

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
جامعة عمار تليجي الأغواط
UNIVERSITÉ AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES
قسم الرياضيات
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Par : GOURA Bouchera

THÈME

*Théorème de Hille-Yosida et théorème
de Lummer-Phillips et leurs
applications*

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

- | | | |
|---------------------------|-------|-----------|
| • Mr. YAGOUB Ameer | M.C.A | Président |
| • Mr. YAZID Fares | M.C.B | Examineur |
| • Mr. BOUREGA Abdeldjabar | M.C.B | Encadreur |

Année Universitaire 2021/2022

Remerciement

En premier lieu, mes remerciements s'adressent à ALLAH le tout puissant pour les chances qui m'offert pour réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements pour mon encadrante, Dr. Abdeldjabar Bourega d'avoir accepté de m'encadrer pour mon projet de fin d'études, ainsi que pour ses remarques pertinentes et s'encouragement.

Un remerciement particulier va aux Dr. Rahmoune Abdelaziz.

Un très grand merci aux Dr. Ameer Yagoub, et Dr. Fares Yazid qui ont accepté de participer à mon jury de ce mémoire.

Mes remerciements vont aussi à tous les professeurs, et toutes les personnes qui ne m'ont soutenu jusqu'au bout, et qui m'ont pas cessé de me donner des conseils très importants en signe de reconnaissance.

Dédicaces

Ma dédicace s'adresse d'abord à mon père et ma mère pour leurs confiances et pour tons sacrifices, leur amour, tout au long de mes études.

À mon grand-père que j'ai perdu il y a quelques jours et qui m'a toujours encouragé à terminer mes études.

À Mon très cher Père Ben harzallah : le plus grand personne de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, que dieu te garde dans son vaste paradis.

Á ma cher mère, la lumière qui nous a guidés vers la chemin de savoir.

Á mes chères frères : Mohamed et Ahmed.

Á mes sœurs : Fatima, Khadidja et Safai.

Á toute ma famille ainsi qu'à mes très chers amis : Amina, Fatiha, Fatima, Hadjer, Kaoula, Saloua, Zakroufa...

Á tous mes enseignants depuis mes premières années d'études.

Á toute ma famille GOURA et BIRANE.

Á tous ceux qui me sens chers et que j'ai omis de citer.

Résumé

Dans ce mémoire, nous considérons le théorème de Hille-Yosida et de Lummer-Phillips avec leur preuves dans l'espace de Hilbert. Puis nous étudions un problème de transmission en présence de termes de mémoire infini et de retard. On démontre l'existence et la stabilité exponentielle de la solution de ce problème. Pour démontrer la stabilité de ce système, on utilise la méthode des multiplicateurs basée sur la construction d'une fonction de Lyapunov équivalente à l'énergie considérée.

Mots clés : Théorème de Hille-Yosida, théorème de Lummer-Phillips, problème de transmission, mémoire infini, retard, opérateur dissipatif, semi-groupe.

Abstract

In this memory, we considered the Hille-Yosida theorem and the Lummer-Phillips theorem with their proofs in Hilbert space. Then we study a transmission problem in the presence of history and delay terms. We prove the existence and the exponential stability of the solution of this problem.

To prove the stability of this system, we use the method of multipliers based on the construction of the Lyapunov function equivalent to energy.

Key-words : The Hille-Yosida theorem, the Lummer-Phillips theorem, transmission problem, past histor, delay term, dissipative operator, monotone operator, the semi-group.

ملخص

في هذه المذكرة نتطرق لنظريتي هيل يوشيدا (Hille-Yosida) وليمر فيليب (Lumner-Phillips) مع برهانيهما في فضاء هلبيرت. بعد ذلك ندرس مشكلة الإرسال في وجود شرطي التأخير وذاكرة اللانهاية. نثبت وجود الحل والإستقرار الأسي لهذه المشكلة وذلك باستعمال النظرية الطاقوية التي تعتمد على بناء دالة ليابنوف (Lyapunov).
الكلمات المفتاحية: نظرية هيل يوشيدا (théorème Hille-Yosida) ، نظرية ليمر فيليب (théorème Lumner-Phillips) ، نصف الزمرة، ذاكرة اللانهاية، التأخير، مؤثر رتيب، مشكل الإرسال.

Table des matières

1	Préliminaires et définitions	5
1.1	Quelques espaces fonctionnels	5
1.1.1	Espace de Hilbert	5
1.1.2	Espaces $L^p(\Omega)$	5
1.1.3	Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$	6
1.2	Quelques inégalités utiles	7
1.2.1	Inégalité de Young	7
1.2.2	Inégalité de Hölder	8
1.2.3	Inégalité de Cauchy-Schwarz	8
1.2.4	Inégalité de Minkowski	8
1.3	Rappel sur les opérateurs	9
1.3.1	Opérateur non bornée	9
1.3.2	L'ensemble résolvant et la résolvente	10
1.3.3	Opérateurs m-dissipatifs	11
1.4	Théorème de Lax-Milgram	13
1.5	Théorie des semi-groupes	13
1.6	Définitions de quelques termes physiques	16
1.7	Stabilité	16
1.8	Fonction de Lyapunov	17
2	Théorème de Hille-Yosida et théorème de Lummer-Phillips	19
2.1	Théorème de Hille-Yosida	19
2.2	Théorème de Lummer-Phillips	32
3	Application sur la stabilité exponentielle d'un problème de trans-	
	mission avec l'histoire passée et le retard	34
3.1	Position du problème	34
3.2	Hypothèses	37
3.3	Stabilité exponentielle	45

Notations

$\langle \cdot, \cdot \rangle$:	Produit scalaire.
$C_c^\infty(\Omega)$:	Espace de C^∞ fonctions à support compact dans Ω .
$Im(A)$:	Image de l'opérateur A .
$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$:	Résolvant de l'opérateur A .
$A_\lambda = AJ_\lambda$:	Régularisée Yosida de l'opérateur A .
$\ \cdot \ $:	Norme hilbertienne.
$\mathcal{D}(A)$:	Domaine de l'opérateur A .
$G(A)$:	Graphe de l'opérateur A .
H	:	Espace de Hilbert.
$L^p(\Omega)$:	L'espace de Lebesgue, $1 \leq p \leq \infty$.
$\partial\Omega$:	Frontière de Ω .
$W^{m,p}(\Omega)$:	L'espace de Sobolev, $1 \leq p \leq \infty$.
$W_0^{m,p}(\Omega)$:	La fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$.
u_t	:	$\frac{\partial u}{\partial t} = u'$ la dérivée de u par rapport à t .
u_{tt}	:	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ la dérivée d'ordre 2 de u par rapport à t .

Introduction

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basés sur les équations aux dérivées partielles (EDP). En effet, c'est grâce à la modélisation de ces phénomènes au travers d'EDP que l'on a pu comprendre le rôle de tel ou tel paramètre et surtout obtenir des prévisions parfois extrêmement précises. C'est pourquoi l'étude des EDP est de nos jours l'un des thèmes les plus importants pour la compréhension scientifique.

Mais l'une des choses qu'il faut avoir en esprit à propos des EDP c'est qu'il n'est en générale pas question d'obtenir leurs solutions explicitement. Ce que les mathématiciens peuvent faire par contre, c'est dire si une ou plusieurs solutions existent et décrire parfois très précisément certaines propriétés de ces solutions.

Le théorème de Hille-Yosida est une alternative au théorème de Cauchy-Lipschitz pour la résolution du problème de Cauchy

$$(I) \begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 & \text{sur } [0, +\infty[\\ u(0) = u_1 \end{cases}$$

pour une famille d'opérateurs A linéaires non bornés.

En effet, le Théorème de Cauchy-Lipschitz est un outil puissant pour donner l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles ordinaires mais pratiquement inutile pour résoudre des équations aux dérivées partielles.

Par conséquent, il est tout naturel d'introduire un nouveau théorème qui lui est un outil plus puissant et fondamentale reliant les propriétés de dissipation d'énergie d'un opérateur non borné à l'existence et l'unicité et la régularité des solutions d'une équation différentielle partielle d'évolution. Notre but dans ce mémoire est d'annoncer, démontrer et d'appliquer le théorème de Hille-Yosida à des EDP d'évolutions.

Ce mémoire est organisé en trois chapitres.

Chapitre 1. Dans ce chapitre, nous rappelons les notions de base en analyse fonctionnelle, qui seront utilisées dans les chapitres suivants.

Chapitre 2. Dans ce chapitre, nous nous consacrons à la démonstration du théorème de Hille-Yosida dans l'espace de Hilbert, théorème de Lumer-Phillips avec des preuves détaillées.

Nous montrons que lorsque nous sommes dans un espace de Hilbert grâce au théorème de Hille-Yosida, il suffit que l'opérateur A soit maximal monotone pour que l'équation (I) admette une unique solution.

Chapitre 3. Dans ce chapitre, nous étudions l'application du théorème de Hille-Yosida et Lumer-Phillips à un problème de transmission en présence de termes

d'historique et de retard. Nous prouvons l'existence, l'unicité, et la stabilité exponentielle de la solution de ce problème.

Chapitre 1

Préliminaires et définitions

Dans ce chapitre nous introduisons quelques notions fondamentales sur l'analyse fonctionnels, et quelque propriétés et inégalités que nous utiliserons dans la suite de notre travail.

1.1 Quelques espaces fonctionnels

1.1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1.1. *Un espace de Hilbert H est un espace vectoriel muni de produit scalaire, $\langle u, u \rangle$ tel que $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ est la norme de H complet.*

1.1.2 Espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.1.2. *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et Ω un ensemble mesurable de \mathbb{R}^n au sens de Lebesgue on défini*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \text{ est mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

Pour $p \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p < \infty$, on note

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$, on a

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et il existe une constante } C \text{ telle que, } |f(x)| \leq C \text{ sur } \Omega\}.$$

On définit sur L^∞ la norme

$$\|f\|_\infty = \text{Inf} \{C; |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

Soit $1 \leq p \leq \infty$; on note par q l'exposant conjugué de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Théorème 1.1.1. *Il est bien que $L^p(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$ est un espace de Banach, pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Remarque 1.1.1. *En particulier, lorsque $p = 2$, $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx,$$

est une espace de Hilbert.

Théorème 1.1.2. *Pour $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ est un espace réflexive.*

Définition 1.1.3. *Soit X un espace de Banach et $f : X \rightarrow X$. On dit que f est contractante s'il existe $c \in [0, 1[$ tels que pour tous $x, y \in X$,*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|.$$

Théorème 1.1.3. (Point fixe de Picard)

Soit X un espace de Banach, si f est contractante, alors f admet un unique point fixe.

1.1.3 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.1.4. 1) *Soient $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, \infty]$. $W^{m,p}(\Omega)$ est l'espace de tout $f \in L^p(\Omega)$, défini comme*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p, \text{ tel que } \partial^\alpha f \in L^p(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^m\}$$

$$\text{tel que } |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j \leq m \text{ où, } \partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n}.$$

2) Si $f \in W^{m,p}(\Omega)$, nous définissons sa norme comme étant

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha} f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}; & (1 \leq p < \infty), \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^{\alpha} f|; & (p = \infty). \end{cases}$$

Définition 1.1.5. On note par $W_0^{m,p}(\Omega)$, la fermeture de $C_0^{\infty}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.

Remarque 1.1.2. Si $p = 2$ nous écrivons

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega), \quad H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega).$$

Nous utilisons $H^m(\Omega)$ est une espace de Hilbert.

Avec le produit scalaire usuel

$$\langle u, v \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^{\alpha} u \partial^{\alpha} v dx.$$

Notons que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Théorème 1.1.4. Si $m > m'$, $H^m(\Omega) \hookrightarrow H^{m'}(\Omega)$ (injection Sobolev).

1.2 Quelques inégalités utiles

Nous allons lui donner des inégalités importantes. Ces inégalités jouent un rôle important en mathématiques appliquées.

1.2.1 Inégalité de Young

Théorème 1.2.1. Soient p et q deux réels conjugués : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2, \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad (1.1)$$

En effet

$$\begin{aligned} ab &= e^{\ln(ab)} = e^{\ln a + \ln b} \\ &= e^{\frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q} \\ &\leq \frac{1}{p} e^{\ln a^p} + \frac{1}{q} e^{\ln b^q} \\ &\leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q. \end{aligned}$$

En particulier si $f, g \in L^2(\Omega)$, alors

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \varepsilon \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} |g(x)|^2 dx, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (1.2)$$

1.2.2 Inégalité de Hölder

Théorème 1.2.2. Soit $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors si, $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, on obtient

$$\| fg \|_{L^1(\Omega)} \leq \| f \|_{L^p(\Omega)} \cdot \| g \|_{L^q(\Omega)}. \quad (1.3)$$

Théorème 1.2.3. (Généralisation de l'inégalité de Hölder)

Soit $1 \leq p_1, \dots, p_m \leq \infty$, $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1$, alors, si $f_k \in L^{p_k}(\Omega)$ pour $k = 1, \dots, m$, on obtient

$$\int_{\Omega} |f_1(x) \cdots f_m(x)| dx \leq \prod_{k=1}^m \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}. \quad (1.4)$$

Remarque 1.2.1. Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, avec $1 \leq p \leq \infty$, alors

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (1.5)$$

Remarque 1.2.2. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est un cas particulier de l'ingalité de Hölder dans le cas $p = 2, q = 2$.

1.2.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Lemme 1.2.1. Soit H un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, alors

$$|\langle f, g \rangle| \leq \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}} \langle g, g \rangle^{\frac{1}{2}}, \quad \forall f, g \in H. \quad (1.6)$$

1.2.4 Inégalité de Minkowski

Théorème 1.2.4. Pour $1 \leq p \leq \infty$, et $f, g \in L^p(\Omega)$, on a

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}. \quad (1.7)$$

Si $0 < p < 1$, donc

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \geq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}. \quad (1.8)$$

Lemme 1.2.2. Soient $f, g \in L^p(\Omega)$. Alors, pour $1 \leq p \leq \infty$,

$$\left(\int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.3 Rappel sur les opérateurs

1.3.1 Opérateur non bornée

Définition 1.3.1. (Domaine)

Un opérateur linéaire sur H est une application linéaire A définie sur un sous-espace vectoriel $\mathcal{D}(A) \subset H$ à valeur dans H . $\mathcal{D}(A)$ est appelé le domaine de l'opérateur A .

Notation : On note un tel opérateur par $(A, \mathcal{D}(A))$.

Définition 1.3.2. Un opérateur linéaire non borné dans H est un couple $(A, \mathcal{D}(A))$ où $\mathcal{D}(A)$ un sous-espace vectoriel de H et A est une application linéaire de $\mathcal{D}(A)$ dans H , (c-à-d $\|A\| = \infty$). Le sous-espace $\mathcal{D}(A)$ est le domaine de A .

Définition 1.3.3. (Graphe)

On appelle graphe de l'opérateur $(A, \mathcal{D}(A))$ le sous-espace vectoriel de $H \times H$ noté $G(A)$ définie par :

$$G(A) = \{(v, Av) \mid v \in \mathcal{D}(A)\}.$$

Définition 1.3.4. (Image)

On appelle image de $(A, \mathcal{D}(A))$ le sous-espace de H noté $Im(A)$ défini par :

$$Im(A) = A(\mathcal{D}(A)).$$

Définition 1.3.5. (Opérateur fermé)

Un opérateur $(A, \mathcal{D}(A))$ linéaire non borné dans X , est dit fermé si son graphe est fermé dans $X \times Y$. i.e, $\forall x_n \rightarrow x$ et $Ax_n \rightarrow y \Rightarrow Ax = y$.

Définition 1.3.6. Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur linéaire non borné dans X , on dit que $(A, \mathcal{D}(A))$ est de domaine dense dans X , si $\mathcal{D}(A)$ est dense dans X .

1.3.2 L'ensemble résolvant et la résolvente

Définition 1.3.7. On appelle ensemble résolvant de A l'ensemble de points réguliers de l'opérateur A et on le note par $\rho(A)$ tel que

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H. \text{ inversible}\}.$$

Définition 1.3.8. L'ensemble $\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$ s'appelle le spectre de A .

Définition 1.3.9. L'application

$$R(\cdot, A) : \rho(A) \rightarrow \mathcal{L}(H)$$

$$R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}$$

s'appelle la résolvente de A .

Proposition 1.3.1. (Equation de la résolvente)

Si $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ est un opérateur linéaire, alors pour tous $\lambda, \mu \in \rho(A)$, on a

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A).$$

Démonstration. De la définition de la résolvente on a

$$[\lambda R(\lambda, A) - AR(\lambda, A)] R(\mu, A) = R(\mu, A)$$

et

$$[\mu R(\mu, A) - AR(\mu, A)] R(\lambda, A) = R(\lambda, A)$$

En faisant la différence des deux égalités et compte tenu du fait que $R(\lambda, A)$ et $R(\mu, A)$ commutent, on obtient :

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A)$$

□

1.3.3 Opérateurs m-dissipatifs

Définition 1.3.10. (*Opérateur dissipatif*)

Un opérateur $(A, \mathcal{D}(A))$, linéaire non borné dans H est dit dissipatif si

$$\forall v \in \mathcal{D}(A), \langle Av, v \rangle \leq 0.$$

Définition 1.3.11. Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire non borné. On dit que A est monotone ($-A$ dissipatif) si

$$\forall u \in \mathcal{D}(A), \operatorname{Re} \langle Au, u \rangle \geq 0.$$

A est maximal monotone si, A est monotone

et $\operatorname{Im}(I + A) = H$ i.e $\forall f \in H, \exists u \in \mathcal{D}(A)$ tel que $u + Au = f$.

Théorème 1.3.1. Si A est m-dissipatif alors pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur

$(I - \lambda A)^{-1}f$ appartient à $\mathcal{D}(A)$ pour tout $f \in X$, et $(I - \lambda A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné sur X .

Théorème 1.3.2. Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur non borné dans X .

S'il exist $\lambda_0 > 0$ pour lequel l'opérateur $(I - \lambda_0 A)^{-1}$ est un opérateur borné sur X , alors A est m-dissipatif alors c'est un opérateur fermé.

Démonstration. Soit $(x_n)_n$ une suite de $\mathcal{D}(A)$ convergeant vers x dans X , on suppose que $(Ax_n)_n$ converge vers y dans X . L'opérateur $(I - \lambda_0 A)^{-1}$ étant borné, on a :

$$x_n = (I - \lambda_0 A)^{-1}(x_n - \lambda_0 Ax_n) \longrightarrow (I - \lambda_0 A)^{-1}(x - \lambda_0 y)$$

quand $n \longrightarrow \infty$.

Par conséquent nous avons

$$x = (I - \lambda_0 A)^{-1}(x - \lambda_0 y) \in \mathcal{D}(A)$$

et

$$(I - \lambda_0 A)x = x - \lambda_0 y,$$

donc $Ax = y$. □

Remarque 1.3.1. a) Si $(A, \mathcal{D}(A))$ est un opérateur dissipatif alors pour tout

$\lambda > 0$, $(I - \lambda A)$ est injectif.

En effet

$(I - \lambda A)x = 0$, implique que $0 \leq \|x\| \leq \|(I - \lambda A)\| \|x\| = 0$ donc $\|x\| = 0$ d'où $x = 0$.

b) En pratique pour montrer qu'un opérateur est m -dissipatif (resp. maximal monotone) on montre d'abord qu'il est dissipatif (resp. monotone) et on résoud ensuite un problème variationnel pour une valeur λ_0 bien choisie.

Proposition 1.3.2. Soit A un opérateur maximal monotone. Alors :

a) $\mathcal{D}(A)$ est dense dans H .

b) A est fermé.

c) Pour tout $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)$ est bijectif de $\mathcal{D}(A)$ sur H , $(I + \lambda A)^{-1}$ est un opérateur borné et $\|(I + \lambda A)^{-1}\| \leq 1$.

Remarque 1.3.2. Si A est maximal monotone, alors λA est aussi maximal monotone pour tout $\lambda > 0$.

Définition 1.3.12. Soit A un opérateur m -dissipatif dans H . On pose pour tout

$\lambda > 0$, $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ et $A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$ J_λ est la résolvante de A et A_λ la régularisée Yosida de A . on a : $\|J_\lambda\|_{C(H)} \leq 1$. Et lon a l'égalité suivante :

$$A_\lambda x = \lambda J_\lambda A x$$

.

En effet

$$\lambda J_\lambda A x = \lambda J_\lambda (A - \lambda I)x + \lambda^2 J_\lambda x = -\lambda x + \lambda^2 J_\lambda x = A_\lambda x.$$

1.4 Théorème de Lax-Milgram

Définition 1.4.1. Une forme bilinéaire $a(.,.) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est :

1) Continue s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall u, v \in H,$$

2) Coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2 \quad \forall v \in H.$$

Théorème 1.4.1. (Lax-Milgram)

Soient H un espace de Hilbert réel et $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur H . Pour tout $L \in H$ (i.e. $L : H \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue). Alors, il existe $u \in H$ solution unique du problème

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H.$$

1.5 Théorie des semi-groupes

Dans ce part, nous rappelons quelques connaissances de base en semi-groupes, dont la plupart seront utilisées dans les chapitres suivants. Une référence générale à ce sujet est [5], [6].

Soit X un espace de Banach réel ou complexe muni d'une norme notée $\|\cdot\|$.

Définition 1.5.1. On appelle semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur X une famille $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1) $T(0) = I$.

2) $T(t_1 + t_2) = T(t_1) \cdot T(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \geq 0$.

3) $\lim_{t \rightarrow 0} \|T(t) - I\| = 0$.

Définition 1.5.2. Une famille $T(t)$ ou $(0 \leq t < \infty)$ d'opérateurs linéaires non bornés dans un espace de Banach X est appelée semi-groupe fortement continue (en

bref, un C_0 -semi-groupe) si

- 1) $T(0) = I_d$, où I_d (est l'opérateur identique).
- 2) $T(t_1 + t_2) = T(t_1) \cdot T(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \geq 0$.
- 3) Pour chaque $x \in X$, $T(\cdot)x$ (est continue en t sur $[0, \infty)$).

Définition 1.5.3. Le générateur infinitésimal de C_0 -semi-groupe $T(t)$ est l'opérateur linéaire \mathcal{A} de domaine.

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\},$$

défini par

$$\mathcal{A}x = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(T(t)x - x)}{t} = \left. \frac{d(T(t)x)}{dt} \right|_{t=0^+}, \quad \text{pour } x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Exemple 1.5.1. Soit l_2 l'espace défini par :

$$l_2 = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n, \dots), \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^2 < +\infty \right\}$$

$(T(t)x)_n = (e^{-\frac{t}{n}}x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est C_0 -semi-groupe et $(\mathcal{A}x)_x = (-\frac{x_n}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est son générateur infinitésimal.

Exemple 1.5.2. Soit $A \in X$ et $t \in [0, \infty[$, tel que $t \mapsto T(t)$ est une application définie par :

$$T(t) = e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$$

qu'il est vérifié les conditions suivantes :

- 1) $T(t) = e^{At}$, pour $t = 0$
 $T(0) = e^0 = I$.
- 2) $T(t_1 + t_2) = e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} e^{At_2} = T(t_1) \cdot T(t_2)$.

3) par ailleurs, pour tout $t \geq 0$ on a :

$$\begin{aligned} \|T(t) - I\| &= \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!} - I \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!} \right\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \|A\|^n \\ &= e^{t\|A\|} - 1 \end{aligned}$$

d'où $\lim_{t \rightarrow 0} \|T(t) - I\| = 0$.

D'autre part, pour tout $t > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| &= \left\| \frac{e^{tA} - I}{t} - A \right\| \\ &= \left\| \frac{e^{tA} - I - tA}{t} \right\| \\ &= \frac{1}{t} \sum_{n=2}^{+\infty} t^n \frac{\|A\|^n}{n!} \\ &= \frac{1}{t} (e^{t\|A\|} - 1 - t\|A\|) \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Donc $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t) - I}{t} = A$.

Ainsi $(T(t))_{n \geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu d'opérateur linéaire bornés sur X de générateur infinitesimal A .

Définition 1.5.4. Un semi-groupe $T(t)$, $0 \leq t < \infty$ est dit semi-groupe de contraction s'il existe une constante $\alpha > 0$, ($0 < \alpha < 1$) telle que pour tout $t > 0$,

$$\|T(t)x - T(t)y\| \leq \alpha \|x - y\|, \text{ pour tout } x, y \in X$$

C_0 -Semi-groupe généré par un opérateur dissipatif

Proposition 1.5.1. Soit $T(t)$ un C_0 -semi-groupe. Il existe deux constantes $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ telles que :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad \text{pour } 0 \leq t < \infty.$$

Théorème 1.5.1. *Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur l'espace de Banach X et soit $\omega \in \mathbb{R}, M \geq 1$ vérifient*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad \text{pour } t \geq 0.$$

Pour le générateur $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ de $(T(t))_{t \geq 0}$ les propriétés suivantes sont satisfaites :

1) *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que*

$$R(\lambda)x := \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x ds, \tag{1.9}$$

existe pour tout $x \in X$, alors $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ et $R(\lambda, \mathcal{A}) = R(\lambda)$.

2) *Si $\operatorname{Re}(\lambda) > \omega$, alors $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, et le résolvant $R(\lambda, \mathcal{A})$ est donné par l'expression l'intégrale (1.9).*

3) $\|R(\lambda, \mathcal{A})\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re}(\lambda) - \omega}$ *pour tout $\operatorname{Re}(\lambda) > \omega$.*

1.6 Définitions de quelques termes physiques

Définition 1.6.1. (*L'énergie*)

L'énergie est ce qui permet d'agir : sans elle, rien ne se passe, pas de mouvement, pas de lumière, pas de vie ! Au sens physique, l'énergie caractérise la capacité à modifier un état, à produire un travail entraînant du mouvement, de la lumière, ou de la chaleur. Toute action ou changement d'état nécessite que de l'énergie soit échangé.

1.7 Stabilité

Il existe plusieurs degrés de stabilité : Le premier degré consiste à analyser simplement la décroissance de l'énergie des solutions tend vers zéro, i.e :

$$\mathcal{E}(t) \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } t \rightarrow +\infty.$$

C'est ce que l'on appelle la stabilisation forte.

Pour le second, on s'intéresse à la décroissance de l'énergie la plus rapide, c'est-à-dire lorsque celle-ci tend vers 0 de manière exponentielle, i.e :

$$\mathcal{E}(t) \leq Ce^{-\alpha t}, \quad \forall t > 0,$$

ou C et α sont des constantes positives avec C qui dépend des données initiales.

Quant au troisième, il étudie des situations intermédiaires, dans les quelles la décroissance des solutions n'est pas exponentielle, mais du type polynomial par exemple :

$$\mathcal{E}(t) \leq \frac{C}{t^\beta}, \quad \forall t > 0.$$

ou C et β sont des constantes positives avec C qui dépend des données initiales.

Stabilité exponentielle

Théorème 1.7.1. Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe sur un espace de Hilbert. Alors $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est exponentiellement stable si et seulement si

$$\sup\{\operatorname{Re}(\lambda); \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\} < 0$$

et

$$\sup_{\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0} \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < +\infty.$$

Théorème 1.7.2. Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semigroupe des contractions sur un espace de Hilbert. Alors $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est exponentiellement stable si et seulement si

$$\rho(\mathcal{A}) \supseteq \{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R},$$

et

$$\overline{\lim}_{|\beta| \rightarrow +\infty} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\| < +\infty.$$

1.8 Fonction de Lyapunov

La notion de fonction de Lyapunov constitue d'une certaine manière une généralisation de l'énergie. Etant donnée une fonction définie positive, l'idée directrice

des théorèmes de Lyapunov consiste à évaluer l'évolution de cette fonction sur les trajectoires du système afin de conclure la décroissance de l'énergie.

Définition 1.8.1. (Fonction de Lyapunov)

Une fonction de Lyapunov V est une fonction de classe C^1 , définie par

$$V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

telle que

$$V(x) > 0, \forall x \neq 0 \text{ et } V(x) = 0 \text{ pour } x = 0,$$

et

$$V'(x) \leq 0, \forall x \neq 0 \text{ et } V'(x) = 0 \text{ pour } x = 0.$$

Remarque 1.8.1. Notons que V' est la dérivée de V par rapport au temps t . Cela veut dire que $V'(x) = \frac{d}{dt}V(x)$.

Le résultat fondamental de la stabilité de Lyapunov affirme que si une fonction de Lyapunov existe pour un système donné alors ce système est stable. ‘

Si la fonction de Lyapunov est strictement décroissante, $\frac{d}{dt}V(x) < 0$; alors la stabilité est en plus exponentielle.

Chapitre 2

Théorème de Hille-Yosida et théorème de Lummer-Phillips

Dans ce chapitre nous allons définir les deux théorèmes le théorème de Hille-Yosida et le théorème de Lummer-Phillips qui nous seront utiles dans le chapitre suivant.

2.1 Théorème de Hille-Yosida

On s'intéresse au problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0, \text{ sur } [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

On cherche à résoudre le problème (2.1). Nous allons donc chercher des outils qui nous permettront de le résoudre. Tout d'abord commençons par rappeler un résultat classique.

Proposition 2.1.1. *Soit A un opérateur maximal monotone. On a*

- a) $A_\lambda v = A(J_\lambda v), \quad \forall v \in H \text{ et } \forall \lambda > 0.$
- b) $A_\lambda v = J_\lambda(Av), \quad \forall v \in \mathcal{D}(A) \text{ et } \forall \lambda > 0.$
- c) $|A_\lambda| \leq |Av|, \quad \forall v \in H \text{ et } \forall \lambda > 0.$
- d) $\lim_{\lambda \rightarrow 0} J_\lambda v = v, \quad \forall v \in H \text{ et } \forall \lambda > 0.$
- e) $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A_\lambda v = Av, \quad \forall v \in D(A).$
- f) $\langle A_\lambda v, v \rangle \geq 0, \quad \forall v \in H \text{ et } \forall \lambda > 0.$
- g) $|A_\lambda v| \leq \frac{1}{\lambda}|v|, \quad \forall v \in H \text{ et } \forall \lambda > 0.$
- h) $\forall \lambda, \mu > 0, \quad J_\lambda, J_\mu, A_\lambda, A_\mu \text{ commutent.}$

Démonstration

a) Par définition de J_λ , pour tout $v \in H$ on a

$$J_\lambda v + \lambda A(J_\lambda v) = J_\lambda v + \lambda A(I + \lambda A)^{-1}v = J_\lambda v + \lambda Av = (J_\lambda + \lambda A)v = v$$

donc

$$\begin{aligned} A_\lambda v &= A(I + \lambda A)^{-1}(I + \lambda A)J_\lambda v \\ &= A(J_\lambda v). \end{aligned}$$

b) On a donc

$$\begin{aligned} Av &= \frac{1}{\lambda}[(I + \lambda A)v - v] = \frac{1}{\lambda}(I + \lambda A)(v - J_\lambda v) \\ J_\lambda Av &= \frac{1}{\lambda}(I + \lambda A)^{-1}(I + \lambda A)(v - J_\lambda v) \\ &= \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)v \\ &= A_\lambda v. \end{aligned}$$

c) D'après b) on a $A_\lambda v = J_\lambda(Av)$ donc $|A_\lambda v| \leq |Av|$.

d) Supposons d'abord que $v \in \mathcal{D}(A)$. Alors

$$|v - J_\lambda v| = \lambda |A_\lambda v| \leq \lambda |Av| \quad (\text{d'après c})$$

Soit maintenant $v \in H$ et $\varepsilon > 0$ pour le cas générale. Comme $\mathcal{D}(A)$ est dense dans

H d'après la proposition (1.3.2) il existe $v_1 \in \mathcal{D}(A)$ tel que $|v - v_1| \leq \varepsilon$ On a

$$\begin{aligned} |J_\lambda v - v| &\leq |J_\lambda v - J_\lambda v_1| + |J_\lambda v_1 - v_1| + |v - v_1| \\ &\leq 2|v - v_1| + |J_\lambda v_1 - v_1| \\ &\leq 2\varepsilon + |J_\lambda v_1 - v_1| \end{aligned} \tag{2.2}$$

par conséquent

$$\limsup_{\lambda \rightarrow 0} |J_\lambda v - v| \leq 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

et donc

$$\limsup_{\lambda \rightarrow 0} |J_\lambda v - v| = 0$$

d'où

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} J_\lambda v = v, \quad \forall v \in H.$$

e) En appliquant b) et d) on a :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} A_\lambda v = Av \quad \forall v \in \mathcal{D}(A).$$

f) On a

$$\begin{aligned} \langle A_\lambda v, v \rangle &= \langle A_\lambda v, v - J_\lambda v \rangle + \langle A_\lambda v, J_\lambda v \rangle \\ &= \lambda |A_\lambda v|^2 + \langle A(J_\lambda v), J_\lambda v \rangle \end{aligned}$$

donc

$$\langle A_\lambda v, v \rangle \geq \lambda |A_\lambda v|^2 \geq 0. \tag{2.3}$$

g) En appliquant l'inégalité de Cauchy schwarz à (2.3) on a

$$|A_\lambda v| \leq \frac{1}{\lambda} |v|.$$

h) Montrons que J_λ et J_μ commutent Soit $x \in H$. Notons $z = J_\lambda J_\mu x$ et montrons que $z = J_\mu J_\lambda x$ $z \in D(A)$ donc

$$(I + \lambda A)z = J_\mu x \quad \text{car } J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1} \text{ sur } D(A)$$

en multipliant à gauche par J_μ^{-1} on a

$$(I + \mu A)(I + \lambda A)z = J_\mu^{-1} J_\mu x$$

$$(I + \mu A)(I + \lambda A)z = x.$$

Par commutativité de ces deux derniers opérateurs on a d'où

$$(I + \lambda A)(I + \mu A)z = x$$

$$z = J_\mu J_\lambda x$$

Comme J_μ et J_λ commutent on a d'après a) et b) A_μ et A_λ qui commutent ainsi que A_μ et J_λ .

Théorème 2.1.1. (Cauchy-Lipschitz-Picard)

Soient X un espace de Banach et $F : X \rightarrow X$ une application telle que

$$\|Fu - Fv\| \leq L\|u - v\| \quad \forall u, v \in X \quad (L \geq 0).$$

Alors pour tout $u_0 \in X$ il existe $u \in C^1([0; +\infty[; X)$ unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = F \text{ sur } [0; +\infty[\\ u(0) = u_0 \quad (\text{donnée initiale}) \end{cases}$$

Démonstration.

Résoudre (2.1) équivaut à trouver $u \in C([0; +\infty[; X)$ tel que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F(s, u(s)) ds. \tag{2.4}$$

Autrement dit une solution de notre équation est un point fixe de l'application A de $C([0; +\infty[; X)$ dans lui même, qui à u associe

$$Au : t \longmapsto u_0 + \int_0^t F(s, u(s)) ds.$$

Il semble donc naturel de chercher à montrer que A est contractante. Notons L tel

que f soit L -lipschitzienne en u :

$$\begin{aligned}
 |Au_1(t) - Au_2(t)| &= \left| u_0 + \int_0^t F(s, u_1(s)) ds - u_0 - \int_0^t F(s, u_2(s)) ds \right| \\
 &\leq \int_0^t |F(s, u_1(s)) - F(s, u_2(s))| ds \\
 &\leq L \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)| ds \\
 &\leq Lt \|u_1 - u_2\|.
 \end{aligned}$$

On obtient ainsi $\|Au_1 - Au_2\|_\infty \leq \alpha L \|u_1 - u_2\|_\infty$.

Ce n'est pas forcément contractante car peut être $\alpha L \leq 1$. Il va donc falloir donc ruser en itérant A .

Si on réutilise la dernière inégalité on trouve

$$\begin{aligned}
 |A^2u_1(t) - A^2u_2(t)| &= \left| u_0 + \int_0^t F(s, Au_1(s)) ds - u_0 - \int_0^t F(s, Au_2(s)) ds \right| \\
 &\leq \int_0^t |F(s, Au_1(s)) - F(s, Au_2(s))| ds \\
 &\leq L \int_0^t |Au_1(s) - Au_2(s)| ds \\
 &\leq L \int_0^t Ls \|u_1 - u_2\|_\infty ds \\
 &\leq L^2 \frac{t^2}{2} \|u_1 - u_2\|_\infty
 \end{aligned}$$

Puis itérons une nouvelle fois encore

$$\begin{aligned}
 |A^3u_1(t) - A^3u_2(t)| &\leq L \int_0^t |A^2u_1(s) - A^2u_2(s)| ds \\
 &\leq L \int_0^t \frac{L^2s^2}{2} \|u_1 - u_2\|_\infty ds \\
 &\leq L^3 \frac{t^3}{6} \|u_1 - u_2\|_\infty.
 \end{aligned}$$

On commence à voir ce qu'il se passe :

en intégrant s^p , on obtient un $\frac{t^{p+1}}{p+1}$ qui vient s'ajouter au dénominateur déjà existant.

En faisant p fois ce qu'on vient de faire trois fois, on obtient par récurrence sur p

$$|A^p u_1 - A^p u_2| \leq \frac{(L)^p s^p}{p!} \|u_1 - u_2\|_\infty$$

d'où

$$|A^p u_1 - A^p u_2| \leq \frac{(\alpha L)^p}{p!} \|u_1 - u_2\|_\infty.$$

or quand p tend vers ∞ , $\frac{(\alpha L)^p}{p!}$ tend vers 0, donc pour p assez grand, $\frac{(\alpha L)^p}{p!} < 1$ et A^p est contractante.

On peut alors appliquer le théorème du point fixe : A^p admet un point fixe, qu'on note z .

Un point fixe de A est un point fixe de A^p , donc il est immédiat que A admet au plus un point fixe.

Il ne reste plus qu'à vérifier que z est point fixe de A :

$$\|Az - z\|_\infty = \|A(A^p) - A^p z\|_\infty = \|A^{p+1}z - A^p z\|_\infty \leq C \|Az - z\|_\infty$$

avec $C < 1$ car A^p est contractante.

Cela n'est possible que si $\|Az - z\|_\infty = 0$, alors $Az = z$.

Lemme 2.1.1. Soit $u \in C^1([0, +\infty[; H)$ une fonction vérifiant :

$$\frac{du}{dt} + A_\lambda u = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^+. \quad (2.5)$$

Alors les fonctions $t \mapsto |u(t)|$ et $t \mapsto \left| \frac{du}{dt} \right| = |A_u(t)|$ sont décroissantes sur $[0, +\infty[$.

Démonstration.

Soit $u \in C^1([0, +\infty[; H)$ vérifiant (2.5) pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ on a

$$\left\langle \frac{du}{dt}, u \right\rangle + \langle A_\lambda u, u \rangle = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^+,$$

d'après la proposition (2.1.1) $\langle A_\lambda u, u \rangle \geq 0$ alors $\left\langle \frac{du}{dt}, u \right\rangle \leq 0$ par suite

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|^2 \leq 0, \text{ donc } |u(t)|^2 \text{ est décroissante pour tout } t \geq 0.$$

D'autre part, comme A_λ est un opérateur linéaire borné, on déduit de (2.5) que u est C^∞ et que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{du}{dt} \right) + A_\lambda \left(\frac{du}{dt} \right) = 0$$

on peut appliquer alors ce qui précède à $\frac{du}{dt}$ on obtient $\left| \frac{du}{dt}(t) \right| = |A_\lambda u(t)|$ est décroissante pour tout t dans $[0, +\infty[$.

Théorème 2.1.2. (Hille-Yosida)

Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H .

Alors pour tout $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ il existe une fonction

$$u \in C^1([0, +\infty[; H) \cap C([0, +\infty[; \mathcal{D}(A))$$

unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 & \text{sur } [0, +\infty[; \\ u(0) = u_0 & \text{(condition initial).} \end{cases} \quad (2.6)$$

De plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \text{ et } \left| \frac{du}{dt}(t) \right| = |Au(t)| \leq |Au_0| \quad t \in [0, +\infty[.$$

Remarque 2.1.1. L'interêt principal du théorème de Hille-Yosida est dans le fait que pour résoudre le problème d'évolution (2.6) on se ramène à vérifier que l'opérateur A est maximal monotone.

Démonstration.

Nous allons décomposer la démonstration en 6 étapes.

1^{er} étape : Unicité en cas d'existence

Soient u et v deux solutions de (2.6). On a

$$\frac{d}{dt}(u, v) + (u, v) = 0 \quad \text{sur } [0, +\infty[,$$

en prenant le produit scalaire avec $(u - v)$ on obtient

$$\left\langle \frac{d}{dt}(u - v) + A(u - v), (u - v) \right\rangle = -\langle A(u - v), (u - v) \rangle \leq 0. \quad \text{sur } [0, +\infty[,$$

or $\forall \varphi \in C^1([0, +\infty[; H)$ on a $|\varphi|^2 \in C^1([0, +\infty[; \mathbb{R})$ et $\frac{d}{dt} |\varphi|^2 = 2\left(\frac{d\varphi}{dt}, \varphi\right)$.

Alors

$$\left\langle \frac{d}{dt}(u - v), (u - v) \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t) - v(t)|^2.$$

et par monotonie de A

$$\langle A(u - v), (u - v) \rangle \geq 0 \quad \text{sur } [0, +\infty[.$$

Alors la fonction $t \mapsto |u(t) - v(t)|$ est décroissante sur $[0, +\infty[$. Et comme

$$|u(0) - v(0)| = 0$$

$$\forall t \in [0, +\infty[, |u(t) - v(t)|^2 \leq |u(0) - v(0)|^2$$

On en déduit que

$$|u(t) - v(t)| = 0, \quad \forall t \geq 0$$

d'où

$$u = v \quad \text{sur } \mathbb{R}^+.$$

Existence

Pour prouver l'existence de u on va remplacer l'opérateur A par sa régularisée de Yosida A_λ , on établit diverses estimations indépendantes de λ , et on passe à la limite quand $\lambda \rightarrow 0$.

Soit u_λ la solution du problème

$$\begin{cases} \frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0 & [0, +\infty[\\ u_\lambda(0) = u_0 \in \mathcal{D}(A). \end{cases} \quad (2.7)$$

Notons que u_λ , existe grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard appliqué avec

$$F = -A_\lambda.$$

En effet A_λ est linéaire borné donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard le problème (2.7) admet une unique solution $u_\lambda \in C^1([0, +\infty[; H)$.

2^{ème} étape

On a l'estimation suivante

$$\forall t \geq 0, \forall \lambda > 0, \left| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right| = |A_\lambda u_\lambda(t)| \leq |A u_0|. \quad (2.8)$$

qui est une conséquence immédiate du lemme (2.1.1).

3^{ème} étape

On va montrer que, pour tout $t \geq 0$, $u_\lambda(t)$ converge uniformément vers $u(t)$ sur chaque intervalle bornée $[0, T]$ quand λ tend vers 0.

En effet soit H un espace de Hilbert. Montrons que, si t fixé, $u_\lambda(t)$ est une suite de Cauchy. Soient $\lambda, \mu > 0$. On a

$$\frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\mu}{dt} + A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu = 0$$

D'où en prenant le produit scalaire de l'expression ci-dessus avec $u_\lambda - u_\mu$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_\lambda - u_\mu|^2 + \langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu \rangle = 0.$$

Or

$$\begin{aligned} \langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu \rangle &= \langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - J_\lambda u_\lambda + J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu + J_\mu u_\mu - u_\mu \rangle \\ &= \langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu \rangle + \langle A(J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu), J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu \rangle \end{aligned} \quad (2.9)$$

puisque

$$\forall v \in \mathcal{D}(A), (A_\lambda v = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)v) \Rightarrow (v - J_\lambda v = \lambda A_\lambda v),$$

et toujours d'après la proposition (2.1.1)

$$\begin{aligned} \forall \lambda > 0, A_\lambda v &= A(J_\lambda v) \quad \forall v \in H \\ &= J_\lambda A v \quad v \in \mathcal{D}(A). \end{aligned}$$

Par monotonie de A , on a donc :

$$\langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu \rangle \leq \langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu \rangle. \quad (2.10)$$

On déduit alors de (2.5), (2.8) et (2.9) que

$$\forall \lambda > 0, \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_\lambda - u_\mu|^2 \leq 2(\lambda - \mu) |Au_0|^2.$$

On intégrons par rapport à t , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} | u_\lambda(t) - u_\mu(t) |^2 - \frac{1}{2} | u_\lambda(0) - u_\mu(0) |^2 &\leq 2(\lambda - \mu) | Au_0 |^2 \int_0^t ds \\ &\leq 2(\lambda - \mu)t | Au_0 |^2, \end{aligned}$$

donc

$$| u_\lambda(t) - u_\mu(t) |^2 \leq 4(\lambda - \mu)t | Au_0 |^2$$

et

$$| u_\lambda(t) - u_\mu(t) | \leq 2\sqrt{(\lambda - \mu)t} | Au_0 |. \quad (2.11)$$

Alors $\forall t \in [0, +\infty[$, la suite $(u_\lambda(t))_\lambda$ est de Cauchy, et donc converge quand $\lambda \rightarrow 0$ vers une limite notée $u(t)$.

On a

$$\forall \lambda > 0, \forall \mu > 0, t \in [0, +\infty[, | u_\lambda(t) - u_\mu(t) | \leq 2\sqrt{(\lambda - \mu)t} | Au_0 |.$$

Soit $\lambda > 0$ fixé et soit $t \in [0, +\infty[$

$$\forall \lambda > 0, | u_\lambda(t) - u_\mu(t) | \leq 2\sqrt{(\lambda - \mu)t} | Au_0 |$$

Par passage à la limite quand $\mu \rightarrow 0$:

$$\forall \lambda > 0, t \in \mathbb{R}^+, | u_\lambda(t) - u(t) | \leq 2\sqrt{\lambda t} | Au_0 |.$$

On en déduit la convergence uniforme de u_λ vers u sur $[0, T]$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Posons η tel que

$$2\sqrt{\eta T} | Au_0 | \leq \varepsilon.$$

Alors :

$$\forall | \lambda | \leq \eta, \forall t \in [0, T], | u_\lambda(t) - u(t) | \leq 2\sqrt{\lambda t} | Au_0 | \leq \varepsilon.$$

et $(u_\lambda)_\lambda$ converge uniformément vers u sur chaque intervalle borné $[0, T]$.

La limite uniforme d'une suite d'applications continues étant continue,

$$u \in C([0, +\infty[; H).$$

4^{ème} étape

Soit $u_0 \in \mathcal{D}(A^2)$, c'est à dire $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ et $Au_0 \in \mathcal{D}(A)$, $\frac{du_\lambda}{dt}$ converge uniformément quand λ tend vers 0 sur chaque intervalle borné $[0, T]$.

En effet, On pose $v_\lambda = \frac{du_\lambda}{dt}$, alors $\frac{dv_\lambda}{dt} + A_\lambda v_\lambda = 0$.

D'après l'étape 3

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v_\lambda - v_\mu|^2 \leq \langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu \rangle. \quad (2.12)$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité triangulaire :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v_\lambda - v_\mu|^2 \leq (|A_\lambda u_\lambda| + |A_\mu u_\mu|) (\lambda |A_\lambda u_\lambda| + \mu |A_\mu u_\mu|).$$

Or d'après la proposition (2.1.1)

$$\begin{aligned} |A_\lambda v_\lambda| &\leq |A_\lambda v_\lambda(0)| \\ &\leq |A_\lambda A_\lambda u_0| \end{aligned} \quad (2.13)$$

et de même

$$\begin{aligned} |A_\mu v_\mu| &\leq |A_\mu v_\mu(0)| \\ &\leq |A_\mu A_\mu u_0|. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Enfin puisque $Au_0 \in \mathcal{D}(A)$ il vient

$$\begin{aligned} A_\lambda A_\lambda u_0 &= A_\lambda(A(J_\lambda u_0)) \\ &= A(J_\lambda A J_\lambda u_0) \\ &= J_\lambda^2 A^2 u_0. \end{aligned}$$

D'ou

$$|A_\lambda A_\lambda u_0| \leq |A^2 u_0|, \quad |A_\mu A_\mu u_0| \leq |A^2 u_0| \quad \text{car } \|J_\lambda\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1.$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v_\lambda - v_\mu|^2 &\leq 2 |A^2 u_0| (\lambda - \mu) |A^2 u_0| \\ &\leq 2(\lambda - \mu) |A^2 u_0|^2. \end{aligned}$$

Ceci implique de la même manière qu'à l'étape 3 que $v_\lambda(t) = \frac{du_\lambda}{dt}(t)$ converge uniformément quand $\lambda \rightarrow 0$ sur chaque intervalle borné.

5^{ème} étape

Il existe une solution de (2.6) si l'on suppose de plus que $u_0 \in \mathcal{D}(A^2)$. En effet, d'après ce qui précède, on sait que pour tout $T < \infty$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\lambda(t) \rightarrow u(t), \quad \text{quand } \lambda \rightarrow 0, \quad \text{uniformément sur } [0, T], \\ \frac{du_\lambda}{dt}(t) \text{ converge, quand } \lambda \rightarrow 0, \quad \text{uniformément sur } [0, T]. \end{array} \right.$$

Il en résulte que $u \in C^1([0, T]; H)$ et que $\frac{du_\lambda}{dt}(t) \rightarrow \frac{du}{dt}(t)$, quand $\lambda \rightarrow 0$, uniformément sur $[0, T]$. On écrit (2.7) sous la forme

$$\frac{du_\lambda}{dt}(t) + A(J_\lambda u_\lambda(t)) = 0. \quad (2.15)$$

Notons que $J_\lambda u_\lambda(t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} u(t)$, car

$$\begin{aligned} |J_\lambda u_\lambda(t) - u(t)| &\leq |J_\lambda u_\lambda(t) - J_\lambda u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \\ &\leq |u_\lambda(t) - u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

En appliquant le fait que le graphe de A est fermé on déduit de (2.15) que $u(t) \in \mathcal{D}(A)$, $\forall t \geq 0$ et que

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0.$$

Enfin comme $u \in C^1([0, +\infty[; H)$, la fonction $t \mapsto Au(t)$ est continue de $[0, +\infty[$ dans H et donc $u \in C([0, +\infty[; \mathcal{D}(A))$

Par conséquent, on a obtenu une solution de (2.6) vérifiant $|u(t)| \leq |u_0|$, $\forall t \geq 0$ et

$$\left| \frac{du}{dt}(t) \right| \leq |Au_0|, \forall t \geq 0.$$

6^{ème} étape**Conclusion**

Nous concluons ici la preuve du théorème.

Nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 2.1.2. Soit $u_0 \in \mathcal{D}(A)$. Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists v_0 \in \mathcal{D}(A^2)$ tel que $|u_0 - v_0| < \varepsilon$ et $|Au_0 - Av_0| < \varepsilon$.

Autrement dit $\mathcal{D}(A^2)$ est dense dans $\mathcal{D}(A)$ (pour la norme du graphe).

Preuve.

Soit $v_0 = J_\lambda u_0$, de sorte que $v_0 \in \mathcal{D}(A)$ et $v_0 + \lambda Av_0 = u_0$. Donc $Av_0 \in \mathcal{D}(A)$, i.e. $v_0 \in \mathcal{D}(A^2)$. D'autre part, on sait (2.1.1) que

$$Av_0 = A_\lambda u_0 = J_\lambda Au_0,$$

et

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} |J_\lambda u_0 - u_0| = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} |J_\lambda Au_0 - Au_0| = 0.$$

On choisit alors $\lambda > 0$ assez petit et on obtient le résultat désiré. Nous tournons maintenant à la preuve du théorème.

Soit $u_0 \in \mathcal{D}(A)$. Grâce au lemme précédent il existe une suite $(u_{0n}) \in \mathcal{D}(A^2)$ telle que $u_{0n} \rightarrow u_0$ et $Au_{0n} \rightarrow Au_0$. D'après la 5^{ème} étape on sait qu'il existe une solution u_n du problème :

$$\begin{cases} \frac{du_n}{dt} + Au_n = 0 & \text{sur } [0, +\infty[, \\ u_n(0) = u_{0n}. \end{cases} \quad (2.16)$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} |u_n(t) - u_m(t)| &\leq |u_{0n} - u_{0m}| \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0, \\ \left| \frac{du_n}{dt}(t) - \frac{du_m}{dt}(t) \right| &\leq |Au_{0n} - Au_{0m}| \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} u_n(t) &\rightarrow u(t) \quad \text{uniformément sur } [0, \infty[, \\ \frac{du_n}{dt}(t) &\rightarrow \frac{du}{dt}(t) \quad \text{uniformément sur } [0, \infty[, \end{aligned}$$

avec $u \in C^1([0, +\infty[; H)$. Passant à la limite dans (2.16), grâce au fait que A est fermé, on voit que $u \in C([0, +\infty[; \mathcal{D}(A))$ et que u vérifie (2.6).

2.2 Théorème de Lummer-Phillips

Dans ce paragraphe, nous présentons une autre caractérisation concernant les C_0 -semi-groupes de contractions. Il s'agit du théorème de Lummer-Phillips. Nous allons commencer tout d'abord par introduire quelques préliminaires.

Notons par X' le dual topologique de l'espace de Banach X , et pour $f \in X'$ et $x \in X$, on note $f(x)$ par $\langle f, x \rangle$ ou $\langle x, f \rangle$.

Pour tout $x \in X$, on note $\mathcal{F}(x) = \{f \in X' : \langle f, x \rangle = \|x\|^2 = \|f\|^2\}$ l'ensemble de dualité.

Proposition 2.2.1. *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur dissipatif, Alors :*

1) $\lambda I - A$ est injectif pour tout $\lambda > 0$, et on a :

$$\|(\lambda I - A)^{-1}y\| \leq \frac{1}{\lambda}\|y\|, \forall y \in \text{Im}(\lambda I - A).$$

2) Il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda_0 I - A$ soit surjectif si et seulement si, $\lambda I - A$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$. Dans ce cas $]0, +\infty[\subset \rho(A)$.

3) A est fermé si et seulement si $\text{Im}(\lambda_0 I - A)$ est fermé pour un certain $\lambda_0 > 0$, et donc $\text{Im}(\lambda I - A)$ est fermé pour tout $\lambda > 0$.

Théorème 2.2.1. (Lummer-Phillips)

Soit A un opérateur linéaire de domaine $\mathcal{D}(A)$ dense dans H .

1) Si A est dissipatif et s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\text{Im}(\lambda_0 I - A) = H$, alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contractions sur H .

2) Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contractions sur H , alors $\text{Im}(\lambda I - A) = H$ pour tout $\lambda > 0$ et A est un opérateur dissipatif. De plus pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ et tout $f \in \mathcal{F}(x)$ on a, $\text{Re}\langle f, Ax \rangle \leq 0$.

Démonstration

Soit A un opérateur linéaire à domaine $\mathcal{D}(A)$ dense dans H .

1) Supposons que A est dissipatif et il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\text{Im}(\lambda_0 I - A) = H$.

Alors d'après l'assertion 2) de la proposition (2.3.1). $\text{Im}(\lambda I - A) = H,]0, +\infty[\subset \rho(A)$, et $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$ pour tout $\lambda > 0$.

D'après l'assertion 3) de la proposition (2.3.1) il vient que A est fermé. Donc par le théorème de Hille-Yosida pour les C_0 -semi-groupes de contractions sur H , il vient que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contractions sur H .

2) Supposons que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contractions $(T(t))_{t \geq 0}$ sur H .

Alors d'après le théorème de Hille-Yosida on a, $]0, +\infty[\subset \rho(A)$ et donc

$\text{Im}(\lambda I - A) = H$ pour tout $\lambda > 0$.

De plus pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ et tout $f \in \mathcal{F}(x)$ on a

$$\begin{aligned} |\langle f, T(t)x \rangle| &\leq \|f\| \|T(t)x\| \\ &\leq \|f\| \|T(t)\| \|x\| \\ &\leq \|f\| \|x\| = \|x\|^2. \end{aligned}$$

Ce qui entraîne alors que $\text{Re}\langle f, T(t)x - x \rangle \leq \text{Re}\langle f, T(t)x \rangle - \|x\|^2 \leq 0$. Il s'ensuit alors que :

$$\text{Re}\langle f, Ax \rangle = \text{Re} \left\langle f, \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \right\rangle \leq 0.$$

Ceci étant pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ et tout $f \in \mathcal{F}(x)$.

Chapitre 3

Application sur la stabilité exponentielle d'un problème de transmission avec l'histoire passée et le retard

3.1 Position du problème

Dans ce chapitre, nous avons étudiés le système de transmission suivant avec l'histoire passée et un terme de retard.

Le chapitre est organisé de la manière suivante. Le caractère bien posé du problème est analysé en utilisant la théorie des semi-groupes. D'après ça, nous prouvons la décroissance exponentielle de l'énergie lorsque le temps tend vers l'infini.

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - au_{xx}(x, t) + \int_0^\infty g(s)u_{xx}(x, t - s)ds \\ \quad + \mu u_t(x, t - \tau) = 0, & (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \\ v_{tt}(x, t) - bv_{xx}(x, t) = 0, & (x, t) \in (L_1, L_2) \times (0, +\infty). \end{cases} \quad (3.1)$$

Tel que

$\int_0^\infty g(s)u_{xx}(x, t - s)ds$: le terme de mémoire infini.

$\mu u_t(x, t - \tau)$: le terme de retard.

Sous la condition aux bords et de transmission suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0, t) = u(L_3, t) = 0, \\ u(L_i, t) = v(L_i, t), \quad i = 1, 2 \\ au_x(L_i, t) - \int_0^\infty g(s)u_x(L_i, t - s)ds = bv_x(L_i, t), \quad i = 1, 2. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

et les condition initials

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, -t) = u_0(x, t), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \\ u_t(x, t - \tau) = f_0(x, t - \tau), \quad x \in \Omega, t \in (0, \tau), \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad x \in (L_1, L_2), \end{array} \right. \quad (3.3)$$

avec $0 < L_1 < L_2 < L_3$, $\Omega =]0, L_1[\cup]L_2, L_3[$, a, μ, b sont des canstants positives, u_0 est donnée, et $\tau > 0$ est le retard.

Les problèmes de transmission se posent dans plusieurs applications de physique et de biologie. Nous notons que le problème (3.1) – (3.3) est lié à la propagation des ondes sur un corps composé de deux types de matériaux différents : la partie élastique et la partie viscoélastique qui a l'historique et l'effet de retard.

Pour les équations d'onde avec diverses dissipations, beaucoup de résultats concernant la stabilisation de solutions ont été prouvéés. Récemment, équations d'onde avec amortissement viscoélastique ont été étudiés par de nombreux auteurs, voir [3, 7, 8, 21, 20, 22, 32] et les références qui s'y trouvent. On montre que la dissipation produite par la partie viscoélastique peut produire la décroissance de la solution. Par exemple, A. Guesmia [15] étudié l'équation

$$u_{tt} - Au + \int_0^\infty g(t)Au(t - s)ds + \mu u_t(t - \tau) = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, \infty),$$

et sous condition :

$$\exists \delta > 0, \quad g'(s) \leq -\delta g(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}^+,$$

les auteurs ont montré la décroissance exponentielle.

Messaoudi [25] étudié l'équation viscoélastique suivante :

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^\infty g(t) \Delta u(t-s) ds = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, \infty),$$

dans un domaine borné, et établi un résultat de décroissance plus général, à partir de laquelle les taux de décroissance exponentiels et polynomiaux habituels ne sont que des cas particuliers.

Dans [17], les auteurs ont examiné un système d'équations d'onde avec un terme d'amortissement aux limites linéaire avec un retard :

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - au_{xx}(x, t) + \int_0^\infty g(s)u_{xx}(x, t-s)ds \\ + \mu_1 u_t(x, t-\tau) + \mu_2 u_t(x, t-\tau) = 0, & (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \\ v_{tt}(x, t) - bv_{xx}(x, t) = 0, & (x, t) \in (L_1, L_2) \times (0, +\infty), \end{cases} \quad (3.4)$$

et sous l'hypothèse

$$\mu_2 \leq \mu_1 \quad (3.5)$$

ils ont prouvé que la solution est exponentiellement stable. Au contraire, si (3.5) ne tient pas, ils ont trouvé une séquence de retards pour laquelle la solution correspondante de (3.4) sera instable.

Dans [24], les auteurs ont considéré l'équation

$$u_{tt}(x, t) - \Delta_x u(x, t) - \mu_1 \Delta_x u_t(x, t) - \mu_2 \Delta_x u_t(x, t-\tau) = 0,$$

et sous l'hypothèse

$$|\mu_2| \leq \mu_1, \quad (3.6)$$

ils ont prouvé la bonne pose et la décroissance exponentielle de l'énergie.

Récemment, dans [33] Yadav et Jiware ont considéré l'équation de Burgers-Fisher :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au \frac{\partial u}{\partial x} + bu(1-u) = 0, \quad (x, t) \in (0, T) \times \Omega,$$

les auteurs ont prouvé l'existence et l'unicité de la solution. Par ailleurs, ils ont également présenté l'analyse par éléments finis et l'approximation.

3.2 Hypothèses

On suppose que la fonction g satisfait ce qui suit :

A1 : On suppose que la fonction $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est de classe C^1 satisfaisant

$$g(0) > 0, \quad a - \int_0^\infty g(t)dt = a - g_0 = l > 0. \quad (3.7)$$

A2 : Il existe une constant positive δ ,

$$g'(s) \leq -\delta g(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}^+, \quad (3.8)$$

Comme en [26] nous introduisons la variable

$$z(x, \rho, t) = u_t(x, t - \tau\rho), \quad (x, \rho, t) \in \Omega \times (0, 1) \times (0, \infty).$$

Alors

$$\tau z_t(x, \rho, t) + z_\rho(x, \rho, t) = 0, \quad (x, \rho, t) \in \Omega \times (0, 1) \times (0, \infty). \quad (3.9)$$

Suivant l'idéal en [11], nous définissons

$$\eta^t(x, s) = u(x, t) - u(x, t - s), \quad (x, t, s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+. \quad (3.10)$$

Alors

$$\eta_t^t(x, s) + \eta_s^t(x, s) = u_t(x, t), \quad (x, t, s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

Pour $\rho = 1$ on a

$$z(x, 1, t) = u_t(x, t - \tau) \quad (3.11)$$

On a aussi $\eta^t(x, s) = u(x, t) - u(x, t - s)$, alors

$$\eta_{xx}^t(x, s) = u_{xx}(x, t) - u_{xx}(x, t - s)$$

donc

$$u_{xx}(x, t - s) = u_{xx}(x, t) - \eta_{xx}^t(x, s) \quad (3.12)$$

Remplacent (3.11) dans la première équation de système (3.1)

$$\begin{aligned}
 & u_{tt}(x, t) - au_{xx}(x, t) + \int_0^\infty g(s)u_{xx}(x, t-s)ds + \mu u_t(x, t-\tau) \\
 &= u_{tt}(x, t) - au_{xx}(x, t) + \int_0^\infty g(s)(u_{xx}(x, t) - \eta_{xx}^t(x, s))ds + \mu z(x, 1, t) \\
 &= u_{tt}(x, t) - au_{xx}(x, t) + \int_0^\infty g(s)u_{xx}(x, t)ds - \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}^t(x, s)ds + \mu z(x, 1, t) \\
 &= u_{tt}(x, t) - au_{xx}(x, t) + u_{xx}(x, t) \int_0^\infty g(s)ds - \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}^t(x, s)ds + \mu z(x, 1, t) \\
 &= u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t)(a - \int_0^\infty g(s)ds) - \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}^t(x, s)ds + \mu z(x, 1, t) \\
 &= u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t)(a - g_0) - \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}^t(x, s)ds + \mu z(x, 1, t) \\
 &= u_{tt}(x, t) - lu_{xx}(x, t) - \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}^t(x, s)ds + \mu z(x, 1, t) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Alors le système (3.1) s'écrit sous la forme suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 u_{tt}(x, t) - lu_{xx}(x, t) - \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}^t(x, s)ds + \mu z(x, 1, t) = 0, & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\
 v_{tt}(x, t) - bv_{xx}(x, t) = 0, & (x, t) \in (L_1, L_2) \times (0, +\infty), \\
 \tau z_t(x, \rho, t) + z_\rho(x, \rho, t) = 0, & (x, \rho, t) \in \Omega \times (0, 1) \times (0, \infty), \\
 \eta_t^t(x, s) + \eta_s^t(x, s) = u_t(x, t), & (x, t, s) \in \Omega \times (0, \infty) \times (0, \infty),
 \end{array} \right. \quad (3.13)$$

les conditions de transmission (3.2) et les conditions aux bords deviennent

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 u(0, t) = u(L_3, t) = 0, \\
 u(L_i, t) = v(L_i, t), \quad i = 1, 2 \quad t \in (0, +\infty), \\
 lu_x(L_i, t) + \int_0^\infty g(s)\eta_x^t(L_i, s)ds = bv_x(L_i, t), \quad i = 1, 2 \quad t \in (0, +\infty),
 \end{array} \right. \quad (3.14)$$

et les conditions initiales (3.3) deviennent

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 u(x, -t) = u_0(x, t), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \\
 z(x, 0, t) = u_t(x, t), \quad z(x, 1, t) = u_t(x, t-\tau) \\
 \qquad \qquad \qquad = f_0(x, t-\tau), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \\
 v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad x \in (L_1, L_2),
 \end{array} \right. \quad (3.15)$$

il est claire que

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta^t(x, 0) = u(x, t) - u(x, t) = 0, \quad \forall x > 0, \\ \eta^t(0, s) = u(0, t) - u(0, t - s) \\ \qquad \qquad \qquad = u(L_3, t) - u(0, t - s) \\ \qquad \qquad \qquad = \eta^t(L_3, s) = 0, \quad \forall s > 0, \\ \eta^0(x, s) = \eta_0(s), \quad \forall s > 0. \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Soit $V := (u, v, \varphi, \psi, z, \eta^t)^T$, alors V vérifier le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} V_t = (\mathcal{A} + \mathcal{B})V, \quad t > 0, \\ V(0) = V_0, \end{array} \right. \quad (3.17)$$

tel que $V_0 := (u_0(\cdot, 0), v_0, u_1, v_1, f_0(\cdot, -\tau), \eta_0)^T$. Les opérateurs \mathcal{A} et \mathcal{B} sont linéaires et défini par

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varphi \\ \psi \\ z \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ lu_{xx} + \int_0^{+\infty} g(s)\omega_{xx}(s)ds - \mu\varphi - \mu z(\cdot, 1) \\ bv_{xx} \\ -\frac{1}{\tau}z\rho \\ -\omega_s + \varphi \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{B}(u, v, \varphi, \psi, z, \eta^t)^T = \mu(0, 0, \varphi, 0, 0, 0)^T$ où

$$X_* = \{(u, v) \in H^1(\Omega) \times H^1(L_1, L_2) : u(0, t) = u(L_3, t) = 0, u(L_i, t) = v(L_i, t), \\ lu_x(L_i, t) + \int_0^\infty g(s)\eta_x^t(L_i, s)ds = bv_x(L_i, t), i = 1, 2\}.$$

et $L_g^2(\mathbb{R}_+, H^1(\Omega))$ désigne l'espace de Hilbert de H^1 -fonction valorisée sur \mathbb{R}_+ , doté de produit intérieur

$$(\phi, \vartheta)_{L_g^2(\mathbb{R}, H^1(\Omega))} = \int_\Omega \int_0^{+\infty} g(s)\phi_x(s)\vartheta_x(s)dsdx.$$

Set

$$V = (u, v, \varphi, \psi, z, \omega)^T, \quad \bar{V} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{z}, \bar{\omega})^T.$$

Nous définissons le produit scalaire dans l'espace énergétique \mathcal{H} .

$$\begin{aligned} \langle V, \bar{V} \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega} \varphi \bar{\varphi} dx + \int_{L_1}^{L_2} \psi \bar{\psi} dx + \int_{\Omega} l u_x \bar{u}_x + \int_{L_1}^{L_2} b v_x \bar{v}_x \\ &+ \int_{\Omega} \int_0^{+\infty} g(s) \omega_x(s) \bar{\omega}_s(s) ds dx + \tau \mu \int_{\Omega} \int_0^1 z \bar{z} d\rho dx. \end{aligned}$$

Le domaine de \mathcal{A} est

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{A}) &= \{V = (u, v, \varphi, \psi, z, \omega)^T \in \mathcal{H} : (u, v) \in \{(H^2(\Omega) \times H^2(L_1, L_2)) \cap X_*\}, \\ &\varphi \in H^1(\Omega), \psi \in H^1(L_1, L_2), \omega \in L_g^2(\mathbb{R}_+, H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)), \omega_s \in (\mathbb{R}_+, H^1(\Omega)) \\ &, z_{\rho} \in L^2((0, 1), L^2(\Omega)), \omega(x, 0) = 0, z(x, 0) = \varphi(x)\}. \end{aligned}$$

et $\mathcal{D}(\mathcal{B}) = \mathcal{H}$. La bonne pose du problème (3.13)-(3.14) est assurée par le théorème suivant.

Théorème 3.2.1. *supposons que (A1), (A2) tient. Si $V_0 \in \mathcal{H}$, alors le problème (3.17) admet une unique solution $V \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$. En outre si $V_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, alors*

$$V \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}).$$

Démonstration : Nous utilisons l'approche C_0 -semi-group, premièrement, Montrons que l'opérateur \mathcal{A} est dissipative ($-A$ monotone)

\mathcal{A} est dissipative si

$$\langle AV, V \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0, \quad \forall V \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

En fait pour $(u, v, \varphi, \psi, z, \omega)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, où $\varphi(L_i) = \psi(L_i), i = 1, 2$, et pour tout $V \in \mathcal{D}(A)$ en utilisant le produit intérieur :

$$\langle \mathcal{A}V, V \rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ lu_{xx} + \int_0^{+\infty} g(s)\omega_{xx}(s)ds - \mu\varphi - \mu z(\cdot, 1) \\ bv_{xx} \\ -\frac{1}{\tau}z_\rho \\ -\omega_s + \varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varphi \\ \psi \\ z \\ \omega \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}}$$

Puis

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}V, V \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega} lu_{xx}\varphi dx + \int_{\Omega} \left(\int_0^{+\infty} g(s)\omega_{xx}(s)ds - \mu\varphi - \mu z(\cdot, 1) \right) \varphi dx \\ &+ \int_{\Omega} lu_x\varphi_x dx + \int_{L_1}^{L_2} bv_x\psi_x dx + \int_{L_1}^{L_2} bv_{xx}\psi dx \\ &+ \int_{\Omega} \int_0^{+\infty} g(s)\omega_x(s)(-\omega_s + \varphi)_x ds dx \\ &- \mu \int_{\Omega} \int_0^1 zz_\rho(x, \rho) d\rho dx. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Pour le dernier terme du membre de droite de (3.18), on obtient

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega} \int_0^1 zz_\rho(x, \rho) d\rho dx &= \mu \int_{\Omega} \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} z^2(x, \rho) d\rho dx \\ &= \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} (z^2(x, 1) - z^2(x, 0)) dx \\ &= \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} (z^2(x, 1) - \varphi^2(x)) dx \quad (\text{car } z(x, 0, t) = \varphi(x, t)). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} lu_{xx}\varphi dx + \int_{\Omega} \left(\int_0^{+\infty} g(s)\omega_{xx}(s)ds - \mu\varphi - \mu z(\cdot, 1) \right) \varphi dx \\ &= \int_{\Omega} lu_{xx}\varphi dx + \int_{\Omega} \int_0^{+\infty} g(s)\omega_{xx}(s)ds\varphi dx - \int_{\Omega} \mu(\varphi + z(\cdot, 1))\varphi dx \\ &= \left[lu_x\varphi + \int_0^{+\infty} g(s)\omega_x(s)ds\varphi \right]_{\partial\Omega} \\ &= \left(lu_x(L_1, t) + \int_0^{+\infty} g(s)\omega_x(L_1, s)ds \right) \varphi(L_1, t) - \left(lu_x(0, t) + \int_0^{+\infty} g(s)\omega_x(0, s)ds \right) \varphi(0, t) \\ &+ \left(lu_x(L_3, t) + \int_0^{+\infty} g(s)\omega_x(L_3, s)ds \right) \varphi(L_3, t) - \left(lu_x(L_2, t) + \int_0^{+\infty} g(s)\omega_x(L_2, s)ds \right) \varphi(L_2, t). \end{aligned}$$

Puisque $u(0, t) = u(L_3, t) = 0$ on a

$$\begin{aligned}
 \left[lu_x \varphi + \int_0^{+\infty} g(s) w_x(s) ds \varphi \right]_{\partial\Omega} &= \left(lu_x(L_1, t) + \int_0^{+\infty} g(s) \omega_x(L_1, s) ds \right) \varphi(L_1, t) \\
 &\quad - \left(lu_x(L_2, t) + \int_0^{+\infty} g(s) \omega_x(L_2, s) ds \right) \varphi(L_2, t) \\
 &= bv_x(L_1, t) \psi(L_1, t) - bv_x(L_2, t) \psi(L_2, t) \\
 &= [bv_x \psi]_{L_2}^{L_1} \\
 &= - [bv_x \psi]_{L_1}^{L_2}
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Remarquant que $z(x, 0, t) = \varphi(x, t)$, $w(x, 0) = 0$ et $\varphi(L_i) = \psi(L_i)$, $i = 1, 2$, on obtient

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{A}V, V \rangle_{\mathcal{H}} &= \left[lu_x \varphi + \int_0^{+\infty} g(s) w_x(s) ds \varphi \right]_{\partial\Omega} + [bv_x \psi]_{L_1}^{L_2} \\
 &\quad + \int_{\Omega} (-\mu \varphi - \mu z(\cdot, 1)) \varphi dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[g(s) |w_x(x, s)|^2 ds \right]_0^{+\infty} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^{+\infty} g'(s) |w_x(x, s)|^2 ds dx - \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} (z^2(x, 1) - \varphi^2(x)) dx
 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young, on a

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{A}V, V \rangle_{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^{+\infty} g'(s) |w_x(x, s)|^2 ds dx \\
 &\leq \frac{-\delta}{2} \int_{\Omega} \int_0^{+\infty} g(s) |w_x(x, s)|^2 ds dx \\
 &\leq 0, \quad (d'après (3.8))
 \end{aligned}$$

donc

$$\langle \mathcal{A}V, V \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0,$$

équivalent que, \mathcal{A} est dissipative.

Montrons que l'opérateur $-\mathcal{A}$ est maximal

Réellement, laissez $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^T \in \mathcal{H}$, on prouve qu'il existe

$V = (u, v, \varphi, \psi, z, \omega)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ satisfaisant

$$(\lambda I - \mathcal{A})V = F, \tag{3.20}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{aligned}
 \lambda u - \varphi &= f_1, \\
 \lambda v - \psi &= f_2, \\
 \lambda \varphi - l u_{xx} - \int_0^\infty g(s) w_{xx}(s) ds + \mu \varphi + \mu z(\cdot, t) &= f_3, \\
 \lambda \psi - b v_{xx} &= f_4, \\
 \lambda z + \frac{1}{\tau} z_\rho &= f_5, \\
 \lambda w + w_s - \varphi &= f_6.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Supposons qu'avec la régularité appropriée nous ayons trouvé u et v , alors

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \lambda u - f_1, \\
 \psi &= \lambda v - f_2.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Nous avons donc $\varphi \in H^1(\Omega)$ et $\psi \in H^1(L_1, L_2)$. De plus, on peut trouver z avec

$$z(x, \rho) = \varphi(x), \quad x \in \Omega.$$

En utilisant l'équation de (3.21), on obtient

$$z(x, \rho) = \varphi(x) e^{-\lambda \rho} + \tau e^{-\lambda \rho} \int_0^\rho f_5(x, \sigma) e^{\lambda \sigma} d\sigma.$$

De (3.22), on obtient

$$z(x, \rho) = \lambda u e^{-\lambda \rho} - f_1 e^{-\lambda \rho} + \tau e^{-\lambda \rho} \int_0^\rho f_5(x, \sigma) e^{\lambda \sigma} d\sigma. \tag{3.23}$$

Il est facile de voir que la dernière équation de (3.21) avec $w(x, 0) = 0$ a une solution unique

$$\begin{aligned}
 w(x, s) &= \left(\int_0^s e^{\lambda y} (f_6(x, y) + \varphi(x)) dy \right) e^{-\lambda s} \\
 &= \left(\int_0^s e^{\lambda y} (f_6(x, y) + \lambda u(x) - f_1(x)) dy \right) e^{-\lambda s}.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

En utilisant (3.21), (3.22) et (3.24), les fonctions u et v satisfont :

$$\begin{aligned}
 (\lambda^2 + \mu \lambda + \mu \lambda e^{-\lambda \tau}) u - \tilde{l} u_{xx} &= \tilde{f}, \\
 \lambda^2 v - b v_{xx} &= f_4 + \lambda f_2,
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

où

$$\tilde{l} = l + \lambda \int_0^\infty g(s) e^{-\lambda s} \left(\int_0^s e^{\lambda y} dy \right) ds,$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{f} = & \int_0^\infty g(s) e^{-\lambda s} \left(\int_0^s e^{\lambda y} (f_6(x, y) - f_1(x, y))_{xx} dy \right) ds \\ & - \mu \tau e^{-\lambda \tau} \int_0^1 f_5(x, \sigma) e^{\lambda \sigma \tau} d\sigma + (\lambda + \mu + \mu e^{-\lambda \tau}) f_1 + f_3. \end{aligned}$$

Il suffit de prouver que (3.25) a une solution $(u, v) \in X_*$ et de remplacer dans (3.22), (3.23) et (3.24) pour obtenir $V = (u, v, \varphi, \psi, z, \omega)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Par conséquent, le problème (3.20) est équivalent au problème

$$\Phi((u, v), (\omega_1, \omega_2)) = l(\omega_1, \omega_2), \quad (3.26)$$

où la forme bilinéaire $\Phi : (X_*, X_*) \rightarrow \mathbb{R}$ et la forme linéaire $l : X_* \rightarrow \mathbb{R}$ sont définies par

$$\begin{aligned} \Phi((u, v), (\omega_1, \omega_2)) = & \int_\Omega \left[(\lambda^2 + \mu\lambda + \mu\lambda e^{-\lambda\tau}) u\omega_1 + iu_x(\omega)_x \right] dx - [\tilde{l}u_x\omega_1]_{\partial\Omega} \\ & + \int_{L_1}^{L_2} (\lambda^2 v\omega_2 + bv_x(\omega_2)_x) dx - [bv_x\omega_2]_{L_1}^{L_2} \end{aligned}$$

et

$$l(\omega_1, \omega_2) = \int_\Omega \tilde{f}\omega_1 dx + \int_{L_1}^{L_2} (f_4 + \lambda f_2)\omega_2 dx.$$

Utiliser les propriétés de l'espace X_* , il est facile de voir que Φ est continu et coercive, et l est continu. Application du théorème de Lax-Milgram, on en déduit que pour tout $(\omega_1, \omega_2) \in X_*$, le problème (3.26) a une solution unique $(u, v) \in X_*$. Il résulte de (3.25) que $(u, v) \in \{(H^2(\Omega) \times H^2(L_1, L_2)) \cap X_*\}$. De là, l'opérateur $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$. Cela signifie que \mathcal{A} est un opérateur maximal monotone. Ensuite, en utilisant le théorème de Lummer-Phillips [28], on en déduit que \mathcal{A} est un générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe linéaire sur \mathcal{H} .

D'autre part, il est clair que l'opérateur linéaire \mathcal{B} est Lipschitzien continu. Enfin, $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ est aussi un générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe linéaire sur \mathcal{H} . Par conséquent (3.17) est bien posé au sens du théorème (3.2.1) (voir [28]).

3.3 Stabilité exponentielle

Dans cette section, nous considérons que la dégradation est le résultat d'un problème (3.1)-(3.3). En fait, utiliser la méthode énergétique pour produire un Lyapunov fonctionnel.

Théorème 3.3.1. Soit (u, v) la solution de (3.1)-(3.3). Supposons que (A1), (A2) sont vérifiés et que

$$a > \frac{8(L_2 - L_1)}{L_1 + L_3 - L_2}l, \quad b > \frac{8(L_2 - L_1)}{L_1 + L_3 - L_2}l \quad (3.27)$$

alors il existe deux constantes $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ telles que,

$$E(t) \leq \gamma_2 e^{-\gamma_1 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (3.28)$$

Pour la preuve du théorème (3.3.1), nous avons besoin de quelques lemmes.

Pour une solution de (3.1)-(3.3), on définit l'énergie

$$\begin{aligned} E(t) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} [u_t^2(x, t) + lu_x^2(x, t)] dx + \frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_2} [v_t^2(x, t) + bv_x^2(x, t)] dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g(s) |\eta_x^t(x, s)|^2 ds dx + \frac{\tau\mu}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx, \end{aligned} \quad (3.29)$$

Lemme 3.3.1. Soit (u, v, η, z) la solution de (3.8) – (3.9). On a alors l'inégalité

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq \mu \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g'(s) |\eta_x^t(x, s)|^2 ds dx. \quad (3.30)$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}E(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} [u_t^2 + lu_x^2] dx \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_2} [v_t^2 + bv_x^2] dx \right) \\
 &\quad + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g(s) |\eta_x^t(x, s)|^2 ds dx \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\tau\mu}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx \right) \\
 &= \int_{\Omega} (u_t u_{tt} + lu_x u_{xt}) dx + \int_{L_1}^{L_2} (v_t v_{tt} + bv_x v_{xt}) dx \\
 &\quad + \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x, s) \eta_{xt}^t(x, s) ds dx + \tau |\mu| \int_{\Omega} \int_0^1 z_t(x, \rho, t) z(x, \rho, t) d\rho dx \\
 &= \int_{\Omega} \left(u_t u_{tt} + lu_x u_{xt} + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x, s) \eta_{xt}^t(x, s) ds \right) dx \\
 &\quad + \int_{L_1}^{L_2} (v_t v_{tt} + bv_x v_{xt}) dx + \tau |\mu| \int_{\Omega} \int_0^1 z_t(x, \rho, t) z(x, \rho, t) d\rho dx \\
 &= \left[(lu_x + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x, s) ds) u_t \right]_{\partial\Omega} + [bv_x v_t]_{L_1}^{L_2} \\
 &\quad - \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x, s) \eta_x s^t(x, s) ds dx \\
 &\quad - \mu \int_{\Omega} u_t z(x, 1, t) dx + \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx - \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} z^2(x, 1, t) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g'(s) |\eta_x^t(x, s)|^2 ds dx - \mu \int_{\Omega} u_t z(x, 1, t) dx + \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx \\
 &\quad - \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} z^2(x, 1, t) dx,
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

où nous l'avons utilisé

$$\begin{aligned}
 &\left[(lu_x + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x, s) ds) u_t \right]_{\partial\Omega} \\
 &= \left(lu_x(L_1, t) + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(L_1, s) ds \right) u_t(L_1, t) \\
 &\quad - \left(lu_x(0, t) + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(0, s) ds \right) u_t(0, t) \\
 &\quad + \left(lu_x(L_3, t) + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(L_3, s) ds \right) u_t(L_3, t) \\
 &\quad - \left(lu_x(L_2, t) + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(L_2, s) ds \right) u_t(L_2, t) \\
 &= \left(lu_x(L_1, t) + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(L_1, s) ds \right) u_t(L_1, t) \\
 &\quad - \left(lu_x(L_2, t) + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(L_2, s) ds \right) u_t(L_2, t) \\
 &= -[bv_x v_t]_{L_1}^{L_2},
 \end{aligned}$$

et

$$\left[\frac{1}{2} \int_0^{\infty} g(s) |\eta_x^t(x, s) ds|^2 dx \right]_0^{\infty} = 0,$$

et

$$\begin{aligned}
 \frac{\tau\mu}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx &= \frac{\tau\mu}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 2z_t(x, \rho, t) z(x, \rho, t) d\rho dx \\
 &= -\mu \int_{\Omega} \int_0^1 2z_{\rho}(x, \rho, t) z(x, \rho, t) d\rho dx \quad \text{d'après (3.14)} \\
 &= -\frac{\mu}{2} \int_{\Omega} [z^2(x, \rho, t)]_{\rho=0}^{\rho=1} dx \\
 &= -\frac{\mu}{2} \int_{\Omega} (z^2(x, 1) - z^2(x, 0)) dx.
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

On utilisons l'inégalité de Young nous trouvons

$$\mu \int_{\Omega} u_t(x, t) z(x, 1, t) dx \leq \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx + \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} z^2(x, 1, t) dx,$$

alors

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq \mu \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g'(s) |\eta_x^t(x, s)|^2 ds dx.$$

□

Maintenant, nous définissons la fonctionnelle

$$\mathcal{D}(t) = \int_{\Omega} uu_t dx + \int_{L_1}^{L_2} vv_t dx,$$

alors on a le lemme suivant.

Lemme 3.3.2. *La fonctionnelle $\mathcal{D}(t)$ satisfait*

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \mathcal{D}(t) &\leq \int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} v_t^2 dx + (L^2\varepsilon + \varepsilon - l) \int_{\Omega} u_x^2 dx - \int_{L_1}^{L_2} bv_x^2 dx \\
 &\quad + \frac{g_0}{4\varepsilon} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g(s) |\eta_x^t(x, s)|^2 ds dx + \frac{\mu^2}{4\varepsilon} \int_{\Omega} z^2(x, 1, t) dx.
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Démonstration. En prenant la dérivée de $\mathcal{D}(t)$ par rapport à t et en utilisant (3.13),

on a :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \mathcal{D}(t) &= \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} uu_t \, dx + \int_{L_1}^{L_2} vv_t dx \right) \\
 &= \int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{\Omega} uu_{tt} dx + \int_{L_1}^{L_2} v_t^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} vv_{tt} dx \\
 &= \int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} v_t^2 dx + \int_{\Omega} u \left(lu_{xx} + \int_0^{\infty} g(s) \eta_{xx}^t(x, s) ds - \mu z(x, 1, t) \right) dx \\
 &\quad + \int_{L_1}^{L_2} v bv_{xx} dx \\
 &= \int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} v_t^2 dx + l \int_{\Omega} \left(uu_{xx} + \int_0^{\infty} g(s) \eta_{xx}^t(x, s) u ds \right) dx \\
 &\quad - \mu \int_{\Omega} z(x, 1, t) u dx + b \int_{L_1}^{L_2} vv_{xx} dx \\
 &= \int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} v_t^2 dx + l [uu_x]_{\partial\Omega} - l \int_{\Omega} u_x^2 dx + \left[l \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x, s) u ds \right]_{\partial\Omega} \\
 &\quad - l \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x, s) u_x ds + [bv_x v]_{L_1}^{L_2} - b \int_{L_1}^{L_2} v_x^2 dx - \mu \int_{\Omega} z(x, 1, t) u dx \\
 &= \int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} v_t^2 dx - l \int_{\Omega} u_x^2 dx - \mu \int_{\Omega} z(x, 1, t) u dx + [bv_x v]_{L_1}^{L_2} \\
 &\quad + \left[\left(lu_x + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x, s) ds \right) u \right]_{\partial\Omega} \\
 &\quad - \int_{\Omega} u_x(x, t) \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x, s) ds dx - \int_{L_1}^{L_2} bv_x^2 dx \\
 &= \int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} v_t^2 dx - l \int_{\Omega} u_x^2 dx - \mu \int_{\Omega} z(x, 1, t) u dx \\
 &\quad - \int_{\Omega} u_x(x, t) \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x, s) ds dx - \int_{L_1}^{L_2} bv_x^2 dx,
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

où nous l'avons utilisé

$$\begin{aligned}
 \left[\left(lu_x + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x, s) ds \right) u \right]_{\partial\Omega} &= \left(lu_x(L_1, t) + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(L_2, s) ds \right) u(L_1, t) \\
 &\quad - \left(lu_x(L_2, t) + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(L_2, s) ds \right) u(L_2, t) \\
 &= - [bv_x v]_{L_1}^{L_2}.
 \end{aligned}$$

Par les conditions aux bords (3.2), on a

$$\begin{aligned}
 u^2(x, t) &= \left(\int_0^{L_1} u_x(x, t) dx \right)^2 \leq \left(\int_0^{L_1} 1^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{L_1}^{L_2} u_x^2(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq L_1 \int_0^{L_1} u_x^2(x, t) dx, \quad x \in [1, L_1],
 \end{aligned}$$

$$u^2(x, t) \leq (L_3 - L_2) \int_{L_2}^{L_1} u_x^2(x, t) dx, \quad x \in [L_2, L_3],$$

ce qui implique

$$\int_{\Omega} u^2(x, t) dx \leq L \int_{\Omega} u_x^2 dx, \quad x \in \Omega, \quad (3.35)$$

où $L = \max \{L_1, L_3 - L_2\}$.

En utilisant l'inégalité de Young et (3.35), pour toute $\varepsilon > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega} z(x, 1, t) u dx &\leq \varepsilon \int_{\Omega} u^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (\mu z(x, 1, t))^2 dx \\ &\leq L^2 \varepsilon \int_{\Omega} u_x^2 dx + \frac{\mu^2}{4\varepsilon} \int_{\Omega} z^2(x, 1, t) dx. \end{aligned} \quad (3.36)$$

L'inégalité des Young, l'inégalité de Hölder et (A2) implique que

$$\int_{\Omega} u_x(x, t) \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x, s) ds dx \leq \varepsilon \int_{\Omega} u_x^2(x, t) dx + \frac{g_0}{4\varepsilon} \int_0^{\infty} g(s) |\eta_x^t(x, s)|^2 ds dx. \quad (3.37)$$

D'après (3.36) et (3.37), on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{D}(t) &\leq \int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} v_t^2 dx - l \int_{\Omega} u_x^2 dx + \frac{\mu^2}{4\varepsilon} \int_{\Omega} z^2(x, 1, t) u dx + L^2 \varepsilon \int_{\Omega} u_x^2 dx \\ &\quad - \int_{L_1}^{L_2} b v_x^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega} u_x^2 dx + \frac{g_0}{4\varepsilon} \int_0^{\infty} g(s) |\eta_x^t(x, s)|^2 ds dx \\ &\leq \int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} v_t^2 dx + (L^2 \varepsilon + \varepsilon - l) \int_{\Omega} u_x^2 dx - \int_{L_1}^{L_2} b v_x^2 dx \\ &\quad + \frac{\mu^2}{4\varepsilon} \int_{\Omega} z^2(x, 1, t) u dx + \frac{g_0}{4\varepsilon} \int_0^{\infty} g(s) |\eta_x^t(x, s)|^2 ds dx. \end{aligned}$$

□

Ensuite, éclairés par [23], nous introduisons la fonctionnelle

$$q(x) = \begin{cases} x - \frac{L_1}{2}, & x \in [0, L_1], \\ \frac{L_1}{2} - \frac{L_1 + L_3 - L_2}{2(L_2 - L_1)} (x - L_1), & x \in (L_1, L_2), \\ x - \frac{L_2 + L_3}{2}, & x \in [L_2, L_3], \end{cases}$$

Il est facile de voir que $q(x)$ est borné : $|q(x)| \leq M$, où $M = \max \left\{ \frac{L_1}{2}, \frac{L_3 - L_2}{2} \right\}$.

On définit les fonctionnelles

$$\mathcal{F}_1(t) = - \int_{\Omega} q(x) u_t \left(l u_x + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x, s) ds \right) dx, \quad \mathcal{F}_2(t) = - \int_{L_1}^{L_2} q(x) v_x v_t dx,$$

alors nous avons les résultats suivants.

Lemme 3.3.3. *Les fonctionnelles $\mathcal{F}_1(t)$ et $\mathcal{F}_2(t)$ satisfont*

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \mathcal{F}_1(t) \\
 & \leq \left(\frac{l + g_0}{2} + \varepsilon_1 M^2 \right) \int_{\Omega} u_t^2 \, dx + (l^2 + l^2 \varepsilon_1) \int_{\Omega} u_x^2 \, dx \\
 & \quad + \frac{M^2 \mu^2}{4\varepsilon_1} \int_{\Omega} z^2(x, 1, t) \, dx + (g_0 + g_0 \varepsilon_1) \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g(s) \left| \eta_x^t(x, s) \right|^2 \, ds \, dx \\
 & \quad - \frac{g(0)}{4\varepsilon_1} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g'(s) \left| \eta_x^t(x, s) \right|^2 \, ds \, dx - \left[\frac{l + g_0}{2} q(x) u_t^2 \right]_{\partial\Omega} \\
 & \quad - \left[\frac{q(x)}{2} \left(l u_x(x, t) + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x, s) \, ds \right)^2 \right]_{\partial\Omega}
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

et

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \mathcal{F}_2(t) & \leq - \frac{L_1 + L_3 - L_2}{4(L_2 - L_1)} \left(\int_{L_1}^{L_2} v_t^2 \, dx + \int_{L_1}^{L_2} b v_x^2 \, dx \right) + \frac{L_1}{4} v_t^2(L_1) \\
 & \quad + \frac{L_3 - L_2}{4} v_t^2(L_2) + \frac{b}{4} \left((L_3 - L_2) v_x^2(L_2, t) + L_1 v_x^2(L_1, t) \right).
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Démonstration. En prenant la dérivée de $\mathcal{F}_1(t)$ par rapport à t et en utilisant (3.13),

on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \mathcal{F}_1(t) & = - \int_{\Omega} q(x) u_{tt} \left(l u_x + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x, s) \, ds \right) \, dx \\
 & \quad - \int_{\Omega} q(x) u_t \left(l u_{xt} + \int_0^{\infty} g(s) \eta_{xt}^t(x, s) \, ds \right) \, dx \\
 & = - \int_{\Omega} q(x) \left(l u_{xx} + \int_0^{\infty} g(s) \eta_{xx}^t(x, s) \, ds - \mu z(x, 1, t) \right) \left(l u_x + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x, s) \, ds \right) \, dx \\
 & \quad - \int_{\Omega} q(x) u_t \left(l u_{xt} + \int_0^{\infty} g(s) \eta_{xt}^t(x, s) \, ds \right) \, dx \\
 & = - \int_{\Omega} q(x) \left(l u_{xx} + \int_0^{\infty} g(s) \eta_{xx}^t(x, s) \, ds \right) \left(l u_x + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x, s) \, ds \right) \, dx \\
 & \quad + \mu \int_{\Omega} q(x) z(x, 1, t) \left(l u_x + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x, s) \, ds \right) \, dx \\
 & \quad - \int_{\Omega} q(x) u_t \left(l u_{xt} + \int_0^{\infty} g(s) \eta_{xt}^t(x, s) \, ds \right) \, dx.
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Nous faisons attention à :

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} q(x) \left(l u_{xx} + \int_0^{\infty} g(s) \eta_{xx}^t(x, s) \, ds \right) \left(l u_x + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x, s) \, ds \right) \, dx \\
 & = - \left[\frac{q(x)}{2} \left(l u_x + \int_0^{\infty} g(s) \eta_{xx}^t(x, s) \, ds \right)^2 \right]_{\partial\Omega} \\
 & \quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} q'(x) \left(l u_x + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x, s) \, ds \right)^2 \, dx.
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Le dernier terme de (3.40) peut être traité comme suit

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} q(x) u_t \left(l u_{xt} + \int_0^{\infty} g(s) \eta_{xt}^t(x, s) ds \right) dx \\
 & = -l \int_{\Omega} q(x) u_t u_{xt} dx - \int_{\Omega} q(x) u_t \int_0^{\infty} g(s) \eta_{xt}^t(x, s) ds dx \\
 & = \left[-\frac{l}{2} q(x) u_t^2 \right]_{\partial\Omega} + \frac{l}{2} \int_{\Omega} q'(x) u_t^2(x, s) dx - \int_{\Omega} q(x) u_t \int_0^{\infty} g(s) (u_t - \eta_s^t)_x ds dx \\
 & = \left[-\frac{l}{2} q(x) u_t^2 \right]_{\partial\Omega} + \frac{l}{2} \int_{\Omega} q'(x) u_t^2(x, s) dx - \int_{\Omega} q(x) u_t \int_0^{\infty} g(s) u_{tx}(x, s) ds dx \\
 & \quad + \int_{\Omega} q(x) u_t \int_0^{\infty} g(s) \eta_{sx}^t(x, s) ds dx \\
 & = \left[-\frac{l}{2} q(x) u_t^2 \right]_{\partial\Omega} + \frac{l}{2} \int_{\Omega} q'(x) u_t^2(x, s) dx - g_0 \int_{\Omega} q(x) u_t u_{tx}(x, s) ds dx \\
 & \quad + \int_{\Omega} q(x) u_t \int_0^{\infty} g(s) \eta_{sx}^t(x, s) ds dx \\
 & = \left[-\frac{l}{2} q(x) u_t^2 \right]_{\partial\Omega} + \frac{l}{2} \int_{\Omega} q'(x) u_t^2(x, s) dx - \left[\frac{g_0}{2} q(x) u_t^2 \right]_{\partial\Omega} + \frac{g_0}{2} \int_{\Omega} q'(x) u_t^2 dx \\
 & \quad + \left[\int_{\Omega} q(x) u_t g(s) \eta_x^t(x, s) dx \right]_0^{\infty} - \int_{\Omega} q(x) u_t \int_0^{\infty} g'(s) \eta_x^t(x, s) ds dx \\
 & = \left[-\frac{l+g_0}{2} q(x) u_t^2 \right]_{\partial\Omega} + \frac{l+g_0}{2} \int_{\Omega} q'(x) u_t^2 dx - \int_{\Omega} q(x) u_t \int_0^{\infty} g'(s) \eta_x^t(x, s) ds dx,
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

où nous l'avons utilisé

$$\left[\int_{\Omega} q(x) u_t g(s) \eta_x^t(x, s) dx \right]_0^{\infty} = 0.$$

En insérant (3.41) et (3.42) dans (3.40), on arrive à

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \mathcal{F}_1(t) \\
 & = - \left[\frac{q(x)}{2} \left(l u_x + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x, s) ds \right)^2 \right]_{\partial\Omega} - \left[\frac{l+g_0}{2} q(x) u_t^2 \right]_{\partial\Omega} \\
 & \quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} q'(x) \left(l u_x + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x, s) ds \right)^2 dx \\
 & \quad + \mu \int_{\Omega} q(x) z(x, 1, t) \left(l u_x + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x, s) ds \right) dx \\
 & \quad + \frac{l+g_0}{2} \int_{\Omega} q'(x) u_t^2 dx - \int_{\Omega} q(x) u_t \int_0^{\infty} g'(s) \eta_x^t ds dx.
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

En utilisant les inégalités de Minkowski et Young, nous avons

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(l u_x + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x, s) ds \right)^2 dx \\
 & \leq l^2 \int_{\Omega} u_x^2 dx + \int_{\Omega} \int_0^{\infty} \left(g(s) \eta_x^t(x, s) ds \right)^2 dx \\
 & \leq l^2 \int_{\Omega} u_x^2 dx + g_0 \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g(s) \left| \eta_x^t(x, s) \right|^2 ds dx.
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

L'inégalité de Young nous donne que pour tout $\varepsilon_1 > 0$,

$$\begin{aligned}
 & \left| \mu \int_{\Omega} q(x) z(x, 1, t) \left(l u_x + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x, s) ds \right) dx \right| \\
 & \leq \frac{\mu^2}{4\varepsilon_1} \int_{\Omega} (q(x) z(x, 1, t))^2 dx + \varepsilon_1 \int_{\Omega} \left(l u_x + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x, s) ds \right)^2 dx \\
 & \leq \frac{M^2 \mu^2}{4\varepsilon_1} \int_{\Omega} z^2(x, 1, t) dx + l^2 \varepsilon_1 \int_{\Omega} u_x^2(x, t) dx \\
 & \quad + g_0 \varepsilon_1 \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g(s) \left| \eta_x^t(x, s) \right|^2 ds dx.
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Il est clair que

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\Omega} q(x) u_t \int_0^{\infty} g'(s) \eta_x^t ds dx \right| \\
 & \leq \varepsilon_1 \int_{\Omega} |q(x) u_t|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon_1} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} \left(g'(s) \left| \eta_x^t(x, s) \right| \right)^2 dx \\
 & \leq \varepsilon_1 M^2 \int_{\Omega} u_t^2 dx - \frac{g(0)}{4\varepsilon_1} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g'(s) \left| \eta_x^t(x, s) \right|^2 ds dx.
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

En insérant (3.44) – (3.46) dans (3.43), on obtient (3.38).

Par la même méthode, en prenant la dérivée de $\mathcal{F}_2(t)$ par rapport à t , on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \mathcal{F}_2(t) &= - \int_{L_1}^{L_2} q(x) v_{xt} v_t \, dx - \int_{L_1}^{L_2} q(x) v_x v_{tt} \, dx \\
 &= \left[-\frac{1}{2} q(x) v_t^2 \right]_{L_1}^{L_2} + \frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_2} q'(x) v_t^2 \, dx - \int_{L_1}^{L_2} q(x) b v_x v_{xx} \, dx \\
 &= \left[-\frac{1}{2} q(x) v_t^2 \right]_{L_1}^{L_2} + \frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_2} q'(x) v_t^2 \, dx + \left[-\frac{b}{2} q(x) v_x^2 \right]_{L_1}^{L_2} + \frac{b}{2} \int_{L_1}^{L_2} q'(x) v_x^2 \, dx \\
 &= \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{L_1}{2} - \frac{L_1 + L_3 - L_2}{2(L_2 - L_1)} (x - L_1) \right) v_t^2 \right]_{L_1}^{L_2} + \frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_2} -\frac{L_1 + L_3 - L_2}{2(L_2 - L_1)} v_t^2 \, dx \\
 &\quad + \left[-\frac{b}{2} \left(\frac{L_1}{2} - \frac{L_1 + L_3 - L_2}{2(L_2 - L_1)} (x - L_1) \right) v_x^2 \right]_{L_1}^{L_2} + \frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_2} -\frac{L_1 + L_3 - L_2}{2(L_2 - L_1)} b v_x^2 \, dx \\
 &\leq -\frac{L_1 + L_3 - L_2}{4(L_2 - L_1)} \left(\int_{L_1}^{L_2} v_t^2 \, dx + \int_{L_1}^{L_2} b v_x^2 \, dx \right) + \frac{L_1}{4} v_t^2(L_1) \\
 &\quad + \frac{L_3 - L_2}{4} v_t^2(L_2) + \frac{b}{4} \left((L_3 - L_2) v_x^2(L_2, t) + L_1 v_x^2(L_1, t) \right).
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

□

On définit la fonctionnelle

$$\mathcal{F}_3(t) = \tau \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-\tau \rho} z^2(x, \rho, t) \, d\rho \, dx,$$

alors nous avons le lemme suivante.

Lemme 3.3.4. *La fonctionnelle $\mathcal{F}_3(t)$ satisfait*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}_3(t) \leq -c_2 \left(\int_{\Omega} z^2(x, 1, t) \, dx + \tau \int_{\Omega} \int_0^1 z^2(x, \rho, t) \, d\rho \, dx \right) + \int_{\Omega} u_t^2(x, t) \, dx.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \mathcal{F}_3(t) &= \frac{d}{dt} \left(\tau \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-\tau\rho} z^2(x, \rho, t) d\rho dx \right) \\
 &= 2\tau \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-\tau\rho} z_t(x, \rho, t) z(x, \rho, t) d\rho dx \\
 &= -2 \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-\tau\rho} z_{\rho}(x, \rho, t) z(x, \rho, t) d\rho dx \\
 &= - \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-\tau\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (z^2(x, \rho, t)) d\rho dx \\
 &= - \int_{\Omega} [e^{-\tau\rho} z^2(x, \rho, t)]_0^1 dx - \tau \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-\tau\rho} z^2(x, \rho, t) d\rho dx \\
 &= -\tau \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-\tau\rho} z^2(x, \rho, t) d\rho dx - \int_{\Omega} [e^{-\tau} z^2(x, 1, t) - z^2(x, 0, t)] dx \\
 &= -\tau \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-\tau\rho} z^2(x, \rho, t) - \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx - e^{-\tau} \int_{\Omega} z^2(x, 1, t) dx \\
 &\leq -e^{-\tau} \left(\tau \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-\tau\rho} z^2(x, \rho, t) d\rho dx + \int_{\Omega} z^2(x, 1, t) dx \right) + \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx
 \end{aligned}$$

on pose que $e^{-\tau} = c_2$, alors

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}_3(t) \leq -c_2 \left(\int_{\Omega} z^2(x, 1, t) dx + \tau \int_{\Omega} \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx \right) + \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx.$$

□

On définit la fonctionnelle

$$\mathcal{F}_4(t) = - \int_{\Omega} u_t \int_0^{\infty} g(s) (u(t) - u(t-s)) ds dx,$$

alors nous avons l'estimation suivante.

Lemme 3.3.5. *La fonctionnelle $\mathcal{F}_4(t)$ satisfait*

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \mathcal{F}_4(t) &\leq - (g_0 - \delta_2) \int_{\Omega} u_t^2 dx + \delta_2 l^2 \int_{\Omega} u_x^2 dx + \delta_2 \mu \int_{\Omega} z^2(x, 1, t) dx \\
 &\quad + \left(g_0 + \frac{g_0}{4\delta_2} + \frac{\mu g_0 L^2}{2\delta_2} \right) \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g(s) |\eta_x^t(x, s)|^2 ds dx \\
 &\quad - \frac{g(0)L^2}{\delta_2} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g'(s) |\eta_x^t(x, s)|^2 ds dx
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Démonstration. En prenant la dérivée de $\mathcal{F}_4(t)$ par rapport à t et en utilisant (3.13),

on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \mathcal{F}_4(t) &= \frac{d}{dt} \left(- \int_{\Omega} u_t \int_0^{\infty} g(s)(u(t) - u(t-s)) ds dx \right) \\
 &= - \int_{\Omega} u_{tt} \int_0^{\infty} g(s)(u(t) - u(t-s)) ds dx - \int_{\Omega} u_t \int_0^{\infty} g(s)(u_t(t) - u_t(t-s)) ds dx \\
 &= - \int_{\Omega} \left(l u_{xx} + \int_0^{\infty} g(s) \eta_{xx}^t(x, s) ds - \mu z(x, 1, t) \right) \\
 &\quad \times \int_0^{\infty} g(s)(u(t) - u(t-s)) ds dx - \int_{\Omega} u_t \int_0^{\infty} g(s)(u_t(t) - u_t(t-s)) ds dx \\
 &= \int_{\Omega} l u_x \int_0^{\infty} g(s)(u_x(t) - u_x(t-s)) ds dx - g_0 \int_{\Omega} u_t^2 dx \\
 &\quad + \int_{\Omega} u_t \int_0^{\infty} g(s) \eta_s^t ds dx + \int_{\Omega} \left(\int_0^{\infty} g(s)(u_x(t) - u_x(t-s)) ds \right)^2 dx \\
 &\quad + \int_{\Omega} \mu z(x, 1, t) \int_0^{\infty} g(s)(u(t) - u(t-s)) ds dx.
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

En utilisant l'inégalité de Young et (3.35), on obtient pour tout $\delta_2 > 0$,

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} l u_x \int_0^{\infty} g(s)(u_x(t) - u_x(t-s)) ds dx \\
 &\leq \delta_2 l^2 \int_{\Omega} u_x^2 dx + \frac{1}{4\delta_2} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} \left(g(s) \eta_x^t(x, s) \right)^2 ds dx \\
 &\leq \delta_2 l^2 \int_{\Omega} u_x^2 dx + \frac{g_0}{4\delta_2} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g(s) \left| \eta_x^t(x, s) \right|^2 ds dx,
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} \mu z(x, 1, t) \int_0^{\infty} g(s)(u(t) - u(t-s)) ds dx \\
 &\leq \delta_2 \mu \int_{\Omega} z^2(x, 1, t) dx + \frac{\mu}{4\delta_2} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} \left(g(s) \eta_x^t(x, s) \right)^2 ds dx \\
 &\leq \delta_2 \mu \int_{\Omega} z^2(x, 1, t) dx + \frac{\mu g_0 L^2}{4\delta_2} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g(s) \left| \eta_x^t(x, s) \right|^2 ds dx.
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Nous remarquons que

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} \left(\int_0^{\infty} g(s)(u_x(t) - u_x(t-s)) ds \right)^2 dx \\
 &= \int_{\Omega} \left(\int_0^{\infty} \sqrt{g(s)} \sqrt{g(s)} (u_x(t) - u_x(t-s)) ds \right)^2 dx \\
 &\leq \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g(s) ds \left(\int_0^{\infty} g(s) \left| \eta_x^t(x, s) \right|^2 ds \right) dx \\
 &\leq g_0 \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g(s) \left| \eta_x^t(x, s) \right|^2 ds dx,
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

et

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} u_t \int_0^{\infty} g(s) \eta_s^t(s) ds dx &= - \int_{\Omega} u_t \int_0^{\infty} g'(s) \eta^t(s) ds dx \\
 &\leq \delta_2 \int_{\Omega} u_t^2 dx - \frac{1}{4\delta_2} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} \left(g'(s) \eta_x^t(x, s) \right)^2 ds dx \quad (3.53) \\
 &\leq \delta_2 \int_{\Omega} u_t^2 dx - \frac{g(0)L^2}{4\delta_2} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g'(s) \left| \eta_x^t(x, s) \right|^2 ds dx.
 \end{aligned}$$

En insérant les estimations (3.51) – (3.52) dans (3.48), on obtient

$$\begin{aligned}
 &\frac{d}{dt} \mathcal{F}_4(t) \\
 &= - \int_{\Omega} \left(l u_{xx} + \int_0^{\infty} g(s) \eta_{xx}^t(x, s) ds - \mu z(x, 1, t) \right) \\
 &\quad \times \int_0^{\infty} g(s) (u(t) - u(t-s)) ds dx - \int_{\Omega} u_t \int_0^{\infty} g(s) \\
 &= \int_{\Omega} l u_x \int_0^{\infty} g(s) (u_x(t) - u_x(t-s)) ds dx - g_0 \int_{\Omega} u_t^2 \\
 &\quad + \int_{\Omega} u_t \int_0^{\infty} g(s) \eta_s^t(s) ds dx + \int_{\Omega} \left(\int_0^{\infty} g(s) (u_x(t) \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\Omega} \mu z(x, 1, t) \int_0^{\infty} g(s) (u(t) - u(t-s)) ds dx. \right. \quad (3.54)
 \end{aligned}$$

□

Preuve de théorème (3.3.1)

On définit la fonctionnelle de Lyapunov

$$\mathcal{L}(t) = N_1 E(t) + N_2 \mathcal{D}(t) + \mathcal{F}_1(t) + N_4 \mathcal{F}_2(t) + N_5 \mathcal{F}_3(t) + N_6 \mathcal{F}_4(t), \quad (3.55)$$

où N_1, N_2, N_4, N_5 et N_6 sont des constantes positives qui seront fixées plus tard.

En prenant la dérivée de (3.55) par rapport à t et en tirant parti des lemmes ci-

dessus, on a

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) &= \frac{d}{dt} (N_1 E(t)) + \frac{d}{dt} (N_2 \mathcal{D}(t)) + \frac{d}{dt} \mathcal{F}_1(t) + \frac{d}{dt} N_4 \mathcal{F}_2(t) + \frac{d}{dt} N_5 \mathcal{F}_3(t) + \frac{d}{dt} N_6 \mathcal{F}_4(t) \\
 &\leq N_1 \left(\mu \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g'(s) |\eta_x^t(x, s)|^2 ds dx \right) \\
 &\quad + N_2 \left(\int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} v_t^2 dx + (L^2 \varepsilon + \varepsilon - l) \int_{\Omega} u_x^2 dx - \int_{L_1}^{L_2} b v_x^2 dx \right) \\
 &\quad + \frac{g_0}{4\varepsilon} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g(s) |\eta_x^t(x, s)|^2 ds dx + \frac{\mu^2}{4\varepsilon} \int_{\Omega} z^2(x, 1, t) dx \\
 &\quad + \left(\frac{l + g_0}{2} + \varepsilon_1 M^2 \right) \int_{\Omega} u_t^2 dx + (l^2 + l^2 \varepsilon_1) \int_{\Omega} u_x^2 dx \\
 &\quad + \frac{M^2 \mu^2}{4\varepsilon_1} \int_{\Omega} z^2(x, 1, t) dx + (g_0 + g_0 \varepsilon_1) \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g(s) |\eta_x^t(x, s)|^2 ds dx \\
 &\quad - \frac{g(0)}{4\varepsilon_1} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g'(s) |\eta_x^t(x, s)|^2 ds dx - \left[\frac{l + g_0}{2} q(x) u_t^2 \right]_{\partial\Omega} \\
 &\quad - \left[\frac{q(x)}{2} \left(l u_x(x, t) + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x, s) ds \right)^2 \right]_{\partial\Omega} \\
 &\quad + N_4 \left(-\frac{L_1 + L_3 - L_2}{4(L_2 - L_1)} \left(\int_{L_1}^{L_2} v_t^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} b v_x^2 dx \right) + \frac{L_1}{4} v_t^2(L_1) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{L_3 - L_2}{4} v_t^2(L_2) + \frac{b}{4} \left((L_3 - L_2) v_x^2(L_2, t) + L_1 v_x^2(L_1, t) \right) \right) \\
 &\quad + N_5 \left(-c_2 \left(\int_{\Omega} z^2(x, 1, t) dx + \tau \int_{\Omega} \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx \right) + \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx \right) \\
 &\quad + N_6 \left(-(g_0 - \delta_2) \int_{\Omega} u_t^2 dx + \delta_2 l^2 \int_{\Omega} u_x^2 dx + \delta_2 \mu \int_{\Omega} z^2(x, 1, t) dx \right. \\
 &\quad \left. + \left(g_0 + \frac{g_0}{4\delta_2} + \frac{\mu g_0 L^2}{2\delta_2} \right) \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g(s) |\eta_x^t(x, s)|^2 ds dx \right. \\
 &\quad \left. - \frac{g(0)L^2}{\delta_2} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g'(s) |\eta_x^t(x, s)|^2 ds dx \right),
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq & - \left\{ N_6 (g_0 - \delta_2) - N_2 - \left(\frac{l + g_0}{2} + \varepsilon_1 M^2 \right) \right. \\
 & - N_5 - N_{1\mu} \left. \right\} \int_{\Omega} u_t^2 dx \\
 & - \left\{ N_5 c_2 - \frac{N_{2\mu}^2}{4\varepsilon} - \frac{M^2 \mu^2}{4\varepsilon_1} - N_{6\delta} \delta_2 \mu \right\} \int_{\Omega} z^2(x, 1, t) dx \\
 & - \left\{ N_2 (l - L^2 \varepsilon - \varepsilon) - (l^2 + l^2 e_1) - N_6 \delta_2 l^2 \right\} \int_{\Omega} u_z^2 dx \\
 & - \left\{ \frac{b(L_1 + L_3 - L_2)}{4(L_2 - L_1)} N_4 + N_2 b \right\} \int_{L_1}^{L_2} v_x^2 dx \\
 & - \left\{ \frac{L_1 + L_3 - L_2}{4(L_2 - L_1)} N_4 - N_2 \right\} \int_{L_1}^{L_2} v_t^2 dx \\
 & - (b - N_4) \frac{b}{4} \left((L_3 - L_2) v_x^2(L_2, t) + L_1 v_x^2(L_1, t) \right) \\
 & - (a - N_4) \left[\frac{L_1}{4} v_t^2(L_1, t) + \frac{L_3 - L_2}{4} v_t^2(L_2, t) \right] \\
 & + c(N_2, N_6) \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g(s) \left| \eta_z^t(x, s) \right|^2 ds dx \\
 & + \left(\frac{N_1}{2} - \frac{g(0)}{4\varepsilon_1} - \frac{N_6 g(0) L^2}{4\delta_2} \right) \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g'(s) \left| \eta_x^2(x, s) \right|^2 ds dx.
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

A ce moment, nous souhaitons que tous les coefficients sauf les deux derniers de (3.56) soient négatifs. Nous voulons choisir N_2 et N_4 pour être sur de

$$\begin{aligned}
 a - N_4 & \geq 0, & b - N_4 & \geq 0, \\
 \frac{L_1 + L_3 - L_2}{4(L_2 - L_1)} N_4 - N_2 & > 0.
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

A cet effet, puisque $\frac{8l(L_2 - L_1)}{L_1 + L_3 - L_2} < \min\{a, b\}$ nous choisissons d'abord N_4 satisfaisant

$$\frac{8l(L_2 - L_1)}{L_1 + L_3 - L_2} < N_4 \leq \min\{a, b\} \tag{3.59}$$

Une fois N_4 fixé, nous choisissons N_2 satisfaisant

$$2l < N_2 < \frac{L_1 + L_3 - L_2}{4(L_2 - L_1)} N_4. \tag{3.60}$$

Alors on prend $\varepsilon, \varepsilon_1$ et ε_1 assez petits, et $\delta_2 < \frac{1}{2N_6}$ on a

$$N_2 (l - L^2 \varepsilon - \varepsilon) - 2l^2 \varepsilon_1 > \frac{3}{2} l^2. \tag{3.61}$$

Une fois ε et ε_1 fixés, on prend N_5 satisfaisant

$$N_5 > \max \left\{ \frac{2N_2 \mu^2}{\varepsilon c_2}, \frac{2M^2 \mu^2}{\varepsilon_1 c_2} \right\} \tag{3.62}$$

et $\delta_2 < \frac{N_5 c_2}{8N_6 \mu}$ tel que

$$N_5 c_2 - \frac{N_2 \mu^2}{4\varepsilon} - \frac{M^2 \mu^2}{4\varepsilon_1} > \frac{3}{8} N_5 c_2. \quad (3.63)$$

De plus, nous prenons $\delta_2 < \frac{g_0}{2}$ nous choisissons N_6 satisfaisant

$$N_6 > \frac{2N_2}{g_0} + \frac{l + g_0}{g_0} + \frac{2\varepsilon_1 M^2}{g_0} + \frac{2N_5}{g_0} + \frac{2N_1 \mu}{g_0}. \quad (3.64)$$

Ensuite nous avons

$$N_6 > \max \left\{ \frac{2N_2}{g_0}, \frac{l + g_0}{g_0} + \frac{2\varepsilon_1 M^2}{g_0}, \frac{2N_5}{g_0}, \frac{2N_1 \mu}{g_0} \right\}. \quad (3.65)$$

Ensuite, nous choisissons δ_2 satisfaisant

$$\begin{aligned} \delta_2 < \min \left\{ \frac{g_0}{\omega}, \frac{N_5 c_2}{0}, \frac{1}{\sigma^T} \right\}, \\ \left\{ N_5 c_2 - \frac{N_2 \mu^2}{4\varepsilon} - \frac{M^2 \mu^2}{4\varepsilon_1} - N_6 \delta_2 \mu \right\} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Une fois que

$$\left\{ N_2 (l - L^2 \varepsilon - \varepsilon) - (l^2 + l^2 \varepsilon_1) - N_6 \delta_2 l^2 \right\} \geq 0. \quad (3.67)$$

Enfin, choisir N_1 suffisamment grand pour que le premier et le dernier coefficient de (3.56) soient positifs.

De ce qui précède, on déduit qu'il existe deux constantes positives α_1 et α_2 telles que (3.56) devient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) &\leq -\alpha_1 E(t) + \alpha_2 \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g(s) \left| \eta_x^t(x, s) \right|^2 ds dx \\ &\leq -\alpha_1 E(t) - \frac{\alpha_2}{\delta} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g'(s) \left| \eta_x^t(x, s) \right|^2 ds dx \\ &\leq -\alpha_1 E(t) - \alpha_3 E'(t). \end{aligned} \quad (3.68)$$

C'est-à-dire

$$(\mathcal{L}(t) + \alpha_3 E(t))' \leq -\alpha_1 E(t) \quad (3.69)$$

où $\alpha_3 > 0$. Notons $\mathcal{E}(t) = \mathcal{L}(t) + \alpha_3 E(t)$ alors il est facile de voir que

$$\mathcal{E}(t) \sim E(t)$$

c'est-à-dire qu'il existe deux constantes positives β_1, β_2

$$\beta_1 E(t) \leq \mathcal{E}(t) \leq \beta_2 E(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.70)$$

En combinant (3.68) et (3.69), on en déduit qu'il existe $\gamma_1 > 0$ pour lequel l'estimation

$$\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} \leq -\gamma_1 \mathcal{E}(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (3.71)$$

puisque

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0)e^{-\gamma_1 t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.72)$$

Par conséquent, en utilisant (3.71) et (3.69), nous trouvons

$$E(t) \leq \frac{1}{\beta_1} \mathcal{E}(t) \leq \frac{1}{\beta_1} \mathcal{E}(0)e^{-\gamma_1 t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.73)$$

Ainsi, la preuve du théorème (3.3.1) est complète.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenter théorème de Hille-Yosida et le théorème de lummer-phillips avec des preuves et aussi quelque applications. Nous étudions le système de transmission suivant avec un historique passé et un terme de retard. Sous hypothèses sur des données initiales et des conditions aux limites, un historique passé et un terme de retard, nous avons focalisé notre étude sur l'existence et comportement asymptotique des solutions où nous avons obtenu une décroissance expenentielle des solutions pour les problèmes de transmission.

Bibliographie

- [1] N. Bahri, A. Beniani. *Exponential stability of a transmission problem with history and delay. Stat., Optim. Inf. Comput., Vol. 7, December 2019, 731–747.*
- [2] A. Benseghir, *Existence and exponential decay of solutions for transmission problems with delay. Electronic Journal of Differential Equations, 212(2014), 1-11.*
- [3] S. Berrimi, S. A. Messaoudi, *Existence and decay of solutions of a viscoelastic equation with a nonlinear source. Nonlinear Anal, 64(2006), no. 10, 2314-2331.*
- [4] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle. (Masson, 1987).*
- [5] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle-theorie et applications Dunod , Paris .,(1999).*
- [6] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, New York .(2010).*
- [7] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. A. Soriano. *Exponential decay for the solution of semilinear viscoelastic wave equations with localized damping. Electron. J. Differential Equations,(2002), no. 44, 14 pp.*
- [8] M. M. Cavalcanti et al. *Existence and uniform decay rates for viscoelastic problems with nonlinear boundary damping. Differential Integral Equations, 14(2001), no. 1, 85-116.*
- [9] T. Cazenave, A. Haraux, *An introduction to semilinear equations. Clarendon press. Oxford, (1998).*

-
- [10] T. Cazenave , F. Haraux , *Introduction aux problèmes d'évolutions sémi - linéaires*, Ellipses, Paris (1990).
- [11] C. M. Dafermos, *Asymptotic stability in viscoelasticity. Archive for rational mechanics and analysis*, 37(4)(1970), 297-308.
- [12] L. Dan Lemle, *Semi-groupes integres d'operateurs, l'unicite des pre-generateurs et applications*, (2007).
- [13] F. Dardalhon, Federico Verga, *Le théorème de Hille-Yosida et ses applications aux problèmes d'évolution semi-linéaires*, juin (2006).
- [14] S. B. Gazi Karakoc. *A Quartic Subdomain Finite Element Method for the Modified KdV Equation. Stat, Optim. Inf. Comput., Vol. 6December (2018), pp 609-618.*
- [15] A. Guesmia. *Well-posedness and exponential stability of an abstract evolution equation with infinite memory and time delay. IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 30(4)(2013), 507-526.
- [16] K. Jochen Engel, Rainer Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Alfred A.Knopf, (1995).
- [17] G. Li, D. Wang, B. Zhu. *Well-posedness and decay of solutions for a transmission problem with history and delay. Electronic Journal of Differential Equations. Vol. 2016(2016), no. 23, pp. 1-21.*
- [18] D. Li, *Cours d'analyse fonctionnelle* , Ellipses, Paris (2013).
- [19] J. L. Lions, E. Magenes , *Problèmes aux limites non homogènes et applications (vol1, 2, 3)*, Dunod, Paris (1968).
- [20] W. J. Liu, K. W. Chen, *Existence and general decay for nondissipative distributed systems with boundary frictional and memory dampings and acoustic boundary conditions. Z. Angew. Math. Phys*, 66(2015), no. 4, 1595-1614.

-
- [21] W. J. Liu, *Arbitrary rate of decay for a viscoelastic equation with acoustic boundary conditions. Appl. Math. Lett*, 38(2014), 155-161.
- [22] W. J. Liu, Y. Sun. *General decay of solutions for a weak viscoelastic equation with acoustic boundary conditions, Z. Angew. Math. Phys*, 65(2014), no. 1, 125-134.
- [23] A. Marzocchi, J. E. Muñoz Rivera, M. G. Naso, *Asymptotic behaviour and exponential stability for a transmission problem in thermoelasticity. Math. Methods Appl. Sci*, (2002), no. 11, 955-980.
- [24] S. A. Messaoudi, A. Fareh et N. Doudi, *Well posedness and exponential stability in a wave equation with a strong damping and a strong delay. Journal of Mathematical Physics*, vol. 57, no 11, p. 111501(2016).
- [25] S. A. Messaoudi, *General decay of solutions of a viscoelastic equation. J. Math. Anal. Appl*, 341(2008), 1457-1467.
- [26] S. Nicaise, C. Pignotti, *Stability and instability results of the wave equation with a delay*, 45(2006), no.5, 1561-1585.
- [27] D. Ouchenane, *A stability result of the Timoshenko system in thermoelasticity of second sound with a delay term in the internal feedback, G. Math. J.*, 21(4) : 475 – 489, (2014).
- [28] A. Pazy. *Semi-groups of linear operators and applications to partial differential equations. Springer New York* 198(1983).
- [29] J. Pierre Raymond. *Équations d'évolution. Résumé de la première partie du cours du module A0 du DEA de Mathématiques Appliquées. Université Paul Sabatier.*
- [30] C. Pignotti, *A note on stabilization of locally damped wave equations with time delay*, (2011).
- [31] S. Salsa, *Partial, Differential Equation in Action, Springer, Milano* (2008).

- [32] *F.Tahamtani, A.Peyravi. Asymptotic behavior and blow-up of solutions for a nonlinear viscoelastic wave equation with boundary dissipation. Taiwanese J. Math, 17(2013), no. 6, 1921-1943.*
- [33] *O.P. Yadav et R. Jiwari. Finite element analysis and approximation of Burgers-Fisher equation. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 33(5), 1652-1677(2017).*