

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
ENS DE LAGHOUAT
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES PURE ET APPLIQUÉE



MÉMOIRE POUR OBTENIR LE TITRE DE MAGISTER EN MATHÉMATIQUE
OPTION : ANALYSE FONCTIONNELLE ET EDP

Prépare par : Bouhali Aissa

intitulé

Les Semi-Groupes des Opérateurs de Toeplitz

Mémoire dirigée par : Dr.BENDAOUZ ZOHRA et Dr.KORRICHI FATIMA

SOUTENU PUBLIQUEMENT LE 29/06/2017 À L'ENS DE
LAGHOUAT DEVANT LE JURY COMPOSÉ DE :

Dr.Allaoui Salah-Eddine	Université de Laghouat	Président
Pr.Mokhtari Abdelkader	Université de Laghouat	Examineur
Dr.Bentobache Mohand	Université de Laghouat	Examineur
M.Chettih Ali	ENS de Laghouat	Invité
Dr.Bendaoud Zohra	Université de Laghouat	Encadreur
Dr.Korrichi Fatima	Université de Laghouat	Co-Encadreur

Juin 2017

Remerciement

Je tiens tout d'abord à adresser mes plus sincères remerciements à mes deux directeurs de mémoire **Bendaoud Zohra** et **Korrichi Fatima**. Je tiens à les remercier pour leur disponibilité et leurs conseils et pour avoir guidé ce travail avec beaucoup d'intérêt.

Je remercie les membres du jury Monsieur **Allaoui Salah-Eddine** président de jury, Monsieur **Mokhtari Abdelkader** et Monsieur **Bentobache Mohand** examinateurs, Monsieur **Chettih Ali** comme invité et Madame **Bendaoud Zohra** encadreur et Madame **Korrichi Fatima** co-encadreur, pour leurs acceptations d'examiner ce mémoire.

Mes remerciements s'adressent à Madame **Bendaoud** directrice de laboratoire de mathématique pure et appliquée d'avoir mis à notre disposition tous les moyens de laboratoire durant la période de la préparation de ce mémoire.

Je n'oublie surtout pas de remercier le directeur Monsieur **Khaled Bouziane** et le directeur adjoint Monsieur **Belakhder Abdelkader**, de l'école normale supérieure de Laghouat d'avoir mis à notre disposition tout ce dont on avait besoin pour sa bonne formation.

Je remercie chaleureusement tous mes professeurs et tous les camarades de classe et amis ainsi que les membres de L'ENS Laghouat et L'université de Laghouat.

Enfin, je souhaite remercier les membres de ma famille et mes proches ; je leur suis reconnaissante pour leur soutien constant pendant ce travail, leur encouragement et leur affection.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à

Tout la famille **BOUHALI** et Mme. **Bendaoud Zohra** et Mme. **Korrichi
Fatima** et tout mes amis.

Bref Historique



Otto Toeplitz (1 Août 1881 – 15 Février 1940) Mathématicien Allemand travaillant dans L'analyse Fonctionnelle.

Le père et le grand-père de Toeplitz étaient des professeurs de mathématiques. Toeplitz a étudié les mathématiques à l'Université de Breslau et a reçu un doctorat en géométrie algébrique en 1905. En 1906, Toeplitz est arrivé à l'Université de Göttingen, qui était alors le premier centre mathématique au monde, et il est resté là pendant sept ans. La faculté de mathématiques comprenait David Hilbert, Felix Klein et Hermann Minkowski. Toeplitz a rejoint un groupe de jeunes travaillant avec Hilbert : Max Born, Richard Courant et Ernst Hellinger, avec qui il a collaboré pendant de nombreuses années. À cette époque, Toeplitz a commencé à retravailler la théorie des fonctions linéaires et des formes quadratiques sur les espaces n -dimensionnels pour les espaces dimensionnels infinis. Il a écrit cinq articles directement liés à la théorie spectrale des opérateurs que Hilbert développait. Au cours de cette période, il a également publié un document sur les processus de synthèse et a découvert les idées fondamentales de ce qu'on appelle maintenant les opérateurs de Toeplitz. En 1913, Toeplitz devient professeur extraordinaire à l'Université de Kiel. Il a été promu professeur en 1920.

En 1911, Toeplitz proposa le problème carré inscrit :

Est-ce que chaque courbe de la Jordanie contient un carré inscrit ?

Ceci a été établi pour des courbes convexes et des courbes lisses, mais la question reste ouverte en général (2007).

Avec Hans Rademacher, il a écrit un classique des mathématiques populaires *Von Zahlen und Figuren*, qui a été publié pour la première fois en 1930 et traduit plus tard en anglais en *Plaisir des mathématiques*.

Toeplitz était profondément intéressé par l'histoire des mathématiques. En 1929, il a cofondé "Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik" avec Otto Neugebauer et Julius Stenzel. À partir des années 1920, Toeplitz préconise une «méthode génétique» dans l'enseignement des mathématiques, qu'il a appliqué en écrivant le livre *Entwicklung der Infinitesimalrechnung* («The Calculus : A Genetic Approach»). Le livre introduit le sujet en donnant un récit historique idéalisé pour motiver les concepts, en montrant comment ils se sont développés à partir des problèmes classiques des mathématiques grecques. Il a été laissé inachevé, édité par Gottfried Köthe et publié à titre posthume en allemand en 1946 (traduction anglaise : 1963). En 1928, Toeplitz réussit Eduard Study à l'Université de Bonn. En 1933, la loi sur la fonction publique est entrée en vigueur et les professeurs d'origine juive ont été retirés de l'enseignement. Initialement, Toeplitz a pu conserver son poste en raison d'une exception pour ceux qui avaient été nommés avant 1914, mais il a néanmoins été renvoyé en 1935. En 1939, il a émigré en Palestine, où il a été conseiller scientifique du recteur de l'Université hébraïque de Jérusalem. Il est mort à Jérusalem d'une tuberculose un an plus tard.

Livres

- Hans Rademacher and Otto Toeplitz, *The enjoyment of mathematics. Selections from mathematics for the amateur* (translated by Herbert Zuckerman), Princeton University Press, 1957.
- Otto Toeplitz, *The calculus : a genetic approach*, The University of Chicago Press, 2007

Table des matières

Liste des symboles	VII
Introduction	IX
1 Espace de Hardy H^2 et Espace Modèle	1
1.1 Rappels	1
1.2 Espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$	3
1.3 L'espace $H^2(\mathbb{T})$	4
1.4 Espace Modèle	8
1.4.1 Préliminaires	8
1.4.2 Caractérisation des Sous-Espaces Invariants par le Shift dans H^2	8
1.5 Noyau Reproduisant d'un Espace de Hilbert	10
2 Opérateurs de Toeplitz	15
2.1 Opérateur de Laurent	15
2.2 Opérateur de Toeplitz sur L'espace de Hardy H^2	18
2.2.1 Notation Matricielle	19
2.2.2 Propriétés des Opérateurs de Toeplitz sur H^2	19
2.3 Opérateurs de Toeplitz Tronqués	24
2.3.1 Opérateurs de Conjugaison	24
2.3.2 Définition et Propriétés des Opérateurs de Toeplitz Tronqués .	25
2.4 Opérateurs de Toeplitz Tronqués de Type α	32
2.4.1 Shift Généralisé	36

3	Semi-Groupes	40
3.1	Rappels	40
3.2	Semi-Groupes Uniformément Continus	45
3.3	Semi-Groupes Fortement Continus	48
3.4	Exemples	49
3.5	Théorème de HILLE-YOSIDA	59
3.6	Semi-Groupes dans un Espace de Hilbert	63
3.6.1	Préliminaires	63
3.6.2	Théorème de Lumer-Phillips	64
3.6.3	Semi-Groupes Unitaires et Théorème de Stone	67
3.7	Semi-groupes de Matrices	71
4	Les Semi-Groupes des Opérateurs de Toeplitz	73
4.1	Cas Général	73
4.1.1	Cas 1 : A triangulaire inférieure	74
4.1.2	Calcul de $\prod_{l=1}^{n-1} B_l$	77
4.1.3	Cas 2 : A triangulaire supérieure	82
4.1.4	Commentaire	88
4.2	Cas Simples	90
4.2.1	Cas $n=2$	90
4.2.2	Cas $n=3$	91
4.3	Semi-Groupes Engendré par un Opérateur de Toeplitz Tronqué de type α	94
4.3.1	Calcul de e^{tA}	95

Liste des Symboles

\mathbb{D}	Le disque unité ouvert de \mathbb{C}
\mathbb{T}	Le cercle unité de \mathbb{C}
$\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$	L'ensemble des fonctions holomorphes sur \mathbb{D}
$L^2(\mathbb{T})$	L'espace des fonctions carrés sommable.
H	Un espace de Hilbert.
$H^2(\mathbb{D})$	L'espace de Hardy sur le disque unité.
$H^2(\mathbb{T})$	L'espace de Hardy sur le cercle unité.
A	Un opérateur.
A^*	L'adjoint de l'opérateur A .
S	L'opérateur Shift.
K_u^2	L'espace Modèle.
P	La projection orthogonale de L^2 sur H^2 .
P_u	La projection orthogonale de L^2 sur K_u^2 .
T_φ	L'opérateur de Toeplitz de symbole φ sur l'espace H^2 .
A_φ^u	L'opérateur de Toeplitz tronqué de symbole φ sur l'espace K_u^2 .
\mathbb{L}_u	L'ensemble des opérateurs de Toeplitz tronqués.
\mathcal{B}_u^α	L'ensemble des opérateurs de Toeplitz tronqués de type α .
X	Un espace de Banach.
$D(A)$	Le domaine de définition de l'opérateur A .
$\mathcal{B}(X)$	Algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés dans X .
$\mathcal{GL}(X)$	L'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{B}(X)$.
$L(H)$	L'espace des opérateurs linéaires dans H .

$\rho(A)$	L'ensemble résolvant de l'opérateur A .
$R(\cdot; A)$	La résolvante de l'opérateur A .
$(T(t))_{t \geq 0}$	Un semi-groupe.
$M_n(\mathbb{C})$	L'espace des matrices $n \times n$ des coefficients complex.
χ	Fonction caractéristique.

Introduction

Ce mémoire est dédié à l'étude des opérateurs de Toeplitz et ceux de type α sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ qui est défini par :

$$H^2(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}ol : \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt < \infty \right\}$$

et l'espace Modèle K_u^2 qui est défini par :

$$K_u^2 = (uH^2)^\perp = H^2 \ominus uH^2;$$

pour une certaine fonction intérieure u .

On définit l'opérateur de Toeplitz tronqué de symbole φ sur l'espace K_u^2 comme suit :

$$\begin{aligned} A_\varphi^u : K_u^2 &\rightarrow K_u^2 \\ f &\rightarrow A_\varphi^u(f) = P_u(\varphi f) \end{aligned}$$

La matrice de représentation de l'opérateur A_φ^u est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

telle que a_n sont les coefficients de Fourier de symbole φ .

Donald Sarason a donné quelques propriétés de cet opérateur [21].

Notre mémoire commence par l'étude des opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Hardy et l'espace Modèle et l'étude des semi-groupes d'opérateurs.

Notre but est de calculer le semi-groupe engendré par un opérateur de Toeplitz avec quelques exemples.

On sait que : " L'opérateur A est infinitésimal générateur d'un semi-groupe uniformément continu si et seulement si A est un opérateur linéaire borné " .

Alors l'opérateur de Toeplitz tronqué A_φ^u engendre un semi-groupe uniformément continu $(T(t))_{t \geq 0}$ donné par :

$$T(t) = e^{tA}$$

Le manuscrit est composé de quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la présentation de l'espace de Hardy H^2 et l'espace Modèle K_u^2 avec une caractérisation de ces espaces avec quelques propriétés.

Dans **le deuxième chapitre** on a étudié les opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Hardy et sur l'espace Modèle - les opérateurs de Toeplitz tronqué - et les opérateurs de Toeplitz de type α . Nous redonnons les résultats fondamentaux, en particulier la notation matricielle de ces opérateurs.

Le troisième chapitre est consacré aux semi-groupes des opérateurs avec quelques propriétés fondamentales, par exemple le théorème de Hille-Yosida, on a étudié les semi-groupes matriciels avec quelques exemples simples.

Dans le quatrième chapitre, nous avons calculé le semi-groupe engendré par un opérateur de Toeplitz tronqué en utilisant la relation $T(t) = e^{tA}$ (A un opérateur de Toeplitz tronqué) et la forme matriciel de l'opérateur A .

Chapitre 1

Espace de Hardy H^2 et Espace Modèle

1.1 Rappels

On désignera par \mathbb{D} le disque unité ouvert de \mathbb{C} et par \mathbb{T} le cercle unité de \mathbb{C} . L'ensemble des fonctions holomorphes sur \mathbb{D} est noté $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$.

L'espace $L^2(\mathbb{T})$

L'espace $L^2(\mathbb{T})$ est défini par l'espace des fonctions de carré sommable par rapport à la mesure de Lebesgue normalisée sur \mathbb{T} , notée m , est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} f \bar{g} dm$.

Une base orthonormale est donnée par la famille

$$\mathcal{B} = \{z^n; n \in \mathbb{Z}\}$$

Chaque fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$ peut se développer en série de Fourier sous la forme

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) z^n$$

tel que

$$\hat{f}(n) = \langle f, z^n \rangle = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Théorème 1.1.1. (de Plancherel-Parseval)

Si $f \in L^2(\mathbb{T})$ et si $(c_n), n \in \mathbb{Z}$ est la suite de ses coefficients de Fourier telle que

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt$$

Alors

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2.$$

De plus f est la somme de la série de Fourier $\{S_n(f)\}_{n \geq 0}$ où

$$S_n(f)(e^{it}) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikt}$$

avec

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n\|_2 = 0.$$

Théorème 1.1.2. (de Riesz-Fischer)

Toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ dans l^2 est une suite des coefficients de Fourier d'une fonction $g \in L^2(\mathbb{T})$.

1.2 Espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$

Définition 1.2.1.

On définit l'espace de Hardy H^2 sur le disque unité \mathbb{D} par :

$$H^2(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) : \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt < \infty \right\}.$$

On définit la norme de l'espace $H^2(\mathbb{D})$ par :

$$\|f\|_{H^2(\mathbb{D})}^2 = \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

Théorème 1.2.1.

Soit f une fonction holomorphe sur \mathbb{D} , de la forme $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, On dit que $f \in H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < \infty. \quad a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt$$

Preuve.

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour $z \in \mathbb{D}$ et d'après le Théorème de Plancherel-Parseval 1.1.1, on a pour $r \in [0, 1[$ et $t \in \mathbb{R}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int} \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

On passe à la limite, on a :

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

□

Remarque 1.2.1.

On a donc une autre écriture de la norme de $f \in H^2(\mathbb{D})$:

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.3 L'espace $H^2(\mathbb{T})$

Définition 1.3.1.

On définit l'espace de Hardy H^2 sur le cercle unité \mathbb{T} par :

$$H^2(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}) ; \widehat{f}(n) = 0, n < 0 \right\}.$$

Théorème 1.3.1. (la limite radiale)

Supposons que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une fonction dans $H^2(\mathbb{D})$, et f^* une fonction dans $L^2(\mathbb{T})$ tel que :

$$f^*(e^{it}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{int}$$

Alors

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{it}) = f^*(e^{it})$$

existe presque partout sur \mathbb{T} , de plus

$$\|f\|_{H^2} = \|f^*\|_{L^2}.$$

On note par f^* la limite radial de f .

On peut identifier $H^2(\mathbb{T})$ à l'espace $H^2(\mathbb{D})$, d'après le théorème suivants :

Théorème 1.3.2. [5]

L'application :

$$\begin{aligned} \Phi : H^2(\mathbb{D}) &\longrightarrow H^2(\mathbb{T}) \\ f &\longmapsto \Phi(f) = f^* \end{aligned}$$

est un isomorphisme isométrique.

Avec f^* la limite radial.

Preuve.

1. Φ est isométrique :

Puisque

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \|f^* - f_r\| = 0 \qquad (f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta}))$$

On a

$$\|f\|_2 := \lim_{r \rightarrow 1^-} \|f_r\|_2 = \|f^*\|_2.$$

Comme $\widehat{f^*}(n) = 0$ pour tout $n < 0$, l'application $\Phi : f \mapsto f^*$ est bien une isométrie de $H^2(\mathbb{D})$ dans $H^2(\mathbb{T})$.

2. L'application Φ est linéaire (**Par définition**).

3. Φ est un isomorphisme :

– l'application est automatiquement injective.

– l'application surjective : Soit $g \in H^2(\mathbb{T})$,

$$\text{donc } g \text{ est de la forme } g(e^{it}) = \sum_{n \geq 0} a_n e^{int} \text{ avec } \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 < \infty$$

Alors la fonction f définit sur \mathbb{D} par :

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

appartient à $H^2(\mathbb{D})$ et après la définition de Hardy, l'application Φ est surjective.

Ainsi Φ est bien un isomorphisme isométrique.

□

Théorème 1.3.3. [8]

Si $1 \leq p \leq \infty$, l'espace de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$ est un espace de Banach.

Théorème 1.3.4. [5]

$H^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_{H^2(\mathbb{D})} = \langle f^*, g^* \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^*(e^{it}) \overline{g^*(e^{it})} dt.$$

Preuve.

Par définition,

$$\langle f, f \rangle_{H^2(\mathbb{D})} = \|f^*\|_2^2$$

Comme

$$\|f^*\|_2 = \|f\|_2$$

la norme sur $H^2(\mathbb{D})$ se déduit bien du produit scalaire que nous avons fixé.

De plus $H^2(\mathbb{D})$ est complet, d'après le Théorème 1.3.3, Ainsi $H^2(\mathbb{D})$ est bien un espace de Hilbert. \square

Théorème 1.3.5. (Estimation de Growth)

Pour toute $f \in H^2(\mathbb{D})$, on a :

$$|f(z)| \leq \frac{\|f\|_2}{\sqrt{1-z^2}}, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Preuve.

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz à la série de puissance de f on obtient, pour tout $z \in \mathbb{D}$:

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \left| \sum_{n \geq 0} a_n z^n \right| \\ &\leq \sum_{n \geq 0} |a_n| |z^n| \\ &\leq \left(\sum_{n \geq 0} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \geq 0} |z|^{2n} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f\|_2 \times \left(\frac{1}{1-z^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

\square

Corollaire 1.3.1.

Toute suite convergente en norme dans $H^2(\mathbb{D})$ converge (*vers la même limite*) uniformément sur tout compact de \mathbb{D} .

Preuve.

Supposons que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente en norme dans $H^2(\mathbb{D})$ vers une fonction $f \in H^2(\mathbb{D})$, **i.e.** $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Pour $0 < R < 1$ et n fixé, on utilise (**L'estimation de Growth**) on obtient :

$$\sup_{|z| \leq R} |f_n(z) - f(z)| \leq \frac{\|f_n - f\|_2}{\sqrt{1-z^2}}, \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

donc f_n converge uniformément vers f dans le disque fermé $\{|z| \leq R\}$, comme R est arbitraire, alors f_n converge uniformément vers f sur tout le compact \mathbb{D} . \square

Exemple 1.3.1.

La fonction $z \mapsto \log\left(\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n}$ appartient à $H^2(\mathbb{D})$, car la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2}$ est finie. (Théorème 1.2.1)

On note par $H^\infty(\mathbb{D})$ l'espace de fonctions f holomorphes sur \mathbb{D} telles que

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| < \infty.$$

Corollaire 1.3.2.

$H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^2(\mathbb{D})$. En générale, si $b \in H^\infty(\mathbb{D})$ et si $f \in H^2(\mathbb{D})$ alors

$$bf \in H^2(\mathbb{D})$$

De plus

$$\|bf\|_2 \leq \|b\|_\infty \|f\|_2.$$

Preuve.

Soit $b \in H^\infty(\mathbb{D})$ et $f \in H^2(\mathbb{D})$, donc on a :

$$\|bf\|_2^2 = \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |b(re^{it})f(re^{it})|^2 dt \leq \left(\sup_{z \in \mathbb{D}} |b(z)| \right)^2 \left(\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt \right) < \infty.$$

Ceci termine la preuve. □

1.4 Espace Modèle

1.4.1 Préliminaires

Théorème 1.4.1.

Soit H un espace de Hilbert et $A \in L(H)$. Alors il existe un unique opérateur $A^* \in L(H)$, appelé adjoint de H , qui vérifie la relation suivante :

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle, \quad \forall x, y \in H$$

De plus, on a

$$\|A\| = \|A^*\|.$$

Opérateur Shift

L'opérateur de décalage à droite (ou shift) sur H^2 est défini par :

$$S[f](z) = zf(z), \quad \forall f \in H^2, \forall z \in \mathbb{T}$$

et son adjoint l'opérateur de décalage à gauche $S^* : H^2 \rightarrow H^2$ est défini par :

$$S^*[f](z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}, \quad \forall f \in H^2, \forall z \in \mathbb{T}$$

1.4.2 Caractérisation des Sous-Espaces Invariants par le Shift dans H^2

Définition 1.4.1.

Un sous-espace M de H^2 est dit invariant par S s'il est fermé et tel que

$$SM \subset M.$$

Définition 1.4.2. (fonction intérieure)

Une fonction de H^∞ de module égal à 1 presque partout sur \mathbb{T} est appelée **fonction intérieure**.

Théorème 1.4.2. (Beurling) [13]

$\mathcal{M} \neq \{0\}$ est un sous-espace de H^2 vérifiant $z\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, si et seulement si il existe une fonction intérieure u telle que

$$\mathcal{M} = uH^2$$

Le Théorème de Beurling donne une caractérisation complète des sous espaces invariant par le shift dans H^2 , ils sont tous de la forme :

$$uH^2 = \{uh, \quad h \in H^2\},$$

ou u une fonction intérieure de H^2 .

Définition 1.4.3. (Espace Modèle)

Si E est un sous espace fermé invariant par S dans H^2 si et seulement si E^\perp est invariant par S^* implique que les sous espaces fermés non nul de H^2 , invariant par S^* sont de la forme :

$$K_u^2 = (uH^2)^\perp = H^2 \ominus uH^2$$

pour une certaine fonction intérieure $u \in H^2$

K_u^2 un sous-espace fermé de $H^2(\mathbb{T})$ est appelé espace modèle correspondant à la fonction intérieure u .

Proposition 1.4.1.

Soient u_1 et u_2 deux fonctions intérieures telles que u_1 divise u_2 dans H^∞ . Alors

$$K_{u_1}^2 \subset K_{u_2}^2.$$

Preuve.

Soit $f \in K_{u_1}^2$. Alors $f \perp u_1 h$ pour toute fonction $h \in H^2$. Par hypothèse, $u_2 = u_1 g$, ou $g \in H^\infty$. Si $h \in H^2$, alors

$$\langle f, u_2 h \rangle = \langle f, u_1 g h \rangle = 0$$

car $gh \in H^2$ (voir Corollaire 1.3.2), et donc

$$f \in K_{u_2}^2.$$

□

Proposition 1.4.2.

Soit u une fonction intérieure divisible dans H^2 par z . Alors K_u^2 contient des constantes.

Preuve.

Il suit de la proposition précédente que $K_z^2 \subset K_u^2$, mais K_z^2 est exactement l'ensemble des applications constantes, car si $f \in K_z^2$ alors

$$\langle f, z^n \rangle = 0 \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

□

1.5 Noyau Reproducteur d'un Espace de Hilbert

Définition 1.5.1.

Soit H un espace de Hilbert de fonctions définies sur \mathbb{D} et à valeurs dans \mathbb{C} , on note par \langle, \rangle et $\|\cdot\|$, respectivement le produit scalaire et la norme de H . On dit qu'une application k de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ est un noyau reproducteur pour H si

1. Pour tous $z, w \in \mathbb{D}$, $k_z(w) = k(z, w)$ est une fonction de w qui appartient à H .
2. Pour tout $z \in \mathbb{D}$ et tout $f \in H$

$$f(z) = \langle f, k_z \rangle.$$

En particulier pour tous $z, w \in \mathbb{D}$, on a

$$k_z(w) = \langle k_z, k_w \rangle \quad \text{et} \quad \|k_z\| = \langle k_z, k_z \rangle^{\frac{1}{2}} = k(z, z)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi, on dit qu'un espace de Hilbert H admet un noyau reproducteur s'il existe $k \in H$ vérifiant les conditions 1 et 2.

Proposition 1.5.1.

Soit H un espace de Hilbert de fonctions holomorphes sur \mathbb{D} , admettant un noyau reproducteur k . Alors

1. k est unique.
2. Pour tout $z, w \in \mathbb{D}$, $k(z, w) = \overline{k(w, z)}$.

3. Soit $z \in \mathbb{D}$, $k(z, z) = 0 \Leftrightarrow f(z) = 0$ pour tout $f \in H$
4. Pour tous $z, w \in \mathbb{D}$, $|k(z, w)| \leq k(z, z)^{\frac{1}{2}} \times k(w, w)^{\frac{1}{2}}$. Pour tout $z \in \mathbb{D}$, l'application $k_z = k(z, \cdot)$ est bornée sur tout compact de \mathbb{D} et k est bornée sur tout compact de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$.

Définition 1.5.2.

Pour $\lambda \in \mathbb{D}$ le noyau reproduisant en λ la fonction $k_\lambda \in H^2$, définie par

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{1 - \bar{\lambda}z}$$

On a pour toute fonction $f \in H^2$,

$$\langle f, k_\lambda \rangle = f(\lambda).$$

De plus

$$\|k_\lambda\|^2 = \langle k_\lambda, k_\lambda \rangle = k_\lambda(\lambda) = \frac{1}{1 - |\lambda|^2}$$

La projection orthogonale P de L^2 sur H^2 peut être exprimée en terme d'un opérateur noyau :

$$P(f)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{1 - z\bar{\zeta}} |d\zeta|, \quad f \in L^2(\mathbb{T}).$$

On note par P_u la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur K_u^2 et par M_u et $M_{\bar{u}}$ les opérateurs de multiplication par u et \bar{u} respectivement.

Proposition 1.5.2.

Soit u une fonction intérieure de H^2 .

- $M_u P M_{\bar{u}}$ est la projection orthogonale sur uH^2 .
- la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur K_u^2 est

$$P_u = P - M_u P M_{\bar{u}}.$$

Pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a :

$$\begin{aligned} \langle f, k_\lambda \rangle &= \langle f, P_u k_\lambda \rangle = \langle P_u f, k_\lambda \rangle \\ &= (P_u f)(\lambda) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\zeta) \frac{1 - u(\lambda)\overline{u(\zeta)}}{1 - \lambda\bar{\zeta}} |d\zeta| \end{aligned}$$

Comme dans le cas de H^2 , chaque K_u^2 est un espace à noyau reproduisant. On sait que, si E est un sous espace de H^2 et k_λ le noyau reproduisant de H^2 , alors la projection orthogonale $P_E k_\lambda$ de k_λ sur E est le noyau reproduisant de E , donc

$$k_\lambda - P_E k_\lambda$$

est le noyau reproduisant de E^\perp , c'est-à-dire que le noyau reproduisant de K_u^2 est la projection orthogonale de k_λ sur K_u^2 , et est donné par :

$$k_\lambda^u(z) = \frac{1 - \overline{u(\lambda)}u(z)}{1 - \bar{\lambda}z}, \quad (\lambda, z) \in \mathbb{D} \times \mathbb{T}.$$

En effet, si $f = uh \in uH^2$, alors

$$\begin{aligned} f(\lambda) = u(\lambda)h(\lambda) &= u(\lambda)\langle h, k_\lambda \rangle \\ &= u(\lambda)\langle \bar{u}f, k_\lambda \rangle \\ &= \langle f, \overline{u(\lambda)}uk_\lambda \rangle \end{aligned}$$

donc le noyau reproduisant de uH^2 est $\overline{u(\lambda)}u(z)k_\lambda$.

Si $f \in K_u^2$ alors

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \langle f, k_\lambda \rangle \\ &= \langle f, k_\lambda \rangle - u(\lambda)\langle f, uk_\lambda \rangle \\ &= \langle f, (1 - \overline{u(\lambda)}u)k_\lambda \rangle. \end{aligned}$$

De plus

$$(1 - \overline{u(\lambda)}u)k_\lambda \in K_u^2$$

Car, pour tout $h \in H^2$,

$$\begin{aligned} \langle uh, (1 - \overline{u(\lambda)}u)k_\lambda \rangle &= u(\lambda)h(\lambda) - u(\lambda)\langle uh, uk_\lambda \rangle \\ &= u(\lambda)h(\lambda) - u(\lambda)\langle h, k_\lambda \rangle \\ &= u(\lambda)h(\lambda) - u(\lambda)h(\lambda) = 0. \end{aligned}$$

On déduit que :

$$f(\lambda) = \langle f, k_\lambda^u \rangle, \quad f \in K_u^2.$$

Définition 1.5.3.

Une fonction f analytique sur \mathbb{D} admet une limite non-tangentielle l au point $w \in \mathbb{T}$ si pour tout $\theta > 0$ $f(z) \rightarrow l$ quand $z \rightarrow w$ sur toute région non-tangentielle $\Gamma_\theta(w) = \{z \in \mathbb{T} : |z - w| < \theta(1 - |\theta|)\}$.

On dit que la fonction u admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory au point $\eta \in \mathbb{T}$ si u a une limite non-tangentielle au point η et u' admet une limite non-tangentielle $u'(\eta)$ au point η .

On sait que u admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory au point η si et seulement si chaque fonction dans K_u^2 possédé une limite non-tangentielle η .

Donc il existe un noyau reproduisant k_η^u telle que $\langle f, k_\eta^u \rangle = f(\eta)$.

Autrement dit k_η^u est la limite de k_λ^u en faisant tendre λ vers η non-tangentielle dans le disque et donc

$$k_\eta^u = \frac{1 - \overline{u(\eta)}u(z)}{1 - \overline{\eta}z}, \quad z \in \mathbb{T}$$

Proposition 1.5.3.

Soit u une fonction intérieure .

L'espace modèle K_u^2 est l'ensemble des fonctions $f \in H^2$ telles que $f = u\overline{z}g$ presque partout sur \mathbb{T} pour une certaine fonction $g \in H^2$.

Autrement dit,

$$K_u^2 = H^2 \cap \overline{uzH^2}$$

Preuve.

Pour chaque $f \in K_u^2$, on a $f \perp uH^2$ donc

$$\begin{aligned} \langle f, uh \rangle = 0, \quad \forall h \in H^2 &\Leftrightarrow \langle \overline{u}f, h \rangle = 0, \quad \forall h \in H^2 \\ &\Leftrightarrow \overline{u}f \in (H^2)^\perp = L^2 \ominus H^2 = \overline{zH^2} \\ &\Leftrightarrow f \in \overline{uzH^2} \quad \text{car } |u| = 1, \quad \text{p.p sur } \mathbb{T} \end{aligned}$$

alors $f \in (uH^2)^\perp$ si et seulement si $f \in \overline{uzH^2}$. □

Pour chaque fonction intérieure u , les compressions de S et S^* sur K_u^2 sont notées respectivement par S_u et S_u^* .

Proposition 1.5.4.

Soit u une fonction intérieure .

Si $u(z) = z^n$ alors K_u^2 est l'ensemble des polynômes de degré $(n - 1)$ à coefficients dans \mathbb{C} . c'est-à-dire

$$K_u^2 = \{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_{n-1}z^{n-1}; \quad a_0, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{C}\}$$

Chapitre 2

Opérateurs de Toeplitz

Nous allons voir dans ce chapitre un aperçu de certains opérateurs très étudiés sur l'espace de Hardy $H^2 = H^2(\mathbb{T})$ et l'espace Modèle K_u^2 .

2.1 Opérateur de Laurent

Soit $P_{H^2} : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow H^2$ la projection orthogonale définie par :

$$P_{H^2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int}$$

On a,

$$\|P_{H^2} f\|_2 \leq \|f\|_2 \quad \text{pour tout } f \in L^2(\mathbb{T}).$$

Définition 2.1.1.

Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Alors l'opérateur de Laurent (ou opérateur de multiplication) $M_\varphi : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow L^2(\mathbb{T})$ est donné par :

$$(M_\varphi f)(e^{it}) = \varphi(e^{it})f(e^{it}). \tag{2.1}$$

Théorème 2.1.1.

Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Alors M_φ est un opérateur borné et sa norme est donnée par

$$\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$$

De plus,

$$\sup\{\|M_\varphi f\|_2 : f \in H^2, \|f\|_2 = 1\} = \|\varphi\|_\infty.$$

Si φ est une fonction mesurable sur \mathbb{T} qui n'est pas dans $L^\infty(\mathbb{T})$, alors M_φ n'est pas un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{T})$.

Preuve.

Il est clair que, $\|M_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$, car :

$$\begin{aligned} \|M_\varphi f\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(e^{it})f(e^{it})|^2 dt \\ &\leq \|\varphi\|_\infty^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 dt = \|\varphi\|_\infty^2 \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

La réciproque est un peu plus compliquée. Étant donné $\epsilon > 0$ on peut trouver un ensemble $A_\epsilon \subset \mathbb{T}$, de mesure strictement positive tel que

$$|\varphi(e^{it})| > \|\varphi\|_\infty - \epsilon \quad \text{sur } A_\epsilon.$$

On définit $\chi = \chi_{A_\epsilon}$ comme la fonction qui est égale à 1 sur A_ϵ et 0 sur son complémentaire.

On a $\chi \in L^2(\mathbb{T})$ et $\|\chi\|_2^2 = \mu(A_\epsilon)$, où μ est la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle unité.

De plus,

$$\begin{aligned} \|M_\varphi \chi\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(e^{it})\chi(e^{it})|^2 dt \\ &> \left(\|\varphi\|_\infty - \epsilon\right)^2 \mu(A_\epsilon) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{\|M_\varphi \chi\|_2}{\|\chi\|_2} > \|\varphi\|_\infty - \epsilon \quad \text{et} \quad \|M_\varphi\| > \|\varphi\|_\infty - \epsilon$$

Comme $\epsilon > 0$ était arbitraire, cela nous montre que $\|M_\varphi\| \geq \|\varphi\|_\infty$, et nous avons donc égalité.

A présent, notons que $\chi = \chi_{A_\epsilon}$ n'est pas nécessairement dans H^2 , mais, si l'on écrit $\chi(e^{it}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$, alors la suite de fonctions (f_m) donnée par

$$f_m(e^{it}) = e^{imt} \chi(e^{it}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i(k+m)t}$$

satisfait $\|f_m\|_2 = \|\chi\|_2$ et

$$\|M_\varphi f_m\|_2 = \|M_{e^{imt}} M_\varphi \chi\|_2 > \left(\|\varphi\|_\infty - \epsilon\right) \|\chi\|_2$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} \|P_{H^2}f_m - f_m\|_2 &= \left\| \sum_{k=-m}^{\infty} c_k e^{i(k+m)t} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i(k+m)t} \right\|_2 \\ &= \left(\sum_{k=-\infty}^{-m-1} |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|P_{H^2}f_m\|_2 \rightarrow \|\chi\|_2 \quad \text{et} \quad \|M_\varphi P_{H^2}f_m - M_\varphi f_m\|_2 \rightarrow 0$$

Ce qui implique

$$\|M_\varphi P_{H^2}f_m\|_2 \rightarrow \|M_\varphi \chi\|_2 \quad \text{lorsque } m \rightarrow \infty$$

Notons que $P_{H^2}f_m \in H^2$ et $\frac{\|M_\varphi P_{H^2}f_m\|_2}{\|P_{H^2}f_m\|_2} > (\|\varphi\|_\infty - \epsilon)$ pour m suffisamment grand, ce qui donne l'inégalité inverse.

En fin, si φ est essentiellement non borné, alors nous pouvons prendre des fonctions $\varphi_n \in L^\infty(\mathbb{T})$ telles que $|\varphi_n(e^{it})|$ croit de façon monotone vers $|\varphi(e^{it})|$ presque partout et $\|\varphi_n\|_\infty \rightarrow \infty$ (on remplace simplement φ par 0 aux points où la valeur absolue de φ est supérieure à n). Alors $\|M_\varphi f\| \geq \|M_{\varphi_n} f\|$ pour toute fonction $f \in H^2$ et

$$\|M_{\varphi_n}\| = \|\varphi_n\|_\infty \rightarrow \infty,$$

de sorte que M_φ est non borné sur H^2 . □

Corollaire 2.1.1.

Supposons que $\varphi \in H^\infty$. Alors $M_\varphi : H^2 \rightarrow H^2$ défini par (2.1) satisfait

$$\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$$

Preuve.

Ci résulte du Théorème 2.1.1, une fois que l'on a vérifié que $\varphi \cdot f \in H^2$ (et pas simplement dans $L^2(\mathbb{T})$) pour $\varphi \in H^\infty$ et $f \in H^2$. On peut montrer directement en multipliant les séries, ou alternativement, en calculant les produits scalaires :

$$(\varphi \cdot f, e^{ikt}) = (\varphi, \bar{f} e^{ikt}) = 0 \quad \text{pour } k < 0,$$

car $\varphi \in H^2$ et $\bar{f}(e^{it})e^{ikt}$ n'a que des coefficients de Fourier d'indice strictement négatifs non nuls. □

Notation Matricielle

Notons $(e_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ la base orthonormale de $L^2(\mathbb{T})$, définie par $e_n(e^{it}) = e^{int}$ ou $e_n(z) = z^n$. Rappelons que $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ est une base orthonormale de H^2 .

On remarque ensuite que $M_\varphi e_n = \sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{ikt} e^{int}$, ou $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$ (la convergence devant être prise au sens L^2) et $\varphi \in H^\infty$. Alors nous obtenons la matrice infinie suivante :

$$\begin{pmatrix} d_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ d_1 & d_0 & 0 & 0 & \cdots \\ d_2 & d_1 & d_0 & 0 & \cdots \\ d_3 & d_2 & d_1 & d_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Une matrice qui est constante sur les diagonales orientées Nord-Ouest /Sud-Est, comme ci-dessus est appelée une matrice de Toeplitz.

Il existe un moyen d'obtenir un opérateur ayant une matrice de Toeplitz générale, pas nécessairement triangulaire inférieure, et c'est ce que nous allons voir dans la suite.

2.2 Opérateur de Toeplitz sur L'espace de Hardy

H^2

Définition 2.2.1.

Pour $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, l'opérateur de Toeplitz de symbole φ est défini par :

$$\begin{aligned} T_\varphi : H^2 &\rightarrow H^2 \\ f &\rightarrow T_\varphi f = P_{H^2}(M_\varphi f) \end{aligned}$$

Comme $\|P_{H^2}\| = 1$ et $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$ on sait que T_φ est un opérateur borné sur H^2 qui satisfait $\|T_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$. Dans le cas où $\varphi \in H^\infty$, on remarque aussi que T_φ est le même opérateur que M_φ . Nous allons voir plus bien que

$$\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$$

pour tout symbole $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$.

2.2.1 Notation Matricielle

Soit $\varphi(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k z^k$. Alors

$$\begin{aligned} T_\varphi e_n &= P_{H^2} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikt} e^{int} \right) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} d_{p-n} e^{ipt}, \end{aligned}$$

ou $p = n + k$. Ceci donne une matrice de Toeplitz de T_φ ; à savoir la matrice

$$\begin{pmatrix} d_0 & d_{-1} & d_{-2} & d_{-3} & \cdots \\ d_1 & d_0 & d_{-1} & d_{-2} & \cdots \\ d_2 & d_1 & d_0 & d_{-1} & \cdots \\ d_3 & d_2 & d_1 & d_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Des cas spéciaux importants sont les suivants :

- si $\varphi = 1$, alors T_φ est l'identité;
- si $\varphi(z) = z$, alors T_φ est le shift (à droite);
- si $\varphi(z) = \frac{1}{z}$, alors T_φ est l'adjoint du shift (ou encore le shift à gauche).
- Enfin, il est clair que, $T_\varphi = 0$ si et seulement si $\varphi = 0$.

2.2.2 Propriétés des Opérateurs de Toeplitz sur H^2

Théorème 2.2.1.

Pour $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ on a $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$; c'est-à-dire,

$$\sup\{\|T_\varphi f\|_2 : f \in H^2, \|f\|_2 = 1\} = \|\varphi\|_\infty.$$

Preuve.

Comme $\|T_\varphi\| = \|P_{H^2} M_\varphi\| \leq \|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$, il suffit simplement de prouver que l'inégalité inverse est vrai.

Etant donné $\epsilon > 0$, il existe une fonction $f \in H^2$ avec $\|f\|_2 = 1$ et

$$\|M_\varphi f\|_2 > \|\varphi\|_\infty - \epsilon,$$

par le Théorème 2.1.1. on peut supposer, sans perte de généralité que f est un polynôme

$$p(e^{it}) = \sum_{k=0}^N c_k e^{ikt},$$

car on peut toujours trouver une suite de polynômes p_n telle que

$$\|p_n - f\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \|M_\varphi p_n - M_\varphi f\| \rightarrow 0.$$

Nous allons tout d'abord montrer que, pour tout $k \geq 0$, on a

$$\|(T_\varphi - M_\varphi)(e^{imt} e^{ikt})\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad m \rightarrow \infty$$

A cette fin, avec φ ayant les coefficients de Fourier (d_n) comme ci-dessus, cette quantité est simplement

$$\begin{aligned} \|(I - P_{H^2}) \sum_{r=-\infty}^{\infty} d_r e^{irt} e^{imt} e^{ikt}\|_2 &= \left\| \sum_{r=-\infty}^{-1-m-k} d_r e^{i(r+m+k)t} \right\|_2 \\ &= \left(\sum_{r=-\infty}^{-1-m-k} |d_r|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

lorsque $m \rightarrow \infty$. Il s'ensuit que

$$\|(T_\varphi - M_\varphi)(e^{imt} p(e^{it}))\|_2 \leq \sum_{k=0}^N |c_k| \|(T_\varphi - M_\varphi) e^{imt} e^{ikt}\|_2 \rightarrow 0$$

lorsque $m \rightarrow \infty$.

Comme $\|e^{imt} p\|_2 = \|p\|_2$, on a donc

$$\|T_\varphi(e^{imt} p)\|_2 \rightarrow \|M_\varphi(e^{imt} p)\|_2 = \|e^{imt} \varphi p\|_2 = \|M_\varphi p\|_2.$$

D'autre part,

$$\|M_\varphi p\| > \|\varphi\|_\infty - \epsilon$$

Ce qui donne le résultat car $\epsilon > 0$ est arbitraire. □

Le résultat ci-dessus est de grand intérêt et de grande importance. En effet, en général, étant donnée une matrice infinie, il n'existe pas de formule qui nous donne sa norme comme opérateur agissant sur l^2 .

Bien que les opérateurs de Toeplitz peuvent être bornés, ils ne sont pas, en général, des opérateurs compacts.

Proposition 2.2.1.

Le seul opérateur de Toeplitz qui soit compact est $T_0 = 0$.

Preuve.

Soit (e_n) une base orthonormale de H^2 . Il est facile de voir que si S est un opérateur de rang fini, alors $\|Se_n\| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, on peut écrire

$$Se_n = \sum_{k=1}^r (e_n, x_k) y_k,$$

ou $(x_k)_{k=1}^r$ et $(y_k)_{k=1}^r$ qui sont des suites finies de H^2 . Alors

$$\|Se_n\| \leq \sum_{k=1}^r |(e_n, x_k)| \|y_k\| \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, car $(e_n, x_k) \rightarrow 0$ pour tout k .

Pour tout opérateur compact S sur H^2 , cela reste vraie, car on peut écrire S comme la limite (en norme d'opérateur) d'une suite (S_k) d'opérateurs de rang fini et l'on observe que $\|Se_n\| \leq \|S - S_k\| + \|S_k e_n\|$. Etant donné $\epsilon > 0$ on peut rendre le premier terme inférieure à $\frac{\epsilon}{2}$ en choisissant k assez grand et on peut rendre le second terme inférieure à $\frac{\epsilon}{2}$ en choisissant n assez grand.

Cependant, il est facile de voir que pour un opérateur de Toeplitz T_φ , on ne peut pas avoir $\|T_\varphi e_n\| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, à moins que T_φ soit l'opérateur identiquement nul. En effet, $\|T_\varphi e_n\| \geq |d_m|$ dès que d_m apparait dans la $(n+1)$ ième colonne, ce qui se produit dès que $n \geq -m$. Donc T_φ est non compact sauf si tous les coefficients de Fourier de φ sont nuls (i.e. $\varphi = 0$). \square

Remarque 2.2.1.

On note par $\mathcal{P}ol$ l'algèbre des polynômes trigonométriques (engendrée par $\{z_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$) et $\mathcal{P}ol_+$ celle des polynômes en z (engendrée par $\{z_n\}_{n \geq 0}$).

Définition 2.2.2.

1. Une matrice infinie $\{a_{ij}\}_{i,j \geq 0}$ est dite de Toeplitz s'il existe une suite numérique $\{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que $a_{ij} = b_{i-j}$ pour tout $i, j \geq 0$.
2. Un opérateur T défini sur $\mathcal{P}ol_+$ est dit de Toeplitz si sa matrice par rapport à la base $\{z_n\}_{n \geq 0}$ est de Toeplitz.

Le lemme suivant donne l'équation fondamentale des opérateurs de Toeplitz :

Lemme 2.2.1.

Soit T un opérateur de $\mathcal{P}ol_+$ dans H^2 . T est un opérateur de Toeplitz si et seulement si

$$S^*TS = T.$$

Preuve.

On remarque que l'équation $S^*TS = T$ signifie que pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$,

$$\langle S^*TSz^i, z^j \rangle = \langle Tz^i, z^j \rangle$$

c'est à dire

$$\langle Tz^i, z^j \rangle = \langle \bar{z}Tz^{i+1}, z^j \rangle = \langle Tz^{i+1}, z^{j+1} \rangle. \quad (2.2)$$

Soit, $A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ la matrice de T dans la base $\{z_n, n \geq 0\}$. Alors il est facile de voir que pour tout $i, j \geq 0$, $a_{ij} = \langle Tz^j, z^i \rangle$. Ainsi l'équation (2.2) montre que $\{a_{ij}\}_{i,j \geq 0}$ est de Toeplitz si et seulement si

$$a_{ij} = a_{i+1,j+1}, \quad \forall i, j \geq 0$$

c'est à dire

$$\langle Tz^j, z^i \rangle = \langle Tz^{j+1}, z^{i+1} \rangle = \langle \bar{z}Tz^{j+1}, z^k \rangle.$$

On a ainsi l'équivalence voulue. □

Ce lemme implique en particulier que T est un opérateur de Toeplitz si et seulement si la matrice de T dans une base $\{z_n, n \geq 0\}$ est constante par diagonale.

Théorème 2.2.2.

L'application $\varphi \rightarrow T_\varphi$ linéaire, borné, injective application de L^∞ à l'espace des opérateurs de Toeplitz, de plus on a :

$$T_\varphi^* = T_{\bar{\varphi}}$$

Preuve.

Il est clair que $\varphi \rightarrow T_\varphi$ linéaire, et

$$\|T_\varphi\| = \|PM_\varphi\| \leq \|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$$

Alors l'application est borné.

Si T_φ et T_ψ sont égale. Puis en comparant leurs matrices. Alors φ et ψ ont le même coefficients de Fourier ce implique que $\varphi = \psi$ est l'application soit injective.

Si $f, g \in H^2$, on a :

$$\begin{aligned}(T_\varphi^* f, g) &= (f, T_\varphi g) = (f, P_{H^2} M_\varphi g) = (f, \varphi g) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{\varphi(e^{i\theta}) g(e^{i\theta})} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\varphi(e^{i\theta})} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\theta \\ &= (\overline{\varphi} f, g) = (P_{H^2} M_{\overline{\varphi}} f, g) \\ &= (T_{\overline{\varphi}} f, g).\end{aligned}$$

□

2.3 Opérateurs de Toeplitz Tronqués

2.3.1 Opérateurs de Conjugaison

Définition 2.3.1.

Soit H un espace de Hilbert sur \mathbb{C} . Un opérateur de conjugaison sur H est un opérateur $C : H \rightarrow H$ vérifiant

- $\langle Cx, Cy \rangle = \langle y, x \rangle$
- $C^2 = Id_H$

Un opérateur T défini sur H est dit C -symétrique, s'il existe un opérateur de conjugaison C sur H tel que $T^* = CTC$.

Chaque espace modèle K_u^2 admet un opérateur de conjugaison défini par

$$\begin{aligned} C : K_u^2 &\rightarrow K_u^2 \\ f &\rightarrow C[f](z) = u(z)\overline{zf(z)}, \quad z \in \mathbb{T} \end{aligned}$$

On note $\tilde{f} = C[f]$

Lemme 2.3.1.

Pour chaque $\lambda \in \mathbb{D}$ et $z \in \mathbb{T}$ on a :

1. $\tilde{k}_\lambda^u(z) = \frac{u(z)-u(\lambda)}{z-\lambda}$
2. $\tilde{f}(\lambda) = \langle \tilde{k}_\lambda^u, f \rangle, \quad f \in K_u^2$

Preuve.

1. Puisque $|u| = 1$ p.p sur \mathbb{T} , pour tout $z \in \mathbb{T}$. Alors on a :

$$\begin{aligned} \tilde{k}_\lambda^u(z) &= u(z)\overline{zk_\lambda^u} \\ &= u(z)\overline{z} \frac{1 - u(\lambda)\overline{u(z)}}{1 - \lambda\overline{z}} \\ &= \overline{z} \frac{u(z) - u(\lambda)}{1 - \lambda\overline{z}} \\ &= \frac{u(z) - u(\lambda)}{z - \lambda} \end{aligned}$$

2. $\langle \tilde{k}_\lambda^u, f \rangle = \langle Ck_\lambda^u, f \rangle = \langle Ck_\lambda^u, C^2f \rangle = \langle Cf, k_\lambda^u \rangle = \langle \tilde{f}, k_\lambda^u \rangle = \tilde{f}(\lambda)$.

□

2.3.2 Définition et Propriétés des Opérateurs de Toeplitz Tronqués

Définition 2.3.2.

L'opérateur de Toeplitz tronqué de symbole $\varphi \in L^2$ sur K_u^2 est défini par :

$$\begin{aligned} A_\varphi^u &: K_u^2 \rightarrow K_u^2 \\ f &\rightarrow A_\varphi^u(f) = P_u(\varphi f) \end{aligned}$$

ou P_u est la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur K_u^2 .

L'ensemble des opérateurs de Toeplitz tronqué sur K_u^2 est noté par \mathbb{L}_u .

L'adjoint $(A_\varphi^u)^*$ de $A_\varphi^u \in \mathbb{L}_u$ est l'opérateur de Toeplitz tronqué de symbole $\bar{\varphi}$.

On noté par $K_u^\infty = K_u^2 \cap H^\infty$.

Il est à remarquer que K_u^∞ est dense dans K_u^2 .

Lemme 2.3.2.

les opérateurs de Toeplitz tronqués sur K_u^2 sont C -symétriques par l'opérateur de conjugaison C .

Preuve.

Soit $\varphi \in L^2$ telle que $A_\varphi^u \in \mathbb{L}_u$, pour tout $f \in K_u^\infty$ et $g \in K_u^2$, on a :

$$\begin{aligned} \langle CA_\varphi^u Cf, g \rangle &= \langle Cg, A_\varphi^u Cf \rangle \\ &= \int_{\mathbb{T}} u(\zeta) \overline{g(\zeta)} \varphi(\zeta) u(\zeta) \zeta f(\zeta) dm(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \overline{\varphi(\zeta)} f(\zeta) \overline{g(\zeta)} dm(\zeta) \\ &= \langle A_{\bar{\varphi}}^u f, g \rangle = \langle (A_\varphi^u)^* f, g \rangle \end{aligned}$$

□

Pour $\varphi \in K_u^2$ l'opérateur de Toeplitz tronqué A_φ^u commute avec S_u , et son adjoint $(A_\varphi^u)^*$ commute avec S_u^* .

L'opérateur de Toeplitz tronqué A_φ^u est la compression sur K_u^2 de l'opérateur de Toeplitz T_φ défini sur H^2 , et S_u est la compression de S sur K_u^2 donc, puisque $\varphi \in K_u^2 \subset H^2$, T_φ commute avec S (voir Lemme 2.2.1) alors A_φ^u commute avec S_u et son adjoint $(A_\varphi^u)^*$ commute avec S_u^* .

Lemme 2.3.3.

Soit u une fonction intérieure, et k_λ^u le noyau reproduisant de K_u^2 .

- Pour $\lambda \in \mathbb{D}$ on a :

$$S_u^* k_\lambda^u = \bar{\lambda} k_\lambda^u - \overline{u(\lambda)} \tilde{k}_0^u \quad (2.3)$$

$$S_u \tilde{k}_\lambda^u = \lambda \tilde{k}_\lambda^u - u(\lambda) k_0^u \quad (2.4)$$

- Pour $\lambda \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ on a :

$$S_u k_\lambda^u = \frac{1}{\lambda} (k_\lambda^u - k_0^u) \quad (2.5)$$

$$S_u^* \tilde{k}_\lambda^u = \frac{1}{\lambda} (\tilde{k}_\lambda^u - \tilde{k}_0^u) \quad (2.6)$$

Ces égalités sont aussi vraies pour $\lambda \in \mathbb{T}$ et si u admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory au point λ .

Preuve.

Soit $u \in H^2$ une fonction intérieure.

- Par définition de S^* , pour f et g deux fonctions on a :

$$\begin{aligned} S^*(fg) &= \frac{fg - f(0)g(0)}{z} \\ &= \frac{fg - fg(0) + fg(0) - f(0)g(0)}{z} \\ &= f \frac{g - g(0)}{z} + \frac{f - f(0)}{z} g(0) \\ &= f S^*(g) + S^*(f) g(0). \end{aligned}$$

- Pour $\lambda \in \mathbb{D}$ on a :

$$S_u^* k_\lambda^u = S^*((1 - \overline{u(\lambda)}u)k_\lambda)$$

Posons $f = (1 - \overline{u(\lambda)}u)$ et $g = k_\lambda$, l'équation précédente devient :

$$\begin{aligned} S_u^* k_\lambda^u &= (1 - \overline{u(\lambda)}u) S^* k_\lambda + k_\lambda(0) S^*(1 - \overline{u(\lambda)}u) \\ &= (1 - \overline{u(\lambda)}u) \frac{k_\lambda - k_\lambda(0)}{z} - \overline{u(\lambda)} S^* u \quad (k_\lambda(0) S^*(1) = 0) \\ &= (1 - \overline{u(\lambda)}u) \frac{\frac{1}{1-\lambda z} - 1}{z} - \overline{u(\lambda)} \frac{u - u(0)}{z} \\ &= (1 - \overline{u(\lambda)}u) \bar{\lambda} k_\lambda - \overline{u(\lambda)} \tilde{k}_0^u \\ &= \bar{\lambda} k_\lambda^u - \overline{u(\lambda)} \tilde{k}_0^u \end{aligned}$$

Pour la deuxième égalité en appliquant l'opérateur de conjugaison C à la première égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}
 S_u \tilde{k}_\lambda^u &= CS_u^* C C k_\lambda^u \\
 &= CS_u^* k_\lambda^u \\
 &= C \left(\bar{\lambda} k_\lambda^u - \overline{u(\lambda)} \tilde{k}_0^u \right) \\
 &= \lambda \tilde{k}_\lambda^u - u(\lambda) k_0^u
 \end{aligned}$$

– Pour $\lambda \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, on a :

$$\begin{aligned}
 S_u k_\lambda^u &= P_u S k_\lambda^u \\
 &= P_u S \left((1 - \overline{u(\lambda)} u) k_\lambda \right) \\
 &= P_u S k_\lambda \quad \left(\text{car } P_u S \overline{u(\lambda)} u k_\lambda = 0 \right)
 \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
 S k_\lambda(z) &= z k_\lambda(z) \\
 &= \frac{z}{1 - \bar{\lambda} z} \\
 &= \frac{1}{\bar{\lambda}} \left(\frac{1 - 1 + z \bar{\lambda}}{1 - \bar{\lambda} z} \right) \\
 &= \frac{1}{\bar{\lambda}} \left(\frac{1}{1 - \bar{\lambda} z} - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{\bar{\lambda}} \left(k_\lambda(z) - 1 \right)
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 S_u k_\lambda^u &= \frac{1}{\bar{\lambda}} P_u \left(k_\lambda(z) - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{\bar{\lambda}} (k_\lambda^u - k_0^u)
 \end{aligned}$$

la deuxième égalité découle de la première égalité, en appliquant l'opérateur de conjugaison C , on a :

$$\begin{aligned}
 S_u^* \tilde{k}_\lambda^u &= CS_u C C k_\lambda^u \\
 &= CS_u k_\lambda^u \\
 &= C \left(\frac{1}{\bar{\lambda}} (k_\lambda^u - k_0^u) \right) \\
 &= \frac{1}{\bar{\lambda}} (\tilde{k}_\lambda^u - \tilde{k}_0^u)
 \end{aligned}$$

□

Définition 2.3.3. Soient H un espace de Hilbert sur \mathbb{C} et $x, y \in H$. Le produit tensoriel de x et y est l'opérateur sur H défini par :

$$x \otimes y : z \in H \rightarrow \langle z, y \rangle \cdot x \in H$$

Lemme 2.3.4.

Soit H un espace de Hilbert sur \mathbb{C} et soient $x, y, z, t \in H$. Soit A un opérateur continu sur H , alors

- $A(x \otimes y) = A(x) \otimes y$ et $(x \otimes y)A = x \otimes A^*(y)$
- $(x \otimes y)(z \otimes t) = \langle z, y \rangle x \otimes t$
- $(x \otimes y) + (z \otimes y) = (x + z) \otimes y$
- $x \otimes y = z \otimes t \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : x = \alpha z \text{ et } y = \bar{\alpha} t$

Lemme 2.3.5. [21]

Soit $u \in H^2$ une fonction intérieure. Alors

- $I - S_u S_u^* = k_0^u \otimes k_0^u$
- $I - S_u^* S_u = \tilde{k}_0^u \otimes \tilde{k}_0^u$

Remarque 2.3.1.

Le symbole de l'opérateur de Toeplitz T_φ défini sur l'espace de Hardy est unique car $T_\varphi = 0$ si et seulement si $\varphi = 0$.

Par contre dans l'espace modèle ce n'est pas le cas, le symbole d'un opérateur de Toeplitz tronqué n'est pas unique, on peut voir par exemple que l'opérateur de symbole φ sur K_u^2 est souvent nul même si $\varphi \neq 0$.

Théorème 2.3.1.

Soit $\varphi \in L^2$ et u une fonction intérieure. Alors

$$A_\varphi^u = 0 \Leftrightarrow \varphi \in uH^2 + \overline{uH^2}$$

Preuve.

Soit $\varphi \in L^2$. On suppose que $\varphi \in uH^2 + \overline{uH^2}$, alors il existe $\psi, \chi \in H^2$ telles que :

$$\varphi = u\psi + \overline{u\chi}$$

Pour tout $f \in K_u^\infty$ on a :

$$\varphi f = u\psi f + \overline{u\chi}f$$

qui est orthogonale à K_u^2 car $uK_u^\infty \subset uH^\infty$ et $\overline{uK_u^\infty} \subset \overline{uH^\infty}$.

Donc $A_\varphi^u = 0$ pour tout $f \in K_u^\infty$ et ainsi $A_\varphi^u = 0$ (car K_u^∞ est dense dans K_u^2)

Réciproquement, on suppose que $A_\varphi^u = 0$, et $\varphi = \psi + \overline{\chi}$ avec $\psi, \chi \in H^2$. Donc

$$A_\psi^u = -A_{\overline{\chi}}^u$$

Les opérateurs $A_{\overline{\chi}}^u$ et S_u^* commutent, ainsi que les opérateurs A_ψ^u et S_u , alors les opérateurs A_ψ^u et $A_{\overline{\chi}}^u$ commutent avec S_u et S_u^* . Donc

$$A_\psi^u (I - S_u S_u^*) = (I - S_u S_u^*) A_\psi^u$$

et

$$A_\psi^u (I - S_u S_u^*) k_0^u = (I - S_u S_u^*) A_\psi^u k_0^u \quad (2.7)$$

En appliquant le Lemme 2.3.5 on obtient :

$$\begin{aligned} A_\psi^u (I - S_u S_u^*) k_0^u &= A_\psi^u (k_0^u \otimes k_0^u) k_0^u \\ &= \left[(A_\psi^u k_0^u) \otimes k_0^u \right] k_0^u \\ &= \langle k_0^u, k_0^u \rangle A_\psi^u k_0^u \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} (I - S_u S_u^*) A_\psi^u k_0^u &= (k_0^u \otimes k_0^u) A_\psi^u k_0^u \\ &= \langle A_\psi^u k_0^u, k_0^u \rangle k_0^u \end{aligned}$$

Donc l'équation (2.7) devient :

$$\langle k_0^u, k_0^u \rangle A_\psi^u k_0^u = \langle A_\psi^u k_0^u, k_0^u \rangle k_0^u$$

D'où $A_\psi^u k_0^u$ est un multiple de k_0^u , c'est-à-dire il existe un scalaire $c \in \mathbb{C}$ tel que :

$$A_\psi^u k_0^u = c k_0^u$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} 0 = (A_\psi^u - cI) k_0^u &= P_u \left[(\psi - c)(1 - \overline{u(0)u}) \right] \\ &= P_u (\psi - c) \end{aligned}$$

car $(\psi - c)(1 - \overline{u(0)u}) \in uH^2$, donc

$$P_u[(\psi - c)(1 - \overline{u(0)u})] = 0$$

Ce qui implique que

$$\psi - c \in uH^2$$

alors

$$A_{\psi-c} = 0$$

de plus on a :

$$A_{\psi}^u = cI$$

Comme $A_{\psi}^u = -A_{\bar{\chi}}^u$ alors

$$A_{\bar{\chi}}^u = -cI$$

En répétant le même raisonnement ci-dessus, on trouve que $\chi + \bar{c} \in uH^2$ donc

$$\bar{\chi} + c \in \overline{uH^2}$$

D'où

$$\varphi = \psi - c + \bar{\chi} + c \in uH^2 + \overline{uH^2}$$

□

Dans la proposition suivante nous donnons un exemple très simple d'un opérateur de Toeplitz tronqué qui a plus d'un symbole.

Proposition 2.3.1.

Soit u une fonction intérieure. Soient $A_1, A_{k_0^u}$ et $A_{\overline{k_0^u}}$ les opérateurs de Toeplitz tronqués de symbole, $1, k_0^u$ et $\overline{k_0^u}$ respectivement. Alors

$$I = A_1 = A_{k_0^u} = A_{\overline{k_0^u}}$$

Preuve.

Soit $f \in K_u^2$

On a : $A_1 f = P_u(1 \cdot f) = P_u(f) = f$ alors $A_1 = I$. et on a :

$$\begin{aligned}
A_1(f) - A_{k_0^u}(f) &= A_{1-1+\overline{u(0)u}}(f) \\
&= A_{\overline{u(0)u}}(f) \\
&= P_u(\overline{u(0)u}f) \\
&= \overline{u(0)}P_u(uf) \\
&= 0 \quad \left(\text{car } uf \in uH^2 = (K_u^2)^\perp \right)
\end{aligned}$$

donc $A_1 = A_{k_0^u}$, mais A_1 est auto-adjoint, donc

$$A_{k_0^u} = A_{k_0^u}^* = A_{\overline{k_0^u}}$$

□

Théorème 2.3.2. [20]

Pour $\lambda \in \mathbb{D}$

1. les opérateurs $\tilde{k}_\lambda^u \otimes k_\lambda^u$ et $k_\lambda^u \otimes \tilde{k}_\lambda^u$ sont des opérateurs de Toeplitz tronqués de rang 1.
2. Si u admet une dérivée angulaire au sens Carathéodory au point $\eta \in \mathbb{T}$ alors $k_\eta^u \otimes k_\eta^u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de rang 1.
3. Les seuls opérateurs de Toeplitz tronqués de rang 1 sont des multiples des opérateurs définis dans (1) et (2)

Sarason montré aussi que pour $\lambda \in \mathbb{D}$:

1. l'opérateur de Toeplitz tronqué $\tilde{k}_\lambda^u \otimes k_\lambda^u$ est de symbole $\frac{u}{z-\lambda}$
2. l'opérateur de Toeplitz tronqué $k_\lambda^u \otimes \tilde{k}_\lambda^u$ est de symbole $\frac{\bar{u}}{\bar{z}-\lambda}$
3. pour $\eta \in \mathbb{T}$, l'opérateur de Toeplitz tronqué $k_\eta^u \otimes k_\eta^u$ est de symbole $k_\eta^u + \overline{k_\eta^u} - 1$.

2.4 Opérateurs de Toeplitz Tronqués de Type α

Définition 2.4.1.

Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$. Un opérateur de Toeplitz tronqué A est dit de type α si et seulement s'il existe $\varphi \in K_u^2$ telle que

$$A = A_{\varphi + \alpha \overline{S_u \varphi} + c}, \quad c \in \mathbb{C}.$$

On note par \mathcal{B}_u^α l'ensemble des opérateurs de Toeplitz tronqués de type α .

Proposition 2.4.1. [22]

Si A_ϕ est de type α , alors il existe $\varphi_0 \in K_u^2$ et $c \in \mathbb{C}$ telle que $\varphi_0(0) = 0$ et $A_\phi = A_{\varphi_0 + \alpha \overline{S_u \varphi_0} + c}$.

Comme exemple d'opérateurs de Toeplitz tronqués de type α , on a les opérateurs de Toeplitz de rang 1 donnés par Sedlock.

Lemme 2.4.1. [22]

Soit $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$, Alors :

- Si $\lambda \in \mathbb{D}$, l'opérateur $\tilde{k}_\lambda^u \otimes k_\lambda^u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de type α , ou $\alpha = u(\lambda)$, son symbole est la fonction $\phi = \tilde{k}_\lambda^u + u(\lambda) \overline{S_u k_\lambda^u}$.
- Si $\lambda \in \mathbb{T}$ et u admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory en λ , l'opérateur $k_\lambda^u \otimes k_\lambda^u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de type $u(\lambda)$ est son symbole est la fonction $\phi = k_\lambda^u + u(\lambda) \overline{S_u \tilde{k}_\lambda^u}$.

Preuve.

- On a :

$$\tilde{k}_\lambda^u(z) = \frac{u(z) - u(\lambda)}{z - \lambda} = \frac{u(z)}{z - \lambda} - \frac{u(\lambda)}{z - \lambda}$$

alors

$$\frac{u(z)}{z - \lambda} = \tilde{k}_\lambda^u(z) + \frac{u(\lambda)}{z - \lambda}$$

D'après le Théorème 2.3.2 l'opérateur de Toeplitz tronqué $\tilde{k}_\lambda^u \otimes k_\lambda^u$ est de symbole $\frac{u}{z - \lambda}$ alors

$$\begin{aligned} \tilde{k}_\lambda^u \otimes k_\lambda^u &= A_{\frac{u}{z - \lambda}} = A_{\tilde{k}_\lambda^u + \frac{u(\lambda)}{z - \lambda}} \\ &= A_{\tilde{k}_\lambda^u + u(\lambda) \overline{S_u k_\lambda^u}} \quad (A_{S_u k_\lambda^u} = A_{S k_\lambda^u}) \\ &= A_{\tilde{k}_\lambda^u + u(\lambda) \overline{S_u \tilde{k}_\lambda^u}} \end{aligned}$$

donc $\widetilde{k}_\lambda^u \otimes k_\lambda^u$ est de type $u(\lambda)$.

- On a déjà vu dans le Théorème 2.3.2 que pour $\lambda \in \mathbb{T}$ alors $k_\lambda^u \otimes k_\lambda^u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de symbole $k_\lambda^u + \overline{k}_\lambda^u - 1$, de plus on a :

$$\begin{aligned} \widetilde{k}_\lambda^u &= \frac{u(z) - u(\lambda)}{z - \lambda} \\ &= \frac{u(\lambda) \left(1 - \overline{u(\lambda)} u(z)\right)}{\lambda(1 - \overline{\lambda}z)} \\ &= \overline{\lambda} u(\lambda) k_\lambda^u, \end{aligned}$$

d'après l'équation (2.4), on a :

$$S_u \widetilde{k}_\lambda^u = u(\lambda)(k_\lambda^u - k_0^u)$$

alors

$$A_{\overline{S_u \widetilde{k}_\lambda^u}} = A_{\overline{u(\lambda)(k_\lambda^u - k_0^u)}} = A_{\overline{u(\lambda)(\overline{k}_\lambda^u - 1)}}$$

donc

$$A_{\overline{k}_\lambda^u - 1} = A_{\overline{k_\lambda^u - k_0^u}} = A_{\overline{u(\lambda) S_u \widetilde{k}_\lambda^u}}$$

Par conséquent

$$k_\lambda^u \otimes k_\lambda^u = A_{\overline{k_\lambda^u + \overline{k}_\lambda^u - 1}} = A_{\overline{k_\lambda^u + u(\lambda) \overline{S_u \widetilde{k}_\lambda^u}}}$$

Donc $k_\lambda^u \otimes k_\lambda^u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de type $u(\lambda)$.

□

Théorème 2.4.1. [22]

Tout opérateur de Toeplitz tronqué de rang 1 appartenant à une certaine classe \mathcal{B}_u^α , telle que α est de la forme $\alpha = u(\lambda)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$.

Preuve.

Soit $A \in \mathbb{L}_u$ tel que A est de rang 1. D'après le Théorème 2.3.2, on a :

- ou bien, A est multiple de l'un des opérateurs $\widetilde{k}_\lambda^u \otimes k_\lambda^u$ ou $k_\lambda^u \otimes \widetilde{k}_\lambda^u$.
- ou bien A est multiple de $k_\lambda^u \otimes k_\lambda^u$ ou u admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory au point λ .

Et d'après le Lemme 2.4.1 l'opérateur A est un opérateur de Toeplitz tronqué de type $u(\lambda)$.

□

Lemme 2.4.2. [22]

Soient A un opérateur borné et $\alpha \in \mathbb{D}$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $A \in \mathcal{B}_u^\alpha$.
2. Il existe $\varphi \in K_u^2$ telle que : $A = A_{\varphi + \alpha \bar{u}(\varphi - \varphi(0))}$
3. Il existe $\varphi \in K_u^2$ telle que : $A = A_{\frac{\varphi}{1 - \alpha \bar{u}}}$
4. Ils existent $\varphi_1, \varphi_2 \in K_u^2$ continues telles que

$$A = A_{\varphi_1 + \overline{\varphi_2}} \quad \text{et} \quad \bar{\alpha} S_u \widetilde{\varphi_1} - \varphi_2 \in \text{span}(k_0^u).$$

Preuve.

Soient A un opérateur borné et $\alpha \in \mathbb{D}$.

- 1 \Rightarrow 2 Si $A \in \mathcal{B}_u^\alpha$, par définition il existe $\varphi \in K_u^2$ telle que $A = A_{\varphi + \alpha \overline{S_u \varphi}}$

Rappelons que l'opérateur S_u est un opérateur de Toeplitz tronqué de symbole z , donc S_u est C -symétrique c'est-à-dire

$$S_u C S_u = C^*$$

dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} S_u \widetilde{\varphi} &= S_u C \varphi \\ &= C S_u^* \varphi \\ &= C P_u \left(\bar{z}[\varphi - \varphi(0)] \right) \\ &= C \left(\bar{z}[\varphi - \varphi(0)] \right) \quad \left(\text{car} \quad \bar{z}[\varphi - \varphi(0)] \in K_u^2 \right) \\ &= u \left(\overline{\varphi - \varphi(0)} \right). \end{aligned}$$

D'où $A_{\varphi + \alpha \overline{S_u \varphi}} = A_{\varphi + \alpha \bar{u}(\varphi - \varphi(0))}$.

- 2 \Rightarrow 3 Supposons que $A = A_{\varphi + \alpha \bar{u}(\varphi - \varphi(0))}$, pour $\varphi \in K_u^2$.

Comme $\frac{1}{1 - \alpha \bar{u}} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha \bar{u})^n$, (série convergente dans L^2).

on a :

$$\frac{\varphi}{1 - \alpha\bar{u}} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(\alpha\bar{u})^n = \varphi + \varphi\alpha\bar{u} + \sum_{n=2}^{\infty} \varphi(\alpha\bar{u})^n.$$

Vue que $\bar{u}\varphi \in \overline{zH^2}$, d'après la Proposition 1.5.3, on a : $u\bar{\varphi} \in zH^2 \subset H^2$.

Par un calcul simple on obtient, pour $f, g \in K_u^2$:

$$\langle \varphi\bar{u}^k f, g \rangle = \langle \bar{u}^{k-1} f, u\bar{\varphi}g \rangle = 0 \quad \text{pour tout } k \geq 2.$$

Il résulte que :

$$A_{\varphi + \alpha\bar{u}(\varphi - \varphi(0))} = A_{\varphi + \varphi\alpha\bar{u}} = A_{\frac{\varphi}{1 - \alpha\bar{u}}}$$

- 3 \Rightarrow 4 Supposons que $A = A_{\frac{\varphi}{1 - \alpha\bar{u}}}$ avec $\varphi \in K_u^2$. On a :

$$A_{\frac{\varphi}{1 - \alpha\bar{u}}} = A_{\varphi + \varphi\alpha\bar{u}}.$$

On a aussi

$$\bar{u}\varphi = \overline{S_u\tilde{\varphi}}$$

donc ils existent φ_1 et φ_2 telle que :

$$\varphi_1 = \varphi, \quad \varphi_2 = \bar{\alpha}S_u\tilde{\varphi},$$

De plus

$$\bar{\alpha}S_u\tilde{\varphi}_1 - \varphi_2 = \bar{\alpha}S_u\tilde{\varphi} - \bar{\alpha}S_u\tilde{\varphi} = 0 \in \text{span}(k_2^u).$$

- 4 \Rightarrow 1 Supposons que $A = A_{\varphi_1 + \overline{\varphi_2}}$ tel que $\bar{\alpha}S_u\tilde{\varphi}_1 - \varphi_2 \in \text{span}(k_0^u)$, alors

$$\varphi_2 = \bar{\alpha}S_u\tilde{\varphi}_1 + ck_0^u \quad \text{avec } c \in \mathbb{C}.$$

Donc

$$A_{\varphi_1 + \overline{\varphi_2}} = A_{\varphi_1 + \alpha\overline{S_u\tilde{\varphi}_1} + \overline{ck_0^u}}$$

puisque $A_{\frac{\varphi}{ck_0^u}} = \bar{c}A_1 = \bar{c}I$ (Proposition 2.3.1), on déduit que $A \in \mathcal{B}_u^\alpha$.

□

2.4.1 Shift Généralisé

Définition 2.4.2.

Pour $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$, on définit l'opérateur S_u^α par :

$$S_u^\alpha = S_u + \frac{\alpha}{1 - \alpha u(0)} k_0^u \otimes \widetilde{k}_0^u$$

Cette opérateur appelée " l'opérateur shift généralisé " est un opérateur de Toeplitz tronqué.

Remarque 2.4.1.

Notons que :

- $S_u^0 = S_u$.
- $S_u = A_z^u$
- $S_u^* = A_{\bar{z}}^u$.

Théorème 2.4.2. [21]

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Un opérateur borné A sur K_u^2 est un opérateur de Toeplitz tronqué si et seulement s'ils existent deux fonctions $\varphi, \psi \in K_u^2$ telles que :

$$A - S_u^\alpha A (S_u^\alpha)^* = (\varphi \otimes k_0^u) + (k_0^u \otimes \psi)$$

Cette théorème donne un caractérisation des opérateurs de Toeplitz tronqués sur l'espace modèle K_u^2 .

Le corollaire suivant est un résultat du théorème précédent.

Corollaire 2.4.1.

Si un opérateur borné $A \in K_u^2$ commute avec S_u^α alors A est un opérateur de Toeplitz tronqué.

Lemme 2.4.3. [22]

Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$.

L'opérateur S_u^α est un opérateur de Toeplitz tronqués de type α , plus particulièrement

$$S_u^\alpha = \frac{1}{1 - \alpha u(0)} A_{S_u k_0^u + \alpha \widetilde{k}_0^u}^u$$

Preuve.

Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$

$$S_u^\alpha = S_u + \frac{\alpha}{1 - \alpha u(0)} k_0^u \otimes \tilde{k}_0^u$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{1 - \alpha u(0)} k_0^u \otimes \tilde{k}_0^u &= \frac{\alpha}{1 - \alpha u(0)} A_{\frac{\bar{u}}{z}}^u \\ &= A_{\frac{\alpha}{1 - \alpha u(0)} \frac{\bar{u}}{z}}^u \\ &= A_{\frac{\bar{u} - u(0) + u(0)}{\alpha \bar{z}(1 - \alpha u(0))}}^u \\ &= A_{\frac{\alpha}{1 - \alpha u(0)} (\overline{k_0^u + u(0)z})}^u \\ &= \frac{\alpha}{1 - \alpha u(0)} A_{\overline{k_0^u}}^u + \frac{\overline{\alpha u(0)}}{1 - \alpha u(0)} A_z^u \\ &= \frac{\alpha}{1 - \alpha u(0)} A_{\overline{k_0^u}}^u + \frac{\overline{\alpha u(0)}}{1 - \alpha u(0)} S_u \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} S_u^\alpha &= S_u + \frac{\alpha}{1 - \alpha u(0)} A_{\overline{k_0^u}}^u + \frac{\overline{\alpha u(0)}}{1 - \alpha u(0)} S_u \\ &= \frac{1}{1 - \alpha u(0)} S_u + \frac{\alpha}{1 - \alpha u(0)} A_{\overline{k_0^u}}^u \\ &= \frac{1}{1 - \alpha u(0)} P_u S_u k_0^u + \frac{\alpha}{1 - \alpha u(0)} A_{\overline{k_0^u}}^u \\ &= \frac{1}{1 - \alpha u(0)} A_{S_u k_0^u}^u + \frac{\alpha}{1 - \alpha u(0)} A_{\overline{k_0^u}}^u \\ &= \frac{1}{1 - \alpha u(0)} A_{S_u k_0^u + \alpha \overline{k_0^u}}^u \end{aligned}$$

□

Dans le théorème suivant, Sedlock donne un caractérisation des opérateurs de Toeplitz tronqués de type α .

Théorème 2.4.3. [22]

Soit A un opérateur borné sur K_u^2 et soit $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$.

Alors A est de type α si et seulement si

$$AS_u^\alpha = S_u^\alpha A.$$

Preuve.

Soit A un opérateur borné sur K_u^2 et soit $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$.

- (\Rightarrow) Si A est de type α , d'après le Lemme 2.3.2 on a :

$$\begin{aligned} AS_u^\alpha &= C^2 AS_u^\alpha C^2 \\ &= C(AS_u^\alpha)^* C \\ &= C(S_u^\alpha)^* A^* C \\ &= C^2 S_u^\alpha C^2 A C^2 \\ &= S_u^\alpha A. \end{aligned}$$

- (\Leftarrow) On suppose que $AS_u^\alpha = S_u^\alpha A$, d'après le corollaire 2.4.1, A est un opérateur de Toeplitz tronqué, donc C -symétrique. On sait que :

$$AS_u^\alpha = AS_u + \frac{\alpha}{1 - \alpha u(0)} (Ak_0^u) \otimes \widetilde{k}_0^u = AS_u + \frac{\alpha}{1 - \alpha u(0)} A(k_0^u \otimes \widetilde{k}_0^u).$$

et

$$S_u^\alpha A = S_u A + \frac{\alpha}{1 - \alpha u(0)} k_0^u \otimes (A^* \widetilde{k}_0^u) = S_u A + \frac{\alpha}{1 - \alpha u(0)} k_0^u \otimes (\widetilde{A k}_0^u).$$

D'où

$$\begin{aligned} A - S_u AS_u^* &= A - AS_u S_u^* - \frac{\alpha}{1 - \alpha u(0)} Ak_0^u \otimes S_u \widetilde{k}_0^u + \frac{\alpha}{1 - \alpha u(0)} k_0^u \otimes (S_u \widetilde{A k}_0^u) \\ &= Ak_0^u \otimes k_0^u + \frac{\alpha \overline{u(0)}}{1 - \alpha u(0)} Ak_0^u \otimes k_0^u + \frac{\alpha}{1 - \alpha u(0)} k_0^u \otimes (S_u \widetilde{A k}_0^u) \\ &= \frac{Ak_0^u}{1 - \alpha u(0)} \otimes k_0^u + \overline{\alpha} S_u C \left(\frac{Ak_0^u}{1 - \alpha u(0)} \right). \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{Ak_0^u}{1 - \alpha u(0)} + \overline{\alpha S_u C \left(\frac{Ak_0^u}{1 - \alpha u(0)} \right)}$$

est un symbole de A , alors A est de type α .

□

Théorème 2.4.4. [22]

Pour $\alpha \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, on a :

- $\mathcal{B}_u^\alpha = \{S_u^\alpha\}'$, le commutant de S_u^α .
- \mathcal{B}_u^α est une algèbre commutative fermée.

- $A \in \mathcal{B}_u^\alpha$ si et seulement si $A^* \in \mathcal{B}_u^{\frac{1}{\alpha}}$.
- Si $A \in \mathcal{B}_u^\alpha$ est inversible alors $A^{-1} \in \mathcal{B}_u^\alpha$.
- Deux opérateurs de Toeplitz tronqués A_φ et A_ψ commutent si et seulement s'ils appartiennent à une même classe \mathcal{B}_u^α pour un certain α , dans ce cas le produit $AB \in \mathcal{B}_u^\alpha$.
- Si $\alpha_1 \neq \alpha_2 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ alors $\mathcal{B}_u^{\alpha_1} \cap \mathcal{B}_u^{\alpha_2} = \mathbb{C}_I$ ou I désigne l'opérateur identité sur K_u^2 .
- Pour chaque α , la classe \mathcal{B}_u^α est une sous-algèbre maximale contenue dans \mathbb{L}_u .

Chapitre 3

Semi-Groupes

3.1 Rappels

Opérateurs Fermés

Définition 3.1.1.

On dit qu'un opérateur $A \in L(E, F)$ est fermé si le graphe de A noté

$$G(A) = \{(x, Ax) \mid x \in D(A)\} \subset E \times Y$$

est fermé dans $E \times F$.

Dans la suite, On noter par X l'espace de Banach sur le corps des nombres complexes \mathbb{C} et par $\mathcal{B}(X)$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés dans X . Nous désignerons par I l'unité de $\mathcal{B}(X)$.

Pour un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ nous noterons l'image de A par :

$$ImA = \{Ax \mid x \in D(A)\}$$

et le noyau de A par :

$$KerA = \{x \in D(A) \mid Ax = 0\}$$

L'opérateur $A : D(A) \subset X \rightarrow ImA$ est surjectif. Si $KerA = \{0\}$, alors A est injectif.

Pour un opérateur bijectif, on peut définir l'opérateur inverse :

$$A^{-1} : D(A^{-1}) \subset X \rightarrow X$$

par $A^{-1}y = x$ si $Ax = y$. Évidemment $D(A^{-1}) = \text{Im}A$.

On note par $\mathcal{GL}(X)$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{B}(X)$. L'ensemble $\mathcal{GL}(X)$ est un ensemble ouvert dans $\mathcal{B}(X)$

Lemme 3.1.1.

Soit X un espace de Banach et $f : [a, b] \rightarrow X$ une application continue. Alors

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s) ds = f(a)$$

Preuve.

Nous avons :

$$\left\| \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s) ds - f(a) \right\| = \left\| \frac{1}{t} \int_a^{a+t} [f(s) - f(a)] ds \right\| \leq \sup_{s \in [a, a+t]} \|f(s) - f(a)\|.$$

L'égalité de l'énoncé résulte de la continuité de l'application f . □

Définition 3.1.2.

L'ensemble :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ telle que } \lambda I - A \text{ est inversible dans } \mathcal{B}(X)\}$$

s'appelle l'ensemble résolvant de $A \in \mathcal{B}(X)$.

Proposition 3.1.1. [6]

Soit $A \in \mathcal{B}(X)$. Alors $\rho(A)$ est un ensemble ouvert dans \mathbb{C} .

Preuve.

Définissons l'application :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C} &\rightarrow \mathcal{B}(X) \\ \lambda &\rightarrow \phi(\lambda) = \lambda I - A. \end{aligned}$$

Evidemment ϕ est continue. Si $\lambda \in \rho(A)$, alors $\lambda I - A \in \mathcal{GL}(X)$ et par suite

$$\rho(A) = \phi^{-1}(\mathcal{GL}(X)).$$

Comme $\mathcal{GL}(X)$ est un ensemble ouvert dans $\mathcal{B}(X)$, on voit que $\rho(A)$ est ouvert. □

Définition 3.1.3.

L'application :

$$\begin{aligned} R(\cdot; A) : \rho(A) &\rightarrow \mathcal{B}(X) \\ \lambda &\rightarrow R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1} \end{aligned}$$

s'appelle la résolvante de A .

Lemme 3.1.2. [6]

Si $A \in \mathcal{B}(X)$ et $\|A\| < 1$, alors $I - A \in \mathcal{GL}(X)$ et

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

Proposition 3.1.2. [20]

La résolvante d'un opérateur linéaire $A \in \mathcal{B}(X)$, a les propriétés suivantes :

1. Si $\lambda, \mu \in \rho(A)$, alors :

$$R(\lambda; A) - R(\mu; A) = (\mu - \lambda)R(\lambda; A)R(\mu; A).$$

2. $R(\cdot; A)$ est une application analytique sur $\rho(A)$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $|\lambda| > \|A\|$, alors $\lambda \in \rho(A)$ et nous avons :

$$R(\lambda; A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$$

4. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \lambda \in \rho(A)$, on a :

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda; A) = (-1)^n n! R(\lambda; A)^{n+1}.$$

Preuve.

1. Nous avons successivement :

$$\begin{aligned} R(\lambda; A) - R(\mu; A) &= (\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1} \\ &= (\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A - \lambda I + A)(\mu I - A)^{-1} \\ &= (\mu - \lambda)R(\lambda; A)R(\mu; A), \quad \forall \lambda, \mu \in \rho(A). \end{aligned}$$

2. Soit $\lambda_0 \in \rho(A)$. Notons par $D(\lambda_0; \frac{1}{\|R(\lambda_0; A)\|})$ le disque ouvert de centre λ_0 et de rayon $\frac{1}{\|R(\lambda_0; A)\|}$. Alors, pour $\lambda \in D(\lambda_0; \frac{1}{\|R(\lambda_0; A)\|})$, nous avons :

$$\lambda I - A = \left[I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0; A) \right] (\lambda_0 I - A).$$

Comme :

$$\|(\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0; A)\| = |\lambda_0 - \lambda| \|R(\lambda_0; A)\| < 1.$$

et compte tenu du Lemme 3.1.2, on a :

$$I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0; A) \in \mathcal{GL}(X),$$

d'où

$$\lambda I - A \in \mathcal{GL}(X)$$

et :

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)^{-1} &= (\lambda_0 I - A)^{-1} [I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0; A)]^{-1} \\ &= R(\lambda_0; A) \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0; A)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0; A)^{n+1} \end{aligned}$$

Donc $R(\cdot; A)$ est analytique sur $\rho(A)$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > \|A\|$. Alors

$$\|\lambda^{-1}A\| < 1$$

d'après le Lemme 3.1.2. On a :

$$I - \lambda^{-1}A \in \mathcal{GL}(X).$$

De plus :

$$(I - \lambda^{-1}A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda^{-1}A)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n}$$

Par conséquent :

$$R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1} = \lambda^{-1} (I - \lambda^{-1}A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$$

4. En utilisant la récurrence sur n , pour $n = 1$, nous avons :

$$\frac{d}{d\lambda}R(\lambda; A) = \frac{d}{d\lambda}(\lambda I - A)^{-1} = -(\lambda I - A)^{-2} = -R(\lambda; A)^2$$

Supposons que pour $k \in \mathbb{N}$, on ait :

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}R(\lambda; A) = (-1)^k k! R(\lambda; A)^{k+1}$$

Montrons que :

$$\frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}}R(\lambda; A) = (-1)^{k+1} (k+1)! R(\lambda; A)^{k+2}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}}R(\lambda; A) &= \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d^k}{d\lambda^k} R(\lambda; A) \right) \\ &= \frac{d}{d\lambda} \left[(-1)^k k! (\lambda I - A)^{-k-1} \right] \\ &= (-1)^k k! (-k-1) (\lambda I - A)^{-k-2} \\ &= (-1)^{k+1} (k+1)! R(\lambda; A)^{k+2} \end{aligned}$$

et par conséquent :

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda; A) = (-1)^n n! R(\lambda; A)^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

□

Remarque 3.1.1.

Compte tenu de la Proposition 3.1.2, il résulte que :

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > \|A\|\} \subset \rho(A)$$

3.2 Semi-Groupes Uniformément Continus

Définition 3.2.1.

Soit X un espace de Banach et soit $(T(t))_{t \geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaire borné de X dans X . On dit que $(T(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupes si :

- $T(0) = I$ (I identité opérateur sur X)
- $T(t + s) = T(t)T(s) \quad \forall t, s \geq 0$

Proposition 3.2.1.

Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe, Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a les propriétés suivantes :

1. $T(nt) = (T(t))^n$
2. $T(-t) = (T(t))^{-1}$
3. $T(n) = (T(1))^n$

Preuve.

1. $T(nt) = T(\sum_{j=1}^n t) = \prod_{j=1}^n T(t) = (T(t))^n$
2. $T(t)T(-t) = T(t - t) = T(0) = I$
3. on pose $t = 1$ dans 1 on obtient $T(n) = (T(1))^n$

□

On dit que le semi-groupes $(T(t))_{t \geq 0}$ est uniformément continu si

$$\lim_{t \downarrow 0} \|T(t) - I\| = 0 \quad (3.1)$$

La générateur infinitésimal de semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ définit par :

$$D(A) = \left\{ x \in X, \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ exists} \right\}$$

et

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+ T(t)x}{dt} \right|_{t=0} \quad \forall x \in D(A)$$

Remarque 3.2.1.

Si le semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est uniformément continu, alors on a :

$$\lim_{s \rightarrow t} \|T(s) - T(t)\| = 0$$

Théorème 3.2.1. [20]

On dit que l'opérateur A est infinitésimal générateur d'un semi-groupe uniformément continu si et seulement si A est un opérateur linéaire borné.

Preuve.

- Soit A un opérateur linéaire borné sur X . On défini

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \quad (3.2)$$

Pour tout $t \geq 0$, la relation (3.2) converge en norme et défini un opérateur linéaire borné. On a :

$$\begin{aligned} T(0) &= I \\ T(t)T(s) &= e^{tA}e^{sA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k A^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{n-k} A^{n-k} s^k A^k}{(n-k)!k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t+s)^n A^n}{n!} = T(t+s) \end{aligned}$$

De plus on a :

$$\|T(t) - I\| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} = e^{t\|A\|} - 1 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

et

$$\left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| \leq \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^n}{n!} \right\| \leq t \|A\|^2 e^{t\|A\|} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

ce qui implique que $(T(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu et A un infinitésimal générateur de $T(t)$.

- Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu d'un opérateurs linéaire borné dans X .

Fixer $\rho > 0$, assez petit, tel que $\|I - \rho^{-1} \int_0^\rho T(s) ds\| < 1$. Alors d'après le Lemme 3.1.2 on a :

$\rho^{-1} \int_0^\rho T(s) ds$ est inversible ainsi $\int_0^\rho T(s) ds$ est inversible. Donc

$$\begin{aligned} h^{-1}(T(h) - I) \int_0^\rho T(s) ds &= h^{-1} \left(\int_0^\rho T(s+h) ds - \int_0^\rho T(s) ds \right) \\ &= h^{-1} \left(\int_\rho^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^h T(s) ds \right) \\ &= \left(h^{-1} \int_0^\rho T(s+h) ds - h^{-1} \int_0^\rho T(s) ds \right) \end{aligned}$$

d'après le Lemme 3.1.1 on a :

$$h^{-1}(T(h) - I) = \left(h^{-1} \int_0^\rho T(s+h)ds - h^{-1} \int_0^\rho T(s)ds \right) \left(\int_0^\rho T(s)ds \right)^{-1}$$

Si $h \rightarrow 0$, alors $h^{-1}(T(h) - I)$ converge en norme à l'opérateur linéaire borné $(T(\rho) - I) \left(\int_0^\rho T(s)ds \right)^{-1}$ (infinitésimal générateur de $(T(t))_{t \geq 0}$).

□

Théorème 3.2.2. [17]

Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ et $(S(t))_{t \geq 0}$ deux semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés. Si

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t) - I}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t) - I}{t} = A \tag{3.3}$$

Alors :

$$T(t) = S(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve.

Soient $t > 0$ et $x \in D(A)$. définissons l'application

$$[0, t] \ni s \rightarrow U(s)x = T(t-s)S(s)x \in D(A).$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} U(s)x &= \frac{d}{ds} T(t-s)S(s)x + T(t-s) \frac{d}{ds} S(s)x \\ &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)AS(s)x = 0 \end{aligned}$$

quel que soit $x \in D(A)$. par suite $U(0)x = U(t)x$, pour tout $x \in D(A)$, d'ou :

$$T(t)x = S(t)x, \quad \forall x \in D(A) \quad \text{et} \quad t \geq 0$$

puisque

$$\overline{D(A)} = X \quad \text{et} \quad T(t), S(t) \in L(X) \quad \forall t \geq 0$$

Il résulte que :

$$T(t)x = S(t)x, \quad \forall t \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in X$$

□

Corollaire 3.2.1. [9]

Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaire borné.

Alors :

1. Il existe une constante $w \geq 0$ telle que $\|T(t)\| \leq e^{wt}$.
2. Il existe une unique opérateur linéaire borné A telle que $T(t) = e^{tA}$. (A infinitésimal générateur de $T(t)$)
3. $t \rightarrow T(t)$ dérivable en norme avec

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A$$

Preuve.

Le point 2 est clair (voir les Théorèmes 3.2.1 et 3.2.2).

Maintenant on utilise le point 2 pour démontrer facilement les points 1 et 3. (Car A est borné et l'exponentiel est dérivable) □

3.3 Semi-Groupes Fortement Continus

Définition 3.3.1.

Un semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaire borné de X est fortement continue si

$$\lim_{t \downarrow 0} T(t)x = x \quad \forall x \in X.$$

Les semi-groupes fortement continue sont appelé semi-groupe de classe C_0 ou C_0 -semi-groupe.

Remarque 3.3.1.

Les semi-groupes uniformément continus sont C_0 - semi-groupes puisque :

$$\|T(t)x - x\| \leq \|T(t) - I\| \|x\| \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow 0.$$

Mais il existe des C_0 - semi-groupes qui ne sont pas uniformément continu. (voir l'exemple 3.4.2)

Théorème 3.3.1. [9]

Si $(T(t))_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe, il existe une constante $w \geq 0$ et $M \geq 1$ telle que

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt} \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve.

$T(t)$ est un semi-groupe d'opérateur linéaire borné. Alors :

$$\exists M \geq 0; \quad \|T(s)\| \leq M \quad \forall s \in [0, 1]$$

On pose $t = s + n$, $\forall s \in]0, 1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \|T(t)\| &= \|T(s+n)\| = \|T(s)\| \|T(n)\| \\ &\leq M \|T(1)\|^n \\ &\leq MM^n = M^{n+1} \\ &\leq Me^{n \log M} \\ &\leq Me^{wt}. \quad \forall t \geq 0; w = \log M \end{aligned}$$

□

3.4 Exemples

Exemple 3.4.1.

Considérons l'espace $L^p(]0, +\infty[)$, $1 \leq p < +\infty$, avec la norme :

$$\|f\|_p = \left\{ \int_0^{+\infty} |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

avec cette norme, $L^p(]0, +\infty[)$, $1 \leq p < +\infty$ est un espace de Banach. Définissons :

$$(T(t)f)(x) = f(t+x), \quad \forall t \geq 0, \forall x \in]0, +\infty[$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
 \|T(t)f\|_p &= \left(\int_0^{+\infty} |(T(t)f)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \left(\int_0^{+\infty} |f(x+t)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \left(\int_t^{+\infty} |f(k)|^p dk \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \left(\int_0^{+\infty} |f(k)|^p dk \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p
 \end{aligned}$$

Donc $\|T(t)\| = 1, \quad \forall t \geq 0$.

Il est évident que $T(0) = I$ et $T(t+s) = T(t)T(s), \quad \forall t, s \geq 0$.

De plus on a :

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0} \|T(t)f - f\|_p &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\int_0^{+\infty} |(T(t)f)(x) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\int_0^{+\infty} |f(t+x) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

donc $(T(t))_{t \geq 0}$ est un C_0 - semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur $L^p(]0, +\infty[)$ (nommé le C_0 - semi-groupe de translation à droite)

Soit $A : D(A) \subset L^p(]0, +\infty[) \rightarrow L^p(]0, +\infty[)$ le générateur infinitésimal du C_0 - semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$.

Si $f \in D(A)$, alors nous avons :

$$\begin{aligned}
 Af(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)f(x) - f(x)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \\
 &= f'(x)
 \end{aligned}$$

uniformément par rapport à x . Par conséquent :

$$D(A) \subset \{f \in L^p(]0, +\infty[) \mid f' \in L^p(]0, +\infty[)\}$$

si $f \in L^p(]0, +\infty[)$ tel que $f' \in L^p(]0, +\infty[)$, alors on a :

$$\left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\|_p = \left(\int_0^{+\infty} \left| \frac{(T(t)f)(x) - f(x)}{t} - f'(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Mais :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{(T(t)f)(x) - f(x)}{t} - f'(x) \right| &= \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} - f'(x) \right| \\
&= \left| \left[\frac{1}{t} f(\xi) \right]_x^{x+t} - \left[\frac{1}{t} f'(x) \xi \right]_x^{x+t} \right| \\
&= \left| \frac{1}{t} \int_x^{x+t} [f'(\xi) - f'(x)] d\xi \right| \rightarrow 0 \quad \text{Si } t \rightarrow 0
\end{aligned}$$

uniformément par rapport à x si $t \rightarrow 0$. Alors :

$$\left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\|_p \rightarrow 0 \quad \text{si } t \rightarrow 0$$

et on voit que : $\{f \in L^p(]0, +\infty[) \mid f' \in L^p(]0, +\infty[)\} \subset D(A)$.

par conséquent :

$$D(A) = \{f \in L^p(]0, +\infty[) \mid f' \in L^p(]0, +\infty[)\} \quad \text{et} \quad Af = f'$$

Exemple 3.4.2.

Soient $p \in [1, \infty[$ et

$$l_p = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

avec la norme

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Considérons une suite de nombres réels positifs $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et définissons une famille $(T(t))_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires sur l'espace l_p par

$$T(t)(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (e^{-a_n t} x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, \quad \forall t \geq 0$$

pour tout $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p$. On voit que

$$T(0)(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (e^{-a_n 0} x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

donc $T(0) = I$. De même, pour tous $t, s \geq 0$ on a :

$$\begin{aligned}
T(t)T(s)(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} &= T(t)(e^{-a_n s} x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (e^{-a_n t} e^{-a_n s} x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \\
&= (e^{-a_n (t+s)} x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(T(t+s)(x_n) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}
\end{aligned}$$

quelque soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p$. Donc $T(t+s) = T(t)T(s)$, pour tous $t, s \geq 0$. De plus, pour tout $t \geq 0$ et tout $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p$ nous avons

$$\begin{aligned} \|T(t)(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} - (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_p^p &= \|(e^{-ant}x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} - (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_p^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |e^{-ant} - 1|^p |x_n|^p \end{aligned}$$

Comme

$$|e^{-ant} - 1|^p |x_n|^p \leq |x_n|^p$$

la série $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ est convergente, avec le théorème de Weierstrass il en résulte que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |e^{-ant} - 1|^p |x_n|^p$$

est uniformément convergente. Donc

$$\lim_{t \searrow 0} \|T(t)(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} - (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t \searrow 0} |e^{-ant} - 1|^p |x_n|^p = 0$$

Par conséquent

$$\lim_{t \searrow 0} T(t)(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

pour tout $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p$. Il s'ensuit donc que $(T(t))_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur l_p .

Dans la suite, nous prouvons que le générateur infinitésimal du C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est l'opérateur linéaire A défini sur l'ensemble

$$D(A) = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p \mid (a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p\}$$

par

$$A(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (-a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}.$$

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p$ tel que la limite

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{T(t)(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} - (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}}{t}$$

existe et soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p$ sa valeurs. Donc

$$\lim_{t \searrow 0} \left\| \frac{T(t)(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} - (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}}{t} - (y_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \right\|_p^p = 0$$

d'ou

$$\lim_{t \searrow 0} \left\| \frac{(e^{-a_n t} x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} - (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}}{t} - (y_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \right\|_p^p = 0$$

Il vient que

$$\lim_{t \searrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{-a_n t} x_n - x_n}{t} - y_n \right|^p = 0$$

d'ou

$$y_n = \lim_{t \searrow 0} \frac{e^{-a_n t} x_n - x_n}{t} = -a_n x_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par conséquent

$$D(A) \subseteq \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p \mid (a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p\}$$

et pour tout $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in D(A)$ on a :

$$A(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (-a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}.$$

Pour l'inclusion inverse, on considéré $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p$ tel que $(a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p$. On voit que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_n|^p < \infty$, donc cet série est convergente. Alors pour tout $t > 0$ on a :

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{T(t)(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} - (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}}{t} + (a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \right\|_p^p \\ &= \left\| \frac{(e^{-a_n t} x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} - (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}}{t} + (a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \right\|_p^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{-a_n t} x_n - x_n}{t} + a_n x_n \right|^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{-a_n t} - 1}{a_n t} + 1 \right|^p |a_n x_n|^p \end{aligned}$$

Considérons l'application

$$g(x) = \frac{e^{-x} - 1}{x} + 1, \quad \forall x > 0$$

Alors

$$g'(x) = \frac{-x e^{-x} - e^{-x} + 1}{x^2}, \quad \forall x > 0$$

Pour l'application

$$h(x) = -x e^{-x} - e^{-x} + 1, \quad \forall x \geq 0$$

on voit que $h'(x) \geq 0$, pour tout $x \geq 0$. Compte tenu de la monotonie de la fonction h sur l'intervalle $[0, \infty[$, on déduit que $g'(x) > 0$, pour tout $x > 0$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1,$$

il vient

$$g(x) < 1, \quad \forall x > 0$$

Par suite

$$\left| \frac{e^{-a_n t} - 1}{a_n t} + 1 \right|^p |a_n x_n|^p < |a_n x_n|^p$$

et comme la série $\sum |a_n x_n|^p$ est convergente, avec le théorème de Weierstrass on déduit que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{-a_n t} - 1}{a_n t} + 1 \right|^p |a_n x_n|^p$$

est uniformément convergente. Par conséquent

$$\begin{aligned} \lim_{t \searrow 0} \left\| \frac{T(t)(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} - (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}}{t} + (a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \right\|_p^p \\ = \lim_{t \searrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{-a_n t} - 1}{a_n t} + 1 \right|^p |a_n x_n|^p = 0 \end{aligned}$$

D'où $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in D(A)$ et

$$A(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (-a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}.$$

Donc

$$\{(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p \mid (a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p\} \subseteq D(A)$$

Finalement on voit que

$$D(A) = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p \mid (a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p\}$$

et

$$A(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (-a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, \quad \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in D(A).$$

De plus, si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée, alors $D(A) = l_p$ et A est un opérateur linéaire borné. Donc il engendré un semi-groupe uniformément continu. Par contre, si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est non-bornée, alors il existe $(n_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ avec les propriétés $n_k > k$ et $a_{n_k} > k^\alpha$ pour tout

$k \in \mathbb{N}^*$, ou $\alpha = 1$ pour $p > 1$ et $\alpha > 1$ pour $p = 1$.

Définissons la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{k^\alpha} & , \quad n = n_k \\ 0 & , \quad n \neq n_k \end{cases}$$

Il est évident que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in l_p$, mais $(a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \notin l_p$. Par suite, dans ce cas, on a $D(A) \neq l_p$ et, par conséquent, A ne peut pas engendrer un semi-groupe uniformément continu sur l_p .

Définition 3.4.1.

On dit que $(T(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de type (M, w) avec $M \geq 1$ et $w \in \mathbb{R}^*$.

Si

$$\forall t \geq 0, \quad \|T(t)\| \leq M e^{wt}.$$

$(T(t))_{t \geq 0}$ est un C_0 - semi-groupe de contraction si de type $(1, 0)$, i.e :

$$\forall t \geq 0, \quad \|T(t)\| \leq 1.$$

Corollaire 3.4.1.

Si $(T(t))_{t \geq 0}$ est un C_0 - semi-groupe, Alors l'application :

$$[0, +\infty[\ni t \rightarrow T(t)x \in X$$

est continue sur $[0, +\infty[$ quel que soit $x \in X$.

Preuve.

Soient $t_0, h \in [0, +\infty[$ et $x \in X$ si $t_0 < h$, nous avons :

$$\begin{aligned} \|T(t_0 + h)x - T(t_0)x\| &= \|T(t_0)T(h)x - T(t_0)x\| \\ &\leq \|T(t_0)\| \|T(h)x - x\| \\ &\leq M e^{wt_0} \|T(h)x - x\| \end{aligned}$$

si $t_0 > h$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|T(t_0 - h)x - T(t_0)x\| &= \|T(t_0 - h)x - T(t_0 - h + h)x\| \\ &= \|T(t_0 - h)x - T(t_0 - h)T(h)x\| \\ &\leq \|T(t_0 - h)\| \|T(h)x - x\| \\ &\leq M e^{w(t_0 - h)} \|T(h)x - x\| \end{aligned}$$

la continuité forte en t_0 de l'application considérée dans l'énoncé est évident. \square

Corollaire 3.4.2.

Si $(T(t))_{t \geq 0}$ est un C_0 - semi-groupe, alors l'application $(t, x) \rightarrow T(t)x$ est conjointement continue sur $[0, +\infty[\times X$ dans X .

Preuve.

Soit $x, y \in X$, $t \geq 0$ et $h \in \mathbb{R}^*$

- cas 1 Si $h > 0$. on a :

$$\begin{aligned} \|T(t+h)y - T(t)x\| &\leq \|T(t+h)y - T(t+h)x\| + \|T(t+h)x - T(t)x\| \\ &\leq \|T(t+h)\| \|y - x\| + \|T(t+h)x - T(t)x\| \\ &\leq Me^{(t+h)\omega} \|y - x\| + \|T(t)\| \|T(h)x - x\| \end{aligned}$$

on obtient :

$$\lim_{(h,y) \rightarrow (0^+, x)} T(t+h)y = T(t)x.$$

- cas 2 Si $h < 0$. on a :

$$\begin{aligned} \|T(t+h)y - T(t)x\| &= \|T(t+h)y - T(t+h)T(-h)x\| \\ &\leq \|T(t+h)\| \|y - T(-h)x\| \\ &\leq Me^{(t+h)\omega} \left(\|y - x\| + \|T(-h)x - x\| \right) \end{aligned}$$

on a :

$$\lim_{(h,y) \rightarrow (0^-, x)} T(t+h)y = T(t)x.$$

\square

Théorème 3.4.1. [17]

Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 - semi-groupe sur un espace de Banach X et A son générateur infinitésimal. Alors :

- $\overline{D(A)} = X$
- A est un opérateur fermé.

Preuve.

- Soient $x \in X$ et $t_n > 0$ avec $n \in \mathbb{N}$, tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$. Alors :

$$x_n = \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} T(s)x ds \in D(A), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} T(s)x ds = T(0)x = x$$

Par conséquent $\overline{D(A)} = X$. (Grâce de Lemme 3.1.1)

- Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y$. Alors :

$$\|T(s)Ax_n - T(s)y\| \leq \|T(s)\| \|Ax_n - y\| \leq Me^{ws} \|Ax_n - y\|$$

quel que soit $s \in [0, t]$. Par suite $T(s)Ax_n \rightarrow T(s)y$, pour $n \rightarrow \infty$, uniformément par rapport à $s \in [0, t]$. D'autre part, puisque $x_n \in D(A)$, nous avons :

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds,$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [T(t)x_n - x_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t T(s)Ax_n ds,$$

ou bien :

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y ds.$$

Finalement, on voit que :

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)y ds = y.$$

pour $x \in D(A)$ et $Ax = y$, il résulte que A est un opérateur fermé.

□

Théorème 3.4.2. [20]

Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe de type (M, w) et $(A, D(A))$ sont générateur infinitésimal. Alors on a :

- Si $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(s)x ds$ existe pour tout $x \in X$. Alors

$$R(\lambda, A) = R(\lambda), \quad \forall \lambda \in \rho(A)$$

- Si $\operatorname{Re} \lambda > w$. Alors $\lambda \in \rho(A)$ et

$$R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(s) ds.$$

-

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re} \lambda - w}, \quad \forall \operatorname{Re} \lambda > w$$

3.5 Théorème de HILLE-YOSIDA

Théorème 3.5.1. [20]

Pour tout opérateur linéaire $(A, D(A))$ sur un espace de Banach X , les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $(A, D(A))$ générateur de C_0 - semi-groupe de contraction.
2. • A est fermé et $D(A)$ dense dans X
 • Pour tout $\lambda > 0$ on a :

$$\lambda \in \rho(A) \quad \text{et} \quad \|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\| \leq 1$$

Preuve.

1 \Rightarrow 2 Soit $(A, D(A))$ un générateur du C_0 - semi-groupe de contraction. Alors on a, A fermé et $D(A)$ dense dans X . (Grâce au Théorème 3.4.1)

D'autre part, à partir du Théorème 3.4.2 on a

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - w}, \quad \forall \operatorname{Re}\lambda > w$$

comme A est le générateur du C_0 - semi-groupe de contraction. Alors $w = 0$ et $M = 1$, cela implique que $\lambda > w$ et

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda - 0} = \frac{1}{\lambda}$$

2 \Rightarrow 1 pour cela on a besoin des lemmes suivants.

Lemme 3.5.1. [17]

Soit A un opérateur qui vérifie la condition 2 du Théorème de Hille-Yosida 3.5.1. Alors :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x; \quad \forall x \in X$$

Preuve.

Soit $x \in D(A)$. Alors :

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda, A)x - x\| &= \|AR(\lambda, A)x\| && (\text{car } A, R(\lambda, A) \text{ commute}) \\ &= \|R(\lambda, A)Ax\| && (\text{car } A, R(\lambda, A) \text{ borné}) \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \rightarrow 0, && \text{lorsque } \lambda \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Mais, $D(A)$ est dense dans X , Alors : si $\lambda \rightarrow \infty$ on a $\lambda R(\lambda, A)x \rightarrow x$ pour tout $x \in X$. \square

Remarque 3.5.1.

On a défini l'approximation de Yosida de A comme suit :

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I; \quad \forall \lambda > 0$$

Lemme 3.5.2. [17]

Soit A un opérateur qui vérifie le condition 2 de Théorème de Hille-Yosida 3.5.1. si A_λ l'approximation de Yosida de A . Alors on a :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax, \quad \forall x \in D(A).$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda AR(\lambda, A)x; \quad \forall \lambda > 0 \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)Ax \\ &= Ax \end{aligned}$$

\square

Lemme 3.5.3. [17]

Soit A un opérateur qui vérifie le condition 2 de Théorème de Hille-Yosida 3.5.1. si A_λ l'approximation de Yosida de A . Alors A_λ est le générateur de C_0 -semi-groupe de contraction e^{tA_λ} . et

$$\|e^{tA_\lambda} - e^{tA_\mu}\| \leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\|, \quad \forall \lambda, \mu > 0, \quad \forall x \in X.$$

Preuve.

Il est clair que A_λ est un opérateur linéaire borné et générateur de C_0 -semi-groupe, on a :

$$\|e^{tA_\lambda}\| \leq e^{-\lambda t} \|e^{t\lambda^2 R(\lambda, A)}\| \leq e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2 \|R(\lambda, A)\|} \leq 1$$

Ce que implique que e^{tA_λ} est un C_0 - semi-groupe de contraction.

Par définition on sait que $(e^{tA_\lambda}, e^{tA_\mu})$ et (A_λ, A_μ) commute. Alors :

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} \left(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x \right) ds \right\| \\ &\leq \int_0^1 t \|e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} (A_\lambda x - A_\mu x)\| ds \\ &\leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\| \end{aligned}$$

□

On revient à la démonstration. 2 \Rightarrow 1

Soit $x \in D(A)$. Alors

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| &\leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\| \\ &\leq t \|A_\lambda x - Ax\| + t \|Ax - A_\mu x\| \end{aligned} \quad (3.4)$$

de (3.4) et le lemme 3.5.2 on a : pour tout $x \in D(A)$

$e^{tA_\lambda}x$ convergent lorsque $\lambda \rightarrow \infty$. et cet convergence est uniform sur un intervalle borné. De plus $D(A)$ est dense dans X et $\|e^{tA}\| \leq 1$. Alors on obtient

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x; \quad \forall x \in X$$

De plus cet limite est continu uniforme sur un interval borné. Alors $T(t)x$ vérifie la propriété de semi-groupe et :

$$T(0)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{0A_\lambda}x = x; \quad \forall x \in X$$

$$T(0) = I$$

on a donc :

$$\|T(t)\| \leq 1$$

et $t \rightarrow T(t)x$ continu pour tout $t \geq 0$, comme limite d'une fonction uniforme continus $t \rightarrow e^{tA_\lambda}x$.

Alors $T(t)$ est de C_0 - semi-groupe de contraction sur X .

Enfin, il suffit démontrer que A est un générateur infinitésimal de $T(t)$.

Soit $x \in D(A)$. On a :

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x - x \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x ds \\ &= \int_0^t T(s)Ax ds \end{aligned}$$

(car la converge uniforme de $e^{tA_\lambda} A_\lambda x$ vers $T(t)Ax$ sur un intervalle borné)

Soit B un générateur infinitésimal de $T(t)$.

Soit $x \in D(B)$ et $Ax = Bx$ et $A \subseteq B$.¹

Puisque B infinitésimal de $T(t)$, alors par la condition nécessaire on a

$$1 \in \rho(B)$$

D'autre part, de la condition 2 dans la Théorème de Hille-Yosida 3.5.1 on a

$1 \in \rho(A)$ et comme $A \subseteq B$, Alors :

$$(I - B)D(A) = (I - A)D(A) = x$$

$$D(B) = (I - B)^{-1}x = D(A)$$

donc

$$A = B$$

□

1. Si A, B sont deux opérateurs non bornés de domaines $D(A), D(B)$, on note $A \subset B$ lorsque $D(A) \subset D(B)$ et $B|_{D(A)} = A$.

3.6 Semi-Groupes dans un Espace de Hilbert

3.6.1 Préliminaires

Définition 3.6.1.

On dit qu'un opérateur non borné A sur un espace de Hilbert H est coercif s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\operatorname{Re}\langle Au, u \rangle \geq C\|u\|^2, \quad \forall u \in D(A).$$

Lemme 3.6.1.

Un opérateur non borné $A : D(A) \rightarrow H$ coercif et fermé admet un inverse continu

$$A^{-1} : H \rightarrow D(A)$$

(de norme inférieur à C^{-1} ou C est la constante de coercivité).

Remarque 3.6.1.

Si $D(A) = H$ et $A \in L(H)$ est borné alors il est automatiquement fermé.

Preuve.

On commence par remarquer que A est injectif car par Cauchy-Schwarz

$$\|u\| \leq C^{-1}\|Au\|, \quad u \in D(A) \tag{3.5}$$

De plus, si A est inversible alors, de l'inégalité précédente, on déduit

$$\|A^{-1}v\| \leq C^{-1}\|v\|$$

que A^{-1} est borné. Il suffit donc de montrer que A est surjectif. De l'inégalité

$$\operatorname{Re}\langle Au, u \rangle \geq C\|u\|^2$$

on tire que $(\operatorname{Im}A)^\perp = 0$ et donc $H = \overline{\operatorname{Im}A}$. Il reste à montrer que l'image de A est fermée; ceci découle du fait que si $(v_n = Au_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergeant vers v dans H alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy (grâce à (3.5)). Comme A est fermé et comme la suite $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du graphe de A converge vers (u, v) on a $v = Au$, ce qui montre que $\operatorname{Im}A$ est fermé. Finalement

$$\operatorname{Im}A = \overline{\operatorname{Im}A} = H.$$

□

Lemme 3.6.2.

L'adjoint A^* d'un opérateur A à domaine dense est fermé.

Preuve.

Soit $(u_n, v_n = A^*u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite du graphe de l'adjoint A^* de A convergeant dans $H \times H$ vers (u, v) . Soit $\varphi \in D(A)$, on a

$$\langle v - A^*u, \varphi \rangle = \langle v, \varphi \rangle - \langle u, A\varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A^*u_n, \varphi \rangle - \langle u_n, A\varphi \rangle = 0.$$

Comme $D(A)$ est dense dans H , cela implique que $v = A^*u$ et donc ImA^* fermée. \square

3.6.2 Théorème de Lumer-Phillips**Définition 3.6.2.**

Un opérateur non borné est dissipatif si

$$Re\langle Au, u \rangle \leq 0, \quad u \in D(A).$$

Il est maximal dissipatif si en plus il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $A - \lambda_0 I$ soit surjectif.

Remarque 3.6.2.

En fait $A - \lambda_0 I$ est bijectif d'inverse continu car

$$-Re\langle (A - \lambda_0 I)u, u \rangle \geq \lambda_0 \|u\|^2$$

implique que $A - \lambda_0 I$ est injectif et de plus par Cauchy-Schwarz

$$\|(A - \lambda_0 I)u\| \geq \lambda_0 \|u\|$$

ce qui implique que $\|(A - \lambda_0 I)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda_0}$.

Lemme 3.6.3.

Soit A un opérateur maximal dissipatif et B un opérateur dissipatif, si $A \subset B$ alors $A = B$.

Preuve.

Soit $v \in D(B)$, il existe $u \in D(A)$ tel que $(B - \lambda I)v = (A - \lambda I)u$ et comme $Au = Bu$, on a $(B - \lambda I)(v - u) = 0$. Or B est dissipatif donc

$$0 = -\langle (B - \lambda I)(v - u), v - u \rangle \geq \lambda \|v - u\|^2$$

ce qui implique $u = v$ et donc $v \in D(A)$. Ceci donne $D(A) = D(B)$ et $A = B$. \square

Remarque 3.6.3.

Ce lemme justifie la dénomination de maximal dissipatif : il n'y a pas d'opérateur dissipatif B plus grand pour la relation d'ordre (\subset) qu'un opérateur maximal dissipatif.

Lemme 3.6.4. [11]

Un opérateur maximal dissipatif est à domaine dense.

Preuve.

Soit $v \in D(A)^\perp$, comme $A - \lambda_0 I$ est surjectif, il existe $u \in D(A)$ tel que

$$v = (A - \lambda_0 I)u$$

On a alors

$$0 = \operatorname{Re}\langle u, v \rangle = \operatorname{Re}\langle Au, u \rangle - \lambda_0 \|u\|^2 \leq -\lambda_0 \|u\|^2$$

ce qui implique $u = 0$ et $v = 0$. Ainsi $D(A)^\perp = \{0\}$ et donc $D(A)$ est dense dans H . □

Lemme 3.6.5. [11]

Soit A un opérateur maximal dissipatif, alors il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $(A - \lambda I)$ soit inversible, d'inverse continu pour tout $\lambda \geq \lambda_0$.

Preuve.

D'après la remarque 3.6.2, $A - \lambda_0 I$ est inversible, d'inverse $R(\lambda_0; A)$ borné. on a :

$$(A - \lambda I) = (A - \lambda_0 I - (\lambda I - \lambda_0 I)) = (A - \lambda_0 I) \left(I - (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0; A) \right)$$

il suffit donc de montrer que l'opérateur borné

$$T_\lambda = I - (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0; A) \in L(H)$$

est inversible, d'inverse continu pour tout $\lambda \geq \lambda_0$. Or on a

$$\langle T_\lambda u, u \rangle = \|u\|^2 - (\lambda - \lambda_0) \langle R(\lambda_0; A)u, u \rangle \geq \|u\|^2$$

ce qui implique que T_λ est coercif et par le Lemme 3.6.1 que $T_\lambda \in L(H)$ est inversible, d'inverse continu. □

Théorème 3.6.1. (Lumer-Phillips) [15]

Un opérateur non borné à domaine dense dans un espace de Hilbert, est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu de contraction si et seulement s'il est maximal dissipatif.

Preuve.

Si A est à domaine dense et maximal dissipatif alors A vérifie les hypothèses du Théorème de Hille-Yosida, et il existe donc un unique semi-groupe de contraction associé à A . Réciproquement si A est le générateur infinitésimal d'un semi groupe de contraction alors, pour tout $u \in D(A)$, par Cauchy-Schwarz

$$\operatorname{Re} \left\langle \frac{S(t)u - u}{t}, u \right\rangle \leq \frac{1}{t} \left(\|S(t)u\| \|u\| - \|u\|^2 \right) \leq 0$$

et en faisant tendre t vers 0, on obtient que A est dissipatif. Par le Théorème 3.4.2, A est maximal dissipatif. \square

Théorème 3.6.2. (Lumer-Phillips) [15]

Soit A un opérateur non borné de domaine dense. A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction si et seulement si A et son adjoint A^* sont dissipatifs.

Preuve.

Supposons que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction alors A^* est dissipatif. Si $u \in D(A) \cap D(A^*)$ alors on a

$$\operatorname{Re} \langle A^*u, u \rangle = \operatorname{Re} \langle u, Au \rangle \leq 0.$$

Le cas ou $u \in D(A^*)$ est un différent. Soit $u \in D(A^*)$ et $\lambda > 0$, si l'on note

$$u_\lambda = -\lambda R(\lambda; A)u$$

On a

$$u_\lambda \in D(A) \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} u_\lambda = u$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle A^*u, u_\lambda \rangle &= \operatorname{Re} \langle u, Au_\lambda \rangle = -\frac{1}{\lambda} \operatorname{Re} \langle (A - \lambda I)u_\lambda, Au_\lambda \rangle \\ &= \operatorname{Re} \langle u_\lambda, Au_\lambda \rangle - \frac{1}{\lambda} \|Au_\lambda\|^2 \leq 0 \end{aligned}$$

converge vers $\langle A^*u, u \rangle$ qui est par conséquent négatif. Ce qui implique le caractère dissipatif de A^* .

Démontrons à présent la réciproque. On suppose que A et son adjoint A^* sont dissipatifs. En particulier $(A^* - I)$ est coercif, d'après le Lemme 3.6.2 c'est un opérateur fermé donc d'après le Lemme 3.6.1, il est inversible d'inverse continu.

Par conséquent A^* est maximal dissipatif, en particulier à domaine dense (Lemme 3.6.4). On peut alors répéter l'argument précédent en remplaçant A^* par A pour en déduire que A est maximal dissipatif. \square

Lemme 3.6.6. [11]

L'adjoint A^* d'un opérateur maximal dissipatif A est à domaine dense.

Preuve.

Comme A est maximal dissipatif, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $R(\lambda_0; A) \in L(H)$ existe et comme

$$R^*(\lambda_0; A) = (A^* - \lambda_0 I)^{-1}$$

On a

$$ImR^*(\lambda_0) \subset D(A^*).$$

Or

$$\left(ImR^*(\lambda_0)\right)^\perp = kerR(\lambda_0; A) = \{0\}$$

donc $ImR^*(\lambda_0; A)$ est dense, par conséquent $D(A^*)$ est également. \square

3.6.3 Semi-Groupes Unitaires et Théorème de Stone

Définition 3.6.3.

On dit qu'un opérateur non borné à domaine dense A est auto-adjoint, si $D(A) = D(A^*)$ et si $A = A^*$. On dit qu'il est anti-adjoint si $D(A) = D(A^*)$ et si $A = -A^*$.

Remarque 3.6.4.

D'après le Théorème 3.6.2, les opérateurs auto-adjoints dissipatifs à domaine dense et les opérateurs anti-adjoints à domaine dense sont les générateurs infinitésimaux d'un semi-groupe de contraction.

Lemme 3.6.7.

La fonction ;

$$\begin{aligned} S^* : [0, +\infty[&\rightarrow L(E) \\ t &\rightarrow S^*(t) = S(t)^* \end{aligned}$$

obtenue par adjonction d'un semi-groupe de contraction fortement continu S est un semi groupe de contraction fortement continu dont le générateur infinitésimal est l'adjoint A^* du générateur infinitésimal A du semi-groupe de départ S .

Preuve.

Soit S un semi-groupe de contraction fortement continu. Alors S^* est un semi-groupe de contraction

$$\begin{aligned} S^*(t+t') &= (S(t+t'))^* = (S(t)S(t'))^* = S^*(t')S^*(t), & S^*(0) &= I, \\ \|S^*(t)\| &= \|S(t)\| \leq 1. \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\|S^*(t)u - u\|^2 \leq 2\|u\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle S^*(t)u, u \rangle = 2\|u\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle u, S(t)u \rangle$$

pour tout $u \in H$. On en déduit que S^* est fortement continu, car le terme de droite tend vers 0 lorsque t tend vers 0.

Soit B le générateur infinitésimal de S^* , soit $u \in D(B)$ et soit $v \in D(A)$, on a :

$$\langle Bu, v \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \langle S^*(t)u - u, v \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \langle u, S(t)v - v \rangle = \langle u, Av \rangle.$$

On en déduit que la forme linéaire $u \rightarrow \langle Bu, v \rangle$ est bornée par $\|Av\|$, et donc que $u \in D(A^*)$ ainsi que $Bu = A^*u$.

Soit $u \in D(A^*)$ et $v \in D(A)$, en intégrant $\frac{d(Su)}{dt} = Au$ on a

$$\langle S(t)v - v, u \rangle = \int_0^t \langle AS(\tau)v, u \rangle d\tau$$

ce qui donne par adjonction :

$$\langle u, S^*(t)v - v \rangle = \int_0^t \langle v, S(\tau)^* A^* u \rangle d\tau$$

et comme $D(A)$ est dense dans H , on en déduit $S(t)^*u - u = \int_0^t S(\tau)^* A^* u d\tau$.

Ceci permet de conclure que $u \in D(B)$ et $A^*u = Bu$. Ainsi a-t-on $D(A^*) = D(B)$ et $A^* = B$. □

Définition 3.6.4.

Soit S un semi-groupe fortement continu, on dit que S est unitaire, si

$$S(t)^*S(t) = S(t)S^*(t) = I, \quad \forall t \geq 0.$$

Théorème 3.6.3. (Stone)[20]

Un opérateur non borné A à domaine dense $D(A)$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu unitaire si et seulement si A est anti-adjoint, i.e. $D(A^*) = D(A)$ et $A^* = -A$.

Remarque 3.6.5.

A est un opérateur anti-adjoint si et seulement si iA est auto-adjoint. D'après le Lemme 3.6.2, un opérateur non borné à domaine dense qui est auto-adjoint ou anti-adjoint est fermé.

Preuve.

Soit S un semi-groupe fortement continu unitaire, pour tout $u \in D(A)$ on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)^*u - u}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} S^*(t) \left(\frac{u - S(t)u}{t} \right) = -Au$$

On en déduit que $D(A) \subset D(A^*)$ et que $A^*u = -Au$ pour tout $u \in D(A)$. En intervertissant les rôles de S et S^* on obtient que A est anti-adjoint.

Réciproquement, supposons que A soit un opérateur anti-adjoint. On calcule

$$-Re\langle (A - I)u, u \rangle = \|u\|^2$$

lorsque $u \in D(A)$. On en déduit que $A - I$ est coercif, et qu'il n'est pas difficile de voir qu'il est fermé car A est fermé (voir Remarque 3.6.5) donc $(A - I)$ est inversible, d'inverse continu d'après le Théorème 3.6.1. Par conséquent A est maximal dissipatif.

On note S le semi-groupe engendré par A . En calculant la dérivée

$$\frac{d}{dt} \|S(t)u\|^2 = 2Re\langle AS(t)u, S(t)u \rangle = 0$$

on obtient

$$\|S(t)u\|^2 = \|S(0)u\|^2 = \|u\|^2$$

ce qui implique que $S(t)$ est unitaire. □

On peut alors définir un prolongement $U : \mathbb{R} \rightarrow L(E)$ du semi-groupe de la manière suivante

$$U(t) = \begin{cases} S(t) & \text{si } t \geq 0 \\ S(-t)^* & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

On vérifie facilement que $U(t)$ est inversible pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$U(t)^{-1} = U(-t)$$

ce qui implique que U est un groupe :

$$U(t + t') = U(t)U(t')$$

pour tout $t, t' \in \mathbb{R}$. En outre, on a

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = AU \\ U(0) = I \end{cases}$$

3.7 Semi-groupes de Matrices

Soit L'espace vectoriel $X = \mathbb{C}^n.L(X)$, l'espace des opérateurs linéaires sur X identique avec l'espace $M_n(\mathbb{C})$ des matrices $n \times n$ des coefficients complexe.

Définition 3.7.1.

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $t \in \mathbb{R}$, on défini l'exponentielle de la matrice A comme suit :

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

D'autre part. On a

$$\|e^{tA}\| \leq e^{t\|A\|} < \infty$$

Alors e^{tA} est absolument convergente.

Proposition 3.7.1.

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$. L'application

$$\mathbb{R}_+ \ni t \rightarrow e^{tA} \in M_n(\mathbb{C})$$

continue et satisfait

$$\begin{cases} e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}, & \forall t, s \geq 0 \\ e^{0A} = I. \end{cases}$$

Définition 3.7.2.

On note par $(e^{tA})_{t \geq 0}$ le semi-groupe engendré par la matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Remarque 3.7.1.

Soit $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ telle que X, Y commutent (i.e, $XY = YX$) Alors,

$$e^{X+Y} = e^X e^Y$$

Exemples

- le semi-groupe engendré par la matrice diagonale $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ est donné par

$$e^{tA} = \text{diag}(e^{ta_1}, \dots, e^{ta_n})$$

- Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On définit $\delta = ad - bc$, $\tau = a + d$ et $\gamma \in \mathbb{C}$ telle que $\gamma^2 = \frac{1}{4}(\tau^2 - 4\delta)$.

Alors A est générateur de semi-groupe donné par

$$e^{tA} = \begin{cases} e^{\frac{t\tau}{2}} \left(\frac{1}{\gamma} \sinh(t\gamma)A + (\cosh(t\gamma) - \frac{2\tau}{\gamma} \sinh(t\gamma))I \right) & \text{Si } \gamma \neq 0 \\ e^{\frac{t\tau}{2}} \left(tA + \left(1 - \frac{t\tau}{2}\right)I \right) & \text{Si } \gamma = 0 \end{cases}$$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e^{tA} = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $e^{tA} = \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}$

Lemme 3.7.1.

Soit $B \in M_n(\mathbb{C})$ et soit $S \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible. Alors le semi-groupe engendré par la matrice $A = S^{-1}BS$ est donné par

$$e^{tA} = S^{-1}e^{tB}S$$

Preuve.

Puisque $A^k = S^{-1}B^kS$ pour tout $k \in \mathbb{N}$; on a aussi S^{-1}, S des opérateurs continus. Alors

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k S^{-1}B^kS}{k!} \\ &= S^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k B^k}{k!} \right) S = S^{-1}e^{tB}S. \end{aligned}$$

□

Remarque 3.7.2.

le lemme précédent prouve que les matrices similaires engendré des semi-groupes similaires.

Chapitre 4

Les Semi-Groupes des Opérateurs de Toeplitz

L'opérateur de Toeplitz tronqué A est borné. Alors A est infinitésimal générateur d'un semi-groupe uniformément continu $(T(t))_{t \geq 0}$. (grâce au Théorème 3.2.1) est donné par

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

4.1 Cas Général

Si $u(z) = z^n$ et $\varphi \in L^2$, la famille $\mathcal{S} = \{1, z, z^2, \dots, z^n\}$ est une base orthogonale de K_u^2 et la matrice A de l'opérateur de Toeplitz tronqué A_φ relativement à la base \mathcal{S} est donné par $A = (a_{kj})_{0 \leq k, j \leq n-1}$ telle que

$$a_{kj} = \widehat{\varphi}(k - j)$$

Donc

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & \cdots & \cdots & a_{-n+2} & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & \ddots & & & a_{-n+2} \\ a_2 & a_1 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_0 & a_{-1} \\ a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

On décompose la matrice A sous la forme :

$$A = a_0I + M + U$$

telles que :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & \ddots & & 0 \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$U = \begin{pmatrix} 0 & a_{-1} & \cdots & a_{-n+2} & a_{-n+1} \\ 0 & 0 & \ddots & & a_{-n+2} \\ 0 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque 4.1.1.

M et U ne commutent pas.

Les matrices M et U commutent si et seulement si $M = 0$ ou $U = 0$.

Cette condition exprime le fait que la matrice A est triangulaire inférieure ou triangulaire supérieure.

4.1.1 Cas 1 : A triangulaire inférieure

Soit A_φ un opérateur de Toeplitz tronqué, telle que sa matrice est triangulaire inférieure.

Remarque 4.1.2.

La matrice d'opérateur de Toeplitz A_φ est triangulaire inférieure si le symbole φ dans H^2 .

Alors on a :

$$\begin{aligned} A &= a_0I + M + U \\ &= a_0I + a_1D + a_2D^2 + \cdots + a_{n-1}D^{n-1} \end{aligned}$$

telle que :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les matrices D^k , $1 \leq k \leq n-1$ commutent. Donc on a :

$$e^{tA} = e^{ta_0 I} e^{ta_1 D} e^{ta_2 D^2} \dots e^{ta_{n-1} D^{n-1}}$$

Mais,

$$e^{ta_0 I} = e^{ta_0} I$$

Alors on a :

$$e^{tA} = e^{ta_0} \prod_{l=1}^{n-1} e^{ta_l D^l}$$

Calcul de $e^{ta_1 D}$

$$e^{ta_1 D} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ta_1)^k}{k!} D^k = I + ta_1 D + \frac{(ta_1)^2}{2!} D^2 + \frac{(ta_1)^3}{3!} D^3 + \dots + \frac{(ta_1)^{n-1}}{(n-1)!} D^{n-1}.$$

(car $\forall k \geq n, D^k = 0$)

La matrice triangulaire inférieure $B_1 = e^{ta_1 D}$ de Toeplitz. Donc, nous avons juste besoin de donner la première colonne

$$(b_{i1}^1)_{1 \leq i \leq n} = \begin{pmatrix} 1 \\ ta_1 \\ \frac{(ta_1)^2}{2!} \\ \vdots \\ \frac{(ta_1)^{n-1}}{(n-1)!} \end{pmatrix}$$

telle que b^s les coefficients de la matrice B_s .

Calcul de $e^{ta_s D^s}$, pour $2 \leq s \leq n-1$

$$e^{ta_s D^s} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ta_s)^k}{k!} (D^s)^k = I + ta_s D^s + \frac{(ta_s)^2}{2!} (D^s)^2 + \frac{(ta_s)^3}{3!} (D^s)^3 + \dots + \frac{(ta_s)^r}{(r)!} (D^s)^r.$$

telle que :

$$r = \begin{cases} \frac{n-1}{s}, & \text{Si } \frac{n-1}{s} \in \mathbb{N} \\ \lceil \frac{n-1}{s} \rceil, & \text{Sinon} \end{cases}$$

$[\alpha]$ la partie entière de α .

La matrice triangulaire inférieure $B_s = e^{ta_s D^s}$ de Toeplitz. Donc, nous avons juste besoin de donner la première colonne

$$\text{Si } r = \frac{n-1}{s}, \quad (b_{i1}^s)_{1 \leq i \leq n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{s+1,1}^s = \mathbf{t a}_s \\ 0 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{2s+1,1}^s = \frac{(ta_s)^2}{2!} \\ 0 \\ \mathbf{b}_{n,1}^s = \frac{(ta_s)^r}{(r)!} \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } r = \left\lceil \frac{n-1}{s} \right\rceil, \quad (b_{i1}^s)_{1 \leq i \leq n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{s+1,1}^s = \mathbf{t a}_s \\ 0 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{rs+1,1}^s = \frac{(ta_s)^2}{2!} \\ 0 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{rs+1,1}^s = \frac{(ta_s)^r}{(r)!} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors le semi-groupe $T(t) = e^{tA}$ engendré par A est donné par

$$e^{tA} = e^{ta_0} \prod_{l=1}^{n-1} B_l.$$

4.1.2 Calcul de $\prod_{l=1}^{n-1} B_l$

Pour calculer ce produit, nous utilisons la méthode suivante :

$$\begin{aligned} Y_1 &= B_1 B_2 \\ Y_2 &= Y_1 B_3 \\ Y_3 &= Y_2 B_4 \\ &\vdots \\ Y_{n-2} &= Y_{n-3} B_{n-1} \end{aligned}$$

Calcul de Y_1

On a $Y_1 = B_1 B_2$, où

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ ta_1 & & \ddots & & & 0 \\ \frac{(ta_1)^2}{2!} & ta_1 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \frac{(ta_1)^{n-1}}{(n-1)!} & \cdots & \cdots & \frac{(ta_1)^2}{2!} & ta_1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\text{Si } r = \frac{n-1}{2}, \quad (b_{i1}^2)_{1 \leq i \leq n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ta_2 \\ 0 \\ \mathbf{b}_{5,1}^2 = \frac{(ta_2)^2}{2!} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{n,1}^2 = \frac{(ta_2)^r}{r!} \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } r = \left[\frac{n-1}{2} \right], \quad (b_{i1}^2)_{1 \leq i \leq n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ta_2 \\ 0 \\ \mathbf{b}_{5,1}^2 = \frac{(ta_2)^2}{2!} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{2r+1,1}^2 = \frac{(ta_2)^r}{r!} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors la matrice Y_1 s'écrit sous la forme

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ ta_1 & & \ddots & & & 0 \\ y_{31}^1 & ta_1 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ y_{41}^1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ y_{n1}^1 & \cdots & y_{41}^1 & y_{31}^1 & ta_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc, nous avons juste besoin de calculer la première colonne de la matrice Y_1 . Alors

$$y_{k1}^1 = \sum_{j=1}^n b_{kj}^1 b_{j1}^2 \quad k = 3, 4, \dots, n$$

telle que y^s les coefficients de la matrice Y_s .

Calcul de Y_2

On a $Y_2 = Y_1 B_3$, où

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ ta_1 & & \ddots & & & 0 \\ y_{31}^1 & ta_1 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ y_{41}^1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ y_{n1}^1 & \cdots & y_{41}^1 & y_{31}^1 & ta_1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\text{Si } r = \frac{n-1}{3}, \quad (b_{i1}^3)_{1 \leq i \leq n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mathbf{b}_{4,1}^3 = \mathbf{ta}_3 \\ 0 \\ \mathbf{b}_{7,1}^3 = \frac{(\mathbf{ta}_3)^2}{2!} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{n,1}^3 = \frac{(\mathbf{ta}_3)^r}{r!} \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } r = \left[\frac{n-1}{3} \right], \quad (b_{i1}^3)_{1 \leq i \leq n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mathbf{b}_{4,1}^3 = \mathbf{ta}_3 \\ 0 \\ \mathbf{b}_{7,1}^3 = \frac{(\mathbf{ta}_3)^2}{2!} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{3r+1,1}^3 = \frac{(\mathbf{ta}_3)^r}{r!} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors la matrice Y_2 s'écrit sous la forme

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \mathbf{ta}_1 & & \ddots & & & 0 \\ y_{31}^1 & \mathbf{ta}_1 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ y_{41}^2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ y_{n1}^2 & \cdots & y_{41}^2 & y_{31}^1 & \mathbf{ta}_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc, nous avons juste besoin de calculer la première colonne de la matrice Y_2 . Alors

$$y_{k1}^2 = \sum_{j=1}^n y_{kj}^1 b_{j1}^3 \quad k = 4, \dots, n$$

Calcul de Y_3

On a $Y_3 = Y_2 B_4$, où

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ ta_1 & & \ddots & & & 0 \\ y_{31}^1 & ta_1 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ y_{41}^2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ y_{n1}^2 & \cdots & y_{41}^2 & y_{31}^1 & ta_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors la matrice Y_3 s'écrit sous la forme

$$Y_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ ta_1 & & \ddots & \ddots & & & 0 \\ y_{31}^1 & ta_1 & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ y_{41}^2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ y_{51}^3 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ y_{n1}^3 & \cdots & y_{51}^3 & y_{41}^2 & y_{31}^1 & ta_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc, nous avons juste besoin de calculer la première colonne de la matrice Y_2 . Alors

$$y_{k1}^3 = \sum_{j=1}^n y_{kj}^2 b_{j1}^4 \quad k = 5, \dots, n$$

Calcul de Y_{n-2}

On a $Y_{n-2} = Y_{n-3} B_{n-1}$, où

$$Y_{n-3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ ta_1 & & \ddots & \ddots & \ddots & & & 0 \\ y_{31}^1 & ta_1 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ y_{41}^2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ y_{51}^3 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ y_{n-1,1}^{n-3} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ y_{n1}^{n-3} & \cdots & \cdots & \cdots & y_{41}^2 & y_{31}^1 & ta_1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$B_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ ta_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Alors la matrice Y_{n-2} s'écrit sous la forme

$$Y_{n-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ ta_1 & & \ddots & \ddots & \ddots & & & 0 \\ y_{31}^1 & ta_1 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ y_{41}^2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ y_{51}^3 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ y_{n-1,1}^{n-3} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ y_{n1}^{n-2} & \cdots & \cdots & \cdots & y_{41}^2 & y_{31}^1 & ta_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc, nous avons juste besoin de calculer la première colonne de la matrice Y_{n-2} .

Alors

$$y_{n1}^{n-2} = \sum_{j=1}^n y_{nj}^{n-3} b_{j1}^{n-1} = y_{n1}^{n-3} + ta_{n-1}$$

Alors, on a

$$\prod_{l=1}^{n-1} B_l = Y_{n-2}$$

Donc le semi-groupe $T(t) = e^{tA}$ engendré par A est donné par

$$T(t) = e^{tA} = e^{ta_0} Y_{n-2}$$

Remarque 4.1.3.

La calculé des coefficients de la matrice Y_{n-2} est simple. car les matrices B_s sont des matrices creuser.

4.1.3 Cas 2 : A triangulaire supérieure

Soit A_φ un opérateur de Toeplitz tronqué telle que sa matrice est triangulaire supérieure.

Alors on a :

$$\begin{aligned} A &= a_0 I + M + U \\ &= a_0 I + a_{-1} N + a_{-2} N^2 + \dots + a_{-n+1} N^{n-1} \end{aligned}$$

telle que :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les matrices N^k , $1 \leq k \leq n-1$ commutent. Donc on a :

$$e^{tA} = e^{ta_0 I} e^{ta_{-1} N} e^{ta_{-2} N^2} \dots e^{ta_{-n+1} N^{n-1}}$$

Alors on a :

$$e^{tA} = e^{ta_0} \prod_{m=1}^{n-1} e^{ta_{-m} N^m}$$

Calcul de $e^{ta_{-1} N}$

$$e^{ta_{-1} N} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ta_{-1})^k}{k!} N^k = I + ta_{-1} N + \frac{(ta_{-1})^2}{2!} N^2 + \frac{(ta_{-1})^3}{3!} N^3 + \dots + \frac{(ta_{-1})^{n-1}}{(n-1)!} N^{n-1}.$$

(car $\forall k \geq n$, $N^k = 0$)

La matrice triangulaire supérieure $C_1 = e^{ta_{-1} N}$ de Toeplitz. Donc, nous avons juste besoin de donner la première ligne

$$(c_{1i}^1)_{1 \leq i \leq n} = \begin{pmatrix} 1 \\ ta_{-1} \\ \frac{(ta_{-1})^2}{2!} \\ \vdots \\ \frac{(ta_{-1})^{n-1}}{(n-1)!} \end{pmatrix}$$

telle que c^s les coefficients de la matrice C_s .

Calcul de $e^{ta_{-s}N^s}$, pour $2 \leq s \leq n-1$

$$e^{ta_{-s}N^s} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ta_{-s})^k}{k!} (N^s)^k = I + ta_{-s}N^s + \frac{(ta_{-s})^2}{2!} (N^s)^2 + \frac{(ta_{-s})^3}{3!} (N^s)^3 + \dots + \frac{(ta_{-s})^p}{p!} (N^s)^p.$$

tell que :

$$p = \begin{cases} \frac{n-1}{s}, & \text{Si } \frac{n-1}{s} \in \mathbb{N} \\ \lceil \frac{n-1}{s} \rceil, & \text{Sinon} \end{cases}$$

La matrice triangulaire supérieure $C_s = e^{ta_{-s}N^s}$ de Toeplitz. Donc, nous avons juste besoin de donner la première ligne

$$\text{Si } p = \frac{n-1}{s}, \quad (c_{1i}^s)_{1 \leq i \leq n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{1,s+1}^s = \mathbf{ta}_{-s} \\ 0 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{1,2s+1}^s = \frac{(ta_{-s})^2}{2!} \\ 0 \\ \mathbf{c}_{1,n}^s = \frac{(ta_{-s})^p}{(p)!} \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } p = \left\lceil \frac{n-1}{s} \right\rceil, \quad (c_{1i}^s)_{1 \leq i \leq n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{1,s+1}^s = \mathbf{ta}_{-s} \\ 0 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{1,2s+1}^s = \frac{(\mathbf{ta}_{-s})^2}{2!} \\ 0 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{1,ps+1}^s = \frac{(\mathbf{ta}_{-s})^p}{(p)!} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors le semi-groupe $T(t) = e^{tA}$ engendré par A est donné par

$$e^{tA} = e^{ta_0} \prod_{m=1}^{n-1} C_m$$

De la même façon que le cas triangulaire inférieure. On pose

$$\begin{aligned} W_1 &= C_1 C_2 \\ W_2 &= W_1 C_3 \\ W_3 &= W_2 C_4 \\ &\vdots \\ W_{n-2} &= W_{n-3} C_{n-1} \end{aligned}$$

Calcul de W_1

On a $W_1 = C_1 C_2$, où

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & ta_{-1} & \frac{(ta_{-1})^2}{2!} & \dots & \frac{(ta_{-1})^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{(ta_{-1})^2}{2!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & ta_{-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\text{Si } p = \frac{n-1}{2}, \quad (c_{1i}^2)_{1 \leq i \leq n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ta_{-2} \\ 0 \\ c_{1,5}^2 = \frac{(ta_{-2})^2}{2!} \\ \vdots \\ c_{1,n}^2 = \frac{(ta_{-2})^p}{p!} \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } p = \left[\frac{n-1}{2} \right], \quad (c_{1i}^2)_{1 \leq i \leq n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ta_{-2} \\ 0 \\ c_{1,5}^2 = \frac{(ta_{-2})^2}{2!} \\ \vdots \\ c_{1,2p+1}^2 = \frac{(ta_{-2})^p}{p!} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors la matrice W_1 s'écrit sous la forme

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 & ta_{-1} & w_{13}^1 & \cdots & w_{1n}^1 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & w_{13}^1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & ta_{-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc, nous avons juste besoin de calculer la première ligne de la matrice W_1 . Alors

$$w_{1k}^1 = \sum_{j=1}^n c_{1j}^1 c_{kj}^2 \quad k = 3, 4, \dots, n$$

telle que w^s les coefficients de la matrice W_s .

Calcul de W_2

On a $W_2 = W_1 C_3$, où

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 & ta_{-1} & w_{13}^1 & \cdots & w_{1n}^1 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & w_{13}^1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & ta_{-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors la matrice W_2 s'écrit sous la forme

$$W_2 = \begin{pmatrix} 1 & ta_{-1} & w_{13}^1 & w_{14}^2 & \cdots & w_{1n}^2 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & w_{14}^2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & w_{13}^1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & ta_{-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc, nous avons juste besoin de calculer la première ligne de la matrice W_2 . Alors

$$w_{1k}^2 = \sum_{j=1}^n w_{1j}^1 c_{kj}^3 \quad k = 4, \dots, n$$

Calcul de W_{n-2}

On a $W_{n-2} = W_{n-3}C_{n-1}$, où

$$W_{n-3} = \begin{pmatrix} 1 & ta_{-1} & w_{13}^1 & \cdots & w_{1,n-1}^{n-3} & w_{1n}^{n-3} \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & w_{13}^1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & ta_{-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$C_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & ta_{-n+1} \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors la matrice W_{n-2} s'écrit sous la forme

$$W_{n-2} = \begin{pmatrix} 1 & ta_{-1} & w_{13}^1 & \cdots & w_{1,n-1}^{n-3} & w_{1n}^{n-2} \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & w_{13}^1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & ta_{-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc, nous avons juste besoin de calculer la première ligne de la matrice W_{n-2} . Alors

$$w_{1n}^{n-2} = \sum_{j=1}^n w_{1j}^{n-3} c_{nj}^{n-1} = ta_{-n+1} w_{1n}^{n-3}.$$

Alors, on a

$$\prod_{l=1}^{n-1} C_l = W_{n-2}$$

Alors le semi-groupe $T(t) = e^{tA}$ engendré par A est donné par

$$T(t) = e^{tA} = e^{ta_0} \prod_{m=1}^{n-1} C_m = e^{ta_0} W_{n-2}$$

Remarque 4.1.4.

La calculé des coefficients de la matrice W_{n-2} est simple. car les matrices C_s sont des matrices creuser.

Si la matrice A d'opérateur de Toeplitz est triangulaire inférieure (supérieure) respectivement, alors la matrice du semi-groupe $T(t)$ engendré par A est triangulaire inférieure (supérieure) respectivement et est de Toeplitz.

Les calculs dans la méthode précédente augmentent facilement après chaque étape. Dans le cas général pour calculer e^{tA} on écrit la matrice A sous la forme diagonale.

4.1.4 Commentaire

On note par M^\perp la matrice qui est définie comme suit :

” Les colonnes de M deviennent les lignes de la matrice M^\perp . en partant de la dernière ligne”.

Exemple 4.1.1.

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathcal{B} & c \\ \mathbf{d} & \mathcal{E} & f \\ \mathbf{g} & \mathcal{H} & k \end{pmatrix} \quad \text{Alors} \quad M^\perp = \begin{pmatrix} k & f & c \\ \mathcal{H} & \mathcal{E} & \mathcal{B} \\ \mathbf{g} & \mathbf{d} & \mathbf{a} \end{pmatrix}$$

On remarque que :

$$MU = (UM)^\perp$$

Alors on a :

$$e^M e^U = (e^U e^M)^\perp$$

Donc ;

$$A = a_0 I + a_1 D + a_2 D^2 + \dots + a_{n-1} D^{n-1} + a_{-1} N + a_{-2} N^2 + \dots + a_{-n+1} N^{n-1}$$

telle que :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc on a :

$$e^{tA} = e^{ta_0 I + tM + tU} = e^{ta_0} e^{tM} e^{tU} = e^{ta_0} e^{ta_1 D} e^{ta_2 D^2} \dots e^{ta_{n-1} D^{n-1}} e^{ta_{-1} N} e^{ta_{-2} N^2} \dots e^{ta_{-n+1} N^{n-1}}$$

Comme,

$$e^{ta_0 I} = e^{ta_0} I$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{ta_0} \prod_{l=1}^{n-1} B_l \prod_{m=1}^{n-1} C_m \\ &= e^{ta_0} Y_{n-2} W_{n-2} \end{aligned}$$

Si on change l'ordre comme suit :

$$\exp(tA) = \exp(ta_0I + tM + tU) = \exp(ta_0)\exp(tU)\exp(tM)$$

Donc ;

$$\exp(tA) = e^{ta_0}W_{n-2}Y_{n-2}$$

Alors on obtient

$$e^{tA} = (\exp(tA))^\perp$$

4.2 Cas Simples

4.2.1 Cas n=2

Soit A_φ un opérateur de Toeplitz tronqué. Sa matrice est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

On écrit la matrice A sous la forme :

$$A = a_0 A_1 + a_{-1} A_2 + a_1 A_3$$

avec

$$A_1 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc on a :

$$e^{tA} = e^{ta_0 I} e^{ta_{-1} A_2} e^{ta_1 A_3} \tag{4.1}$$

Mais,

$$e^{ta_0 I} = e^{ta_0} I$$

et

$$e^{ta_{-1} A_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ta_{-1})^k}{k!} A_2^k = I + ta_{-1} A_2$$

et

$$e^{ta_1 A_3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ta_1)^k}{k!} A_3^k = I + ta_1 A_3$$

Car, pour tout $k \geq 2$

$$A_2^k = A_3^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$e^{ta_{-1} A_2} = \begin{pmatrix} 1 & ta_{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{ta_1 A_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ta_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors le semi-groupe engendré par A est donné par

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{ta_0} & 0 \\ 0 & e^{ta_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & ta_{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ta_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$e^{tA} = e^{ta_0} \begin{pmatrix} 1 + t^2 a_1 a_{-1} & ta_{-1} \\ ta_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si on change l'ordre dans l'équation (4.1). comme suit :

$$\exp(tA) = e^{ta_0 I} e^{ta_1 A_3} e^{ta_{-1} A_2}$$

On obtient :

$$\exp(tA) = e^{ta_0} \begin{pmatrix} 1 & ta_{-1} \\ ta_1 & 1 + t^2 a_1 a_{-1} \end{pmatrix}$$

On remarque que :

$$e^{tA} = (\exp(tA))^{\perp}$$

4.2.2 Cas n=3

Soit A_{φ} un opérateur de Toeplitz tronqué. Sa matrice est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

On écrit la matrice A sous la forme :

$$A = a_0 A_1 + a_{-1} A_2 + a_{-2} A_3 + a_1 A_4 + a_2 A_5$$

avec

$$A_1 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc on a :

$$e^{tA} = e^{ta_0 I} e^{ta_{-1} A_2} e^{ta_{-2} A_3} e^{ta_1 A_4} e^{ta_2 A_5} \quad (4.2)$$

Comme,

$$e^{ta_0 I} = e^{ta_0} I$$

et

$$e^{ta_{-1} A_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ta_{-1})^k}{k!} A_2^k = I + ta_{-1} A_2 + \frac{(ta_{-1})^2}{2} A_2^2$$

et

$$e^{ta_{-2} A_3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ta_{-2})^k}{k!} A_3^k = I + ta_{-2} A_3$$

et

$$e^{ta_1 A_4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ta_1)^k}{k!} A_4^k = I + ta_1 A_4 + \frac{(ta_1)^2}{2} A_4^2$$

et

$$e^{ta_2 A_5} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ta_2)^k}{k!} A_5^k = I + ta_2 A_5$$

Car, pour tout $k \geq 2$

$$A_3^k = A_5^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Et, pour tout $k \geq 3$

$$A_2^k = A_4^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$e^{ta_{-1} A_2} = \begin{pmatrix} 1 & ta_{-1} & \frac{(ta_{-1})^2}{2} \\ 0 & 1 & ta_{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{ta_{-2} A_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ta_{-2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{ta_1 A_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ta_1 & 1 & 0 \\ \frac{(ta_1)^2}{2} & ta_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{ta_2A_5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ ta_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors le semi-groupe $T(t) = e^{tA}$ engendré par A est donné par

$$\begin{pmatrix} e^{ta_0} & 0 & 0 \\ 0 & e^{ta_0} & 0 \\ 0 & 0 & e^{ta_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & ta_{-1} & \frac{(ta_{-1})^2}{2} \\ 0 & 1 & ta_{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & ta_{-2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ta_1 & 1 & 0 \\ \frac{(ta_1)^2}{2} & ta_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ ta_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$e^{tA} = e^{ta_0} \begin{pmatrix} 1 + t^2a_1a_{-1} + (ta_2 + \frac{(ta_1)^2}{2})(ta_{-2} + \frac{(ta_{-1})^2}{2}) & ta_{-1} + ta_1(ta_{-2} + \frac{(ta_{-1})^2}{2}) & ta_{-2} + \frac{(ta_{-1})^2}{2} \\ ta_1 + ta_{-1}(ta_2 + \frac{(ta_1)^2}{2}) & 1 + t^2a_1a_{-1} & ta_{-1} \\ ta_2 + \frac{(ta_1)^2}{2} & ta_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si on change l'ordre dans l'équation (4.2). comme suit :

$$\exp(tA) = e^{tA} = e^{ta_0I} e^{ta_1A_4} e^{ta_2A_5} e^{ta_{-1}A_2} e^{ta_{-2}A_3}$$

On obtient :

$$\exp(tA) = e^{ta_0} \begin{pmatrix} 1 & ta_{-1} & ta_{-2} + \frac{(ta_{-1})^2}{2} \\ ta_1 & 1 + t^2a_1a_{-1} & ta_{-1} + ta_1(ta_{-2} + \frac{(ta_{-1})^2}{2}) \\ ta_2 + \frac{(ta_1)^2}{2} & ta_1 + ta_{-1}(ta_2 + \frac{(ta_1)^2}{2}) & 1 + t^2a_1a_{-1} + (ta_2 + \frac{(ta_1)^2}{2})(ta_{-2} + \frac{(ta_{-1})^2}{2}) \end{pmatrix}$$

On remarque que :

$$e^{tA} = (\exp(tA))^\perp$$

4.3 Semi-Groupes Engendré par un Opérateur de Toeplitz Tronqué de type α

Soit A_φ un opérateur de Toeplitz tronqué de type α , sa matrice est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & \alpha a_{n-1} & \cdots & \cdots & \alpha a_2 & \alpha a_1 \\ a_1 & a_0 & \ddots & & & \alpha a_2 \\ a_2 & a_1 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_0 & \alpha a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

la matrice du shift généralisant S_u^α est de la forme :

$$M = M_{S_u^\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$M^n = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I_n$$

donc la matrice A_φ de l'opérateur de Toeplitz tronqué de type α peut s'écrire sous la forme :

$$A = a_0 I + a_1 M + a_2 M^2 + \cdots + a_{n-1} M^{n-1}$$

4.3.1 Calcul de e^{tA}

Pour calculer e^{tA} , on utilise la réduction des matrices sous la forme diagonale.

On calcule les valeurs propres de la matrice M

$$\det(\lambda I - M) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & -\alpha \\ -1 & \lambda & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\det(\lambda I - M) = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}(-\alpha) \begin{vmatrix} -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \lambda & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Alors

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - M) &= \lambda \lambda^{n-1} + (-1)^{n+1}(-\alpha)(-1)^{n-1} \\ &= \lambda^n + (-1)^{n+1+1+n-1}\alpha \\ &= \lambda^n - \alpha \end{aligned}$$

Donc les valeurs propres de la matrice M sont données par :

$$\lambda_i = \alpha^{\frac{1}{i}}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

les valeurs propres sont distinctes. Alors

$$M = PRP^{-1}$$

telle que

$$R = (r_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{cases} r_{ii} = \alpha^{\frac{1}{i}}, & i = 1, 2, \dots, n \\ r_{ij} = 0, & i \neq j \end{cases}$$

Calcul de la matrice de passage P

la matrice P former par les vecteurs propres v_i associés avec les valeurs propres λ_i , Alors

$$Mv_i = \lambda_i v_i, \quad v_i = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

On obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha x_n = \lambda_i x_1 \\ x_1 = \lambda_i x_2 \\ x_2 = \lambda_i x_3 \\ \vdots = \vdots \\ x_{n-1} = \lambda_i x_n \end{array} \right. \Rightarrow v_i = \begin{pmatrix} \lambda_i^{n-1} \\ \lambda_i^{n-2} \\ \vdots \\ \lambda_i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_{n-1}^{n-1} & \lambda_n^{n-1} \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \dots & \lambda_{n-1}^{n-2} & \lambda_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{n-1} & \lambda_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$P = \begin{pmatrix} \alpha^{n-1} & \alpha^{\frac{n-1}{2}} & \dots & \alpha & \alpha^{\frac{n-1}{n}} \\ \alpha^{n-2} & \alpha^{\frac{n-2}{2}} & \dots & \alpha^{\frac{n-2}{n-1}} & \alpha^{\frac{n-2}{n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha & \alpha^{\frac{1}{2}} & \dots & \alpha^{\frac{1}{n-1}} & \alpha^{\frac{1}{n}} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a : pour $k \in \mathbb{N}$

$$R^k = (r_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{cases} r_{ii} = \alpha^{\frac{k}{i}}, & i = 1, 2, \dots, n \\ r_{ij} = 0, & i \neq j \end{cases}$$

la matrice P est inversible.

Alors

$$e^{tA} = e^{t(a_0 I + a_1 M + \dots + a_{n-1} M^{n-1})} = e^{ta_0 I} \prod_{s=1}^{n-1} e^{ta_s M^s}$$

Comme,

$$e^{ta_0 I} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ta_0)^k}{k!} I^k = e^{ta_0 I}$$

et

$$\begin{aligned}
 e^{ta_1 M} &= e^{ta_1 P R P^{-1}} \\
 &= P e^{ta_1 R} P^{-1} \\
 &= P \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ta_1)^k}{k!} R^k \right] P^{-1} \\
 &= P D_1 P^{-1}
 \end{aligned}$$

telle que :

$$D_1 = (d_{ij}^1)_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{cases} d_{ii}^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k a_1^k}{k!} \alpha^{\frac{k}{i}}, & i = 1, 2 \dots, n \\ d_{ij}^1 = 0, & \text{Si } i \neq j \end{cases}$$

Alors

$$D_1 = (d_{ij}^1)_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{cases} d_{ii}^1 = e^{ta_1 \alpha^{\frac{1}{i}}}, & i = 1, 2 \dots, n \\ d_{ij}^1 = 0, & \text{Si } i \neq j \end{cases}$$

Donc

$$e^{ta_1 M} = P D_1 P^{-1}$$

De la même façon, nous calculons $e^{ta_s M^s}$ pour $s = 2, \dots, n-1$

$$\begin{aligned}
 e^{ta_s M^s} &= e^{ta_s P R^s P^{-1}} \\
 &= P e^{ta_s R^s} P^{-1} \\
 &= P \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ta_s)^k}{k!} (R^s)^k \right] P^{-1} \\
 &= P \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ta_s)^k}{k!} R^{sk} \right] P^{-1} \\
 &= P D_s P^{-1}
 \end{aligned}$$

telle que :

$$D_s = (d_{ij}^s)_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{cases} d_{ii}^s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k a_s^k}{k!} \alpha^{\frac{sk}{i}}, & i = 1, 2 \dots, n \\ d_{ij}^s = 0, & \text{Si } i \neq j \end{cases}$$

Alors

$$D_s = (d_{ij}^s)_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{cases} d_{ii}^s = e^{ta_s \alpha^{\frac{s}{i}}}, & i = 1, 2 \dots, n \\ d_{ij}^s = 0, & \text{Si } i \neq j \end{cases}$$

Donc

$$e^{ta_s M^s} = P D_s P^{-1}$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned}
 e^{tA} &= e^{ta_0 I} e^{ta_1 M} \dots e^{ta_{n-1} M^{n-1}} \\
 &= e^{ta_0 I} P D_1 P^{-1} P D_2 P^{-1} \dots P D_{n-1} P^{-1} \\
 &= e^{ta_0} P B P^{-1}
 \end{aligned}$$

telle que

$$B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{cases} b_{ii} = \prod_{s=1}^{n-1} e^{ta_s \alpha^{\frac{s}{i}}}, & i = 1, 2, \dots, n \\ b_{ij} = 0, & \text{Si } i \neq j \end{cases}$$

Mais

$$\begin{aligned}
 \prod_{s=1}^{n-1} e^{ta_s \alpha^{\frac{s}{i}}} &= e^{\sum_{s=1}^{n-1} ta_s \alpha^{\frac{s}{i}}} \\
 &= e^{t \left(\sum_{s=1}^{n-1} a_s \alpha^{\frac{s}{i}} \right)} \\
 &= e^{tw_i}, \quad w_i = \sum_{s=1}^{n-1} a_s \alpha^{\frac{s}{i}}
 \end{aligned}$$

Donc le semi-groupe engendré par l'opérateur de Toeplitz tronqué de type α est donné par :

$$e^{tA} = e^t P B P^{-1}$$

avec

$$B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{cases} b_{ii} = e^{tw_i}, & i = 1, 2, \dots, n \\ b_{ij} = 0, & \text{Si } i \neq j \end{cases}$$

Bibliographie

- [1] **G. Aubrun** Théorie des Opérateurs, M1 Mathématiques, Université de la Réunion, 2007.
- [2] **B. Barusseau** Propriétés Spectrales des Opérateurs de Toeplitz, Thèse de Doctorat sous la direction de **E. strouse**, Université de Bordeaux, 2010.
- [3] **A. Bottcher et B. Silbermann** Analysis of Toeplitz Operators, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1990.
- [4] **A. Brown, P.R. Halmos** Algebraic Properties of Toeplitz Operators, J. Riene Agnew, Math, 123, 89-102, 1963-1964.
- [5] **I. Chalendar** Cours de Master, 2ième année (Mathématiques Pures) :Université de Lyon-2008.
- [6] **L. DAN LEMLE** Autour des Propriétés Spectrales des Semi-Groupes, Lecturas Matemáticas, 99-145, Volumen 31, 2010.
- [7] **L. DAN LEMLE** La Formule de Lie-Trotter pour les Semi-Groupes Fortement Continus, sous la direction de **GILLES CASSIER**, Université de Claude Bernard LYON 1, 2001.
- [8] **P.L. Duren** Theory of H^p Spaces, Academic Press, New York and London, 1970.
- [9] **K.J. Engel and R. Nagel** One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Springer Velag, 2000.
- [10] **J. Faraut** Analysis on Lie Groups An Introduction, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2008.
- [11] **D.D.S. FERREIRA** Semi-Groupes de Contraction, Cour MASTER 2.

-
- [12] **E. Fricain** Analyse Fonctionnelle et Théorie des Opérateurs Cours et Exercices, Master (Mathématiques Pures),2009-2010.
- [13] **F. Gaunard** Problèmes de sous-espaces invariants, sous la direction **A. Hartmann**, Université de Sciences Technologies, Bordeaux 1.
- [14] **I. Gohberg et S. Goldberg** Basic Operator Theory, Birkhauser, Boston.Basel.Stuttgart, USA, 1981.
- [15] **J.A. GOLDSTEIN** Semigroupe of Linear Operators and Applications, Tulane University, Oxford University PRESS, New York, 1985.
- [16] **F. Korrichi** Produit d'Opérateurs de Toeplitz et Opérateur de Composition, Thèse de Doctorat, sous la direction **Z. Bendaoud et E. strouse**, Université Mohamed Khider, Biskra, 2016.
- [17] **S. LUBKIN** C_0 - Semigroups and Applications, North Holland Mathemhtics Studies, 2003.
- [18] **R.A. Martinez-Avendano, P. Rosenthal** An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert Space, 2000, Springer.
- [19] **R. Nagel** One-Parameter Semigroups of Positive Operators, Springer- Verlag Berlin Heidelberg, 1986.
- [20] **A. Pazy** Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York Inc, Vol44, 1983.
- [21] **D. Sarason** Algebraic Properties of Truncated Toeplitz Operators, Operators and Matrices, 2007.
- [22] **N. Sedlock** Properties of Truncated Toeplitz Operators, Washington University in St. Louis, January 2010.
- [23] **J.H. Shapiro** Composition Operators and Classical Function Theory : Springer Verlag, New York, 1993.
- [24] **K. Zhu** Operator Theory in Function Spaces, Volume 139 of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker Inc, New York, 1990.