end{cases} \tag{28}$$

De Plus par (25) on peut trouver comme $z(x,0) = u(x)$ pour $x \in (0,1)$

Corollaire 2.3.1 - *Soit f une fonction continue sur l'interval $I \in \mathbb{R}$, α constante est $t_0 \in I$, la solution général pour l'équation scalaire*

$$y'(t) = \alpha y(t) + f(t)$$

est donné par $y(t) = Ce^{\alpha t} + \int_{t_0}^{t} e^{\alpha(t-s)}f(s)ds$

d'où C une constante

Alors, l'équation $z_p = \tau_z + f_3$

donner par :

$$\begin{aligned} Z(x,P) &= Ce^{-Tp} + \int_0^p Te^{-T(p-p)}f_3(x,s)d\delta. \\ &= ce^{-\tau_p} + \pi e^{-Tp}\int_0^P f_3\left(x_1\delta\right)e^{Tp}d\xi, \\ Z(x,p) &= u(x)e^{-cp} + \tau e^{-\tau p}\int_0^p f_3(x,s)e^{\tau ps}ds. \end{aligned} \tag{29}$$

A partir de 25 on obtient

$$z\left(x,p\right) = \varphi(x)e^{-\tau p} - f_1e^{-\tau p} + \tau e^{-\tau p}\int_0^p f_3(x,s)e^{\tau p_3}ds. \tag{30}$$

alors,

$$z(x,1) = \varphi(x)e^{-\tau} + z_0(x) \tag{31}$$

telque

$$Z_0(x) = -f_1 e^{-\tau} + \tau e^{-\tau} \int_0^p f_3(x,s) e^{\tau s} ds. \tag{32}$$

On remarque que la derniére l'équation de (41) a une solution unique

$$\begin{aligned} \phi(x,s) &= \left(\int_0^x e^y \left(f_{10}(x,y) + v(x) dy \right) e^{-s} \right) \\ &= \left(\int_0^x e^y \left(f_{10}(x,y) + \psi(x) - f_4(x) dy \right) e^{-s} \right). \end{aligned} \tag{33}$$

Pour résoudre (28), on considère

$$\alpha((\varphi, \psi, \omega, q), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}, \tilde{q})) = L(\hat{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}, \tilde{q}), \tag{34}$$

Ou

$$\alpha : \left[H^1_*(0,1) \times \tilde{H}^1_*(0,1) \times \tilde{H}^1_*(0,1) \times C^t(0,1) \right]^2 \to \mathbb{R} \tag{35}$$

est la forme bilinéaire donnée par

$$\begin{aligned} &\alpha((\varphi, \psi, \omega, q), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}, \tilde{q})) \\ &= K \int_0^1 (\varphi_t + lw + \psi) \left(\hat{\varphi}_x + L\tilde{w} + \widetilde{\psi} \right) dx + (\beta + \alpha) \int_0^1 q\widetilde{q} dx \\ &+ b \int_0^1 \psi_x \tilde{\psi}_x dx + p_2 \int_0^1 \psi \tilde{\psi} dx - y(\beta + \alpha) \int_0^1 q \tilde{\psi} dx \\ &+ p_1 \int_0^1 \psi \tilde{\tau} dx + y(\beta + \alpha) \int_0^1 \psi \tilde{q} dx + p_1 \int_0^1 \omega \tilde{w} dx \\ &+ k_0 \int_0^1 (w_x - l\phi)(\tilde{w}_x - l\tilde{\varphi}) dx + \int_0^1 \varphi \tilde{\phi} \left(u_1 + u_2 e^{-\tau} \right) dx \\ &+ p_3(\beta + \alpha) \int_0^1 \left(\int_0^x q(y) dy \int_0^x \tilde{q}(y) dy \right) dx. \\ &L : \left[H^1_*(0,1) \times \hat{H}^1_*(0,1) \times \tilde{H}^1_*(0,1) \times L^2(0,1) \right] \to \mathbb{R} \end{aligned} \tag{36}$$

La forme linéaire définie par

$$\begin{aligned} L(\tilde{\phi}, \widetilde{\psi}, \widetilde{w}, \tilde{q}) &= \int_0^1 h_1 \tilde{\phi} dx + \int_0^1 h_2 \tilde{\psi} dx + \int_0^1 h_3 \tilde{w} dx \\ &+ (\alpha + \beta) \int_0^1 h_4 \int_0^r \tilde{q}(y) dy dx + \int_0^1 (u_1 \rho_1 u_2 z_0)\, \tilde{\phi} dx. \end{aligned} \tag{37}$$

Il est facile de vérifier que A est continue et coercif. Et L est continue donc en appliquant le theoreme de Lax- Millgram, on déduit que pour tout $(\tilde{\varphi}, \widetilde{\psi}, \widetilde{\omega}, \widetilde{q}) \in H^1_\infty(0,1) \times \widetilde{H}^1_*(0,1) \times \widetilde{H}^1_*(0,1) \times L^2(0,1)$. Le probléme (34) admet une solution unique

$$(\varphi, \psi, \omega, q) \in H^1_*(0,1) \times H^1_0(0,1) \times \hat{H}^1_0(0,1) \times L^2(0,1).$$

Puisque $D(A)$ est dense en conséquence, en utilisant les Lemmes (1) et (2), nous concluons que A est un opérateur maximal monotone

Lemme 2.3.2 *l'opérateur F défini dans (26) est localement Lipschutiziene dans H.*

Preuve : soit $U = (\varphi, u, z, \psi, v, \omega, \omega, \theta, q, \phi)^\top$

$$\bar{U} = (\bar{\varphi}, \bar{u}, \bar{z}, \bar{\psi}, \bar{V}, \bar{\omega}, \bar{\omega}, \bar{\theta}, \bar{q}, \bar{\phi}))^T$$

alors nous avons (38)

$$\|F(U) - F(\bar{U})\|_H \leqslant \|f(\psi) - f(\bar{\psi})\|_{L^2}$$

utilisant (5), l'inégalités de Holder et Pointcaré on obtient

$$\begin{aligned} &\|f(\psi) - f(\bar{\psi})\|_{L^2} \leqslant \big(\|\psi\|^\theta_{2\theta} + \|\psi - \bar{\psi}\| \,\big\langle c_1 \|\psi - \bar{\psi}\|_, , \\ &\|F(U) - F(\bar{U})\|_H \leqslant c_1 \|\Psi - \bar{\Psi}\|_H. \end{aligned} \tag{39}$$

l'opérateur F est localoment lipschitzien dans H.

La preuve est donc compléte.

Chapitre 3

Comportement Asymptotique de la Solution

3.1 Stabilité Exponentielle

Nous définissons l'énergie de notre système par :

$$
\begin{aligned}
E(t) =& \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 w_t^2 + L \psi_x^2 + \rho_3 \theta^2 + \alpha q^2 \right. \\
&\left. + k\left(\varphi_x + \psi + l w\right)^2 + k_0\left(w_x - l\varphi\right)^2\right] dx \\
&+ \frac{\xi}{2} \int_0^1 \int_0^1 z^2(x,\rho,t) d\rho dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^\infty g(s) \left|\eta_x^t(x,s)\right|^2 ds dx \\
&+ \int_0^1 \widehat{f}(\psi(t)) dx.
\end{aligned} \tag{40}
$$

La preuve de la stabilité de notre système basée sur les lemmes suivants :

Lemme 3.1.1 :

Soit $(\varphi, z, \psi, \omega, \theta, q, \eta^t)$ la solution de (12)-(13).Alors, la fonctionnelle énergétique, définie par (40), satisfait :

$$
\begin{aligned}
E'(t) \leq & -\beta \int_0^1 q^2 \, dx \\
& - \left(\mu_1 - \frac{\xi}{2\tau} - \frac{\mu_2}{2}\right) \cdot \|\varphi_t\|_2^2 - \left(\frac{\xi}{2\tau} - \frac{\mu_2}{2}\right) \|z(x,1,t)\|_2^2 \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^\infty g'(s) \eta_x^t(x,s)^2 \, ds \, dx,
\end{aligned} \tag{41}
$$

Tel-que $C > 0$

Preuve : Multiplier$(1.1)_1, (1.1)_2, (1.1)_3, (1.1)_4, et(1.1)_5$ par $\varphi_t, \psi_t, \omega_t, \theta$ et q, respectivement

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt}(x,t)\varphi_t(x,t) - k\left(\varphi_x + lw + \psi\right)_x\varphi_t(x,t) - lk_0\left(w_x - l\varphi\right)\varphi_t(x,t) + \mu_1\varphi_t^2(x,t) \\ +\mu_2 z(x,1,t)\varphi_t(x,t) = 0, \\ \rho_2\psi_{tt}(x,t)\psi_t(x,t) - L\psi_{xx}(x,t)\psi_t(x,t) + k\left(\varphi_x + lw + \psi\right)(x,t)\psi_t(x,t) + \gamma\theta_x(x,t)\psi_t(x,t) \\ -\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}^t(x,s)\psi_t(x,t)ds = 0, \\ \rho_1 w_{tt}(x,t)w_t(x,t) - k_0\left(w_x - l\varphi\right)_x(x,t)w_t(x,t) + lk\left(\varphi_x + lw + \psi\right)(x,t)w_t(x,t) = 0, \\ \rho_3\theta_t(x,t)\theta(x,t) + \kappa q_x(x,t)\theta(x,t) + \gamma\psi_{tx}(x,t)\theta(x,t) = 0, \\ \alpha q_t q + \beta q^2 + k\theta q = 0 \end{cases}$$

avec le fait

$$\frac{d}{dt}\hat{f}(\psi) = f(\psi)\psi,$$

Ça nous donne (41)

Lemme 3.1.2 :

Si $(\varphi, z, \psi, \omega, \theta, q, \eta^t)$ la solution pour (12)-(13) on a si $k \neq 0$:

$$F_1(t) := \alpha\rho_3 \int_0^1 \theta \int_0^x q(y)\,dy\,dx \tag{42}$$

satisfait, pour tout $\varepsilon_1 > 0$:

$$F_1'(t) \leq -\frac{\rho_3^k}{2}\int_0^1 \theta^2\,dx + \epsilon_1\int_0^1 \psi_t^2\,dx + c\left(1 + \frac{1}{\epsilon_1}\right)\int_0^1 q^2\,dx. \tag{43}$$

prend la dérivée de F_1,utilisant $(1,1)_4, (1,1)_5$ on a :

$$\begin{aligned} F_1'(t) = &- \rho_3 k\int_0^1 \theta^2\,dx - \alpha k\int_0^1 q^2\,dx - \alpha\gamma\int_0^1 q\psi_x dx \\ &- \beta\rho_3\int_0^1 \theta\int_0^x q(y)\,dy\,dx. \end{aligned} \tag{44}$$

D'après les inégalités de Cauchy-Schwarz et Young avec $\varepsilon_1 > 0$,on obtient (43)

Lemme 3.1.3 :

Si $(\varphi, z, \psi, \omega, \theta, q, \eta^t)$ être les solutions de (12)-(13) nous avons :

$$F_2(t) := -\frac{\rho_2\rho_3}{\gamma}\int_0^1 \psi_t(y)\int_0^x \theta\, dy\, dx. \tag{45}$$

satisfait, pour tout $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$:

$$\begin{aligned} F_2'(t) \leq & -\frac{\rho_2}{2}\int_0^1 \psi_t^2\, dx + \varepsilon_2\int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2\, dx \\ & + \left(\varepsilon_3 + \frac{\rho_3}{\gamma}\left(\frac{\varepsilon_2}{b^2\lambda_2} + \frac{b^2}{2\varepsilon_2\lambda_2}\right)\right)\int_0^1 \psi_x^2\, dx \\ & + c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_3}\right)\int_0^1 \theta^2\, dx + c\int_0^1 q^2\, dx \\ & + C\int_0^1\int_0^\infty g(s)\left|\eta_x^t(x,s)\right|^2\, ds\, dx \\ & + (C)\int_0^1 \theta_x^2\, dx. \end{aligned} \tag{46}$$

Preuve :

Pour la différenciation de F_2, en utilisant les équations et intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} F_2'(t) = & -\rho_2\int_0^1 \psi_t^2 dx - \frac{\rho_2 k}{\gamma}\int_0^1 q\psi_t dx + \rho_3\int_0^1 \theta^2 dx \\ & - \frac{b\rho_3}{\gamma}\int_0^1 \theta\psi_x dx + \frac{k\rho_3}{\gamma}\int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)\int_0^x \theta(y) dy dx \\ & + \frac{\rho_3}{\gamma}\int_0^1\int_0^\infty g(s)\eta_x^t(x,s) ds\int_0^x \theta_x(y) dy dx \\ & + \frac{\rho_3}{\gamma}\int_0^1 \theta\int_0^x f(\psi) dy dx. \end{aligned} \tag{47}$$

L'estimation (46) suit en utilisant Cauchy – Schwarz, Les inégalités de Young et de Poincaré qui

$$\int_0^1 |f(\psi)\theta|\, dx \leq \int_0^1 |\psi|^\theta|\psi||\theta|\, dx \leq \|\psi\|_{2(\theta+1)}\|\psi\|_{2(\theta+1)}\|\theta\| \leq C_1\int_0^1 \theta^2\, dx \leq c\int_0^1 \theta_X^2 dx. \tag{48}$$

Lemme 3.1.4 :

Si $(\varphi, \psi, \omega, \theta, q, z, \eta^t)$ *être les solutions de*(12)-(13) *:*

$$F_4(t) := \rho_2 \int_0^1 \psi\psi_t dx \tag{49}$$

satisfait pour tout $\delta_2 > 0$ l'estimation

$$\begin{aligned} F_4'(t) \leq & \left(\frac{b}{2} + \delta_2 + C_2\right) \int_0^1 \psi_x^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx \\ & + \frac{k^2}{b} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 \, dx + c \int_0^1 \theta^2 dx \\ & + \frac{g_0}{4\delta_2} \int_0^1 \int_0^\infty g(s) \left|\eta_x^t(x,s)\right|^2 dsdx. \end{aligned} \tag{50}$$

Preuve : En prenant la dérivée de F4 et en utilisant la deuxième équation de (1), il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} F_4'(t) = & - b \int_0^1 \psi_x^2 \, dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 \, dx + \gamma \int_0^1 \psi_x \theta \, dx \\ & - k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw) \, dx \\ & + \int_0^1 \psi_x(x) \left(\int_0^\infty g(s) \eta_x^t(x,s) \, ds \right) dx - \int_0^1 \psi f(\psi) \, dx, \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(\psi)\psi| dx & \leq \int_0^1 |\psi|^\theta |\psi||\psi| dx \\ & \leq \|\psi\|_{2(\theta+1)}^\theta \|\psi\|_{2(\theta+1)} \|\psi\| \\ & \leq C_2 \int_0^1 \psi_x^2 \, dx. \end{aligned} \tag{52}$$

Inégalités de Young et Poincaré pour (51) rendement (50)

Lemme 3.1.5 :

Si $(\varphi, z, \psi, \omega, \theta, q, \eta^t)$ *être les solutions pour(12)-(13) alors l'énergie fonctionnelle :*

$$F_5(t) := -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t (w_x - l\varphi) \, dx - \rho_1 \int_0^1 w_t (\varphi_x + \psi + lw) \, dx \tag{53}$$

satisfait à l'estimation :

$$\begin{aligned}F_5'(t) \leq &-\left(\frac{lk_0}{2}-\frac{\mu_1}{4\varepsilon_6}-\frac{\mu_2}{4\varepsilon_7}\right)\int_0^1 (w_x-l\varphi)^2\,dx-\frac{l\rho_1}{2}\int_0^1 w_t^2dx\\ &+(l\rho_1+\varepsilon_6\mu_1)\int_0^1\varphi_t^2dx+c\int_0^1\psi_t^2dx\\ &+lk\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)^2\,dx+\varepsilon_7\mu_2\int_0^1 z^2(x,1,t)dx.\end{aligned} \tag{54}$$

Preuve : Pour la différenciation de F4, en utilisant et nous arrivons à :

$$\begin{aligned}F_5'(t) = &-lk_0\int_0^1 (w_x-l\varphi)^2\,dx-l\rho_1\int_0^1 w_t^2dx+l\rho_1\int_0^1\varphi_t^2dx\\ &+lk\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)^2\,dx-\rho_1\int_0^1\psi_t w_t dx\\ &+\mu_1\int_0^1\varphi_t\,(w_x-l\varphi)\,dx+\mu_2\int_0^1 z(x,1,t)\,(w_x-l\varphi)\,dx.\end{aligned} \tag{55}$$

Inégalité de Young pour (55) rendements (54)

Lemme 3.1.6 :

Si $(\varphi,\psi,\omega,\theta,q,z,\eta^t)$ être les solutions pour(19)-(21) et si $K=K_0$ puis, le fonctionnel

$$\begin{aligned}F_6(t) := &-\rho_1\int_0^1\varphi_t\,(w_x-l\varphi)\int_0^x w_t(y)dydx\\ &-\rho_1\int_0^1\varphi_t\int_0^x\omega\,(\varphi_x+\psi+lw)\,dydx\end{aligned} \tag{56}$$

satisfait à l'estimation

$$\begin{aligned}F_6'(t) \leq &-\frac{l\rho_1}{2}\int_0^1\omega_t^2dx-lk_0\int_0^1(w_x-l\varphi)^2\,dx+\rho_1\int_0^1\psi_t^2dx\\ &+lk\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)^2\,dx+\frac{\rho_1}{2}\int_0^1\psi_t^2dx+c\int_0^1 x^2(x-t)dx.\end{aligned} \tag{57}$$

Preuve : Une simple différenciation de F_6 en utilisant le premier et le troisième les équations de (1), conduit à :

$$
\begin{aligned}
F_6'(t) = &-\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - k_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx + \rho_1 \int_0^1 w_t^2 dx \\
&- \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \int_0^x \psi_t(y) dy + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx \\
&+ l(k - k_0) \int_0^1 (w_x - l\varphi) \int_0^x (\varphi_x + \psi + lw) dy dx
\end{aligned} \tag{58}
$$

et en utilisant les inégalités de Young et de Cauchy-Schwarz, avec le fait que $k = k_0$, donne (57).

Lemme 3.1.7 :

Si $(\varphi, \psi, \omega, \theta, q, z, \eta^t)$ *sont des solutions pour(12)-(13) et (9),et nous avons*

$$
\begin{aligned}
F_7(t) := &\rho_2 \int_0^1 \psi_t (\varphi_x + \psi + lw) dx + \frac{b\rho_1}{k} \int_0^1 \varphi_t \psi_x dx \\
&+ \frac{b\rho_3}{\gamma} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^1 \theta \varphi_t dx \\
&- \frac{b}{\gamma} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^1 q (\varphi_x + \psi + lw) dx \\
&- \frac{bl^2\rho_2}{k_0} \int_0^1 \psi \psi_t dx + \frac{bl\rho_1}{k_0} \int_0^1 \psi w_t dx
\end{aligned} \tag{59}
$$

satisfait pour tout $\varepsilon_4, \varepsilon_5, \delta_2 > 0$ l'estimation

$$\begin{aligned}
F_7'(t) \leq & -\left(\frac{k}{2} - \frac{b\eta}{\gamma\alpha\varepsilon_{10}} + \frac{\gamma}{4\varepsilon_1} + \frac{kb\rho_3}{\gamma 4\varepsilon_2\rho_1}\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right)\right. \\
& \left. + \frac{b}{4\varepsilon_3}\right)\int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2\, dx + \varepsilon_8 \int_0^1 w_t^2 dx \\
& + \left(\frac{b^2 l^2}{k} + \frac{bl^2\rho_2\delta_3}{k_0} + b\varepsilon_3 + \frac{bl^2}{k_0}c_1\right. \\
& \left. + 2\left(\frac{\varepsilon}{b^2\lambda_1} + \frac{b^2}{2\varepsilon\lambda_1}\right) + c_2\right)\int_0^1 \psi_x^2 dx \\
& + \varepsilon_9 \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2\, dx + c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_8} + \frac{b\rho_1\varepsilon_4}{k}\right) \\
& + \int_0^1 \psi_t^2 dx + c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_8}\right)\int_0^1 q^2 dx + c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_9}\right. \\
& \left. + \frac{b\rho_3\mu_1}{\gamma\rho_1}\varepsilon_5\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right)\right)\int_0^1 \theta^2 dx + \left(\frac{b\eta}{\gamma\alpha}\varepsilon_{10}\right. \\
& \left. + \gamma\varepsilon_1 + \frac{kb\rho_3}{\gamma\rho_1}\varepsilon_2\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right)\right)\int_0^1 \theta_x^2 dx \\
& + \left(\frac{b\rho_1}{k4\varepsilon_4} + \frac{b\rho_3\mu_1}{4\varepsilon_5\gamma\rho_1}\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right)\right)\int_0^1 \varphi_t^2 dx \\
& + \frac{l\varepsilon_1}{b^2}\int_0^1 (w+\psi)^2 dx + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 \\
& + \frac{g_0 bl^2\rho_2}{k_0 4\delta_3}\int_0^1\int_0^\infty g(s)\left|\eta_x^t(x,s)\right|^2 ds dx
\end{aligned} \tag{60}$$

Preuve : prenons la dérivé de F_7, obtenons

$$\begin{aligned} F_7'(t) =& \rho_2 \int_0^1 \psi_{tt} \left(\varphi_x + \psi + lw\right) dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t \left(\varphi_x + \psi + lw\right)_t dx \\ &+ \frac{b\rho_1}{k} \int_0^1 \varphi_{tt}\psi_x dx - \frac{b\rho_1}{k} \int_0^1 \varphi_t \psi_{xt} dx \\ &+ \frac{b\rho_3}{\gamma} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right) \int_0^1 \theta_t \varphi_t dx \\ &+ \frac{b\rho_3}{\gamma} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right) \int_0^1 \theta \varphi_{tt} dx \\ &- \frac{b}{\gamma} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right) \int_0^1 q_t \left(\varphi_x + \psi + lw\right) dx \\ &- \frac{b}{\gamma} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right) \int_0^1 q \left(\varphi_x + \psi + lw\right)_t dx \\ &- \frac{bl^2\rho_2}{k_0} \int_0^1 \psi_t^2 dx - \frac{bl^2\rho_2}{k_0} \int_0^1 \psi_{tt}\psi dx \\ &+ \frac{bl\rho_1}{k_0} \int_0^1 w_{tt}\psi dx + \frac{bl_1}{k_0} \int_0^1 w_t \psi_t dx. \end{aligned} \tag{61}$$

de la droite de (61) et des relations dans (1)–(3), nous arriver à

$$\begin{aligned} &\rho_2 \int_0^1 \psi_{tt} \left(\varphi_x + \psi + lw\right) dx \\ &= - k \int_0^1 \left(\varphi_x + \psi + lw\right)^2 dx - \gamma \int_0^1 \theta_x \left(\varphi_x + \psi + lw\right) dx \\ &\quad - b \int_0^1 \psi_x \left(\varphi_x + \psi + lw\right)_x dx \\ &\quad - \int_0^1 \int_0^\infty g(s)\psi_{xx}(x, t-s) ds \left(\varphi_x + \psi + lw\right) dx \\ &\quad - \int_0^1 f(\psi) \left(\varphi_x + \psi + lw\right) dx \end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^1 \varphi_{tt}\psi_x dx =& k \int_0^1 \psi_x \left(\varphi_x + \psi + lw\right)_x dx \\ &+ k_0 l \int_0^1 \left(w_x - l\varphi\right) dx - \mu_1 \int_0^1 \varphi_t \psi_x dx, \end{aligned} \tag{63}$$

$$\rho_3 \int_0^1 \theta_t \varphi_t dx = k \int_0^1 q\varphi_{xt} dx + \gamma \int_0^1 \psi_t \varphi_{xt} dx \tag{64}$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \theta\varphi_{tt}dx = &-\frac{k}{\rho_1}\int_0^1 \theta_x\left(\varphi_x+\psi+lw\right)dx \\
&+\frac{lk_0}{\rho_1}\int_0^1 \theta\left(w_x-l\varphi\right)dx-\frac{\mu_1}{\rho_1}\int_0^1 \theta\varphi_t dx,
\end{aligned}
\tag{65}
$$

$$
\begin{aligned}
-\int_0^1 q_t\left(\varphi_x+\psi+lw\right)dx = &\frac{\beta}{\alpha}\int_0^1 q\left(\varphi_x+\psi+lw\right)dx \\
&+\frac{k}{\alpha}\int_0^1 \theta_x\left(\varphi_x+\psi+lw\right)dx
\end{aligned}
\tag{66}
$$

$$
\begin{aligned}
-\rho_2\int_0^1 \psi_{tt}\psi dx = b\int_0^1 \psi_x^2 dx &+ k\int_0^1 \psi\left(\varphi_x+\psi+lw\right)dx \\
-\gamma\int_0^1 \theta\psi_x dx &+ \int_0^1\int_0^\infty g(s)\psi_{xx}ds\psi dx \\
&+\int_0^1 f(\psi)\psi dx
\end{aligned}
\tag{67}
$$

$$
\begin{aligned}
\rho_1\int_0^1 w_{tt}\psi dx = &-k_0\int_0^1 \psi_x\left(w_x-l\varphi\right)dx \\
&-kl\int_0^1 \psi\left(\varphi_x+\psi+lw\right)dx
\end{aligned}
\tag{68}
$$

En invoquons (62)–(68) dans (61), nous arrivons à :

$$
\begin{aligned}
F_7'(t) =& -k\int_0^1 (\varphi_x+\psi+lw)^2\,dx + \left(\rho_2 - \frac{bl^2\rho_2}{k_0}\right)\int_0^1 \psi_t^2 dx \\
&+ \left(l\rho_2 + \frac{bl\rho_1}{k_0}\right)\int_0^1 \psi_t w_t dx + \frac{b\eta}{\alpha\gamma}\int_0^1 \theta_x(\varphi_x+\psi+lw)\,dx \\
&- \frac{b}{\gamma}\left(\frac{\rho_1}{k}-\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 q\psi_t dx - \frac{bl}{\gamma}\left(\frac{\rho_1}{k}-\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 q w_t dx \\
&+ \frac{blk_0\rho_3}{\gamma\rho_1}\left(\frac{\rho_1}{k}-\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 \theta(w_x - l\varphi)\,dx - \frac{\gamma bl^2}{k_0}\int_0^1 \theta\psi_x dx \\
&+ \frac{b\beta}{\alpha\gamma}\left(\frac{\rho_1}{k}-\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 q(\varphi_x+\psi+lw)\,dx + \frac{b^2l^2}{k_0}\int_0^1 \psi_x^2 dx \\
&- bl\int_0^1 \psi_x(w_x-l\varphi)\,dx - \gamma\int_0^1 \theta_x(\varphi_x+\psi+lw)\,dx \\
&- \frac{kb\rho_3}{\gamma\rho_1}\left(\frac{\rho_1}{k}-\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 \theta_x(\varphi_x+\psi+lw)\,dx \\
&- b\int_0^1 \psi_x(\varphi_x+\psi+lw)_x\,dx + \frac{b\rho_1}{k}\int_0^1 \psi_t\varphi_{xt}dx \\
&- \frac{b\rho_3\mu_1}{\gamma\rho_1}\left(\frac{\rho_1}{k}-\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 \theta\varphi_t dx - \int_0^1 f(\psi)(\varphi_x+\psi+lw)\,dx \\
&+ \frac{bl^2}{k_0}\int_0^1 f(\psi)\psi dx + \frac{bl^2\rho_2}{k_0}\int_0^1 \psi_x(x)\int_0^\infty g(s)\eta_x^t(x,s)\cdot ds dx.
\end{aligned}
\tag{69}
$$

Nous avons donne :

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 |\varphi_x f(\psi)|\,dx &\le \|\varphi_x\|\,\|\psi\|_{2(\theta+1)}^{\theta}\|\psi\|_{2(\theta+1)} \\
&\le \frac{\varepsilon}{2b^2}\int_0^1 \varphi_x^2 dx + \frac{b^2}{2\varepsilon\lambda_1}\int_0^1 \psi_x^2 dx \\
&\le \frac{\varepsilon}{b^2}\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2\,dx + \frac{\varepsilon}{b^2}\int_0^1 \psi^2 dx + \frac{b^2}{2\varepsilon\lambda_1}\int_0^1 \psi_x^2 dx \\
&\le \frac{\varepsilon}{b^2}\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2\,dx + \left(\frac{\varepsilon}{b^2\lambda_1}+\frac{b^2}{2\varepsilon\lambda_1}\right)\int_0^1 \psi_x^2 dx.
\end{aligned}
\tag{70}
$$

L'estimation (60) suit grâce à l'inégalité de Young et le fait que $k = k_0$.

Lemme 3.1.8 :

Si $(\varphi,\psi,\omega,\theta,q,z,\eta^t)$ être des solutions pour (12) (13) et (9) puis la fonction d'énergie :

$$
F_8(t) := \int_0^1 \rho_1\varphi_t\varphi dx + \frac{\mu_1}{2}\int_0^1 \varphi^2 dx. \tag{71}
$$

alors,nous avons l'estimation suivant pour tout $\varepsilon_{11} > 0$

$$F_8'(t) \leq \left(-K + \varepsilon_{11}\left(\frac{K}{2} + \frac{\mu_2 c}{2}\right)\right)\int_0^1 \varphi_x^2 dx + \frac{K}{2\varepsilon_{11}}\int_0^1 \psi_x^2 dx \\ + \frac{\mu_2}{2\varepsilon_{11}}\int_0^1 z^2(x,1,t)dx + \rho_1\int_0^1 \varphi_t^2 dx \tag{72}$$

Ou $c = 1/pi^2$ est la constante de Poincaré. Preuve. prenons la dérivée de (71) avec qui concerner ,on a

$$F_8'(t) = \rho_1\int_0^1 \varphi_{tt}\varphi dx + \rho_1\int_0^1 \varphi_t^2 dx + \mu_1\int_0^1 \varphi_t\varphi dx. \tag{73}$$

Ensuite, en utilisant la première équation de(1), on trouve

$$F_8'(t) = k\int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)_x\varphi\, dx - \mu_2\int_0^1 \varphi z(x,1,t)\, dx + \rho_1\int_0^1 \varphi_t^2\, dx \tag{74}$$

Par conséquent, nous arrivons à :

$$F_8'(t) = -k\int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)\varphi_x\, dx - \mu_2\int_0^1 \varphi z(x,1,t)\, dx + \rho_1\int_0^1 \varphi_t^2\, dx \tag{75}$$

En appliquant l'inégalité de Young et l'inégalité de Poincaré, nous trouvons (71)

Lemme 3.1.9 :

Si $(\varphi, \psi, \omega, \theta, q, z, \eta^t)$ être des solutions de(12)-(13) et (9) puis , nous définissons la fonctionnelle

$$F_9(t) := \int_0^1\int_0^1 e^{-2\tau\rho} z^2(x,\rho,t)\, d\rho\, dx \tag{76}$$

Alors, le résultat suivant est valable

$$F_9'(t) \leq -F_9(t) - \frac{c_1}{2\tau}\int_0^1 z^2(x,1,t)\, dx + \frac{2}{\tau}\int_0^1 \psi_t^2(x,t)\, dx, \tag{77}$$

où c est une constante positive

Preuve : utilisent l'écart de (76) avec on ce concernent et utilisant l'équation (10), on a

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\int_0^1\int_0^1 e^{-2\tau\rho}z^2(x,\rho,t)d\rho dx\right)\\
&=-\frac{1}{\tau}\int_0^1\int_0^1 e^{-2\tau\rho}zz_\rho(x,\rho,t)d\rho dx\\
&=-\int_0^1\int_0^1 e^{-2\tau\rho}z^2(x,\rho,t)d\rho dx\\
&\quad-\frac{1}{2\tau}\int_0^1\int_0^1\frac{\partial}{\partial\rho}\left(e^{-2\tau\rho}z^2(x,\rho,t)\right)d\rho dx.
\end{aligned}
\tag{78}
$$

Théorème 3.1.1 :

Supposons que $\eta=0$ *et* $k=k_0$ *alors* $(\varphi,\psi,\omega,\theta,q,z,\eta^t)$ *la solution de (12)-(13) satisfait :*

$$E\,(t,\theta)\leq c_0e^{-c_1t},\quad t\geq 0 \tag{79}$$

où la constante positive c_0 dépend directement de la valeur initiale données et la constante uniforme c_1 dépend uniquement de la coefficients du système. Pour $N,N_i>0$

$$\mathscr{L}(t):=NE(t)+\sum_{i=1}^{i=9}N_iF_i(t), \tag{80}$$

puis ,de (41), (43), (46),(50), (54), (57), (59), (72), et (77) on a

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}'(t) \leq & \left[-\beta N + c_1\left(1+\frac{1}{\varepsilon_1}\right) + cN_2 + c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_8}\right)N_7\right]\int_0^1 q^2 dx \\
& - N\left[\mu_1 - \frac{\xi}{2} - \frac{|\mu_2|}{2}\right]\|\varphi_t\|_2^2 - N\left[\frac{\xi}{2} - \frac{|\mu_2|}{2}\right]\|z(x,1,t)\|_2^2 \\
& - \left[\frac{N_1\rho_3}{2} - N_2\left(C_1 + 1 + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_3}\right) - cN_4\right. \\
& \left. -c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_9} + \frac{b\rho_3\mu_1}{\gamma\rho_1 c}\varepsilon_5\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right)\right)N_7\right]\int_0^1 \theta^2 dx \\
& + \left[\varepsilon_1 N_1 - CN - N_2\frac{\rho_2}{\gamma} + \rho_2 N_4 + cN_5 + \frac{\rho_1}{2}N_6\right. \\
& \left. +c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_8} + \frac{b\rho_1\varepsilon_4}{k}\right)N_7 + \rho_1 N_8 + \frac{1}{2\tau}N_9\right]\int_0^1 \psi_t^2 dx \\
& + \left[\varepsilon_2 N_2 + cN_3 + \frac{k^2}{b}N_4 + lkN_5 + kN_6\right. \\
& - \left(\frac{k}{2} - \frac{b\tilde{\eta}}{\alpha\gamma\varepsilon_{10}} + \frac{\gamma}{4\varepsilon_1} + \frac{kb\rho_3}{\gamma 4\varepsilon_2\rho_1}\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right)\right. \\
& \left.\left. + \frac{b}{4\varepsilon_3}\right)N_7\right]\int_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)^2 dx \\
& + \left[\left(\varepsilon_3 + \frac{\rho_3}{\gamma}\left(\frac{\varepsilon_2}{b^2\lambda_2} + \frac{b^2}{2\varepsilon_2\lambda_2}\right)\right)N_2 + cN_3\right. \\
& + \left(\delta_2 + \frac{b}{2} + C_2\right)N_4 + \left(\frac{bl^2\rho_2\delta_3}{k_0} + \frac{b^2 l^2}{k} + b\varepsilon_3\right. \\
& \left. + \frac{bl^2}{k_0}c_1 + 2\left(\frac{\varepsilon}{b^2\lambda_1} + \frac{b^2}{2\varepsilon\lambda_1}\right) + c_2\right)N_7 \\
& \left. + \left(\frac{k}{2\varepsilon_{11}} - k + \varepsilon_{11}\frac{k}{2} + \varepsilon_{11}\frac{\mu_2 c}{2}\right)N_8\right]\int_0^1 \psi_x^2 dx \\
& + \left[-\rho_1 N_3 - \frac{l\rho_1}{2}N_5 + \rho_1 N_6 + \varepsilon_8 N_7\right]\int_0^1 w_t^2 dx \\
& + \left[k_0 N_3 - \left(lk_0 - \frac{\mu_1}{4\varepsilon_6} - \frac{\mu_2}{4\varepsilon_7}\right)N_5 - k_0 N_6 + \varepsilon_9 N_7\right] \\
& \cdot \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx + \left[\frac{\mu_2}{4\varepsilon_5}N_3 + \varepsilon_7\mu_2 N_5 + \frac{\mu_2}{2\varepsilon_{11}}N_8 - \frac{c_1}{2\tau}N_9\right] \\
& \int_0^1 z^2(x,1,t)dx + \left[\varepsilon_5\mu_2 + \varepsilon_4\mu_1\right]N_3\int_0^1 \varphi^2 dx
\end{aligned}
\tag{81}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left[-\left(1-\frac{1}{4\varepsilon_4}\right)N_3+(l\rho_1+\varepsilon_6\mu_1)\,N_5-\frac{\rho_1}{2}N_6\right.\\
&\left.+\rho_1N_8+\left(\frac{b\rho_1}{k4\varepsilon_4}+\frac{b\rho_3\mu_1}{4\varepsilon_5\gamma\rho_1}\left(\frac{\rho_1}{k}-\frac{\rho_2}{b}\right)\right)N_7\right]\int_0^1\varphi_t^2dx\\
&+\left[\left(-k+\varepsilon_{11}\left(\frac{k}{2}+\frac{\mu_2 c}{2}\right)\right)N_8\right]\int_0^1\varphi_x^2dx\\
&+\left[\left(\frac{b\tilde{\eta}\varepsilon_{10}}{\alpha\gamma}+\gamma\varepsilon_1+\frac{kb\rho_3}{\gamma\rho_1}\varepsilon_2\left(\frac{\rho_1}{k}-\frac{\rho_2}{b}\right)\right)N_7\right.\\
&\left.+N_2\delta_1\right]\int_0^1\theta_x^2dx-N_9F_9(t)+\left(\frac{N_2g_0}{4\delta_1}+\frac{N_4g_0}{4\delta_2}\right.\\
&\left.+\frac{N_7g_0bl^2\rho_2}{k_04\delta_3}-N\frac{\zeta}{2}\right)\int_0^1\int_0^\infty g(s)\left|\eta_x^t(x,s)\right|^2dsdx
\end{aligned}
$$

choisir $\varepsilon_i i=1,....10$ suffisamment petit pour que

$$
\varepsilon_1\le\frac{N_2\left(\frac{\rho_2}{\gamma}\right)+\rho_2N_4+cN_5+\left(\frac{\rho_1}{2}\right)N_6}{N_1} \tag{82}
$$

de plus nous choisirons N_9 suffisamment grand pour que

$$
\begin{aligned}
\frac{\mu_2}{4\epsilon_5}N_3+\epsilon_7\mu_2N_5+\frac{\mu_2}{2\epsilon_{11}}N_8-\frac{c_1}{2\tau}N_9\le 0,\\
N_9\ge\frac{\left(\frac{\mu_2}{4\epsilon_5}\right)N_3+\epsilon_7\mu_2N_5+\left(\frac{\mu_2}{2\epsilon_{11}}\right)N_8}{c_1/2\tau},
\end{aligned} \tag{83}
$$

et nous prenons ε_{11} suffisamment petit pour que

$$
\varepsilon_{11}\le\frac{k}{(k/2+\mu_2c/2)N_8}. \tag{84}
$$

Ensuite, en choisissant N_5 suffisamment grand pour que

$$
\frac{N_5\rho_3\kappa}{4}\ge N_4\left(\gamma\rho_3+\frac{\rho_3}{2\epsilon_4}\left(b+2\kappa\right)\right). \tag{85}
$$

Après cela, on peut choisir N suffisamment grand pour que

$$\begin{aligned} N &\geq \frac{c_1(1+l/\epsilon_1)+cN_2+c(1+l/\epsilon_8)N_7}{\beta}, \\ \frac{N_2 g_0}{4\delta_1} &+ \frac{N_4 g_0}{4\delta_2} + \frac{g_0 b l^2 \rho_2}{k_0 4\delta_3} - N\frac{\zeta}{2} \leq 0. \end{aligned} \tag{86}$$

ainsi la relation(81) devient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathscr{L}(t) \leq &- \eta_1 \int_0^1 \left(\psi_t^2+\psi_x^2+\phi_t^2+(\phi_x^2+lw+\psi^2)^2+\theta^2+q^2\right) \\ &dx - \eta_1 \int_0^1\int_0^1 z^2(x,\rho,t)\,d\rho\,dx \end{aligned} \tag{87}$$

avec même pour 40 qu'il existe aussi η_2, tel que

$$\frac{d}{dt}\mathscr{L}(t) \leq -\eta^2 E(t), \quad \forall t \geq 0 \tag{88}$$

Lemme 3.1.10 :

Si $(\varphi,\psi,\omega,\theta,q,z,\eta^t)$ être des solutions de(12)-(13) et laissez(9) puis , nous définissons la fonctionnelle

Pour N assez grand, il existe deux constantes positives β_1 et β_2 dépendant de $N_i, i = 1,\ldots,9$ et $\varepsilon_i, i = 1,\ldots,11$ tel que

$$\beta_1 E(t) \leq \mathscr{L}(t) \leq \beta_2 E(t), \quad \forall t \geq 0 \tag{89}$$

Preuve : on considère la fonctionnel

$$H(t) = \sum_{i=1}^{i=9} N_i F_i(t) \tag{90}$$

et montre que

$$|H(t)| \leq CE(t), \quad C > 0 \tag{91}$$

de(42),(45),(49),(53),(56),(59),(71),(76),on obtient :

$$
\begin{aligned}
|H(t)| \leq & N_1 \left| \alpha\rho_3 \int_0^1 \theta \int_0^x q(y) dy dx \right| \\
& + N_2 \left| -\frac{\rho_2\rho_3}{\gamma} \int_0^1 \theta dx \int_0^x \psi_t(y) dy dx \right| \\
& + N_3 \left| \rho_1 \int_0^1 (\varphi\varphi_t + uw_t) dx \right| \\
& \quad + N_4 \left| \rho_2 \int_0^1 \left(\int_0^x \psi\psi_t(t,x) dx \right) dx \right| \\
& \quad + N_5 \left| -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t (w_x - l\varphi) dx - \rho_1 \int_0^1 w_x(\varphi_x + \psi + lw) dx \right| \\
& \quad + N_6 \left| -\rho_1 \int_0^1 (w_x - l\varphi) w_y(y) dy dx \right| \\
& \quad + N_7 \left| \rho_2 \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw) dx + \frac{b\rho_1}{k} \int_0^1 \varphi_y \chi dx \right| \\
& \quad + N_8 \left| \int_0^1 \rho_1 \varphi\varphi_x dx + \frac{\mu_1}{2} \int_0^1 \varphi^2 dx \right| \\
& \quad + N_9 \left| \int_0^1 \int_0^1 e^{-2tr_2 z^2}(x,\rho,t) p dx \right|
\end{aligned} \tag{92}
$$

En utilisant, la relation triviale

$$
\int_0^1 \phi + lw \, dx \leq 2c \left(\int_0^1 \phi_x + lw + \psi \, dx \right) + 2c \int_0^1 \psi^2 \, dx \tag{93}
$$

inégalités de Young et de Poincaré, on a

$$
\begin{aligned}
|H(t)| \leq & \alpha_1 \int_0^1 \phi_t^2 \, dx + \alpha_2 \int_0^1 \psi_t^2 \, dx + \alpha_3 \int_0^1 w_t^2 \, dx \\
& + \alpha_4 \int_0^1 \psi_x^2 \, dx + \alpha_5 \int_0^1 \theta^2 \, dx + \alpha_6 \int_0^1 q^2 \, dx \\
& + \alpha_7 \int_0^1 \left((\phi_x + lw + \psi)^2 + (w_x - l\phi)^2 \right) dx \\
& + \int_0^1 \int_0^1 z^2(x,\rho,t) \, d\rho \, dx,
\end{aligned} \tag{94}
$$

où $\alpha_1, \dots . \alpha_6$ sont les constantes positives suivantes :

$$\begin{cases} \alpha_1 := \frac{1}{2}(N_3\rho_1 + N_8\rho_1), \\ \alpha_2 := \frac{1}{2}\left(N_4\rho_2 + N_2\frac{\rho_2\rho_3}{\gamma}\right), \\ \alpha_3 := \frac{1}{2}(N_3\rho_1 + N_6\rho_1), \\ \alpha_4 := \frac{b\rho_1}{2k}, \\ \alpha_5 := \frac{1}{2}\left(N_1\rho_3 + \frac{\rho_2\rho_3}{\gamma}\right), \\ \alpha_6 := \frac{1}{2}(N_1\rho_3 + N_5\tau_0\rho_3), \\ \alpha_7 := \frac{1}{2}(N_7\rho_2 + 3\rho_1). \end{cases} \tag{95}$$

de (94)), on a

$$|H(t)| \leq \hat{\hat{C}}E(t) \tag{96}$$

pour

$$\hat{C} = \frac{\max\{f, g, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}}{\min\{f, g, \rho_1, \rho_2, \rho_3, k, b, \kappa, \gamma, \delta, \tau\}} \tag{97}$$

donc obtient :

$$|\mathscr{L}(t) - NE(t)| \leq \hat{C}E(t) \tag{98}$$

alors on peut choisir N suffisamment grand pour que $\beta_1 = N - \hat{C} > 0$ alors,(89) est vrai pour $\beta_2 = N +$
$hatC > 0$ et cela conclus la preuve de lemme

en conduisant maintenant (88) et (89) nous concluons qu'il existe quelque $\Lambda > 0$ telque :

$$\frac{d}{dt}\mathscr{L}(t) \leq -\Lambda L(t), \quad \forall t \geq 0 \tag{99}$$

Intégration de (99)

$$\mathscr{L}(t) \leq \mathscr{L}(0)e^{-\Lambda t}, \quad \forall t \geq 0 \tag{100}$$

finalement,en utilisant (89) et (100) donc (79) est satisfait ,on atteindre immédiatement le théorème (3.1.1)

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons considéré un problème de type Bresse en thérmoelasticité avec un amortissment non linéaire, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution du problème en basant sur la théorie de semi-groupe. Finalment,nous avon étudié le comportement asymptotique de la solution et sous certains conditions on a démontré la décroissance exponentielle de la fonctionnelle d'énergie.

Bibliographie

[1] D.ouchenan, Z.khalili, F.yazide, M. Abdalla , B. Belkacem Cherif and I. Mekawy, A New Result of Stability for Thermoelastic-Bresse System of Second Sound Related with Forcing, Delay, and Past History Terms, Hindawi Journal of Function Spaces Volume 2021, Article ID 9962569, 15 pages

[2] C. A. Raposo, J. Ferreira, M. L. Santos and M. N. O. Castro. Expoenetial stability for the Timo-shenko system with two weak dampings. J. Appl. Math. Lett., 18 :535.541, 2005.

[3] D.Ouchenane, A stability result of the Timoshenko system in thermoelasticity of second sound with a delay term in the internal feedback, G. Math. J., 21(4) : 475–489, (2014).

[4] J. E. Munoz Rivera and R. Racke. Timoshenko systems with indenite damping. J. Math. Anal. Appl., 341(2) :1068.1083, 2008.

[5] M.Kirane, B.Said-houari, M.N.Anwar, Stability result for the Timoshenko system with a time-varying delay term in the internal feedbacks, Pure and Applied Analysis. v10,N2,(2011)667-686.

[6] S.A.Messaoudi, M.Pokojovy and B.Said-Houari, Nonlinear damped Timoshenko systems with second sound—Globalexistence and exponential stability, Math. Methods Appl. Sci. 32 (2009), no. 5, 505–534.

[7] S. C. Cowin and J. W. Nunziato. Linear elastic materials with voids. J. Elast., 13(2) :125-147, 1983.

[8] S. Timoshenko. On the correction factor for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismaticbars. Philosophical Magazine., 41 : 744–746, (1921).