وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة عمار ثليجي الأغواط
كلية العلوم الاقتصادية، التسيير والعلوم التجارية
قسم الجذع المشترك

مطبوعة موجهة لطلبة السنة أولى (LMD) جذع مشترك

بعنوان:

الرياضيات -1-

من إعداد الدكتور:

شلوفي عمير

السنة الجامعية: 2024–2025

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
جامعة عمار ثليجي بالأغواط
المجلس العلمي

اعتمدت هذه المطبوعة بعد مصادقة المجلس العلمي لكلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير بجامعة الأغواط، بناءا على محضر رقم: 2025/05، المنعقد بتاريخ: 2025/06/25، تحت رقم اعتماد 04/م/2025.

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرس

المحتويات

فهرس المحتويات

الفصل الثالث: الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية

الفصل الرابع: المشتقات

الفصل الخامس: الدوال الأصلية وحساب التكامل

مقدمة

مقدمة

يسرنا أن نقدم لكم هذه المطبوعة في مقياس الرياضيات -1- لطلبة السنة الأولى جذع مشترك في العلوم الاقتصادية، فقد سعينا من خلالها إلى تنسيق وربط المحاضرات بطريقة تسهل فهم المصطلحات والعبارات وتسلسل الأفكار، مع تضمين مجموعة من الأمثلة والتمارين التوضيحية لتغطية جميع جوانب هذا المقياس.

إن الهدف الرئيسي من هذه المطبوعة هو تمكين الطالب من الرياضيات وتوظيفها في مختلف المجالات الادارية والمالية والاقتصادية وغيرها من المقاييس ذات الصلة بالتخصص، ولا يتم ذلك إلا إذا كان للطالب مكتسبات قبلية تتعلق بمفاهيم أولية في الجبر والتحليل.

كما ترتكز أهداف التعلم (المهارات المراد الوصول إليها) من خلال هذه المطبوعة إلى تحقيق ما يلي:

- إدخال مفهوم العاملي وكيفية الحساب به كي يتمكن الطالب من استخدامه في مقاييس الاحصاء.
- تمكين الطالب من استخدام قوانين المتتاليات وتطبيقها في الناحية الاقتصادية في امثلة الادخار بفائدة.
- توظيف أساسيات التحليل الرياضي في مجالات ذات الصلة مع تخصص العلوم الاقتصادية كالإحصاء، بحوث العمليات، الرياضيات المالية...الخ.
- التمييز بين خصائص الدوال وتطبيقاتها الاقتصادية.

تنقسم هذه المطبوعة إلى خمسة فصول أساسية، أين يتم التطرق إلى كل فصل على حدة، وتضم الفصول العناصر التالية:

في الفصل الأول تطرقنا الى دراسة موضوع التحليل التوفيقي، من خلال التركيز على المفاهيم الاساسية للعاملي وخصائصه، والتطرق الى مبادئ العد ممثلة في التبديلة والترتيبة والتوفيقة وخصائصهم.

أما الفصل الثاني فقد تعرضنا من خلاله الى المتتاليات العددية بمعرفة الخصائص الأساسية للمتتاليات والتطرق إلى المتتاليات الحسابية والهندسية وكيفية تطبيقها على حالات الادخار بفائدة بسيطة ومركبة.

في حين أن **الفصل الثالث** قمنا فيه باستعراض إحدى أهم الدوال الرياضية، وهما الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية، حيث تعتبر كل منهما معكوسة للأخرى، إذ تناولنا أشكال كل دالة على حدة وأهم الخصائص التي تتميز بها، بما في ذلك العمليات المطبقة عليها كالاشتقاق وحساب النهاية، كما أشرنا إلى مجالات استخدام هاتين الدالتين من الناحية الاقتصادية.

في **الفصل الرابع**، تناولنا أحد المواضيع الأساسية في التحليل الرياضي وهو المشتقات، التي تُستخدم في العديد من المجالات مثل إيجاد المماسات للمنحنيات ووصف الحركات غير المنتظمة وغيرها، أين قمنا بتوضيح كيفية إيجاد المشتقة الأولى لأي دالة وتحديد القيم الحرجة، بالإضافة إلى استعراض أهم القواعد المطبقة على عملية الاشتقاق، كما تطرقنا الى مشتقات المعادلات الضمنية ومشتقات المعادلات متعددة المتغيرات.

وقد خصصنا **الفصل الخامس والأخير** لموضوع التكامل، حيث تم تضمين جميع المفاهيم الأساسية المتعلقة به، وبما أن عملية التكامل هي عكس عملية التفاضل (الاشتقاق)، فإن هذا الفصل يهدف إلى تمكين الطالب من اكتساب المهارات الأساسية في حساب المساحات باستخدام أشهر الدوال الأصلية، بالإضافة إلى استخدام الطرق المختلفة لإيجاد تكامل أي دالة واستخدامها في حل المشكلات الاقتصادية المتنوعة.

وفي الختام، نأمل أن نكون قد وفقنا في تغطية مختلف جوانب موضوع مقياس الرياضيات 1، إذ قمنا بتحيين وتكييف المحتوى وفقاً للمقرر الرسمي لوزارة التعليم العالي والبحث العلمي، ليكون مرجعاً يسهل على الطلبة فهم هذا المقياس بشكل جيد.

الفصل الأول:

التحليل التوفيقي

I- مفهوم العاملي والعمليات الحسابية عليه

I-1 مفهوم العاملي (المضروب)

العاملي هو طريقة من طرق العد، فالعاملي لعدد صحيح طبيعي n والذي يكتب على الشكل !n والذي يقرأ "n عاملي" أ "عاملي n"، هو جداء كل الأعداد الطبيعية (الأعداد الصحيحة الموجبة قطعا) المساوية أو الأصغر من n ما عدا الصفر.

ورياضيا تعرف دالة العاملي بالصيغة التالية:

$$n! = \prod_{1}^{n} i = 1 * 2 * 3 * \dots \dots * (n-1) * n$$

أو بالصيغة التالية:

$$n! = \begin{cases} 1 & if \quad n = 0 \\ n * (n-1)! & if \quad n > 0 \end{cases}$$

مثال:

7! =7*6*5*4*3*2*1=5040

5! =5*4*3*2*1=120

خاصية:

إن تعريف العاملي على شكل جداء يترتب عنه 1=!0 ذلك أن !0 جداء مفرغ، وبمعنى آخر مختصر أي عدد مضروب في صفر يساوي صفر في عملية الضرب.

I-2 استخدامات دالة العاملي

تظهر دالة العاملي في مجالات مختلفة من الرياضيات وخصوصا في التوفيقات والجبر والتحليل الرياضي، أبسط مثال على ذلك وجود !n طريقة مختلفة لترتيب عناصر مجموعة عددهم مساوي لـ n عدد (أي عدد التبديلات لعناصر هذه المجموعة).

كما يظهر العاملي في عدة معادلات رياضية واحصائية مثل صيغة ثنائي الحد لنيوتن وصيغة تايلور، كما استعملت دالة التعجب (!) للتعبير عن العاملي لأول مرة من طرف عالم الرياضيات "**كريسيان كرامب**" سنة 1808.

مثال:

- كيف يمكن ترتيب 03 كريات مختلفة اللون (أصفر، أحمر، أخضر)؟

- بترتيب هذه الكريات توجد 6 حالات ممكنة وهي:

الحالة الأولى: **أصفر**، **أحمر**، **أخضر**؛

الحالة الثانية: **أصفر**، **أخضر**، **أحمر**؛

الحالة الثالثة: **أحمر**، **أصفر**، **أخضر**؛

الحالة الرابعة: **أحمر**، **أخضر**، **أصفر**؛

الحالة الخامسة: **أخضر**، **أحمر**، **أصفر**؛

الحالة السادسة: **أخضر**، **أصفر**، **أحمر**.

وبالتالي يمكن استخدام دالة العاملي في إيجاد عدد الحالات الممكنة كالآتي:

$3! = 3*2*1 = 6$

I-3 خصائص دالة العاملي

من بين أهم خصائص العاملي ما يلي:

- $n! = n*(n-1)!$

مثال:

$5 ! = 5*4 ! = 120$

$4 ! = 4*3 ! = 24$

$0 ! = 1$

وبرهان ذلك كما يلي:

نعلم أن

n!=n*(n-1)!

إذن:

1!=1*0! ⟶ 0!=1!/1=1

مثال:

إيجاد قيمة n اذا كانت n !=1.

الحل:

هناك حالتين فقط تأذ فيها دالة العاملي قيمة الواحد وهما:

$$n! = 1 \to if \to \begin{pmatrix} n = 0 \\ n = 1 \end{pmatrix}$$

مثال:

حساب كل من: $\frac{6!}{4!}; \frac{7!}{9!}; \frac{15!}{14!}$

الحل:

$$\frac{15!}{14!} = \frac{15 * 14!}{14!} = 15$$
$$\frac{7!}{9!} = \frac{7!}{9 * 8 * 7!} = \frac{1}{9 * 8} = \frac{1}{72}$$
$$\frac{6!}{4!} = \frac{6 * 5 * 4!}{4!} = 6 * 5 = 30$$

مثال:

إيجاد قيمة n اذا علمت أن n !=24

الحل:

نقوم بعملية قسمة 24 على 1 ثم بعد ذلك الناتج من العملية الأولى نقسمه على 2 وهكذا حتى نحصل في الاخير على ناتج القسمة يساوي 1، فعملية القسمة الأخيرة تكون كنتيجة لقسمة n على n.

$$n\,! = 24 \to \frac{24}{1} = 24 \to \frac{24}{2} = 12 \to \frac{12}{3} = 4 \to \frac{4}{4} = 1$$

وبالتالي فإن n=4.

مثال:

إيجاد n اذا كان $\frac{(n-1)!}{(n-2)!} = 6$

الحل:

$$\frac{(n-1)!}{(n-2)!} = 6 \to \frac{(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 6$$
$$\to n-1 = 6 \to n = 7$$

مثال:

إيجاد المقدار $\frac{7!+8!+9!}{7!}$

الحل:

$$\frac{7!+8!+9!}{7!} = \frac{7!+8*7!+9*8*7!}{7!} = \frac{7!\,(8+9*8)}{7!} = 80$$

مثال:

أثبت أن: $n!\,(n+2)^2 = n! + (n+1)! + (n+2)!$

الحل:

الطريقة الأولى:

لدينا:

$$n! + (n+1)! + (n+2)! = n! + (n+1)n! + (n+2)(n+1)n!$$
$$= n!\,[1 + (n+1) + (n+2)(n+1)]$$
$$= n!\,[(n+2) + (n+2)(n+1)]$$
$$= n!\left[(n+2)\big(1 + (n+1)\big)\right]$$
$$= n!\,[(n+2)(n+2)]$$
$$= n!\,(n+2)^2$$

إذن:

$$n!\,(n+2)^2 = n! + (n+1)! + (n+2)!$$

الطريقة الثانية:

لدينا:

$$\begin{aligned}
n!\,(n+2)^2 &= n!\,[(n+2)(n+2)] \\
&= n!\,\big[(n+2)\big(1+(n+1)\big)\big] \\
&= n!\,[(n+2)+(n+2)(n+1)] \\
&= n!\,[1+(n+1)+(n+2)(n+1)] \\
&= n!+(n+1)n!+(n+2)(n+1)n! \\
&= n!+(n+1)!+(n+2)!
\end{aligned}$$

إذن:

$$n!\,(n+2)^2 = n!+(n+1)!+(n+2)!$$

II- مفهوم التبديلة والترتيبة والتوفيقة وخواصهم

يعتبر التحليل التوفيقي من بين أهم طرق العد في الرياضيات عموما وفي الإحصاء خصوصا، وهو يضم العناصر المهمة التالية.

II-1 التبديلة

إذا كانت لدينا مجموعة A تحتوي n عنصر، زنريد إعادة تشكيل هذه المجموعة من خلال تبديل عناصرها، فنكون في هذه الحالة أمام تبديلة، وهنا نميز بين نوعين من التبديلات:

أ- تبديلة بدون تكرار العناصر

إذا كانت A مجموعة تحتوي على n عنصر مختلف ونريد إعادة تشكيل هذه المموعة من خلال تبديل عناصرها بدون تكرار وفق الصيغة التالية:

$$P_n = n * (n-1) * (n-2) *** 3 * 2 * 1$$
$$P_n = n!$$

مثال:

لنفترض أنه لدينا (3) أرقام ونريد ترتيبهم لتكوين عدد من 3 أرقام وهي {1, 2, 3}=A، بكم طريقة يمكن ترتيبهم بدون تكرار؟

$$1 \rightarrow \begin{cases} 2 \rightarrow 3 = 123 \\ 3 \rightarrow 2 = 132 \end{cases}$$

$$2 \rightarrow \begin{cases} 1 \rightarrow 3 = 213 \\ 3 \rightarrow 1 = 231 \end{cases}$$

$$3 \rightarrow \begin{cases} 2 \rightarrow 1 = 321 \\ 1 \rightarrow 2 = 312 \end{cases}$$

أي أن عدد الحالات الممكنة هو:

$$P_3 = 3! = 3 * 2 * 1 = 6$$

ب- تبديلة مع تكرار العناصر

إذا كانت لدينا مجموعة A تحتوي n عنصر، إلا أنه توجد بعض العناصر متشابهة ونريد أعادة تشكيل عناصر هذه المجموعة، هنا نطبق الصيغة التالية:

$$P_n^{n_1,n_2,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\dots\,n_2\,!}$$

بحيث أن n_1 يمثل عدد العناصر المتشابهة من الصنف الأول التي تنتمي إلى A، وn_1 تمثل عدد العناصر المتشابهة من الصنف الثاني التي تنتمي إلى A، وهكذا.

مثال:

بكم طريقة يمكن كتابة كلمة سر مكونة من أحرف الكلمة statistic.

$$P_9^{2,3,2} = \frac{9!}{2!\,3!\,2!} = 15120$$

مثال:

بكم طريقة يمكن تكوين كلمة سر من 3 أرقام هي 4، 7، 4.

$$P_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$$

II–2 الترتيبة

إذا كانت A مجموعة تحتوي على n عنصر، ونريد تشكيل مجموعة جزئية منها حجمها k، كما أن عامل ترتيب العناصر مهم فهو يؤثر في شكل المجموعة المسحوبة، هنا نكون أمام ما يسمى بالترتيبة ولها حالتين:

أ– ترتيبة بدون تكرار (السحب بدون ارجاع)

إذا كانت عملية سحب المجموعة الجزئية (واحدة تلوى الأخرى لأن الترتيب مهم) تتم بدون إعادة العنصر المسحوب، أي أنها لن تظهر مرة أخرى في عملية السحب (لا تتكرر)، هنا نكون امام ترتيبة بدون تكرار ويأخذ قانونها العام الصيغة التالية:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال:

لتكن لديك المجموعة A={2, 4, 6, 5, 7}، بكم طريقة يمكن تكوين عدد من ثلاثة أرقام بحيث يستعمل الرقم مرة واحدة فقط (بدون تكرار).

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

مثال:

كم كلمة من 4 أحرف ممكن استخراجها من الكلمة nombreux.

$$A_8^4 = \frac{8!}{(8-4)!} = 1680$$

ب- ترتيبة مع تكرار العناصر (السحب مع ارجاع)

إذا كانت عملية سحب المجموعة الجزئية بالارجاع، فإن العنصر المسحوب يمكن سحبه مرة أخرى أي أنه يتكرر أكثر من مرة، هنا نكون في إطار ترتيبة مع التكرار والتي تأخذ الصيغة التالية:

$$\tilde{A}_n^k = n * n * \dots * n = n^k$$

مثال:

أرادت أحد شركات الاتصال انشاء خطوط هاتفية جديدة كل خط مكون من 7 أرقام.

- ما هو عدد الخطوط الهاتفية الممكن تشكيلها؟
- إذا كان الرقم الأول هو 0 والرقم الثاني هو 5 فما هو عدد الخطوط الممكنة؟

الحل:

- عدد الخطوط الهاتفية الممكن تكوينها هو:

$$\tilde{A}_{10}^7 = 10^7 = 10000000$$

- في حالة كان الرقم الأول هو 0 والرقم الثاني هو 5 فإن عدد الخطوط الممكنة هو:

$$1 * 1 * \tilde{A}_{10}^5 = 10^5 = 100000$$

ج- خصائص الترتيبة

- $A_n^n = n!$
- $A_n^1 = n$
- $A_n^0 = 1$

II-3 التوفيقة

إذا كانت A مجموعة تحتوي على n عنصر، ونريد سحب مجموعة جزئية منها حجمها k، بحيث أن ترتيب العناصر لا تؤثر في المجموعة المسحوبة (الترتيب غير مهم) هنا نكون أمام ما يسمى بالتوفيقة، ولها حالتين:

أ- توفيقة بدون تكرار

إذا كانت عملية السحب تتم دفعة واحدة أو من خلال سحب كل عنصر على حدة بدون إرجاعه، هنا نكون أمام توفيقة بدون إرجاع وعدد الحالات الممكنة هي:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

مثال:

ترغب جامعة في انتقاء 4 طلبة من احدى التخصصات مكونة من 10 طلبة للقيام بدورة تكوينية في احدى المؤسسات، فما هي الطرق الممكنة لتشكيل مجموعة من 4 طلبة؟

الحل:

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!\,(10-4)!} = 210$$

مثال:

لدينا صندوق به 6 كريات بيضاء و4سوداء، نقوم بسحب 3 كريات دفعة واحدة، فما هو عدد طرق سحب:

1- مجموعة مكونة من 3 كريات.

2- 3 كريات بيضاء.

3- 1 كرية بيضاء و2 كريات سوداء.

الحل:

-1

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = 120$$

-2

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = 20$$

-3

$$C_6^1 * C_4^2 = \frac{6!}{1!\,(6-1)!} * \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = 36$$

ب- توفيقة بدون تكرار

إذا كان السحب بالارجاع فمن المحتمل أن يظهر العنصر المسحوب مرة ثانية، هنا نكون أمام توفيقة مع التكرار، والتي تأخذ الصيغة التالية:

$$\tilde{C}_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)\,!}$$

مثال:

نريد انشاء مجموعة من الفرق العلمية مكونة من 3 طلبة من بين 6 طلبة الأوائل في الدفعة للمشاركة في مسابقة علمية ما بين الجامعات علما أنه يمكن لأي طالب المشاركة في أكثر من فرقة، فما هو عدد الفرق المكونة؟

الحل:

$$\tilde{C}_6^3 = \frac{6!}{3!\,(6-1)\,!} = 56$$

ج- خصائص التوفيقات

- $C_n^0 = 1 \quad ; \quad C_n^1 = n \quad ; \quad C_n^n = 1 \quad ; \quad C_n^k = C_n^{n-k}$
- $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$
- $C_n^k = C_n^r \leftrightarrow \begin{cases} n = k \\ n = r + k \end{cases}$
- $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

II-4 طرق نشر العبارة $(a+b)^n$

في الحالة العامة $(a+b)^n$ خاصة إذا كانت n كبيرة فإنه يمكن إيجاد نشر هذه العبارة من خلال التعريف التالي:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^k b^{n-k}$$

مثال:

- $$\begin{aligned}(a+b)^2 &= \textstyle\sum_{k=0}^{2} C_2^k\, a^k b^{2-k} \\ &= C_2^0 a^0 b^2 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 a^2 b^0 \\ &= b^2 + 2ab + a^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2ab\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}(a+b)^3 &= \textstyle\sum_{k=0}^{3} C_3^k\, a^k b^{3-k} \\ &= C_3^0 a^0 b^3 + C_3^1 a^1 b^2 + C_3^2 a^2 b^1 + C_3^3 a^3 b^0 \\ &= b^3 + 3ab^2 + 3ba^2 + a^3 \\ &= a^3 + b^3 + 3ab^2 + 3ba^2\end{aligned}$$

الفصل الثاني:

المتتاليات

العددية

I– المتتاليات العددية

المتتالية يطلق عليها المتتابعة والمتوالية والتناسب، وهي مجموعة من الأغراض أو الأحداث أو الحروف المرتبة بنمط خطي وله معنى بحيث ظهور الحرف أو الحدث بعد الآخر له دلالة ولم يأتي عبثاً قد يكون وفق دالةٍ محددة حيث يكون ترتيب أعضاء المتتالية محدداً تماماً ومميزاً هذه الأعضاء تسمى عناصر المتتالية أو حدودها.

I– 1 تعريف المتتالية

المتتالية العددية (U_n) هي كل اقتران (تطبيق) من مجموعة الاعداد الطبيعية IN إلى مجموعة الأعداد الحقيقية IR وتكتب على الصورة التالية:

$$f; IN \to IR$$
$$n \to f(n) = U_n = U_1, U_2, \ldots\ldots, U_n$$

أين يمثل:

– U_n الحد العام للمتتالية لأن حدود المتتالية تتوالى وفق نمط وقاعدة معينة بانتظام اين يمكن معرفة أي حد من المتتالية إذا عرفنا ترتيب الحد العام.

– تسمى العناصر $U_1, U_2, \ldots\ldots, U_n$ بحدود المتتالية.

– العدد الطبيعي n يسمى رقم رتبة الحد U_n من المتتالية $(U_n)_{n\in IN}$

مثال:

1– المتتالية العددية يمكن أن تأخذ عدة أشكال على سبيل المثال:

$$U_n = \sqrt{n^2 + n + 5}$$
$$U_n = \sin(n-2)$$
$$U_n = e^{n+1}$$

2– الحد الأول من المرتبة (0) للمتتالية $U_n = \sqrt{n^2 + n + 5}$ هو $U_0 = \sqrt{5}$.

3– الحد الرابع من المرتبة (4) للمتتالية $U_n = \frac{1}{n}$ هو $U_n = \frac{1}{4}$.

I–2 خصائص المتتالية

I–2–1 المتتالية المحدودة

نقول عن المتتالية العددية (U_n) أنها:

- محدودة من الأعلى إذا وجد العدد الحقيقي $M\in IR$ بحيث:

$$\forall n\in IN;\, U_n \leq M$$

- نقول عن المتتالية العددية (U_n) أنها محدودة من الأسفل إذا وجد العدد الحقيقي $m\in IR$ بحيث:

$$\forall n\in IN;\, U_n \geq m$$

- نقول عن المتتالية العددية (U_n) أنها محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأسفل بحيث:

$$\forall n\in IN;\, m\leq U_n \leq M$$

أمثلة:

1- المتتالية $\forall n\in IN^*; U_n = \frac{1}{n}$ محدودة من الأعلى بالعدد (1)، بحيث:

$$U_1 = 1$$
$$U_2 = 1/2$$
$$U_3 = 1/3$$
$$U_4 = 1/4$$

وبالتالي فإن المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى بالعدد (1).

2- المتتالية $\forall n\in IN^*; U_n = 1-\frac{2}{n}$ محدودة من الأسفل بالعدد (-1)، بحيث:

$$U_1 = -1$$
$$U_2 = 0$$
$$U_3 = 1/3$$
$$U_4 = 1/2$$

وبالتالي فإن المتتالية (U_n) محدودة من الأسفل بالعدد (-1).

3- المتتالية $\forall n\in IN;\, u_n = (-1)^n$ محدودة من الأسفل بالعدد (−1) ومحدودة من الأعلى بالعدد (1)، بحيث:

$$U_0 = 1$$

$$U_1 = -1$$

$$U_2 = 1$$

$$U_3 = -1$$

وبالتالي فإن المتتالية (U_n) محدودة، لأنها محدودة من الأسفل بالعدد (−1) ومحدودة من الأعلى بالعدد (1).

4- المتتالية $U_n = \sin(n)$ محدودة من الأسفل بالعدد (−1) ومحدودة من الأعلى بالعدد (1).

I-2-2 رتابة متتالية عددية (اتجاه تغير المتتالية)

- نقول عن المتتالية (U_n) أنها متتالية متزايدة تماما $(U_n)\uparrow$ إذا كان:

$$\forall n\in IN;\quad U_{n+1}-U_n \succ 0$$

- نقول عن المتتالية (U_n) أنها متتالية متناقصة تماما $(U_n)\downarrow$ إذا كان:

$$\forall n\in IN;\quad U_{n+1}-U_n \prec 0$$

- نقول عن المتتالية (U_n) أنها متتالية ثابتة إذا كان:

$$\forall n\in IN;\quad U_{n+1}-U_n = 0$$

مثال:

تحقق من رتابة المتتاليات التالية:

$$\forall n\in IN^*; U_n=\frac{1}{n}$$
$$\forall n\in IN; u_n=n^2+2$$
$$\forall n\in IN;\quad U_{n+1}=\frac{U_n+4}{2};\quad U_n=4$$
$$\forall n\in IN;\quad U_n=(-1)^n$$

الحل:

1- المتتالية $\forall n\in IN^*; U_n=\frac{1}{n}$ هي متتالية متناقصة تماما إذن هي رتيبة، بحيث أن:

$$U_n=\frac{1}{n}$$
$$U_{n+1}=\frac{1}{n+1}$$
$$\Rightarrow U_{n+1}-U_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{n-(n+1)}{n(n+1)}=\frac{-1}{n(n+1)}\prec 0$$
$$\Rightarrow U_{n+1}-U_n=\prec 0$$

2- المتتالية $\forall n\in IN; u_n=n^2+2$ هي متتالية متزايدة تماما إذن هي رتيبة، بحيث أن:

$$U_n=n^2+2$$
$$U_{n+1}=(n+1)^2+2=n^2+2n+1+2=n^2+2n+3$$
$$\Rightarrow U_{n+1}-U_n=(n^2+2n+3)-n^2+2=2n+1\succ 0$$
$$\Rightarrow U_{n+1}-U_n\prec 0$$

3- المتتالية $U_n=4$ $\forall n\in IN;\quad U_{n+1}=\frac{U_n+4}{2};$ هي متتالية ثابتة إذن فهي غير رتيبة.

4- المتتالية $\forall n\in IN;\ \ U_n=(-1)^n$ هي متتالية غير رتيبة لأن:

$$
\begin{aligned}
&U_n=(-1)^n\\
&U_{n+1}=(-1)^{n+1}=(-1)^n(-1)^1=-(-1)^n\\
&\Rightarrow U_{n+1}-U_n=-(-1)^n-(-1)^n=-2(-1)^n\\
&\Rightarrow U_{n+1}-U=\begin{cases}(-2)\rightarrow n=2k\\(+2)\rightarrow n=2k+1\end{cases}
\end{aligned}
$$

وبالتالي فإن إشارتها ليست ثابتة عند كل n وعلى هذا الأساس نقول أن المتتالية ليست رتيبة.

I–2–3 التقارب (المتتاليات المتقاربة)

تعريف:

نقول عن المتتالية العددية (U_n) أنها متتالية متقاربة إذا كانت لها نهاية منتهية ووحيد، بحيث أن:

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=l$$

أي إذا وجد عدد حقيقي n يحقق العلاقة التالية:

$$\forall\varepsilon\succ 0;\ \exists n_\varepsilon\in IN;\ \forall n\succ n_\varepsilon;\ |U_n-l|\prec\varepsilon$$

بحيث أن l عدد منتهي ووحيد، وε عدد حقيقي متناهي في الصغر.

وإذا كانت المتتالية (U_n) غير متقاربة فهي متتالية متباعدة.

خواص:

- كل متتالية متقاربة محدودة.
- كل متتالية عددية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.
- كل متتالية عددية متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

مثال:

أدرس تقارب المتتاليات التالية:

$$
\begin{aligned}
&U_n=(-1)^n\\
&U_n=\frac{\sin n}{n}\\
&U_n=\frac{2n+2}{n+1}
\end{aligned}
$$

الحل:

عند دراسة التقارب للمتتاليات التالية نجد:

$U_n=(-1)^n,\ U_n=\frac{\sin n}{n},\ U_n=\frac{2n+2}{n+1}$

- $\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}(-1)^n=\begin{cases}-1 & si\ \ n=2k+1_0\\ 1 & si\ \ n=2k\end{cases}\Rightarrow$ المتتالية ليست متقاربة
- $\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n}=0\Rightarrow$ المتتالية متقاربة
- $\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+2}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{n}=2\Rightarrow$ المتتالية متقاربة

العمليات على المتتاليات المتقاربة:

ليكن (U_n) و (V_n) متتاليتين عدديتين متقاربتين أين $\lim_{n\to+\infty}U_n=l;\ \lim_{n\to+\infty}V_n=l'$ فإن:

1- جمع متتاليتين متقاربتين هو متتالية متقاربة أيضا:

$$\lim_{n\to+\infty}(U_n+V_n)=l+l'$$

2- جداء متتاليتين متقاربتين هو متتالية متقاربة أيضا:

$$\lim_{n\to+\infty}(U_n\times V_n)=l\times l'$$

3- قسمة متتاليتين متقاربتين هو متتالية متقاربة أيضا:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{U_n}{V_n}\right)=\frac{l}{l'};\ \ l'\neq 0$$

4- ضرب عدد حقيقي λ في متتالية متقاربة هو متتالية متقاربة أيضا:

$$\lim_{n\to+\infty}(\lambda U_n)=\lambda l'$$

5- إذا كانت $\lim_{n\to+\infty}U_n=l$ فإن:

$$\lim_{n\to+\infty}|U_n|=|l|$$

النظرية 1:

ليكن (U_n)، (V_n) و (W_n) ثلاث متتاليات تحقق الشرطان الآتيان:

$$U_n\prec W_n\prec V_n$$
$$\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}V_n=l$$

فإن:

$$\lim_{n \to +\infty} W_n = l$$

النظرية 2:

ليكن (U_n) و(V_n) متتاليتين تحققين الشرطين التاليين:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$$

و(V_n) متتالية محدودة فإن:

$$\lim_{n \to +\infty} (U_n \times V_n) = 0$$

مثال:

أحسب نهاية المتتالية $\forall n \in IN^*, U_n = \frac{\sin n}{n}$

الحل:

- بتطبيق النظرية الأولى نجد:

$$-1 \le \sin n \le 1$$
$$\frac{-1}{n} \le \frac{\sin n}{n} \le \frac{1}{n}$$

وبما أن:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{-1}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

إذن حسب نظرية الحصر فإن:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

النظرية 3:

إذا كانت (U_n) متتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فهي إذا متقاربة، أما إذا كانت المتتالية (U_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل فهي كذلك متقاربة.

ملاحظة:

نقول عن المتتالية (U_n) انها ليست متقاربة (متباعدة) إذا كانت:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \pm \propto$$
$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \pm l$$

I-2-4 التجاور (المتتاليتان المتجاورتان)

نقول عن المتتاليتين (U_n) و (V_n) أنهما متتاليتين متجاورتين إذا تحقق الشرطين التاليين:

- أن تكون إحداهما متناقصة والأخرى متزايدة.

- أن تكونا متقاربتين نحو نفس العدد أي $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} U_n = l$ ، أو نهاية الفرق بين المتتاليتين $|U_n - V_n|$ يؤول نحو الصفر أي $\lim_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = 0$

مثال:

إثبات أن المتتاليتين (U_n) و (V_n) متجاورتين بحيث أن $U_n = 2 + \frac{2}{n}$ ؛ $V_n = \frac{2n}{n+1}$

الحل:

- التحقق من الشرط الأول (الرتابة):

$$U_{n+1} - U_n = (2 + \frac{2}{n+1}) - (2 + \frac{2}{n}) = \frac{2n - 2n - 2}{n(n+1)} = \frac{-2}{n(n+1)} \prec 0$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{2n+2}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{2n^2 + 4n + 2 - 2n^2 - 4n}{(n+2)(n+1)} = \frac{2}{(n+2)(n+1)} \succ 0$$

(U_n) متتالية متناقصة تماما.

(V_n) متتالية متزايدة تماما.

- التحقق من الشرط الثاني (التقارب):

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}(U_n) = \underset{n\to+\infty}{Lim}(2 + \frac{2}{n}) = 2$$

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}(V_n) = \underset{n\to+\infty}{Lim}(\frac{2n}{n+1}) = \underset{n\to+\infty}{Lim}(\frac{2n}{n}) = 2$$

بما أن المتتالية (U_n) متناقصة والمتتالية (V_n) متزايدة وكلتا المتتاليتين لهما نفس النهاية (متقاربتان نحو نفس العدد وهو 2) فنقول انهما متجاورتان.

نظرية:

كل متتاليتين متجاورتين هما متقاربتين نحو نفس العدد.

II- المتتالية الحسابية

II-1 تعريف

المتتالية الحسابية في الرياضيات هي متتالية من الأعداد الحقيقية بحيث يكون الفرق بين أي حدين متتاليين ثابتا، على سبيل المثال متتالية الأعداد الطبيعية الفردية: 1، 3، 5، ....، إذن لها أساس يساوي 2، ولإيجاد الأساس نطرحه حد من حد موالي له مثل 2=5-7، وتعمم هذه القاعدة من خلال الصيغة التالية:

$$U_{n+1}-U_n=r$$

حيث أن r عدد حقيقي ثابت يسمى الأساس.

II-2 الحد العام لمتتالية حسابية

الحد العام لمتتالية حسابية U_n هو:

⇨ بدلالة الحد الأول:

$$U_n=U_0+r(n)$$

⇨ بدلالة أي حد:

$$U_n=U_k+r(n-k)$$

مثال:

⇨ إيجاد الحدود الأربع الأولى من المتتالية الحسابية التي حدها الأول $U_0=4$ وأساسها $r=5$.

$$U_n=4+5(n)$$
$$U_1=4+5(1)=9$$
$$U_2=4+5(2)=14$$
$$U_3=4+5(3)=19$$
$$U_4=4+5(4)=24$$

⇨ إيجاد أساس المتتالية الحسابية التي حدها $U_4=20$ و$U_8=36$ مع تحديد حدها الأول.

$$U_n=U_k+r(n-k)$$
$$\Rightarrow U_8=U_4+r(8-4)$$
$$\Rightarrow 36=20+r(4)$$
$$\Rightarrow 4r=36-20$$
$$\Rightarrow 4r=16$$
$$\Rightarrow r=4$$

ولدينا:

$U_n= U_o+r(n) \Rightarrow U_4= U_0+4(4)$
$\Rightarrow 20= U_0+16 \Rightarrow U_0=20-16$
$\Rightarrow U_0=4$

مثال:

⇨ إيجاد أساس والحد الأول للمتتالية الحسابية التي حديها $U_3=10$ و$U_7=22$.

$U_n=U_k+r(n-k)$
$\Rightarrow U_7=U_3+r(7-3)$
$\Rightarrow 22=10+r(4)$
$\Rightarrow 4r=22-10$
$\Rightarrow 4r=12$
$\Rightarrow r=3$

ولدينا:

$U_n= U_o+r(n) \Rightarrow U_7= U_0+3(7)$
$\Rightarrow 22= U_0+21 \Rightarrow U_0=22-21$
$\Rightarrow U_0=1$

⇨ التأكد من أن العد 31 حد من حدود المتتالية U_n.

$U_n= 1+3(n) \Rightarrow 31=1+3n$
$\Rightarrow 3n=30 \Rightarrow n=10$

وبما أن n عدد طبيعي فإن 31 حد من حدود المتتالية U_n.

II–3 قانون الوسط الحسابي

إذا كانت a، b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية فإن:

$a+c=2b$

مثال:

⇨ إيجاد U_2 وU_0 إذا كانت U_n متتالية حسابية حديها $U_3=11$ و$U_4=14$.

باستخدام قانون الوسط الحسابي نجد:

* $U_4+ U_2= 2U_3 \Rightarrow U_2= 2U_3-U_4$
$\Rightarrow U_2= 2(11)-14$
$\Rightarrow U_2= 8$

* $U_0+U_4=2U_2$ => $U_0=2U_2-U_4$

=> $U_0=2(8)-14$

=> $U_2=2$

II–4 مجموع متتالية حسابية

إذا كان S يمثل مجموع حدود متتالية حسابية U_n حدها الأول U_0 وحدها الأخير U_n، فيمكن إيجاد قيمة المجموع من خلال القاعدة التالية:

$$S=U_0+U_1+U_2+\ldots+U_n$$

$$S=\frac{(n+1)}{2}(U_0+U_n)$$

وإذا كان المجموع S يبدأ من أي حد U_m فيمكن ايجاده بالصيغة التالية:

$$S=U_m+\ldots+U_n$$

$$S=\frac{(n-m+1)}{2}(U_m+U_n)$$

مثال:

إيجاد مجموع متتالية حسابية من الحد $U_0=5$ و $U_4=13$.

$$S=U_0+U_1+U_2+U_3+U_4$$

$$S=5+\ldots+13$$

$$S=\frac{(4+1)}{2}(5+13)=45$$

تمرين:

ثلاث مبالغ مالية على شكل متتالية حسابية وظفت مدة سنة واحدة بفائدة بسيطة معدلها 3%، فحققت فائدة سنوية قدرها 189 دج، فإذا كان الفرق بين المبلغ الثالث والمبلغ الأول يساوي 2400 دج:

⇨ أحسب r أساس المتتالية الحسابية U_n.

⇨ أحسب حجم المبالغ (المجموع) المدخرة في البنك.

⇨ أحسب قيمة كل مبلغ على حدى.

تمرين:

⇨ حساب الأساس:

$U_3-U_1=2400$ => $(U_0+3r)-(U_0+r)=2400$

$=> 2r=2400$

$=> r=1200$

⇨ حساب مجموع المبالغ المدخرة:

$I_1+I_2+I_3=189$

$U_1(1)(0.03)+U_2(1)(0.03)+U_3(1)(0.03)=189$

⇨ $0.03U_1+0.03U_2+0.03U_3=189$

⇨ $0.03(U_1+U_2+U_3)=189$

⇨ $U_1+U_2+U_3=189/0.03$

⇨ $S=6300$

⇨ حساب قيمة كل مبلغ على حدى:

لدينا:

$S=(3/2)(U_1+U_3)$

⇨ $6300=(3/2)(U_1+U_3)$

⇨ $U_1+U_3=6300(2/3)$

⇨ $U_1+U_3=4200$

ولدينا أيضا:

$S=(U_1+U_3)+U_2$

⇨ $U_2=S-(U_1+U_3)$

⇨ $U_2=6300-4200$

⇨ $U_2=2100$

كما أن:

$U_3=U_2+r$

⇨ $U_3=2100+1200$

⇨ $U_3=3300$

وأيضا:

$U_2=U_1+r$

⇨ $U_1=U_2-r$

⇨ $U_1=2100-1200$

⇨ $U_1=900$

III- المتتالية الهندسية

III-1 تعريف

المتتالية الهندسية في الرياضيات هي عبارة عن مجموعة من الأعدادا في تتال عددي بحيث يكون الناتج لقسمة أي حدين متتاليين يساوي عدد ثابت حقيقي، ويسمى بأساس المتتالية ونرمز له بـ q.

مثلا متتالية الأعداد التالية: 4، 8، 16، 32، 64، فهي متتالية هندسية أساساها هو $q = \frac{16}{8} = 2$.

III-2 الحد العام

الحد العام لمتتالية هندسية $(V_n)_{n\geq 0}$ هو:

⇨ بدلالة الحد الأول:

$V_n=V_0*q^n$

⇨ بدلالة أي حد:

$V_n=V_k*q^{n-k}$

مثال:

⇨ إيجاد حدود المتتالية الهندسية التي حدها الأول هو $V_0=3$ وأساسها هو $q=2$.

$V_n=V_0*q^n$
$V_n=3*2^n$
⇨ $V_1=3*2^1=6$
⇨ $V_2=3*2^2=12$
⇨ $V_3=3*2^3=24$
.
.
⇨ $V_{10}=3*2^{10}=3072$

⇨ إيجاد أساس المتتالية الهندسية التي حدودها $V_1=12$ و$V_3=108$.

$V_n=V_k*q^{n-k}$
⇨ $V_3=V_1*q^2$
⇨ $108=12*q^2$
⇨ $q^2=108/12=9$
⇨ $q=3$

تمرين:

لدينا V_n متتالية هندسية حدودها $V_2=8$ و$V_5=64$:

⇨ أحسب q.

⇨ أكتب الحد العام لهذه المتتالية.

⇨ هل 32 حد من حدود V_n.

الحل:

- حساب q:

$V_n=V_k*q^{n-k}$
⇨ $V_5=V_2*q^3$
⇨ $64=8*q^3$
⇨ $q^3=64/8=8$
⇨ $q=2$

- كتابة الحد العام:

$V_n=V_0*q^n$

نجد أولا الحد الأول V_o:

$V_2=V_0*q^2$
⇨ $8=V_0*2^2$
⇨ $V^0=8/4=2$

وبالتالي فإن الحد العام يكتب على الشكل التالي:

$V_n=2*2^n$

- اثبات أن 32 حد من حدود المتتالية V^n:

$V_n=2*2^n$
⇨ $32=2*2^n$
⇨ $2^n=16$
⇨ $\ln 2^n=\ln 16$
⇨ $n\ln 2=\ln 16$
⇨ $n=\ln 16/\ln 2=4$

وبما أن 4 هو عدد طبيعي فإن 32 هو حد من حدود المتتالية الهندسية V_n.

III-3 الوسط الهندسي لمتتالية هندسية

إذا كانت a، b و c ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن:

$b^2=a*c$

مثلا لدينا الحدود التالية من متتالية هندسية : V_0، V_1، V_2، V_3، V_4، V_5، فإنه باستخدام قانون الوسط الهندسي يمكن ان نستخرج العلاقات التالية:

$$V_1^2 = V_0 \times V_2; \quad V_2^2 = V_1 \times V_3; \quad V_3^2 = V_2 \times V_4;$$
$$V_4^2 = V_3 \times V_5; \quad V_2^2 = V_0 \times V_4; \quad V_3^2 = V_1 \times V_5$$

تمرين:

أوجد حدود المتتالية الهندسية V_1، V_2 وV_3 علما أن:

$$V_1+V_2+V_3=26$$
$$V_1*V_2*V_3=216$$

الحل:

- نعلم أن:

$$V_2^2 = V_1 \times V_3$$

ولدينا:

$$V_1*V_2*V_3=216$$

فإننا نجد:

$$\Rightarrow (V_1*V_3)*V_2=216$$

$$\Rightarrow V_2^2 * V_2 = 216$$

$$\Rightarrow V_2^3 = 216$$

$$\Rightarrow V_2=6$$

- نضع التالي:

$V_3=V_2*q$ ---> $V_3=6*q$

$V_2=V_1*q$ ---> $V_1=6/q$

ولدينا:

$$V_1+V_2+V_3=26$$

بالتعويض نجد:

$$6/q+6+6q=26$$

$$\Rightarrow 6/q+6q=20$$

بتوحيد المقامات والتبسيط نجد:

$$6q^2-20q+6=0$$

نقوم بحل المعادلة باستخدام المميز فنجد:

$$\Delta= 256 \rightarrow \sqrt{\Delta}= 16$$

وبالتالي فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين هما:

$$q_1=1/3$$

$$q_2=3$$

في حالة كان $q=1/3$ فإن:

$V1=6/(1/3)=18$
$V3=6(1/3)=2$

في حالة كان $q=3$ فإن:

$V1=6/(3)=2$
$V3=6(3)=18$

III–4 مجموع متتالية هندسية

إذا كان S يمثل مجموع حدود متتالية هندسية V_n حدها الأول V_0 وحدها الأخير V_n، فيمكن إيجاد قيمة المجموع من خلال القاعدة التالية:

$$S= V_0+V_1+V_2+\ldots+ V_n$$

$$S = V_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

وإذا كان المجموع S يبدأ من أي حد V_m فيمكن ايجاده بالصيغة التالية:

$$S= V_m+\ldots+ V_n$$

$$S = V_m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q}$$

مثال:

حساب مجموع متتالية هندسية من الحد $V_2=8$ و$V_4=32$.

$$S= V_2+ V_3+V_4$$

$$S= 8+\ldots+32$$

نقوم أولا بإيجاد قيمة الأساس بحيث لدينا:

$$V_4= V_4*q^2$$

$$\Rightarrow 32=8* q^2$$

$$\Rightarrow q^2=32/8=4$$

$$\Rightarrow q=2$$

وبالتعويض نجد:

$$S = V_2 \frac{1 - q^{4-2+1}}{1 - q}$$

$$\Rightarrow S = 8\frac{1-2^3}{1-2} = 56$$

تمرين:

وظف شخص 1000 دج لمدة 12 سنة في البنك بفائدة مركبة سنويا بمعدل 5% لأربع السنوات الأولى و6% لأربع السنوات الثانية و7% لأربع السنوات الأخيرة.

1- ما هي قيمة الفائدة المحققة لـ 4 سنوات الأولى؟

2- ما هي قيمة الفائدة المتحصل عليها في نهاية السنة السابعة؟

3- ما هي قيمة جملة المبلغ في نهاية السنة 12؟

الحل:

1- قيمة الفائدة المحققة لـ 4 سنوات الأولى:

$$V_1=(1000)+(1000)(0.05)=(1000)(1+0.05)$$

$$V_2=(1000)(1+0.05)+ (1000)(1+0.05)(0.05)= (1000)(1+0.05)(1+0.05)$$

$$=(1000)(1+0.05)^2$$

إذن باستخدام المتتالية الهندسية فإن قانون الفائدة المركبة في نهاية السنة الرابعة يكون كالآتي:

$V_4=(1000)(1+0.05)^4=1251.5$

فيكون لدينا قيمة الفائدة في نهاية السنة الرابعة من خلال القاعدة التالية:

$I_4=V_4-A$

$\Rightarrow I_4=1251.5-1000=215.5$

2- قيمة الفائدة المتحصل عليها في نهاية السنة السابعة:

$I_7=V_7-A$

$\Rightarrow I_7=[(1000)(1+0.05)^4(1+0.06)^3]-1000=1490.56-1000=490.56$

3- قيمة جملة المبلغ في نهاية السنة 12:

$V_{12}=(1000)(1+0.05)^4(1+0.06)^4(1+0.07)^4=2011.48$

IV المتتالية التراجعية

IV–1 تعريف

نقول عن متتالية عددية (U_n) أنها متتالية تراجعية إذا كانت مكتوبة على الشكل التالي:

$$\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

حيث أن f تطبيق معرف من IR نحو IR

مثال:

المتتالية (U_n) هي من شكل متتالية تراجعية:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{2} \end{cases}$$

IV–2 رتابة متتالية تراجعية

لنفترض أن (U_n) متتالية تراجعية:

- إذا كانت الدالة f متزايدة تماما و $U_1 \succ U_0$ نقول أن (U_n) متتالية متزايدة تماما
- إذا كانت الدالة f متزايدة تماما و $U_1 \prec U_0$ نقول أن (U_n) متتالية مناقصة تماما
- إذا كانت الدالة f متناقصة تماما لا يمكن أن نقول أي شيء عن رتابة المتتالية (U_n).

مثال:

دراسة رتابة المتتالية:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{2} \end{cases}$$

الحل:

إذا كان لدينا:

$$f(x) = \frac{x}{2};$$
$$x \in IR,$$
$$\Rightarrow \forall x \in IR, f'(x) = \frac{1}{2} \succ 0$$

ومنه فإن الدالة f متزايدة تماما.

ثم لدينا:

$$(U_1=\frac{1}{2})\prec(U_0=1)$$

إذن (U_n) هي متتالية متناقصة تماما.

3-IV تقارب متتالية تراجعية

لدراسة تقارب متتالية تراجعية نستعمل نص الفرضية 3 الذي ينص على أنه إذا كانت (U_n) متتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فهي إذا متقاربة، أما إذا كانت المتتالية (U_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل فهي كذلك متقاربة.

4-IV خاصية نهاية متتالية تراجعية

إذا كانت (U_n) متتالية تراجعية متقاربة من العدد l فإن العدد l حل للمعادلة $f(l)=l$.

مثال:

ايجاد النهاية لنفس المتتالية:

$$\begin{cases}U_0=1\\U_{n+1}=\dfrac{U_n}{2}\end{cases}$$

الحل:

باعتبار أن المتتالية (U_n) متتالية متناقصة تماما ومحدودة من الأعلى ب (1) ومن الأسفل ب (0) فإذن هي متقاربة، أي:

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}U_n=l;\\&f(l)=l;\\&\Rightarrow f(l)=\frac{l}{2}=l;\\&\Rightarrow l=2l;\\&\Rightarrow -l=0;\\&\Rightarrow l=0;\\&\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}U_n=0\end{aligned}$$

الفصل الثالث:

الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية

I– الدوال العددية

1-I تعريف الدالة

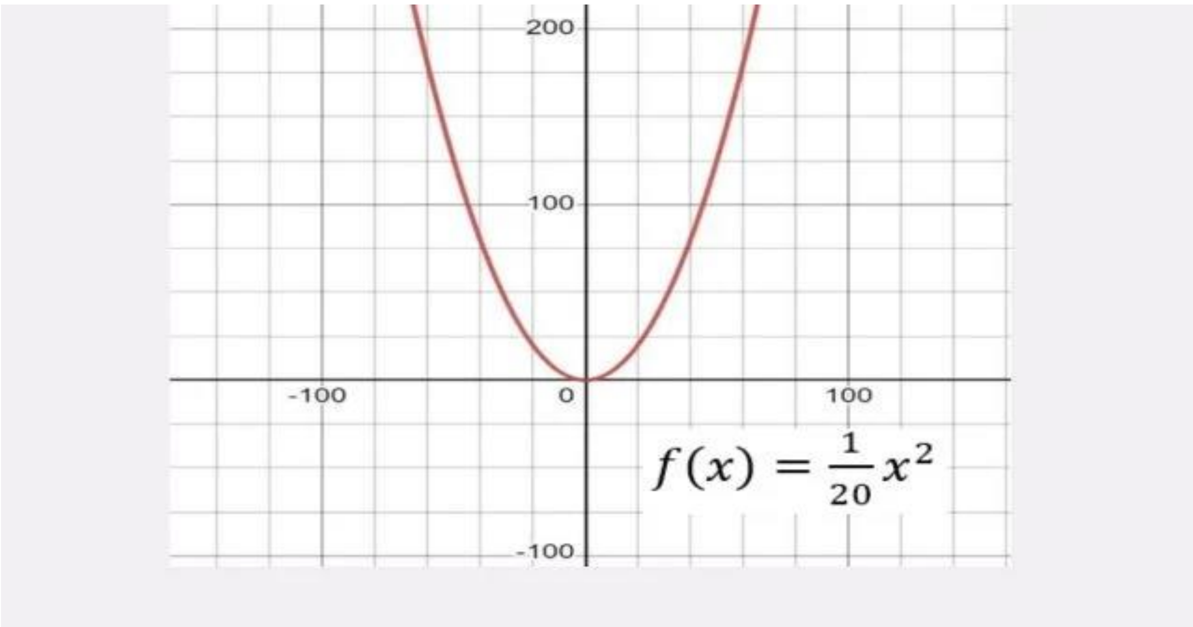
الدالة أو التابع أو الاقتران "Function" هي كائن رياضي يمثل علاقة تربط كل عنصر من مجموعة منطلق D (مجموعة تعريف) عناصرها x بعنصر واحد وواحد فقط من مجموعة تدعى مجموعة الوصول Y، ويمكن تمثيلها بالصيغة الرياضية التالية:

$$f: x \to y \quad ; \quad x \to f(x)$$

نستنتج من هذا التعريف ما يلي:

- لكل تابع مجموعة منطلق تدعى X.
- لكل تابع مجموعة وصول تدعى Y.
- لا يمكن لعنصر من مجموعة المنطلق X أن ترتبط إلا بعنصر وحيد من مجموعة المستقر Y.
- يمكن لعنصر من مجموعة المستقر Y أن يرتبط بعنصر واحد أو أكثر من مجموعة المنطلق X.
- فإذا كان المنطلق هو مجموعة القيم التي يمكن أن يأخذها متغير مستقل x، فإن المستقر هو مجموعة القيم الممكنة لقيم الدالة f(x).

مثال:



الشكل السابق يمثل التمثيل البياني للدالة، فهو يمثل منحنى بياني حيث صورة فاصلة كل نقطة منه تساوي ترتيبها.

I–2 مجموعة تعريف الدالة

نعرف مجموعة تعريف دالة عددية f كما يلي:

$$D_f = \{x \in R : f(x) \in R\}$$

فمجموعة تعريف الدالة تمثل مجموعة انطلاق الدالة حتى يكون لـ f(x) معنى في R، أي:

$$f\colon\begin{cases} D\epsilon R \to R \\ \quad x \to R \end{cases}$$

أمثلة:

* الدالة $f(x)=1/x$ ليس لها صورة عند $x=0$، لأنه لا يمكن قسمة أي عدد على (0)، من غير ذلك فهي معرفة $D_f=R^*$.

* الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ معرفة على $D_f = R^+ = \{x \geq 0\}$.

* الدوال كثيرات الحدود معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية R.

* مجموعة تعريف الدالة $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ هي:

$$D_f = \{1 - x^2 \geq 0\}$$

$$1 - x^2 = 0$$

$$\rightarrow x^2 = 1$$

$$\rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ +1 \end{cases}$$

x	-∞		-1		+1		+∞
$1 - x^2$		-	0	+	0	−	

وبالتالي مجموعة تعريف الدالة $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ هي: $D_f = [-1, 1]$.

* مجموعة تعريف الدالة $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ هي:

$$D_f = \{x^2 - 1 \neq 0\}$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$\rightarrow x^2 = 1$$

$$\rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ +1 \end{cases}$$

x	-∞		-1		+1		+∞
$x^2 - 1$		-	0	+	0	−	

وبالتالي مجموعة تعريف الدالة هي: $D_f =]-\infty\ , -1[\cup]-1\ , +1[\cup]+1\ ,\ +\infty[$.

- **مجموعة تعريف دالة جذر تربيع:**

تأخذ الدالة الجذرية الشكل التالي: $g(x) = \sqrt{f(x)}$، ومجموعة تعريفها هي كل الأعداد x التي تحقق المتراجحة $f(x) \geq 0$.

أمثلة:

* $f(x)=\sqrt{2x-4}\ \rightarrow\ D: 2x-4 \geq 0\ \rightarrow\ x \geq 2\ \rightarrow D \in [2,+\infty[$.

* $g(x)=\sqrt{x^2+1}\ \rightarrow\ D: x^2+1 \geq 0;\ \forall x\ \rightarrow D \in R$.

* $h(x)=\sqrt{(x-2)(x+3)}\ \rightarrow\ (x-2)(x+3) \geq 0$

ولحل هذه المتراجحة نضع جدول الإشارات التالي:

x	-∞	-3		+2	+∞
$x-2$	–		–	0	+
$x+3$	-	0	+		+
$(x-2)(x+3)$	+	0	-	0	+

وبالتالي فإن مجموعة تعريف هذه الدالة هي:

$D \in]-\infty,-3] \cup [+2,+\infty[$

- **مجموعة تعريف دالة كسرية:**

تأخذ الدالة الكسرية أو الناطقة الشكل التالي: $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$، ومجموعة تعريفها هي كل الأعداد x التي تحقق العلاقة $h(x) \neq 0$ و g و h معرفتين.

أمثلة:

* $f(x)=\frac{2}{x-1}\ \rightarrow\ D: x-1 \neq 0\ \rightarrow\ x \neq 1\ \rightarrow D = R-\{1\}$.

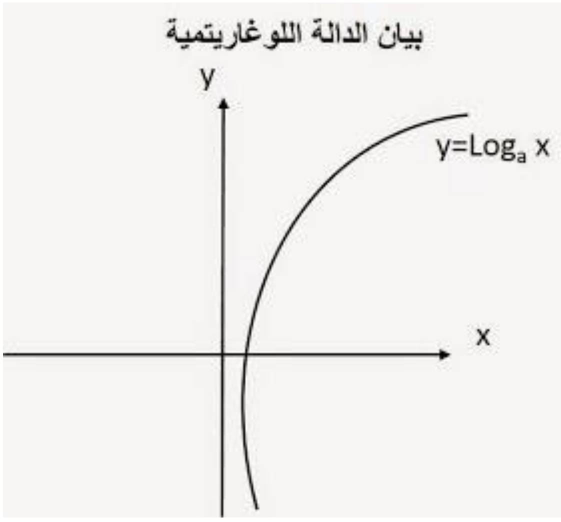
* $g(x)=\frac{x+3}{x^2-4}\ \rightarrow\ D: x^2-4 \neq 0\ \rightarrow\ x \neq \begin{cases}-2\\+2\end{cases} \rightarrow D = R-\{-2,+2\}$.

II- الدالة اللوغاريتمية

II-1 تعريف

إذاكان $a = b^c$ فإن $\log_b a = c$، أين تقرأ الدالة الأخيرة بـ "لوغاريتم a للأساس b يساوي c"، إذن فالدالة اللوغاريتمية هي الدالة العكسية للدالة الأسية، وهي دالة مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0, +\infty[$، وتكتب الدالة اللوغاريتمية بالصيغة العامة التالية:

$$f(x) = \log_a x$$



II-2 خصائص الدالة اللوغاريتمية

إذاكان لدينا الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس a فإنه:

- إذاكانت قيمة الأساس في الدالة اللوغاريتمية 10، فإن اللوغاريتم يسمى باللوغاريتم العشري ويرمز له بالرمز $\log x$ بحيث:

$$\log_{10} x = \frac{\log x}{\log 10}$$

- الدالة العكسية للدالة اللوغاريتمية $\log_a x$ هي الدالة $f(x) = a^x$، وهي التي تحقق العلاقة التالية:

$$\log_a x = b \ \rightarrow \ x = a^b$$

- إذاكانت قيمة الأساس في الدالة اللوغاريتمية 10، فإن الدالة العكسية للوغاريتم العشري $\log x$ هي 10^x.

- يتم حساب قيمة الدالة اللوغاريتمية من خلال العلاقات التالية:

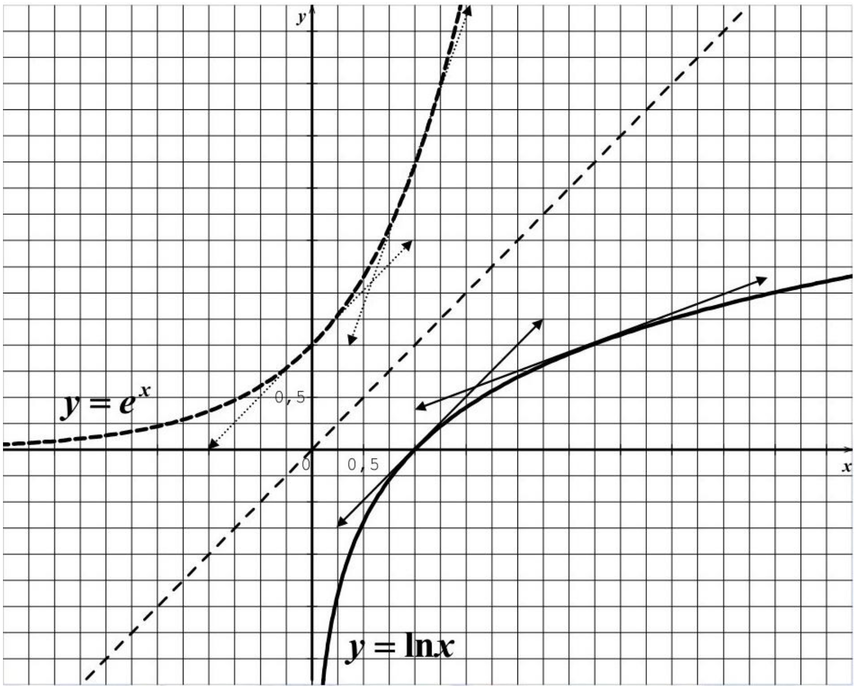
$$\log_a x = \frac{ln\, x}{ln\, a}$$

$$\log_a b^x = \frac{ln\, b^x}{ln\, a} = x\,\frac{ln\, b}{ln\, a}$$

3-II الدالة اللوغاريتمية الطبيعية

إذا كانت قيمة الأساس في الدالة اللوغاريتمية هي العدد النيبيري e، فإن اللوغاريتم في هذه الحالة يسمى باللوغاريتم الطبيعي، ويرمز له بالرمز $ln\, x$، بحيث أن الدالة اللوغاريتمية الطبيعية هي دالة عكسية للدالة e^x.

والشكل التالي يوضح التمثيل البياني للدالتين اللوغاريتمية والأسية في نفس المعلم:



4-II خصائص الدالة اللوغاريتمية الطبيعية

من بين الخصائص أو القواعد التي يمكن تطبيقها على الدالة اللوغاريتمية الطبيعية ما يلي:

$\forall(x,y)>0;\ \forall a\in R:$

$$ln(x.y)=ln\,x+ln\,y$$
$$ln\left(\frac{x}{y}\right)=\lim x-\lim y$$
$$ln\,x^{a}=a\,ln\,x$$
$$ln\,x^{-1}=ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\,ln\,x$$
$$ln(1)=0$$
$$ln(e^{x})=x$$

II-5 مشتقة ونهايات الدالة اللوغاريتمية

- يتم إيجاد مشتقة أي دالة لوغاريتمية وفقا للقاعدتين التاليتين:

$$(ln(x))'=\frac{1}{x}$$
$$[ln(u(x))]=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

- تأخذ نهايات الدالة اللوغاريتمية الأشكال التالية:

$$\lim_{x\to 0} ln(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} ln(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{ln(1+x)}{x}=0$$
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{ln(x)}{x^{\alpha}}=0\qquad \alpha>0$$
$$\lim_{x\to 0} x^{\alpha}\,ln(x)=0\quad \alpha>0$$
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{(ln\,x)^{n}}{x}=0$$
$$\lim_{x\to +\infty} ln(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+\alpha x)}{x}=\alpha$$
$$\lim_{x\to -\infty} x\,(ln\,x)^{n}=0$$

II–6 حل المعادلات اللوغاريتمية

II–6–1 حل المعادلات اللوغاريتمية البسيطة (عزل اللوغاريتم)

يتم عزل اللوغاريتم من خلال تحويل المعادلة إلى طرفين أحدهما يحتوي اللوغاريتم والآخر الحدود الثابتة.

أمثلة:

* $\log_3(x+5)+6=10$

$\rightarrow \log_3(x+5)=4$

وباستخدام العلاقة التالية: $\log_a x = b \rightarrow x = a^b$ نحصل على ما يلي:

$x+5=3^4$

$\rightarrow x+5=81$

$\rightarrow x=76$

* $\log_{10}(x+2)-1=1$

$\rightarrow \log_{10}(x+2)=2$

وباستخدام العلاقة التالية: $\log_a x = b \rightarrow x = a^b$ نحصل على ما يلي:

$x+2=10^2$

$\rightarrow x+2=100$

$\rightarrow x=98$

* $lnx+7=2$

$\rightarrow lnx=-5$

بإدخال الدالة الأسية النيبيرية "e" على الطرفين نجد:

$e^x=e^{-5}$

II-6-2 حل المعادلات اللوغاريتمية باستخدام قاعدة الضرب

وهي المعادلة التي نعزل فيها الحدود الثابتة الى احد الأطراف والحدود اللوغاريتمية الى الطرف الآخر، ومن ثم نطبق خاصية الضرب التالية:

$$\log_a(x \times y) = \log_a x + \log_a y$$

أمثلة:

* $\log_4(x+6) = 2 - \log_4 x$

$\rightarrow \log_4(x+6) + \log_4 x = 2$

وباستخدام العلاقة التالية: $\log_a(x \times y) = \log_a x + \log_a y$ نحصل على ما يلي:

$\log_4[x(x+6)] = 2$

$\rightarrow \log_4(x^2+6x) = 2$

وباستخدام العلاقة التالية: $\log_a x = b \quad \rightarrow \quad x = a^b$ نحصل على ما يلي:

$x^2 + 6x = 4^2$

$\rightarrow x^2 + 6x = 16$

$\rightarrow x^2 + 6x - 16 = 0$

$\rightarrow (x+8)(x-2) = 0$

$\rightarrow x = \begin{cases} -8 \text{ (مرفوض)} \\ +2 \end{cases}$

* $\ln(2x) - 6 = -6 - \ln(4x)$

$\rightarrow ln(2x) + ln(4x) = 0$

وباستخدام العلاقة التالية: $ln(x \times y) = ln\, x + ln\, y$ نحصل على ما يلي:

$ln\, 8x^2 = 0$

بإدخال الدالة الأسية النيبيرية "e" على الطرفين نجد:

$$8x^2 = e^0$$

$$\rightarrow 8x^2 = 1$$

$$\rightarrow x^2 = \frac{1}{8}$$

$$\rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

II-6-3 حل المعادلات اللوغاريتمية باستخدام قاعدة القسمة

وهي المعادلة التي نعزل فيها الحدود الثابتة الى احد الأطراف والحدود اللوغاريتمية الى الطرف الآخر، ومن ثم نطبق خاصية القسمة التالية:

$$\log_a(x - y) = \frac{\log_a x}{\log_a y}$$

مثال:

$$^* \log_3(x+6) = 2 + \log_3(x-2)$$

$$\rightarrow \log_3(x+6) - \log_3(x-2) = 2$$

وباستخدام العلاقة التالية: $\log_a(x - y) = \frac{\log_a x}{\log_a y}$ نحصل على ما يلي:

$$\log_3\left(\frac{x+6}{x-2}\right) = 2$$

وباستخدام العلاقة التالية: $\log_a x = b \quad \rightarrow \quad x = a^b$ نحصل على ما يلي:

$$\left(\frac{x+6}{x-2}\right) = 3^2 = 9$$

$$\rightarrow x + 6 = 9(x-2)$$

$\rightarrow x + 6 = 9x - 18$

$\rightarrow 8x = 24$

$\rightarrow x = 3$

III- الدالة الأسية

III-1 تعريف

الدالة الأسية ذات الأساس a (من الشكل a^x) هي معرفة كما يلي:

$f : R \to R$;

$f(x) = a^x$

فهي دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على "R".

مثال:

إذا كانت $f(x) = 3^x$، فأوجد قيم ما يلي:

$f(0), f(1), f(2), f(-2)$

الحل:

نقوم بتعويض العدد المطوب في الدالة كما يلي:

$f(0) = 3^{(0)} = 1$

$f(1) = 3^{(1)} = 3$

$f(2) = 3^{(2)} = 9$

$f(-2) = 3^{(-2)} = \frac{1}{3^{(2)}} = \frac{1}{9}$

ملاحظات:

1- إذا كانت قيمة الأساس مساوي للواحد $(a = 1)$ تكون الدالة f ثابتة ويكون منحنى بيانها موازيا لمحور الفواصل عند القيمة $f(x) = 1$.

2- إذا كانت قيمة الأساس أكبر من العدد واحد $(a > 1)$، فإن الدالة الأسية تكون متزايدة عند قيم x الموجبة ومتناقصة عند قيم x السالبة.

3- إذا كان قيمة الأساس أصغر من العدد واحد $(a < 1)$ فإن الدالة الأسية تكون متزايدة عند القيم الموجبة ومتناقصة عند القيم السالبة.

III-2 العدد النيبيري e

إذا كان الأساس في الدالة يساوي e تصبح لدينا $f(x) = e^x$ والتي يطلق عليها باسم الدالة الأسية الطبيعية، فالعدد النيبيري e هو عدد غير نسبي، يستخدم كثيرا في وصف حالات النمو والانكماش لكثير من الظواهر الاقتصادية وذلك خلال فترات قصيرة جدا قد تصل إلى أجزاء من الثانية، وهذا العدد يمثل بالمقدار التالي:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

بحيث أن x هو عدد حقيقي كبير جدا-لا متناهي في الكبر.

ولمعرفة الطريقة التي تم من خلالها حساب قيمة المقدار السابق، لنأخذ قيم مختلفة للمتغير x وبشكل تصاعدي، ثم نحسب قيمة هذا المقدار كما يلي:

- عندما $x = 1.000$ فإن قيمة المقدار هي:

$$\left(1 + \frac{1}{1.000}\right)^{1.000} = 2{,}716923932 \ldots$$

- عندما $x = 10.000$ فإن قيمة المقدار هي:

$$\left(1 + \frac{1}{10.000}\right)^{10.000} = 2{,}718145927 \ldots$$

- عندما $x = 100.000$ فإن قيمة المقدار هي:

$$\left(1 + \frac{1}{100.000}\right)^{100.000} = 2{,}718268237 \ldots$$

- عندما $x = 1.000.000$ فإن قيمة المقدار هي:

$$\left(1 + \frac{1}{1.000.000}\right)^{1.000.000} = 2{,}718280469 \ldots$$

- عندما $x = 10.000.000$ فإن قيمة المقدار هي:

$$\left(1+\frac{1}{10.000.000}\right)^{10.000.000} = 2{,}718281693\ldots$$

يلاحظ أنه مع زيادة قيمة المتغير x إلى عدد غير متناهي في الكبر الخانات العشرية الأولى (أول ست خانات تقريبا) لن تتغير، ولذلك نقول أن هذا المقدار سيؤول في النهاية الى عدد ما، أطلق عليه اسم العدد الأساس e، وهو الحرف الأول من كلمة exponentiel.

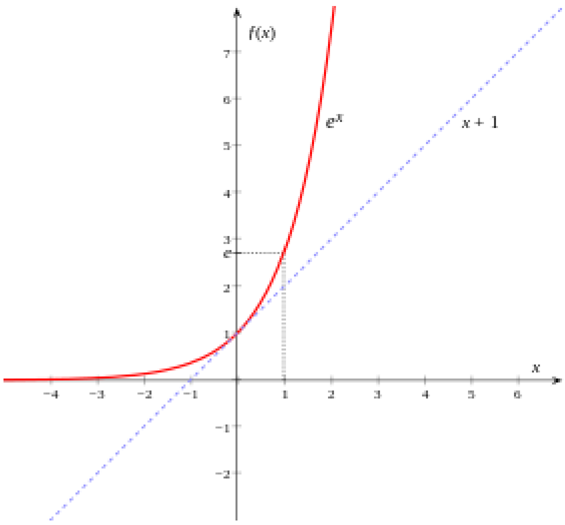
وتأخذ قيمة الأساس e أحيانا بقيمة أول تسع خانات عشرية ناتجة عن مضاعفات المقدار السابق، ولهذا فإن قيمة e هي:

$$e \approx 2{,}718281828$$

وهذا المقدار موجود في الآلة الحاسبة لذلك يمكن إيجاد أي مقدار مثل:

$$e^3, e^5, e^{-2}, e^{\frac{3}{5}}$$

والشكل التالي يمثل منحنى الدالة الأسية النيبيرية $f(x) = e^x$:



بيان الدالة الأسية

III-3 خصائص الدالة الأسية

من بين خصائص الدالة الأسية نجد:

$\forall(x,y)\in R^2:$

$\rightarrow e^0=1$

$\rightarrow\ ln(e^x)=x$

$\rightarrow\ e^{ln\,x}=x$

$\rightarrow\ e^{x+y}=e^x.e^y$

$\rightarrow\ e^{x-y}=e^x/e^y$

$\rightarrow (e^x)^y=e^{x.y}$

$\rightarrow e^x=y \qquad \rightarrow\ \ ln\,y=x$

III-4 مشتقة الدالة الأسية

يتم اشتقاق الدوال الأسية وفقا للقواعد التالية:

$\rightarrow (e^x)'=e^x$

$\rightarrow (e^{u(x)})'=u'(x)e^{u(x)}$

$$\rightarrow (a^x)'=(e^{ln\,a^x})'=(e^{x\,ln(a)})'=ln(a)e^{x\,ln(a)}$$
$$=ln(a)\,a^x$$

$$\rightarrow (a^{u(x)})'=\left(e^{ln\,a^{u(x)}}\right)'=(e^{u(x)\,ln(a)})'=u'(x)\,ln(a)e^{u(x)\,ln(a)}$$
$$=u'(x)\,ln(a)(e^{ln(a)})^{u(x)}=u'(x)\,ln(a)\,a^{u(x)}$$

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)'=\left(e^{ln\,f(x)^{g(x)}}\right)'=\left(e^{g(x)\,ln\,f(x)}\right)'=(g(x)\,ln\,f(x))'f(x)^{g(x)}$$
$$=\left(g'(x).\,ln\,f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)f(x)^{g(x)}$$

III-5 نهايات الدالة الأسية

تتميز الدالة الأسية كبقية الدوال الرياضية ببعض النهايات الشهيرة لعل من أهمها:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$
$$\lim_{x\to 0} e^x = 1$$
$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = 1$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty,\ \alpha \in z$$

III–6 حل المعادلات الأسية

III–6–1 حل المعادلات الأسية المتساوية الأساس

إذا كان طرفي المعادلة به حدود أسية متساوية الأساس فيتم التخلص منها لنتحصل على معادلة عددية يتم حلها بالطرق المتعارف عليها.

أمثلة:

$$* \ 5^{3x} = 5^{7x-2}$$

$$\to 3x = 7x - 2$$

$$\to 4x = 2$$

$$\to x = \frac{1}{2}$$

$$* \ 3^x = 9^{x+1}$$

$$\to 3^x = (3^2)^{x+1}$$

$$\to 3^x = 3^{2x+2}$$

$$\to x = 2x + 2$$

$$\to x = -2$$

2-6-III حل المعادلات الأسية بإدخال اللوغاريتم

إذا كان طرفي المعادلة به حدود أسية غير متساوية الأساس، أو أحد الأطراف يحتوي على أس والطرف الأخر حد ثابت، في هذه الحالة يتم ادخال اللوغاريتم على طرفي المعادلة للتخلص من الأساس لنتحصل على معادلة عددية يتم حلها بالطرق المتعارف عليها.

أمثلة:

$$7^x = 9$$

$$\rightarrow ln7^x = ln9$$

$$\rightarrow xln7 = ln9$$

$$\rightarrow x = \frac{ln9}{ln7} = 1.129$$

$$* \; 2^{4x+1} - 3^x = 0$$

$$\rightarrow 2^{4x+1} = 3^x$$

$$\rightarrow ln2^{4x+1} = ln3^x$$

$$\rightarrow (4x+1)ln2 = xln3$$

$$\rightarrow 0.3(4x+1) = 0.5x$$

$$\rightarrow 1.2x + 0.3 = 0.5x$$

$$\rightarrow 0.7x = -0.3$$

$$\rightarrow x = \frac{-0.3}{0.7} = -0.428$$

3-6-III حل المعادلات الأسية بتحليلها الى عدة عوامل

المثال التالي يوضح كيف تحليل المعادلات اللأسية الى عوامل للحصول على الحلول.

مثال:

* $3^{2x+1} - 4 \times 3^{x+2} = -81$

$\rightarrow 3 \times 3^{2x} - 4 \times 3^{2} \times 3^{x} = -81$

بقسمة طرفي المعادلة على 3 نجد:

$\rightarrow 3^{2x} - 4 \times 3 \times 3^{x} = -27$

$\rightarrow 3^{2x} - 12 \times 3^{x} + 27 = 0$

$\rightarrow (3^{x})^{2} - 12(3^{x}) + 27 = 0$

بتغيير المتغير أين نضع $y=3^x$ يصبح لدينا:

$\rightarrow y^{2} - 12y + 27 = 0$

نحل المعادلة السابقة باستخدام المميز:

$\Delta = (-12)^{2} - 4(27)(1) = 36$

$\rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$

$\rightarrow y_1 = \dfrac{12-6}{2} = 3$

$\rightarrow y_2 = \dfrac{12+6}{2} = 9$

وباعادة المتغير x في حلول المعادلة نجد:

$\rightarrow 3^{x} = 3 \ \rightarrow \ x = 1$

$\rightarrow 3^{x} = 9 \ \rightarrow \ 3^{x} = 3^{2} \ \rightarrow \ x = 2$

IV- التطبيقات الاقتصادية على الدوال الأسية واللوغاريتمية

هناك عدة التطبيقات اقتصادية للدوال الأسية واللوغاريتمية ولعل من أهمها هي استخداماتها في دوال الإنتاج وفي حساب الفائدة المركبة

IV-1 دالة الإنتاج

تعتبر دالة الانتاج أحد أشكال الدوال الأسية المعروفة، أين يوجد أشكال عديدة لدالة الإنتاج ومن أشهرها دالة الإنتاج كوب – دوغلاس (Cobb – Douglas Production Function)، وتأخذ الصيغة العامة التالية:

$$Q = f(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

بحيث أن:

Q: كمية الإنتاج.

K: عنصر رأس المال والذي يتمثل في الأراضي والمباني والآلات والمعدات المستخدمة في الإنتاج.

L: عنصر العمل والذي يتمثل في عدد العمال أو عدد ساعات العمل

$A > 0$: معامل الكفاءة، وتعكس المستوى التكنولوجي المستخدم في العملية الإنتاجية من تقنية المواد وخبرة ومهارات العاملين.

$\alpha > 0$: مرونة الإنتاج بالنسبة لرأس المال (K)، أي التغير النسبي الذي يحدث في حجم الإنتاج إذا حدث تغير في رأس المال.

$\beta < 1$: مرونة الإنتاج بالنسبة للعمل (L)، أي التغير النسبي الذي يحدث في حجم الإنتاج إذا حدث تغير في رأس المال.

وتكون هذه الدالة متجانسة من الدرجة $\alpha + \beta$، وهذا يشير إلى أنه إذا حدث تغير على رأس المال بنسبة λ فإن التغير على الكمية المنتجة سيكون بنسبة $\lambda^{\alpha+\beta}$.

وهناك عدة حالات تكون فيها الدالة متجانسة، فلو افترضنا أنه قد تم ضرب عناصر الإنتاج K وL بعدد ثابت قدرة λ فإن التأثير على كمية الإنتاج Q يكون كما يلي:

$$Q = f(\lambda K, \lambda L) = A(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{\beta}$$
$$= A\lambda^{\alpha}K^{\alpha}\lambda^{\beta}L^{\beta}$$
$$= A\lambda^{\alpha+\beta}K^{\alpha}L^{\beta}$$
$$= \lambda^{\alpha+\beta}(AK^{\alpha}L^{\beta})$$
$$Q = \lambda^{\alpha+\beta}f(K,L)$$

من خلال المعادلة الأخيرة يمكن وصف ثلاث حالات وهي:

- إذا كانت $\alpha + \beta = 1$ فإن دالة الإنتاج تظهر ثبات العوائد إلى حجم الإنتاج.
- إذا كانت $\alpha + \beta > 1$ فإن دالة الإنتاج تظهر زيادة العوائد إلى حجم الإنتاج.
- إذا كانت $\alpha + \beta < 1$ فإن دالة الإنتاج تظهر نقصان العوائد إلى حجم الإنتاج.

كما يمكن استخدام الدالة اللوغاريتمية من أجل إيجاد قيم المرونات α وβ من خلال إدخالها على دالة كوب – دوغلاس وتحويلها من دالة أسية إلى دالة خطية على الشكل التالي:

$$Q = f(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$$
$$lnQ = \ln(AK^{\alpha}L^{\beta})$$
$$= ln\,A + lnK^{\alpha} + lnL^{\beta}$$
$$\rightarrow lnQ = ln\,A + \alpha lnK + \beta lnL$$

تمرين:

إذا أعطيت لك دالة كوب – دوغلاس بالشكل التالي:

$$Q = f(K,L) = 20K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{2}}$$

فإذا تمت زيادة عناصر الإنتاج K وL بثلاثة أضعاف قيمتها الحالية، ما مدى تأثيرها على حجم الإنتاج؟

الحل:

لتحديد التأثير نقوم بالتعويض في الدالة بـ 3K بدلا من K و3L بدلا من L كما يلي:

$$Q = f(3K, 3L) = 20(3K)^{\frac{3}{4}}(3L)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (20)(3)^{\frac{3}{4}}K^{\frac{3}{4}}(3)^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$$

$$= (20)(3)^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{2}}$$

$$= 3^{\frac{5}{4}}(AK^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{2}})$$

$$Q \approx 3.95 * f(K, L)$$

نلاحظ أن زيادة عناصر الإنتاج بثلاثة أضعاف قد أدى إلى زيادة حجم الإنتاج إلى أربعة أضعاف حجمه السابق تقريبا (395%)، وهو أكبر من الزيادة في عناصر الإنتاج وهذا ما تعكسه درج التجانس:

$$\alpha + \beta = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} > 1$$

والتي تشير إلى زيادة العوائد بالنسبة لحجم الإنتاج.

2–IV الفائدة المركبة

إذا كان معدل الفائدة المركبة هو i في السنة وتدفع الفائدة k مرة في السنة، فإن وديعة في بنك معين قدرها x تصبح بعد n سنة كالآتي:

$$y = x\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{nk}$$

وإذا كانت k كبيرة ($k \to \infty$) فإن معادلة جملة المبلغ يمكن الحصول عليها من خلال المعادلة التالية:

$$y = x\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{nk}$$

$$\to y = \lim_{k\to\infty} x\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{nk}$$

$$= x \lim_{k\to\infty}\left[\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{k}\right]^{n}$$

$$\to y = xe^{in}$$

تمرين:

أودع شخص مبلغ بقيمة 5000 دينار بمعدل فائدة 4% سنويا، كم تصبح جملة المبلغ بعد 10 سنوات:

أ- إذا كانت الفائدة تضاف سنويا؟

ب-إذا كانت الفائدة تضاف كل ثلاثة أشهر؟

ت-إذا كانت الفائدة تضاف بشكل أسبوعي؟

الحل:

أ- إذا كانت الفائدة تضاف سنويا، يكون لدينا:

$$y = x\left(1+\frac{i}{k}\right)^{nk} = 5000\left(1+\frac{0.04}{1}\right)^{10} = 7401.22$$

ب- إذا كانت الفائدة تضاف كل ثلاثة أشهر، يكون لدينا:

$$y = x\left(1+\frac{i}{k}\right)^{nk} = 5000\left(1+\frac{0.04}{4}\right)^{4*10} = 5000\left(1+\frac{0.04}{4}\right)^{40} = 7444.32$$

ث- إذا كانت الفائدة تضاف بشكل أسبوعي، يكون لدينا:

$$y = x\left(1+\frac{i}{k}\right)^{nk} = 5000\left(1+\frac{0.04}{52}\right)^{52*10} = 5000\left(1+\frac{0.04}{4}\right)^{40} = 7457.98$$

وبما أن عدد الدفعات k=52 هو عدد كبير نسبيا يمكن حساب جملة المبلغ بالعلاقة التالية:

$$y = xe^{in} = 5000e^{(0.04)(10)} \approx 7457.98$$

الفصل الرابع:

المشتقات

تمهيد:

إن علم التفاضل من أهم الأدوات الرياضية المستخدمة في التحليل الرياضي أين يدرس مدى التأثير الطارئ على الدالة موضوع النموذج الاقتصادي عند التغير بالزيادة أو بالنقصان بمقدار وحدة واحدة من وحدات القياس المستخدمة وذلك عند حد معين من حدود المتغير، كما هو الحال عند النماذج الرياضية التي تعبر عن التكاليف الكلية والايرادات الكلية، كما أن علم التفاضل يساعد متخذ القرار على تحديد القيمة السوقية للمؤسسة التي عندها تحقق أعظم ربح أو أدنى تكلفة.

I– اشتقاق الدوال العددية

1–I تعريف

إذا كانت النقطتين $a_1(x_1, f(x_1))$ ، $a_2(x_2, f(x_2))$ فيكون ميل المستقيم D المار بالنقطتين a_2, a_1 هو:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

وإذا كان:

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

فإن:

$$m = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x}$$

$$= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

وإذا اخذت النهاية لمتوسط التغير عند $\Delta x \to 0$ فانه يرمز لها بالرمز $\frac{dy}{dx}$، فيكون لدينا:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \to \text{يؤول إلى عدد ثابت}$$

فاذا كانت f دالة معرفة على المجال [a, b] وكانت $x_0 \in [a, b]$ تنتمي الى هذا المجال، فإن مشتقة الدالة f عند هذه النقطة يرمز لها بالرمز f'.

مثال:

أوجد من خلال التعريف المشتقة الأولى f' للدالة $f(x) = 3x^2 + 5$.

الحل:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x + \Delta x)^2 + 5 - (3x^2 + 5)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 3\Delta x^2 + 6x\Delta x + 5 - 3x^2 - 5}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x^2 + 6x\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (3\Delta x + 6x) = 6x$$

ملاحظات:

- نقول أن $f(x)$ تقبل الاشتقاق عند النقطة $x_0 \in \mathrm{I}$ إذا كان:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ موجودة و منتهية

- إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق عند نقطة معينة فإنها تكون مستمرة عند تلك النقطة، والعكس غير صحيح.

- تكون الدالة قابلة للاشتقاق على المجال [a,b] اذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط هذا المجال.

I–2 قواعد الاشتقاق

لتكن f و g دوال حقيقية قابلة للاشتقاق على I وK عدد ثابت حقيقي، فإن:

- ✓ $(K)' = 0$
- ✓ $(x^n)' = nx^{n-1}$
- ✓ $[(ax^n + b)^n]' = n(anx^{n-1})(ax^n + b)^{n-1}$
- ✓ $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- ✓ $\sin x = +\cos x$
- ✓ $\cos x = -\sin x$
- ✓ $\sin f(x) = f'(x) \sin' f(x)$
- ✓ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- ✓ $(e^x)' = e^x$
- ✓ $[\ln\,(f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
- ✓ $(arc \sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- ✓ $(arc\ \cos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- ✓ $(arc\ \tan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- ✓ $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
- ✓ $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f\prime(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

- ✓ $[K.f(x)]' = Kf'(x)$
- ✓ $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- ✓ $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

برهنة:

$arc\sin x \to y = \sin^{-1} x$

$\to \sin y = x \qquad \to (\sin y)' = (x)'$

$\to y' \cos y = 1$

$\to y' = \frac{1}{\cos y} \qquad , \ \cos^2 y + \sin^2 y = 1$

$\to \cos^2 y = 1 - \sin^2 y \to \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} \to y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

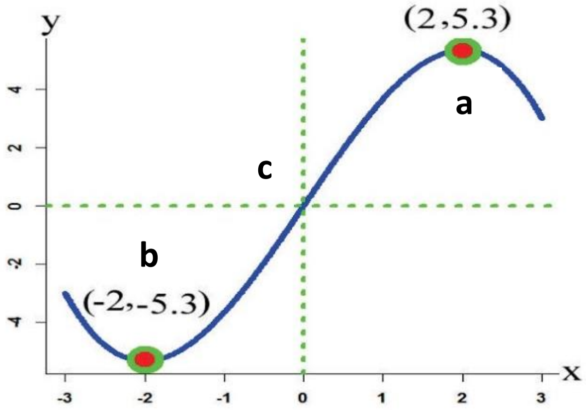
I–3 النهايات العظمى والصغرى

النقطة الحرجة للدالة f المعرفة على المجال $]a, b[$ هي النقطة التي تكون عندها الدالة غير قابلة للاشتقاق (لا توجد المشتقة) أي $f'(x) = 0$، وبغرض التحقق من وجود قيم قصوى (نهايات عظمى او صغرى) نقوم بإيجاد مشتقة ثانية واختبارها ويكون لدينا حالتين هما:

- إذا كانت $f''(x) < 0$ تسمى نهاية (حدية) عظمى.

- إذا كانت $f''(x) > 0$ تسمى نهاية (حدية) صغرى.

والشكل التالي يوضح فكرة اختبار المشتقة الثانية للحصول على النهايات العظمى او الصغرى:



يتضح من الشكل البياني اعلاه ما يلي:

- النقطة (a) تمثل نهاية عظمى للدالة f فهي أكبر قيمة للدالة مقارنة بالقيم المجاورة لهذه النقطة، ويتحقق ذلك من خلال ما يلي:

✓ الشرط اللازم: ان تكون المشتقة الاولى للدالة مساوية للصفر، أي أن:

$$f'(x) = 0$$

✓ الشرط الكافي: ان تكون المشتقة الثانية للدالة قيمة سالبة (أصغر من الصفر)، أي أن:

$$f''(x) < 0$$

- النقطة (b) تمثل نهاية صغرى للدالة f فهي أصغر قيمة للدالة مقارنة بالقيم المجاورة لهذه النقطة، ويتحقق ذلك من خلال ما يلي:

✓ الشرط اللازم: ان تكون المشتقة الاولى للدالة مساوية للصفر، أي أن:

$$f'(x) = 0$$

✓ الشرط الكافي: ان تكون المشتقة الثانية للدالة قيمة موجبة (أكبر من الصفر)، أي أن:

$$f''(x) > 0$$

- ان النقطة (c) الواقعة بين النقطتين (a) و(b) هي نقطة تفصل بين الجزء المقعر والجزء المحدب لمنحنى الدالة وتسمى بنقطة الانعطاف، ويتحقق ذلك من خلال ما يلي:

$$f'(x) = 0$$

$f"(x) = 0$

مثال:

اوجد النهاية الحدية للدالة $f(x) = x^2 - 4x$ وحدد نوعها.

الحل:

لدينا:

$f'(x) = 2x - 4$

$f'(x) = 0 \to 2x - 4 = 0$

$x = 2 \to f(2) = 4$

إذن النقطة $x_0(2,4)$ هي نقطة الحرجة، وبما أن $f"(x) = 2 < 0$ فإن x_0 تمثل نهاية حدية عظمى.

II- الاشتقاق الضمني (الدوال الضمنية)

توجد بعض الدوال يمكن فصل المتغير المستقل x عن المتغير التابع y، ولكن توجد بعض الدوال التي يستحيل فيها فصل المتغيرات عن بعضها البعض أي تأخذ الصيغة التالية: $f(x,y)=0$، فهي المعادلة التي يظهر فيها المتغير المستقل والمتغير التابع في جانب واحد، أين نقوم باشتقاق كل متغير بالنسبة لـ x كما يتم ضرب y عند اشتقاقها بـ $\frac{dy}{dx}$ ليتم في الأخير استخراج قيمة هذا المقدار $\frac{dy}{dx}$ الذي يمثل المشتقة الضمنية.

مثال:

ايجاد المقدار $\frac{dy}{dx}$ للدالة $x^2+y^2+3xy=2$

الحل:

لدينا:

$$(x^2)'\frac{dx}{dx}+(y^2)'\frac{dy}{dx}+(3xy)'\frac{dx}{dx}+(3xy)'\frac{dy}{dx}=0$$

$$\rightarrow 2x+2y\ \frac{dy}{dx}+3y+3x\ \frac{dy}{dx}=0$$

$$=2y\ \frac{dy}{dx}+3x\ \frac{dy}{dx}=-2x-3y$$

$$\rightarrow (3x+2y)\frac{dy}{dx}=-2x-3y$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-2x-3y}{3x+2y}$$

III- مشتقة الدوال متعددة المتغيرات

تمثل الدوال متعددة المتغيرات الدوال التي لديها أكثر من متغير، أين تأخذ هذه الدوال الشكل الدالي التالي $f(x,y); f(x,y,z); f(x,y,z,T)$ وغيرها من الدوال، وللقيام بعملية الاشتقاق يجب أن نشتق الدالة لكل متغير على حدة مع اعتبار بقية المتغيرات الأخرى ثابتة للحصول على المشتق الجزئي الأول (معدل التغير الحادث في الدالة الناتج عن تغير إحدى المتغيرين مع بقاء المتغيرات الأخرى ثابتة).

مثال:

لتكن f دالة لثلاثة متغيرات

$$f(x,y,z) = x^3 + 2y^2 + z + xy + 2xz - yz$$

- أوجد المشتقات الجزئية والمشتقة الكلية.

الحل:

المشتقات الجزئية الاولى:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y + 2z \ ; \ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y + x - z \ ; \ \frac{\partial f}{\partial z} = 1 + 2x - y$$

المشتقة الكلية:

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y \partial z} = (3x^2 + y + 2z) + (4y + x - z) + (1 + 2x - y)$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x \partial y \partial z} = 3x^2 + 3x + 4y + z$$

المشتقات الجزئية الثانية:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f/\partial x}{\partial x} = \frac{(3x^2 + y + 2z)'}{\partial x} = 6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial x)\partial y} = \frac{\partial f/\partial x}{\partial y} = \frac{(3x^2 + y + 2z)'}{\partial y} = 1$$

IV- تطبيقات الاشتقاق على قاعدة لوبيتال ودستور تايلور

IV-1 قاعدة لوبيتال

في التحليل الرياضي تستخدم قاعدة لوبيتال الاشتقاق بهدف ايجاد نهايات لصيغ غير محددة خاصة في الدوال الناطقة أو الكسرية والتي تكون نهاياتها حالات عدم التحديد من الشكل:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \frac{0}{0} \text{ حالة عدم التعيين} \\ \frac{\infty}{\infty} \text{ حالة عدم التعيين} \end{cases}$$

IV-1-1 تعريف

إذا كانت لدينا داليتين f(x) وg(x) معرفتين وقابلتين للاشتقاق على المجال]a,b[، بالإضافة إلى أن $g'(x) \neq 0$ من أجل كل قيمة x من هذا المجال، فإنه يكون لدينا:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = "l"$$

IV-1-2 الإثبات

لنقم بالتمديد بالإستمرارية الدالتين f(x) وg(x) عند في النقطة $x = a$ بحيث تكون هاتان الدالتان مستمرتين من اليمين في هذه النقطة، ويكفي أن نضع:

$$f(a) = \lim_{\substack{> \\ x \to a}} f(x) = 0$$

$$g(a) = \lim_{\substack{> \\ x \to a}} g(x) = 0$$

عندئذ تكون الدالتان f(x) وg(x) مستمرتان على المجال]a,b[.

وإذا كانت $x \in [a, b[$ فإن الدالتان f(x) وg(x) تحققان نظرية التزايدات المنتهية بإعتبار أن الدالتان معرفة ومستمرة على المجال المغلق [a,b] وقابلة للإشتقاق على المجال المفتوح]a,b[فإنه يمكن أن تتحقق العلاقة التالية:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

وبالتالي يكون:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

وإذا جعلنا x تؤول إلى a فإن c ستؤول إلى a لأن $a<c<x$، وبالتالي يكون لدينا:

$$\lim_{\substack{> \\ x\to a}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\substack{> \\ c\to a}}\frac{f'(c)}{g'(c)}="l"$$

وبهذا يكون قد تم إثبات المطلوب.

مبرهنة 3-1-IV

تبقى قاعدة لوبيتال صحيحة إذا كانت $a=\infty$ أي $x\to\infty$، أين نضع $x=\frac{1}{t}$ فعندما $x\to\infty$ فإن $t\to 0$ ومنه يكون:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}="l"$$

وبهذا يكون قد تم إثبات المطلوب.

ملاحظة:

إذا كانت النهاية $\lim_{x\to x_0}\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$ تمثل حالة عدم التعين من الشكل $\frac{0}{0}$ فإننا نطبق قاعدة لوبيتال مرة ثانية ويكون:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}="l"$$

أي أنه يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال عدة مرات طالما أن شروطها تتحقق.

مثال:

استخدم قاعدة لوبيتال لحساب نهاية كل من:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{x-1}}\,,\quad \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{4x^2-4x}$$

الحل:

- لدينا:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{4x^2-4x}=\frac{0}{0}$$

بما أن النهاية على شكل $\frac{0}{0}$ فإننا نطبق قاعدة لوبيتال فنجد:

$$\to \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{4x^2-4x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(4x^2-4x)'}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{8x-4}=\frac{1}{4}$$

- لدينا أيضا:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{x-1}}=\frac{\infty}{\infty}$$

بما أن النهاية على شكل $\frac{\infty}{\infty}$ فإننا نطبق قاعدة لوبيتال فنجد:

$$\to \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2)'}{(e^{x-1})'}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^{x-1}}=\frac{\infty}{\infty}$$

بما أننا تحصلنا على حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ فإننا نطبق قاعدة لوبيتال للمرة الثانية لنجد:

$$\to \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x)'}{(e^{x-1})'}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^{x-1}} = 0$$

مثال:

باستخدام قاعدة لوبيتال أوجد النهاية التالية:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{tgx} \ ; \lim_{x\to 1} \frac{x^x-x}{lnx-x+1)}$$

الحل:

1- لدينا:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{tgx} = \frac{0}{0}$$

بما أن النهاية على شكل $\frac{0}{0}$ فإننا نطبق قاعدة لوبيتال فنجد:

$$\to \lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{tgx} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-cosx)}{(tgx)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{sinx}{\cos^2 x} = \frac{0}{1} = 0$$

2- لدينا:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{lnx-(x-1)} = \frac{0}{0}$$

بما أن النهاية على شكل $\frac{0}{0}$ فإننا نطبق قاعدة لوبيتال فنجد:

$$\to \lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{lnx-(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^x-x)'}{(lnx-x+1)'}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^x \ln(x+1) - 1}{\frac{1}{x} - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x^x \ln(x+1)-1)}{1-x}$$

$$= \frac{0}{0}$$

بما أننا تحصلنا على حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ فإننا نطبق قاعدة لوبيتال للمرة الثانية لنجد:

$$\rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x^x - x}{lnx-(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{[x(x^x\ln(x+1)-1)]'}{(1-x)'}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^x\ln(x+1)^2 + x^{+1}}{-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

ملاحظة:

إثبات أن:

$$(x^x)' = x^x\ln(x+1)$$

لدينا:

$$y = x^x$$

بإدخال اللوغاريتم على طرفي المعادلة نجد:

$$lny = lnx^x$$

$$lny = xlnx$$

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة لـ x يكون لدينا:

$$(lny)'\frac{dy}{dx} = (xlnx)'\frac{dx}{dx}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = lnx + \frac{1}{x}x = lnx + 1$$

نضرب طرفي المعادلة في y نجد:

$$\frac{dy}{dx} = ylnx + y$$

ثم نعوض y بقيمتها $y = x^x$ علما أن $\frac{dy}{dx} = y'$ فنتحصل على الصيغة النهائية للإشتقاق على الشكل التالي:

$$y' = x^x lnx + x^x$$

$\rightarrow y' = (x^x)' = x^x(lnx + 1)$

IV–2 تطبيقات دستور تايلور للنشر الحدود

يعتبر النشر المحدود من بين أهم أدوات التحليل الرياضي وله استخدامات عديدة، وعلى هذا الأساس سنتطرق إليه في هذا الجزء.

IV–2–1 تعريف النشر المحدود

إذا كانت لدينا الدالة f(x) معرفة وقابلة للاشتقاق n مرة على المجال [a,b]، فإنه يمكن كتابة الدالة f(x) على شكل كثير حدود من الدرجة n في $(x - x_0)$، حيث أن x_0 عدد ثابت، أين تأخذ الصيغة التالية:

$$f(\mathrm{x}) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

بحيث أن:

$R_n(x)$: يمثل الحد الباقي أو المتمم وهو متناه في الصغر عندما $x \to x_0$، أي يحقق العلاقة التالية:

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$$

و:

$$R_n(x) = (x - x_0)\varepsilon(x)$$

أين:

$$\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

وتسمى الصيغة المعادلة السابقة بدستور تايلور ويسمى أيضا بدستور النشر المحدود (المنتهي) للدالة $f(\mathrm{x})$ حول x_0.

IV–2–2 الإثبات

لتكن لدينا $P_n(x)$ حدودية من الدرجة من الدرجة n في x أي أن $a_n \neq 0$ علما أن:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

نريد الآن كتابة الحدودية على صورة حدودية من الدرجة n في $(x-x_0)$ حيث أن x_0 عدد مثبت، ومن أجل هذا نبحث عن المعاملات $A_0, A_1, \dots, A_n$ بحيث تتحقق المطابقة:

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + \cdots + A_n(x-x_0)^n \dots (1)$$

ولأجل هذا نشتق هذه المطابقة n مرة فنجد:

$$P_n'(x) = A_1 + 2A_2(x-x_0) + 3A_3(x-x_0)^2 + \cdots + nA_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$P_n''(x) = 2A_2 + (3)(2)A_3(x-x_0) + \cdots + n(n-1)A_n(x-x_0)^{n-2}$$

$$P_n'''(x) = 3!\,A_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)(x-x_0)^n$$

وبقيامنا بعملية الإشتقاق n مرة سنجد:

$$P_n^n(x) = n!\,A_n$$

لنضع في الصيغ السابقة $x = x_0$ فنجد:

$$P_n(x_0) = A_0, P_n'(x_0) = A_1, P_n''(x_0) = 2A_2, P_n'''(x_0) = 3!\,A_3, \dots, P_n^n(x_0) = n!\,A_n$$

ومنه:

$$A_0 = P_n(x_0), A_1 = \frac{P_n'(x_0)}{1!}, A_2 = \frac{P_n''(x_0)}{2!}, A_3 = \frac{P_n'''(x_0)}{3!}, \dots, A_n = \frac{P_n^n(x_0)}{n!}$$

إذن فالصيغة الأولى (1) يمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{P_n^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

حيث تسمى الصيغة الأخيرة بدستور تايلور للحدودية.

ثم لنأخذ الآن الدالة f(x) معرفة على المجال [a,b]، ولها في نقطة معينة x_0 من هذا المجال مشتقات حتى الرتبة n، فإذا كانت هاته الدالة حدودية من الدرجة n فإننا نجد:

$$f(\mathrm{x}) = P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

أما إذا كانت الدالة $f(\mathrm{x})$ ليست حدودية، أو حدودية بدرجة أعلى من n فإن هذه المساواة تكون غير محققة، وتكون الحدودية $P_n(x)$ في هذه الحالة ممثلة بصورة تقريبية للدالة $f(\mathrm{x})$ في جوار النقطة x_0، فإذ كتبنا:

$$f(x) \approx P_n(x)$$

فإن الخطأ المرتكب في هذه الحالة:

$$f(x) - P_n(x) = R_n(x)$$

وهكذا نكون قد تحصلن على ما يسمى بدستور تايلور والذي يأخذ الصيغة التالية:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$
$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f\,n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

ملاحظة

إذا كان $x_0 = 0$ فإننا نحصل على شكل خاص لدستور تايلور:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

ويسمى هذا الدستور بدستور ماكلورين.

مثال:

أوجد النشر المحدود لـ$f(x) = e^x$ بجوار $x_0 = 0$.

الحل:

$$e^x = e^0 + \frac{e^0}{1!}(x - 0) + \frac{e^0}{2!}(x - 0)^2 + \dots + \frac{e^0}{n!}(x - 0)^n + R_n(x)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

إذا حذفنا الحد الباقي فيكون لدينا:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

مثال:

أوجد النشر المحدود من الرتبة $n = 4$ لـ $f(x) = sinx$ بجوار $x_0 = \pi$.

الحل:

$$sinx = sin\pi + \frac{cos\pi}{1!}(x-\pi) + \frac{-sin\pi}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{-cos\pi}{3!}(x-\pi)^3 + \frac{sin\pi}{4!}(x-\pi)^4 + R_4(x)$$

$$= -(x-\pi) + \frac{(x-\pi)^3}{3!} + R_4(x)$$

إذا حذفنا الحد الباقي فيكون لدينا:

$$\text{sinx} \approx -(x-\pi) + \frac{(x-\pi)^3}{3!}$$

IV–2–3 النشر غير المحدود

إذا جعلنا في دستور تايلور ودستور ماكلورين $n \to +\infty$ فإننا نحصل على دستورين نسميهما بدستوري النشر غير المحدود الأول بجوار x_0 والثاني بجوار الصفر 0، ويسمى الطرفين الأيمنين في الدستورين حينئذ بمتسلسلة تايلور وماكلورين على الترتيب.

ويكون $f(x)$ مساويا لمجموع متسلسلة تايلور أو متسلسلة ماكلورين ضمن فترة تقارب المتسلسلتين في الطرف الأيمن لكل منهما، وبناءا على هذا يكون:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots$$

وهي تمثل متسلسلة تايلور للدالة $f(x)$ بجوار النقطة x_0.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \cdots$$

وهي تمثل متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x)$ بجوار الصفر 0.

IV–2–4 منشورات بعض الدوال الشهيرة

من بين منشورات بعض الدوال الشهيرة بجوار الصفر نجد:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$a^x = 1 + \frac{xlna}{1!} + \frac{x^2(lnx)^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n(lnx)^n}{n!} + \cdots$$

$$sinx = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

$$\sqrt{1+\mathrm{x}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1*3}{3*4}x^2 + \cdots - (-1)^{n-1}\frac{1*3*5***(2n-1)}{2*4*6***(2n)}x^n + \cdots$$

$$\sqrt{1-\mathrm{x}} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1*3}{3*4}x^2 + \cdots - \frac{1*3*5***(2n-1)}{2*4*6***(2n)}x^n - \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{x}}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1*3}{3*4}x^2 + \cdots - (-1)^n\frac{1*3*5***(2n-1)}{2*4*6***(2n)}x^n + \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{x}}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1*3}{3*4}x^2 + \cdots + \frac{1*3*5***(2n-1)}{2*4*6***(2n)}x^n + \cdots$$

$$(1+\mathrm{x})^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1) *** (m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

حيث أن m هو عدد جبري قد يكون صحيحا أو كسريا.

V- تطبيقات الاشتقاق على الدوال الاقتصادية

للتفاضل اهمية كبر في الدراسات الاقتصادية والادارية والمالية، حيث ان اي ظاهرة اقتصادية تحتاج لاستخدام قواعد الاشتقاق من اجل تحليل سلوك هذه الظاهرة واتخاذ القرارات المناسبة المعتمدة على التغير الذي يحدث في سلوكها ضمن فترة زمنية معينة، ومن بين هذه النماذج نجد نماذج الايراد الكلي والطلب الكلي.

فتحقيق الهدف الرئيسي للمؤسسة هو رفع القيمة السوقية للمؤسسة في سوق المنافسة، ولا يتحقق ذلك الا عن طريق تعظيم الارباح وخفض التكاليف، اي الوصول إلى الأمثلية عن طريق تحديد القيم العظمى او الدنيا للدوال محل الدراسة، فمثلا إذا كانت تسعى المؤسسة الى تعظيم ربحها الكلي من خلال دوال الارادات والتكاليف $\pi = T_R - T_C$ أن تحقق الشرط اللازم $\pi' = 0$ وحتى يكون ربحها في أعلى قمة يجب أن تحقق الشرط الكافي $\pi'' < 0$.

مثال:

إذا كان لدينا دوال الايرادات والتكاليف على الشكل التالي:

$$T_R = -0.5Q^2 + 200Q$$

$$T_C = 500 - 20Q$$

- عند أي مستوى من المبيعات يتحقق أعلى ربح ممكن؟

الحل:

دالة الربح الكلي تأخذ الشكل التالي:

$$\pi = T_R - T_C$$

$$= (-0.5Q^2 + 200Q\ ) - (500 - 20Q)$$

$= -0.5Q^2 + 200Q - 500 + 20Q$

$= -0.5Q^2 + 180Q - 500$

الشرط اللازم من خلال اشتقاق دالة الربح وايجاد جذورها:

$\pi' = 0$

$\pi' = -Q + 180 = 0$

$\rightarrow Q = 180$

الشرط الكافي من خلال ايجاد المشتقة الثانية لدالة الربح

$\pi'' < 0$

$\pi'' = -1 < 0$

وكون أن المشتقة سالبة فهذا يثبت وجود نهاية عظمى عند كمية انتاج مثلى قدرها $Q^* = 180$.

فإذن المؤسسة في هذه الحالة تحقق أعظم ربح قدره:

$\pi^* == -0.5(180)^2 + 180(180) - 500 = 15700$

وإضافة لما سبق يوجد العديد من توظيفات الاشتقاق في الاقتصاد لعل من أهمها:

- مرونة الطلب الداخلية: مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في الدخل.
- الميل الحدي للاستهلاك: يساوي المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك بحيث أن الاستهلاك دالة في الدخل.
- الميل الحدي للإدخار: يساوي المشتقة الأولى لدالة الإدخار بحيث أن الإدخار هو دالة في الدخل.
- تحديد الحالة الاقتصادية للمؤسسة π'' إذا كانت $\pi'' \succ 0$ المؤسسة في اضعف حالة لها نهاية صغرى وإذا كانت $\pi'' \prec 0$ المؤسسة في أحسن حالة لها نهاية صغرى.

- دراسة العلاقات الاقتصادية بين التكاليف : الكلية TC والمتوسطة AC والحدية MC.

الفصل الخامس:

الدوال الأصلية

وحساب التكامل

I- مفاهيم أساسية حول التكامل والدوال الأصلية

I-1 تعريف التكامل

يعرف التكامل على أنه عكس المشتقة، وهذا يعني أن أي عمليتين تقوم كل منهما بإلغاء الأخرى يطلق عليها بالعملية المعاكسة، وعلى هذا الأساس توجد عملية معاكسة للاشتقاق يطلق عليها بالتكامل (Integration)، ويرمز لها بالرمز $\int ⬚$، ويكون التكامل على نوعين هما:

I-1-1 التكامل غير المحدود

ويكتب بالصورة الآتية:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

حيث أن:

$F(x)$: هو تكامل الدالة $f(x)$.

c: ثابت التكامل.

I-1-2 التكامل المحدود

ويكتب بالصورة الآتية:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

حيث أن:

$F(x)$: هو تكامل الدالة $f(x)$.

$F(a)$: قيمة تكامل الدالة $f(x)$ عند النقطة a.

$F(b)$: قيمة تكامل الدالة $f(x)$ عند النقطة b.

a وb: قيمتان حقيقيتان.

2–I تعريف الدالة الأصلية

الدالة الأصلية للدالة $f(x)$ هي تلك الدالة والتي يرمز لها بالرمز $F(x)$ التي مشتقتها تساوي الدالة المعطاة $f(x)$، وتسمى في هذه الحالة $F(x)$ الدالة الأصلية لـ $f(x)$ ، بحيث أن:

$$F'(x) = f(x)$$

كما تسمى أيضا الدالة $F(x)$ بتكامل للدالة $f(x)$ بالنسبة للمتغير x وتكتب على الصورة التالية:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

مثال 8–01:

على سبيل المثال لدينا مجموعة من الدوال تقابلها الدوال الأصلية لها:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = x$$

$$F(x) = \lim x + x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

$$F(x) = e^x + c \quad \Leftrightarrow f(x) = e^x$$

$$F(x) = \sin x + c \quad \Leftrightarrow f(x) = \cos x$$

II- التكامل المحدود

1-II تعريف

إذا كانت لدينا الدالة $f(x)$ معرفة على المجال [a, b]، فإن التكامل المحدود للدالة $f(x)$ يأخذ الشكل التالي:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

بحيث أن:

$F(x)$: هو تكامل الدالة $f(x)$.

كما أن التكامل المحدود يقوم بحساب المساحة المحصورة تحت المنحنى $y = f(x)$ عند القيم [a, b].

مثال 8-05:

أوجد قيم التكاملات المحدودة التالية:

$$\int_3^5 x^2 dx\ ;\ \int_1^2 (3x^2 + 2)dx$$

الحل:

$$\rightarrow \int_3^5 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_3^5$$

$$= \frac{(5)^3}{3} - \frac{(3)^3}{3}$$

$$= \frac{125 - 27}{3} = \frac{98}{3}$$

$$\rightarrow \int_1^2 (3x^2+2)dx = [x^3+2x]_1^2$$

$$= (2^3+2(2)) - (1^3+2(1))$$

$$= 12 - 3 = 9$$

II-2 خواص التكامل المحدود

من بين خصائص التكامل المحدود نجد:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx \pm \beta\int_a^b g(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\alpha,\beta) \in IR$$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots c \in [a,b]$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx$$

III- التكامل غير المحدود

III-1 تعريف التكامل غير المحدود

هو الذي يكتب بدون تحديد حصر للمساحة ويأخذ الصيغة التالية:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

III-2 التكامل غير المحدود للدوال المعروفة

يمكن حساب التكامل لمجموعة من الدوال المعروفة دون اللجوء إلى استخدام أي صيغة رياضية، حيث يمكن إيجاد قيمة التكامل بشكل مباشر بالاعتماد على عدد من القواعد والتي يمكن توضيحها كما يلي:

$$\int adx = a\int dx = ax + c$$

$$\int [af(x) \pm bg(x)]dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n \neq -1$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + c \ldots\ldots n \neq -1$$

$$\int [f(x)]^n f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln(x+a) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int e^{-x}dx = -e^{-x} + c$$

$$\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int a^{x}dx = \frac{1}{\log a}a^{x} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^{2} x} = \tan x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^{2} x} = -\operatorname{cotan} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$$

حيث أن:

c: ثابت التكامل.

n: عدد حقيقي.

a وb: عددان حقيقيتان (ثابتان).

مثال 8–02:

أوجد قيم التكاملات غير المحدودة للدوال التالية:

$\int x^2(x+5)dx$; $\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$; $\int\frac{x^2}{x^3+6}dx$; $\int x^2e^{x^3-2}dx$

الحل:

$$\rightarrow \int x^2(x+5)dx = \int (x^3+5x)dx$$

$$= \int x^3dx + 5\int xdx$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{5}{2}x^2 + c$$

$$\rightarrow \int \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int\left(x-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \int xdx - \int \frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - ln|x| + c$$

$$\rightarrow \int \frac{x^2}{x^3+6}dx = \frac{1}{3}\int\frac{3x^2}{x^3+6}dx$$

$$= \frac{1}{3}ln|x^3+6| + c$$

$$\rightarrow \int x^2e^{x^3-2}dx = \frac{1}{3}e^{x^3-2} + c$$

IV- تطبيقات التكامل في العلوم الاقتصادية

للتكامل دور كبير في حل عدة مشكلات اقتصادية منها:

IV-1 إجمالي كمية معينة

إذا كان لدينا دالة تعبر عن معدل كمية، تكون المساحة المحصورة بين المحور الأفقي ومنحنى الدالة تمثل إجمالي هذه الكمية

مثال:

لدينا دالة الإيراد الحدي لإحدى المؤسسات معبر عنها بالشكل التالي: $MR(t)=500+100t$، حيث السنة الابتدائية 2000 : $t=0$.

- ما هو إجمالي الإيراد حتى سنة 2018؟

-ما هي السنة التي يصل الإيراد إليها 20000 وحدة نقدية؟

الحل:

$$1-\int_{2000}^{2018} MR(t)\,dt=\int_{0}^{18}(500+100t)\,dt=\left[500t+50t^2\right]_0^{18}=500(18)+50(18)^2-0=2520$$

$$2-\int_{2000}^{n} MR(t)\,dt=\int_{0}^{n}(500+100t)\,dt=\left[500t+50t^2\right]_0^{n}=500(n)+50(n)^2-0=2000$$

نحل المعادلة التالية:

$$50n^2+500n=20000\Rightarrow n^2+10n=400\Rightarrow (n+5)^2-25=400$$
$$(n+5)^2=425\Rightarrow n+5=+\sqrt{425}\vee n+5=-\sqrt{425}\Rightarrow n=16\Rightarrow t=201$$

IV–2 ربحية المؤسسة

إذا كانت دالة الإيراد الكلي لمؤسسة تأخذ الشكل $R(t)$ بينما دالة تكاليفها $C(t)$ فان الربح المحقق في عدد معين للسنوات يأخذ المعادلة التالية $\pi=\int_0^n \left(R(t)-C(t)\right)dt$.

مثال:

دالة العائد المالي لمؤسسة تكتب على النحو : $R(t)=5000-20t^2$ وحدة نقدية لمدة t سنة، بينما بلغت التكلفة $C(t)=2000+10t^2$.

المطلوب:

1- تحديد سنوات الربح؛

2- احسب قيمة الربح.

الحل:

1- يتحقق الربح إذا كان:

$$R(t)=5000-20t^2 \geq C(t)=2000+10t^2$$

$$3000 \geq 30t^2 \Rightarrow t^2 \leq 100$$

$$-10 \leq t \leq 10 \;\Rightarrow\; t \leq 10$$

المدة التي تكون فيها المؤسسة في أحسن وضعية لها هي اقل من 10سنوات

2- لدينا:

$$\begin{cases} \pi=\int_0^n \left(R(t)-C(t)\right)dt \\ R(t)=5000-20t^2 \\ C(t)=2000+10t^2 \end{cases}$$

$$\pi=\int_0^n \left(R(t)-C(t)\right)dt=\int_0^{10}\left(5000-20t^2-2000-10t^2\right)dt=\int_0^{10}\left(3000-30t^2\right)dt=\left[3000t-10t^3\right]_0^{10}$$

$$\pi=3000(10)-10(10)^3=30000-10000=20000$$

IV-3 الربح الإضافي

وجود خطتي استثمار حيث معدل الربح من الخطة الأولى $\pi_1(t)$ ومعدل الربح من الخطة الثانية $\pi_2(t)$ حيث t تمثل الزمن.

فيكون فائض الربح المحقق من الخطة الثانية هو:

$$\pi=\int_0^n \left(\pi_2(t)-\pi_1(t)\right)dt$$

IV-4 فائض المستهلك والمنتج

- فائض المستهلك: هو الفرق بين السعر الذي كان المستهلك مستعد لدفعه للحصول على السلعة وما دفعه بالفعل:

$$\int_0^{Q_0} f(Q)\,dQ-Q_0P_0$$

- فائض المنتج: هو الفرق بين السعر الذي كان دفعه المستهلك بالفعل وما كان المنتج مستعد ان يبيع به السلعة:

$$Q_0P_0-\int_0^{Q_0} g(Q)\,dQ$$

V- طرق التكامل غير المحدود

تستخدم هذه الطرق عندما يتعذر علينا استخدام إحدى قواعد التكامل آنفة الذكر، وعند استخدام أحد طرق التكامل التالية، ستتحول الدوال إلى دوال جديدة يمكن أن نطبق عليها إحدى قواعد التكامل للدوال المعروفة، ومن بين طرق التكامل غير المحدود نجد:

- التكامل باستخدام طريقة التجزئة.
- التكامل باستخدام طريقة التعويض.
- التكامل باستخدام الكسور الجزئية

وفيما يلي شرحا مفصلا لكل طريقة.

V-1 التكامل بالتجزئة

تعد هذه الطريقة معكوس مشتقة حاصل ضرب دالتين هما $h(x)$ و$g(x)$ ، بحيث يمكن أن نكامل إحدى الدالتين واشتقاق الدالة الأخرى، حيث يمكن إيجاد قيمة التكامل بموجب هذه الطريقة وفقا للصيغة العامة للتكامل الآتية:

$$\int udv = u.v - \int vdu$$

بحيث أن:

$$u = h(x)$$

$$v = g(x)$$

وقد تحصلنا على الصيغة العامة السابقة من خلال الاستفادة من خواص اشتقاق دالتين كالآتي:

$$(u.v)' = u'v + uv'$$

$$d(u.v) = vdu + udv$$

$$\Rightarrow udv = d(u.v) - vdu$$

وبأخذ تكامل الطرفين نحصل على الصيغة العامة للتكامل السابقة:

$$\int udv = u.v - \int vdu$$

مثال:

أوجد قيم التكاملات غير المحدودة للدوال التالية:

$$\int lnxdx \ ; \int xe^{-x}dx \ ; \int x \sin x \, dx$$

الحل:

$$\rightarrow \int lnxdx = ?$$

نضع:

$$u = lnx \quad \rightarrow \ du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = dx \quad \rightarrow \ v = x$$

ثم نقوم بحساب التكامل على الشكل التالي:

$$\int udv = u.v - \int vdu$$

$$= xlnx - \int x\frac{1}{x}dx$$

$$= xlnx - \int dx$$

$$= xlnx - x + c$$

$$= x(lnx - 1) + c$$

$$\rightarrow \int xe^{-x}dx = ?$$

نضع:

$$u = x \qquad \rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = e^{-x}dx \quad \rightarrow \quad v = -e^{-x}$$

ثم نقوم بحساب التكامل على الشكل التالي:

$$\int udv = u.v - \int vdu$$

$$= -xe^{-x} + \int e^{-x}dx$$

$$= xe^{x} + (-e^{-x}) + c$$

$$= xe^{x} - e^{-x} + c$$

$$= -e^{-x}(x + 1) + c$$

$$\rightarrow \int xsinxdx = ?$$

نضع:

$$u = x \qquad \rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = sinxdx \quad \rightarrow \quad v = -cosx$$

ثم نقوم بحساب التكامل على الشكل التالي:

$$\int udv = u.v - \int vdu$$

$$= -xcosx + \int \cos x\, dx$$

$$= -xcosx + sinx + c$$

V–2 طريقة التعويض (تغيير التحويل)

بافتراض أن لدينا التكامل الآتي:

$$\int f(x)dx$$

وللحصول على تكامل الدالة $f(x)$ بموجب هذه الطريقة، نقوم بتحويل المتغير x إلى متغير آخر وليكن مثلا t، وبعد إجراء عملية التكامل للدالة المحولة الجديدة $h(t)$، نقوم بتعويض المتغير t في نتيجة التكامل بما يساويها في العلاقة التي يتم افتراضها بين x و t كالآتي:

$$x = g(t)$$

$$dx = g'(t)dt$$

ويكون لدينا التكامل النهائي على الشكل التالي:

$$I = \int f(x)dx = \int h(t)dt = \int f(g(t))g'(t)dt$$

مثال:

ايجاد نتائج التكاملات التالية:

$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx \ ; \int (2x+1)^3 dx$

الحل:

$$\rightarrow \int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx = ?$$

نفترض التعويض التالي:

$$t = x^2 + 4$$

$$\Rightarrow dt = 2xdx$$

$$\Rightarrow xdx = \frac{1}{2}dt$$

نقوم بالتعويض في التكامل الأصلي فنجد تكامل آخر بالشكل التالي:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}}$$

$$= \int \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$$

$$= \sqrt{t} + c$$

ثم نقوم بتعويض المتغير t في نتيجة التكامل بما يساويه $t = x^2 + 4$ أي:

$$= \sqrt{x^2+4} + c$$

$$\rightarrow \int (2x+1)^3 dx = ?$$

نفترض التعويض التالي:

$t = 2x + 1$

$\Rightarrow dt = 2dx$

$\Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$

نقوم بالتعويض في التكامل الأصلي فنجد تكامل آخر بالشكل التالي:

$$\int (2x+1)^3 dx = \int t^3 \frac{1}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2}\int t^3 dt$$

$$= \frac{1}{2}\frac{t^4}{4} + c$$

$$= \frac{1}{8}t^4 + c$$

ثم نقوم بتعويض المتغير t في نتيجة التكامل بما يساويه $t = 2x + 1$ أي:

$$= \frac{1}{8}(2x+1)^4 + c$$

V-3 التكامل باستخدام الكسور الجزئية

V-3-1 تعريف التكامل باستخدام الكسور الجزئية

تستخدم الكسور الجزئية لاعادة كتابة الكسر $\frac{p(x)}{q(x)}$ كمجموع من الكسور الابسط وبالتالي يتحول التكامل $\int \frac{p(x)}{q(x)}$ الى مجموع عدد من التكاملات الابسط والاسهل فى التعامل.

V-3-2 قواعد تحليل الكسر $\frac{p(x)}{q(x)}$ الى كسور الجزئية

V-3-2-1 الحالة الأولى: درجة $\mathbf{p(x)}$ أقل من درجة $\mathbf{q(x)}$

1- كل عامل خطي $(ax+b)$ للدالة $q(x)$ يقابله كسر جزئى:

$$\frac{\alpha}{ax+b}$$

بحيث أن α مقدار ثابت.

2- كل عامل من الدرجة الثانية غير قابل للتحليل (ax^2+bx+c) للدالة $q(x)$ يقابله كسر جزئى:

$$\frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$$

بحيث أن α و β مقادير ثابتة.

3- كل عامل خطي مكرر $(ax+b)^2$ للدالة $q(x)$ يقابله كسران جزئيان:

$$\frac{\alpha}{ax+b}+\frac{\beta}{(ax+b)^2}$$

بحيث أن α و β مقادير ثابتة.

4- كل عامل مكرر من الدرجة الثانية غير قابل للتحليل $(ax^2+bx+c)^2$ للدالة q(x) يقابله كسران جزئيان:

$$\frac{\alpha_1 x+\beta_1}{ax^2+bx+c}+\frac{\alpha_2 x+\beta_2}{(ax^2+bx+c)^2}$$

بحيث أن α_1، α_2، β_1 و β_2 مقادير ثابتة.

5- كل عامل خطي مكرر ثلاث مرات $(ax+b)^3$ للدالة q(x) يقابله ثلاث كسور جزئية:

$$\frac{\alpha}{ax+b}+\frac{\beta}{(ax+b)^2}+\frac{\gamma}{(ax+b)^3}$$

بحيث أن α، β و γ مقادير ثابتة.

V-3-2-2 الحالة الثانية: درجة p(x) أكبر من أو تساوي درجة q(x)

1- إذا كانت درجة p(x) تساوى درجة q(x) فإننا نضيف ثابت α إلى الكسور الجزئية الموجودة في الحالة الأولى.

2- إذا كانت درجة p(x) أعلى بمقدار درجة واحدة من درجة q(x) فإننا نضيف المقدار $\alpha x+\beta$ إلى الكسور الجزئية الموجودة في الحالة الأولى.

3- إذا كانت درجة p(x) أعلى بمقدار درجتين من درجة q(x) فإننا نضيف المقدار $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ إلى الكسور الجزئية الموجودة في الحالة الأولى، أو نستخدم القسمة المطولة.

V-3-2-3 طرق تعيين الثوابت

نساوي الكسر $\frac{p(x)}{q(x)}$ بمجموع الكسور الجزئية المقابلة له كما سبق الحصول عليها ثم نضرب المتساوية في q(x) وبذلك نحصل على متساوية جديدة، يمكن عندئذ الحصول على الثوابت من هذه المتساوية الجديدة وذلك باستخدام الطرق التالية:

1- نعطي قيمة مناسبة للمتغير x.

2- نساوي المعادلات المتناظرة في الطرفين مع البدء بالحدود المشتملة على أعلى قوة للمتغير x .

مثال 1:

ايجاد التكامل التالي:

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx$$

الحل:

بما أن درجة البسط أقل من درجة المقام نستخدم الحالة الأولى، كما أن x^2+1 هو عامل خطي من الدرجة الأولى فهو يقابله كسر جزئي، و x عامل خطي من الدرجة الأولى فهو يقابله كسر جزئي، فيكون لدينا:

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta x+\gamma}{x^2+1}$$

$$= \frac{\alpha(x^2+1) + x(\beta x+\gamma)}{x(x^2+1)}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)x^2 + \gamma x + \alpha}{x(x^2+1)}$$

بما أن المقامين متساويين فكذلك نساوي البسطين، فيكون لدينا:

$$1 = (\alpha + \beta)x^2 + \gamma x + \alpha$$

وبالمطابقة سنجد قيم α، β و γ كالآتي:

$$\alpha = 1$$

و:

$$\gamma x = 0$$

$$\rightarrow \gamma = 0$$

بتعويض قيمة $\alpha = 1$ نجد:

$$\alpha + \beta = 0$$

$$\rightarrow \beta = -\alpha = -1$$

وبتعويض هذه الثوابت في الكسور الجزئية يمكننا حساب التكامل كما يلي:

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x}{x^2+1}dx$$

$$= ln|x| - \frac{1}{2}ln|x^2+1| + c$$

مثال 2:

ايجاد التكامل التالي:

$$\int \frac{2x-1}{x^2(x-1)}dx$$

الحل:

بما أن درجة البسط أقل من درجة المقام نستخدم الحالة الأولى، كما أن x^2 هو عامل خطي (x) مكرر مرتين من الدرجة الأولى فهو يقابله كسرين جزئيين، و $x-1$ عامل خطي من الدرجة الأولى فهو يقابله كسر جزئي، فيكون لدينا:

$$\frac{2x-1}{x^2(x-1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x-1}$$

$$= \frac{\alpha x(x-1) + \beta(x-1) + \gamma x^2}{x^2(x-1)}$$

بما أن المقامين متساويين فكذلك نساوي البسطين، فيكون لدينا:

$$2x - 1 = \alpha x(x-1) + \beta(x-1) + \gamma x^2$$

وإيجاد قيم α، β و γ نضع كالآتي:

- نضع $x=1$ فنجد:

$$\gamma = 1$$

- بتعويض قيمة $\gamma=1$ ووضع $x=0$ نجد:

$$\beta = 1$$

- وبمطابقة معاملات x^2 نجد:

$$\alpha + \gamma = 0$$

$\alpha = -\gamma = -1$

وبتعويض هذه الثوابت في الكسور الجزئية يمكننا حساب التكامل كما يلي:

$$\int \frac{2x-1}{x^2(x-1)}dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$= \int \frac{-1}{x}dx + \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{1}{x-1}dx$$

$$= -ln|x| - \frac{1}{x} + ln|x-1| + c$$

قائمة المراجع

قائمة المراجع

- أبو بكر خالد سعد الله، التحليل الرياضي –الجزء الثاني، مطبوعة أكاديمية، المدرسة العليا للأساتذة، القبة.

- ثائر فيصل شاهر، سامر محمد عكور، الرياضيات في العلوم المالية والادارية والاقتصادية، دار حامد للنشر والتوزيع، الأردن، الطبعة الثانية، 2010.

- حسن ياسين طعمة، الرياضيات للاقتصاد والعلوم الادارية والمالية، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان، الطبعة الأولى، 2010.

- عبد الواحد أبو حمدة، التحليل "1"، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر–بن عكنون، 1991.

- عمران قوبا، التحليل –الجزء الأول، منشورات المعهد العالمي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا، سورية، الطبعة الثانية، 2017.

- فتحي خليل حمدان، الرياضيات للعلوم الادارية والمالية، دار وائل للنشر والتوزيع، الأردن–عمان، الطبعة الرابعة، 2014.

- فرانك آيرز، ترجمة ومراجعة يوسف كردي محمد بدوي، المعادلات التفاضلية، الدار الدولية للنشر والتوزيع، مصر–القاهرة، الطبعة العربية الثانية، 1988.

- وليم بويس، ريتشارد دبريما، ترجمة احمد علاونه، حسن العزة، مبادئ المعادلات التفاضلية، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، الطبعة الثالثة، 1983.

- إسماعيل بوقفة، عايش الهنادوة، المعادلات التفاضلية العادية حلول وتطبيقات، جامعة العلوم والتكنولوجيا، الجمهورية اليمنية.

- Alain Larroche, Pierre Laurent, Les Mathématiques de A à Z, Dunod, Paris, 2002.

- Alain Soyeur - François Capaces - Emmanuel Vieillard-Baron, Cours de Mathématiques, En partenariat avec l'association Sésamath http://www.sesamath.net et le site http://www.les-mathematiques.net, 2011.

- Alain Yger, MATHÉMATIQUES DE BASE, Institut de Mathematiques, Universit ´ e Bordeaux 1, Talence 33405, France, 2012.

- ATTAR Ahmed, MIRI Sofiane Elhadi, Algèbre et Analyse Recueil d'Exercices Corrigés, Polycopié de cours pour étudiants de première année, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen, 2018.

- Francis Bismans, Mathématiques pour l'économie : Volume 1 – Fonctions d'une variable réelle, De Boeck Université, 1999.

- Guy Laffaille, Christian Pauly, Cours d'analyse 1, 2006.

- Jacques Dixmier, Cours de mathématiques du premier cycle 1re année – Avec exercices corrigès, Dunod, Deuxième édition, 1 janvier 2001.

- Jacques Vélu, Mathématiques Générales - Cours et exercices corrigès, Dunod, 2020.

- Jann WEISS, Cours de mathématiques 3e – 4e année niveau 2, Licence Creative Common, 2015-2016.

- Laurent Pujo-Menjouet, Fondamentaux des mathématiques 1, Département de mathématiques, Université Claude Bernard, Lyon I.

- N. Piskounov, Calcul différentiel et intégral : Tome 11, 9e édition, MIR, Moscou, 1980.

- Patrick Roger, Mathématiques pour l'économie et la gestion: Applications avec Excel, Pearson Education France, 2006.

- Pierre Guillot, Cours Concis de Mathématiques, IRMA, Strasbourg.