

الجمهورية الجزائرية الشعبية الديمقراطية
REPUBLICUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثلجي الأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES



Mémoire de MASTER

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Analyse Mathématique

Par: Mama SAOULI

THEME

Sur les Equations Intégrales Linéaires de Volterra

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Aek. MOUKHTARI
A. BELACEL
A. YAGOUB
Ch. BELABBACI

Professeur
M.C.A
M.C.B
M.C.B

Président
Encadreur
Examinateur
Examinatrice

Année Universitaire 2018/2019

Remerciements

Tout d'abord, je remercie infiniment le bon dieu puissant de la bonne santé, la volonté et la patience qu'il m'a donnée tout le long de mes études.

Je présente mes sincères remerciements avec mes profonds respects à mon encadreur Dr. Amar BELACEL pour son suivi, sa patience, ses conseils et son aide.

Je tiens à remercier Pr. Abd El Kader MOKHTARI, Dr. Ameer YAGOUB, et Dr. Chafika BELABBACI, pour avoir accepté de donner un peu de leurs temps pour jurer ce modeste travail.

Je remercie profondément Dr. Youcef BELABBACI et Pr. Abd El Kader MOKHTARI pour leurs remarques et leurs conseils.

Je remercie tous mes enseignants surtout Dr. Yamna BOUKHATEM et Dr. Abd El Aziz RAHMOUNE.

Je veux aussi remercier de tout mon cœur ma chère sœur Nafissa, et chère amie Houria Chellaoua.

Je termine enfin par mon cher père « Abbi » Mr Mohammed qui m'a toujours accompagné, encouragé et soutenu pendant toutes ces années et que je ne remercierai jamais assez Merci Abbi.

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à

Mon idéal, qui me soutient tous les jours, toutes mes réalisations ont été grâce à son encouragement, à mon très Cher père « Abbi »

Ma source de tendresse, la femme la plus patiente dans le monde, à ma très Chère mère,

Mes sœurs Hadjer, Soumia et Nafissa,

Mes frères,

Mes amis. . .

ملخص :

في هذه المذكرة، يركز عملنا على حل بعض المعادلات التكاملية الخطية لفولتيرا، من الصنف الثاني و الأول. وذلك حسب نوع نواة المعادلة.

الكلمات الدلالية:

معادلة تكاملية، نواة المعادلة، النواة المتكررة، النواة الحالّة.

Résumé :

Notre travail est concentré sur la résolution de quelques équations intégrales linéaires de Volterra de seconde et de première espèce, tel que on choisit la méthode après avoir déterminé le type du noyau de l'équation.

Mots clés : Équation intégrale, Noyau, Noyaux itérés, Résolvante.

Abstract :

In this work, we focus on solving of Volterra linear integral equations of the second and first kind. We choose the methode of the solution after defining the type of kernel of the equation.

Key-words : Integral equation, Kernel, Iterated kernels, Resolvent.

Table des matières

Introduction	2
1 Préliminaires et notations	4
1.1 Espaces fonctionnels	4
1.1.1 L'espace $L_2([a, b])$	4
1.2 Opérateurs linéaires	5
1.2.1 Opérateurs compacts	6
1.2.2 Opérateurs intégraux	6
1.3 Équations intégrales	7
1.3.1 Classification des équations intégrales	7
1.3.2 Nombres caractéristiques et fonctions propres	9
1.3.3 L'opérateur produit	9
1.3.4 Théorèmes de Fredholm	10
1.4 Théorème du point fixe de Banach	11
1.5 Transformation de Laplace	11
1.5.1 Produit de convolution des fonctions	12
2 Équations intégrales linéaires de Volterra de seconde espèce	14
2.1 L'opérateur intégrale de Volterra	15
2.2 Quelques méthodes de résolution	17
2.2.1 La relation entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra	17
2.2.2 Application de théorème généralisé du point fixe de Banach aux équations intégrales de Volterra	20
2.2.3 Résolution à l'aide de la résolvante	22
2.2.4 Méthode des approximations successives	29
2.2.5 Équations intégrales de Volterra du type convolution	31
2.2.6 Système d'équations intégrales de Volterra du type convolution	34
3 Équations intégrales linéaires de Volterra de première espèce	39
3.1 Résolution d'une équation intégrale de Volterra de première espèce	39
3.2 Equation intégrale de Volterra de première espèce du type de convolution	40
3.3 Cas où le noyau devient infini	41
3.3.1 Applications	41
Bibliographie	48

Introduction

La théorie générale des équations intégrales linéaires n'a été construite qu'à la fin des XIX^e et XX^e siècles, principalement grâce aux travaux de Volterra, Fredholm et Hilbert [1, 3, 6, 7]...

La théorie des équations intégrales est un domaine de recherche actif dans les mathématiques appliquées et la physique mathématique.

Une équation intégrale, est une équation dans laquelle une fonction inconnue apparaît sous le signe d'intégration. L'étude théorique de ces équations, porte sur deux types principaux : les Équations intégrales de Fredholm, et les Équations intégrales de Volterra.

Le but de ce mémoire, est de résoudre une équation intégrale linéaire de Volterra de seconde et de première espèce, où nous divisons ce travail en trois chapitres

Le premier chapitre porte sur quelques notions utiles et les plus essentielles pour la suite de notre travail, telles que nous avons donné des propriétés de l'espace $L_2([a, b])$, quelques notions d'opérateurs linéaires, le théorème de point fixe généralisé de Banach, puis la transformation de Laplace.

Le deuxième chapitre sera consacré pour quelques méthodes de résolution d'une équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce. Nous avons commencé par la résolution de cette équation à l'aide de la résolution d'une équation différentielle. Nous avons entamé à plusieurs méthodes de résolution dont : application de théorème du point fixe généralisé de Banach, la résolution à l'aide de la résolvante, et avec la méthode des approximations successives. Et puis nous allons étudier la résolution d'une équation intégrale et ainsi de système d'équations intégrales, du type convolution, où nous avons illustré tous ça par des applications.

Dans **le troisième chapitre** nous avons étudié quelques méthodes de résolution, pour résoudre une équation intégrale de Volterra de première espèce, sous une telle condition ($K(x, x) \neq 0$). On sait que la résolution d'une telle équation pose des difficultés plus compliqués en général que celui de la résolution d'une équation intégrale du seconde espèce. Dans ce chapitre, on a discuté juste les cas où la résolution de l'équation intégrale du première espèce est possible.

Notations

$[a, b]$	Un compact dans \mathbb{R} .
E, F	Deux espaces vectoriels normés.
$L(E, F)$	L'espace des opérateurs linéaires de E dans F .
$\mathcal{L}(E, F)$	L'espace des opérateurs linéaires continus de E dans F .
(X, d)	Un espace métrique.
$L_2([0, a])$	L'espace des fonctions de carré intégrables sur $[0, a]$.
$L_2(\Omega_0)$	L'espace des fonctions de carré intégrables sur le carré Ω_0 .
V	L'opérateur intégral de Volterra.
$\sigma_p(V)$	Le spectre ponctuel de l'opérateur V .
$\Phi = \{\varphi_i\}_{i \in I}$	Une famille des fonctions φ .
$R(x, t; \lambda)$	Le noyau résolvant (la résolvante).
$F(p)$	Transformée de Laplace de la fonction $f(x)$.
$K'_x(x, t)$	La dérivée première de K par rapport à x , $\frac{\partial K(x, t)}{\partial x}$.
$\varphi_1 * \varphi_2$	Le produit de convolution de deux fonctions φ_1 et φ_2 .

Chapitre 1

Préliminaires et notations

Ce chapitre, est un rappel sur quelques notions utiles et les plus essentielles pour la suite du travail. Les principaux ouvrages utilisés dans ce chapitre sont [1, 3, 5, 6].

1.1 Espaces fonctionnels

Définition 1.1. (Espace vectoriel normé)

Soit E un espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}), on appelle une norme sur l'espace E toute application notée par $\|\cdot\|$ définie sur E à valeurs réelles positives. Vérifiant pour tous x, y dans E , et α dans \mathbb{K}

- i) $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$,
- ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ (homogène),
- iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Définition 1.2. (Produit scalaire)

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} . On appelle produit scalaire sur E , une application de $E \times E$ dans \mathbb{R} , notée par (\cdot, \cdot) satisfaisant aux conditions suivantes :

Pour $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

1. $(x, y) = (y, x)$,
2. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$, où $x_1, x_2 \in E$,
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$,
4. $(x, x) \geq 0$; $(x, x) = 0 \implies x = 0$.

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire s'appelle espace euclidien.

1.1.1 L'espace $L_2([a, b])$

Définition 1.3. On dit qu'une fonction f est de carré intégrable sur l'intervalle $[a, b]$ si l'intégrale suivant

$$\int_a^b f^2(x) dx,$$

existe (est finie). L'ensemble de toutes les fonctions de carré intégrable sur $[a, b]$ sera noté $L_2([a, b])$, ou L_2 tout court.

Propriétés fondamentales des fonctions de L_2

1. Le produit de deux fonctions de carré intégrable est une fonction intégrable.
2. La somme de deux fonctions de L_2 est aussi une fonction de L_2 .
3. Si f est une fonction de L_2 , et λ un nombre réel quelconque, alors λf est de L_2 .
4. Si f et g deux fonctions de L_2 , on a l'inégalité de Bouniakovski-Schwarz

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx.$$

5. L'espace L_2 est un espace de Hilbert muni du produit scalaire suivant

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx, \quad f, g \in L_2.$$

6. On appelle norme d'une fonction f de L_2 , le nombre non négatif :

$$\|f\|_{L_2} = \sqrt{(f, f)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dans la suite, nous allons travailler sur l'intervalle fondamentale $I = [a, b]$ (ou $I_0 = [0, a]$); et au carré fondamentale $\Omega = \{a \leq x, t \leq b\}$, (ou $\Omega_0 = \{0 \leq x, t \leq a\}$).

1.2 Opérateurs linéaires

Définition 1.4. (Opérateur linéaire)

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On appelle opérateur linéaire A de E dans F l'application

$$y = A\varphi, \quad (\varphi \in E, y \in F),$$

qui vérifie la condition suivante :

Pour tous α, β dans \mathbb{K} , et pour tous $\varphi, \psi \in E$, on a

$$A(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha A\varphi + \beta A\psi.$$

De plus, si A est continu, on dit alors A est un opérateur linéaire continu.

Définition 1.5. (Opérateur linéaire borné)

Un opérateur linéaire A défini de E dans F est dit borné si l'image par A de tout ensemble borné est un ensemble borné. En vertu de la linéarité de A , cette condition peut être encore formulée comme suit : L'opérateur A est dit borné s'il existe une constante positive c , telle que :

$$\|A\varphi\| \leq c\|\varphi\|, \quad \forall \varphi \in E.$$

Proposition 1.1. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et A un opérateur linéaire défini de E dans F . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. L'opérateur A est continu sur E .
2. L'opérateur A est continu au point φ_0 , ($\varphi_0 \in E$).
3. L'opérateur A est borné.

Démonstration. Pour la preuve de cette proposition voir [1]. □

1.2.1 Opérateurs compacts

Définition 1.6. (Ensemble compact)

Soit E un espace vectoriel normé, et soit U un ensemble de E . On dit que U est un ensemble compact, si de toutes suites d'éléments de U , on peut extraire une sous-suite convergente dans U .

Définition 1.7. (Ensemble relativement compact)

Soit E un espace vectoriel normé, on dit qu'un ensemble U de E est relativement compact, si son adhérence \bar{U} est compact.

Définition 1.8. (Opérateur compact)

Soient E et F sont deux espaces vectoriels normés, et soit A un opérateur de $\mathcal{L}(E; F)$, on dit que A est un opérateur compact, s'il transforme tout ensemble borné U' de E , en un ensemble relativement compact dans F .

Pour les propriétés d'un opérateur compact, voir [1].

Définition 1.9. (Famille uniformément bornée)

Une famille Φ des fonctions φ_i , ($i \in I$), définies sur l'intervalle $[a, b]$, est dite uniformément bornée, s'il existe un nombre N tel que

$$|\varphi(x)| \leq N,$$

pour tout $x \in [a, b]$, et toutes fonctions $\varphi \in \Phi$.

Définition 1.10. (L'équicontinuité)

Une famille $\Phi = \{\varphi_i\}_{i \in I}$, est dite équicontinue, si pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver un nombre $\delta > 0$ tel que

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \epsilon$$

pour tous $x_1, x_2 \in [a, b]$ et tels que $|x_1 - x_2| < \delta$, et pour toutes les fonctions $\varphi_i \in \Phi$.

Théorème 1.1. (Théorème d'Arzelà)

Pour qu'une famille Φ de fonctions continue, définies sur l'intervalle $[a, b]$, soit relativement compact dans $C([a, b])$, il faut et il suffit que cette famille soit uniformément bornée et équicontinue.

Démonstration. Pour la preuve de ce théorème, voir [1] page 105. □

1.2.2 Opérateurs intégraux

Les opérateurs intégraux jouent un rôle très important en analyse fonctionnelle, où ils permettent notamment de transformer les équations fonctionnelles en une version plus simple afin de les résoudre facilement.

Définition 1.11. On appelle opérateur intégral, tout opérateur linéaire A défini sur $C([a, b])$, donné sous la forme

$$(A\varphi)x = \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt, \quad (x, t) \in [a, b]^2, \tag{1.1}$$

où K est une fonction continue définie de $[a, b]^2$ dans \mathbb{C} .

Noyau d'un opérateur intégral

La fonction K est dite noyau de l'opérateur intégral A .

Remarque 1.1. (voir [5])

Si on a

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt < +\infty,$$

ou bien, s'il existe un nombre p tel que

$$\int_a^b |K(x, t)| dx \leq p,$$

et

$$\int_a^b |K(x, t)| dt \leq p,$$

pour tous x, t de $[a, b]$, alors la formule (1.1) définit un opérateur linéaire borné. Les noyaux appartenant à la classe L_2 , s'appellent noyaux de Hilbert-Schmidt.

1.3 Équations intégrales

Définition 1.12. On appelle équation intégrale, une équation fonctionnelle où la fonction inconnue figure sous le signe d'intégration, elle est de la forme

$$\int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt = \lambda \varphi(x) + f(x), \quad x \in [a, b]. \quad (1.2)$$

Où f est une fonction continue donnée, et K une fonction continue appelée **noyau** de l'équation intégrale (1.2), et λ un paramètre réel (ou bien complexe).

Remarque 1.2.

1. L'équation (1.2) est une équation intégrale non linéaire. Si on prend

$$K(x, t, \varphi(t)) = K(x, t)\varphi(t),$$

l'équation (1.2) devient une équation intégrale **linéaire**.

2. On peut écrire l'équation (1.2) sous forme d'opérateur

$$A\varphi(x) = \lambda \varphi + f,$$

où A un opérateur intégrale.

1.3.1 Classification des équations intégrales

Équation intégrale de Fredholm

Définition 1.13. On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm une équation de la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t) dt, \quad (1.3)$$

où f est une fonction donnée, et φ est la fonction inconnue, x et t sont deux variables réelles parcourant l'intervalle $[a, b]$ et λ est un paramètre réel non nul.

Remarque 1.3. On suppose que le noyau K de l'équation (1.3), est appartient à la classe L_2 sur le carré $a \leq x, t \leq b$, c'est-à-dire

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt < \infty.$$

Remarque 1.4.

1. Si $f(x) = 0$, l'équation (1.3) est dite une équation intégrale homogène.
2. Si $f(x) \neq 0$, l'équation (1.3) est dite une équation intégrale non homogène.

Remarque 1.5. L'équation intégrale de la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt. \quad (1.4)$$

est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, plus exactement le cas où $K(x, t) = 0$ pour $t > x$.

En effet, soit l'équation intégrale de Fredholm pour $x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt. \\ &= f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt + \lambda \int_x^b K(x, t)\varphi(t)dt \\ &= f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt. \end{aligned}$$

Cette équation est appelée **l'équation intégrale linéaire non homogène de Volterra de seconde espèce**.

Si la fonction inconnue figure juste sous le signe d'intégrale, on obtient ce qu'on appelle l'équation intégrale de première espèce :

1. De Fredholm

$$\int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt = f(x). \quad (1.5)$$

2. De Volterra

$$\int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt = f(x). \quad (1.6)$$

D'après l'équation (1.3), considérons l'opérateur A défini par

$$\begin{aligned} A &: C([a, b]) \longrightarrow C([a, b]) \\ \varphi &\longrightarrow A\varphi \end{aligned}$$

où

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt.$$

L'opérateur A est appelé l'opérateur intégral de Fredholm. L'opérateur adjoint de A noté par A^* et défini par le noyau

$$K^*(x, t) = \overline{K(t, x)},$$

alors, l'équation adjointe de l'équation (1.3) est donnée par

$$\psi(x) = g(x) + \bar{\lambda} \int_a^b K^*(x, t)\psi(t)dt. \quad (1.7)$$

1.3.2 Nombres caractéristiques et fonctions propres

Soit l'équation intégrale homogène de Fredholm de seconde espèce

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt, \quad (1.8)$$

l'équation (1.8), admet toujours la solution évidente $\varphi(x) = 0$, appelée solution identiquement nulle (triviale).

Définition 1.14. Un nombre λ tel que l'équation admette des solutions non nulles $\varphi(x) \neq 0$, s'appelle nombre (ou valeur) caractéristique de l'équation (1.8) ou de noyau $K(x, t)$, et chaque solution non nulle de l'équation (1.8) est une fonction propre correspondante au nombre caractéristique λ .

Remarque 1.6.

1. La valeur $\lambda = 0$ n'est pas nombre caractéristique, puisque pour $\lambda = 0$, l'équation (1.8) n'admet que la solution triviale.
2. Nous appellerons valeur propre la quantité $\sigma = \frac{1}{\lambda}$, où λ est un nombre caractéristique.

1.3.3 L'opérateur produit

Considérons deux opérateurs intégraux A_1 et A_2 de noyau qui appartient à $L_2([a, b])$, K_1 et K_2 respectivement

$$(A_1\varphi)x = \int_a^b K_1(x, t)\varphi(t)dt, \quad (A_2\varphi)x = \int_a^b K_2(x, t)\varphi(t)dt,$$

où

$$\int_a^b \int_a^b |K_1(x, t)|^2 dx dt = k^2 < \infty,$$

$$\int_a^b \int_a^b |K_2(x, t)|^2 dx dt = q^2 < \infty.$$

Cherchons le noyau de l'opérateur produit A_1A_2 . Si les noyaux K_1 et K_2 justifient le changement de l'ordre d'intégration, alors on peut déduire le noyau K de l'opérateur produit A_1A_2 en fonction de K_1 et K_2 .

En effet

$$\begin{aligned} (A_1A_2)(\varphi(x)) &= \int_a^b \left[K_1(x, z) \int_a^b K_2(z, t)\varphi(t)dt \right] dz \\ &= \int_a^b \int_a^b K_1(x, z)K_2(z, t)\varphi(t)dt dz \\ &= \int_a^b \varphi(t) \left[\int_a^b K_1(x, z)K_2(z, t)dz \right] dt. \end{aligned}$$

Posons

$$K(x, t) = \int_a^b K_1(x, z)K_2(z, t)dz, \quad (1.9)$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Bouniakovsky, on a

$$|K(x, t)|^2 \leq \int_a^b |K_1(x, z)|^2 dz \int_a^b |K_2(z, t)|^2 dz,$$

d'où

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt \leq k^2 q^2.$$

Ainsi, le produit de deux opérateurs intégraux du type de Hilbert-Schmidt, est un opérateur du même type dont le noyau est défini par la formule (1.9). En particulier, si on pose $A_1 = A_2 = A$, de noyau $K = K_1 = K_2$, on voit que $A_1 A_2 = A^2$ est un opérateur intégral dont le noyau

$$K_2(x, t) = \int_a^b K(x, z) K(z, t) dz.$$

vérifie la condition

$$\int_a^b \int_a^b |K_2(x, t)|^2 dx dt \leq \left[\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt \right]^2 = k^4,$$

d'où

$$\|A_1\| \leq k^2,$$

avec

$$k^2 = \int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt.$$

De la même manière, on peut montrer que chacun des opérateurs A^n est défini par le noyau

$$K_n(x, t) = \int_a^b K(x, z) K_{n-1}(z, t) dz, \quad (n = 2, 3, \dots),$$

vérifiant la condition

$$\int_a^b \int_a^b |K_n(x, t)|^2 dx dt \leq k^{2n}. \tag{1.10}$$

Dans la suite de ce travail, les noyaux $K_n(x, t)$ sera appelés les noyaux **itérés**.

Pour $|\lambda| < \frac{1}{k}$, la série

$$K(x, t) + \lambda K_2(x, t) + \dots + \lambda^{n-1} K_n(x, t) + \dots$$

converge dans l'espace $L_2([a, b] \times [a, b])$, en vertu de l'évaluation (1.10), vers une fonction $R(x, t; \lambda)$ (le noyau résolvant qui on va parler dans le deuxième chapitre) dont le carré est sommable par rapport à x et t pour tout $|\lambda| < \frac{1}{k}$.

1.3.4 Théorèmes de Fredholm

Théorème 1.2. *Si λ n'est pas une valeur caractéristique, alors l'équation (1.3) est résoluble quelle que soit le terme libre $f(x)$ et possède une solution unique.*

Théorème 1.3. *Si λ est une valeur caractéristique de l'équation (1.3), alors $\bar{\lambda}$ l'est aussi pour l'équation (1.7), avec le même rang. L'équation (1.7) ne possède pas d'autres valeurs caractéristiques.*

Théorème 1.4. *Si λ est une valeur caractéristique de l'équation, alors une condition nécessaire et suffisante pour que cette équation possède une solution est que $f(x)$ soit orthogonale à toutes les fonctions propres de l'équation (1.7), associées à la valeur caractéristique $\bar{\lambda}$.*

L'équation homogène correspondante à l'équation (1.3) est donnée par

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt. \tag{1.11}$$

Théorème 1.5. (Alternative de Fredholm)

Ou bien l'équation intégrale (1.3) admet une solution quelle que soit $f(x)$, ou bien l'équation homogène (1.11) admet au moins une solution non triviale (non identiquement nulle).

On peut appliquer les théorèmes de Fredholm pour les équations intégrales de Volterra, où le terme libre f est dans $L_2([a, b])$.

1.4 Théorème du point fixe de Banach

Définition 1.15. Soit (X, d) un espace métrique. L'application T défini de X dans X est dite contractante s'il existe $\alpha \in]0, 1[$, tel que

$$d(Tx, Tx') \leq \alpha d(x, x'); \forall x, x' \in X.$$

Remarque 1.7. On prend X comme un espace normé. Alors on sait que, si $(X, \|\cdot\|)$ est un espace normé, alors il est un espace métrique, de plus

$$d(Tx, Tx') = \|Tx - Tx'\|, \quad x, x' \in X.$$

Théorème 1.6. (Théorème du point fixe de Banach)

Soit X un espace métrique complet, et T une application contractante de X dans X , alors T admet un point fixe unique x ; de plus x est la limite de (x_{n+1}) définie par

$$x_n = Tx_n$$

où x_0 est choisi arbitrairement.

Théorème 1.7. (Théorème généralisé du point fixe de Banach)

Si l'application T n'est pas contractante, mais il existe $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ tel que T^m soit contractante, alors T admet un point fixe unique.

1.5 Transformation de Laplace

Définition 1.16. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}), une fonction localement sommable, nulle pour $x < 0$ et vérifiant la condition $|f(x)| < Me^{\sigma_0 x}$ quel que soit x ($M > 0, \sigma_0 \geq 0$). On appelle transformée de Laplace de $f(x)$ la fonction notée $\mathcal{L}\{f(x)\}$ ou $F(p)$ de la variable complexe $p = \sigma + i\omega$ définie par

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p) = \int_0^\infty f(x)e^{-px} dx. \tag{1.12}$$

La fonction f est appelée original de F , et F l'image de la fonction f .

Les notations de la transformée de Laplace sont très variées. Citons à titre d'exemple : $F(p) = \mathcal{L}\{f(x)\}$, \tilde{f} , $f(x) \doteq F(p) \dots$

Remarque 1.8. Il faut noter que $F(p)$ n'existe pas toujours. Pour montrer ça, il suffit de choisir l'exemple $f(x) = e^{x^2}$; pour cette fonction l'intégrale ci-dessus n'est pas définie.

Définition 1.17. Soit $f \in \mathcal{L}_{loc}([0, +\infty[)$, le nombre

$$\sigma_0 = \inf\{\sigma \in \mathbb{R} \quad : \quad f(x)e^{\sigma x} \in \mathcal{L}_{loc}([0, +\infty[)\},$$

s'appelle abscisse de sommabilité, ou abscisse de convergence absolue de la fonction F . Le demi-plan de convergence $\{p = \sigma + i\omega \quad Re \quad p = \sigma > \sigma_0\}$ est le domaine de sommabilité sur lequel $F(p)$ est défini.

Propriétés

1. La transformation de Laplace est un opérateur linéaire.
2. Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$, alors $\mathcal{L}\{f(x-a)\} = e^{-ap}F(p)$.
3. Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$, alors $\mathcal{L}\{f(x)e^{ax}\} = F(p-a)$, où a un nombre complexe.
4. Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$, alors $\mathcal{L}\{f(cx)\} = \frac{1}{c}F(p)$, $c > 0$.

Pour la preuve de ces propriétés voir [2].

Exemple 1.1. D'après les propriétés précédentes, on peut trouver les transformées de Laplace des fonctions qui on les utiliser après :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x^n\} &= \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad \text{Re } p > 0, \quad (n > 0) \\ \mathcal{L}\{e^{-ax}\} &= \frac{1}{p+a}, \\ \mathcal{L}\{\cos ax\} &= \frac{p}{p^2+a^2} \\ \mathcal{L}\{\sin ax\} &= \frac{a}{p^2+a^2}, \quad \text{Re } p > -\text{Re } a.\end{aligned}$$

1.5.1 Produit de convolution des fonctions

Définition 1.18. Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions continues définies pour $x \geq 0$. On appelle produit de convolution (quand il existe) de ces fonctions, la fonction ψ définie par l'égalité (voir [3])

$$\psi(x) = \int_0^x \varphi_1(t)\varphi_2(x-t)dt. \quad (1.13)$$

Cette fonction, qui définie pour $x \geq 0$, sera également continue. On remplace t par la nouvelle variable d'intégration $\tau = x - t$, on peut alors écrire $\psi(x)$ sous la forme

$$\psi(x) = \int_0^x \varphi_1(x-\tau)\varphi_2(\tau)d\tau. \quad (1.14)$$

En général, le produit de convolution est désigné par

$$\psi(x) = (\varphi_1 * \varphi_2)(x).$$

Remarque 1.9. De (1.13) et (1.14), il découle immédiatement que le produit de convolution est commutatif; c'est-à-dire, si $\varphi_1 * \varphi_2$ existe, alors le produit $\varphi_2 * \varphi_1$ existe aussi, et on a $\varphi_1 * \varphi_2 = \varphi_2 * \varphi_1$.

La propriété suivante, joue un rôle très important dans la résolution des équations intégrales.

Propriété 1.1. Si $\mathcal{L}\{\varphi_1(x)\} = \Phi_1(p)$, et $\mathcal{L}\{\varphi_2(x)\} = \Phi_2(p)$, alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(\varphi_1 * \varphi_2)(x)\} &= \mathcal{L}\{\varphi_1(x)\}\mathcal{L}\{\varphi_2(x)\} \\ &= \Phi_1(p)\Phi_2(p).\end{aligned}$$

Démonstration. Pour la preuve de cette propriété voir [2]. □

Proposition 1.2. (*D'inversion*)

Soit $F(p) = F(\sigma + i\omega)$ une fonction holomorphe dans le demi-plan $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > \sigma_0\}$. On suppose que

$$\lim_{|p| \rightarrow +\infty} |F(p)| = 0,$$

pour $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, et pour tout $\sigma > \sigma_0$, la fonction

$$\omega \in \mathbb{R} \mapsto F(\sigma + i\omega),$$

est sommable sur \mathbb{R} (c'est-à-dire, F est sommable en ω pour tout $\sigma > \sigma_0$). Alors l'original f de F est donné par la formule

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{px} dp, \quad \sigma > \sigma_0.$$

(Pour la preuve, voir [2, 6]).

Lemme important

Le lemme suivant, joue un rôle très important dans la conversion d'une équation différentielle vers une équation intégrale, et le cas inverse.

Lemme 1.1. *Supposons que f est une fonction continue définie de $[a, b]$ dans \mathbb{R} , alors*

$$\int_a^x \left[\int_a^{x'} f(t) dt \right] dx' = \int_a^x (x-t)f(t) dt, \quad a \leq x \leq b.$$

Démonstration. Définissons une fonction F sur $[a, b]$ dans \mathbb{R} , par

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x (x-t)f(t) dt, \\ &= \int_a^x x f(t) dt - \int_a^x t f(t) dt, \quad x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Comme $(x-t)f(t)$ et $\frac{\partial}{\partial x}((x-t)f(t))$, sont continues pour tous x et t dans $[a, b]$, donc

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_a^x (x-t)f(t) dt \right] \\ &= \left[(x-t)f(t) \right]_{t=x} \frac{d}{dx} x + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} ((x-t)f(t)) dt \\ &= \int_a^x f(t) dt + x f(x) - x f(x) \\ &= \int_a^x f(t) dt. \end{aligned}$$

Puisque, $\int_a^x f(t) dt$ et $\frac{dF}{dx}$, sont continues par rapport à x dans $[a, b]$, alors

$$\begin{aligned} F(x') &= F(x') - F(a) \\ &= \int_a^{x'} F'(x) dx \\ &= \int_a^{x'} \left(\int_a^x f(t) dt \right) dx. \end{aligned}$$

En échangeant les rôles de l'intégration, nous obtenons le résultat. □

Chapitre 2

Équations intégrales linéaires de Volterra de seconde espèce

Dans ce chapitre, nous essayons de se concentrer sur l'étude des équations intégrales linéaires de Volterra de seconde espèce, la façon de résoudre quelques équations de ce type. Nous commençons par résoudre cette équation à l'aide de la résolution d'une équation différentielle. Nous entreprenons à plusieurs méthodes de résolution dont : l'existence et l'unicité de la solution en utilisant le théorème du point fixe généralisé de Banach, la résolution à l'aide de la résolvante, et avec la méthode des approximations successives. Et puis nous étudions la résolution d'une équation intégrale du type convolution et ainsi de système d'équations intégrales du type convolution. Les principaux ouvrages utilisés dans ce chapitre sont [1, 3, 6, 7].

Définition 2.1. On appelle équation intégrale linéaire non homogène de Volterra de seconde espèce, l'équation intégrale de la forme suivante :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt. \quad (2.1)$$

où f est une fonction continue dans l'intervalle $[a, b]$, et K une fonction continue pour $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq x$, de plus $K(x, t) = 0$ pour $t > x$.

Comme indiqué au premier chapitre, l'équation (2.1) est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm.

Remarque 2.1.

1. Le noyau $K(x, t)$ étant une fonction bornée et continue sur l'intervalle $a \leq t \leq x \leq b$; où b est une quantité finie. Ainsi, la fonction K est définie dans le triangle compris entre l'axe des x , la bissectrice $x = t$, et une parallèle à l'axe des y , $x = b$; dans ce triangle on a :

$$|K(x, t)| \leq M,$$

tel que M un nombre strictement positif fini.

2. Si $f(x) = 0$ l'équation (2.1) sera une équation intégrale linéaire homogène de Volterra de seconde espèce.

Exemple 2.1. Équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce :

1. Non homogène

$$\varphi(x) = x - \int_0^x sh(x-t)\varphi(t)dt.$$

2. Homogène

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x \sin x \cos t \varphi(t) dt.$$

Définition 2.2. On appelle solution de l'équation intégrale (2.1), une fonction φ , qui dès qu'elle est portée dans cette équation, la change en identité.

2.1 L'opérateur intégrale de Volterra

Considérons l'opérateur intégral suivant

$$\begin{aligned} V & : C([a, b]) \longrightarrow C([a, b]) \\ \varphi & \longrightarrow V\varphi, \end{aligned}$$

tel que

$$(V\varphi)(x) = \int_a^x K(x, t)\varphi(t) dt$$

où K est un noyau borné et continu, l'opérateur V désigne l'opérateur intégrale de Volterra. Dans cette partie, on veut montrer que cet opérateur, est un opérateur compact. Montrons d'abord (par l'absurde), que l'opérateur de Volterra n'admet aucune valeur propre λ non nulle, autrement dit, le spectre ponctuel $\sigma_p(V) = \phi$. En effet Supposons qu'il existe $\lambda \neq 0$, telle que $\lambda \in \sigma_p(V)$, il existe alors $\varphi_0 \in C([a, b])$, où

$$(V - \lambda I)\varphi_0(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V\varphi_0(x) = \lambda\varphi_0(x),$$

c'est-à-dire

$$\lambda\varphi_0(x) = \int_a^x K(x, t)\varphi_0(t) dt.$$

Si $x = a$, on a $\lambda\varphi_0(x) = 0$ alors $\varphi_0(x) = 0$, car $\lambda \neq 0$.

Mais au voisinage de a elle est différente de 0, sans restreindre la généralisation, on peut supposer que

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \quad \varphi_0 : [a, a + \epsilon] & \longrightarrow \mathbb{C} \\ x & \longrightarrow \varphi_0(x), \end{aligned}$$

est non identiquement nulle. Soit $x_0 \in [a, a + \epsilon]$, tel que

$$\max_{a \leq x \leq a + \epsilon} \varphi_0(x) = \varphi_0(x_0),$$

donc

$$\lambda\varphi_0(x_0) = \int_a^{x_0} K(x_0, t)\varphi_0(t) dt,$$

d'où

$$\begin{aligned} |\lambda||\varphi_0(x_0)| & = \left| \int_a^{x_0} K(x_0, t)\varphi_0(t) dt \right| \\ & \leq |\varphi_0(x_0)| \sup_{a \leq t \leq b} |K(x_0, t)| \int_a^{x_0} dt, \quad x_0 \leq a + \epsilon, \\ & \leq |\varphi_0(x_0)| M\epsilon \end{aligned}$$

donc

$$|\lambda| \leq M\epsilon \sim \epsilon.$$

Prenons $\epsilon = \frac{1}{n}$, tel que $\epsilon \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$; donc $|\lambda| = 0$ implique $\lambda = 0$, **contradiction**. Alors, $\sigma_p(V) = \phi$, autrement dit, l'opérateur de Volterra n'admet aucune valeur propre non nulle.

Vérifiant maintenant qu'il est un opérateur compact.

Démonstration. Pour montrer la compacité de cet opérateur, on va utiliser le Théorème 1.1, c'est-à-dire, soit $\Phi = \{\varphi_i\} \subset C([a, b])$ un ensemble borné, montrons que $(V\varphi_i)$ est une famille uniformément bornée et équicontinue.

1. Uniformément bornée :

$$\|V\varphi_i\| = \sup_{a \leq x \leq b} \left| \int_a^x K(x, t)\varphi_i(t)dt \right|,$$

on a K et φ_i sont deux fonctions bornées et continues, alors

$$\begin{aligned} \|V\varphi_i\| &= \sup_{a \leq x \leq b} \left| \int_a^x K(x, t)\varphi_i(t)dt \right| \\ &\leq M\|\varphi_i\||b - a|. \end{aligned}$$

2. L'équicontinuité

$$\forall \epsilon > 0; \exists \delta > 0 : |x_1 - x_2| < \delta \implies \|V\varphi_i(x_1) - V\varphi_i(x_2)\| < \epsilon.$$

Pour t fixé, on a

$$\begin{aligned} K : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longrightarrow K(x, t), \end{aligned}$$

$$\forall \epsilon > 0; \exists \delta > 0 : |x_1 - x_2| < \delta \implies \|K(x_1, t) - K(x_2, t)\| < \epsilon, \quad (x_1 \leq x_2).$$

Donc

$$\begin{aligned} |V\varphi_i(x_1) - V\varphi_i(x_2)| &= \left| \int_a^{x_1} K(x_1, t)\varphi_i(t)dt - \int_a^{x_2} K(x_2, t)\varphi_i(t)dt \right| \\ &= \left| \int_a^{x_1} K(x_1, t)\varphi_i(t)dt - \int_a^{x_1} K(x_2, t)\varphi_i(t)dt + \int_{x_1}^{x_2} K(x_2, t)\varphi_i(t)dt \right| \\ &= \left| \int_a^{x_1} [K(x_1, t) - K(x_2, t)]\varphi_i(t)dt + \int_{x_1}^{x_2} K(x_2, t)\varphi_i(t)dt \right| \\ &\leq \epsilon^2\|\varphi_i\| + M\|\varphi_i\||x_1 - x_2| \\ &\leq \epsilon k + M_1\delta, \end{aligned}$$

prenons $\delta = \epsilon$, alors on trouve

$$|V\varphi_i(x_1) - V\varphi_i(x_2)| < \epsilon.$$

Alors l'opérateur de Volterra est un opérateur compact. □

2.2 Quelques méthodes de résolution

2.2.1 La relation entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra

Soit l'équation différentielle linéaire suivante :

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x)y = g(x), \quad (2.2)$$

avec les conditions initiales :

$$y(0) = C_0, \quad y'(0) = C_1, \dots, \quad (2.3)$$

telles que les a_i ($i = 1, \dots, n$) sont des coefficients continus. La résolution de l'équation (2.2) avec les conditions initiales (2.3), peut être ramenée à la résolution d'une équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

Considérons comme un exemple, l'équation différentielle du second ordre avec les conditions initiales

$$\begin{cases} y'' + \mu y = g(x), & x \in [0, L], \\ y(0) = 0, & y'(0) = C. \end{cases} \quad (2.4)$$

où μ est une constante positive, et g est une fonction continue sur $[0, L]$.

On intègre deux fois entre 0 et x ($x \in [0, L]$) les deux membres de l'équation du problème (2.4), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^x (y''(t) + \mu y(t)) dt &= \int_0^x g(t) dt, \\ \Leftrightarrow y'(t) \Big|_0^x + \mu \int_0^x y(t) dt &= \int_0^x g(t) dt, \\ \Leftrightarrow y'(x) - y'(0) + \mu \int_0^x y(t) dt &= \int_0^x g(t) dt, \end{aligned}$$

on intègre la dernière formule pour une deuxième fois, on trouve :

$$\int_0^x (y'(x') - y'(0)) dx' + \mu \int_0^x \int_0^{x'} (y(t) dt) dx' = \int_0^x \int_0^{x'} (g(t) dt) dx',$$

utilisons le Lemme 1.1, on résulte

$$\begin{aligned} y(x) - xy'(0) + \mu \int_0^x (x-t)y(t) dt &= \int_0^x (x-t)g(t) dt, \\ \Leftrightarrow y(x) - Cx + \mu \int_0^x (x-t)y(t) dt &= \int_0^x (x-t)g(t) dt, \\ \Leftrightarrow y(x) = Cx - \mu \int_0^x (x-t)y(t) dt + \int_0^x (x-t)g(t) dt. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} f(x) &= Cx + \int_0^x (x-t)g(t) dt, \\ K(x, t) &= -(x-t), \end{aligned}$$

nous obtenons alors

$$y(x) = f(x) + \mu \int_0^x K(x, t)y(t) dt, \quad (2.5)$$

il est clair que nous obtenons une équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

Remarque 2.2. *L'unicité de la solution de l'équation (2.5), résulte de l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.4).*

Applications

Application 1 :

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} y'' + xy' + y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Cherchons l'équation intégrale correspondante à cette équation.

Posons $y'' = \varphi(x)$, donc

$$\begin{aligned} y' &= \int_0^x \varphi(t)dt + y'(0) \\ &= \int_0^x \varphi(t)dt, \\ y &= \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + y(0) \\ &= \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + 1. \end{aligned}$$

Portons les formules de y' et de y dans l'équation différentielle donnée :

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \int_0^x x\varphi(t)dt + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + 1 &= \varphi(x) + \int_0^x (2x-t)\varphi(t)dt + 1 \\ &= 0, \\ \Rightarrow \varphi(x) &= \int_0^x (t-2x)\varphi(t)dt - 1. \end{aligned}$$

On va faire l'inverse, on va convertir une équation intégrale à une équation différentielle

Application 2 :

Soit l'équation intégrale suivante

$$u(x) = x^3 - \frac{1}{2} \sin x + \int_0^x (x^2 - t)u(t)dt.$$

Pour convertir une équation intégrale en équation différentielle, il faut dériver les deux membres de l'équation intégrale.

Alors, on va dériver l'équation donnée plusieurs fois, jusqu'à l'obtention d'une formule sans intégration

$$\begin{aligned} u'(x) &= 3x^2 - \frac{1}{2} \cos x + (x^2 - x)u(x) + 2 \int_0^x xu(t)dt, \\ u''(x) &= 6x + \frac{1}{2} \sin x + (2x - 1)u(x) + (x^2 - x)u'(x) + 2 \int_0^x u(t)dt + 2xu(x) \\ &= 6x + \frac{1}{2} \sin x + (4x - 1)u(x) + (x^2 - x)u'(x) + 2 \int_0^x u(t)dt, \\ u'''(t) &= 6 + \frac{1}{2} \cos x + 4u(x) + (4x - 1)u'(x) + (2x - 1)u'(x) + (x^2 - x)u''(x) + 2u(x) \\ &= 6 + \frac{1}{2} \cos x + 6u(x) + (6x - 2)u'(x) + (x^2 - x)u''(x). \end{aligned}$$

Cherchons maintenant les conditions initiales. On a d'après ce que précède,

$$u(0) = C_1, \quad u'(0) = C_2, \quad u''(0) = C_3, \dots$$

alors, on va calculer ces quantités, nous obtenons :

$$\begin{aligned} u(0) &= 0, \\ u'(0) &= -\frac{1}{2}, \\ u''(0) &= 0. \end{aligned}$$

Application 3 :

Résoudre l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce, en utilisant les équations différentielles.

$$\varphi(x) = x + \int_0^x t\varphi(t)dt, \tag{2.6}$$

mettons l'équation (2.6) sous la forme :

$$\varphi(x) = x \left(1 + \int_0^x t\varphi(t)dt \right), \tag{2.7}$$

posons

$$y(x) = 1 + \int_0^x t\varphi(t)dt, \tag{2.8}$$

dérivons l'équation (2.8), nous obtenons

$$y'(x) = x\varphi(x)$$

alors

$$\varphi(x) = \frac{1}{x}y'(x), \quad x \neq 0, \tag{2.9}$$

portons la formule (2.8) en l'équation (2.7), nous obtenons

$$\varphi(x) = xy(x),$$

remplace $\varphi(x)$ par sa valeur (2.9), nous obtenons

$$y'(x) = x^2y(x),$$

sa solution générale est donnée par :

$$y(x) = Ce^{\frac{x^3}{3}}.$$

En vertu de (2.8), nous avons $y(0) = 1$, donc $C = 1$. Ainsi, la solution $\varphi(x) = xy(x)$, de l'équation (2.6), est :

$$\varphi(x) = xe^{\frac{x^3}{3}}.$$

2.2.2 Application de théorème généralisé du point fixe de Banach aux équations intégrales de Volterra

Les théorèmes de Fredholm sont vrais aussi pour les équations intégrales de Volterra, mais ces théorèmes peuvent être précisés de la manière suivante :

Théorème 2.1. *Pour toute fonction $f \in L_2$, l'équation de Volterra (2.1) a une solution et une seule.*

Démonstration. Considérons l'opérateur suivant

$$\begin{aligned}(T\varphi)(x) &= f(x) + \lambda(V\varphi)(x) \\ &= f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt,\end{aligned}$$

tel que

$$(V\varphi)(x) = \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt,$$

d'après le Théorème 1.7, on va montrer que l'opérateur T^n est contractant, pour $n > 1$, ainsi $T\varphi$ admet un point fixe.

$$\begin{aligned}T\varphi &= f + \lambda V\varphi, \\ T^2\varphi &= T(T\varphi) = T(f + \lambda V\varphi) = f + \lambda V(f + \lambda V\varphi) = f + \lambda Vf + \lambda^2 V^2\varphi, \\ T^3\varphi &= T(T^2\varphi) = T(f + \lambda Vf + \lambda^2 V^2\varphi) = f + \lambda Vf + \lambda^2 V^2f + \lambda^3 V^3\varphi, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ T^n\varphi &= T(T^{n-1}\varphi) = f + \lambda Vf + \lambda^2 V^2f + \dots + \lambda^{n-1}V^{n-1}f + \lambda^n V^n\varphi.\end{aligned}$$

Donc, d'après la Définition 1.15, on a

$$\begin{aligned}\|T^n\varphi_1 - T^n\varphi_2\| &= \|f + \lambda Vf + \lambda^2 V^2f + \dots - (f + \lambda Vf + \dots) + \lambda^n V^n\varphi_1 - \lambda^n V^n\varphi_2\| \\ &= \|\lambda^n V^n\varphi_1 - \lambda^n V^n\varphi_2\| \\ &= |\lambda|^n \|V^n\varphi_1 - V^n\varphi_2\|, \\ &= |\lambda|^n \left\| \int_a^x K_n(x,t)(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))dt \right\|.\end{aligned}$$

Déterminons maintenant les K_n ; on a l'opérateur $V\varphi$ est donné par

$$(V\varphi)(x) = \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt,$$

donc

$$\begin{aligned}(V^2\varphi)(x) = V(V\varphi)(x) &= \int_a^x K(x,t)(V\varphi)(t)dt \\ &= \int_a^x K(x,t) \left[\int_a^t K(t,z)\varphi(z)dz \right] dt \\ &= \int_a^x K(x,t) \left[\int_a^t K(t,z)\varphi(z)dz \right] dt \\ &= \int_a^x K(x,t) \left[\int_z^t K(t,z)\varphi(z)dz \right] dt \\ &= \int_a^x \varphi(z)dz \int_z^x K(x,t)K(t,z)dt,\end{aligned}$$

on pose

$$K_2(x, t) = \int_z^x K(x, t)K(t, z)dt,$$

alors, nous obtenons

$$(V^2\varphi)(x) = \int_a^x K_2(x, z)\varphi(z)dz.$$

Posons

$$K_1(x, t) = K(x, t),$$

donc, par récurrence nous obtenons

$$\begin{aligned} K_2(x, t) &= \int_t^x K(x, z)K_1(z, t)dz, \\ K_3(x, t) &= \int_t^x K(x, z)K_2(z, t)dz, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ K_n(x, t) &= \int_t^x K(x, z)K_{n-1}(z, t)dz, \end{aligned}$$

et par hypothèse, on a $|K(x, t)| \leq M$, alors

$$\begin{aligned} |K_2(x, t)| &= \left| \int_t^x K(x, z)K_1(z, t)dz \right| \\ &\leq \int_t^x |K(x, z)||K_1(z, t)|dz \\ &\leq \int_t^x M^2 dz \\ &\leq M^2(x - t). \end{aligned}$$

De la même façon, on obtient :

$$\begin{aligned} |K_3(x, t)| &\leq \int_t^x |K(x, z)||K_2(z, t)|dz \\ &\leq M^3 \frac{(x - t)^2}{2}, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ |K_n(x, t)| &= \left| \int_t^x K(x, z)K_{n-1}(z, t)dz \right| \\ &\leq \int_t^x |K(x, z)K_{n-1}(z, t)|dz \\ &\leq M^n \frac{(x - t)^{n-1}}{(n - 1)!}, \end{aligned}$$

alors

$$|K_n(x, t)| \leq M^n \frac{(x - t)^{n-1}}{(n - 1)!}, \quad a \leq t \leq x \leq b. \quad (2.10)$$

Pour $n = 1$, la formule (2.10) est évidemment vraie. Supposons qu'elle est vraie pour n , et nous montrons pour $n + 1$, alors

$$\begin{aligned} |K_{n+1}(x, t)| &= \left| \int_t^x K(x, z)K_n(z, t)dz \right| \\ &\leq \int_t^x |K(x, z)K_n(z, t)|dz \\ &\leq \frac{M^{n+1}}{n!}(x - z)^n. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \|T^n \varphi_1 - T^n \varphi_2\| &= |\lambda|^n \left\| \int_a^x K_n(x, t)(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))dt \right\| \\ &\leq \frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!} \|\varphi_1 - \varphi_2\|. \end{aligned}$$

On pose

$$\alpha = \frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!},$$

il est claire que pour n assez grand, on a

$$0 < \frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!} < 1,$$

donc $\alpha \in]0, 1[$; alors d'après la Définition 1.15, l'opérateur T^n est un opérateur contractant, alors l'opérateur T admet un point fixe unique,

$$T\varphi = \varphi \iff f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt = \varphi(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

ce point fixe, est exactement la solution de l'équation (2.1). □

2.2.3 Résolution à l'aide de la résolvante

Définition 2.3. (La résolvante d'une équation intégrale) On appelle résolvante (ou le noyau résolvant) d'une équation intégrale, la fonction $R(x, t; \lambda)$ définie par

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, t). \tag{2.11}$$

Où les K_{n+1} sont les noyaux itérés définis par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} K_1(x, t) &= K(x, t), \\ K_2(x, t) &= \int_t^x K(x, z)K_1(z, t)dz, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ K_{n+1}(x, t) &= \int_t^x K(x, z)K_n(z, t)dz. \end{aligned}$$

Lemme 2.1. *La résolvante $R(x, t; \lambda)$, satisfait l'équation fonctionnelle suivante :*

$$R(x, t; \lambda) = K(x, t) + \lambda \int_t^x K(x, z)R(z, t; \lambda)dz. \quad (2.12)$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} R(x, t; \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, t) \\ &= K(x, t) + \lambda K_2(x, t) + \cdots + \lambda^n K_{n+1}(x, t) + \cdots \end{aligned}$$

Alors $R(z, t; \lambda)$ s'écrit comme suit

$$R(z, t; \lambda) = K(z, t) + \lambda K_2(z, t) + \cdots + \lambda^n K_{n+1}(z, t) + \cdots$$

multipliant les deux membres par $K(x, z)$, on obtient

$$\begin{aligned} K(x, z)R(z, t; \lambda) &= K(x, z) \left[K(z, t) + \lambda K_2(z, t) + \cdots + \lambda^n K_{n+1}(z, t) + \cdots \right] \\ &= K(x, z)K(z, t) + \lambda K(x, z)K_2(z, t) + \cdots + \lambda^n K(x, z)K_{n+1}(z, t) + \cdots \end{aligned}$$

on intègre les deux membres entre a et b , et on multiplie par λ , ou $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lambda \int_a^b K(x, z)R(z, t; \lambda)dz &= \lambda \left[\int_a^b K(x, z)K(z, t)dz + \right. \\ &\quad \left. \lambda \int_a^b K(x, z)K_2(z, t)dz + \cdots + \lambda^n \int_a^b K(x, z)K_{n+1}(z, t)dz + \cdots \right] \\ &= \lambda K_2(x, t) + \lambda^2 K_3(x, t) + \cdots + \lambda^n K_{n+2}(x, t) + \cdots \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} K(x, t) + \lambda \int_a^b K(x, z)R(z, t; \lambda)dz &= K(x, t) + \lambda K_2(x, t) + \cdots + \lambda^n K_{n+2}(x, t) + \cdots \\ &= R(x, t; \lambda), \end{aligned}$$

et comme l'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, juste pour le cas où $t > x$ on a $K(x, t) = 0$ (ou $x \in [a, b]$); donc la résolvante s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} R(x, t; \lambda) &= K(x, t) + \lambda \int_a^x K(x, z)R(z, t; \lambda)dz + \lambda \int_x^b K(x, z)R(z, t; \lambda)dz \\ &= K(x, t) + \lambda \int_a^x K(x, z)R(z, t; \lambda)dz \end{aligned}$$

Les noyaux itérés et la résolvante sont indépendants de la limite inférieure de l'intégrale dans l'équation intégrale. Donc la résolvante satisfait à l'équation fonctionnelle suivante :

$$R(x, t; \lambda) = K(x, t) + \lambda \int_t^x K(x, z)R(z, t; \lambda)dz.$$

□

Considérons maintenant, l'équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)\varphi(t)dt. \quad (2.13)$$

Où K est une fonction continue pour $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq x$; et f est une fonction continue lorsque $0 \leq x \leq a$.

Proposition 2.1. *Si le noyau $K(x, t)$ est continue, alors la série (2.11) converge absolument et uniformément quel que soit la valeur de λ .*

Démonstration. Soit l'équation intégrale (2.13), avec les mêmes hypothèses de la continuité pour les fonctions f et K , et des noyaux itérés suivants :

$$\begin{aligned} K(x, t) &= K_1(x, t), \\ K_2(x, t) &= \int_t^x K(x, z)K_1(z, t)dz, \\ &\vdots \\ K_n(x, t) &= \int_t^x K(x, z)K_{n-1}(z, t)dz. \end{aligned}$$

Tels que $K(x, z) = 0$ lorsque $x < z$, et $K(z, t) = 0$ lorsque $z < t$. D'après ce que précède, on a $|K(x, t)| \leq M$, et

$$\begin{aligned} |K_2(x, t)| &\leq M^2(x - t), \\ &\vdots \\ |K_{n+1}(x, t)| &\leq M^{n+1} \frac{(x - t)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} R(x, t; \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, t) \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n M^{n+1} \frac{(x - t)^n}{n!}. \end{aligned}$$

On remarque que la série majorante

$$M + M^2(x - t) + \frac{M^3}{2!}(x - t)^2 + \dots = Me^{M(x-t)},$$

converge d'une façon uniforme, on conclut donc que la série (2.11), est uniformément convergente et représente une fonction bornée et continue $R(x, t; \lambda)$, quel que soit la valeur de λ . \square

Théorème 2.2. *L'équation intégrale de Volterra de seconde espèce (2.13), dont le noyau $K(x, t)$ et la fonction f appartiennent respectivement à $L_2(\Omega_0)$ et à $L_2(0, a)$, admet une solution et une seule dans $L_2(0, a)$. Cette solution est donnée par la formule suivante :*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x, t; \lambda) f(t) dt, \quad (2.14)$$

où la résolvante $R(x, t; \lambda)$ est définie par la série

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, t).$$

Démonstration. Cherchons la solution de l'équation (2.13) sous la forme d'une série entière illimitée suivant les puissances de λ :

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \cdots + \lambda^n\varphi_n(x) + \dots \quad (2.15)$$

Substituant la formule (2.15) en l'équation (2.13), on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \cdots + \lambda^n\varphi_n(x) \dots &= f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) \left[\varphi_0(t) + \lambda\varphi_1(t) + \cdots + \lambda^n\varphi_n(t) \dots \right] dt, \\ &= f(x) + \lambda \int_0^x \left[K(x, t)\varphi_0(t) + \cdots + \lambda^n K(x, t)\varphi_n(t) \dots \right] dt. \end{aligned}$$

Par comparaison, on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= f(x), \\ \varphi_1(x) &= \int_0^x K(x, t)\varphi_0(t)dt = \int_0^x K(x, t)f(t)dt, \\ \varphi_2(x) &= \int_0^x K(x, t)\varphi_1(t)dt = \int_0^x K(x, t) \left[\int_0^t K(t, t_1)f(t_1)dt_1 \right] dt \\ &= \int_0^x f(t_1) \left[\int_0^x K(x, t)K(t, t_1)dt \right] dt_1, \\ &= \int_0^x K_2(x, t_1)f(t_1)dt_1, \end{aligned}$$

où

$$K_2(x, t_1) = \int_{t_1}^x K(x, t)K(t, t_1)dt.$$

Car, $K(x, t) = 0$ pour tout $t > x$, c'est-à-dire, si $t > x$, alors $t_1 < t$ et $K(t_1, t) = 0$. On établit de façon analogue, qu'en générale

$$\varphi(x) = \int_0^x K_n(x, t)f(t)dt, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.16)$$

Où les K_n sont les noyaux itérés, ils sont définies par les formules de récurrence

$$K_1(x, t) = K(x, t),$$

$$K_{n+1}(x, t) = \int_t^x K(x, z)K_n(z, t)dz, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.17)$$

Compte tenu de (2.16) et (2.17), l'égalité (2.15) peut s'écrire

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_0^x K_{n+1}(x, t)f(t)dt. \quad (2.18)$$

On pose

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, t),$$

donc l'équation (2.18), sera

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x, t; \lambda)f(t)dt,$$

Comme on démontre la convergence absolue et uniforme de la série (2.11), pour tout λ . Donc la résolvante de l'équation intégrale (2.13) est une fonction entière (voir [6]), et quel que soit λ , cette équation admet une solution unique donnée par la formule suivante :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x, t; \lambda)f(t)dt. \quad (2.19)$$

Unicité de la solution

Soient φ_1 et φ_2 (voir [7]), sont deux solutions de l'équation (2.1), on pose

$$\varphi_3(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x),$$

on aura l'équation

$$\begin{aligned} \varphi_3(x) &= \int_0^x K(x, z)\varphi_3(z)dz, \\ &= \int_0^x K(x, z) \left[\int_0^z K(z, t) [\varphi_1(t) - \varphi_2(t)] dt \right] dz \\ &= \int_0^x K(x, z) \left[\int_0^z K(z, t) \varphi_3(t) dt \right] dz, \end{aligned}$$

on a alors

$$\begin{aligned} \varphi_3(x) &= \int_0^x \varphi_3(t) \left[\int_z^x K(x, z)K(z, t)dz \right] dt \\ &= \int_0^x K_2(x, t)\varphi_3(t)dt, \end{aligned}$$

et ainsi de suite. On obtient finalement :

$$\varphi_3(x) = \int_0^x K_n(x, t)\varphi_3(t)dt.$$

Pour quelque grand que soit n ; on a :

$$|\varphi_3| \leq m,$$

et on a déjà vu que :

$$|K_{n+1}(x, t)| \leq M^{n+1} \frac{(x-t)^n}{n!}$$

où, m et M sont deux quantités finies ; donc :

$$\begin{aligned} |\varphi_3(x)| &= \left| \int_0^x K_n(x, t)\varphi_3(t)dt \right| \\ &\leq \int_0^x |K_n(x, t)| |\varphi_3(t)| dt \\ &\leq m M^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt = m M^{n+1} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Donc, pour n assez grand, on aura :

$$\varphi_3(x) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x).$$

□

Application

Cherchons la résolvante de l'équation intégrale de Volterra à noyau $K(x, t) = 1$.
On a

$$K_1(x, t) = K(x, t) = 1,$$

Utilisant la formule (2.17), on obtient :

$$\begin{aligned} K_2(x, t) &= \int_t^x K(x, z)K_1(z, t)dz \\ &= \int_t^x dz = (x - t), \\ K_3(x, t) &= \int_t^x 1 \cdot (z - t)dz \\ &= \frac{x^2 - 2xt + t^2}{2} = \frac{(x - t)^2}{2}, \\ K_4(x, t) &= \int_t^x K(x, z)K_3(z, t)dz \\ &= \int_t^x \frac{(z - t)^2}{2} = \frac{(x - t)^3}{3!}, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ K_n(x, t) &= \int_t^x K(x, z)K_{n-1}(z, t)dz \\ &= \int_t^x \frac{(x - t)^{n-1}}{(n - 1)!}, \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} K_{n+1}(x, t) &= \int_t^x K(x, z)K_n(z, t)dz \\ &= \frac{(x - t)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Donc, par définition on a :

$$\begin{aligned} R(x, t; \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \frac{(x - t)^n}{n!} \\ &= e^{\lambda(x-t)}. \end{aligned}$$

Cas où le noyau est un polynôme de degré $n - 1$

Supposons que le noyau $K(x, t)$ est un polynôme de degré $n - 1$ en t , qu'il peut s'écrire

$$K(x, t) = a_0(x) + a_1(x)(x - t) + \dots + \frac{a_{n-1}(x)}{(n - 1)!}(x - t)^{n-1}, \quad (2.20)$$

Les coefficients $a_k(x)$ étant continus dans $[0, a]$. En définissant une fonction $g(x, t; \lambda)$, telle que cette fonction doit être une solution de l'équation différentielle suivante

$$\frac{d^n g(x, t; \lambda)}{dx^n} - \lambda \left[a_0(x) \frac{d^{n-1} g(x, t; \lambda)}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} g(x, t; \lambda) \right] = 0, \quad (2.21)$$

qui vérifient les conditions :

$$g \Big|_{x=t} = \frac{dg}{dx} \Big|_{x=t} = \dots = \frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}} \Big|_{x=t} = 0, \quad \frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}} \Big|_{x=t} = 1. \quad (2.22)$$

La résolvante $R(x, t; \lambda)$ sera définie comme suit

$$R(x, t; \lambda) = \frac{1}{\lambda} \frac{d^n g(x, t; \lambda)}{dx^n}, \quad \lambda \neq 0. \quad (2.23)$$

Exemple 2.2. Trouver la résolvante de l'équation intégrale suivante

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt, \quad (2.24)$$

et donnez sa solution. Il est clair que, $K(x, t) = x - t$, et $\lambda = 1$, par conséquent, selon (2.20), on a $a_1(x) = 1$ et les $a_k(x)$ sont nuls. Donc d'après la formule (2.21) on a

$$\frac{d^2 g(x, t; \lambda)}{dx^2} - g(x, t; \lambda) = 0,$$

et comme nous l'avons dit plus tôt, la fonction g est une solution de l'équation différentielle précédente, qui vérifie les deux conditions

$$g \Big|_{x=t} = 0, \quad \frac{dg}{dx} \Big|_{x=t} = 1, \quad (2.25)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} g(x, t; \lambda) &= g(x, t; 1) \\ &= g(x, t) \\ &= C_1(t)e^x + C_2(t)e^{-x}, \end{aligned}$$

selon les conditions (2.25), on a

$$\begin{cases} C_1(t)e^t + C_2(t)e^{-t} = 0, \\ C_1(t)e^t - C_2(t)e^{-t} = 1. \end{cases}$$

En résolvant ce système :

$$\begin{aligned} 2C_1e^t + C_2e^{-t} - C_2e^{-t} &= 1, \\ \Leftrightarrow 2C_1e^t &= 1, \\ \Leftrightarrow C_1 &= \frac{1}{2}e^{-t}, \\ C_1(t)e^t + C_2(t)e^{-t} = 0 &\Leftrightarrow C_1(t)e^t = -C_2(t)e^{-t}, \\ \Rightarrow C_2 &= -\frac{1}{2}e^t, \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} g(x, t) &= \frac{1}{2}e^{-t}e^x - \frac{1}{2}e^te^{-x} \\ &= \frac{1}{2}(e^{(x-t)} - e^{-(x-t)}) \\ &= sh(x-t). \end{aligned}$$

Dans ce cas là, et d'après la formule (2.23), la résolvante de l'équation intégrale donnée, est

$$\begin{aligned} R(x, t; 1) &= \frac{d^2 g(x, t)}{dx^2} \\ &= \frac{d^2}{dx^2} sh(x - t) \\ &= sh(x - t). \end{aligned}$$

Alors, la solution de l'équation intégrale (2.24) est donnée par :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x sh(x - t)f(t)dt.$$

Remarque importante

Au début de ce chapitre, on a montré que l'opérateur de Volterra n'admet aucune valeur propre λ non nulle ; donc, on peut affirmer que l'équation intégrale de Volterra (2.1), ne possède pas de nombres caractéristiques ; c'est-à-dire, l'équation homogène :

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt,$$

pour n'importe qu'elle valeur de λ , ne possède que la solution nulle. Autrement dit, l'équation (2.1) est résoluble quelque soit le terme libre $f(x)$ et admet une solution unique.

2.2.4 Méthode des approximations successives

Soit l'équation intégrale de Volterra (2.13) avec les mêmes hypothèses de la continuité des fonctions f et K . Soit φ_0 une fonction continue sur $[0, a]$, prenons cette fonction et substituons-la à $\varphi(x)$ du second membre de (2.13), nous obtenons

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)\varphi_0(t)dt.$$

La fonction φ_1 ainsi définie est continue sur l'intervalle $[0, a]$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)\varphi_1(t)dt, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \varphi_n(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)\varphi_{n-1}(t)dt. \end{aligned}$$

Remarque 2.3. *En particulier, si on prend $\varphi_0(x) = f(x)$, alors $\varphi_0(x)$ seront justement les sommes partielles de la série (2.15) donnant la solution de l'équation (2.13).*

Alors

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\varphi_1(t)dt \\ &= f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)f(t)dt + \lambda^2 \int_0^x K_2(x,t)f(t)dt, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \varphi_n(x) &= f(x) + \sum_{m=1}^n \lambda^m \int_0^x K_m(x,t)f(t)dt,\end{aligned}$$

où les K_m sont les noyaux itérés. Par passage à la limite, quand $n \rightarrow \infty$, on obtient ce qu'on appelle série de Neumann

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_0^x K_m(x,t)f(t)dt, \quad (2.26)$$

cette série est uniformément convergente (voir [4]).

Théorème 2.3. *L'équation intégrale de Volterra (2.13), avec le noyau K continue sur le carré Ω_0 , et λ un paramètre réel, admet une solution unique $\varphi(x) \in C([0, a])$ pour toute $f \in C([0, a])$, cette solution est donnée par la série de Neumann (2.26).*

Application

Résoudre l'équation intégrale suivante

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi(t)dt,$$

par la méthode des approximations successives, en posant $\varphi_0(x) = 0$.

Solution On a $\varphi_0(x) = 0$, alors

$$\varphi_1(x) = 1 + \int_0^x \varphi_0(t)dt,$$

donc $\varphi_1(x) = 1$. En continuant, nous obtenons

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) &= 1 + \int_0^x dt = 1 + x, \\ \varphi_3(x) &= 1 + \int_0^x (1+t)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \\ \varphi_4(x) &= 1 + \int_0^x (1+t+\frac{t^2}{2})dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.\end{aligned}$$

On a de toute évidence

$$\varphi_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Donc, $\varphi_n(x)$ est la $n - i\grave{e}me$ somme partielle de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

D'où $\varphi_n(x) \rightarrow e^x$. Vérifiant que la fonction $\varphi(x) = e^x$ est la solution de l'équation intégrale donnée

$$\begin{aligned} 1 + \int_0^x e^t dt &= 1 + e^t \Big|_0^x \\ &= 1 + e^x - 1 = e^x, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

2.2.5 Équations intégrales de Volterra du type convolution

Définition 2.4. On appelle équation intégrale du type convolution (ou bien à noyau différence), si $K(x, t) = K(x - t)$.

Considérons l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce de noyau dépendant uniquement de la différence $(x - t)$

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x - t)\varphi(t)dt. \quad (2.27)$$

Supposons que f et K des fonctions décroissent rapidement vers 0 (des fonctions croissent quand x tend vers à l'infini, au plus comme une fonction exponentielle); et admettent la majoration suivante :

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq Ae^{-ax}, \\ |K(x)| &\leq Be^{-bx}, \end{aligned}$$

où A et B sont des constantes strictement positives, et $a, b \geq 0$. Supposons que K_0 et f_0 sont les bornes supérieures de $|K(x)|$ et $|f(x)|$ respectivement pour $x \geq 0$.

En appliquant à l'équation (2.27) la méthode des approximations successives, on obtient pour $\varphi(x)$, $x \geq 0$, la majoration :

$$|\varphi(x)| \leq f_0 e^{K_0 x}.$$

Il résulte alors qu'on peut appliquer la transformation de Laplace aux fonction $\varphi(x)$, $f(x)$ et $K(x)$, nous obtenons les transformées de Laplace suivantes :

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= \mathcal{L}\{\varphi(x)\}, \\ F(p) &= \mathcal{L}\{f(x)\}, \\ \tilde{K}(p) &= \mathcal{L}\{K(x)\}. \end{aligned}$$

Effectuant sur les deux membres de l'équation (2.27), la transformation de Laplace et utilisant la Propriété 1.1 du produit de convolution, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\varphi(x)\} &= \mathcal{L}\{f(x)\} + \mathcal{L}\left\{\int_0^x K(x - t)\varphi(t)dt\right\} \\ &= \mathcal{L}\{f(x)\} + \mathcal{L}\{K(x) * \varphi(x)\} \\ &= \mathcal{L}\{f(x)\} + \mathcal{L}\{K(x)\}\mathcal{L}\{\varphi(x)\}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\Phi(p) &= F(p) + \tilde{K}(p)\Phi(p), \\ \Leftrightarrow \Phi(p)(1 - \tilde{K}(p)) &= F(p),\end{aligned}$$

d'où

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - \tilde{K}(p)}, \quad (\tilde{K}(p) \neq 1). \quad (2.28)$$

L'original $\varphi(x)$ de $\Phi(p)$ est la solution de l'équation (2.27), c'est-à-dire, on applique la transformation de Laplace inverse (la Proposition 1.2) à la transformée $\Phi(p)$ pour trouver la solution.

Application

Déterminons la solution de l'équation intégrale suivante

$$\varphi(x) = x^2 + \int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)dt,$$

utilisons la transformation de Laplace, et la Propriété 1.1, nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\varphi(x)\} &= \mathcal{L}\{x^2\} + \mathcal{L}\left\{\int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)dt\right\} \\ \mathcal{L}\{\varphi(x)\} &= \mathcal{L}\{x^2\} + \mathcal{L}\{\sin x * \varphi(x)\}.\end{aligned}$$

D'après l'exemple 1.1 (toujours pour $Re p > 0$), nous avons

$$\Phi(p) = \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p^2 + 1}\Phi(p),$$

d'où

$$\begin{aligned}\Phi(p)\left(1 - \frac{1}{p^2 + 1}\right) &= \frac{2}{p^3}, \\ \Phi(p)\left(\frac{p^2}{p^2 + 1}\right) &= \frac{2}{p^3} \\ \Phi(p) &= \frac{2(p^2 + 1)}{p^5},\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\Phi(p) &= \frac{2}{p^3} + \frac{2}{p^5} \\ &= \frac{2}{p^3} + \left(\frac{4!}{4!}\right)\frac{2}{p^5} \\ &= \frac{2}{p^3} + \left(\frac{2}{4!}\right)\frac{4!}{p^5},\end{aligned}$$

utilisons la Proposition 1.1, pour trouver la solution $\varphi(x)$ l'original de $\Phi(p)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{\Phi(p)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{p^3} + \left(\frac{2}{4!}\right)\frac{4!}{p^5}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{p^3}\right\} + \frac{2}{4!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{p^5}\right\},\end{aligned}$$

alors la solution de l'équation donnée est

$$\varphi(x) = x^2 + \frac{x^4}{12}.$$

Proposition 2.2. *Si le noyau K est une fonction de la différence $(x - t)$, alors la résolvante de l'équation intégrale (2.27) est aussi une fonction de la différence $(x - t)$.*

Démonstration. Montrons d'abord, que s'agissant de l'équation (2.27), tous les noyaux itérés ne dépendent que de la différence $(x - t)$. Nous avons

$$\begin{aligned} K_1(x, t) &= K(x - t), \\ K_2(x, t) &= \int_t^x K(x - z)K_1(z - t)dz \\ &= \int_t^x K(x - t + t - z)K_1(z - t)dz \\ &= \int_t^x K(x - t - (z - t))K_1(z - t)dz, \end{aligned}$$

on va faire un changement de variable, on pose

$$\begin{aligned} x - t &= u, \\ z - t &= \tau, \end{aligned}$$

remplaçons $x - t$ et $z - t$ par les nouvelles variables u et τ , nous obtenons

$$K_2(u, \tau) = K_2(u - \tau) = \int_0^u K(u - \tau)K_1(\tau)d\tau,$$

ce qui implique que K_2 est une fonction de la différence $(x - t)$. En général, nous avons

$$K_{n+1}(x - t) = \int_0^u K(u - \tau)K_n(\tau)d\tau. \quad (2.29)$$

On a au début, la formule (2.11), pour notre cas (l'équation intégrale (2.27)) $\lambda = 1$, donc la formule (2.11) sera s'écrit sous la forme suivante ;

$$R(x, t; \lambda) = R(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x, t),$$

de sorte que K_{n+1} est donné par (2.29), alors

$$R(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x - t).$$

On peut affirmer que si le noyau K est une fonction de la différence $(x - t)$, alors la résolvante (le noyau résolvant) de l'équation (2.27), dépendra uniquement de la différence mentionnée. On désigne cette résolvante $R(x - t)$, en se servant de la formule (2.14) on peut alors écrire la solution de l'équation (2.27) sous la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x R(x - t)f(t)dt. \quad (2.30)$$

□

En utilisant la transformation de Laplace et la Propriété 1.1 aux deux membres de l'équation (2.30), où $\mathcal{L}\{R(x-t)\} = \tilde{R}(p)$ (voir [6]), nous avons alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\varphi(x)\} &= \mathcal{L}\{f(x)\} + \mathcal{L}\left\{\int_0^x R(x-t)f(t)dt\right\} \\ &= \mathcal{L}\{f(x)\} + \mathcal{L}\{R(x-t)\}\mathcal{L}\{\varphi(x)\},\end{aligned}$$

nous obtenons

$$\Phi(p) = F(p) + \tilde{R}(p)F(p),$$

d'après la formule (2.28), on peut exprimer $\tilde{R}(p)$ en fonction de $\tilde{K}(p)$ qui est connue, alors on remplace $\Phi(p)$ par la formule (2.28), c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\frac{F(p)}{1 - \tilde{K}(p)} &= F(p) + \tilde{R}(p)F(p) \\ &= F(p)(1 + \tilde{R}(p)),\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - \tilde{K}(p)} &= 1 + \tilde{R}(p), \\ \Leftrightarrow \tilde{R}(p) &= \frac{\tilde{K}(p)}{1 - \tilde{K}(p)},\end{aligned}$$

et l'inversion de cette formule, nous donne la résolvante $R(x)$, utilisant la Proposition 1.2 nous obtenons

$$R(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \tilde{R}(p)e^{px} dp.$$

En portant $R(x)$ dans la formule (2.30), nous obtenons la solution.

2.2.6 Système d'équations intégrales de Volterra du type convolution

La méthode des transformées de Laplace peut s'appliquer aussi à la résolution de système des équations intégrales de Volterra du type suivant

$$\varphi_i(x) = f_i(x) + \sum_{j=1}^l \int_0^x K_{ij}(x-t)\varphi_j(t)dt, \quad (i = 1, \dots, l), \quad (2.31)$$

où K_{ij} et f_i sont des fonctions continues données admettant des transformées de Laplace $\tilde{K}_{ij}(p)$ et $F_i(p)$ respectivement. En appliquant au système (2.31) la transformation de Laplace terme à terme, nous trouvons

$$\mathcal{L}\{\varphi_i(x)\} = \mathcal{L}\{f_i(x)\} + \mathcal{L}\left\{\sum_{j=1}^l \int_0^x K_{ij}(x-t)\varphi_j(t)dt\right\}, \quad (i = 1, \dots, l). \quad (2.32)$$

La résolution de système des équations intégrales (2.32) donne $\Phi_i(p)$, dont les originaux $\varphi_i(x)$ sont exactement les solutions de système d'équations intégrales (2.31).

Applications

Application 1

Résoudre le système d'équations intégrales suivant

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 1 - 2 \int_0^x e^{2(x-t)} \varphi_1(t) dt + \int_0^x \varphi_2(t) dt, \\ \varphi_2(x) = 4x - \int_0^x \varphi_1(t) dt + 4 \int_0^x (x-t) \varphi_2(t) dt. \end{cases}$$

Cherchons par la transformation de Laplace, l'image de ce système, nous obtenons

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{\varphi_1(x)\} = \mathcal{L}\{1\} - 2\mathcal{L}\left\{\int_0^x e^{2(x-t)} \varphi_1(t) dt\right\} + \mathcal{L}\left\{\int_0^x \varphi_2(t) dt\right\}, \\ \mathcal{L}\{\varphi_2(x)\} = \mathcal{L}\{4x\} - \mathcal{L}\left\{\int_0^x \varphi_1(t) dt\right\} + 4\mathcal{L}\left\{\int_0^x (x-t) \varphi_2(t) dt\right\}. \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{\varphi_1(x)\} = \mathcal{L}\{1\} - 2\mathcal{L}\{e^{2x} * \varphi_1(x)\} + \mathcal{L}\{1 * \varphi_2(x)\}, \\ \mathcal{L}\{\varphi_2(x)\} = \mathcal{L}\{4x\} - \mathcal{L}\{1 * \varphi_1(x)\} + 4\mathcal{L}\{x * \varphi_2(x)\}. \end{cases}$$

D'après l'exemple 1.1, et la Propriété 1.1, où

$$\mathcal{L}\{e^{2x}\} = \frac{1}{p-2}, \quad \mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{p^2}, \quad \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p}, \quad (Re\ p > 0),$$

nous obtenons le système des transformées de Laplace suivant

$$\begin{cases} \Phi_1(p) = \frac{1}{p} - \frac{2}{p-2} \Phi_1(p) + \frac{1}{p} \Phi_2(p), \\ \Phi_2(p) = \frac{4}{p^2} - \frac{1}{p} \Phi_1(p) + \frac{4}{p^2} \Phi_2(p). \end{cases} \quad (2.33)$$

On va résoudre ce système par rapport à $\Phi_1(p)$ et $\Phi_2(p)$; de deuxième équation du (2.33) on a

$$\begin{aligned} \Phi_2(p) \left(1 - \frac{4}{p^2}\right) &= \frac{4}{p^2} - \frac{1}{p} \Phi_1(p), \\ \Leftrightarrow \Phi_2(p) \left(\frac{p^2 - 4}{p^2}\right) &= \frac{4}{p^2} - \frac{1}{p} \Phi_1(p), \\ \Leftrightarrow \Phi_2(p) &= \frac{4 - p\Phi_1(p)}{(p-2)(p+2)}, \end{aligned}$$

en remplaçons $\Phi_2(p)$ par sa valeur qui est en fonction de $\Phi_1(p)$, dans la première équation de (2.33), on aura

$$\begin{aligned} \Phi_1(p) &= \frac{p}{(p+1)^2} \\ &= \frac{a}{p+1} + \frac{b}{(p+1)^2} \\ &= \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2}, \end{aligned}$$

on remplace $\Phi_1(p)$ dans la deuxième équation de (2.33),

$$\begin{aligned}\Phi_2(p) &= \frac{4}{p^2} - \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} \right) + \frac{4}{p^2} \Phi_2(p) \\ &= \frac{4}{p^2} - \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{4}{p^2} \Phi_2(p) \\ &= \frac{3p^2 + 8p + 1}{(p-2)(p+2)(p+1)^2} \\ &= \frac{(p+2)(p + \frac{2}{3})}{(p-2)(p+2)(p+1)^2} \\ &= \frac{3p+2}{3(p-2)(p+1)^2},\end{aligned}$$

alors

$$\Phi_2(p) = \frac{a}{p-2} + \frac{c}{(p+1)^2} + \frac{b}{3(p+1)},$$

cherchons les valeurs de a, b et c , nous obtenons,

$$a = \frac{8}{9}, \quad b = -\frac{8}{9}, \quad c = \frac{1}{3},$$

donc

$$\begin{cases} \Phi_1(p) = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2}, \\ \Phi_2(p) = \frac{1}{9} \left(\frac{8}{p-2} - \frac{8}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1} \right). \end{cases}$$

Utilisons la Propriété 1.1, pour trouver les originaux de $\Phi_1(p)$ et $\Phi_2(p)$

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{-1}\{\Phi_1(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} \right\}, \\ \mathcal{L}^{-1}\{\Phi_2(p)\} = \frac{1}{9} \mathcal{L}^{-1}\left\{ \left(\frac{8}{p-2} - \frac{8}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1} \right) \right\}. \end{cases}$$

Où

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{p-2} \right\} = e^{2x}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{p+1} \right\} = e^{-x}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{(p+1)^2} \right\} = xe^{-x},$$

alors la solution du système donné est

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = e^{-x} - xe^{-x}, \\ \varphi_2(x) = \frac{2}{9} \left(4e^{2x} - e^{-x} - 4xe^{-x} \right). \end{cases}$$

Application 2

Soit le système d'équations intégrales suivant

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \sin x + \int_0^x \varphi_2(t) dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \cos x - \int_0^x \varphi_1(t) dt, \end{cases}$$

pour résoudre ce système on va le transformer par Laplace,

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{\varphi_1(x)\} = \mathcal{L}\{\sin x\} + \mathcal{L}\left\{\int_0^x \varphi_2(t) dt\right\}, \\ \mathcal{L}\{\varphi_2(x)\} = \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{\cos x\} - \mathcal{L}\left\{\int_0^x \varphi_1(t) dt\right\}, \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} \Phi_1(p) = \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{1}{p}\Phi_2(p), \\ \Phi_2(p) = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{1}{p}\Phi_1(p), \end{cases}$$

on va résoudre ce système, on obtient

$$\begin{cases} \Phi_1(p) = \frac{2}{p^2 + 1} - \frac{p^2}{(p^2 + 1)^2} - \frac{1}{(p^2 + 1)^2}, \\ \Phi_2(p) = \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{p^3}{(p^2 + 1)^2} - \frac{p}{(p^2 + 1)^2}. \end{cases}$$

D'après la table des transformées de Laplace (voir [2]), nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2 + 1}\right\} &= \sin x, & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2 + 1}\right\} &= \cos x, \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2 + 1)^2}\right\} &= \frac{\sin x - x \cos x}{2}, & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{(p^2 + 1)^2}\right\} &= \frac{x \sin x}{2}, \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p^2}{(p^2 + 1)^2}\right\} &= \frac{\sin x + x \cos x}{2}, & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p^3}{(p^2 + 1)^2}\right\} &= \cos x - \frac{x \sin x}{2}, \end{aligned}$$

alors

$$\mathcal{L}^{-1}\{\Phi_1(p)\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2 + 1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p^2}{(p^2 + 1)^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2 + 1)^2}\right\},$$

d'où

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 2 \sin x - \frac{\sin x + x \cos x}{2} - \frac{\sin x - x \cos x}{2} \\ &= \sin x, \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{L}^{-1}\{\Phi_2(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2 + 1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p^3}{(p^2 + 1)^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{(p^2 + 1)^2}\right\},$$

alors

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) &= \cos x - \cos x + \frac{x \sin x}{2} - \frac{x \sin x}{2} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc la solution du système est donnée par

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \sin x, \\ \varphi_2(x) = 0. \end{cases}$$

Chapitre 3

Équations intégrales linéaires de Volterra de première espèce

Dans ce chapitre, nous avons étudié quelques méthodes de résolution, pour résoudre une équation intégrale de Volterra de première espèce. On sait que la résolution d'une telle équation est un problème, en général, plus compliqué que celui de la résolution d'une équation intégrale de seconde espèce. Dans la suite, on va parler juste pour les cas où la résolution de l'équation intégrale de première espèce est possible. Les principaux ouvrages utilisés sont [1, 3, 6, 7].

Définition 3.1. On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce, l'équation intégrale de la forme $V\varphi = f$, où

$$(V\varphi)x = \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt, \quad (3.1)$$

c'est-à-dire, une équation ne contenant la fonction inconnue φ que sous le signe d'un opérateur compact.

3.1 Résolution d'une équation intégrale de Volterra de première espèce

Il est possible de transformer facilement une équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce en équation intégrale linéaire de seconde espèce ; moyennant une certaine condition supplémentaire.

Considérons l'équation intégrale de Volterra de première espèce :

$$\int_0^x K(x, t)\varphi(t)dt = f(x). \quad (3.2)$$

On remarque que l'équation (3.2) vérifiée la condition $f(0) = 0$. Supposons que $K(x, t)$, $K'_x(x, t)$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont continues pour $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq x$.

Dérivons l'équation (3.2) terme à terme par rapport à x , nous obtenons :

$$\int_0^x \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} \varphi(t)dt + K(x, x)\varphi(x) = f'(x) \quad (3.3)$$

Si $K(x, x) = 0$, il y a parfois intérêt à dériver une deuxième fois l'équation (3.3) par rapport à x , et ainsi de suite.

Supposons que $K(x, x)$ est différent de zéro, en divisant l'équation (3.3) par cette quantité, nous obtenons alors

$$\varphi(x) + \int_0^x \frac{K'_x(x, t)}{K(x, x)} \varphi(t) dt = \frac{f'(x)}{K(x, x)}. \quad (3.4)$$

Remarque 3.1. *En tenant compte de la condition $f(0) = 0$, on passe facilement de l'équation (3.3) à l'équation (3.2), c'est-à-dire; ces équations sont équivalentes. Nous voyons donc que la condition $K(x, x) \neq 0$ est suffisante pour qu'il y ait une et une seule solution.*

Exemple 3.1. Soit l'équation intégrale suivante

$$f(x) = \int_a^x \varphi(t) dt,$$

il est clair que $K(x, t) = 1$, pour $t \leq x$. Cette équation a une solution évidente $\varphi(x) = f'(x)$, si la fonction f est absolument continue et sa dérivée appartient à L_2 , et n'a aucune solution dans le cas contraire.

3.2 Equation intégrale de Volterra de première espèce du type de convolution

Définition 3.2. On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce du type de convolution, si le noyau $K(x, t)$ qui figure dans l'équation (3.2) dépend uniquement de la différence $(x - t)$, c'est-à-dire l'équation intégrale qui est de la forme

$$\int_0^x K(x - t) \varphi(t) dt = f(x). \quad (3.5)$$

Transformons par Laplace, les deux membres de l'équation (3.5), et utilisons la Propriété 1.1, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\int_0^x K(x - t) \varphi(t) dt\right\} &= \mathcal{L}\{f(x)\}, \\ \Leftrightarrow \mathcal{L}\{K(x) * \varphi(x)\} &= \mathcal{L}\{f(x)\}, \\ \Leftrightarrow \tilde{K}(p) \Phi(p) &= F(p), \end{aligned}$$

d'où

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{\tilde{K}(p)}, \quad (\tilde{K}(p) \neq 0). \quad (3.6)$$

Utilisons le Théorème 1.2 à l'équation (3.6), nous obtenons l'original $\varphi(x)$ qui est la solution de l'équation (3.5).

3.3 Cas où le noyau devient infini

Supposons que $K(x, t)$ devienne infinie (faiblement singulier) d'ordre $\alpha < 1$ pour $x - t$, où $x - t$ étant infiniment petit (voir [6, 7]). Alors on peut écrire

$$K(x, t) = \frac{H(x, t)}{(x - t)^{1-\alpha}}, \quad (0 < \alpha < 1),$$

où H et sa première dérivée par rapport à x sont continues et bornées telles que

$$|H(x, t)| \leq M, \quad \left| \frac{\partial H(x, t)}{\partial x} \right| \leq N.$$

Donc, notre équation intégrale de Volterra du première espèce sera écrite comme suit

$$\int_0^x \frac{H(x, t)}{(x - t)^{1-\alpha}} \varphi(t) dt = f(x). \quad (3.7)$$

Équation intégrale d'Abel :

Cette équation est un exemple d'une équation intégrale de Volterra de première espèce, elle définit comme suit

$$f(x) = \int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x - t)^\alpha} dt,$$

où $0 < \alpha < 1$, et $f(0) = 0$. Abel a montré que la solution de cette équation est donnée par

$$\varphi(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^x \frac{f'(t)}{(x - t)^{1-\alpha}} dt.$$

Pour la preuve voir [7].

3.3.1 Applications

Application 1

Résoudrons l'équation intégrale suivante :

$$\int_0^x \cos(x - t) \varphi(t) dt = x, \quad (3.8)$$

Nous remarquons que $f(x) = x$ et $K(x, t) = \cos(x - t)$, sont des fonctions continues et dérivables sur l'intervalle mentionné.

Nous dérivons les deux membres de l'équation (3.8) par rapport à x , nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \cos(x - x) \varphi(x) + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} (\cos(x - t)) \varphi(t) dt = 1, \\ \Leftrightarrow & \varphi(x) - \int_0^x \sin(x - t) \varphi(t) dt = 1, \\ \Leftrightarrow & \varphi(x) = 1 + \int_0^x \sin(x - t) \varphi(t) dt, \end{aligned}$$

il est claire que le résultat est une équation intégrale de Volterra de seconde espèce de type de convolution. Pour résoudre cette équation, on va utiliser la transformation de Laplace,

où

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\varphi(x)\} &= \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\left\{\int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)dt\right\} \\ &= \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\left\{\sin x * \varphi(x)\right\}, \\ \Leftrightarrow \Phi(p) &= \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2+1}\Phi(p),\end{aligned}$$

d'où

$$\Phi(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^3}.$$

En appliquant la transformation de Laplace inverse (la Proposition 1.2), pour trouver la solution $\varphi(x)$ de l'équation intégrale de seconde espèce

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{\Phi(p)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p} + \frac{1}{p^3}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p} + \frac{2}{2p^3}\right\},\end{aligned}$$

d'où

$$\varphi(x) = 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Vérifiant qu'elle est une solution de l'équation intégrale du première espèce (3.8), on va remplacer $\varphi(x)$ par sa valeur dans (3.8), il faut obtenir l'identité,

$$\int_0^x \cos(x-t)\left(1 + \frac{t^2}{2}\right)dt = x?$$

alors, utilisant l'intégration par partie, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_0^x \cos(x-t)\left(1 + \frac{t^2}{2}\right)dt &= \int_0^x \cos(x-t)dt + \int_0^x \frac{t^2}{2} \cos(x-t)dt \\ &= -\sin(x-t)\Big|_0^x - \sin(x-t)\frac{t^2}{2}\Big|_0^x + \int_0^x t \sin(x-t)dt \\ &= \sin x + t \cos(x-t)\Big|_0^x - \int_0^x \cos(x-t)dt \\ &= \sin x + x + \sin(x-t)\Big|_0^x \\ &= x.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Application 2

Déterminant la solution de l'équation intégrale du première espèce suivante

$$\sin x = \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt, \tag{3.9}$$

remarquons que $f(x) = \sin x$ et $f(0) = 0$, de plus f , f' , K et la dérivée de K par rapport à x , sont des fonctions continues. Dérivons les deux membres de l'équation (3.9) par rapport à x , nous obtenons

$$\cos x = \varphi(x) - \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt,$$

autrement dit

$$\varphi(x) = \cos x + \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt$$

De la même façon, cette équation devient par Laplace :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\varphi(x)\} &= \mathcal{L}\{\cos x\} + \mathcal{L}\left\{\int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt\right\} \\ &= \mathcal{L}\{\cos x\} + \mathcal{L}\{e^x * \varphi(x)\} \\ &= \mathcal{L}\{\cos x\} + \mathcal{L}\{e^x\} \mathcal{L}\{\varphi(x)\}, \end{aligned}$$

d'où

$$\Phi(p) = \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{1}{p - 1} \Phi(p),$$

alors

$$\Phi(p) = \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{1}{p^2 + 1}.$$

En appliquant maintenant, la Proposition 1.2, à la dernière équation, nous obtenons

$$\mathcal{L}^{-1}\{\Phi(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2 + 1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2 + 1}\right\},$$

par conséquent

$$\varphi(x) = \cos x - \sin x,$$

d'où la solution cherchée.

Application 3

Cherchons la solution de l'équation intégrale suivante

$$\int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt = x. \quad (3.10)$$

L'équation (3.10) s'écrit comme

$$e^x * \varphi(x) = x, \quad (3.11)$$

transformons par Laplace les deux membres de l'équation (3.11), nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^x * \varphi(x)\} &= \mathcal{L}\{x\}, \\ \Leftrightarrow \mathcal{L}\{e^x\} \mathcal{L}\{\varphi(x)\} &= \mathcal{L}\{x\}, \\ \Leftrightarrow \frac{1}{p - 1} \Phi(p) &= \frac{1}{p^2}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\Phi(p) &= \frac{p-1}{p^2} \\ \Phi(p) &= \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2},\end{aligned}$$

utilisons la transformation de Laplace inverse, nous obtenons

$$\mathcal{L}^{-1}\{\Phi(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\right\},$$

c'est-à-dire

$$\varphi(x) = 1 - x,$$

où $\varphi(x)$ est la solution de l'équation (3.10).

Application importante

Ramener l'équation (3.7), à une équation intégrale de Volterra de seconde espèce, en supposant que H et f sont continûment dérivables, $f(0) = 0$, $H(x, x) \neq 0$, et $0 < \alpha < 1$, et montrons qu'elle possède une solution φ qui vérifié l'équation (3.7).

En effet, multiplions l'équation (3.7) par $(z-x)^{-\alpha}$, et nous intégrons les deux membres par rapport à x entre les limites 0 et z , nous obtenons

$$\int_0^z \frac{dx}{(z-x)^\alpha} \int_0^x \frac{H(x,t)}{(x-t)^{1-\alpha}} \varphi(t) dt = \int_0^z \frac{f(x)}{(z-x)^\alpha} dx,$$

et d'après ce que précède, nous obtenons finalement l'équation intégrale suivante

$$\int_0^z \varphi(t) dt \int_t^z \frac{H(x,t)}{(z-x)^\alpha (x-t)^{1-\alpha}} dx = \int_0^z \frac{f(x)}{(z-x)^\alpha} dx, \quad (3.12)$$

dont l'expression du noyau est

$$K_1(z, t) = \int_t^z \frac{H(x, t)}{(z-x)^\alpha (x-t)^{1-\alpha}} dx, \quad (3.13)$$

on pose

$$f_1(z) = \int_0^z \frac{f(x)}{(z-x)^\alpha} dx. \quad (3.14)$$

Nous remplaçons (3.13) et (3.14) dans l'équation (3.12), nous obtenons l'équation intégrale de Volterra du première espèce suivante

$$\int_0^z K_1(z, t) \varphi(t) dt = f_1(z). \quad (3.15)$$

Remarque 3.2. *Le noyau K_1 est une fonction bornée et continue.*

En effet

On va faire un changement de variable, en remplaçant x par la nouvelle variable

$$x = t + (z-t)\xi,$$

donc, le noyau K_1 sera

$$\begin{aligned} K_1(z, t) &= \int_0^1 \frac{H((z-t)\xi + t, t)(z-t)}{(z - (z-t)\xi - t)^\alpha ((z-t)\xi + t - t)^{1-\alpha}} d\xi \\ &= \int_0^1 \frac{H((z-t)\xi + t, t)(z-t)}{(z-t)(1-\xi)^\alpha \xi^{1-\alpha}} d\xi, \end{aligned}$$

alors

$$K_1(z, t) = \int_0^1 \frac{H((z-t)\xi + t, t)}{(1-\xi)^\alpha \xi^{1-\alpha}} d\xi, \quad (3.16)$$

d'où il résulte, compte tenu de la continuité de la fonction H et la convergence uniforme en z et t de l'intégrale écrite, que $K_1(z, t)$ est un noyau continue. On sait que $|H(x, t)| \leq M$, donc

$$\begin{aligned} |K_1(z, t)| &= \left| \int_0^1 \frac{H((z-t)\xi + t, t)}{(1-\xi)^\alpha \xi^{1-\alpha}} d\xi \right| \\ &\leq M \int_0^1 \frac{d\xi}{(1-\xi)^\alpha \xi^{1-\alpha}} \\ &\leq M \frac{\pi}{\sin \alpha \pi}, \end{aligned}$$

d'où la bornitude de $K_1(z, t)$. De plus, on a

$$\begin{aligned} K_1(z, z) &= \int_0^1 \frac{H(z, z)}{(1-\xi)^\alpha \xi^{1-\alpha}} d\xi \\ &= H(z, z) \frac{\pi}{\sin \alpha \pi}. \end{aligned}$$

Donc, le noyau continu $K_1(z, t)$ satisfera la condition $K_1(z, z) \neq 0$ si et seulement si, la fonction $H(x, t)$ y satisfait aussi (c'est-à-dire $H(x, x) \neq 0$). De la formule (3.16), il découle que $K_1(z, t)$ possède une dérivée continue en z s'il existe une dérivée continue de $H(x, t)$ par rapport à x . De même façon, s'il existe une dérivée continue de f par rapport à x , alors le deuxième membre de l'équation (3.12) possède une dérivée continue en z ; donc l'équation (3.15) est évidemment réductible à une équation intégrale de deuxième espèce. En effet, on intègre par partie le deuxième membre de (3.14), on trouve

$$f_1(z) = \int_0^z \frac{(z-x)^{1-\alpha} f'(x)}{1-\alpha} dx,$$

on dérive les deux membres de cette équation

$$f_1'(z) = \int_0^z \frac{f'(x)}{(z-x)^\alpha} dx,$$

alors f_1 est une fonction bornée et continue.

On dérive (3.16) par rapport à z , on trouve

$$\begin{aligned}\frac{\partial K_1(z, t)}{\partial z} &= \int_0^1 \frac{\partial H((z-t)\xi + t, t)}{\partial x} \frac{\xi d\xi}{(1-\xi)^\alpha \xi^{1-\alpha}} \\ &= \int_0^1 \frac{\partial H((z-t)\xi + t, t)}{\partial x} \left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^\alpha d\xi,\end{aligned}$$

et comme nous avons $|\frac{\partial H(x, t)}{\partial x}| \leq N$ alors

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial K_1(z, t)}{\partial z}\right| &= \left|\int_0^1 \frac{\partial H((z-t)\xi + t, t)}{\partial x} \left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^\alpha d\xi\right| \\ &\leq N \int_0^1 \left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^\alpha d\xi, \\ &\leq N \frac{\alpha\pi}{\sin(1-\alpha)\pi},\end{aligned}$$

alors la première dérivée de K_1 par rapport à z est bornée dans l'intervalle mentionné.

Donc, sous les hypothèses admises, on peut appliquer, pour résoudre l'équation (3.15), la même technique connue, et la ramener à l'équation de deuxième espèce (voir [6, 7]),

$$\frac{f_1'(z)}{K_1(z, z)} = \varphi(z) + \int_0^z \frac{\frac{\partial K_1(z, t)}{\partial z}}{K_1(z, z)} \varphi(t) dt, \quad (3.17)$$

qui possède une solution $\varphi(z)$ moyennant la condition $K_1(z, z) \neq 0$.

Vérifions maintenant que $\varphi(x)$ est une solution de l'équation initiale (3.7).

En effet, portons $\varphi(x)$ dans l'équation (3.7) et on pose

$$\psi(x) = f(x) - \int_0^x \frac{H(x, t)}{(x-t)^{1-\alpha}} \varphi(t) dt,$$

multipliant les deux membres par $(z-x)^{-\alpha}$, nous obtenons

$$\frac{\psi(x)}{(z-x)^\alpha} = \frac{f(x)}{(z-x)^\alpha} - \int_0^x \frac{H(x, t)}{(z-x)^\alpha (x-t)^{1-\alpha}} \varphi(t) dt,$$

en intégrant les deux membres par rapport à x entre les limites 0 et z , nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_0^z \frac{\psi(x)}{(z-x)^\alpha} dx &= \int_0^z \frac{f(x)}{(z-x)^\alpha} dx - \int_0^z \left(\int_0^x \frac{H(x, t)}{(z-x)^\alpha (x-t)^{1-\alpha}} \varphi(t) dt \right) dx \\ &= \int_0^z \frac{1}{(z-x)^\alpha} \left[f(x) - \int_0^x \frac{H(x, t)}{(x-t)^{1-\alpha}} \varphi(t) dt \right] dx,\end{aligned}$$

nous obtenons en vertu de (3.7)

$$\int_0^z \frac{\psi(x)}{(z-x)^\alpha} dx = 0,$$

en multipliant les deux membres par $(s - z)^{\alpha-1}$

$$\int_0^z \frac{\psi(x)}{(s - z)^{1-\alpha}(z - x)^\alpha} dx = 0,$$

en intégrant par rapport à z , de $z = 0$ et $z = s$, nous obtenons

$$\int_0^s \left(\int_0^z \frac{\psi(x)}{(s - z)^{1-\alpha}(z - x)^\alpha} dx \right) dz = 0,$$

en intervertissant l'ordre d'intégration, nous obtenons quel que soit s

$$\int_0^z \psi(x) dx \left(\int_0^s \frac{dz}{(s - z)^{1-\alpha}(z - x)^\alpha} \right) = 0,$$

d'où

$$\int_0^s \psi(x) dx = 0,$$

d'où il découle immédiatement que $\psi(x) = 0$.

Bibliographie

- [1] A. Kolmogorov, S. Fomine, *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. Mir. 1977.
- [2] A. Lesfari, *Distribution, analyse de Fourier et transformation de Laplace, Cours et exercices*. ellipses. 2012.
- [3] M. Krasnov, A. Kissélev, G. Makarenko, *Équations Intégrales, problèmes et exercices*. Mir. 1977.
- [4] RAM P. Kanwal, *Linear Integral Equations, Theory and technique*. Academic Press. 1971.
- [5] V. Smirnov, *Cours mathématiques supérieurs*. Tome III. Première partie. Mir. 1970.
- [6] V. Smirnov, *Cours mathématiques supérieurs*. Tome IV. Première partie. Mir. 1975.
- [7] V. Volterra, *Leçons sur les Équations Intégrales et les Équations Intégré-différentielles*. Gauthier-Villars, Paris. 1913.