

الجمهورية الجزائرية الشعبية الديمقراطية
REPUBLICUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار تليجي الأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES



Mémoire de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Présenté par :

CHAABA Khadidja

THEME

Étude de la stabilité d'un système de type Bresse-Timoshenko

Soutenance publique devant le jury composé de :

Mr. YAGOUB Ameer

M.C. A

Président

Mr. RAHMOUNE Abdelaziz

M.C. B

Examineur

Mr. YAZID Fares

M.C. B

Encadreur

Année Universitaire 2020/2021

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon Directeur de mémoire Monsieur Fares Yazid. Je le remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

Mes vifs remerciements s'adressent à **Dr. AMEUR Yagoub**, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

Tout mes remerciements et ma gratitude vont aussi à **Dr. RAHMOUNE Abdelaziz** d'avoir accepté d'être membres du jury et d'examiner mon travail.

Tout mes sincères remerciements vont également à l'ensemble des enseignants du département de **Mathématiques et Informatiques**.

En fan, j'exprime mes remerciements à toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont aidé à l'accomplissement de ce modeste travail.

Dédicace

Je dédis le fruit de ce modeste travail :

*À la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur ; **maman** que j'adore.*

*À la plus grand personne de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, que dieu te garde dans son vaste paradis, à toi mon **père**.*

À mon très cher frère qui ma donnée tout le courage.

À mon âme sœur

À mon grand-père et à mes grands-mères.

*Aux jeunes bourgeons "**BELKHIS**", "**ABD ALSSALAM**" et "**HAMZA**".*

À tous mes amis.

*À toute ma famille "**CHAABA**" et "**AMEUR**".*

Abstract

In this memory, we considered a Bresse-Timoshenko-type system with distributed delay term and visous damping in angular rotation.

We established the global existence and the uniqueness of the solution by using the Faedo-Galerkin approximations and some energy estimates.

Finally, we have study the asamptotic behavior of solutions by using the multiplier method, and we show the exponential stability of the system.

Keys Words. Bresse-Timoshenko system, exponential decay, angular rotation.

ملخص

في هذه الأطروحة قمنا بدراسة نظام مرونة حرارية من نوع بريس-تيموشينكو مع فترة تأخير موزعة و تخميد لزوج على مستوى الدوران الزاوي.

قمنا ببرهنة مسألة الوجود و الوحداية للحلول بواسطة تقريبات فايدو-غلاركان مع بعض تقديرات الطاقة .

أخيرا قمنا بدراسة السلوك التقاربي للحلول، و باستخدام طريقة المضروبات أثبتنا الاستقرار الأسي للنظام.

الكلمات المفتاحية. نظام بريس-تيموشينكو، الاضمحلال الأسي، دالة الطاقة.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons considéré un système de type Bresse-Temoshenko avec un délai de retard distribué et amortissement visqueux en rotation angulaire .

Nous avons établir l'existence globale et l'unicité de la solution en utilisant les approximations de Faedo-Galarkin et quelques estimations énergétiques .

Enfin, nous avons étudié les comportement asymptotiques des solutions de ce système par la méthode des multiplicateurs et nous avons montrer la stabilité exponentielle du système.

Mots Clés. Système de Bresse-Timoshenko, décroissance exponentielle, rotation angulaire.

Contents

Abstract	i
Acknowledgements	v
Introduction	1
1 Préliminaires et rappels	2
1.1 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$	2
1.2 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$	3
1.2.1 Injections de Sobolev	4
1.2.2 Notion de trace au bord	4
1.2.3 Formule de Green	5
1.3 Compléments divers	6
1.4 Quelques définitions et notions physiques	8
1.4.1 Stabilité	8
1.4.2 Fonction de Lyapunov	9
2 Résultat d'existence et d'unicité	10
2.1 Formulation du problème et résultats principales	10
2.1.1 Approximation du problème	13
2.1.2 Estimation a priori I	15
2.1.3 Estimation a priori II	21
2.1.4 Estimation à priori III	25
2.1.5 Passage à la limite	30
3 La stabilité exponentielle	37
3.1 Résultat principal	48
Bibliography	52

Introduction

Une déformation d'un corps est inséparablement reliée à un changement de sa quantité de chaleur et donc avec un changement de la distribution de température dans le corps. Une déformation d'un corps qui varie dans le temps conduit à des changements de température, et inversement. L'énergie interne du corps dépend de la température et de la déformation. La science qui traite des processus couplés ci-dessus, est appelé thermoélasticité. La thermoélasticité, généralisation de l'élasticité des déformations non isothermes, a fait des progrès considérables au cours des dernières décennies. Sa théorie de base est maintenant bien établie, et de nombreuses applications aux problèmes en ingénierie ont été réalisées avec succès.

La thermoélasticité contient la théorie générale de la conduction de chaleur, la théorie générale des contraintes thermiques, décrit la distribution de température produite par la déformation et enfin elle contient une description du phénomène de dissipation thermoélastique. En dépit de sa complexité mathématique, la thermoélasticité nous permet d'examiner plus profondément que précédemment, le mécanisme de la déformation et les procédés thermiques se produisant dans les corps élastiques. La thermoélasticité était l'un des premiers domaines en théorie des champs couplés qui a attiré l'attention des mathématiciens; l'intérêt pour les modèles caractérisant le couplage thermomécanique a été motivé par de nouveaux problèmes pratiques importants, y compris ceux qui sont à la ne pointe des innovations technologiques actuelles. Malgré plus d'un siècle de recherches sur la thermoélasticité, de nombreux problèmes d'actualité restent difficiles à résoudre analytiquement et de fait la simulation numérique sera l'ultime moyen d'y parvenir.

Durant les trois dernières décennies, une intense importante a été donnée aux stabilités des systèmes des EDP modélisant des phénomènes physiques, chimiques ou biologiques. La solution de chacun de ces systèmes s'associe à une énergie non nulle, si cette énergie est dissipative (la dérivée par rapport

au temps est négative), le système va maintenir le repos après un certain période du temps, on dit, alors que le système est stable. Parmi ces systèmes on trouve les systèmes de type Timoshenko et Bresse-Timoshenko où la première contribution dans cette direction a été obtenue par Manevitch et Kolakowski [6]. Ils ont analysé la dynamique d'un modèle de Timoshenko où le mécanisme d'amortissement est viscoélastique. Plus précisément, ils ont considéré le système dissipatif donné par :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \beta(\varphi_x + \psi)_x - \mu_1(\varphi_x + \psi)_{tx} = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \beta(\varphi_x + \psi) - \mu_2 \psi_{tx} + \mu_1(\varphi_x + \psi)_t = 0. \end{cases} \quad (1)$$

De plus, en se basant sur les documents et leurs études sur les versions tronquées pour les équations classiques de Timochenko [7] (voir aussi les contributions récentes [8]-[9]), Almeida Junior et Ramos [1] ont montré que l'énergie totale pour l'amortissement visqueux agissant sur la rotation angulaire du système simplifié de Timoshenko donné par :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \beta(\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ -\rho_2 \varphi_{tx} - b\psi_{xx} + \beta(\varphi_x + \psi) + \mu_1 \psi_t = 0. \end{cases}$$

Ensuite, Almeida Junior et al. [2] ont examiné deux cas de systèmes dissipatifs pour des systèmes de type Bresse-Timoshenko avec des cas de retard constant, afin d'obtenir une décroissance exponentielle. Pour le premier, les auteurs ont prouvé la décroissance exponentielle de l'énergie du système donnée par :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \beta(\varphi_x + \psi)_x + \mu_1 \varphi_t + \mu_2 \varphi_t(x, t - \tau) = 0, \\ -\rho_2 \varphi_{tx} - b\psi_{xx} + \beta(\varphi_x + \psi) = 0. \end{cases}$$

Pour le second, les auteurs ont également prouvé la décroissance exponentielle de l'énergie du système donné par :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \beta(\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ -\rho_2 \varphi_{tx} - b\psi_{xx} + \beta(\varphi_x + \psi) + \mu_1 \psi_t + \mu_2 \psi_t(x, t - \tau) = 0. \end{cases}$$

Puis, Feng et al. [4], ont examiné deux cas de systèmes dissipatifs de type Bresse-Timoshenko avec des cas de retard variant dans le temps. Pour le premier, les auteurs ont démontré la décroissance exponentielle de l'énergie du système donnée par :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \beta(\varphi_x + \psi)_x + \mu_1 \varphi_t + \mu_2 \varphi_t(x, t - \tau(t)) = 0, \\ -\rho_2 \varphi_{tx} - b\psi_{xx} + \beta(\varphi_x + \psi) = 0. \end{cases}$$

Pour le second, les auteurs ont également prouvé la décroissance exponentielle de l'énergie du système donné par :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \beta(\omega_x + \psi)_x = 0 \\ -\rho_2 \omega_{ttx} - b\psi_{xx} + \beta(\omega_x + \psi) + \mu_1 \psi_t + \mu_2 \psi_t(x, t - \tau(t)) = 0 \end{cases}$$

Préliminaires et rappels

Dans ce chapitre, on va présenter quelques notions élémentaires et inégalités, ainsi que quelques résultats d'analyse fonctionnelle qui seront très utiles par la suite.

1.1 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Nous allons définir un échelle d'espaces de *Lebesgue* qui jouent un rôle important en analyse fonctionnelle, et en théorie des équations aux dérivées partielles.

Dans toute la suite Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^n , $\partial\Omega = \Gamma$ la frontière de Ω , muni de la mesure de Lebesgue dx .

Soit $p \in \mathbb{R}$, avec $1 \leq p < \infty$, on définit l'espace

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \text{ telle que } u \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty \right\},$$

muni de la norme suivante

$$\| u \|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |u|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$; on définit

$$L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \text{ } u \text{ mesurable et } \exists C > 0 \text{ tel que } |u(x)|^p \leq C \text{ p.p sur } \Omega \},$$

muni de la norme suivante

$$\|u\|_{L^\infty} = \inf \{C; |u(x)| \leq C \quad p.p \text{ sur } \Omega\}.$$

Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces de *Banach* pour les deux normes précédentes. De plus, pour $p = 2$ nous obtenons un avantage très important car l'espace $L^2(\Omega)$ devient un espace de *Hilbert* pour la norme suivante:

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv dx \quad \text{et} \quad \|u\|_2^2 = (u, u).$$

1.2 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Les espaces de *Sobolev* sont un outil essentiel pour l'étude des équations aux dérivées partielles. En effet, les solutions de ces équations appartiennent plus naturellement à un espace de *Sobolev* qu'à un espace de fonctions continues partiellement dérivables au sens classique.

Dans ce qui suit Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^n et $\partial\Omega = \Gamma$ la frontière de Ω . Soit $p \in \mathbb{R}$, avec $1 \leq p < \infty$, et $m \in \mathbb{N}^*$; on définit l'espace de *Sobolev* $W^{m,p}$ par:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad |\alpha| \leq m\},$$

avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ un multi-indice d'entiers positifs ou nuls de longueur $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ tel que

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^\alpha u}{(\partial x_1^{\alpha_1}) \dots (\partial x_n^{\alpha_n})}.$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est de *Banach* pour la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{pour } 1 \leq p < \infty.$$

Pour $p = 2$, il est d'usage de remplacer la notation $W^{m,2}(\Omega)$ par $H^m(\Omega)$ d'où

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad |\alpha| \leq m\}.$$

On muni l'espace $H^m(\Omega)$ par la norme :

$$\|u\|_{W^{m,2}(\Omega)} = \|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Le produit scalaire de deux éléments u, v de $H^m(\Omega)$, étant donné par :

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

L'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme $\|u\|_{H^m(\Omega)}$.

On désigne par $W_0^{m,p}(\Omega)$, l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$. Pour $p = 2$ et $m = 1$, l'espace $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ est un espace de *Hilbert* pour la norme et le produit scalaire de l'espace $H^1(\Omega)$ tel que

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \text{ et } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega = \Gamma\}.$$

L'espace $H^{-1}(\Omega)$ est l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$. De plus, on a

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega),$$

avec injection continue.

1.2.1 Injections de Sobolev

Les injections de *Sobolev* sont très utilisées lorsqu'on étudie les équations aux dérivées partielles. Elles fournissent des inégalités entre les normes des espaces de Sobolev et les normes des espaces de Lebesgue.

Theorem 1.1. (*Rellich-Kondrachov*)

Soit Ω un ensemble borné de classe C^1 . Alors, on a :

1. Si $p < n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*)$ avec $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} + \frac{1}{n}$.
2. Si $p = n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, \infty)$.
3. Si $p > n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$, avec injection compacte.

1.2.2 Notion de trace au bord

Il n'est pas nécessaire qu'une fonction u de l'espace $L^2(\Omega)$ ait un représentant continu pour que l'on puisse considérer sa restriction à Γ . C'est ce que nous appellerons la trace de u sur le bord.

Theorem 1.2. (Théorème de trace): Soit Ω un ouvert de classe C^1 , alors il existe un opérateur linéaire continu, appelé opérateur de trace et noté $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ qui coïncide avec l'opérateur de restriction usuel pour les fonctions continues. En particulier, il existe une constante c qui ne dépend que de Ω , telle que :

$$\| \gamma_0 u \|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq c \| u \|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

Si on suppose que $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ constitue une partition de Γ , avec $\text{meas}(\Gamma_0) > 0$, on définit alors

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \}.$$

Cet espace est fermé dans $H^1(\Omega)$ comme noyau de l'application (linéaire) continue $r \circ \gamma_0$ avec $r : L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma_0)$ est l'application restriction. Donc l'espace $(H_{\Gamma_0}^1(\Omega), \| \cdot \|_{H^1(\Omega)})$ est un espace de Hilbert, avec

$$\| u \|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)} = \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega).$$

De plus on a l'injection continue $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \hookrightarrow L^m(\Gamma_1)$, $1 \leq m < \frac{2(n-1)}{n-2}$, c'est-à-dire il existe une constante k , telle que

$$\| u \|_{L^m(\Gamma_1)} \leq k \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)}.$$

1.2.3 Formule de Green

Maintenant, que nous sommes en mesure de donner un sens à la restriction d'une fonction d'un espace de Sobolev sur le bord d'un ouvert, soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert de classe C^1 , alors pour toute $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$, $w \in (H^1(\Omega))^n$ on a:

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dx + \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma,$$

$$\int_{\Omega} w \cdot \nabla u dx = - \int_{\Omega} w \text{div} u dx + \int_{\Gamma} u(w \cdot \nu) d\Gamma,$$

telle que $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$ et ν est le vecteur normale unitaire extérieur en un point du bord de Ω .

Remark 1.3. Si $\Omega \subset \mathbb{R}$, alors la formule de Green devient la formule d'intégration par partie. C'est à dire

$$\int_a^b v(x) u'(x) dx = - \int_a^b v'(x) u(x) dx + [v(x) u(x)]_a^b.$$

1.3 Compléments divers

Dans cette partie nous allons donner quelques inégalités et théorèmes fondamentales de l'analyse qui sont d'une grande importance dans ce travail.

1. Inégalité de Hölder

Soit $u \in L^p$ et $v \in L^q$; avec $1 \leq p \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

alors $u.v \in L^1$ et

$$\int_{\Omega} |u.v| dx \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

Si $p = q = 2$ comme un cas particulier, cette inégalité s'appelle inégalité de Cauchy-schwartz.

$$\int_{\Omega} |u.v| dx \leq \|u\|_2 \|v\|_2.$$

2. Inégalité de Young

Soit $1 < p < \infty$; on désigne par q l'exposant conjugué de p .

alors on a :

$$xy \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2.$$

si on pose $x = \sqrt{a}X$ et $y = \frac{Y}{\sqrt{a}}$ et $p = q = 2$ on obtient

$$xy = XY \leq \frac{a}{2}X^2 + \frac{1}{2a}Y^2, \quad \text{avec } a > 0 \quad \forall (X, Y) \in \mathbb{R}^2.$$

3. Inégalité de Poincaré

Soit $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par q l'exposant conjugué de p défini par : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

et soit Ω un domaine borné dans \mathbb{R}^n . Alors il existe une constante positive $C_p > 0$

(dépendant de Ω et p seulement) telle que :

$$\|u\|_{L^p} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p \leq \infty).$$

autrement dit, sur $W_0^{1,p}(\Omega)$; la quantité $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ est une norme équivalente à la norme usuelle de $W^{1,p}(\Omega)$ ($\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$).

4. Lemme de type Gronwall

Nous rappelons ici un lemme classique de type *Gronwall* qui intervienne dans de nombreux problèmes de majoration et d'estimation d'erreur, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

Lemma 1.4. Soient $n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telle que $n(t) \geq 0$ pour toute $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$ une constante. Si $X \in C([0, T]; \mathbb{R})$ une fonction telle que

$$X(t) \leq a + \int_0^t n(s)X(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$X(t) \leq a \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right), \quad \forall t \in [0, T].$$

5. La règle de Leibniz

Soit f une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} à deux variables (x, t) continue et ses dérivées partielles sont continues et soient $a(t)$ et $b(t)$ deux fonctions continue de \mathbb{R} à valeur dans \mathbb{R} . On définit I la fonction intégrale comme suit

$$I(x, t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t)dx.$$

Alors la dérivée de I par rapport à t est donner par la relation suivante

$$\begin{aligned} I'(x, t) &= \frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t)dx \\ &= \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + f(b(t), t) \frac{db(t)}{dt} - f(a(t), t) \frac{da(t)}{dt}. \end{aligned}$$

6. Théorème fondamental de l'analyse

Theorem 1.5. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit a un point de I et F une application intégrale associée, définie par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Alors, F est dérivable sur I et sa dérivée égale à f . De plus, si G est une primitive de f , alors $F(x) - G(x) = -G(a)$.

1.4 Quelques définitions et notions physiques

Definition 1.6. (L'énergie) L'énergie (du grec : force en action) est ce qui permet d'agir : sans elle, rien ne se passe, pas de mouvement, pas de lumière, pas de vie ! Au sens physique, l'énergie caractérise la capacité à modifier un état, à produire un travail entraînant du mouvement, de la lumière, ou de la chaleur. Toute action ou changement d'état nécessite que de l'énergie soit échangé.

Definition 1.7. (Thermoélasticité) La thermoélasticité est une relation entre l'élasticité d'un corp et sa dilatation en fonction de la chaleur.

1.4.1 Stabilité

La stabilisation a pour but d'atténuer les vibrations par rétro-action (feedback), elle consiste donc à garantir la décroissance de l'énergie des solutions vers 0 de façon plus ou moins rapide par un mécanisme de dissipation. Plus précisément, le problème de stabilisation auquel on s'intéresse revient à déterminer le comportement asymptotique de l'énergie que l'on note $\mathcal{E}(t)$ (c'est la norme des solutions dans l'espace d'état), à étudier sa limite afin de déterminer si cette limite est nulle ou pas, et si cette limite est nulle, à donner une estimation sur sa vitesse de décroissance vers zéro.

Il existe plusieurs degrés de stabilité que on peut l'étudier. Le premier degré consiste à analyser simplement la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro, i.e.

$$\mathcal{E}(t) \longrightarrow 0, \quad \text{lorsque } t \longrightarrow +\infty,$$

c'est ce que l'on appelle la stabilisation forte.

Pour le second, on s'intéresse à la décroissance la plus rapide de l'énergie, c'est-à-dire lorsque celle-ci tend vers 0 de manière exponentielle, i.e.

$$\mathcal{E}(t) \leq M e^{-ht} \quad \forall t \geq 0.$$

où M et h sont des constantes positives avec M dépend des données initiales.

Quant au troisième, la décroissance des solutions n'est pas exponentielle, mais du type polynomial, par exemple

$$\mathcal{E}(t) \leq M t^{-\alpha} \quad \forall t \geq 0,$$

où M et h sont des constantes positives avec M dépend des données initiales.

1.4.2 Fonction de Lyapunov

La notion de fonction de Lyapunov constitue d'une certaine manière une généralisation de l'énergie. Étant donnée une fonction définie positive, l'idée directrice des théorèmes de Lyapunov consiste à évaluer l'évolution de cette fonction sur les trajectoires du système afin de conclure la décroissance de l'énergie.

Definition 1.8. (Fonction de Lyapunov) Une fonction de Lyapunov V est une fonction de classe C^1 , définie par

$$V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

telle que

$$V(x) > 0, \forall x \neq 0 \text{ et } V(x) = 0 \text{ pour } x = 0,$$

et

$$V'(x) \leq 0, \forall x \neq 0 \text{ et } V'(x) = 0 \text{ pour } x = 0.$$

Remark 1.9. Notons que V' est la dérivée de V par rapport au temps t . Cela veut dire que $V'(x) = \frac{d}{dt} V(x)$.

Le résultat fondamental de la stabilité de Lyapunov affirme que si une fonction de Lyapunov existe pour un système donné alors ce système est stable.

Si la fonction de Lyapunov est strictement décroissante, $\frac{d}{dt} V(x) < 0$; alors la stabilité est en plus exponentielle.

Résultat d'existence et d'unicité de la solution d'un système de type Bress-Timoshenko

Dans ce chapitre, nous allons considérer un système thermoélastique de type Bress-Timoshenko du second son avec un retard distribué. On va démontrer l'existence globale et l'unicité de la solution de ce problème en utilisant des approximations classiques de Faedo-Galerkin avec quelques estimations à priori.

2.1 Formulation du problème et résultats principales

Le problème mécanique est modélisé comme suit :

$$\begin{cases} \rho_1 \omega_{tt} - K(\omega_x + \nu)_x + \mu_1 \omega_t + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \omega_t(x, t - p) dp = 0, \\ -\rho_2 \omega_{ttx} - b\nu_{xx} + K(\omega_x + \nu) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

tel que

$$(x, p, t) \in (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2) \times (0, \infty),$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} \omega(x, 0) = \omega_0(x), \omega_t(x, 0) = \omega_1(x), \omega_{tt}(x, 0) = \omega_2(x), \\ \omega_{ttt}(x, 0) = \omega_3(x), \nu(x, 0) = \nu_0(x), \quad x \in (1, 0), \end{cases} \quad (2.2)$$

tel que $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ et ν_0 sont des fonctions, et les conditions aux bords sont de type Dirichlet sont données

$$\omega(0, t) = \omega(1, t) = \nu(0, t) = \nu(1, t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.3)$$

Ici, $\omega = \omega(x, t)$ est le déplacement transversal du faisceau $\nu = \nu(x, t)$ est l'angle de rotation et les coefficients $\rho_1, \rho_2, b, K, \mu_1$ sont des constantes positives. Le paramètre τ est le temps de relaxation décrivant le décalage temporel de la réponse du flux thermique à un gradient de température. L'intégral représente le terme de retard distribué avec τ_1, τ_2 sont deux nombres réels qui satisfaisant $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2$ et μ_2 est constant positive. Le poids du retard distribué est supposé comme suit:

$\mu_2 : [\tau_1, \tau_2] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction bornée satisfait

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) dp < \mu_1. \quad (2.4)$$

Maintenant à partir du terme de de retard distribué, motivé par Nicaise et Pignotti en introduit une nouvelle variable y comme suit:

$$y(x, \tau, p, t) = \omega_t(x, t - p\tau). \quad (2.5)$$

D'après (2.5), on obtient

$$\begin{cases} py_t(x, \tau, p, t) = -y_\tau(x, \tau, p, t), \\ y(x, 0, p, t) = \omega_t(x, t), \end{cases} \quad (2.6)$$

Par conséquent, le problème (2.1) est équivalent à

$$\begin{cases} \rho_1 \omega_{tt} - K(\omega_x + v)_x + \mu_1 \omega_t + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y(x, 1, p, t) dp = 0, \\ -\rho_2 \omega_{ttx} - b v_{xx} + K(\omega_x + v) = 0, \\ p y_t(x, \tau, p, t) + y_\tau(x, \tau, p, t) = 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

tel que

$$(x, \tau, p, t) \in (0, 1) \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2) \times (0, \infty).$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} \omega(x, 0) = \omega_0(x), \omega_t(x, 0) = \omega_1(x), \omega_{tt}(x, 0) = \omega_2(x), \\ \omega_{ttt}(x, 0) = \omega_3(x), v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in (0, 1), \\ y(x, \tau, p, 0) = \omega_0(x, -p\tau), y_t(x, \tau, p, 0) = \omega_1(x, -p\tau), \quad \text{sur } (0, 1) \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2), \\ y_{tt}(x, \tau, p, 0) = \omega_2(x, -p\tau), \quad \text{sur } (0, 1) \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2), \end{cases} \quad (2.8)$$

où $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ et v_0 sont des fonctions, et les conditions aux bords

$$\omega(0, t) = \omega(1, t) = v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.9)$$

Nous énonçons maintenant notre résultat principal concernant l'unique solvabilité du Problème (2.7) – (2.8) dont la démonstration sera détaillée dans les sections suivantes.

Theorem 2.1. *Supposons que l'hypothèse (2.4) est vraie. Alors nous avons le résultat suivant*

- i) *Si $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, v_0) \in (H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)) \times (H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)) \times H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times (H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1))$ et $(f_0, f_1, f_2) \in (H^1((0, 1) \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2)))$, alors le problème (2.7) – (2.8) admet une solution faible satisfait*

$$\begin{aligned} \omega &\in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+, H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)), & v &\in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+, H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)) \\ \omega_t &\in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+, H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)), & \omega_{tt} &\in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+, H_0^1(0, 1)). \end{aligned}$$

ii) Si $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \nu_0) \in H_0^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \times H_0^1(0, 1)$ et $f_0, f_1, f_2 \in H^1((0, 1) \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2))$, alors le problème (2.7) – (2.8) admet une solution faible vérifiant pour toute $T > 0$:

$$\begin{aligned} \omega &\in C([0, T], H_0^1(0, 1)) \cap C^1([0, T], L^2(0, 1)), & \nu &\in C([0, T], H_0^1(0, 1)) \\ \omega_t &\in C([0, T], H_0^1(0, 1)), & \omega_{tt} &\in C([0, T], L^2(0, 1)). \end{aligned}$$

iii) Dans les deux cas, on a la solution $(\omega, \omega_t, \omega_{tt}, \nu)$ dépendance en continu les conditions initiales $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \nu_0) \in H_0^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times H_0^1(0, 1)$. En particulier, le problème (2.7) – (2.8) admet une solution faible unique.

La démonstration du théorème (2.1) sera réalisée en plusieurs étapes et est basée sur l'approximation classique de Faedo-Galerkin ainsi que sur quelques estimations a priori.

2.1.1 Approximation du problème

Soient $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m\}$ deux bases de Galerkin, tel que pour toute $m \geq 1$; on a

$$\begin{aligned} W_m &= \text{vect}\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_m\}, \\ Y_m &= \text{vect}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_m\}, \end{aligned}$$

On définit aussi, pour tout $1 \leq j \leq m$, la suite $\phi_j(x, \tau, p)$, avec

$$\phi_j(x, 0, p) = u_j(x).$$

Alors on peut étendre $\phi_j(x, 0, p)$ sur $L^2((0, 1) \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2))$ et on considère

$$V_m = \text{vect}\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_m\}.$$

Pour l'étude de notre problème nous définissons les approximation suivantes.

$$\begin{aligned}\omega_m &= \sum_{j=1}^m g_{jm}(t)u_j(x), \\ \nu_m &= \sum_{j=1}^m h_{jm}(t)\varepsilon_j(x), \\ y_m &= \sum_{j=1}^m f_{jm}(t)\phi_j(x, \tau, p),\end{aligned}$$

qui satisfont le problème approximations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1(\omega_{mtt}, u_j) + K((\omega_{mx} + \nu_j), u_{mx}) + \mu_1(\nu_{mt}, u_j) \\ + \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p)y_m(x, 1, p, t) dp, u_j \right) = 0, \\ b(\nu_{mx}, \varepsilon_{jx}) + \rho_2(\omega_{mtt}, \varepsilon_{jx}) + K((\omega_{mx} + \nu), \varepsilon_j) = 0, \\ (py_{mt}(x, \tau, p, t), \phi_j) + (y_{m\tau}(x, \tau, p, t), \phi_j) = 0, \\ (py_{mtt}(x, \tau, p, t), \phi_j) + (y_{mtt}(x, \tau, p, t), \phi_j) = 0, \end{array} \right. \quad (2.10)$$

avec les conditions initiales

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_m(0) = \omega_0^m, \quad \omega_{mt}(0) = \omega_1^m, \quad \omega_{mtt}(0) = \omega_2^m, \quad \omega_{mttt}(0) = \omega_3^m, \\ \nu_m(0) = \nu_0^m, \quad \nu_{mt}(0) = \nu_1^m, \\ y_m(0) = y_0^m, \quad y_{mt}(0) = y_1^m, \quad y_{mtt}(0) = y_2^m, \end{array} \right. \quad (2.11)$$

qui satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_0^m \rightarrow \omega_0, \text{ fortement dans } H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1), \\ \omega_1^m \rightarrow \omega_1, \text{ fortement dans } H_0^1(0, 1), \\ \omega_2^m \rightarrow \omega_2, \text{ fortement dans } H_0^1(0, 1), \\ \omega_3^m \rightarrow \omega_3, \text{ fortement dans } L^2(0, 1), \\ \nu_0^m \rightarrow \nu_0, \text{ fortement dans } H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1), \\ \nu_1^m \rightarrow \nu_1, \text{ fortement dans } H_0^1(0, 1), \\ y_0^m \rightarrow y_0, \text{ fortement dans } H^1((0, 1) \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2)), \\ y_1^m \rightarrow y_1, \text{ fortement dans } H^1((0, 1) \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2)), \\ y_2^m \rightarrow y_2, \text{ fortement dans } H^1((0, 1) \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2)), \end{array} \right.$$

En utilisant des résultats standard sur la théorie des équations différentielles ordinaires on conclut que le problème (2.10) – (2.11) a une solution locale $(g_{jm}, h_{jm}, f_{jm})_{j=1,m}$ définie sur $[0, T_m]$. Les estimations suivantes montre que la solution locale peut étendre à une solution globale sur $[0, T]$, pour tout $T > 0$.

2.1.2 Estimation a priori I

En dérivant (2.7)₁ par rapport à t et en multipliant par ω_{tt} , on obtient

$$\rho_1 \omega_{ttt} \omega_{tt} - K(\omega_x + \nu)_{xt} \omega_{tt} + \mu_1 \omega_{tt}^2 + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \omega_{tt} \omega_{tt}(x, t - p) dp = 0. \quad (2.12)$$

On peut écrit cette equation comme suit:

$$\frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \omega_{tt}^2 - K(\omega_x + \nu)_{xt} \omega_{tt} + \mu_1 \omega_{tt}^2 + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \omega_{tt} \omega_{tt}(x, t - p) dp = 0. \quad (2.13)$$

depuis en intégrant le résultat précédant par rapport à x sur $(0, 1)$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \omega_{tt}^2 dx - K \int_0^1 (\omega_x + \nu)_{xt} \omega_{tt} dx + \mu_1 \int_0^1 \omega_{tt}^2 dx \\ & + \int_0^1 \omega_{tt} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \omega_{tt}(x, t - p) dp dx = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

D'après l'équation (2.14), on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \omega_{tt} v_{xt} dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\frac{\rho_1}{K} \int_0^1 \omega_{tt}^2 dx + K \int_0^1 \omega_{tx}^2 \right] + \frac{\mu_1}{K} \int_0^1 \omega_{tt}^2 dx \\ &+ \frac{1}{K} \int_0^1 \omega_{tt} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_t(x, 1, p, t) dp dx = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

D'autre part, en multipliant (2.10₁) par (g'_{jm}) , on obtient

$$\begin{aligned} \rho_1 \omega_{mtt}^2 \omega_{mt} + K(\omega_{mx} + v_m)_x \omega_{mt} + \mu_1 \omega_{mt}^2 \\ + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \omega_{mt} y_m(x, 1, p, t) dp dx = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

On intégrons l'équation (2.16) par rapport à x sur $(0,1)$, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\rho_1 \int_0^1 \omega_{mt}^2 dx + \mu_1 \int_0^1 \omega_m dx \right] + K \int_0^1 (\omega_{mx} + v_m) \omega_m dx \\ + \int_0^1 \omega_m \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \omega_m y_m(x, 1, p, t) dp dx = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Aussi, en multipliant (2.10₂) par (h'_{jm}) , on trouve

$$b(v_{mx}, \varepsilon_{jx} h'_{jm}) + \rho_2(\omega_{mtt}, \varepsilon_{jx} h'_{jm}) + K((\omega_{mx} + v_m), \varepsilon_j h'_{jm}) = 0.$$

D'où

$$\frac{b}{2} \frac{d}{dt} v_{mx}^2 + \rho_2 \omega_{mtt} v_{mtx} + K(\omega_{mx} + v_m) v_{mtx} = 0.$$

et par l'intégration l'équation précédant, on obtient

$$\frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 v_{mx}^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \omega_{mt} v_{mtx} dx + K \int_0^1 (\omega_{mx} + v_m) v_{mtx} dx = 0. \quad (2.18)$$

Donc, en remplaçant l'égalité (2.15) dans l'équation (2.18), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[b \int_0^1 v_{mx}^2 dx + \frac{\rho_1 \rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{mt}^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \omega_{mtx}^2 dx \right. \\ & \left. + K \int_0^1 (\omega_{mx} + v_m)^2 dx \right] + \frac{\rho_2 \mu_1}{K} \int_0^1 \omega_{mt}^2 dx \\ & + \frac{\rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{mt} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_{mt}(x, 1, p, t) dp dx = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Par addition de deux équations (2.15) et (2.19), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\rho_1 \int_0^1 \omega_{mt}^2 dx + \frac{\rho_1 \rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{mt}^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \omega_{mtx}^2 dx + b \int_0^1 v_{mx}^2 dx \right. \\ & \left. + K \int_0^1 (\omega_{mx} + v_m)^2 dx \right] + \frac{\rho_2 \mu_1}{K} \int_0^1 \omega_{mt}^2 dx \\ & + \frac{\rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{mt} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_{mt}(x, 1, p, t) dp dx + \mu_1 \int_0^1 \omega_{mt}^2 dx \\ & + \int_0^1 \omega_{mt} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_m(x, 1, p, t) dp dx = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

D'autre part, en multipliant (2.10)₃ par $(\mu_2(p) f_{jm})$, on obtient

$$\int_0^1 p \mu_2(p) y_m y_{mt}(x, \tau, p, t) dx = - \int_0^1 \mu_2(p) y_m y_{m\tau}(x, \tau, p, t) dx.$$

En intégrant la dernière égalité sur $(0, t) \times (0, 1) \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2)$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) y_m^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx ds \\
&= - \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_m y_{m\tau}(x, \tau, p, t) dp d\tau dx ds \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \frac{d}{d\tau} y_m^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx ds \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) (y_m^2(x, 0, p, t) - y_m^2(x, 1, p, t)) dp dx ds \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) dp \right) \int_0^t \int_0^1 y_m^2(x, 0, p, s) dx ds \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_m^2(x, 1, p, t) dp dx ds.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

De même, nous avons

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) y_{m_t}^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx ds \\
&= - \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_{m_t} y_{m_t\tau}(x, \tau, p, t) dp d\tau dx ds \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \frac{d}{d\tau} y_{m_t}^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx ds \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) (y_{m_t}^2(x, 0, p, t) - y_{m_t}^2(x, 1, p, t)) dp dx ds \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) dp \right) \int_0^t \int_0^1 y_{m_t}^2(x, 0, p, s) dx ds \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_{m_t}^2(x, 1, p, t) dp dx ds.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Remark 2.2. Notons ici que $y_m(x, 0, p, t) = \omega_{m_t}(x, t)$.

En intégrant l'équation (2.20) et en utilisant (2.21) et (2.22), on trouve

$$\begin{aligned}
& \mathcal{E}_m(t) + \left(\mu_1 - \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) dp \right) \int_0^t \int_0^1 \omega_{mt}^2(s) dx ds \\
& + \frac{\rho_2}{K} \left(\mu_1 - \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) dp \right) \int_0^t \int_0^1 \omega_{mt}^2(s) dx ds \\
& + \int_0^t \int_0^1 \omega_{mt}(s) \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) |y_m(x, 1, p, s)| dp dx ds \\
& + \frac{\rho_2}{K} \int_0^t \int_0^1 \omega_{mt} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) |y_m(x, 1, p, s)| dp d\tau dx ds \\
& + \int_0^t \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) y_m^2(x, 1, p, s) dp d\tau dx ds \\
& + \frac{\rho_2}{K} \int_0^t \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) y_{im}^2(x, 1, p, s) dp d\tau dx ds \\
& = \mathcal{E}_m(0),
\end{aligned} \tag{2.23}$$

tel que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_m(t) &= \frac{1}{2} \left[\rho_1 \int_0^1 \omega_{mt}^2 dx + \frac{\rho_1 \rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{mt}^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \omega_{mtx}^2 dx \right. \\
& + b \int_0^1 v_{mx}^2 dx + K \int_0^1 (\omega_{mx} + v_m)^2 dx \left. \right] \\
& + \int_0^t \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) y_m^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \\
& + \frac{\rho_2}{K} \int_0^t \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) y_{im}^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Finalement, on a les cas suivantes:

i) Si $\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) dp < \mu_1$. Alors, en utilisant l'inégalité de Young, nous avons

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^1 \omega_{mt}(s) \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) |y_m(x, 1, p, s)| dp dx ds \\
& \geq -\frac{1}{2} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) dp \right) \int_0^t \int_0^1 \omega_{mt}^2(s) dx ds \\
& - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_m^2(x, 1, p, s) dp dx ds.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

et

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^1 \omega_{mt}(s) \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_{mt}(x, 1, p, s) dp dx ds \\
& \geq -\frac{1}{2} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) dp \right) \int_0^t \int_0^1 \omega_{mt}^2(s) dx ds \\
& - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_{mt}^2(x, 1, p, s) dp dx ds.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

En remplaçant (2.25) dans l'équation (2.23), on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_m(t) & + \left(\mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) dp \right) \int_0^t \int_0^1 \omega_{mt}^2(s) dx ds \\
& + \frac{\rho_2}{K} \left(\mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) dp \right) \int_0^t \int_0^1 \omega_{mt}^2(s) dx ds \\
& \leq \mathcal{E}_m(0).
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Donc il existe une constante $\eta_0 = \mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) dp$, telle que

$$\mathcal{E}_m(t) + \eta_0 \int_0^t \int_0^1 \omega_{mt}^2(s) dx ds + \frac{\rho_2}{K} \eta_0 \int_0^t \int_0^1 \omega_{mt}^2(s) dx ds \leq \mathcal{E}_m(0). \tag{2.28}$$

ii) Si $\mu_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) dp$, et d'après (2.27), on a

$$\mathcal{E}_m(t) \leq \mathcal{E}_m(0). \tag{2.29}$$

iii) Alors dans les deux cases, on déduit qu'il existe une constante positive C indépendante de m , telle que

$$\mathcal{E}_m(t) \leq C, \quad \forall t \geq 0.$$

Cela veut dire que

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \omega_{mt}^2 dx + \int_0^1 \omega_{mtt}^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \omega_{mtx}^2 dx dx + \int_0^1 v_{mx}^2 dx \\
& + \int_0^1 (\omega_{mx} + v_m)^2 + \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) y_m^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \\
& + \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) y_{mt}^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \leq C.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Ainsi, on peut prendre $t_m = T$, pour tout $T > 0$.

2.1.3 Estimation a priori II

La dérivation de l'équation (2.10)₁ par rapport à t et la multiplication par ω_{mtt} , nous donne

$$\begin{aligned}
& \rho_1 \omega_{mttt} \omega_{mtt} + K(\omega_{mx} + v_m)_x \omega_{mtt} + \mu_1 \omega_{mtt}^2 \\
& + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \omega_{mtt} y_{mt}(x, 1, p, t) dp dx = 0.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Depuis en intégrant le résultat précédant par rapport à x sur $(0, 1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \omega_{mtt}^2 dx + K \int_0^1 (\omega_{mx} + v_m)_x \omega_{mtt} dx + \mu_1 \int_0^1 \omega_{mtt}^2 dx \\
& + \int_0^1 \omega_{mtt} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_{mt}(x, 1, p, t) dp dx = 0.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Aussi, en dérivant l'équation (2.10)₂ par rapport à t et en multipliant par (v_{mtt}) , on trouve

$$bv_{mxtt} v_{mtt} + \rho_2 \omega_{mtt} v_{mtt} + K(\omega_{mx} + v) v_{mtt} = 0. \tag{2.33}$$

De Puis en intégrant le résultat précédant par rapport à sur $(0, 1)$, on obtient

$$\frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 v_{mxt}^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \omega_{mtt} v_{mtt} dx + K \int_0^1 (\omega_{mx} + v) v_{mtt} dx = 0. \tag{2.34}$$

D'autre part, en dérivant l'équation (2.10)₁ deux fois par rapport à t , on trouve

$$v_{mtx} = \frac{1}{K} \left(\rho_1 \omega_{mttt} - K \omega_{mttx} + \mu_1 \omega_{mtt} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(p)| y_{mt}(x, 1, p, t) \right),$$

Donc, on doit remplaçant la dernière égalité dans l'équation (2.34), on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\frac{\rho_1 \rho_2}{2K} \int_0^1 \omega_{mtt}^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^1 \omega_{mtx}^2 dx + \frac{b}{2} \int_0^1 v_{mtx}^2 dx \right] \\ & + \frac{\rho_2 \mu_1}{K} \int_0^1 \omega_{mtt}^2 dx + \frac{\rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{mtt} \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(p)| y_{mt}(x, 1, p, t) dp \\ & + K \int_0^1 (\omega_{mtx} + v_{mt}) v_{mt} dx = 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Par addition des équations (2.32) et (2.35), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\rho_1 \int_0^1 \omega_{mt}^2 dx + \frac{\rho_1 \rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{mtt}^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \omega_{mtx}^2 dx \right. \\ & \left. + b \int_0^1 v_{mtx}^2 dx + K \int_0^1 (\omega_{mtx} + v_{mt})^2 dx \right] + \mu_1 \int_0^1 \omega_{mt}^2 dx \\ & + \int_0^1 \omega_{mt} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_{mt}(x, 1, p, t) dp dx + \frac{\rho_2 \mu_1}{K} \int_0^1 \omega_{mtt}^2 dx \\ & + \frac{\rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{mtt} \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(p)| y_{mt}(x, 1, p, t) dp = 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

En suite, en multipliant l'équation (2.7)₄ par $(\mu_2(p) f'_{jm})$, on obtient

$$p \mu_2(p) y_{mt} y_{mt}(x, \tau, p, t) + \mu_2(p) y_{mt} y_{mt\tau}(x, \tau, p, t) = 0. \quad (2.37)$$

Ce équivalant à

$$\frac{p}{2} \frac{d}{dt} \mu_2(p) y_{mt}^2(x, \tau, p, t) + \mu_2(p) y_{mt} y_{mt\tau}(x, \tau, p, t) = 0. \quad (2.38)$$

En intégrant l'égalité (2.38) sur $(0, t) \times (0, 1) \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2)$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) y_{mt}^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx ds \\
&= - \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_{mt} y_{m\tau t}(x, \tau, p, t) dp d\tau dx ds \\
&= - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \frac{d}{d\tau} y_{mt}^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx ds \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) (y_{mt}^2(x, 0, p, t) - y_{mt}^2(x, 1, p, t)) dp dx ds \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) dp \right) \int_0^t \int_0^1 y_{mt}^2(x, 0, p, s) dx ds \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_{mt}^2(x, 1, p, t) dp dx ds.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Remark 2.3. Notons ici que $y_{mt}(x, 0, p, t) = \omega_{mt}(x, t)$.

Maintenant, en fait une intégration sur $(0, t)$ de l'équation (2.36) et en utilisant l'équation (2.39), on trouve

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_m(t) &+ \left(\mu_1 - \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) dp \right) \int_0^t \int_0^1 \omega_{mt}^2(s) dx ds \\
&+ \frac{\rho_2}{K} \left(\mu_1 - \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) dp \right) \int_0^t \int_0^1 \omega_{m\tau t}^2(s) dx ds \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \omega_{mt}(s) \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_m(x, 1, p, s) dp dx ds \\
&+ \frac{\rho_2}{K} \int_0^t \int_0^1 \omega_{m\tau t}(s) \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_{m\tau t}(x, 1, p, s) dp dx ds \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) y_{mt}^2(x, 1, p, s) dp d\tau dx ds \\
&+ \frac{\rho_2}{K} \int_0^t \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) y_{m\tau t}^2(x, 1, p, s) dp d\tau dx ds \\
&= \mathcal{F}_m(0),
\end{aligned} \tag{2.40}$$

tel que

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_m(t) = & \frac{1}{2} \left[\rho_1 \int_0^1 \omega_{mt}^2 dx + \frac{\rho_1 \rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{mtt}^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \omega_{mtx}^2 dx \right. \\
& + b \int_0^1 v_{mxt}^2 dx + K \int_0^1 (\omega_{mxt} + v_{mt})^2 dx \left. \right] \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) y_{mt}^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \\
& + \frac{\rho_2}{2K} \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) y_{mt}^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Nous avons les cas suivants

i) Si $\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) dp < \mu_1$, d'après l'inégalité de Young, on a

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^1 \omega_{mtt}(s) \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_{mt}(x, 1, p, s) dp dx ds \\
& \geq -\frac{1}{2} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) dp \right) \int_0^t \int_0^1 \omega_{mtt}^2(s) dx ds \\
& \quad - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_{mt}^2(x, 1, p, s) dp dx ds.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

et

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^1 \omega_{mtt}(s) \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_{mt}(x, 1, p, s) dp dx ds \\
& \geq -\frac{1}{2} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) dp \right) \int_0^t \int_0^1 \omega_{mtt}^2(s) dx ds \\
& \quad - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_{mt}^2(x, 1, p, s) dp dx ds.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

En remplaçant (2.42) dans l'équation (2.40), on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_m(t) + & \left(\mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) dp \right) \int_0^t \int_0^1 \omega_{mtt}^2(s) dx ds \\
& + \frac{\rho_2}{K} \left(\mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) dp \right) \int_0^t \int_0^1 \omega_{mtt}^2(s) dx ds \\
& \leq \mathcal{G}_m(0).
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Donc il existe une constante $\eta_0 = \mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} p\mu_2(p)dp$ telle que

$$\mathcal{G}_m(t) + \eta_0 \int_0^t \int_0^1 \omega_{mt}^2(s) dx ds + \frac{\rho_2}{K} \eta_0 \int_0^t \int_0^1 \omega_{mtt}^2(s) dx ds \leq \mathcal{G}_m(0). \quad (2.45)$$

ii) Si $\mu_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) dp$, et d'après (2.27), on a

$$\mathcal{G}_m(t) \leq \mathcal{G}_m(0). \quad (2.46)$$

iii) Alors dans les deux cases, on déduit qu'il existe une constante positive C_1 indépendante de m telle que

$$\mathcal{G}_m(t) \leq C_1, \quad \forall t \geq 0.$$

Cela veut dire que

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \omega_{mt}^2 dx + \int_0^1 \omega_{mtt}^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \omega_{mtx}^2 dx dx + \int_0^1 v_{mtx}^2 dx \\ & + \int_0^1 (\omega_{mtx} + v_{mt})^2 + \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p\mu_2(p) y_{mt}^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \\ & + \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p\mu_2(p) y_{mtt}^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \leq C_1. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Ainsi, on peut prendre $t_m = T$, pour tout $T > 0$.

2.1.4 Estimation à priori III

En multipliant (2.10)₁ par $(-\omega_{mtxx})$, on obtient

$$\begin{aligned} & -\rho_1 \omega_{mtt} \omega_{mtxx} - K(\omega_{mx} - v_m)_x \omega_{mtxx} - \mu_1 \omega_{mt} \omega_{mtxx} \\ & - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \omega_{mtxx} y_m(x, 1, p, t) dp = 0. \end{aligned}$$

Depuis En intégrant le résultat précédant sur $(0, 1)$ par rapport à x , on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \omega_{mtx}^2 dx + K \int_0^1 (\omega_{mx} + v_m)_x \omega_{mtxx} dx + \mu_1 \int_0^1 \omega_{mtx}^2 dx \\ & \int_0^1 \omega_{mtxx} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_m(x, 1, p, t) dp dx = 0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Aussi, en multipliant (2.10)₂ par $(-v_{mtxx})$, on trouve

$$-b v_{mxx} v_{mtxx} - \rho_2 \omega_{mttx} v_{mtxx} - K(\omega_{mx} + v) v_{mtxx} = 0.$$

Donc, en intégrant le résultat précédent sur $(0, 1)$ par rapport à x , on trouve

$$\rho_2 \int_0^1 \omega_{mttx} v_{mtxx} dx + b \int_0^1 v_{mxx} v_{mtxx} dx + K \int_0^1 (\omega_{mx} + v_m)_x v_{mtxx} dx = 0. \quad (2.49)$$

Ceci équivalent à

$$\rho_2 \int_0^1 \omega_{mttx} v_{mtxx} dx + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 v_{mxx}^2 dx + K \int_0^1 (\omega_{mx} + v_m)_x v_{mtxx} dx = 0. \quad (2.50)$$

D'autre part, en dérivant l'équation (2.10)₁ par rapport à t et par rapport à x , on a trouve

$$v_{mtxx} = \frac{1}{K} \left[\rho_1 \omega_{mttx} - K \omega_{mxxx} + \mu_1 \omega_{mttx} - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_{mxt}(x, 1, p, t) dp \right].$$

En remplaçant cette égalité dans l'équation (2.50) et d'après la formule d'intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1 \rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{mttx} \omega_{mttx} dx + \rho_2 \int_0^1 \omega_{mtxx} \omega_{mtxx} dx + \frac{\mu_1 \rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{mttx}^2 dx \\ & + b \int_0^1 v_{mxx}^2 dx + K \int_0^1 (\omega_{mx} + v_m)_x v_{mtxx} dx \\ & + \frac{\rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{mttx} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_{mxt}(x, 1, p, t) dp dx = 0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\frac{\rho_1 \rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{mtx}^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \omega_{mxx}^2 dx \right] + b \int_0^1 v_{mxx}^2 dx \\
& + K \int_0^1 (\omega_{mx} + v_m)_x v_{mtx} dx + \frac{\mu_1 \rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{mtx}^2 dx \\
& + \frac{\rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{mtx} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_{mtx}(x, 1, p, t) dp dx = 0.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Par addition des équations (2.48) et (2.52), on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\rho_1 \int_0^1 \omega_{mtx}^2 dx + \frac{\rho_1 \rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{mtx}^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \omega_{mxx}^2 dx \right. \\
& \left. + K \int_0^1 (\omega_{mxx} + v_{mx})^2 dx \right] + b \int_0^1 v_{mxx}^2 dx + \mu_1 \int_0^1 \omega_{mtx}^2 dx \\
& + \int_0^1 \omega_{mxx} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_m(x, 1, p, t) dp dx + \mu_1 \frac{\rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{mtx}^2 dx \\
& + \frac{\rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{mtx} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_{mtx}(x, 1, p, t) dp dx = 0.
\end{aligned} \tag{2.53}$$

D'autre Part, en dérivant l'équation (2.10)₃ par rapport à x , on obtient

$$p y_{tx}(mx, \tau, p, t) + y_{m\tau x}(x, \tau, p, t) = 0.$$

Depuis, en multipliant l'égalité précédant par $(\mu_2(p) y_{mx})$, on trouve

$$p \mu_2(p) y_{mx} y_{mtx}(mx, \tau, p, t) + \mu_2(p) y_{mx} y_{m\tau x}(x, \tau, p, t) = 0.$$

et en intégrant l'équation (2.54) sur $(0, 1)$ par rapport à x , on trouve

$$\int_0^1 p \mu_2(p) y_{mx} y_{mtx}(x, \tau, p, t) dx + \int_0^1 \mu_2(p) y_{mx} y_{m\tau x}(x, \tau, p, t) dx = 0,$$

Ce qui implique que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 p \mu_2(p) y_{mx}^2(x, \tau, p, t) dx = - \int_0^1 \mu_2(p) y_{mx} y_{m\tau x}(x, \tau, p, t) dx.$$

En intégrant la dernière égalité sur $(0, t) \times (0, 1) \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2)$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) y_{mx}^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx ds \\ &= - \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_m y_{m\tau x}(x, \tau, p, t) dp d\tau dx ds \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \frac{d}{d\tau} y_{mx}^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) (y_{mx}^2(x, 0, p, t) - y_{mx}^2(x, 1, p, t)) dp dx ds \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) dp \right) \int_0^t \int_0^1 y_{mx}^2(x, 0, p, s) dx ds \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_{mx}^2(x, 1, p, t) dp dx ds. \end{aligned} \tag{2.54}$$

De même, nous avons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) y_{mx}^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx ds \\ &= - \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_{m\tau x} y_{m\tau x}(x, \tau, p, t) dp d\tau dx ds \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \frac{d}{d\tau} y_{m\tau x}^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) (y_{m\tau x}^2(x, 0, p, t) - y_{m\tau x}^2(x, 1, p, t)) dp dx ds \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) dp \right) \int_0^t \int_0^1 y_{m\tau x}^2(x, 0, p, s) dx ds \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_{m\tau x}^2(x, 1, p, t) dp dx ds. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Remark 2.4. Notons ici que $y_{mx}(x, 0, p, t) = \omega_{m\tau x}(x, t)$.

Maintenant, on doit intégrer sur $(0, t)$ l'équation (2.53) et en utilisant l'équation (2.54) et (2.55), pour trouvé

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_m(t) &+ \left(\mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} p\mu_2(p)dp \right) \int_0^t \int_0^1 \omega_{mtx}^2(s) dx ds \\
&+ \frac{\rho_2}{K} \left(\mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} p\mu_2(p)dp \right) \int_0^t \int_0^1 \omega_{mtx}^2 dx ds \\
&\leq \mathcal{F}_m(0).
\end{aligned}$$

tel que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_m(t) &= \frac{1}{2} \left[\rho_1 \int_0^1 \omega_{mtx}^2 dx + \frac{\rho_1 \rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{mtx}^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \omega_{mtx}^2 dx \right. \\
&+ b \int_0^1 v_{mxx}^2 dx + K \int_0^1 (\omega_{mxx} + v_{mx})^2 dx \left. \right] \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p\mu_2(p) y_{mx}^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \\
&+ \frac{\rho_2}{K} \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p\mu_2(p) y_{mx}^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Donc, on a les deux cas suivants

a) Si $\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) dp < \mu_1$, d'après l'inégalité de Young, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_0^1 \omega_{mtx}(s) \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_{mx}(x, 1, p, s) dp dx ds \\
&\geq -\frac{1}{2} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) dp \right) \int_0^t \int_0^1 \omega_{mtx}^2(s) dx ds \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_{mx}^2(x, 1, p, s) dp dx ds.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

En remplaçant (2.57) dans l'équation (2.56), on trouve

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_m(t) &+ \left(\mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} p\mu_2(p)dp \right) \int_0^t \int_0^1 \omega_{mtx}^2(s) dx ds \\
&+ \frac{\rho_2}{K} \left(\mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} p\mu_2(p)dp \right) \int_0^t \int_0^1 \omega_{mtx}^2(s) dx ds \\
&\leq \mathcal{E}_m(0).
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Donc il existe une constante $\eta_0 = \mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} p\mu_2(p)dp$ telle que

$$\mathcal{F}_m(t) + \eta_0 \int_0^t \int_0^1 \omega_{mix}^2(s) dx ds + \frac{\rho_2}{K} \eta_0 \int_0^t \int_0^1 \omega_{mix}^2(s) dx ds \leq \mathcal{F}_m(0). \quad (2.59)$$

ii) Si $\mu_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) dp$, et d'après (2.58), on a

$$\mathcal{F}_m(t) \leq \mathcal{F}_m(0). \quad (2.60)$$

iii) Alors dans les deux cases, on déduit qu'il existe une constante positive C_2 indépendante de m telle que

$$\mathcal{F}_m(t) \leq C_2, \quad \forall t \geq 0.$$

Cela veut dire que

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \omega_{mix}^2 dx + \int_0^1 \omega_{mix}^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \omega_{mix}^2 dx dx + \int_0^1 v_{mix}^2 dx \\ & + \int_0^1 (\omega_{mix} + v_m)^2 + \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p\mu_2(p) y_{mix}^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \\ & + \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p\mu_2(p) y_{mix}^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \leq C_2. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Ainsi, on peut prendre $t_m = T$, pour tout $T > 0$.

2.1.5 Passage à la limite

D'après (2.30), (2.47) et (2.61) nous concluons que pour toute $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\omega_m & \text{ est bornée dans } L^\infty(\mathbb{R}_+, H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)), \\
\omega_{mt} & \text{ est bornée dans } L^\infty(\mathbb{R}_+, H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)), \\
\omega_{mtt} & \text{ est bornée dans } L^\infty(\mathbb{R}_+, H_0^1(0, 1)), \\
\nu_m & \text{ est bornée dans } L^\infty(\mathbb{R}_+, H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)), \\
\nu_{mt} & \text{ est bornée dans } L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(0, 1)), \\
y_m & \text{ est bornée dans } L^\infty(\mathbb{R}_+, H^1((0, 1) \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2))), \\
y_{mt} & \text{ est bornée dans } L^\infty(\mathbb{R}_+, H^1((0, 1) \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2))),
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
\omega_m & \xrightarrow{*} \omega & \text{ dans } & L^2(\mathbb{R}_+, H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)), \\
\omega_{mt} & \xrightarrow{*} \omega_t & \text{ dans } & L^2(\mathbb{R}_+, H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)), \\
\omega_{mtt} & \xrightarrow{*} \omega_{tt} & \text{ dans } & L^2(\mathbb{R}_+, H_0^1(0, 1)), \\
\nu_m & \xrightarrow{*} \nu & \text{ dans } & L^2(\mathbb{R}_+, H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)), \\
\nu_{mt} & \xrightarrow{*} \nu_t & \text{ dans } & L^2(\mathbb{R}_+, L^2(0, 1)), \\
y_m & \xrightarrow{*} y & \text{ dans } & L^2(\mathbb{R}_+, H^1((0, 1) \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2))), \\
y_{mt} & \xrightarrow{*} y_t & \text{ dans } & L^2(\mathbb{R}_+, H^1((0, 1) \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2))),
\end{aligned} \tag{2.63}$$

On peut aussi en déduire que $\omega_m, \omega_{mt}, \nu_m$ sont bornées dans

$$L^2(\mathbb{R}_+, H^2(0, 1) \cap H^1(0, 1)) \quad , \quad H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$$

et ω_{mtt}, ν_{mt} sont bornées dans $L^2(\mathbb{R}_+, L^2(0, 1))$. Donc, en utilisant un théorème d'Aubin-Lions [20], il vient que pour toute $T > 0$,

$$\begin{aligned}
\omega_m & \longrightarrow \omega & \text{ dans } & L^\infty(0, T, H_0^1(0, 1)), \\
\omega_{mt} & \longrightarrow \omega_t & \text{ dans } & L^\infty(0, T, H_0^1(0, 1)), \\
\nu_m & \longrightarrow \nu & \text{ dans } & L^\infty(0, T, H_0^1(0, 1)),
\end{aligned}$$

On obtient également d'après le Lemme 1.4 dans Kim [18]

$$\begin{aligned}
\omega_m & \longrightarrow \omega & \text{ dans } & C(0, T, H_0^1(0, 1)), \\
\omega_{mt} & \longrightarrow \omega_t & \text{ dans } & C(0, T, H_0^1(0, 1)), \\
\nu_m & \longrightarrow \nu & \text{ dans } & C(0, T, H_0^1(0, 1)),
\end{aligned}$$

En suite, par passage à la limite dans le problème approximatif (2.10) – (2.11), on déduit que (ω, ν) est une solution du problème (2.7) – (2.9).

Dépendance continue et unicité

Soient $(\varphi, \varphi_t, \varphi_{tt}, \psi, \Upsilon, \Upsilon_t)$ et $(\Gamma, \Gamma_t, \Gamma_{tt}, \Xi, \Pi, \Pi_t)$ deux solutions du système (2.7) – (2.9) avec les conditions initiales $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \psi_0, \Theta_0, \Theta_1)$ et $(\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Xi_0, \Phi_0, \Phi_1)$, respectivement. On pose

$$\Lambda(t) = \varphi - \Gamma,$$

$$\Sigma(t) = \psi - \Xi,$$

$$\chi(t) = \Pi - \Phi,$$

avec (Λ, Σ, χ) vérifiant les équations (2.7) – (2.8). Donc, on a

$$\begin{cases} \rho_1 \Lambda_{tt} - K(\Lambda_x + \Sigma)_x + \mu_1 \Lambda_t + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \Lambda_t(x, t-p) dp = 0. \\ -\rho_2 \Lambda_{ttx} - b \Sigma_{xx} + K(\Lambda_x + \Sigma) = 0. \\ p \chi_t(x, \tau, p, t) + \chi_\tau(x, \tau, p, t) = 0. \end{cases} \quad (2.64)$$

1. En multipliant l'équation (2.64)₁ par Λ_t , on obtient

$$\frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \Lambda_t^2 - K(\Lambda_x + \Sigma)_x \Lambda_t + \mu_1 \Lambda_t^2 + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \Lambda_t \chi(x, 1, p, t) dp dx = 0. \quad (2.65)$$

Alors, en intégrant le résultat précédent par rapport à x sur $(0, 1)$, on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \Lambda_t^2 dx + K \int_0^1 (\Lambda_x + \Sigma) \Lambda_{tx} dx + \mu_1 \int_0^1 \Lambda_t^2 dx \\ & + \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \chi(x, 1, p, t) \Lambda_t dp dx = 0. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Aussi, en multipliant l'équation (2.64)₂ par Σ_t , on obtient

$$-\rho_2 \Lambda_{ttx} \Sigma_t - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Sigma_x^2 + K(\Lambda_x + \Sigma) \Sigma_t = 0. \quad (2.67)$$

Donc, en intégrant d'abord le résultat précédent sur $(0, 1)$ par rapport à x , on trouve

$$\rho_2 \int_0^1 \Lambda_{tt} \Sigma_{tx} dx + b \int_0^1 \Sigma_x^2 dx + K \int_0^1 (\Lambda_x + \Sigma) \Lambda_t dx = 0. \quad (2.68)$$

D'autre part, en dérivant l'équation (2.64)₁ par rapport à t , et en multipliant par Λ_{tt} , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \Lambda_{tt}^2 - K(\Lambda_x + \Sigma)_{xt} \Lambda_{tt} + \mu_1 \Lambda_{tt}^2 \\ & + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \Lambda_{tt} \Lambda_{tt}(x, t-p) dp dx = 0. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Et en intégrant le résultat sur $(0, 1)$, on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \Lambda_{tt}^2 dx - K \int_0^1 (\Lambda_x + \Sigma)_{xt} \Lambda_{tt} dx + \mu_1 \int_0^1 \Lambda_{tt}^2 dx \\ & + \int_0^1 \Lambda_{tt} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \Lambda_{tt}(x, t-p) dp dx = 0. \end{aligned} \quad (2.70)$$

D'après l'équation (2.70), on a

$$\begin{aligned} K \int_0^1 \Lambda_{tt} \Sigma_{tx} dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\rho_1 \int_0^1 \Lambda_{tt}^2 dx + K \int_0^1 \Lambda_{tx}^2 dx \right] dx \\ &+ \mu_1 \int_0^1 \Lambda_{tt}^2 dx + \int_0^1 \Lambda_{tt} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \Lambda_{tt}(x, t-p) dp dx, \end{aligned} \quad (2.71)$$

Donc, en remplaçant l'équation (2.71) dans l'équation (2.68), on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\rho_1 \int_0^1 \Lambda_t^2 dx + \frac{\rho_1 \rho_2}{K} \int_0^1 \Lambda_{tt}^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \Lambda_{tx}^2 dx \right. \\ & \left. + b \int_0^1 \Sigma_x^2 dx + K \int_0^1 (\Lambda_x + \Sigma)^2 dx \right] + \mu_1 \int_0^1 \Lambda_t^2 dx \\ & + \frac{\rho_2}{K} \int_0^1 \Lambda_{tt} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \chi_t(x, 1, p, t) dp dx + \mu_1 \frac{\rho_2}{K} \int_0^1 \Lambda_{tt}^2 dx \\ & + \int_0^1 \Lambda_{mt}^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \chi(x, 1, p, t) dp dx = 0. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Aussi, en multipliant l'équation (2.64)₃ par $\mu_2 \chi$, on obtient

$$p\mu_2\chi\chi_t(x, \tau, p, t) + \mu_2\chi\chi_\tau(x, \tau, p, t) = 0.$$

Et en intégrant cette équation sur $(0, 1) \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2)$ par rapport à x , on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p\mu_2(p)\chi^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \\ &= - \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p)\chi\chi_\tau(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \frac{d}{d\tau} \chi^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) (\chi^2(x, 0, p, t) - \chi^2(x, 1, p, t)) dp dx. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Alors, d'après (2.72) et (2.73), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\rho_1 \int_0^1 \Lambda_t^2 dx + \frac{\rho_1 \rho_2}{K} \int_0^1 \Lambda_{tt}^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \Lambda_{tx}^2 dx + b \int_0^1 \Sigma_x^2 dx \right. \\ & \left. + K \int_0^1 (\Lambda_x + \Sigma)^2 dx + \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p\mu_2(p)\chi^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \right] \\ & + (\mu_1 - \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) dp) \int_0^1 \Lambda_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p)\chi^2(x, 1, p, t) dp dx \\ & + \mu_1 \frac{\rho_2}{K} \int_0^1 \Lambda_{tt}^2 dx + \frac{\rho_2}{K} \int_0^1 \Lambda_{tt} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p)\chi(x, 1, p, t) dp dx. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) &= -(\mu_1 - \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) dp) \int_0^1 \Lambda_t^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p)\chi^2(x, 1, p, t) dp dx \\ & \quad - \mu_1 \frac{\rho_2}{K} \int_0^1 \Lambda_{tt}^2 dx - \frac{\rho_2}{K} \int_0^1 \Lambda_{tt} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p)\chi(x, 1, p, t) dp dx. \end{aligned} \tag{2.74}$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) &\leq c\left(\int_0^1 \Lambda_t^2 dx + \int_0^1 \Lambda_{tt}^2 dx\right) \\
&\leq c\left(\int_0^1 \Lambda_t^2 dx + \int_0^1 \Lambda_{tt}^2 dx + \int_0^1 \Lambda_{tx}^2 dx + \int_0^1 \Sigma_x^2 dx \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 (\Lambda_x + \Sigma)^2 dx + \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p\mu_2(p)\chi^2(x, \tau, p, t) dp dx\right).
\end{aligned} \tag{2.75}$$

tel que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(t) &= \frac{1}{2}\left[\rho_1 \int_0^1 \Lambda_t^2 dx + \frac{\rho_1 \rho_2}{K} \int_0^1 \Lambda_{tt}^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \Lambda_{tx}^2 dx + K \int_0^1 (\Lambda_x + \Sigma)^2 dx \right. \\
&\quad \left. + b \int_0^1 \Sigma_x^2 dx\right] + \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p\mu_2(p)\chi^2(x, 1, p, t) dp d\tau dx.
\end{aligned} \tag{2.76}$$

On intègre l'équation (2.75), on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(t) &\leq \mathcal{E}(0) + C_1 \int_0^t \left(\|\Lambda_t\|^2 + \|\Lambda_{tt}\|^2 + \|\Lambda_{tx}\|^2 + \|\Sigma_x\|^2 \right. \\
&\quad \left. + \|\Lambda_x + \Sigma\|^2 + \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p\mu_2(p)\|\chi(x, \tau, p, t)\|^2 dp dx \right) ds,
\end{aligned} \tag{2.77}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(t) &\geq c_o(\|\Lambda_t\|^2 + \|\Lambda_{tt}\|^2 + \|\Sigma_x\|^2 + \|(\Lambda_x + \Sigma)\|^2 \\
&\quad + \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p\mu_2(p)\|\chi(x, 1, p, t)\|^2 dp dx).
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Et d'après l'inégalité de Gronwall, on obtient

$$\begin{aligned}
&\|\Lambda_t\|^2 + \|\Lambda_{tt}\|^2 + \|\Lambda_{tx}\|^2 + \|\Sigma_x\|^2 + \|\Lambda_x + \Sigma\|^2 \\
&+ \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p\mu_2(p)\|\chi(x, \tau, p, t)\|^2 dp dx \leq e^{C_2 t} \mathcal{E}(0).
\end{aligned} \tag{2.79}$$

Ce qui montre que la solution de notre problème dépend seulement des données initiales. L'unicité de la solution découle des conditions initiales suivantes

$$\varphi(0) = \Gamma(0),$$

$$\psi(0) = \Xi(0),$$

$$\Upsilon(0) = \Pi(0),$$

La solution faible

Si $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \nu_0) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \times H_0^1(0, 1)$ nous pouvons utiliser des arguments de densité comme dans Lions[20], pour obtenir que le problème (2.7) – (2.9) admet une solution faible. Ceci, termine la preuve du Théorème.

La stabilité exponentielle

Dans ce chapitre nous allons utiliser la méthode des multiplicateurs pour démontrer la stabilité exponentielle du système (2.7) – (2.8), le principe de cette méthode est de construire une nouvelle fonctionnelle, dite fonctionnelle de Lyapunov, équivalente à l'énergie classique et qui décroît exponentiellement. Nous commençons d'abord, par la démonstration de quelques lemmes utiles pour démontrer la stabilité du système.

La fonctionnelle d'énergie du système (2.7) – (2.8) est définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) = & \frac{1}{2} \left(\rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx + \frac{\rho_1 \rho_2}{K} \int_0^1 \omega_H^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \omega_{tx}^2 dx + b \int_0^1 v_x^2 dx \right. \\ & \left. + K \int_0^1 (\omega_x + v)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) y^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Lemma 3.1. *La fonction d'énergie $\mathcal{E}(t)$ satisfait*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'(t) \leq & - \left(\mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) dp \right) \int_0^1 \omega_t^2(s) dx ds \\ & - \left(\mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) dp \right) \int_0^1 \omega_H^2(s) dx \\ \leq & -\eta_0 \int_0^1 \omega_t^2(s) dx ds - \eta_0 \frac{\rho_2}{K} \int_0^1 \omega_H^2 dx \\ \leq & 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

avec $\eta_0 = \left(\mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) dp \right) > 0.$

Preuve

La multiplication de l'équation (2.7)₁ par ω_t , nous donne

$$\rho_1 \omega_{tt} \omega_t dx - K(\omega_x + \nu) \omega_{tx} dx + \mu_1 \omega_t^2 dx + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \omega_t \omega_t(x, t-p) dp dx = 0.$$

En intégrant le résultat précédant sur $(0, 1)$ par rapport à x , on trouve

$$\rho_1 \int_0^1 \omega_{tt} \omega_t dx - K \int_0^1 (\omega_x + \nu) \omega_{tx} dx + \mu_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx + \int_0^1 \omega_t \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \omega_t(x, t-p) dp dx = 0.$$

On peut écrivons cette equation comme suite:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx + K \int_0^1 (\omega_x + \nu) \omega_{tx} dx + \mu_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx \\ + \int_0^1 \omega_t \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \omega_t(x, t-p) dp dx = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

La multiplication de l'équation (2.7)₂ par ν_t et l'intégration sur $(0, 1)$ par rapport à x , nous donne

$$-\rho_2 \int_0^1 \omega_{tt} \nu_{tx} dx - b \int_0^1 \nu_x \nu_{tx} dx + K \int_0^1 (\omega_x + \nu) \nu_t dx = 0.$$

Ce équivalente

$$\rho_2 \int_0^1 \omega_{tt} \omega_{tx} dx + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \nu_x^2 dx + K \int_0^1 (\omega_x + \nu) \nu_t dx = 0. \quad (3.4)$$

D'autre part, en dérivant l'équation (2.7)₁, et en multipliant par ω_{tt} , on obtient

$$\frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \omega_{tt}^2 - K(\omega_x + \nu)_{xt} \omega_{tt} + \mu_1 \omega_{tt}^2 + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \omega_{tt} \omega_{tt}(x, t-p) dp = 0.$$

Donc, en intégrant l'équation précédant sur $(0, 1)$, on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \omega_{tt}^2 dx - K \int_0^1 (\omega_x + v)_{xt} \omega_{tt} + \mu_1 \int_0^1 \omega_{tt}^2 \\ & + \int_0^1 \omega_{tt} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \omega_{tt}(x, t-p) dp = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

D'après l'équation (3.5), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \omega_{tt} v_{tx} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\frac{\rho_1}{K} \int_0^1 \omega_{tt}^2 dx + \int_0^1 \omega_{tx}^2 dx \right] \\ & + \frac{\mu_1}{K} \int_0^1 \omega_{tt}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \omega_{tt} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \omega_{tt}(x, 1, p, t) dp dx. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Alors, en remplaçant (3.6) dans l'équation (3.4), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\frac{\rho_1 \rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{tt}^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \omega_{tx}^2 dx + b \int_0^1 v_x^2 dx \right] + \frac{\mu_1 \rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{tt}^2 dx \\ & + \frac{\rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{tt} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \omega_{tt}(x, 1, p, t) dp dx + K \int_0^1 (\omega_x + v) v_t dx = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

D'après (3.3) et (3.7), on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx + \frac{\rho_1 \rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{tt}^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \omega_{tx}^2 dx + b \int_0^1 v_x^2 dx \right. \\ & \left. + K \int_0^1 (\omega_x + v)^2 dx + \right] + \mu_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx + \frac{\mu_1 \rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{tt}^2 dx \\ & + \int_0^1 \omega_t \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y(x, 1, p, t) dp dx + \frac{\rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{tt} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y(x, 1, p, t) dp dx = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

D'autre part, en multipliant l'équation (2.7)₃ par $\mu_2 y$, on obtient

$$p \mu_2(p) y y_t(x, \tau, p, t) + \mu_2(p) y y_\tau(x, \tau, p, t) = 0.$$

Par intégration sur $(0, 1) \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2)$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) y^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \\
&= - \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y y_\tau(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \frac{d}{d\tau} y^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) (y^2(x, 0, p, t) - y^2(x, 1, p, t)) dp dx \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) dp \right) \int_0^1 \omega_i^2 dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_i^2(x, 1, p, t) dp dx.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

De même pour l'équation (2.7)₄, on trouve

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) y_i^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \\
&= - \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_i y_{i\tau}(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \frac{d}{d\tau} y_i^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) (y_i^2(x, 0, p, t) - y_i^2(x, 1, p, t)) dp dx \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) dp \right) \int_0^1 \omega_{ii}^2 dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_i^2(x, 1, p, t) dp dx.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Remark 3.2.

$$\begin{cases} y(x, 0, p, t) = \omega_i(x, t), \\ y_i(x, 0, p, t) = \omega_{ii}(x, t). \end{cases}$$

Alors, d'après (3.8) et (3.10), on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx + \frac{\rho_1 \rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{tt}^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \omega_{tx}^2 dx + b \int_0^1 v_x^2 dx \right. \\
& \quad \left. + K \int_0^1 (\omega_x + v)^2 dx + \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) y^2(x, \tau, p, t) dp dx \right] \\
& + (\mu_1 - \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) dp) \int_0^1 v_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y^2(x, 1, p, t) dp dx \\
& \quad + \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y^2(x, 1, p, t) v_t dp dx + \mu_1 \frac{\rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{tt}^2 dx \\
& \quad + \frac{\rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{tt} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y(x, 1, p, t) dp dx = 0.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Ce qui montre que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) &= -(\mu_1 - \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) dp) \int_0^1 v_t^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y^2(x, 1, p, t) dp dx \\
& \quad - \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y^2(x, 1, p, t) v_t dp dx - \mu_1 \frac{\rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{tt}^2 dx \\
& \quad - \frac{\rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{tt} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y(x, 1, p, t) dp dx = 0
\end{aligned}$$

Donc, d'après l'inégalité de Young, on obtient

$$\mathcal{E}'(t) \leq -\left(\mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) dp \right) \int_0^1 \omega_t^2(s) dx - \frac{\rho_2}{K} (\mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) dp) \int_0^1 \omega_{tt}^2 dx,$$

Alors il existe un constant $\eta_0 > 0$ qui vérifié

$$\mathcal{E}'(t) \leq -\eta_0 \int_0^1 \omega_t^2(s) dx - \eta_0 \frac{\rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{tt}^2 dx.$$

Lemma 3.3. *La fonctionnelle*

$$F_1(t) := -\frac{\mu_1}{2} \int_0^1 \omega_t^2 dx - K \int_0^1 \omega_{tx} \omega_x dx$$

satisfait

$$\begin{aligned} F'_1(t) &\leq -K \int_0^1 \omega_{tx}^2 dx + \varepsilon_1 \int_0^1 v_x^2 dx \\ &+ c(1 + \frac{1}{\varepsilon_1}) \int_0^1 \omega_{tt}^2 dx + c \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y^2(x, 1, p, t) dp dx. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Preuve

On a

$$F'_1(t) = -\mu_1 \int_0^1 \omega_{tt} \omega_t dx - K \int_0^1 \omega_{tt} \omega_{xx} dx - K \int_0^1 \omega_{tx}^2 dx.$$

En multipliant l'équation (2.7)₁ par ω_{tt} , on trouve

$$\rho_1 \omega_{tt}^2 - K(\omega_x + v)_x \omega_{tt} + \mu_1 \omega_t \omega_{tt} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \omega_{tt} \mu_2(p) y(x, 1, p, t) dp.$$

Depuis, en intégrant l'égalité précédant par rapport à x sur $(0,1)$, on obtient

$$\rho_1 \int_0^1 \omega_{tt}^2 dx - K \int_0^1 (\omega_x + v)_x \omega_{tt} dx + \frac{\mu_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \omega_t^2 dx + \int_0^1 \omega_{tt} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y(x, 1, p, t) dp dx.$$

Par conséquence, on a

$$\begin{aligned}
-\mu_1 \int_0^1 \omega_{tt} \omega_t dx &= \rho_1 \int_0^1 \omega_{tt}^2 dx - K \int_0^1 (\omega_x + v)_x \omega_{tt} dx \\
&\quad + \int_0^1 \omega_{tt} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y(x, 1, p, t) dp dx \\
&= \rho_1 \int_0^1 \omega_{tt}^2 dx - K \int_0^1 v_x \omega_{tt} dx + K \int_0^1 \omega_{xx} \omega_{tt} dx \\
&\quad + \int_0^1 \omega_{tt} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y(x, 1, p, t) dp dx,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

D'ou

$$\begin{aligned}
F'_1(t) &= \rho_1 \int_0^1 \omega_{tt}^2 dx - K \int_0^1 v_x \omega_{tt} dx - K \int_0^1 \omega_{tx}^2 dx \\
&\quad + \int_0^1 \omega_{tt} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y(x, 1, p, t) dp dx.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

D'après l'inégalité de Young, on a

$$-\int_0^1 \omega_{tt}^2 dx \leq \frac{K}{\varepsilon} \int_0^1 \omega_{tt}^2 dx + K\varepsilon \int_0^1 \omega_{tx}^2 dx,$$

Et d'après l'inégalité de Poincaré, on a

$$\int_0^1 v^2 dx \leq \varepsilon_1 \int_0^1 v_x^2 dx,$$

et

$$\int_0^1 \omega_{tt} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y(x, 1, p, t) dp dx \leq c \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y^2(x, 1, p, t) dp dx.$$

Ce qui entraîne que

$$\begin{aligned}
F'_1(t) &\leq K \int_0^1 \omega_{tx}^2 dx + \varepsilon_1 \int_0^1 v_x^2 dx + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right) \int_0^1 \omega_{tt}^2 dx \\
&\quad + c \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y^2(x, 1, p, t) dp dx.
\end{aligned}$$

Lemma 3.4. *La fonctionnelle*

$$F_2(t) := \rho_1 \int_0^1 \omega \omega_t dx + \frac{\mu_1}{2} \int_0^1 \omega^2 dx + \frac{\rho_1 \rho_2}{2K} \int_0^1 \omega_t^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \omega_{tx} \omega_x dx,$$

satisfait

$$\begin{aligned} F_2'(t) \leq & -\frac{\rho_1 \rho_2}{2K} \int_0^1 \omega_{tt}^2 dx - \frac{K}{2} \int_0^1 (\omega_x + \nu)^2 dx - b \int_0^1 \nu_x^2 dx \\ & + \rho_2 \int_0^1 \omega_{tx}^2 dx + \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx + c \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y^2(x, 1, p, t) dp dx. \end{aligned} \quad (3.15)$$

preuve.

En dérivant F_2 par rapporte à t , on trouve

$$\begin{aligned} F_2'(t) = & \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx + \rho_1 \int_0^1 \omega_{tt} \omega dx + \mu_1 \int_0^1 \omega_t \omega dx \\ & + \frac{\rho_1 \rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{tt} \omega_t dx + \rho_2 \int_0^1 \omega_{txx} \omega_x dx + \rho_2 \int_0^1 \omega_{tx}^2 dx. \end{aligned} \quad (3.16)$$

D'autre part, en intégrant l'équation (2.7)₁ par ω , on trouve

$$\rho_1 \omega_{tt} \omega - K(\omega_x + \nu)_x \omega + \mu_1 \omega_t \omega + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) \omega y(x, 1, p, t) dp dx = 0, \quad (3.17)$$

Depuis, on intègre l'équation précédant par rapport à x sur $(0, 1)$, on trouve

$$\rho_1 \int_0^1 \omega_{tt} \omega - K \int_0^1 (\omega_x + \nu)_x \omega + \frac{\mu_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \omega^2 + \int_0^1 \omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y(x, 1, p, t) dp dx = 0, \quad (3.18)$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} -\frac{\mu_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \omega^2 = & \rho_1 \int_0^1 \omega_{tt} \omega dx + K \int_0^1 (\omega_x + \nu)_x \omega dx \\ & + \int_0^1 \omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y(x, 1, p, t) dp dx, \end{aligned} \quad (3.19)$$

D'autre part en multipliant l'équation (2.7)₂ par ω_x , on obtient

$$-\rho_2 \omega_{tt} \omega_x - b v_{xx} \omega_x + K(\omega_x + v) \omega_x = 0,$$

Donc, en intégrant l'égalité précédant par rapport à x sur $(0, 1)$, on trouve

$$-\rho_2 \int_0^1 \omega_{tt} \omega_x dx - b \int_0^1 v_{xx} \omega_x dx + K \int_0^1 (\omega_x + v) \omega_x dx = 0,$$

Ce équivalent à

$$\rho_2 \int_0^1 \omega_{tt} \omega_x dx = -b \int_0^1 v_{xx} \omega_x dx + K \int_0^1 (\omega_x + v) \omega_x dx. \quad (3.20)$$

Alors, en remplaçant le deux équationd (3.19) et (3.20) dans $F'_2(t)$, on trouve

$$\begin{aligned} F'_2(t) &= \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx - K \int_0^1 (\omega_x + v)^2 dx + \frac{\rho_1 \rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{tt}^2 dx \\ &\quad - b \int_0^1 v_x^2 dx + \int_0^1 \omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y(x, 1, p, t) dp dx \\ &\quad + \rho_2 \int_0^1 \omega_{tx}^2 dx + \frac{\rho_2}{K} \int_0^1 \omega_{tt} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y(x, 1, p, t) dp dx. \end{aligned} \quad (3.21)$$

D'après l'égalité de young, on a

$$-K \int_0^1 (\omega_x + v)^2 dx \leq -\frac{K}{2} \int_0^1 (\omega_x + v)^2 dx. \quad (3.22)$$

Et d'après l'inégalité de Poincaré, on conclue que

$$\int_0^1 \omega_{tt} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y^2(x, 1, p, t) dp dx \leq c_1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y^2(x, 1, p, t) dp dx.$$

Ce qui entraîne que

$$\begin{aligned}
 F'_2(t) \leq & -\frac{\rho_1\rho_2}{2K} \int_0^1 \omega_{tt}^2 dx - \frac{K}{2} \int_0^1 (\omega_x + v)^2 dx - b \int_0^1 v_x^2 dx \\
 & + \rho_2 \int_0^1 \omega_{tx}^2 dx + \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx + c \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y^2(x, 1, p, t) dp dx.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Lemma 3.5. *La fonctionnelle*

$$\begin{aligned}
 F_3(t) = & \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p e^{-p\tau} \mu_2(p) y^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \\
 & + \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p e^{-p\tau} \mu_2(p) y_t^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx.
 \end{aligned}$$

satisfait

$$\begin{aligned}
 F'_3(t) \leq & -\eta_1 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) y^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx + \mu_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx \\
 & -\eta_1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y^2(x, 1, p, t) dp dx + \mu_1 \int_0^1 \omega_{tt}^2 dx. \\
 & -\eta_1 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) y_t^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \\
 & -\eta_1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) y_t^2(x, \tau, p, t) dp dx,
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

tel que $\eta_1 > 0$.

Preuve.

En dérivant F_3 par rapport à t , on trouve

$$\begin{aligned}
 F'_3(t) = & 2 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p e^{-p\tau} \mu_2(p) y_t y(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \\
 & + 2 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p e^{-p\tau} \mu_2(p) y_{tt} y_t(x, \tau, p, t) dp d\tau dx.
 \end{aligned}$$

D'après l'équation (2.5)₃, on a

$$py_i(x, \tau, p, t) = -y_\tau(x, \tau, p, t). \quad (3.25)$$

Alors, en remplaçant 3.25 dans $F'_3(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} F'_3(t) &= -2 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-p\tau} \mu_2(p) y y_\tau(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \\ &\quad - 2 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-p\tau} \mu_2(p) y_i y_{i\tau}(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \\ &\quad - \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p e^{-p\tau} \mu_2(p) y^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \\ &\quad - \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) [e^{-p} y^2(x, \tau, p, t) - y^2(x, 0, p, t)] dp dx \\ &\quad - \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p e^{-p\tau} \mu_2(p) y_i^2(x, 1, p, t) dp d\tau dx \\ &\quad - \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) [e^{-p} y_i^2(x, 1, p, t) - y_i^2(x, 0, p, t)] dp dx. \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant l'égalité $y(x, 0, p, t) = \omega_i(x, t)$, $y_i(x, 0, p, t) = \omega_{ii}(x, t)$ et $e^{-p} \leq e^{-p\tau} \leq 1$ pour tout $0 < \tau < 1$, et d'après (2.4), on obtient

$$\begin{aligned} F'_3(t) &= - \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p e^{-p\tau} \mu_2(p) y^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \\ &\quad - \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-p} \mu_2(p) y^2(x, 1, p, t) dp dx + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) dp \int_0^1 \omega_i^2 dx. \\ &\quad - \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p e^{-p\tau} \mu_2(p) y_i^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \\ &\quad - \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-p} \mu_2(p) y_i^2(x, 1, p, t) dp dx + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) dp \int_0^1 \omega_{ii}^2 dx. \end{aligned}$$

Comme $-e^{-p}$ est une argumentation, nous avons $-e^{-p} \leq -e^{-\tau_2}$, pour tout $p \in [\tau_1, \tau_2]$.

En suite, en désignant $\eta_1 = e^{-\tau_2}$ et en utilisant A1, on trouve

$$\begin{aligned}
F'_3(t) &\leq -\eta_1 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p\mu_2(p)y^2(x, \tau, p, t) dpd\tau dx + \mu_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx \\
&\quad -\eta_1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p)y^2(x, 1, p, t) dpdx + \mu_1 \int_0^1 \omega_{tt}^2 dx. \\
&\quad -\eta_1 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p\mu_2(p)y_t^2(x, \tau, p, t) dpd\tau dx \\
&\quad -\eta_1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p\mu_2(p)y_t^2(x, \tau, p, t) dpdx.
\end{aligned}$$

3.1 Résultat principal

Theorem 3.6. *Supposons que (2.4) est vrai, alors il existe deux constantes positives λ_1 et λ_2 telles que la fonctionnelle d'énergie satisfait*

$$\mathcal{E}(t) \leq \lambda_2 e^{-\lambda_1 t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.26)$$

Proof. On introduit la fonction de Lyapunov

$$\mathcal{L}(t) := N\mathcal{E}(t) + N_1 F_1(t) + N_2 F_2(t) + F_3(t), \quad (3.27)$$

avec $N_1, N_2, N_3 > 0$.

En dérivant l'équation (3.27) et en utilisant (3.2), (3.12), (3.15) et (3.24), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \leq & -[\eta_0 N - \rho_2 N_2 - \mu_1 N_3] \int_0^1 \omega_t^2 dx \\
& - \left[\eta_0 \frac{\rho_2}{K} N + \frac{\rho_1 \rho_2}{K} N_2 - c N_1 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1} - \mu_1 N_3 \right) \right] \int_0^1 \omega_{tt}^2 dx \\
& - [b N_2 - \varepsilon_1 N_1] \int_0^1 v_x^2 dx \\
& - \frac{K}{2} \int_0^1 (\omega_x + v)^2 dx - [K N_1 - c N_2] \int_0^1 \omega_{tx}^2 dx \\
& - [N_3 \eta_1 - c N_1 - c N_2] \int_0^1 \mu_2(p) y^2(x, 1, p, t) dp dx \\
& - N_3 \eta_1 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) y^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \\
& - N_3 \eta_1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) y_t^2(x, 1, p, t) dp dx \\
& - N_3 \eta_1 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) y_t^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx.
\end{aligned}$$

En désignant $\varepsilon_1 = \frac{b N_2}{2 N_1}$, on choisit N_1 assez grand, de telle sorte que

$$\alpha_1 = K N_1 - c N_2 > 0.$$

D'autre part, on peut prendre N_3 assez grand, de telle sorte que

$$\alpha_2 = \eta_1 N_3 - c N_1 - c N_2 > 0.$$

Alors, on arrivons à

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \leq & -[\eta_0 N - c] \int_0^1 \omega_t^2 dx \\
& - \left[\eta_0 \frac{\rho_2}{K} N + \alpha_3 - c \right] \int_0^1 \omega_{tt}^2 dx - \alpha_4 \int_0^1 v_x^2 dx \\
& - \alpha_5 \int_0^1 (\omega_w + v)^2 dx - \alpha_1 \int_0^1 \omega_{tx}^2 dx \\
& - \alpha_2 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y^2(x, 1, p, t) dp dx \\
& - \alpha_6 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) y^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \\
& - \alpha_6 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(p) y_t^2(x, 1, p, t) dp dx \\
& - \alpha_6 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) y_t^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

tel que

$$\alpha_3 = \frac{\rho_1 \rho_2}{2K} N_2, \quad \alpha_4 = \frac{b}{2} N_2, \quad \alpha_5 = \frac{K}{2} N_2, \quad \text{et } \alpha_6 = N_3 \eta_1.$$

D'autre côté, si on pose

$$\mathcal{H}(t) = N_1 F_1(t) + N_2 F_2(t) + N_3 F_3(t).$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
|\mathcal{H}| \leq & \frac{\mu_1}{2} N_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx + K N_1 \int_0^1 |\omega_{tx} \omega_x| dx + \rho_1 N_1 \int_0^1 |\omega \omega_t| dx \\
& + \frac{\mu_1}{2} N_2 \int_0^1 \omega^2 dx + \frac{\mu_1 \rho_2}{2K} N_2 \int_0^1 \omega_t^2 dx + \rho_2 N_2 \int_0^1 |\omega_{tx} \omega_x| dx \\
& + N_3 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p e^{-p\tau} \mu_2(p) y^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx \\
& + N_3 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p e^{-p\tau} \mu_2(p) y_t^2(x, \tau, p, t) dp d\tau dx.
\end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Young, Poincaré et Cauchy-Schwarz, on trouve que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{H}(t)| &\leq c \int_0^1 \left(\omega_t^2 + \omega_{tx}^2 + v_x^2 + \omega_{tt}^2 + (\omega_x + v)^2 \right) dx \\
&\quad + c \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) y^2(x, \tau, p, t) dp d\tau \\
&\quad + c \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \mu_2(p) y_t^2(x, \tau, p, t) dp d\tau \\
&\leq c \mathcal{E}(t).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$|\mathcal{H}(t)| = |\mathcal{L}(t) - N\mathcal{E}(t)| \leq c\mathcal{E}(t).$$

Ce qui donne

$$(N - c)\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq (N + c)\mathcal{E}(t). \quad (3.29)$$

On choisit N aussi assez grand, de telle sorte que

$$\eta_0 \frac{\rho_2}{K} N + \alpha_3 - c > 0, N\eta_0 - c > 0, N - c > 0,$$

Ce que donne

$$c_1 \mathcal{E}(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq c_2 \mathcal{E}(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (3.30)$$

Et utilisé 3.1, les estimations (3.28) and (3.29), respectivement, on trouve

$$\mathcal{L}'(t) \leq -h_1 \mathcal{E}(t), \quad \forall t \geq t_0, \quad (3.31)$$

pour quelque $h, c_1, c_2 > 0$.

Une comptabilisation (3.30) avec (3.31), nous donne

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\lambda_1 \mathcal{E}(t), \quad \forall t \geq t_0, \quad (3.32)$$

tel que $\lambda_1 = \frac{h_1}{c_1}$.

Finalement, une simple intégration de (3.32) , on obtient (3.15) .Ceci termine la démonstration du théorème (3.6). \square

Bibliography

- [1] Almeida Junior DS, Ramos AJA. On the nature of dissipative Timoshenko systems at light of the second spectrum. *Z Angew Math Phys* 68, art no. 2017:145.
- [2] Almeida Junior DS, Elishakoff I, Ramos AJA, Gutemberg RML. The hypothesis of equal wave speeds for stabilization of Bresse Timoshenko system is not necessary anymore: the time delay cases. *IMA J Appl Math*. 2019;84:763-796.
- [3] Almeida Junior DS, Ramos AJA, Santos ML, Gutemberg RML. Asymptotic behavior of weakly dissipative Bresse-Timoshenko system on influence of the second spectrum of frequency. *Z Angew Math Mech*. 2018;98:1320-1333.
- [4] Feng B, Almeida Junior, D. S, dos Santos M. J and Rosario Miranda L. G. A new scenario for stability of nonlinear Bresse-Timoshenko type systems with time dependent delay, *Z Angew Math. Mech*. 2019. DOI: 10.1002/zamm.201900160
- [5] Timoshenko SP. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philos Mag [Ser 6]*. 1921;41:744.
- [6] Manevich A, Kolakowski Z. Free and forced oscillations of Timoshenko beam made of viscoelastic material. *J Theor Appl Mech*. 2011;49:3-16.
- [7] Abramovich H, Elishakoff I. Application of the Krein's method for determination of natural frequencies of periodically supported beam based on simplified Bresse-Timoshenko equations. *Acta Mech*. 1987;66:39-59.
- [8] Elishakoff I, Lubliner E. Random Vibration of a Structure via Classical and Non-Classical Theories, *Proceedings of the IUTAM Symposium on Probabilistic Mechanics of Structures*. New York: Springer; 1985.

- [9] Elishakoff I. An equation both more consistent and simpler than the Bresse-Timoshenko equation, *Advances in Mathematical Modeling and Experimental Methods for Materials and Structures, Solid Mechanics and Its Applications*, Springer, Berlin 2010, pp. 249-254.
- [10] Guesmia A, Soufyane A. On the stability of Timoshenko-type systems with internal frictional dampings and discrete time delays. *Appl Anal.* 2017;96:2075-2101.
- [11] Said-Houari B, Soufyane A. Stability result of the Timoshenko system with delay and boundary feedback. *IMA J Math Control Inf.* 2012;29:383-398.
- [12] Apalara TA, Messaoudi SA. An exponential stability result of a Timoshenko system with thermoelasticity with second sound and in the presence of delay. *Appl Math Optim.* 2015;71:449-472.
- [13] Chen M, Liu W, Zhao W. Existence and general stabilization of the Timoshenko system of thermo-viscoelasticity of type III with frictional damping and delay terms. *Adv Nonlinear Anal.* 2018;7(4):547-569.
- [14] Kafini M, Messaoudi SA, Mustafa MI, Apalara TA. Well-posedness and stability results in a Timoshenko-type system of thermoelasticity of type III with delay. *Z Angew Math Phys.* 2015;66:1499-1517.
- [15] Abdelfeteh F, Messaoudi SA. Stabilization of a type III thermoelastic Timoshenko system in the presence of a time-distributed delay. *Math Nach.* 2017;290:1017-1032.
- [16] Houasni M, Zitouni S, Amiar R. General decay for a viscoelastic damped Timoshenko system of second sound with distributed delay. *MESA.* 2019;10(2):323-340.
- [17] Nicaise S, Pignotti C. Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay. *Diff Int Eqs.* 2008;21(9-10):935-958.
- [18] J. U. Kim, "A boundary thin obstacle problem for a wave equation," *Communications in Partial Differential Equations*, vol. 14, no. 8-9, pp. 1011–1026, 1989.
- [19] Zitouni S, Bouzattoota L, Zennir K. h., Ouchenane D. Exponential decay of thermo-elastic Bresse system with distributed delay term. *Hacettepe J Math Stat.* 2018;47:1216-1230.
- [20] Lions J. L. *Quelques Methodes de Resolution des Problemes aux Limites Non Lineaires*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, France, 1969.