



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Amar Thelidji- Laghouat

FACULTE :Génie civil et d'architecture

DEPARTEMENT : Génie civil

MEMOIRE DE MASTER

DOMAINE :Sciences et Technologies

FILIERE : Génie civil

OPTION : Structures

Présenté par :

NIA NAIMA

TERBAGOU OUMELKIR

Thème

**EFFET THERMIQUE SUR LE COMPORTEMENT DES
POUTRES EN BÉTON ARMÉ DE BARRES EN PRFV
CHEVAUCHEES SOUS BASSES TEMPÉRATURES**

Jury de soutenance :

Nom et Prénom	Grade	qualité
Mr. AMARA .S	M.C.A	Président
Mr. TADJ Walid	M.A.A	Examineur
Mr. ZAIDI Ali	Pr	Rapporteur
M ^{elle} . BELLAKEHAL. H	M.C.A	Co-rapporteur

Année Universitaire : 2018/2019

REMERCIEMENTS

Pour votre aide consistante que nous avons senti dans chaque pas dans ce travail, pour tout ce que vous donné ; DIEU, nous vous remercions infiniment.

Nous tenons à remercier en premier lieu notre promoteur Dr ZAIDI Ali Professeur au département de génie civil, université Amar Telidji de Laghouat et notre Co- encadreur de mémoire, Dr BELLAKEHAL Hizia, Maître de conférences au département de génie civil pour leur suivi et leur encadrement devant la préparation de ce mémoire de master, et dont la gentillesse et la bonne humeur n'ont rendu que plus profitable le partage de leur immense savoir scientifique.

Et sans oublier également tous nos Professeurs au département de génie civil et les membres de jury qui nous ont fait l'honneur de juger ce travail.

Nous remercions aussi el hadef zahra qui nous a aider pour ce travail.

Nous n'oublions pas de remercier nos parents, nos frères, nos sœurs et nos familles, qu'ils trouvent ici l'expression des nous profonde gratitude pour leur soutien et leurs encouragements.

Et tous ceux qui, de près ou de loin, nous ont soutenus pendant notre formation .

Dédicace:

*Rien n'est aussi beau à offrir que le fruit d'un labeur qu'on dédie
Du fond du cœur à ceux qu'on aime et qu'on remercie en exprimant
La gratitude et la reconnaissance durant toute notre existence.*

Je dédie ce modeste travail :

A ceux que j'aime jusqu'à la frontière de l'imagination :

*Ma mère, mon père, deradji, dehiba, abd elmalek, rima, je n'aurais pas
abouti à*

*Ce stade d'étude, que dieu Puisse m'aider à les honorer, Les servir et
Les Combler.*

A mon mari abd el kader et À mon précieux fils abd el malik,

À mes frères

A tous mes amis,

A tous mes enseignants.

N.Naima

Dédicace:

*Rien n'est aussi beau à offrir que le fruit d'un labeur qu'on dédie
Du fond du cœur à ceux qu'on aime et qu'on remercie en exprimant
La gratitude et la reconnaissance durant toute notre existence.*

Je dédie ce modeste travail :

A ceux que j'aime jusqu'à la frontière de l'imagination :

*Ma mère, mon père, sans eux, je n'aurais pas abouti à
Ce stade d'étude, que dieu Puisse m'aider à les honorer, Les servir et
Les Combler.*

A ma famille et mes proches

*Ames frères abdallah , mohamed amin, Ahmed, amani , Azeddine ,
Karim*

A tous mes amis,

A tous mes enseignants.

O.TERBAGOU

ملخص

الكثير من هياكل الخرسانة المسلحة تضعف بسبب تآكل القضبان الفولاذية و هذا ما يستدعي إصلاحات قد تكلف ملايين الدينارات. ولكن جل البحوث التي أجريت تهدف لاستبدال هذه القضبان الفولاذية بمادة مقاومة للتآكل ، كالمواد المركبة من البوليمير المدعم بالألياف (PRF) ، هذه الأخيرة تتميز بمقاومة عالية للتآكل ، خفيفة ، مدة حياة أطول وسهولة الاستعمال . غير أن عدم التكافؤ الحراري العرضي بين الخرسانة وقضبان البوليمير (PRF) قد تسبب تشققات الشد عند التعرض لدرجة حرارة منخفضة، وهذا من المحتمل أن يؤدي إلى تصدع كلي للخرسانة المحيطة بالقضبان.

وهذه الدراسة تظهر بعض الآثار الناجمة عن نقصان درجة الحرارة في الخرسانة المدعمة بقضبان PRF و لهذا استخدمنا التحليل الغير خطي للظواهر الفيزيائية البرنامج (ADINA) المعتمد على العناصر المحددة لإجراء هذا البحث حول التأثير الحراري المنخفض على قضبان PRF المترددة في الخرسانة وهذه الدراسة تتمثل في دراسة الإجهاد و التشققات التي تحدث في الخرسانة وكذلك بتقدير التغير في درجة الحرارة الذي ينجم عنه بداية التشقق (ΔT_{cr}) .

الكلمات الرئيسية: درجة الحرارة المنخفضة، القضبان ، بوليمير مدعم بالألياف PRF ، التشوهات ، الإجهاد ، الغطاء الخرساني ، ترادف القضبان ، التشقق

RÉSUMÉ

Plusieurs structures en béton armé déficientes en raison de la corrosion de l'armature en acier, nécessitent des réparations dont le coût peut être estimé à des milliards de dinars. De nombreuses recherches ont été réalisées afin substituer l'acier par un matériau résistant à la corrosion tel les matériaux composites de polymères renforcés de fibres (PRF). Ces matériaux composites se caractérisent par une grande immunité contre la corrosion, légers et de haute résistance, une longue durée de vie et une mise en place aisée. Néanmoins, l'incompatibilité thermique transversale entre le béton et les barres d'armatures en PRF peut engendrer des fissures de traction dans le béton sous basse température.

Pour cela , nous avons utilisé le logiciel d'analyse non linéaire des phénomènes physiques (ADINA) basé sur la méthode des éléments finis afin d'effectuer une étude du comportement thermique de l'effet de chevauchement vertical de deux barres en PRFV ancrées dans le béton sur les déformations transversales et les contraintes radiales des poutres prismatiques en béton armé sous basses températures. Ces déformations et contraintes permettent d'évaluer la variation de température (ΔT_{cr}) produisant la première fissure dans le béton à l'interface armature/béton et à l'interface des deux barres/béton en fonction du rapport d'épaisseur d'enrobage du béton au diamètre de la barre en PRF (c/d_b).

Mots clés : Basses Températures, barres, PRF, déformations, contraintes, enrobage de béton, chevauchement, fissuration.

Abstract

Several deficient structures in reinforced concrete due to corrosion of the steel reinforcement need repairs whose cost can be estimated to billions of dinars. Lot of research was carried out to substitute the steel by a material resistant to corrosion such as fibres reinforced polymer (FRP) composites. These composite materials are characterized by high immunity to corrosion, lightweight and high strength, long service life and easy installation. Nevertheless, the transverse thermal incompatibility between concrete and FRP reinforcing bars can cause tensile cracks in concrete at low temperatures.

For this reason, we used the nonlinear physical phenomena analysis software (ADINA) based on the finite element method to perform a study of the thermal behavior of the vertical overlap effect of two FRP bars anchored in concrete. On the transversal deformations and the tensile radial stresses of the prismatic beams in reinforced concrete under low temperatures. These strains and stresses make it possible to evaluate the temperature variation (ΔT_{cr}) producing the first crack in the concrete at the reinforcement / concrete interface and at the interface of the two bars / concrete as a function of the ratio concrete cover thickness to FRP bar diameter (c / d_b).

Key words: Low temperatures, bars, PRF, strains, stresses, concrete cover, overlap, cracking.

Liste des Figures

Chapitre I

Figure I .1 : Matériau Composite.....	3
Figure I.2 ; Courbes contrainte/déformation des PRF, des fibres et de la matrice.....	4
Figure I.3 : Principaux matériaux de renfort.....	5
Figure I.4 : Eléments composants de la forme linéique	9
Figure I.5 : Eléments composants de la forme surfacique.....	9
Figure I.6 : Eléments composants de la structure multidimensionnelle.....	10
Figure I.7: Principe de la pultrusion	16
Figure I.8 : Armatures en PRF de nom commercial ISOROD.....	17
Figure I.9: Armatures en PRF de commercial C.BAR	17
Figure I.10: Treillis en PRF de nom commercial NEFMAC.....	17
Figure I.11 : Armatures en PRF de nom commercial ROTAFLEX.....	17
Figure I.12 : Armatures en PRF de nom commercial LEADLINE.....	17
Figure I.13 : Effet de la température sur la résistance en traction de l'armature en PRF	20

Chapitre II

Figure II.1 : Discrétisation d'une structure en nœuds et éléments(dent d'une roue dentée).....	29
Figure II.2 : Rectangle à dimensions incrémentales soumis à la traction suivant les axes x et z et au cisaillement.....	31
Figure II.3 : Présentation de l'élément quadrilatéral à quatre nœuds dans le repère local et global.....	33
Figure II.4 : Élément isoparamétrique à quatre nœuds.....	34

Chapitre III

Figure III .1 : Géométrie de poutre en béton armé de deux barres d'armature en PRF de verre (PRFV).....	50
Figure III .2 : Partie de la section de la poutre considérée dans l'étude numérique.....	53
Figure III .3: Géométrie des éléments et les points considérés.....	53
Figure III .4 : Conditions aux limites.....	54
Figure III .5 : Conditions de chargement.....	55
Figure III .6 : Allure de la courbe contraintes-déformations du béton utilisée dans ADINA.....	55
Figure III .7 : Élément triangulaire de maillage.....	56
Figure III .8 : Maillage des surface de béton et barres en PRFV	56
Figure III .9 : différentes zones de béton considérées.....	57
Figure III .10: Contrainte de traction radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone d'enrobage et la zone inter-barres pour $c/d_b = 3.2$	

(Comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#10.30).....	58
Figure III .11: Contrainte de traction radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone d'enrobage et la zone inter-barres pour $c/d_b = 2$ (Comportement non linéaire de poutre prismatique en béton P.#13.25).....	59
Figure III .12 : Contrainte de traction radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone d'enrobage et la zone inter-barres pour $c/d_b = 1.6$ (Comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#16.25).....	59
Figure III .13 : Contrainte de traction radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone d'enrobage et la zone inter-barres pour $c/d_b = 1.2$ (Comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#25.30).....	60
Figure III .14 : Contrainte de traction radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone d'enrobage et la zone inter-barres pour $c/d_b = 1.0$ (Comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#19.20).....	60
Figure III .15: Formation des premières fissures circonférentielles dans le béton à l'interface armature/béton à la zone inter-barres et la zone d'enrobage à la variation de température ΔT_{cr} (Poutre P.#19.20 ayant $c/d_b = 1$).....	63
Figure III .16: Fissuration de l'enrobage du béton (Poutre P.#19.20 ayant $c/d_b=1,0$; $\Delta T_{sp}=-60^{\circ}\text{C}$) et poutre P # 25.30 ayant $c/d_b = 1,2$; $\Delta T=-45^{\circ}\text{C}$)	64
Figure III .17: Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 3,2$ (Poutre P.#10.30).....	66
Figure III .18: Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 2,0$ (Poutre P.#13.25).....	66
Figure III .19: Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,6$ (Poutre P.#16.25).....	67
Figure III .20: Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,2$ (Poutre P.#25.30).....	67
Figure III .21: Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,0$ (Poutre P.#19.20).....	68
Figure III .22 : Déformations transversales en fonction de la variation de température à la surface externe de l'enrobage de béton pour des valeurs de c/d_b variant de 2à 3,2.....	69
Figure III .23 : Déformations transversales en fonction de la variation de température à la surface externe de l'enrobage de béton pour des valeurs de c/d_b variant de 1à 1,9.....	69

Chapitre IV

Figure IV.1: a) Poutre prismatique en béton armé d'une barre en PRF. b) Contraintes thermiques appliquées à l'élément 1 de la poutre.....	71
Figure IV.2 : les contraintes radiales dans la section d'une Poutre prismatique en béton armé de deux barres en PRF sous basses températures.....	75
Figure IV.3 : Section d'une Poutre prismatique en béton armé de deux barres en PRF.....	76
Figure IV.4 : Première fissure apparue dans le béton au niveau de l'interface barre/béton à la variation de température ΔT_{cr} pour les deux cas (a) et (b).	82
Figure IV.5: Variation de température (ΔT_{cr}) produisant la première fissure circonférentielle dans le béton à l'interface armature/béton des poutres en béton armé de deux barres en PRFV chevauchées en fonction du rapport c/d_b pour un béton de résistance à la traction $f_{ct} = 4,1\text{MPa}$	85
Figure IV.6 : Contraintes de traction radiales en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone extérieure (d'enrobage) pour des valeur de c/d_b variant de 1 à 3,2	86
Figure IV.7 : Contraintes de traction radiales en fonction de la variation de température à l'interface des deux armatures en PRF/béton de la zone intérieure (inter-barres) pour des valeurs de c/d_b variant 1 à 3,2...	86
Figure IV.8: Déformations transversales en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone extérieure (d'enrobage) pour des valeurs de c/d_b variant 1 à 3,2	87
Figure IV.9 : Déformations transversales en fonction de la variation de température à l'interface des deux armatures en PRF/béton de la zone intérieure (inter-barres) pour des valeurs de c/d_b variant 1 à 3,2	87
Figure IV. 10: Déformations transversales en fonction de la variation de température à la surface externe de l'enrobage pour des valeurs de c/d_b variant 1 à 3,2	88

Chapitre V

Figure V.1: Section de la poutre prismatique en spécifiant la surface externe de l'enrobage du béton, l'interface armature en PRF/béton et l'interface des deux barres en PRF/béton dans les zone extérieure et intérieure respectivement.	89
Figure V.2 : Déformations thermiques transversales du béton à l'interface armature/béton de la zone d'enrobage de la poutre P.#10.30 - Comparaison des résultats analytiques et numériques ($c/d_b = 3,2$)	91
Figure V.3 : Déformations thermiques transversales du béton à l'interface des deux barres/béton de la zone d'enrobage de la poutre P.#25,30 - Comparaison des résultats analytiques et numériques ($c/d_b = 1,2$).....	92

Figure V.4 : Déformations thermiques transversales du béton à l'interface des deux barres/béton de la zone d'enrobage de la poutre P.#19,20 - Comparaison des résultats analytiques et numériques ($c/d_b=1,0$)...	92
Figure V.5 : Déformations thermiques transversales du béton à l'interface des deux barres/béton de la zone inter-barres (zone intérieure) de la poutre P.#10,30- Comparaison des résultats analytiques et numériques ($c/d_b=3,2$).....	93
Figure V.6 : Déformations thermiques transversales du béton à l'interface des deux barres/béton de la zone inter-barres (zone intérieure) de la poutre P.#25,30 - Comparaison des résultats analytiques et numériques ($c/d_b = 1,2$).....	93
Figure V.7 : Déformations thermiques transversales du béton à l'interface des deux barres/béton de la zone inter-barres (zone intérieure) de la poutre P.#19,20- Comparaison des résultats analytiques et numériques ($c/d_b=1,0$).....	94
Figure V.8 : Déformations thermiques transversales du béton à la surface externe de l'enrobage de béton de la zone extérieure de la Poutre P.#10,30 - Comparaison des résultats analytiques et numériques ($c/d_b = 3,2$).....	94
Figure V.9 : Déformations thermiques transversales du béton à la surface externe de l'enrobage de béton de la zone extérieure de la Poutre P.#25,30 - Comparaison des résultats analytiques et numériques ($c/d_b = 1,2$).	95
Figure V.10: Déformations thermiques transversales du béton à la surface externe de l'enrobage de béton de la zone extérieure de la Poutre P.#19,20 - Comparaison des résultats analytiques et numériques ($c/d_b = 1,0$).....	95
Figure V.11 : Contrainte de traction du béton à l'interface armature/béton de la zone d'enrobage de la poutre P.#10,30 - Comparaison des résultats analytiques et numériques ($c/d_b =3,2$).....	96
Figure V.12: Contrainte de traction du béton à l'interface armature/béton de la zone d'enrobage de la poutre P.#25,30 - Comparaison des résultats analytiques et numériques ($c/d_b =1,2$).....	97
Figure V.13 Contrainte de traction du béton à l'interface armature/béton de la zone d'enrobage de la poutre P.#19,20 - Comparaison des résultats analytiques et numériques ($c/d_b =1,0$).	97
Figure V.14 Contrainte de traction du béton du béton à l'interface des deux barres/béton de la zone inter-barres (zone intérieure) de la poutre P.#10,30 - Comparaison des résultats analytiques et numériques ($c/d_b = 3,2$).	98
Figure V.15 Contrainte de traction du béton du béton à l'interface des deux barres/béton de la zone inter-barres (zone intérieure) de la poutre P.#25,30 - Comparaison des résultats analytiques et numériques ($c/d_b =1,2$).	98
Figure V.16 Contrainte de traction du béton du béton à l'interface des deux barres/béton de la zone inter-barres de la poutre P.#19,20 - Comparaison des résultats analytiques et numériques($c/d_b = 1,0$).....	99

Liste des Tableaux

Chapitre I

Tableau I.1 : Propriétés mécaniques et physiques des fibres de verre.....	6
Tableau I.2 : Propriétés mécaniques et physiques des fibres de carbone.....	7
Tableau I.3 : Propriétés mécaniques et physiques des fibres d'aramide.....	8
Tableau I .4: Performances comparées de différents types d'architecture de fibres.....	10
Tableau I .5 : Principales différences entre matrices thermoplastique et thermodurcissables ..	12
Tableau I .6 :Caractéristiques moyennes des matrices thermodurcissables non renforcées....	13
Tableau I .7 :Caractéristiques moyennes des matrices thermoplastiques non renforcées.....	14
Tableau I .8 : Synthèse de l'utilisation des résines et renforts non renforcée.....	15
Tableau I .9 : Valeur du coefficient F	24
Tableau I .10 : Résultats des essais de fatigue en traction pour les barres en PRF FiBRA.....	24

Chapitre II

Tableau II .1 Les types d'éléments finis.....	30
---	----

Chapitre III

Tableau III .1 Détails des poutres en béton armé de barres en PRFV.....	49
Tableau III .2 Propriétés mécaniques des barres en PRFV Isorod.....	51
Tableau III .3 Propriétés du béton.....	51
Tableau III .4 Coordonnées des points de la surface considérée (P.#10.20).....	52
Tableau III .5 Variation de température pour chaque incrément du temps.....	54
Tableau III .6 Comparaison entre les différentes zone considérées dans cette étude.....	57
Tableau III .7 (a) les valeur de ΔT_{cr} obtenue par ADINA chaque	61
Tableau III .7 (b) Les valeurs de ΔT_{cr} en fonction de c/d_b pour chaque zone.....	62
Tableau III .8 Variation de température (ΔT_{sp}) produisant la rupture de l'enrobage du béton des poutres en béton armé de deux barres en PRFV chevauchées	65

Chapitre IV

Tableau IV .1 : Variation de température ΔT_{cr} en fonction de c/d_b	84
---	----

Chapitre V

Tableau V .1 : Variation de température ΔT_{cr} en fonction de c/d_b	90
--	----

LISTE DES SYMBOLES

a : rayon de l'armature en PRF;

b : distance mesurée à partir de centre de gravité de la barre en PRFV jusqu'à la surface externe d'enrobage;

c : épaisseur d'enrobage du béton;

d_b : diamètre de la barre d'armature;

E_c : module d'élasticité du béton;

E_l : module d'élasticité de la barre en PRF dans la direction longitudinale;

E_t : module d'élasticité de la barre en PRF dans la direction transversale;

f_{c28} : résistance à la compression du béton;

f_{ct28} : résistance à la traction du béton;

f_{fu} : résistance à la traction ultime de la barre en PRF;

L : longueur des échantillons des poutres prismatiques en béton;

P : Pression radiale exercée par la barre en PRF sur le béton;

r : rapport du rayon de la distance b au rayon de la barre $r = b/a = 2.c/d_b + 1$;

T_g : température de transition vitreuse;

α_c : coefficient d'expansion thermique du béton;

α_l : coefficient d'expansion thermique longitudinal de la barre en PRF;

α_t : coefficient d'expansion thermique transversal de la barre en PRF;

ΔT : variation de température;

ΔT_{cr} : variation de température produisant la première fissure dans le béton à l'interface armature en PRF/béton;

ΔT_{sp} : variation de température produisant la rupture de l'enrobage du béton;

ε_{ft} : déformation circonférentielle de la barre en PRF;

ε_{ct} : déformation circonférentielle dans le béton;

ν_c : coefficient de Poisson du béton;

ν_{lt} : coefficient de Poisson de la barre en PRF dans la direction transversale (le premier indice indique la direction transversale de l'application de la contrainte et le deuxième indice indique la direction transversale dans laquelle on détermine la déformation);

ν_{lt} : coefficient de Poisson de la barre en PRF dans la direction longitudinale.

E.D.P : Équations aux dérivées partielles.

Sommaire

Introduction générale	1
Généralités	1
Objectif de travail.....	1
Organisation du mémoire	2
I. Revue de littérature	
I.1 Introduction	3
I.2 Définition	3
I.3 constituants des matériaux composites en PRF	4
I.3.1 Constituants des PRF	4
I.3.2 Renforts	4
I .3.2.1 Fibres	5
I.3.1.2 Formes des renforts.....	8
I .3.2.3 Interfaces	11
I .3.3 Matrices	11
I .3.2.2 Résines thermodurcissables (TD)	12
I.3.2.2 Résines thermoplastiques (TP)	13
I .3.4 Principales combinaisons de résines et de renforts.....	14
I .5 Technologies de transformation	15
I .5.1 Principaux procédés	15
I .5.2 Technologies manuelles de transformation	16
I .5.3 Procédé de transformation en continu	16
I .5.3.1 La pultrusion	16
I.5.4 produits types en PRF.....	17
I .6 Comportement mécanique des PRF.....	18
I.6.1 Effet de température	18
I.6.1.1 Comportement mécanique des matériaux composites sous hautes températures	18
I.6.1.2 Comportement des matériaux composites à basses températures	20
I.6.2 Effet de contacts des PRF avec le béton	21

I.6.2.1 Propriétés d'adhérence des barres d'armature en PRF	21
I.6.2.2 Comportement thermique des barres en PRF ancrées dans le béton	21
I.6.3 Effet des charges différées	23
I.6.3.1 Fluage et relaxation des barres d'armature en PRF.....	23
I.6.3.2 Fatigue des barres d'armature en PRF	24
I.6.3.3 Durabilité des barres d'armature en PRF.....	25
II Présentation de la Méthode des éléments Finis	
II.1 Introduction.....	26
II.2 Historique	26
II.3 Principe général.....	27
II.4 les équations aux dérivées partielles	28
II. 5 Les étapes de la méthode des éléments finis	29
II.5.1 La Discrétisation et le maillage	29
II.5.2 Fonctions de forme.....	30
II.5.3 Formule générale de la matrice de rigidité	31
II.5.4 Elément de référence	33
II.5.5 Formulation isoparamétrique	33
II.5.5.1 Elément isoparamétrique	33
II.5.6 Assemblage et introduction des conditions aux limites.....	36
II.5.6.1 Méthode directe.....	37
II.5.6.2 Méthode de pénalité	37
II.5.7 Les méthodes de résolutions	38
II.5.7.1 Les méthodes directes	38
II.5.7.1.1 Méthode d'élimination de Gauss et factorisation	39
II.5.7.2 Les méthodes indirectes.....	41
II.5.7.2.1 Les méthodes de Jacobi, et de relaxation	41
II.6 Erreurs dans l'analyse des logiciels utilisant la MEF	42
II.6.1 Erreurs usuelles.....	42
II.7 Critique des résultats obtenus par MEF.....	43
II.8 Utilisation d'un logiciel éléments finis.....	43

II.8.1 Déroulement d'une étude	44
II.8.2 Choix du modèle.....	44
II.8.3 Choix du maillage	45
II.8.4 Hypothèses de comportement.....	45
II.8.5 Création et vérification des données.....	45
II.8.6 Exécutions du calcul.....	46
II.8.7 Exploitation des résultats	46
III Etude numérique de l'effet de chevauchement des barres en PRF ancrées dans le béton sous haute température	
III.1 Introduction	48
III.2 Description des poutres	48
III.3 Caractéristiques des matériaux	50
III.3.1 Armatures en PRFV.....	50
III.3.2 Béton.....	51
III.4 Modèle numérique établi à l'aide du logiciel ADINA	51
III.4.1 Définition du logiciel	51
III.4.2 Etapes de modélisation des poutres.....	52
III.5 Analyse des résultats numériques	57
III.5.1 Etude des contraintes thermiques	57
III.5.2 Etude de la formation des premières fissures	61
III.5.3 Etude de Formation des fissures circonférentielles dans les poutres	63
III.5.4 Etude des déformations thermiques	65
IV. Modèle analytique	
IV.1. Introduction	70
IV.2 Comportement thermique du béton avant fissuration	70
IV.2.1. Contraintes dans le béton dues à la pression radiale P	71
IV.2.2. Déformations dans le béton dues à la pression radiale P	77
IV.2.3. Déformations dans le béton dues à la pression radiale P et à la variation de température ΔT	78
IV.2.4. Déformation transversale de la barre en PRF due à l'effet de la pression radiale P et à la variation de température ΔT	80
IV.2.5. Pression radiale P	81

IV.3. Variation de température ΔT_{cr} produisant la première fissure	82
IV.4 Analyse des résultats analytiques des poutres en béton renforcé par deux barres en PRF.....	83
V Comparaisons des résultats analytiques et numériques	
V.1 Introduction	89
V.2 Variation de température ΔT_{cr} produisant la première fissure	90
V.3 Déformations thermiques transversales	91
V.4 Contraintes thermiques radiales	96
Conclusions	100
Recommandations	102
Bibliographie	103
Annexes	106

Introduction générale

Le problème majeur qui réduit la durée de vie des structures en béton armé est la corrosion des aciers qui menace la sécurité des ouvrages et augmente le coût de réparation, Pour ces raisons les barres d'aciers ont été remplacées par des barres en polymères renforcés de fibres (PRF).

Leur utilisation dans les structures en béton est devenue comme l'une des solutions les plus efficaces au problème de la corrosion de l'acier. [ZAIDI, 2006]

Ces matériaux composites de PRF présentent un certain nombre d'avantages qui peuvent être énumérés dans ce qui suit :

De part leur résistance à la corrosion, les PRF offrent d'autres avantages tels que [ERKI et RIZKALLA, 1993] :

- Un rapport de résistance/masse volumique élevé (10 à 15 fois plus grand de l'acier) ;
- Une neutralité électromagnétique (conductivité électrique et magnétique nulle) ;
- Une excellente résistance à la fatigue, particulièrement pour les PRF à base de fibres de carbone et d'aramide (3 fois plus grande que celle de l'acier);
- Un poids léger (1/7 à 1/5 de l'acier) ;
- Un coefficient d'expansion thermique longitudinale faible, particulièrement pour les PRF à base de carbone.

Cependant, les armatures en PRF possèdent certains inconvénients tels que [ERKI et RIZKALLA, 1993] :

- Un coût élevé pour certains PRF (PRF de carbone);
- Un faible module d'élasticité de certains PRF (PRF de verre);
- Une sensibilité aux rayons ultra-violets et à l'humidité, particulièrement les fibres à base d'aramide;
- Une incompatibilité thermique avec le béton particulièrement dans la direction transversale.

Objectif de travail :

L'objectif principal de ce travail est d'étudier à l'aide de la méthode des éléments finis, en utilisant le logiciel ADINA, l'effet de chevauchement vertical de deux barres en PRF de verre (PRFV) ancrées dans le béton sur les déformations transversales et les contraintes radiales des poutres prismatiques en béton armé sous basses températures. Ces déformations et contraintes permettent d'évaluer la variation de température (ΔT_{cr}) produisant la première fissure circonférentielle dans le béton à l'interface armature/béton et à l'interface des deux barres/béton , et aussi la variation de

température (ΔT_{sp}) produisant la rupture totale d'enrobage du béton en fonction du rapport d'épaisseur d'enrobage du béton au diamètre de la barre en PRF (c/d_b).

Organisation du mémoire :

Le chapitre 1 présente une revue de littératures sur les PRF telles les définitions, les caractéristiques et l'utilisation des PRF. Le chapitre 2 exhibe des généralités et quelques notions fondamentales sur la méthode des éléments finis. Le chapitre 3 expose l'étude numérique non-linéaire de chevauchement vertical des barres en PRFV sur le comportement thermique des poutres en béton armé de barre en PRFV sous basses températures avec l'analyse des résultats obtenus. Le chapitre 4 présente l'analyse analytiques des éléments en béton armé de barre en PRFV y compris l'interprétation des résultats obtenus suivi par le chapitre 5 qui consiste à comparer les résultats analytiques et numériques obtenus. Enfin, des conclusions et des perspectives sont présentées à la fin de ce mémoire suivies par des références bibliographiques et annexes.

I. Revue de littérature :

I.1 Introduction :

Ce chapitre présente une Revue de littérature sur les matériaux composites en polymères renforcés de fibres (PRF) , telle leur constituant, leur fabrication, leur propriétés mécaniques et physiques, particulièrement, leur comportement thermique. Aussi, ce chapitre décrit les principaux résultats des recherches publiés par les différents auteurs portant sur le comportement thermique des barres en PRF ancrées dans le béton.

I.2 Définition :

Un matériau composite est constitué généralement d'une ou de plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue(Figure I.1). Dans le cas de plusieurs phases discontinues de natures différentes, le composite est dit hybride. La phase discontinue est habituellement plus dure et avec des propriétés mécaniques en traction supérieures à celle de la phase continue .

La phase continue est appelée matrice, la phase discontinue est appelée renfort.

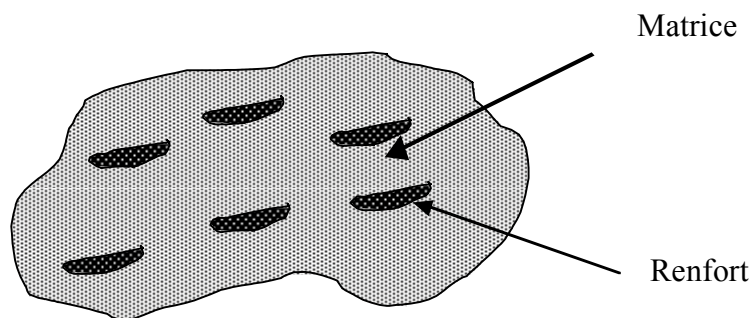


Figure I.1 : Matériau Composite

I.3 Constituants des matériaux composites en PRF :

I.3.1 Constituants des PRF:

Les produits en PRF sont constitués d'une matrice (résine) et de fibres. Comme il est montré à la figure I.2, les fibres sont plus résistantes que la matrice. Dans la mesure où elles fournissent une fonction de renfort, le volume de fibres devrait être supérieur à 10 % [ACI, 1995]. Les propriétés mécaniques du produit final dépendent de la qualité des fibres, de leur orientation, de leur forme, du rapport volumique en fibres, de l'adhésion à la matrice, et du procédé de fabrication. Le dernier aspect est significatif, car un simple mélange de fibres de qualités supérieures dans une matrice ne garantit pas l'obtention d'un produit de qualité. Par conséquent, des produits en PRF faits avec les mêmes fibres, résines et rapports volumiques en fibres peuvent présenter des propriétés mécaniques très différentes.

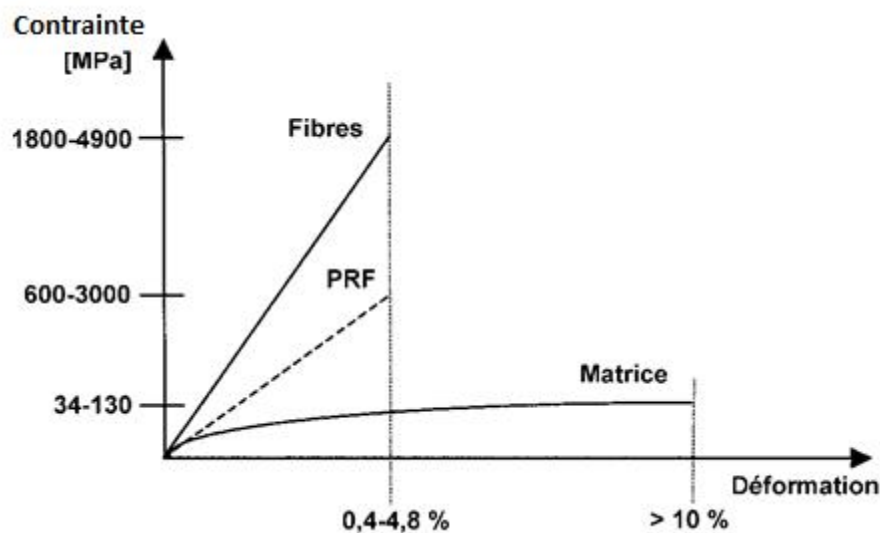


Figure I.2 Courbes contrainte/déformation des PRF, des fibres et de la matrice

I.3.2 Renforts :

Les renforts contribuent à améliorer la résistance mécanique et la rigidité des matériaux composites et se présentent sous forme filamentaire, allant de la particule de forme allongée à la fibre continue qui donne au matériau un effet directif (figure I.3). Ils sont caractérisés par :

- la nature de la fibre, minérale ou organique,
- l'architecture du renfort.

Figure I .3 : Principaux matériaux de renfort

I .3.2.1 Fibres :

Les fibres sont constituées de plusieurs filaments de diamètre compris entre 5 et 15 microns [GAY, 1997]. Elles fournissent la résistance et la rigidité au matériau composite de PRF. Les principales fibres utilisées dans la fabrication des PRF sont les fibres de verre, les fibres d'aramide, les fibres de carbone et les fibres de bore et les fibres céramiques. Néanmoins, seulement les trois premières fibres sont utilisées pour les applications structurales en génie civil. [ZAIDI, 2006].

a) Fibres de verre

Sa large gamme de propriétés, son rapport résistance/coût élevé, sa disponibilité, sa facilité de mise en œuvre et sa haute résistance font que la fibre de verre soit la plus utilisée dans l'industrie. [ZAIDI, 2006]

Les différents types de fibres de verre utilisés pour les renforcements des composites sont :

Verre E (Electrical) étant un excellent isolant électrique ;

Verre S (Strenght) ayant une haute résistance et rigidité à la traction ;

Verre C (Chemical) ayant une résistance élevée aux produits chimiques ;

Verre AR (Alkali Résistant) ayant une résistance aux alcalis.

Le Tableau I.1 montre les principales propriétés mécaniques et physiques des fibres de verre [ISISCANADA, 2001 ; BERTHELOT, 1992, 1996 ; MALLICK, 1988, 1993]

Tableau I.1 : Propriétés mécaniques et physiques des fibres de verre.

Type de verre	Résistance en traction [MPa]	Module d'élasticité [GPa]	Allongement relatif [%]	Coefficient d'expansion Thermique [$\times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$]	Coefficient de Poisson
Verre type E	3500 – 3600	72,5 - 75	4,8	5,0	0,2
Verre type S	4600 - 4900	85,5 - 87	5,6	2,9	0,22
Verre A Rrésistant aux alcalis	1800 - 3500	70 - 76	2,0-3,0	aucune valeur	aucune valeur

b) Fibres de carbone :

Les fibres de carbone sont caractérisées par leur très haute résistance à la traction, leur haut module d'élasticité, leur rapport rigidité/densité élevé, leur faible coefficient d'expansion thermique longitudinal, leur faible sensibilité aux charges de fatigue et une excellente résistance aux produits chimiques et à l'humidité. Cependant, les fibres de carbone ont une faible résistance à l'impact, due à leur faible déformation ultime, et un coût élevé. [ZAIDI, 2006]

Les fibres de carbone peuvent être classées selon le type de précurseur:

Fibres isotropiques « PITCH » caractérisées par un module d'Young élevé;

Fibres polyacrylonitrile « PAN » caractérisées par une résistance ultime et un coût très élevés. Comme elles peuvent être classées selon le module d'élasticité.

Le Tableau I.2 montre les principales propriétés mécaniques et physiques des fibres de carbone [ISISCANADA, 2001 ; BERTHELOT, 1992, 1996].

Tableau I.2 : Propriétés mécaniques et physiques des fibres de carbone.

Type de carbone		Résistance en traction [MPa]	Module d'élasticité [GPa]	Allongement relatif [%]	Coefficient d'expansion thermique [$\times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$]	Coefficient de Poisson
PAN	Haute Résistance	3500	200 - 240	1,3 - 1,8	* $\alpha_{fl} = -1,2$ à $-0,1$ $\alpha_{ft} = 7$ à 12	$\sim 0,2$
	Haut module	2100 - 4000	350 - 650	0,4 - 0,8		
PITCH	Normale	780 - 1000	38 - 40	2,1 - 2,5	$\alpha_{fl} = -1,6$ à $-0,9$	aucune valeur
	Haut module	3000 - 3500	400 - 800	0,4 - 1,5		

* α_{fl} :coefficient d'expansion thermique longitudinal

* α_{ft} :coefficient d'expansion thermique transversal

c)Fibres d'aramide :

Les fibres d'aramide ou polyparaphénylène – téréphtalamide PPD-T sont caractérisées principalement par leur haute résistance (les fibres d'aramide sont cinq fois plus résistantes que l'acier pour un même poids), leur grande résistance à l'usure, leur faible densité et leur haute stabilité thermique. Soulignons que les fibres d'aramide se dégradent par l'exposition aux rayons ultra-violets, c'est la raison pour laquelle elles doivent être coulées dans une matrice protectrice. L'oxydation limite l'utilisation des fibres d'aramide au-delà de 150°C . [ZAIDI, 2006].

Il existe trois types de fibres d'aramide :

Kevlar (Dupont, USA);

Twaron (Akzo, Hollande);

Technora (Teijin, Japon).

Le Tableau I.3 montre les principales propriétés mécaniques et physiques des fibres d'aramide [ISISCANADA, 2001 ; BERTHELOT, 1992, 1996].

Tableau I.3 : Propriétés mécaniques et physiques des fibres d'aramide.

Type d'aramide	Résistance en traction [MPa]	Module d'élasticité [GPa]	Allongement relatif [%]	Coefficient d'expansion thermique [$\times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$]	Coefficient de Poisson
Kevlar 29	3620	82,7	4,4	aucune valeur	0,35
Kevlar 49	2800	130	2,3	$\alpha_{ft} = -2,0$ $\alpha_{ft} = 59$	
Kevlar 129	4210	110	--	aucune valeur	
Kevlar 149	3450	172 - 179	1,9	aucune valeur	
Twaron	2800	130	2,3	-2,0 (α_{ft}), 59 (α_{ft})	
Technora	3500	74	4,6	aucune valeur	

I.3.2.2 Formes des renforts :

Afin d'améliorer les caractéristiques mécaniques des structures en composites, il est nécessaire de jouer sur la texture des renforts (leur architecture) pour créer une charpente résistante adaptée aux contraintes mécaniques. Les renforts se présentent généralement sous diverses formes : linéique, surfacique et structures multidirectionnelles (voire les Figures I.4 à I.6).

a- Formes linéiques :

Une fibre (diamètre environ de 10 μm) est trop petite pour l'utilisation unitaire. On trouve, en général, des fils ou mèches qui sont assemblés à partir de plusieurs fibres. L'unité de masse linéique est le tex (1 tex = 1 g/km).

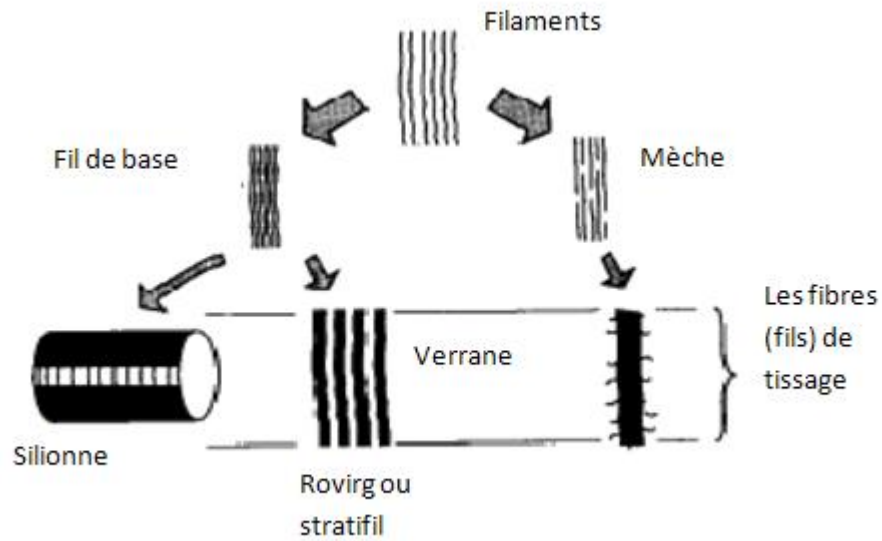


Figure I.4: Eléments composants de la forme linéique

b- Formes surfaciques : Tissus et rubans

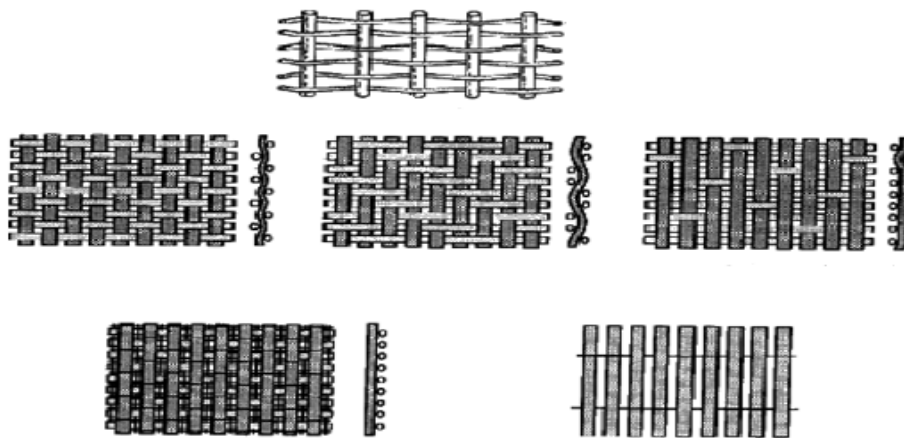


Figure I.5 Eléments composants de la forme surfacique

c- Structures multidimensionnelles :

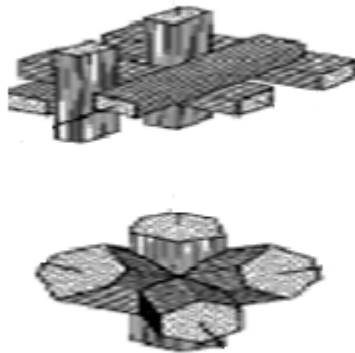


Figure I.6 :Eléments composants de la structure multidimensionnelle.

Tableau I.4:Performances comparées de différents types d'architecture de fibres[Merdas A,2005] .

Architecture des fibres	Comportement mécanique recherché	Orientation de la tenue mécanique	Taux maximal de renfort	Type de fibres
Fibres broyées Et coupées	Moyen	quelconque	30%	verre
Mats fibres Coupée	Moyen	quelconque	30%	verre ou carbone
Mats fibres Coupées	Moyen	orientée	30%	verre
Fibres Continues	Intermédiaire	unidirectionnelle	50 à 70%	toutes
Tissu	Fort	Bi ou tri directionnelle	30 à 70%	toutes
Nappe	Très fort	Unidirectionnelle (Bi-directionnelle si superposition)	50	

Note : Les renforts peuvent également s'arranger sous formes hybrides (Mélange de fils continus et les fils coupés) afin d'augmenter la résistance du composite. Les fibres les plus utilisées sont les fibres de carbone, fibres de verre et les fibres d'aramide. Selon les fibres utilisées, les composites sont classifiés en trois types:

- Polymères renforcées de fibres de verre (PRFV) ou (GFRP: Glass fiber reinforced polymer),
- Polymères renforcées de fibres de carbone (PRFC) ou (CFRP: Carbon fiber reinforced polymer),
- Polymères renforcées de fibres d'aramide (PRFA) ou (AFRP: Aramid-fiber-reinforced polymer).

I.3.2.3 Interfaces :

L'utilisation d'une couche d'interface (sizing) permet d'assurer la compatibilité entre le renfort et la matrice. Les fibres destinées à la fabrication des composites reçoivent un apprêt spécifique comportant un agent collant qui permet de coller les filaments pour en faire des fils et assure, en outre, une fonction de lubrification (pour le protéger contre l'abrasion due au frottement entre fibres).

I.3.3 Matrices: La matrice a pour rôle de :

- lier les fibres de renforts,
- répartir les contraintes,
- apporter la tenue chimique de la structure,
- donner la forme désirée au produit final.

Les deux types de résines qui sont, actuellement, utilisées présentent des propriétés foncièrement différentes (voire le Tableau I.5) :

les résines thermodurcissables (TD) qui sont, en général, associées avec des fibres longues. Les polymères thermodurcissables ont la forme d'un réseau tridimensionnel; au cours de la polymérisation, ce réseau se pont (double liaison de polymérisation) et durcit de façon définitive lors du chauffage selon la forme souhaitée.

L'emploi des polymères thermoplastiques (TP), renforcés avec des fibres courtes (et, prochainement, avec des fibres longues) se développe fortement. Les polymères thermoplastiques ont une structure linéaire ; ils sont mis en forme par chauffage (les chaînes se plient), et durcissent au cours du refroidissement (les chaînes se bloquent).

Tableau I.5: Principales différences entre matrices thermoplastique (TP) et thermodurcissables (TD) [Merdas A, 2005] .

Matrices	TD	TP
Etat de base	Liquide visqueux polymériser	Solide prêt à l'emploi
Stockage	Réduit	Difficile
Mouillabilité des renforts	Aisée	Illimité
Moulage	Chauffage continu	Chauffage + refroidissement
Cycle	Long (polymérisation)	Court
Tenue au choc	Limitée	Assez bonne
Tenue thermique	Meilleure	Réduite (sauf nouveau TP)
Chutes et déchets	Perdus ou utilisés en charges	Recyclables
Conditions de travail	Emanations de solvant	Propreté

I.3.3.1 Résines thermodurcissables (TD) :

Les résines thermodurcissables principalement utilisées actuellement sont :

Les polyesters insaturés, ce sont les résines les plus utilisées dans les applications à grande diffusion (GD). Elles se présentent sous la forme d'une solution polyacide + polyalcool qui se rigidifient sous l'action d'un catalyseur et de l'action de la chaleur. Elles présentent le grand défaut d'émettre des vapeurs de styrène au cours de la polymérisation et d'être difficile à stocker.

Les vinylesters, ce sont des variantes des polyesters obtenues à partir d'acide acrylique. Elles ont une bonne tenue à la fatigue et un bon comportement à la corrosion mais sont combustibles.

Les résines époxy (ou époxydes) constituent la résine type des composites de haute performance (HP).

Les résines phénoliques sont obtenues par la polycondensation du phénol et du formol; elles présentent une très bonne tenue au feu, sans fumée (d'où leur utilisation dans le ferroviaire). Elles sont fragiles, sensibles à l'humidité, difficiles à mettre en œuvre.

Les polyuréthanes ont une faible viscosité qui facilite un bon remplissage du moule (voir le Tableau I.6) .

Tableau I.6 : Caractéristiques moyennes des matrices thermodurcissables (TD) non renforcées[Merdas A, 2005] .

Polymère	Masse spécifique (Kg/dm ³)	Résistance à la traction (MPa)	Module de flexion (GPa)	Tenue à la chaleur continue (°C)
Polyester(up)	1,2	34,50 - 103,50	3	120
Vinyl-ester	1,15	73,00 - 81,00	3,5	140
Phénolique	1,2	40-50	3	120-150
Epoxyde	1,1-1,4	50-90	3	120-200
Polyuréthane(pu)	1,1-1,5	20-50	1	100-200
Poly-imide	1,3-1,4	30-40	4	250-300

I.3.3.2 Résines thermoplastiques (TP) :

Les thermoplastiques (TP) présentent à l'état vierge de bonnes caractéristiques mécaniques. Un renforcement de fibres courtes leur confère une tenue mécanique et thermique améliorée et une bonne stabilité dimensionnelle(voire le Tableau I.7).

Les principales résines thermoplastiques utilisées dans les composites sont :

Les polyamides (PA).

Les polytéraphthalates éthylénique (PET) et butylénique (PBT).

Les polycarbonate (PC).

Les polyoxides de phénylène (PPO ou PPE).

Les polyoxyméthylène (POM).

Le polypropylène (PP) est un polymère semi-technique, peu onéreux, assez stable en température, mais combustible.

D'autres résines TP commencent à être utilisées pour leurs propriétés de thermo-stabilité (tenue thermique supérieure à 200°C) et de bonne tenue mécanique :

Les polyamide-imide (PAI).

Le polyéther-imide (PEI)

Le polyéther-sulfone (PES).

Le polyéther-éther-cétone (PEEK).

Tableau I.7: Caractéristiques moyennes des matrices thermoplastiques non renforcées[Merdas A, 2005] .

Polymère	Masse spécifique (Kg/d m3)	Résistance à la traction (MPa)	Module de flexion (GPa)	Tenue à la chaleur continue (°C)
Polypropylène (PP)	1,1 -1,2	20-30	1-1,6	85-115
Polytéréphtalatebutylénique (PBT)	1,5	45-55	2,2-2,6	120
Polytéréphtalate éthylénique (PET)	1,6	55-75	2-2,2	105-120
Polyoxide de phénylène (PPO-)	1,3	55-65	2,4-2,6	80-105
Polyoxyméthylène (POM)	1,6	60-70	7-9	95-105
Polyamides (PA)	1,3-1,4	60-90	6-9	80-120
Polyamide-imide (PAI)	1,3-1,4	195	4,9	275
Polyéther-imide (PEI)	1,5	105	3	170
Polyéther-sulfone (PES)	1,6	85	2,6	180
Polyéther-éther-cétone(PEEK)	1,5	100	3,7	>240

I .3.4 Principales combinaisons de résines et de renforts :

Le tableau I.8 ci-dessous présente une synthèse des combinaisons matrices/renfort les plus couramment utilisées donnant lieu à des composites hautes performances (HP) ou de grande diffusion (GD).

Tableau I.8 : Synthèse de l'utilisation des résines et renforts non renforcée[Merdas A, 2005] .

Résines		Fibres de renfort				
		Verre	Verre	Verre	Carbone	Aramide
Thermodurcissables TD	Polyesters	GD	GD	/	/	/
	Polyuréthannes	GD	/	/	/	/
	Epoxy	GD	/	/	/	/
	Phénoliques	/	HP	HP	HP	HP
Thermoplastiques TP	Polypropylènes	GD	/	/	/	/
	PA6 et 6-6	GD	/	HP	/	/
	PA12 ,PEEK	/	/	HP	HP	HP

I.5 Technologies de transformation :

I.5.1 Principaux procédés :

Les procédés de mise en œuvre des matériaux composites sont plus nombreux que les techniques de transformation des métaux ; toutefois leur industrialisation est encore récente ce qui engendre de nombreuses difficultés quant à la prédictibilité des résultats. Les principaux procédés de transformation actuellement utilisés sont les suivants:

- les techniques de mise en œuvre;
- formes 3D moulées sans presse avec un seul moule;
- formes 3D moulées avec presse avec deux moules;
- formes profilées ou produits longs;
- formes de révolution.

La classe de composites pouvant être réalisés par les différents procédés :

- composites GD avec matrice TD, généralement polyester ou vinylester;
- composites HP avec matrice TD, époxy;
- composites GD avec matrice TP, essentiellement polyuréthane;
- composites HP avec renforts pré imprégnés thermoplastiques (PET, PP, PE).

I.5.2 Technologies manuelles de transformation :

Les procédés manuels sont utilisés pour la fabrication de pièces de grandes dimensions destinées principalement aux industries de l'aéronautique (voilure, empennage, mobilier), du ferroviaire (panneaux et aménagement de voitures) et de la construction nautique (coques).

Les technologies manuelles de transformation des composites utilisent des moules ouverts ; ce sont principalement :

- Le moulage au contact est utilisé pour les composites « grande diffusion » ;
- La projection simultanée : la résine catalysée et les fibres de renfort coupées sont projetées simultanément au moyen d'un pistolet sur une forme ;
- Le drapage autoclave, réservé aux composites « hautes performances »

I.5.3 Procédé de transformation en continu :

I.5.3.1 La pultrusion :

Les principales applications des matériaux composites réalisés par la pultrusion (Figure I.7) concernent des profilés destinés à :

- La construction électrique : isolant électriques ;
- La construction civile et industrielle : plates-formes de ponts, signalisation, échelles ;
- Les sports et loisirs : cannes, clubs, perche.

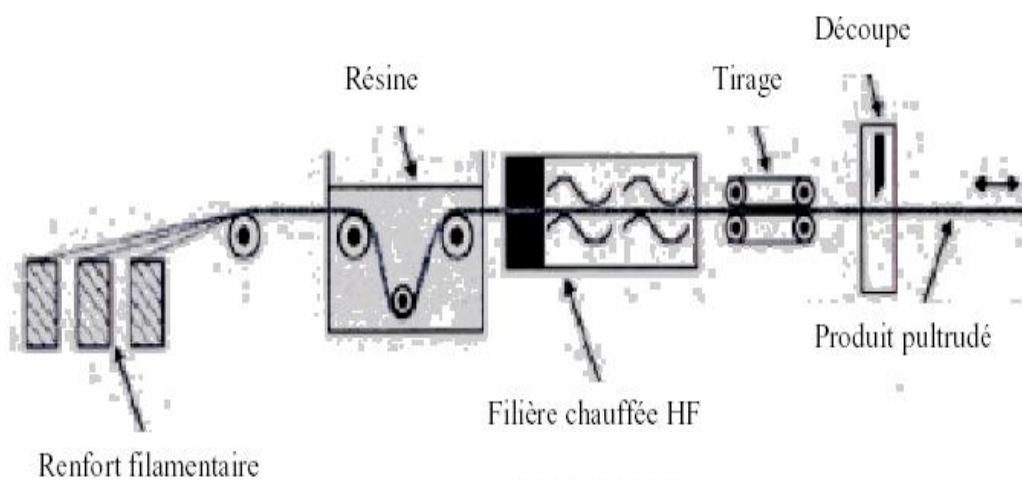


Figure I.7 : Principe de la pultrusion

En particulier dans les domaines suivants :

- la construction civile (poutres pultrudées), pour le renforcement de structures existantes;
- la construction industrielle (plates-formes) ;
- l'automobile (sols isolants de camions).

I.5.4 produits types en PRF

Produits en polymères renforcés de fibres de verre (PRFV) [ISIS CANADA, 2001]



Figure I.8 Armatures en PRF de nom commercial ISOROD



Figure I.9 Armatures en PRF de commercial C.BAR

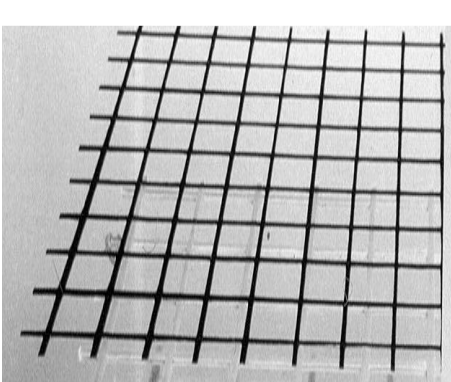


Figure I.10 Treillis en PRF de nom commercial NEFMAC

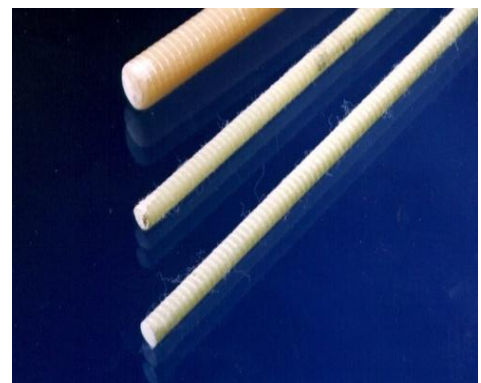


Figure I.11 Armatures en PRF de nom commercial ROTAFLEX



Figure I.12 Armatures en PRF de nom commercial LEADLINE

I.6 Comportement mécanique et physiques des PRF :

I.6.1 Effet de température :

I.6.1.1 Comportement mécanique des matériaux composites sous hautes températures :

a) Résistance en traction et module d'Young :

KUMAHARA et coll. (1993) ont étudié l'effet des hautes températures sur la résistance en traction et le module d'Young pour des barres de PRF avec différents types de fibres et de résines. Les résultats sont comme suit :

Pour les barres en PRF d'aramides (PRFA), la résistance en traction ainsi que le module d'Young ont chuté à des températures supérieures à 60 °C. À des températures de 70°C et 400 °C, la résistance à la tension a diminué respectivement de 5% et 80%. À des températures de 70 °C et 250 °C, le module d'Young a diminué respectivement de 15% et 30%. Pour les barres en PRF de verres (PRFV) ayant une résine vinylester, la résistance à la tension a chuté de 20% à une température de 60 °C. Les pertes de résistance à 250 °C et 400 °C ont été de 40% et 60%, respectivement. Pour les barres en PRF de carbones (PRFC) à base de fibres « PITCH » et de résine époxyde, la résistance en traction a diminué de 20% à une température de 60°C. Parcontre, pour les barres en PRF de carbones à base de fibres « PAN » et de liant inorganique (pâte de ciment), la résistance reste presque inchangée à une température de 250°C. Le module d'Young a diminué d'une valeur peu notable. Des essais ont été réalisés par CHAALAL et BENMOKRANE (1993) sur des barres en PRFV à base de fibres de verre et de résine polyester afin d'évaluer l'influence de l'augmentation de température sur la résistance à la tension des barres en PRFV. Les tiges sont soumises à différentes températures allant jusqu'à 400 °C. Les résultats ont montré que la perte de résistance était de 31%, 45%, 60% et 71% pour des températures de 100 °C, 200 °C, 300 °C et 400°C, respectivement. Ces pertes sont plus grandes que celles de l'acier (14% à 400 °C) et des fils étirés à froid (50% à 400 °C). Ces études montrent que les propriétés mécaniques des barres en PRF sont affectées par les hautes températures et aussi par les types de fibres et résines utilisées. Des chercheurs à Mitsubishi Chemical Corporation ont déterminé la température de transition vitreuse de l'armature PRFC Leadline. Cette température était de 120°C au-delà de laquelle les propriétés mécaniques du matériau sont affectées à cause du ramollissement de la résine. Les auteurs ont préconisé une température de service de 100 °C comme température maximale d'utilisation [BENABDESSELAM, 1998]. La résistance au feu de la structure renforcée avec des PRF peut être augmentée en augmentant l'enrobage du béton ce qui diminuera le taux d'augmentation de la température au niveau des barres de renforcement.

b)Comportement à la fatigue des PRF sous l'effet de la température :

RAHMAN et KINGSLEY (1996) ont étudié la résistance à la fatigue en tension sur des PRF de type NEFMAC soumis à des températures variant entre 30 °C et 50 °C. La fréquence de chargement était de 5 HZ avec des contraintes de limite inférieure et de limite supérieure de 30% et 50% de la résistance ultime à la traction, respectivement. Les résultats ont montré que la durée de vie à la fatigue diminue avec la température. Il est à noter que les NEFMAC.C à base de fibres de carbone n'ont pas présenté de rupture à 4 millions de cycles à une température de 50°C, alors que les NEFMAC.H hybride, faites de fibres de verres et de fibres de carbone, ont présenté une rupture relativement tôt. Les auteurs concluent que la résistance à la fatigue des NEFMAC.H se détériore en augmentant la température.

c)Effet des températures élevées :

Les températures élevées peuvent avoir un effet négatif sur les PRF. Des précautions spéciales doivent être prises pour leur utilisation dans des structures où la résistance au feu est un facteur de conception significatif. Bien que les PRF ne puissent pas brûler lorsqu'ils sont noyés dans le béton en raison du manque d'oxygène, la résine se ramollit. La température à laquelle ce phénomène a lieu est reliée à la température de transition du verre, T_g . La valeur de la température de transition du verre est fonction du type de résine et atteint généralement des valeurs de 150°C (300°F). À ces températures, la résistance en flexion et la résistance à l'adhérence des armatures en PRF sont affectées. Un certain nombre d'expériences sur ce sujet, plutôt limitées, est rapporté dans la littérature jusqu'à présent. Selon Katz et coll. (1998 et 1999), la résistance à l'adhérence des armatures en PRF peut être réduite de 40 % à 100 °C (210 °F) et à plus de 90 % à 200 °C (390 °F). Pour les fibres de verre, de carbone et d'aramide, prises isolément, ces températures sont de 980 °C (1800 °F), 1650 °C (3000 °F) et 175 °C (350 °F), respectivement [ACI 440.1R.01, 2001].

À des températures au dessus de 100 °C, les produits en PRF peuvent perdre une partie de la résine agglomérant. Sayed. Ahmed et Shrive (1999) notent qu'après 24 heures à 200 °C et 300 °C, la surface du produit en PRF Leadline (armature/tendon à base de fibre de carbone et de résine époxy) était devenue plus sombre, indiquant une perte de résine. Vingt quatre heures d'exposition à 400 °C a causé un relâchement de certaines des fibres sur la surface du produit. Une exposition à 500 °C a causé l'évaporation de la résine principalement dans la première heure d'exposition, réduisant le tendon à un paquet de fibres de carbone lâches. On peut voir clairement l'effet de température sur la résistance en traction de l'armature Leadline dans la Figure I.13.

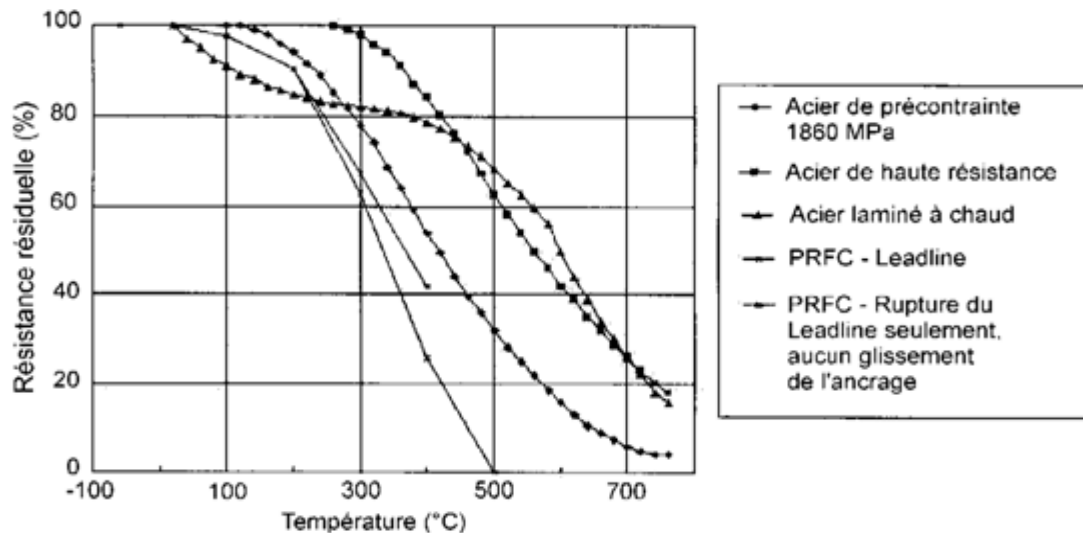


Figure I.13 Effet de la température sur la résistance en traction de l'armature en PRF

Leadline et de l'armature en acier[Sayed. Ahmed et Shrive, 1999].

I.6.1.2 Comportement des matériaux composites sous basses températures :

P.K. DUTTA (1994) a étudié le comportement des barres en PRF, à base de fibres de verre et de résine polyester, sous l'effet de la basse température de -48°C et l'effet des cycles thermiques variant de -60°C à $+60^{\circ}\text{C}$. Les résultats obtenus sont les suivants :

Les barres testées à -48°C ont montré que la différence entre la déformation limite élastique et la déformation ultime de rupture diminue de 28,2% indiquant une grande fragilité du composite. La résistance limite élastique augmente de 28,1% et la résistance ultime de rupture de 17,4%. Le module d'élasticité longitudinal augmente légèrement de 0,79%. Les barres soumises aux cycles thermiques à basse température ont montré que la différence entre la déformation limite élastique et la déformation ultime de rupture augmente de 34,6% en indiquant une réduction significative de la fragilité du composite. Cette étude montre qu'à basse température, la barre en PRF ayant des coefficients d'expansion thermique de fibres et de résine différents développe des contraintes de traction résiduelles qui peuvent engendrer des microfissures dans la matrice et par conséquent une fragilité importante du composite. À basse température, certaines propriétés mécaniques des PRFV s'améliorent, comme par exemple l'augmentation de la résistance à la compression et la rigidité ainsi que la réduction de fragilité du composite sous l'effet des cycles thermiques.

I.6.2 Effet de contacts des PRF avec le béton :

I.6.2.1 Propriétés d'adhérence des barres d'armature en PRF :

Les propriétés d'adhérence des barres d'armature en PRF dépendent de la surface de la barre, qui peut être recouverte de sable, crénelée, à enroulement hélicoïdal ou tressée. De plus, les propriétés mécaniques de la barre, ainsi que les conditions environnementales influencent l'adhérence des barres d'armature en PRF [Nanni et coll., 1997].

Le frottement, l'adhésion et la résistance mécanique transfèrent les contraintes d'adhérence au béton. Contrairement au béton armé conventionnel, la résistance en compression du béton n'influence pas l'adhérence des barres en PRF [Benmokrane et coll., 1996].

I.6.2.2 Comportement thermique des barres en PRF ancrées dans le béton :[ZAIDI, 2006]

CHAALLAL et coll. (1991) ont étudié l'effet de la basse température sur le comportement des poutres à la flexion. Les poutres en béton renforcé des barres en PRF de verre, ont été soumises à la basse température (-30 °C). Elles ont des dimensions de 127 mm x 178 mm de section et 2000 mm de longueur. Les résultats montrent qu'il n'y a aucune perte de résistance dans les poutres testées sous basse température bien qu'elles se comportent de façon similaire que les poutres testées sous température ambiante (+20 °C).

RAHMAN et coll. (1995) ont analysé les contraintes et les déformations des cylindres en béton renforcé de barres d'armatures de PRF et soumis à l'effet thermique en se basant sur la théorie d'élasticité. L'analyse des contraintes thermiques montre que le béton enrobant la barre d'armature pourrait se fissurer sous l'effet des températures élevées. Aussi, le Coefficient d'expansion thermiques longitudinal des barres de PRF a peu d'influence sur la pression radiale.

GENTRY et HUDAK (1996) ont étudié la compatibilité thermique entre les armatures de composites et le béton. La première partie consiste à étudier l'effet de la surface des barres en PRF de verre E/vinylester, recouverte avec des enroulements hélicoïdaux, sur l'expansion transversale. Les barres de diamètres 12,7 mm ont été soumises à des températures allant jusqu'à 60°C. Les résultats obtenus montrent que le coefficient d'expansion thermique (CET) longitudinal des barres hélicoïdales est de $8,2 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ qui est presque similaire à celui du béton; tandis que le CET transversal est d'environ $32 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ ce qui représente une valeur trois(3) fois plus grande que celle du CET de béton égale à $9,9 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$. La deuxième partie consiste à étudier le développement de l'adhérence entre les barres de composites et le béton durant les 50 premières heures de son durcissement, en utilisant des éprouvettes en béton de 300 mm x 200

mm x 150 mm de dimensions renforcées de barres en PRF de verre de 7,5 mm de diamètre et de 25 mm d'enrobage du béton. Après 10 heures, la température du béton diminue, les déformations longitudinales des barres et du béton ont tendance d'être parallèles et de mêmes valeurs au cours du temps et que l'adhérence entre le béton et les barres commence à se développer. La compression longitudinale due au retrait du béton produit par l'effet de Poisson une expansion transversale des barres qui peut éventuellement augmenter l'adhérence entre les deux matériaux.

AIELLO et coll. (1999) ont analysé à l'aide d'un modèle analytique et numérique l'effet de la variation de température sur la performance structurale des éléments en béton (cylindres et poutres) renforcé des barres en PRF d'aramide et en PRF de verre en variant l'enrobage du béton et la forme de la section. Les résultats obtenus sont comparés à ceux du laboratoire. Les deux modèles analytique et numérique ont été établis sur des suppositions à savoir le comportement élastique des matériaux, l'absence des armatures transversales et l'absence des conditions aux limites de chargement. Les résultats obtenus montrent qu'une fissure longitudinale s'est développée dans l'enrobage du béton; les courbes représentant la variation de température (menant à la rupture du béton) en fonction du rapport c/d_b montrent que les prédictions analytiques et numériques présentent une tendance presque linéaire cependant les résultats expérimentaux se retrouvent entre les deux courbes théoriques (analytique et numérique) pour un rapport de $c/d_b \geq 1,5$.

VOGEL et SVECOVA (2004) ont effectué des analyses linéaire et non linéaire à l'aide de la méthode des éléments finis (logiciel ADINA) afin d'étudier l'effet de l'expansion thermique des barres en PRF sur l'enrobage du béton en tenant compte de l'effet de l'expansion transversale additionnelle des armatures de précontrainte au niveau de la zone du transfert de la force de précontrainte au béton (effet d'Hoyer). Des prismes en béton renforcé de barres de précontrainte en PRF de carbone et en PRF de verre, soumis à des variations de température, Les résultats montrent que les variations de température obtenues par analyse non linéaire, produisant la fissure initiale dans le béton à l'interface armature/béton, sont légèrement plus grandes que celles obtenues par l'analyse linéaire, ceci est attribué aux faibles contraintes circonférentielles générées par l'analyse non linéaire à l'interface entre l'armature et le béton. Cependant, les variations de température produisant la rupture d'enrobage du béton, obtenues par l'analyse non linéaire, sont inférieures de celles obtenues par l'analyse linéaire, ceci est attribué au comportement non linéaire du béton.

ABDALLA (2006) a effectué des études théorique et expérimentale afin d'analyser l'effet de l'enrobage du béton sur le comportement des éléments en béton armé de barres en PRF dans un

climat chaud. L'étude analytique linéaire a été effectuée sur des cylindres en béton, de 76 mm de diamètre, renforcé de barre en PRF de verre (PRFV) de 12; 16 et 25 mm de diamètre, soumis à des variations de température de 20 à 80 °C. Les résultats montrent que les contraintes de traction maximales dans le béton diminuent de façon significative pour des rapports d'enrobage du béton au diamètre des barres en PRF (c/d_b) supérieurs à 1,5.

ZAIDI (2006), ZAIDI et MASMOUDI (2007) ont étudié le comportement thermique des éléments en béton armé de barres en PRF de verre (PRFV), particulièrement, les déformations thermiques transversales dans l'enrobage du béton et les barres en PRF. Les auteurs ont développé un modèle théorique, validé expérimentalement, capable de prédire la variation de température produisant la rupture d'enrobage du béton et la variation de température produisant la première fissure radiale dans le béton à l'interface armature en PRF/béton en fonction du rapport d'épaisseur d'enrobage du béton au diamètre de la barre en PRF. Les résultats obtenus montrent que la rupture d'enrobage du béton se produit pour un rapport d'épaisseur d'enrobage du béton au diamètre de la barre en PRF $c/d_b \leq 1,4$ pour des poutres en béton armé de barres en PRFV Isorod testées sous température allant de -30 °C à +80 °C.

I.6.3 Effet des charges différées :

I.6.3.1 Fluage et relaxation des barres d'armature en PRF :

Le comportement au fluage de la plupart des produits en PRF est caractérisé par une réponse initiale élastique, suivi d'un comportement au fluage non linéaire jusqu'à la rupture. Quand les PRF sont soumis à une contrainte constante, ils peuvent se fracturer subitement. Ce phénomène est relié à la rupture par fluage. Plus le rapport des contraintes de charges soutenues (charges permanentes) sur les contraintes des surcharges est grand, plus l'endurance des PRF est petite. La rupture par fluage est aussi affectée par les rayons ultraviolets, les températures élevées, l'alcalinité et les conditions climatiques (humidité, mouillage/séchage, etc.).

Les barres d'armature en PRFC sont moins susceptibles à la rupture par fluage, suivies de celles en PRFA et en suite celles en PRFV. Celles-ci ont le plus haut risque de rupture par fluage. Pour éliminer la rupture par fluage d'armatures en PRF, les coefficients de tenue des produits en PRF, ont été ajustés par le coefficient F selon les recommandations du code CAN/CSA.S6.00, 2000. Les valeurs du coefficient F, tenant compte du ratio (R) entre les contraintes dues aux charges permanentes pondérées et les contraintes dues aux surcharges pondérées dans une barre ou un treillis en PRF, sont indiquées dans Tableau I.9.

Tableau I.9 : Valeur du coefficient F

Type de PRF	R		
	0,5	1,0	2,0 et plus
PRFA	1,0	0,6	0,5
PRFC	1,0	0,9	0,9
PRFV	1,0	0,9	0,8

I.6.3.2 Fatigue des barres d'armature en PRF :

La fatigue en traction des barres d'armature en PRF n'a pas été complètement étudiée. Il n'y a pas de méthode d'essai universellement acceptée pour évaluer le comportement à la fatigue des produits en PRF, et par conséquent chaque résultat d'essai doit être accompagné d'une description de la technique d'essai utilisée.

Tanigaki et coll. (1989) ont effectué des essais de fatigue sur des barres en polymères renforcés de fibres d'aramide portant le nom commercial FiBRA. La limite inférieure de la contrainte appliquée était égale à 50 % de la résistance à la traction alors que la limite supérieure de la contrainte appliquée variait. Le Tableau I.10 contient les résultats provenant de ces essais, lesquels ont été réalisés à la température ambiante du laboratoire. La résistance à la traction typique de cette barre est de 1255 MPa, et si la limite supérieure de la contrainte en traction appliquée ne dépasse pas 80 % de la résistance ultime, la rupture ne s'effectue pas, même après 2 millions de cycles appliqués (voir Tableau I.10).

Tableau I.10 : Résultats des essais de fatigue en traction pour les barres en PRF FiBRA

($f_{prfu} = 1255 \text{ MPa}$)[Tanigaki et coll, 1989]

Essai	Limite inférieure		Limite supérieure		Intervalle de contrainte [MPa]	Cycles à la rupture ($\times 10^3$)
	Charge [kN]	Contrainte [MPa]	Charge [kN]	Contrainte [MPa]		
1	32,26	645,3	46,97	939,5	294,2	> 2090
2	32,26	645,3	42,52	990,5	345,2	> 3577
3	32,26	645,3	50,99	1019,9	374,6	> 2063
4	32,26	645,3	54,43	1088,5	443,3	305

Les produits en PRFC possèdent une excellente résistance à la fatigue. Pour 2×10^6 cycles, l'armature Leadline (armature produite par Mitsubishi Chemical Corporation) a une limite d'endurance de 1100 MPa à un ratio de contrainte de 0,1. Yagi et coll. (1997) ont testé à la fatigue des produits putrides en PRFC à un ratio de contrainte de 0,1 et ont obtenu une limite d'endurance de 1400 MPa pour un million de cycles et 1200 MPa pour 10 millions de cycles.

I.6.3.3 Durabilité des barres d'armature en PRF :

L'une des principales raisons pour lesquelles l'utilisation de barres en PRF pour armer du béton doit être considérée est que les barres d'acier peuvent se corroder lorsque le béton est soumis à des conditions environnementales agressives, provoquant une perte de résistance des matériaux et une diminution de l'intégrité structurale (ACI 440.1R.01, 2001). Le béton armé exposé aux chlorures contenus dans l'eau salée ou dans les sels de déglçage est particulièrement sujet à la corrosion de l'acier d'armature. Le béton est hautement alcalin et a un pH autour de 12,5 à 13,5 et une alcalinité diminuant avec la carbonatation (Coomarasamy et Goodman, 1997). Les essais de durabilité sont effectués pour déterminer la réduction de la résistance et de la rigidité due au vieillissement naturel des armatures en PRF pour des conditions de service de 50 à 100 ans. Plusieurs chercheurs ont établi des coefficients de réduction pour la résistance et la rigidité tenant compte du type de fibre et des conditions environnementales d'utilisation. Des travaux additionnels sont en cours pour établir les coefficients de calibrage basés sur des résultats obtenus sur des ouvrages en service.

En ce qui a trait aux caractéristiques de durabilité des barres en PRF, veuillez consulter les méthodes d'essais standardisées provisoires (Benmokrane et coll., 1998). Le concepteur devrait toujours consulter le manufacturier des barres en PRF avant de finaliser la conception.

II Présentation de la Méthode des éléments Finis :**II.1 Introduction :**

Les phénomènes physiques sont , le plus souvent , régis par des équations aux dérivées partielles (EDP). Dans cette équation , figurent la fonction inconnue du problème ainsi que ses dérivées partielles successives. Elles peuvent être linéaires ou non linéaires et d'un ordre quelconque.

On se limite au cas des EDP linéaires du second ordre .La résolution exacte de ces équation n'est pas toujours chose aisée .C'est pourquoi On fait appel couramment, aux méthodes numériques approchées telles que : des différences finies , la méthode des éléments finis ,méthode des volumes finis ...etc.

Dans le domaine de la mécanique des structures et des solides, le choix du concepteur porte ,dans la plupart des cas , sur la MEF en raison de ses meilleures capacités vis-à-vis de la MDF dont le champ d'application est moins étendu et ce du point de vue complexité de la géométrie et de maillage.

Dans ce chapitre, on introduit les différents types des EDP. Puis une présentation de la méthode de MEF sera fait en details.

II.2 Historique :

Les mathématiciens et les ingénieurs ont abordé différemment la discrétisation des problèmes continus. Les premiers ont développé des techniques générales s'appliquant directement aux équations différentielles régissant le problème, telle que les approximations aux différences finies, les différents procédés de résidus pondérés ou les techniques approchées de détermination du point stationnaire de fonctionnelle définies de façon adéquate. De son coté, l'ingénieur à souvent une approche plus intuitive du problème en créant une analogie entre les vrais éléments discrets et des parties finies d'un domaine continu.

Les résultats fondamentaux du domaine d'approximation ont été obtenus sous l'impulsion de RITZ et de GALERKINE en 1915. Puis COURANT établit les bases de la M.E.F en montrant que la résolution de certains problèmes de milieux continus est possible en effectuant une discrétisation du domaine en utilisant les méthodes d'approximation variationnelle. Il est important de souligner que l'essor de la méthode des éléments finis a été atteint grâce aux travaux des chercheurs dans le domaine de génie civil (tels que Zienkiewicz) d'où les termes tirés de ce domaine et qui persiste à être utilisés même hors domaine.

II.3 Principe général

La méthode des éléments finis permet donc de résoudre de manière discrète une EDP dont on cherche une solution approchée « suffisamment » fiable. De manière générale, cette EDP porte sur une fonction u , définie sur un domaine. Elle comporte des conditions aux bords permettant d'assurer existence et unicité d'une solution.

Sauf cas particuliers, la discrétisation passe par une redéfinition et une approximation de la géométrie, on considère donc le problème posé sur la géométrie approchée par un domaine polygonal ou polyédrique par morceaux. Une fois la géométrie approchée, il faut choisir un espace d'approximation de la solution du problème, dans la MEF, cet espace est défini à l'aide du maillage du domaine (ce qui explique aussi pourquoi il est nécessaire d'approcher la géométrie). Le maillage du domaine permet d'en définir un pavage dont les pavés sont les éléments finis. Un élément fini est la donnée d'une cellule élémentaire et de fonctions de base de l'espace d'approximation dont le support est l'élément, et définies de manière à être interpolantes.

Bien qu'il existe de nombreux logiciels exploitant cette méthode et permettant de « résoudre » des problèmes dans divers domaines, il est important que l'utilisateur ait une bonne idée de ce qu'il fait, notamment quant au choix du maillage et du type d'éléments qui doivent être adaptés au problème posé : aucun logiciel ne fera tout pour l'utilisateur, et il faut toujours garder un œil critique vis-à-vis de solutions approchées. Pour cela il existe des indicateurs d'erreur et des estimateurs d'erreur qui permettent d'ajuster les différents paramètres.

La solution trouvée, il reste cependant à déterminer les caractéristiques de la méthode ainsi développée, notamment l'unicité de l'éventuelle solution ou encore la stabilité numérique du schéma de résolution. Il est essentiel de trouver une estimation juste de l'erreur liée à la discrétisation et montrer que la méthode ainsi écrite converge, c'est-à-dire que l'erreur tend vers 0 si la finesse du maillage tend aussi vers ∞ .

Dans le cas d'une EDP linéaire avec opérateur symétrique (comme l'est l'opérateur laplacien), il s'agit finalement de résoudre une équation algébrique linéaire, inversible dans le meilleur des cas.

On développe ici la méthode des éléments finis en deux dimensions à valeurs réelles. On suppose que les équations étudiées sont des équations différentielles d'ordre deux.

La méthode est généralisable à des cadres d'espaces de dimension différente ou pour des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur :

- on traite ici le cas d'une solution réelle à une EDP. Les cas où la dimension de la solution serait plus grande se traitent de façon similaire mais nécessitent des écritures plus complètes ; les cas les plus couramment rencontrés sont la dimension 1 (comme ici), 2 ou 3 (pour des problèmes de mécanique), 6 ou 12 (pour des problèmes d'électromagnétisme respectivement réels ou complexes) ;
- les degrés de différentiation supérieurs sont ramenés à un degré moindre par la méthode classique de réduction de degré : on fait intervenir des variables supplémentaires, c'est-à-dire des dérivées partielles des variables de départ (exemple classique : les EDP de la mécanique statique des poutres font intervenir la dérivation partielle d'ordre 4) ; il est parfois possible, pour des degrés supérieurs, d'appliquer plusieurs fois les méthodes de formulation variationnelles afin d'obtenir des ordres plus faibles — en tout cas lorsque le degré de dérivation est pair.

Bien que théoriquement la méthode soit transposable en dimensions supérieures du support, techniquement la complexité de création des discrétisations croît avec la dimension... et pratiquement, on résout rarement des problèmes en dimensions supérieures à 3 — y compris des problèmes de dynamique en espace à 3 dimensions qui pourraient être traités en quatre dimensions mais sont traités en réalité avec une méthode mixte éléments finis « en espace » et en différences finies « en temps »

II.4 les équations aux dérivées partielles :

Les équations aux dérivées partielles sont très importantes pour les ingénieurs. Elles apparaissent constamment en mécanique de solides et de liquides, en thermodynamique, en électromagnétisme et dans d'autres domaines de la physique. Les équations les plus fréquemment rencontrées peuvent être résolues analytiquement. Mais souvent on doit recourir à des méthodes numériques.

Un grand nombre d'équations aux dérivées partielles rencontrées en physique, comme les équations de Laplace, de Poisson, de chaleur et d'onde, sont linéaires et du deuxième ordre, c'est-à-dire que la fonction inconnue u dépend de deux variables x, y et satisfait une équation de la forme

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \quad (\text{II.1})$$

Où les coefficients a, b, c peuvent dépendre de x, y , et où la fonction f est linéaire en $u, \frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$.

L'équation (II.1) est dite de type

Elliptique si $b^2 - 4ac < 0$ (exemple : équation de Laplace)

Parabolique si $b^2 - 4ac = 0$ (exemple : équation de chaleur)

hyperbolique si $b^2 - 4ac > 0$ (exemple : équation d'onde).

II. 5 Les étapes de la méthode des éléments finis :

II.5.1 La Discrétisation et le maillage :

Le problème de l'analyse des solides déformables peut être totalement résolu si l'on connaît le champ de déplacement en tout point du milieu. Il suffit tout simplement de déterminer ce champ; Or dans la pratique, l'évaluation analytique de ce champ est quasiment impossible. C'est pourquoi, pour les systèmes mécaniques, la méthode des éléments finis propose de découper le système réel en un certain nombre d'éléments à géométries simples. Cette procédure est appelée "discrétisation" car le milieu continu est remplacé par une série d'éléments discrets (Figure II.1).

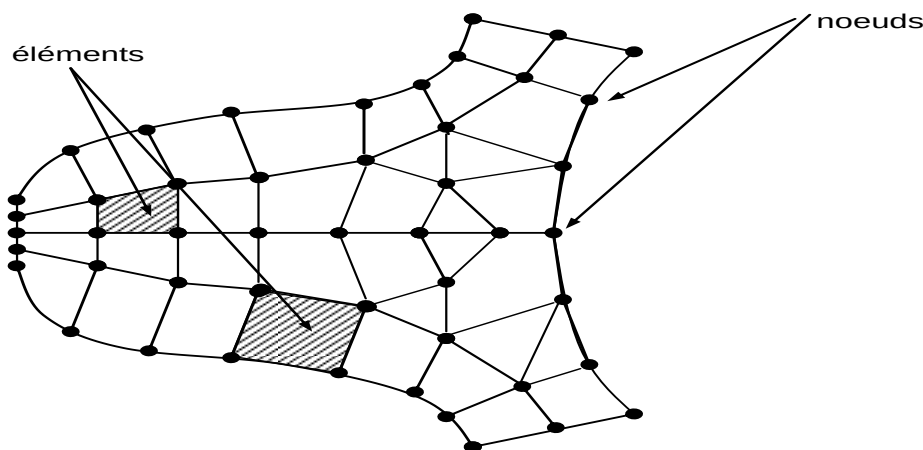
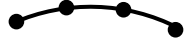
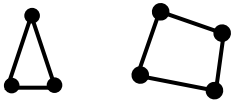
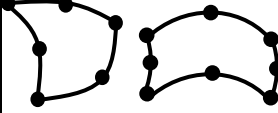
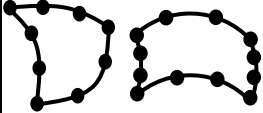
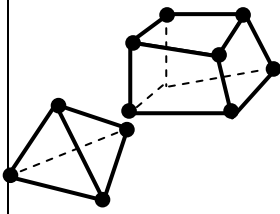
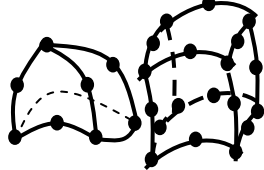
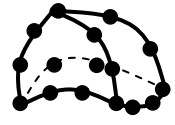
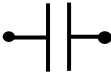


Figure II.1 Discrétisation d'une structure en nœuds et éléments (dent d'une roue dentée)

La Méthode des Eléments Finis a développé une série de types d'éléments finis qui, pour le début, peuvent être classifiés en (Tableau II.1) :

- éléments finis unidimensionnels (généralement des barres) ;
- éléments finis bidimensionnels (plaques et mêmes volumes) ;
- éléments finis tridimensionnels (blocs massifs)

Tableau II.1 : Les types d'éléments finis

Eléments	linéaires	paraboliques (quadratiques)	cubiques
unidimensionnels			
bidimensionnels			
tridimensionnels			
autres types	 Masse	 Ressort	 Contact

II.5.2 Fonctions de forme :

Le point clé de l'analyse par éléments finis est de définir l'interpolation du champ continu

$u(x, y, z)$ à partir des valeurs nodales u_i ; i étant le numéro du nœud considéré. Il est à rappeler que ce champ $u(x, y, z)$ n'est qu'une approximation du champ réel $\hat{u}(x, y, z)$. L'expression générale de l'approximation est ainsi donnée par :

$$\hat{u}(x, y, z) \approx u(x, y, z) = \sum_{\text{nœuds}} N_i(x, y, z) \cdot u_i \quad (\text{II.2})$$

où $N_i(x, y, z)$ est la fonction de forme (ou fonction d'interpolation) associée au nœud i et u_i est la valeur du déplacement au même nœud.

Les fonctions de forme $N_i(x, y, z)$ représentent le poids associé à chacun des nœuds de l'élément. Elles permettent de prédire l'évolution du champ à l'intérieur du domaine d'interpolation .

Les fonctions de forme doivent satisfaire les valeurs nodales. Cette condition implique qu'une fonction $N_i(x, y, z)$ doit avoir la valeur 1 au nœud i et 0 à tous les autres nœuds :

$$N_i(x_j, y_j, z_j) = \begin{cases} 1 & \text{au nœud } j=i \\ 0 & \text{aux nœuds } j \neq i \end{cases} \quad (II.3)$$

II.5.3 Formule générale de la matrice de rigidité :

Rappel sur Relations déformations et déplacements :

La déformation représente la variation des dimensions géométriques d'un corps au voisinage d'un point et peuvent être des déformations linéaires ou angulaires.

Le changement de la position de certains points d'un corps au cours de sa déformation s'appelle déplacement. Les déplacements peuvent être linéaires ou angulaires. (Figure II.2).

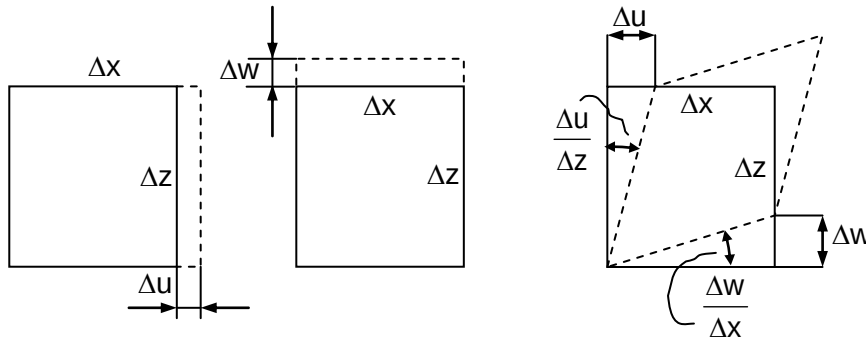


Figure II.2 Rectangle à dimensions incrémentales soumis à la traction suivant les axes x et z et au cisaillement

Les relations qui existent entre les déformations et les déplacements sont :

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta w}{\Delta z} \quad \gamma_{xz} = \frac{\Delta u}{\Delta z} + \frac{\Delta w}{\Delta x} \quad (II.4)$$

Cependant, généralement aussi bien les déplacements suivant l'axe Ox et suivant l'axe Oz sont tous les deux des fonctions de deux variables, $u = u(x, z)$ et $w = w(x, z)$. C'est pourquoi on doit utiliser les dérivées partielles. Dans ce cas, les relations (II.4) deviennent :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{II.5})$$

ou bien :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} \Rightarrow \varepsilon = \partial u \quad (\text{II.6})$$

Dans la MEF, les déplacements sont interpolés à partir des déplacements nodaux, comme ce qui suit

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \Rightarrow u = N\delta \quad (\text{II.7})$$

Ni sont les polynômes d'interpolation et N (ou bien [N]) s'appelle matrice de la fonction de forme. et à partir des relations (II.5) et (II.6) on peut écrire :

$$\varepsilon = \partial N \delta = B \delta, \text{ où } B = \partial N \text{ (ou bien : } \{\varepsilon\} = [B] \cdot \{\delta\}). \quad (\text{II.8})$$

La matrice [B] s'appelle matrice déformation déplacement.

En partant de l'expression de l'énergie de déformation spécifique (énergie rapportée à l'élément de volume) pour un matériau élastique,

$$U_0 = \frac{\{\varepsilon\}^T \cdot [E] \cdot \{\varepsilon\}}{2} \quad (\text{II.9})$$

Où E est la matrice des propriétés du milieu.

on aura :

$$U = \frac{1}{2} \int_V U_0 dV = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \cdot [E] \cdot \{\varepsilon\} dV = \frac{1}{2} \int_V \{\delta\}^T \cdot [B]^T \cdot [E] \cdot [B] \cdot \{\delta\} dV = \frac{1}{2} \{\delta\}^T \cdot [K] \cdot \{\delta\} \quad (\text{II.10})$$

Donc, l'expression suivante

$$[K] = \int_V [B]^T \cdot [E] \cdot [B] dV \quad (II.11)$$

sera la formule générale de la matrice de rigidité d'un élément quelconque.

Pour une matrice $[E]$ des coefficients élastiques donnée, la nature de la matrice de rigidité $[K]$ dépend exclusivement de la matrice $[B]$ qui dépend à son tour de la matrice $[N]$ des fonctions de forme. En d'autres termes, le comportement d'un élément est gouverné par ses fonctions de forme.

II.5.4 Élément de référence :

De manière à simplifier la définition analytique des éléments de formes complexes, on introduit la notion d'élément de référence.

Un élément de référence Ω_r est un élément de forme très simple, repéré dans l'espace de référence, qui peut être transformé de chaque élément réel Ω_e par une transformation géométrique bijective. Au lieu de travailler sur les coordonnées (x, y, z) on travaille sur (ξ, η, ζ) . Un autre intérêt réside dans l'utilisation de l'intégration numérique fortement facilitée par les tableaux disponibles (Figure II.3)

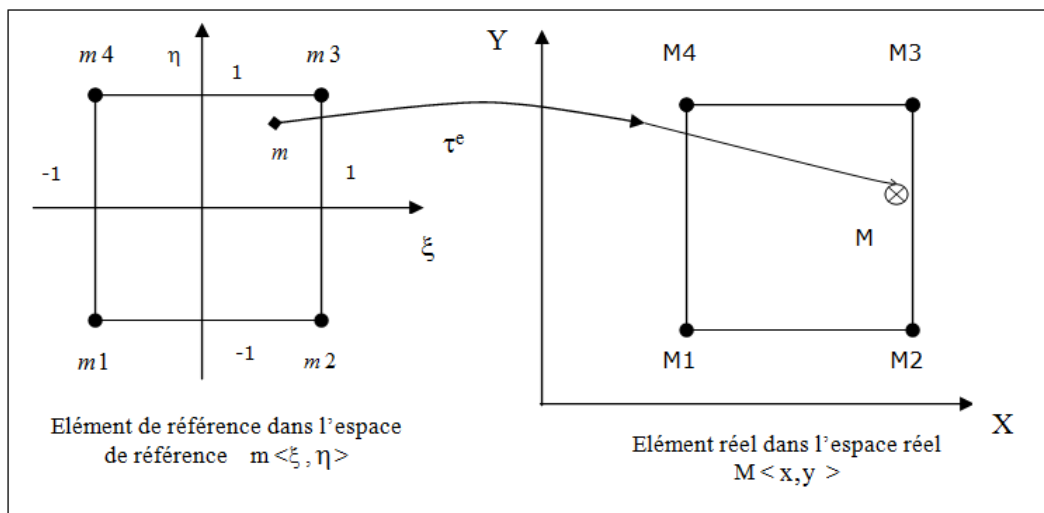


Figure II.3 Présentation de l'élément quadrilatéral à quatre nœuds dans le repère local et global.

II.5.5 Formulation isoparamétrique :

II.5.5.1 Élément isoparamétrique :

Un élément est dit isoparamétrique si les mêmes fonctions d'interpolations sont prises pour le déplacement et la géométrie.

Ceci implique que les nœuds géométriques soient confondus avec les nœuds d'interpolations

La formulation isoparamétrique permet d'avoir par exemple des éléments non rectangulaires, des éléments avec des côtés courbes ou des éléments présentant des singularités utilisés dans la mécanique de la rupture.

A titre d'exemple l'élément quadrilatéral plan à quatre nœuds est exposé

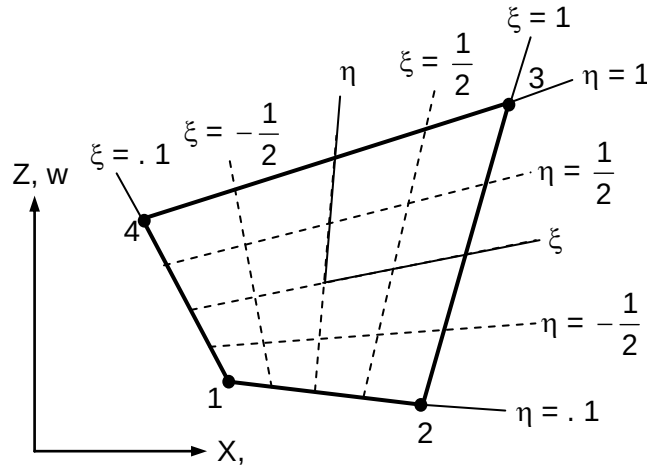


Figure II.4 Élément isoparamétrique à quatre nœuds

Un système de coordonnées auxiliaire doit être introduit afin qu'un quadrilatère puisse être non rectangulaire. Ce système dénommé ξ, η s'appelle système naturel de coordonnées. Son origine, dans le système de coordonnées XZ est située au milieu des coordonnées des nœuds.

Dans le système de coordonnées naturelles ξ, η , les côtés des éléments sont toujours définis par

$\xi = \pm 1$ et $\eta = \pm 1$, indifféremment de la forme ou des dimensions physiques de l'élément ou indépendamment de son orientation dans le système global d'axes de coordonnées XZ . Généralement les axes ξ et η ne sont pas orthogonaux et n'ont pas une orientation particulière par rapport au système d'axes XZ . (Figure II.4)

Les coordonnées d'un point situé à l'intérieur de cet élément sont définies par la relation:

$$X = \sum N_i X_i \text{ et } Z = \sum N_i Z_i \quad (\text{II.12})$$

dans laquelle X_i et Z_i sont les coordonnées des nœuds situés dans les quatre coins et les fonctions d'interpolation (ou fonctions de forme) sont données par:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta); N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta); N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta); N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \quad (\text{II.13})$$

Ces fonctions N_i sont similaires avec eux .

En connaissant les coordonnées ξ et η d'un point, on peut utiliser les relations (II.12) pour calculer les coordonnées X et Z . Les déplacements d'un point quelconque sont interpolés à partir des degrés de liberté nodaux en utilisant les mêmes fonctions de forme:

$$u = \sum N_i u_i \text{ et } w = \sum N_i w_i \quad (\text{II.14})$$

Les déplacements u et w sont parallèles aux axes X et Z , mais pas aux axes ξ et η .

Le terme "isoparamétrique" dérive du fait que les mêmes fonctions de forme N_i sont utilisées pour l'interpolation aussi bien des coordonnées que des déplacements.

Pour l'écriture de la matrice $[B]$ (déformation, déplacement) il faut établir la relation entre les gradients dans les deux systèmes de coordonnées. Considérons l'un de ces gradients la déformation

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial X} \quad (\text{II.15})$$

On ne peut pas écrire immédiatement le résultat parce que u est défini comme un fonction de ξ et η et non pas en fonction de X et Z . Dans ce cas on commence par différentier par rapport à ξ et η en utilisant la règle des chaines:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Z}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_J \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} \\ \frac{\partial u}{\partial Z} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.16})$$

où J s'appelle la matrice de Jacobi (le Jacobien). Les coefficients de la matrice J sont obtenus à partir de la relation (II.12);

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} X_i, \quad \frac{\partial Z}{\partial \xi} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} Z_i, \quad \frac{\partial X}{\partial \eta} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} X_i, \quad \frac{\partial Z}{\partial \eta} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} Z_i \quad (\text{II.17})$$

L'équation (II.15) peut être résolue ainsi:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial X} = J_{11}^* \frac{\partial u}{\partial \xi} + J_{12}^* \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (\text{II.18})$$

Où sont les coefficients de la première ligne de J^{-1} et: J_{11}^* et J_{12}^*

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} u_i; \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} u_i \quad (\text{II.19})$$

Les déformations ε_z et γ_{xz} s'obtiennent de la même façon. Dans ces conditions, la matrice de rigidité sera écrite sous la forme:

$$[k] = \int [B]^T \cdot [E] \cdot [B] dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T \cdot [E] \cdot [B] \cdot t \cdot |J| d\xi d\eta \quad (\text{II.20})$$

où t représente l'épaisseur de l'élément et $|J|$ le déterminant de J . $|J|$ est en fonction des coordonnées, mais pour un rectangle ou un parallélogramme il est constant et a la valeur de, $\frac{A}{4}$ où A est l'aire du rectangle ou du parallélogramme et "4" est l'aire en coordonnées $\xi\eta$.

D'autres éléments isoparamétrique plans ont plus de nœuds, d'où il en résulte plus de fonctions de forme N_i et plus de colonnes dans la matrice $[B]$. Par contre, le Jacobien restera toujours 2×2 (deux lignes et deux colonnes). Pour les éléments type Solide, le Jacobien sera 3×3 et la matrice $[B]$ aura six lignes.

II.5.6 Assemblage et introduction des conditions aux limites :

L'étape de l'assemblage consiste à prendre en compte les contributions de tous les systèmes

élémentaires pour construire un système linéaire global que l'on devra résoudre. La clé de l'assemblage est le tableau d'adressage des degrés de liberté ardes qui permet de passer du système élémentaire local (sur un élément K) au système global (sur tout le domaine) en fonction de la numérotation des degrés de liberté.

Donc l'assemblage est l'opération qui construit la matrice de rigidité globale $[K]$, et la valeur globale des sollicitations $\{F\}$ à partir des matrices élémentaires $[K^e]$ et des vecteurs élémentaires.

$$[K] = \sum_{\text{élément}} [K^e] \quad (\text{II.21})$$

Après assemblage, nous obtenons la forme matricielle suivant :

$$[K]\{U\} = \{F_i\} + \{F_d\} \quad (\text{II.22})$$

$[K]$: la matrice de rigidité globale

$\{U\}$: le vecteur de déplacement

$\{F_i\}$: le vecteur de forces inconnues

$\{F_d\}$: le vecteur de forces données

Pour simplifier les écritures nous présentons dans le cas d'un calcul statique les deux méthodes couramment utilisées pour tenir compte des conditions aux limites, à savoir : la méthode directe et la méthode de pénalisation.

II.5.6.1 Méthode directe :

C'est résolution par blocs, nécessite de modifier (réarranger) les termes des matrices (élimination de ligne . colonne). Elle est coûteuse en temps de calcul, on peut la présenter

sous la forme suivante.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ U_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{d1} \\ F_{d2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F_i \end{bmatrix} \quad (II.23)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (U_i) = K_{21}^{-1} [F_{d1} - K_{12} \bullet U_d] \\ (F_i) = K_{21} \bullet U_i + K_{22} \bullet U_d - F_{d2} \end{cases} \quad (II.24)$$

Dans le cas particulier ou $\{U_d\} = \{0\}$ le seul les termes de $[K_{11}]$ et $[K_{21}]$ sont utiles effet.

$$\begin{cases} (U_i) = K_{21}^{-1} \bullet F_{d1} \\ (F_i) = K_{21} \bullet U_i - F_{d2} \end{cases} \quad (II.25)$$

II.5.6.2 Méthode de pénalité :

La matrice $[K]$ est assemblée sans tenir compte des conditions aux limites puis chaque relation de $u_i = \overline{u_{di}}$ est introduite et en remplaçant

K_{ii} par $K_{ii} + G$ et F_i par $\alpha \overline{u_{di}}$

Avec $\alpha = K_{ii} + G$

G : un nombre très grand par rapport à tous les termes K_{ij}

En pratique on prendra $\alpha = 10^{14} \text{Max}(K_{ij})$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1n} \\ k_{i1} & \dots & k_{ii} + G & \dots & k_{in} \\ k_{n1} & \dots & k_{ni} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_i \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \alpha \overline{u_{di}} \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (II.26)$$

$$\text{Donc l'équation s'écrit : } \alpha u_i + \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} K_{ij} u_j \right) = \alpha \overline{u_{di}} \quad (II.27)$$

Elle admet la solution approchée : $u_i \cong \overline{u_{di}}$ si $\overline{\alpha u_{di}} \gg \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} k_{ij} u_j$ (II.28)

Cette méthode est très simple à utiliser mais elle peut poser des problèmes lorsque la matrice $[K]$ est mal conditionnée et lorsque certaines composantes de $\{u_n\}$ sont grandes.

II.5.7 Les méthodes de résolutions :

Le système géométrique ainsi obtenu après introduction des conditions limites en l'occurrence .

$$[K]\{u\} = \{F\}$$

Sera résolu à l'aide des méthodes de résolutions des systèmes d'équation linéaires que sont classées en deux catégories

- méthodes directes
- méthodes indirectes ou itératives

II.5.7.1 Les méthodes directes :

Parmi ces méthodes, la plus utilisée est la méthode d'élimination de Gauss. Les méthodes directes que nous avons étudiées dans le paragraphe suivant sont très efficaces et elles donnent la solution exacte (aux erreurs d'arrondi près) du système linéaire considéré avec de nombre d'opération limites mais d'autre coté Les méthodes directes ont deux inconvénients principaux. Le premier problème concerne les exigences informatiques, car ces méthodes nécessitent une bonne capacité de mémoire et un temps de calcul long dans le cas de problèmes complexes. La matrice est dispersé (elle contient beaucoup de valeurs nulles) et, plusieurs techniques ont été proposées pour minimiser le travail informatique. Cependant, pour les méthodes en différences et éléments finis, les exigences de stockage peuvent encore s'avérer inévitablement importantes dans le cas de problèmes à trois dimensions. Le deuxième inconvénient concerne les erreurs successives des méthodes directes. Etant donné que beaucoup d'opérations arithmétiques sont effectuées, des erreurs successives peuvent s'accumuler pour certains types de matrices.

II.5.7.1.1 Méthode d'élimination de Gauss et factorisation :

LU La méthode d'élimination de Gauss a pour but de transformer le système $Ax=b$ en un système équivalent (c'est-à-dire ayant la même solution) de la forme $Ux=\hat{b}$, où U est une matrice triangulaire supérieure et $\hat{b}$, est un second membre convenablement modifié convenablement. Ce dernier système peut être alors résolu par une méthode de substitution rétrograde.

Au cours de la transformation, on utilise essentiellement la propriété selon laquelle on ne change pas la solution du système quand on ajoute à une équation donnée une combinaison linéaire des autres équations.

Considérons une matrice inversible $A \in R^{n \times n}$ dont le terme diagonal a_{11} est supposé non nul. On pose $A(1) = A$ et $b(1) = b$. On introduit les multiplicateurs

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \quad i=2,3,\dots,n, \quad (II.29)$$

où $a_{i1}^{(1)}$ désignent les éléments de $A(1)$. On peut éliminer l'inconnue x_1 des lignes

$i = 2, \dots, n$ en leur retranchant m_{i1} fois la première ligne et en faisant de même pour le membre de droite. On définit alors

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1}a_{1j}^{(1)}, \quad i,j=2,\dots,n, \quad (II.30)$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1}b_1^{(1)}, \quad i=2,\dots,n, \quad (II.31)$$

Où les $b_i^{(1)}$ sont les composantes de $b^{(1)}$ et on obtient un nouveau système de la forme

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{bmatrix} \quad (II.32)$$

que l'on note $A(2)x = b(2)$ et qui est équivalent au système de départ. On peut à nouveau transformer ce système de façon à éliminer l'inconnue x_2 des lignes 3, ..., n. En poursuivant ainsi, on obtient une suite finie de systèmes

(II.33)

$$A^{(k)}x = b^{(k)}, \dots, 1 \leq k \leq n$$

où, pour $k \geq 2$, la matrice $A^{(k)}$ est de la forme suivante

$$A^{(K)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & & & & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & 0 & a_{kk}^{(1)} & & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nk}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (\text{II.34})$$

où on a supposé $a_{11}^{(1)} \neq 0$ pour $i=1, \dots, k-1$. Il est clair que pour $k = n$

on obtient alors le système triangulaire supérieur $A^{(n)}x = b^{(n)}$ suivant

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ \vdots & a_{22}^{(1)} & & & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix} \quad (\text{II.35})$$

Pour être consistant avec les notations introduites précédemment, on note U la matrice triangulaire

supérieure $A^{(n)}$. Les termes $a_{kk}^{(k)}$ sont appelées pivots et doivent être évidemment non nuls pour

$k = 1, \dots, n-1$.

Afin d'expliciter les formules permettant de passer du k .ième système au $k+1$.ième, pour

$k = 1, \dots, n-1$, on suppose que $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ et on définit les multiplicateurs

$$\text{on pose alors} \quad m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad i = k+1, \dots, n. \quad (\text{II.36})$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)} \quad i, j = k+1, \dots, n, \quad (\text{II.37})$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)} \quad i = k+1, \dots, n, \quad (\text{II.38})$$

II.5.7.2 Les méthodes indirectes :

L'utilisation des méthodes itératives est généralement plus avantageuse lorsque celles-ci

convergent. Les méthodes de Jacobi, de relaxation ne convergent le plus souvent que dans les cas particuliers (le rayon spectral strictement inférieur de 1, la matrice soit définie positive, etc.). Mais il existe des méthodes itératives beaucoup plus élaborées et qui convergent dans des cas plus généraux que ceux écrits ici, ces méthodes sont beaucoup plus économiques puisqu'il n'est pas nécessaire de stocker en mémoire les coefficients nuls. Aussi il est souvent avantageux d'utiliser des méthodes itératives qui ne donnent pas toujours la solution exacte du système en un nombre fini d'itérations, mais qui donnent une solution approchée à coût moindre qu'une méthode directe, car elles ne font appel qu'à des produits matrice vecteur.

II.5.7.2.1 Les méthodes de Jacobi, et de relaxation :

Dans cette section, nous considérons quelques méthodes itératives linéaires classiques.

Si les coefficients diagonaux de A sont non nuls, on peut isoler l'inconnue x_i dans la i -ème équation, et obtenir ainsi le système linéaire équivalent

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j \right] \quad i=1, \dots, n \quad (II.39)$$

Dans la méthode de Jacobi, pour une donnée initiale arbitraire x_0 , on calcule

$x_i^{(k+1)}$ selon la formule

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right] \quad i=1, \dots, n. \quad (II.40)$$

Cela revient à effectuer la décomposition suivante de la matrice A :

$$P = D, N = D - A = E + F,$$

où D est la matrice diagonale composée des coefficients diagonaux de A , E est la matrice triangulaire inférieure de coefficients $e_{ij} = -a_{ij}$, si $i > j$, $e_{ij} = 0$ si $i \leq j$, et F est la matrice triangulaire supérieure de coefficients $f_{ij} = a_{ij}$ si $j > i$, $f_{ij} = 0$ si $j \leq i$. Ainsi, $A = D - (E + F)$.

La matrice d'itération de la méthode de Jacobi est donc donnée par

$$B_j = D^{-1}(E + F) = I - D^{-1}A \quad (\text{II.41})$$

Une généralisation de la méthode de Jacobi est la méthode de sur relaxation (ou JOR, pour Jacobi over ω relaxation), dans laquelle on se donne un paramètre de relaxation et on remplace (II.57) par

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right] + (1 - \omega) x_i^{(k)} \quad , i=1, \dots, n \quad (\text{II.42})$$

La matrice d'itération correspondante est

$$B_{J\omega} = \omega B_j + (I - \omega)I \quad (\text{II.43})$$

Sous la forme (4.7), la méthode JOR correspond à

$$\text{Cette } X^{(k+1)} = X^{(k)} + \omega D^{-1} r^{(k)} \quad (\text{II.44})$$

méthode est consistante pour tout $\omega \neq 0$. Pour $\omega = 1$, elle conduit à la méthode de Jacobi.

II.6 Erreurs dans l'analyse des logiciels utilisant la MEF :

II.6.1 Erreurs usuelles :

Une matrice de rigidité globale $[K]$ peut être singulière au cas où:

- un ou plusieurs nœuds ne sont pas connectés à un élément le manque de supports, ou bien les supports sont insuffisants pour prévenir des mouvements de corps rigide;
- un mécanisme est créé du fait que le modèle (une partie du modèle) est insuffisamment bloquée;
- une partie de la structure a flambé;

Une matrice $[K]$ singulière déclenche un message d'erreur et arrête le processus d'analyse numérique. Si l'exécution s'arrête ou l'exécution continue mais les résultats sont bizarres il est clair que quelque chose ne va pas et dans ce cas une recherche de l'erreur est absolument nécessaire.

Il est plus dangereux s'il existe des erreurs qui puissent conduire à des résultats plausibles, mais pas précis ou exacts. Dans cette catégorie on peut énumérer:

- une utilisation erronée des types d'éléments; par exemple, les éléments de coque (SHELL) sont utilisés à la place des éléments de type "SOLIDE" ou bien des éléments de symétrie axiale à la place des éléments plans (PLANE éléments);
- les appuis (supports) sont mal disposés en direction, type ou location;
- les chargements sont mal disposés en direction, type, location ou grandeur;
- autres données peuvent être incorrectes; par exemple une utilisation incorrecte des unités de mesure (vitesse angulaire ω en rot/sec au lieu de rad/sec);
- un élément peut être défini plusieurs fois; la duplication est très difficile à détecter à cause du fait qu'il est très difficile d'observer l'erreur lors du traçage;
- une connexion peut être sans aucune signification du point de vue physique.

II.7 Critique des résultats obtenus par MEF :

Cette étape est très cruciale et l'on a tendance à ne pas la prendre au sérieux .

l'erreur de prendre les résultats obtenus pour de l'argent comptant. c'est dans cette étape que le rôle de l'analyse est le plus visible.

L'expérience et les connaissances déjà acquises ainsi qu'une bonne appréhension du phénomène étudié contribuent énormément à distinguer entre une analyse bien menée et celle mal menée

II.8 Utilisation d'un logiciel éléments finis :

Un programme général de type industriel doit être capable de résoudre des problèmes variés de grandes tailles (de mille à quelques centaines de milliers de variables). Ces programmes complexes nécessitent un travail d'approche non négligeable avant d'espérer pouvoir traiter un problème réel de façon correcte. Citons à titre d'exemple quelques noms de logiciels : NASTRAN, ANSYS,

ADINA, ABAQUS, CASTEM 2000, CESAR, SAMCEF, etc. Les possibilités offertes par de tels programmes sont nombreuses :

- analyse linéaire ou non d'un système physique continu ;
- analyse statique ou dynamique ;
- prise en compte de lois de comportement complexes ;
- prise en compte de phénomènes divers (élasticité, thermiques, électromagnétiques, de plasticité,

d'écoulement. . .)pouvant être couplés ;

- problèmes d'optimisation, etc.

L'utilisation de tels programmes nécessite une formation de base minimale.

II.8.1 Déroulement d'une étude :

Pour réaliser une étude par éléments finis, il faut que les objectifs de l'étude soient bien définis.

Le cadre de l'étude, c'est-à-dire le temps et les moyens disponibles, doit être compatible avec les objectifs et la précision cherchée. Supposons toutes ces conditions remplies, l'étude proprement dite est organisée de façon logique selon les étapes suivantes :

Analyse du problème

Cette analyse doit fixer les paramètres du calcul et conduire à la réalisation d'un maillage.

Cette phase basée sur l'expérience personnelle acquise dépend de nombreuses considérations. La difficulté essentielle est de trouver un bon compromis entre les paramètres propres au problème et ceux relatifs à l'environnement de travail. L'analyse du problème nous conduit à préciser un certain nombre d'hypothèses, et à effectuer des choix qui conditionnent les résultats.

II.8.2 Choix du modèle :

En calcul des structures, les plus classiques sont de type : poutre, élasticité plane, axisymétrique, coques mince ou épaisse, tridimensionnel. . . À ces modèles mathématiques correspondent des familles d'éléments finis.

Choix du type d'éléments

Il est fonction de la précision voulue, de la nature du problème, mais aussi du temps disponible.

On choisira les éléments les mieux adaptés dans les familles disponibles.

II.8.3 Choix du maillage :

Il dépend essentiellement de la géométrie, des sollicitations extérieures, des conditions aux limites à imposer, mais aussi des informations recherchées : locales ou globales. Sans oublier bien entendu le type d'outils dont on dispose pour réaliser ce maillage.

II.8.4 Hypothèses de comportement :

Quel modèle retenir pour représenter le comportement du matériau. Le calcul est-il linéaire ? Doit-on modéliser l'amortissement ? Si le matériau est hétérogène ou composite, peut-on utiliser une méthode d'homogénéisation ? Peut-on traduire l'incompressibilité du milieu ?

Lors d'une étude, on peut être amené à utiliser des éléments finis nouveaux. Il est indispensable de vérifier leur comportement sur des problèmes élémentaires si possible proches de l'étude menée. L'ouvrage « Guide de validation des logiciels de calculs des structures, AFNOR technique 1990 » contient des cas tests pouvant servir pour de nombreux problèmes. Ces cas tests permettent de comparer la solution obtenue avec d'autres solutions numériques ou analytiques. Ce travail préliminaire est utile pour former sa propre expérience et permet de valider l'utilisation du modèle testé.

II.8.5 Création et vérification des données :

Cette étape dépend du logiciel utilisé. La syntaxe utilisée pour définir le jeu de données est définie dans le mode d'emploi du bloc fonctionnel correspondant. En sortie, un fichier est créé, qui contient toutes les informations nécessaires à l'exécution des calculs. Les vérifications relatives au jeu de données se font généralement graphiquement, grâce à un module informatique appelé préprocesseur.

Différents contrôles peuvent être utilisés pour valider le jeu de données :

- vérification de la géométrie de la pièce et du maillage ;
- vérification de la prise en compte des sollicitations et des conditions cinématiques (liaisons) imposées à la structure ;
- vérification des propriétés mécaniques utilisées.

Pour des problèmes spécifiques, d'autres contrôles seront envisagés. L'objectif d'éviter de faire tourner un calcul inutilement. Ceci d'autant plus que la recherche d'une solution acceptable pour un problème donné est rarement le résultat d'un seul calcul.

II.8.6 Exécutions du calcul :

Ce bloc, le plus coûteux en temps machine est souvent exécuté en tâche de fond. Un fichier de résultats permet de vérifier que les différentes phases de calculs se sont correctement déroulées :

- interprétation des données, vérification des paramètres manquants ;
- construction des matrices, espace utile pour les gros problèmes ;
- singularité de la matrice raideur, problème de conditions aux limites ou de définition des éléments ;

- convergence, nombre d'itérations, etc.

Ce fichier peut contenir aussi les résultats du calcul (déplacements, résidus, contraintes. . .) ce qui lui confère dans ce cas un volume généralement très important. Il peut arriver que le calcul échoue.

II.8.7 Exploitation des résultats :

Les calculs demandés dans le cahier des charges ont le plus souvent pour objectif de valider ou de vérifier le dimensionnement d'une structure. Les résultats obtenus et les conclusions relatives aux phénomènes à étudier devront être présentés de façon synthétique : tableaux, courbes, visualisation. Cela justifie largement l'utilisation d'un post-processeur, qui propose des outils

pour sélectionner les informations que l'on veut étudier.

Attention, lors de l'utilisation de ces outils, il faut savoir ce que cache l'information qui vous est proposée graphiquement, sachant que celle-ci est construite à partir de résultats discrets :

- valeur moyenne sur un élément : comment est-elle définie ?
- valeur maximale sur l'élément : comment est-elle calculée ?
- valeurs aux nœuds (écarts entre les éléments) : à quoi correspondent-elles ?
- les courbes d'iso-contraintes ont-elles une signification ? etc.

Différentes vérifications doivent être effectuées pour valider les résultats. Elles poussent, dans la plupart des cas, à remettre en cause le modèle pour en créer un nouveau, dont on espère qu'il améliorera la solution précédente.

Pour valider une solution, il faut procéder dans l'ordre, en estimant dans un premier temps la précision du modèle. Puis lorsque celle ci est jugée suffisante, nous procédons à sa validation. Les indicateurs sur la précision du modèle sont généralement locaux. Ils concernent des informations élémentaires calculées aux nœuds ou aux points d'intégration 7, ces informations sont très souvent

fournies en valeur moyenne sur l'élément. Les indicateurs locaux sur la précision d'un modèle mécanique peuvent être :

- discontinuité des contraintes entre des éléments adjacents. Le plus simple, pour un matériau isotrope, est de visualiser la contrainte équivalente de Von Mises, cela permet d'avoir une idée des zones fortement chargées ayant un fort gradient de contrainte. Ces zones seront l'objet de toute notre attention ;

- valeur du tenseur des contraintes sur les bords libres (certaines valeurs doivent être nulles). En pratique, il faudra estimer ces valeurs à partir des valeurs obtenues aux points d'intégration;

- densité d'énergie interne de déformation sur chaque élément, l'idéal étant d'avoir un écart le plus faible possible.

Ayant les informations sur la qualité de la solution, différents contrôles peuvent être envisagés pour valider votre modèle :

- ordre de grandeur des résultats obtenus ;
- vérification des hypothèses du modèle ;
- justification des choix de départ.

La comparaison des résultats des différents modèles permet d'améliorer puis de valider un modèle final. Une fois la fiabilité du modèle assurée, on peut conclure sur l'adéquation entre la structure et le cahier des charges. La synthèse de ces calculs préliminaires est indispensable car elle vous permet de justifier et de définir les limites du (des) modèle(s) retenu(s).

III Etude numérique de l'effet de chevauchement des barres en PRF ancrées dans le béton sous basses température :

III.1 Introduction :

Le modèle numérique est établi à l'aide de la méthode des éléments finis, en utilisant le logiciel ADINA, afin d'étudier l'effet de chevauchement vertical des deux barres en PRFV sur le comportement des poutres en béton armé sous basses température. Cette étude permet d'analyser les contraintes et les déformations thermiques dans l'enrobage du béton et les barres en PRF des poutres sous variation de température (ΔT) allant de 0 à - 60°C en variant le rapport d'enrobage du béton au diamètre de la barre en PRF (c/d_b). Aussi, elle permet de déterminer la variation de température (ΔT_{cr}) produisant la première fissure dans le béton à l'interface armature/béton et à l'interface des deux barres/béton ainsi que la variation de température (ΔT_{sp}) au-delà de laquelle l'enrobage du béton est totalement fissuré en fonction du rapport (c/d_b).

III.2 Description des poutres :

Trois différentes sections rectangulaires ($b \times h$) des poutres en béton ont été utilisées à savoir : 76×100 ; 100×125 et 100 mm×150 mm. La longueur des poutres a été de 380 mm. Les poutres ont été renforcées avec deux barres en PRF de verre (PRFV). Les détails des poutres sont présentés dans le Tableau III.1 et la Figure III.1. Les enrobages en béton sélectionnés ont été conçus de façon à obtenir une large gamme du rapport d'épaisseur d'enrobage du béton au diamètre de la barre en PRF (c/d_b) variant de 1,0 à 3,2. Comme expliqué dans le Tableau III.1, l'identification des poutres indique la forme (P = prismatique), suivie par le diamètre de la barre en PRF et l'épaisseur d'enrobage du béton.

Tableau III .1 Détails des poutres en béton armé de barres en PRFV.

Echantillons	Largeur d'échantillons b' (mm)	Hauteur d'échantillons h (mm)	Diamètre de barre d_b (mm)	Enrobage du béton c (mm)	c/d_b
P.#10.20 *	76	100	9,5	20	2,1
P.#10.25	76	100	9,5	25	2,6
P.#10.30	76	100	9,5	30	3,2
P.#13.20	76	100	12,7	20	1,6
P.#13.25	76	100	12,7	25	2,0
P.#13.30	76	100	12,7	30	2,5
P.#16.20	76	100	15,9	20	1,3
P.#16.25	76	100	15,9	25	1,6
P.#16.30	76	100	15,9	30	1,9
P.#19.20	100	125	19,1	20	1,0
P.#10.25	100	125	19,1	25	1,3
P.#19.30	100	125	19,1	30	1,6
P.#25.25	100	150	25,4	25	1,0
P.#25.30	100	150	25,4	30	1,2
P.#25.35	100	150	25,4	35	1,4

* P : poutre prismatique en béton ; #10 : diamètre nominal de la barre en PRFV ;
 20 : épaisseur d'enrobage du béton en mm.

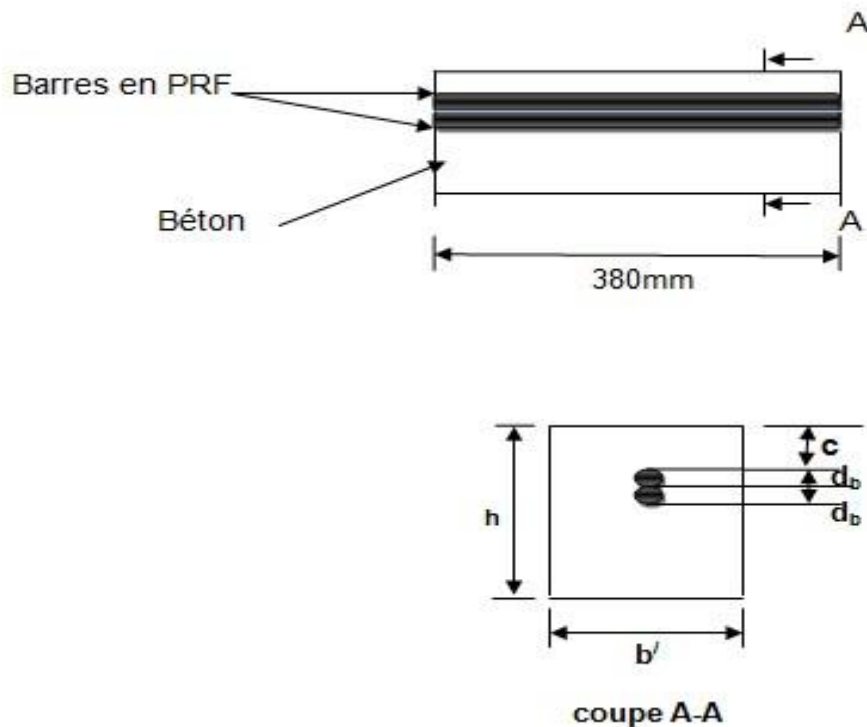


Figure III .1 Géométrie de poutre en béton armé de deux barres d'armature en PRF de verre (PRFV)

III.3 Caractéristiques des matériaux

III.3.1 Armatures en PRFV

Les propriétés mécaniques en traction des barres en PRF de verre (PRFV) ont été déterminées expérimentalement selon les recommandations du guide ACI 440.3R-04. La résistance à la traction ultime f_{fu} , le module d'élasticité longitudinal E_l et la déformation ultime sont présentés dans le Tableau III.2. Le coefficient de Poisson longitudinal ν_{lt} a été aussi déterminé expérimentalement, sa valeur a été trouvée égale à $0,28 \pm 0,02$. Le module d'élasticité transversal E_t et le coefficient de Poisson transversal ν_{tt} , ont été évalués théoriquement leurs valeurs ont été trouvées égales à 7,1 GPa et 0,38 respectivement. [ZAIDI, 2006]

Tableau III .2 Propriétés mécaniques des barres en PRFV Isorod.

Désignation de barre	Diamètre de barre, d_b [mm]	Résistance ultime à la traction*, f_{tu} [MPa]	Module d'élasticité longitudinal*, E_l [GPa]	Déformation Ultime en traction (%)
N°.10	9,5	627 ± 22	42 ± 1	1,8 ± 0,2
N°.13	12,7	617 ± 16	42 ± 1	1,5 ± 0,2
N°.16	15,9	535 ± 9	42 ± 1	1,4 ± 0,2
N°.19	19,1	600 ± 15	40 ± 1	1,5 ± 0,2
N°.25	25,4	N/a	N/a	N/a

* Basé sur 5 échantillons identiques

III.3.2 Béton

Les propriétés mécanique et physique du béton telle la résistance à la compression f_{c28} , la résistance à la traction f_{ct28} , le module d'Young E_c , coefficient de Poisson ν_c , la densité du béton γ_c , coefficient d'expansion thermique α_c , sont résumées dans le Tableau III.3.

Tableau III .3 Propriétés du béton.

f_{c28} [MPa]	f_{ct28} [MPa]	E_c [MPa]	ν_c	α_c [°C]	Densité γ_c [g/cm ³]
40	4,1	28000	0,17	1,16.10 ⁻⁵	2,4

III.4 Modèle numérique établi à l'aide du logiciel ADINA :

III.4.1 Définition du logiciel :

ADINA : cette abréviation composée des lettres significatives ordonnées (**A** : Automatic; **D** : Dynamic ; **I** : Incremental ; **N** : Nonlinear; **A** : Analysis), est un programme d'éléments finis pour la simulation des phénomènes physiques.

III.4.2 Etapes de modélisation des poutres :

a) Géométrie et coordonnées des points de la section de la poutre modélisée :

Vue la symétrie de la section de la poutre prismatique par rapport à l'axe oz , l'étude peut être effectuée uniquement pour la moitié de la section. A titre d'exemple, les coordonnées des points de la section de la poutre P. #10.20 sont données par le Tableau III.4 et Figure III.2.

Tableau III .4 Coordonnées des points de la surface considérée (P.#10.20)

Point #	$X_2 \ll Y \gg$	$X_3 \ll Z \gg$
1	38.0	100.0
2	0.0	100.0
3	0.0	0.0
4	38.0	0.0
5	0.0	80.0
6	0.0	75.25
7	0.0	70.5
8	0.0	65.75
9	0.0	61.0
10	3.35875	78.608
11	4.75	75.25
12	3.35875	71.89125
13	3.35875	69.108
14	4.75	65.75
15	3.35875	62.39125
16	38.0	75.25
17	38.0	65.75
18	38.0	70.5

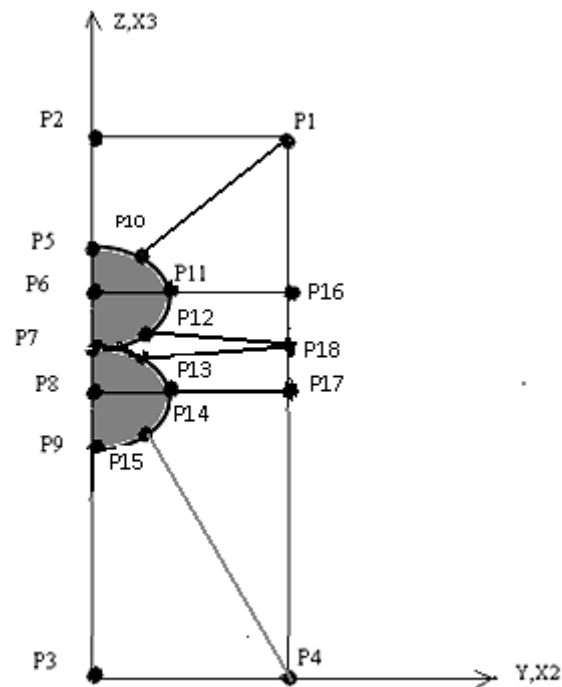


Figure III .2 Partie de la section de la poutre considérée dans l'étude numérique

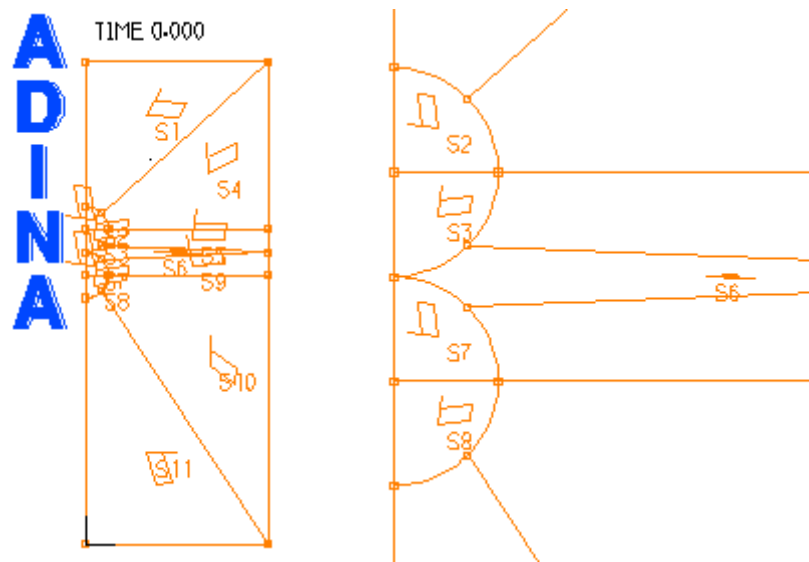


Figure III .3 Géométrie des éléments et les points considérés

b) Conditions aux limites :

L'étude du modèle s'effectue en deux dimensions (2D) car les déformations thermiques transversales dues à l'effet de la compatibilité des déformations axiales sont négligeables. Le nombre de degré de liberté à considérer est égal à 2, donc seulement les déplacements suivants oy et oz sont considérés (Figure III.4) :

- à $z = 0$ $U_z = 0$ et $U_y \neq 0$
- à $y = 0$ $U_z \neq 0$ et $U_y = 0$

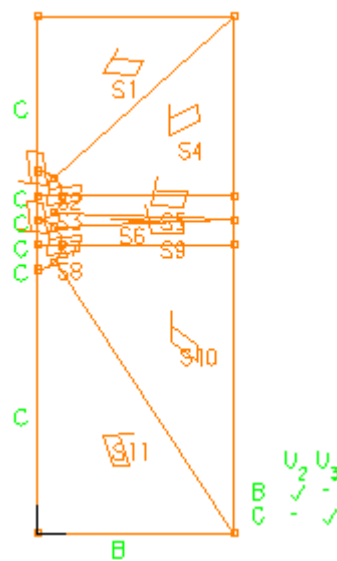


Figure III .4 Conditions aux limites

c) Conditions de chargement :

La variation de température ΔT est appliquée statiquement de façon uniforme et homogène sur toutes les surfaces des deux matériaux, béton et armature en PRFV, comme le montre la Figure III.5.

La variation de température ΔT diminue de 0 à -60°C par incrément de -5°C (Tableau III .5).

Tableau III .5 Variation de température pour chaque incrément du temps.

temps	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ΔT ($^\circ\text{C}$)	0	-5	-10	-15	-20	-25	-30	-35	-40	-45	-50	-55	-60

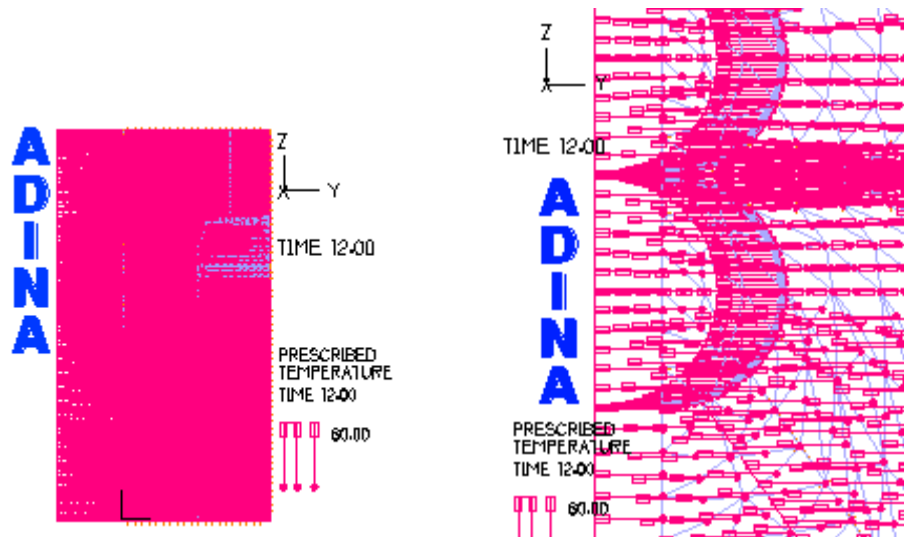


Figure III .5 Conditions de chargement

d) Propriétés des matériaux :

Le béton est considéré comme un matériau de comportement non linéaire. La Figure III .6 montre l'allure de la courbe des contraintes-déformations du béton utilisée dans le programme ADINA.

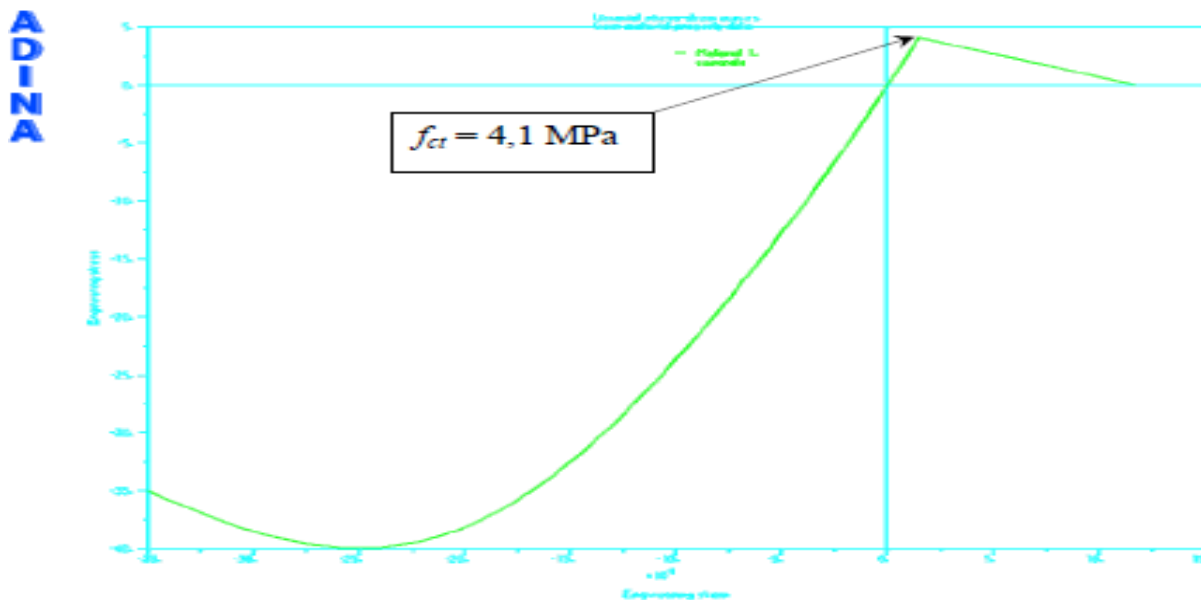


Figure III .6 Allure de la courbe contraintes-déformations du béton utilisée dans ADINA

e) Maillage :

- Choix de l'élément du maillage :

On choisit un type de maillage de forme triangulaire à 6 nœuds, en utilisant logiciel ADINA, La surface de chaque matériau est divisée à des éléments de forme triangulaire à 6 nœuds (Figure III .7)

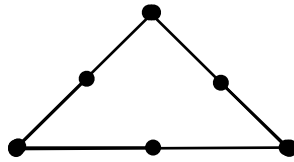


Figure III .7 Élément triangulaire de maillage

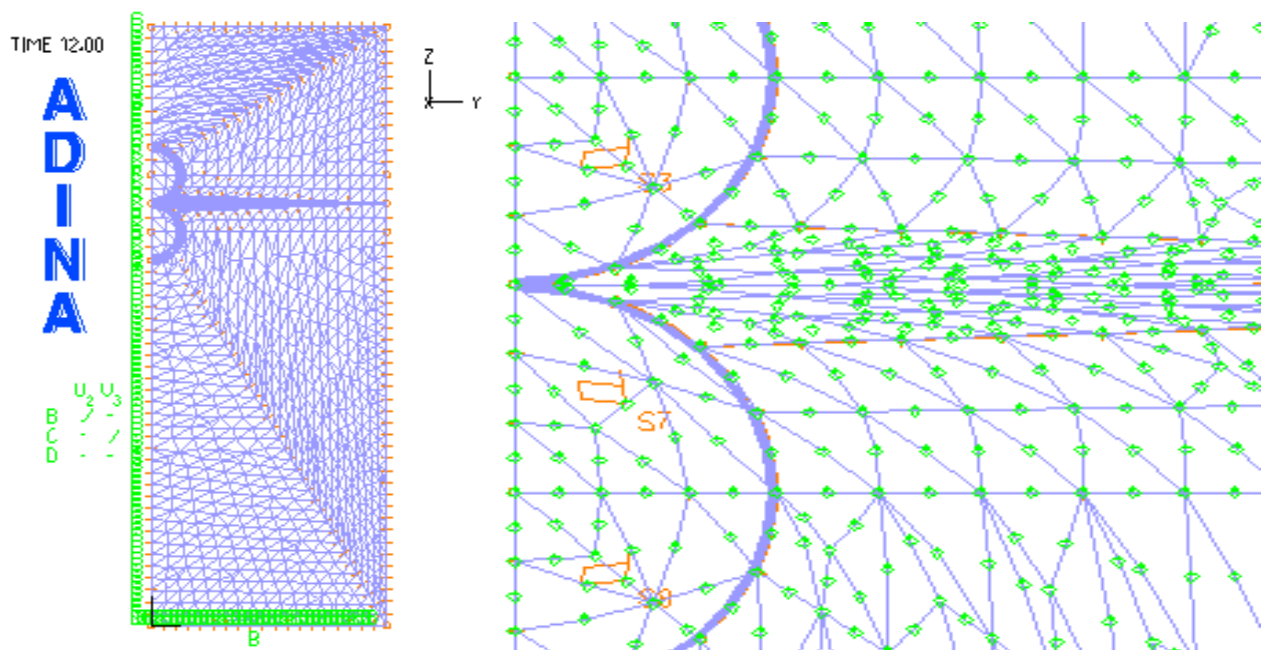


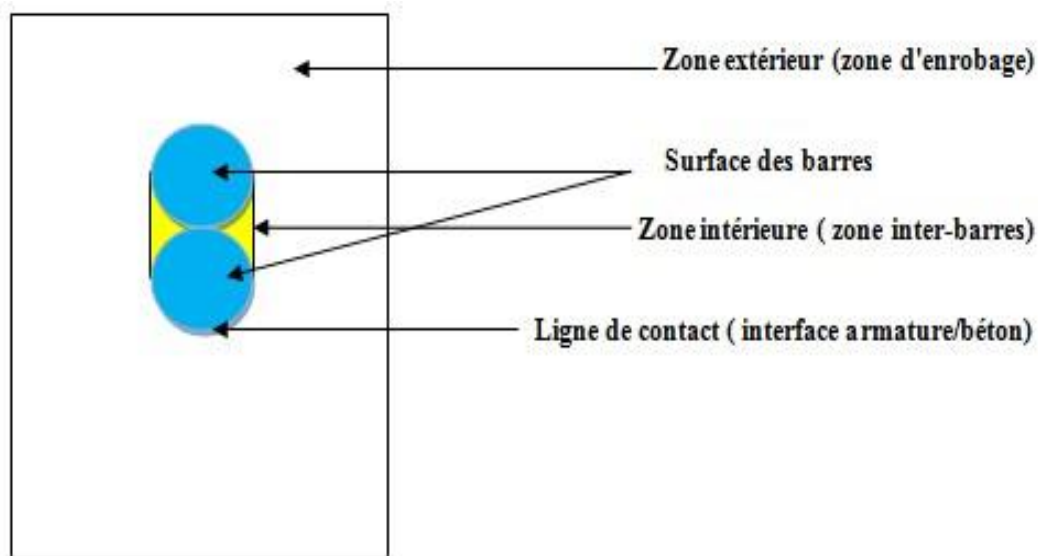
Figure III .8 Maillage des surfaces de béton et barres en PRFV

- Comparaison entre les zones de béton considérées pour différentes barres :

Le Tableau III .6 et figure III.9 montrent la comparaison entre les zones de béton considérées dans cette étude pour les différents diamètres de barres à la zone de béton qui se trouve proche de ligne de contact des deux barres subie à l'effet double de la pression des 2 barres .

Tableau III.6 Comparaison entre les différentes zone considérées dans cette étude.

Diamètre de barre (mm)	9,5	12,7	15,9	19,1	25,4
Surface de béton entre les barres (mm ²)	19,4037	34,6773	54,3541	78,4341	138,7094
Surface des barres (mm ²)	141,693	253,225	396,912	572,752	1012,901
Ligne de contact (barre-béton) (mm)	59,66	79,756	99,852	119,948	159,512

**Figure III .9** Différentes zones de béton considérées

III.5 Analyse des résultats numériques :

III.5.1 Etude des contraintes thermiques :

Les Figures III.10 à III.14 montrent les courbes des contraintes de traction radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature/béton des zones extérieure et intérieure(Figure III.9) des poutres prismatiques en béton armé de deux barres en PRFV chevauchées pour des rapports de l'épaisseur d'enrobage du béton au diamètre de la barre en PRF (c/d_b) variant entre 1,0 et 3,2 . À partir de ces figures, on peut remarquer que la première fissure est produite dans le béton à l'interface armature/béton lorsque la contrainte de traction radiale du béton atteint la résistance à la traction du béton (f_{ct}) dont la valeur est de 4,1 MPa. On peut aussi remarquer que la variation de température (ΔT_{cr}) produisant la première fissure dans le béton à l'interface armature/béton de la zone d'enrobage (zone extérieure ; Figure III.9) varie de -20°C à -30 °C pour un rapport de l'épaisseur d'enrobage du béton au diamètre de la barre en PRF

(c/d_b) variant entre 1 et 3,2. Cependant, la valeur de ΔT_{cr} , à l'interface des 2 barres/béton de la zone intérieure, est autour de $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ pour (c/d_b) variant entre 1 et 3,2 qui est inférieure à celle trouvée à l'interface armature/béton de la zone d'enrobage. Ceci est due à la forte concentration des contraintes de traction dans la zone de béton située entre les barres à cause de l'effet de double pression exercées par les deux barres en PRFV sous basses température.

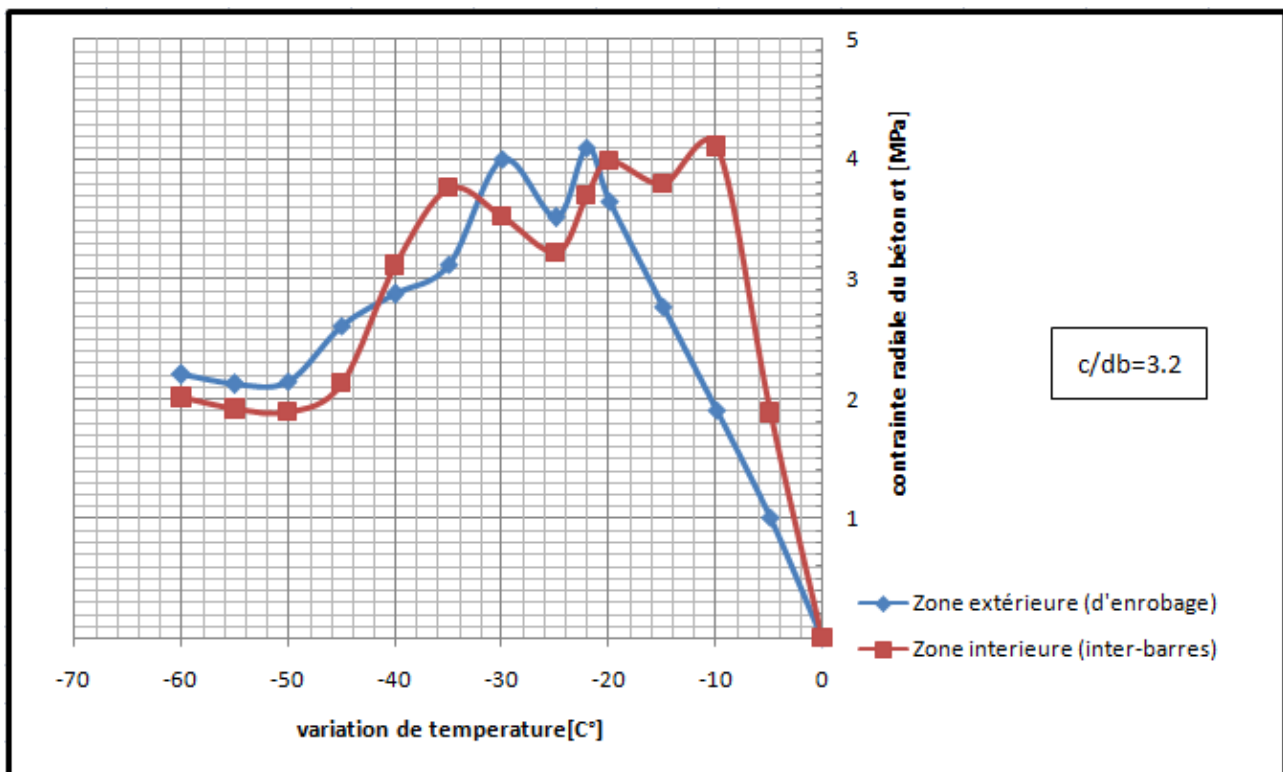


Figure III.10 Contrainte de traction radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone d'enrobage et la zone inter-barres pour $c/d_b = 3.2$ (Comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#10.30)

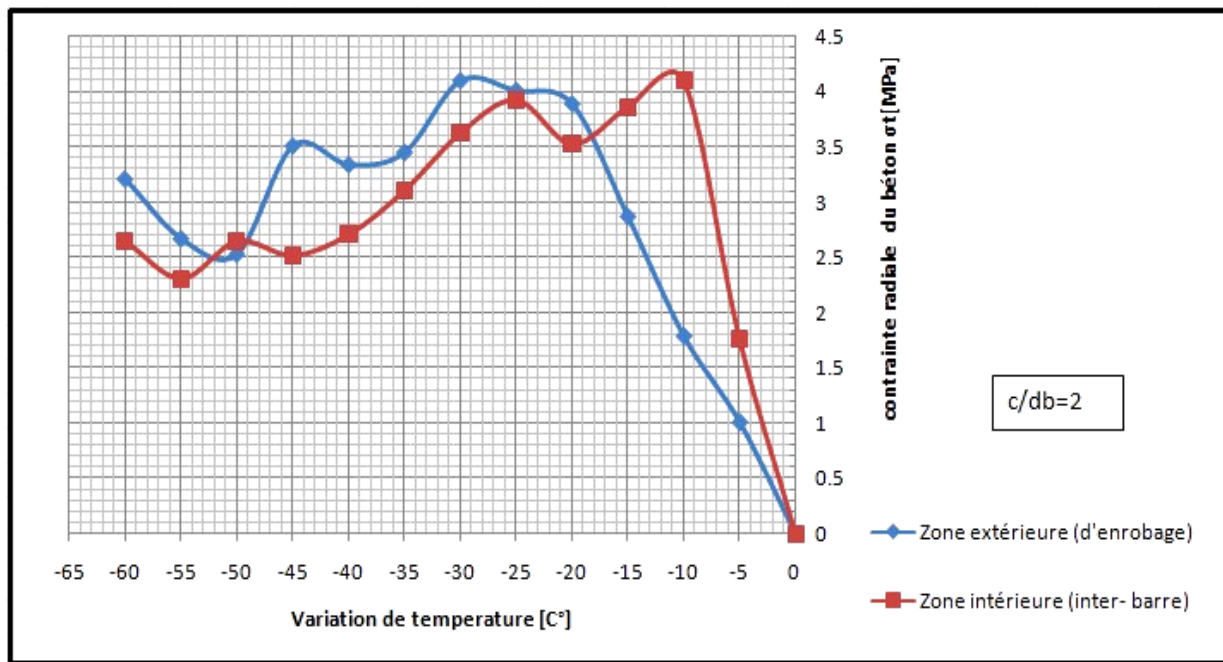


Figure III.11 Contrainte de traction radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone d'enrobage et la zone inter-barres pour $c/d_b = 2$ (Comportement non linéaire de poutre prismatique en béton P.#13.25)

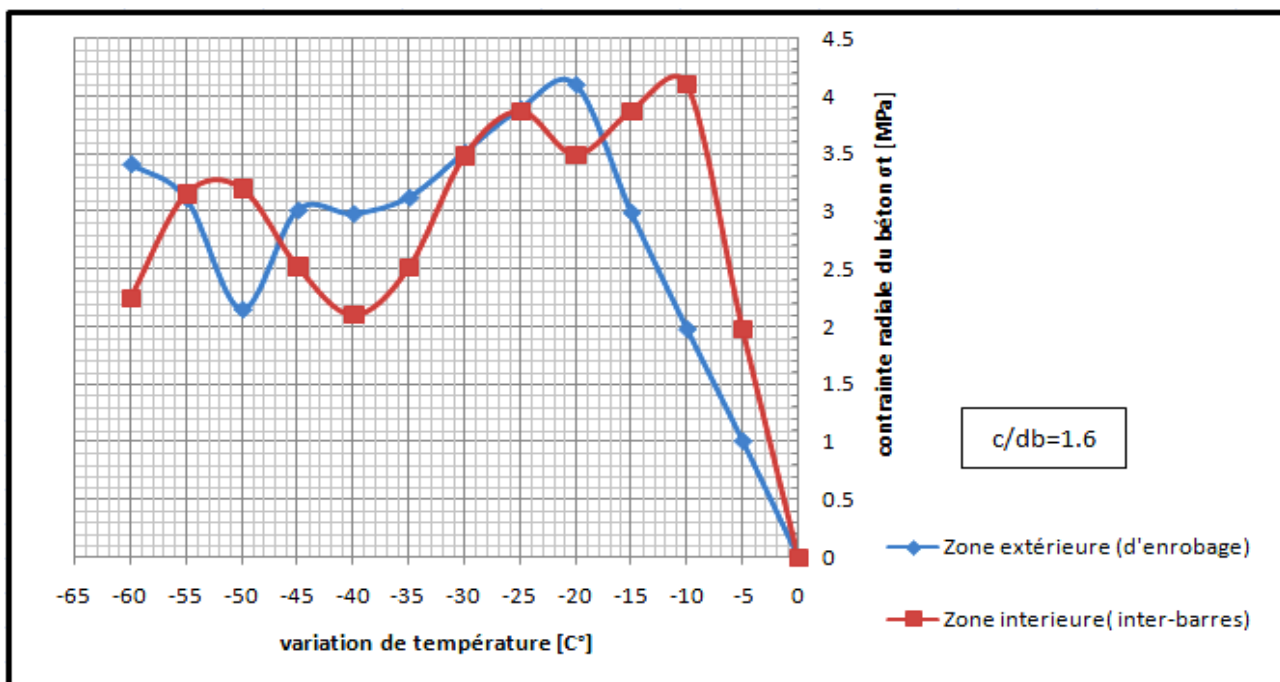


Figure III.12 Contrainte de traction radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone d'enrobage et la zone inter-barres pour $c/d_b = 1.6$ (Comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#16.25)

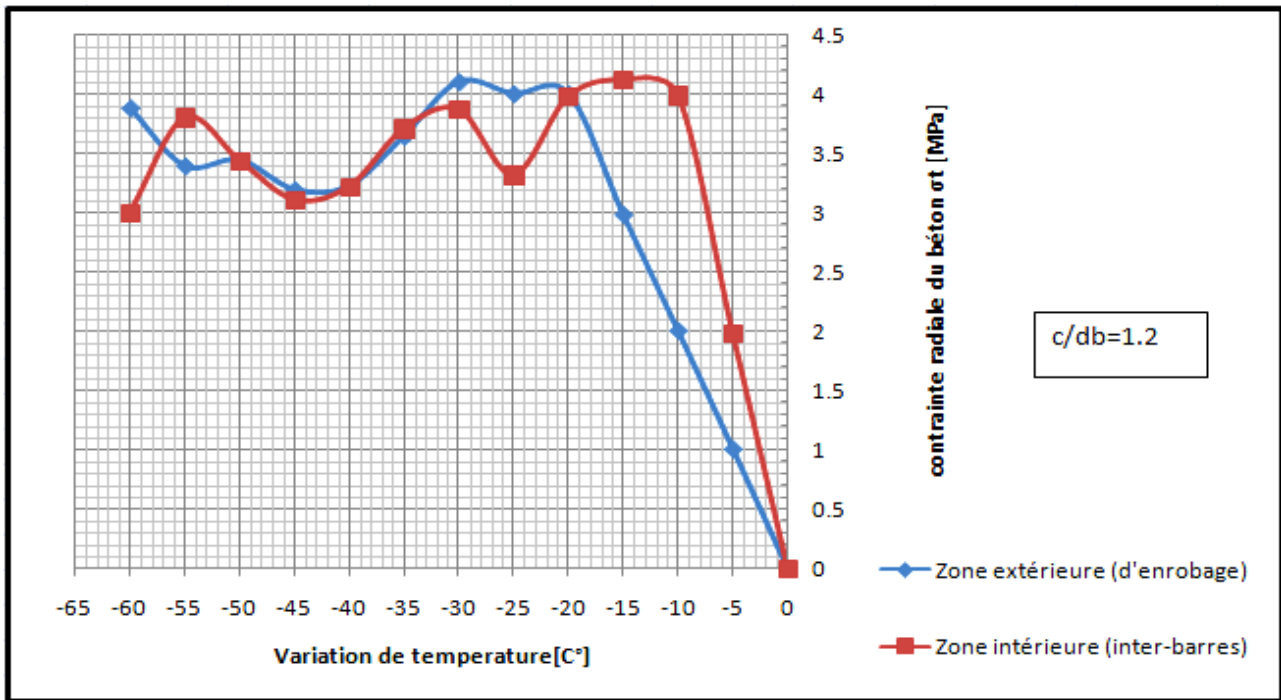


Figure III.13 Contrainte de traction radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone d'enrobage et la zone inter-barres pour $c/d_b = 1.2$ (Comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#25.30)

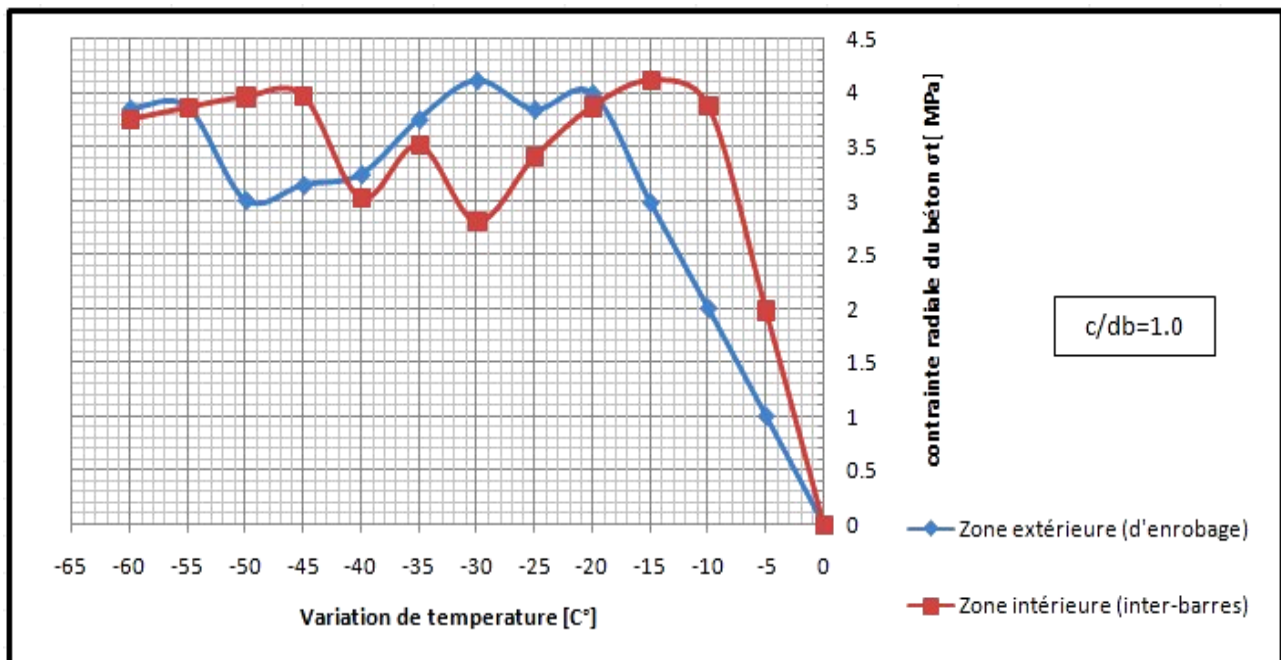


Figure III.14 Contrainte de traction radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone d'enrobage et la zone inter-barres pour $c/d_b = 1.0$ (Comportement non linéaire de la poutre prismatique en béton P.#19.20)

III.5.2 Etude de la formation des premières fissures :

-D'après les Figures III.10 à III.14 on remarque que les premières fissures apparaissent à l'interface armature/béton à ΔT_{cr} autour de -30°C pour la zone extérieure (zone d'enrobage) et à ΔT_{cr} autour de -15°C pour la zone intérieure(zone inter-barres) .

-Le tableau III.7(a) donne les valeur de ΔT_{cr} obtenue par ADINA .

Tableau III.7(b) Les valeurs de ΔT_{cr} en fonction de c/d_b obtenue par ADINA .

c/d_b	$\Delta T_{cr} [^{\circ}\text{C}]$	
	intérieure	extérieure
1,00	-15	-30
1,20	-15	-30
1,30	-15	-30
1,40	-15	-30
1,60	-15	-30
1,90	-15	-30
2,00	-10	-30
2,10	-10	-30
2,50	-10	-30
2,60	-10	-30
3,20	-10	-30

-Grâce aux courbes des contraintes de traction radiale à l'interface armature/béton on peut faire une interpolation linéaire pour chaque courbes dans l'intervalle $[0^{\circ}\text{C} ; \Delta T_{\text{cr}}]$ ce qui donne une forme unique pour chaque courbe

$$\sigma_{\text{ct}} = a * \Delta T \quad (\text{III.1})$$

sachant que la contrainte limite de traction de béton est atteinte lorsque $\sigma_{\text{ct}} = 4,1\text{MPa}$ qui correspond à une variation de température ΔT_{cr} . Donc, on peut écrire

$$\sigma_{\text{ct}} = 4,1\text{MPa} = a * \Delta T_{\text{cr}} \quad (\text{III.2})$$

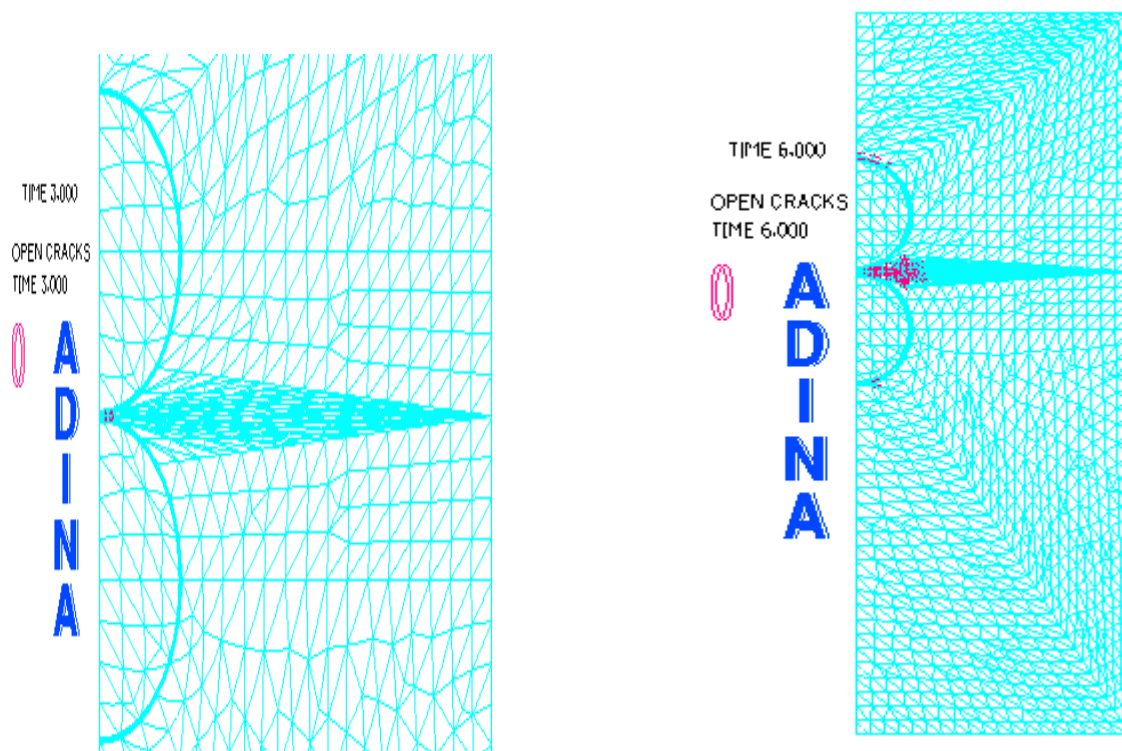
Tableau III.7(b) Les valeurs de ΔT_{cr} en fonction de c/d_b pour chaque zone.

c/d_b	$\Delta T_{\text{cr}} [^{\circ}\text{C}]$	
	intérieure	extérieure
1,00	-10.30	-26,97
1,20	-10.26	-26,21
1,30	-10.27	-26,14
1,40	-10.30	-25,94
1,60	-9.68	-25,75
1,90	-10.53	-25,62
2,00	-9.46	-25.56
2,10	-9.70	-25,49
2,50	-9.68	-25,28
2,60	-9.48	-25,21
3,20	-9.70	-22,16

III.5.3 Etude de Formation des fissures circonférentielles dans les poutres :

La Figure III.15 montre la variation de température (ΔT_{cr}) produisant les premières fissures à l'interface armature/béton pour les poutres P.#19.20 et P.#25.30. On remarque que les premières fissures apparaissent à $\Delta T_{cr} = -10^\circ\text{C}$ et -15°C respectivement pour la zone intérieure (inter- barres) et $\Delta T_{cr} = -30^\circ\text{C}$ pour la zone extérieure (zone d'enrobage).

La Figure III.16 montre la variation de température (ΔT_{sp}) à laquelle l'enrobage du béton et complètement fissuré pour les poutres P.#19.20 et P.#25.30. On remarque que l'enrobage est totalement fissuré à $\Delta T_{sp} = -60^\circ\text{C}$ et $\Delta T_{sp} = -45^\circ\text{C}$ pour les poutres P.#19.20 et P.#25.30 respectivement.



(a) À la zone inter-barres (intérieure) $\Delta T_{cr} = -10^\circ\text{C}$.

(b) À la zone d'enrobage (extérieure) $\Delta T_{cr} = -30^\circ\text{C}$.

Figure III.15 Formation des premières fissures circonférentielles dans le béton à l'interface armature/béton à la zone inter-barres et la zone d'enrobage à la variation de température ΔT_{cr} (Poutre P.#19.20 ayant $c/d_b = 1$)

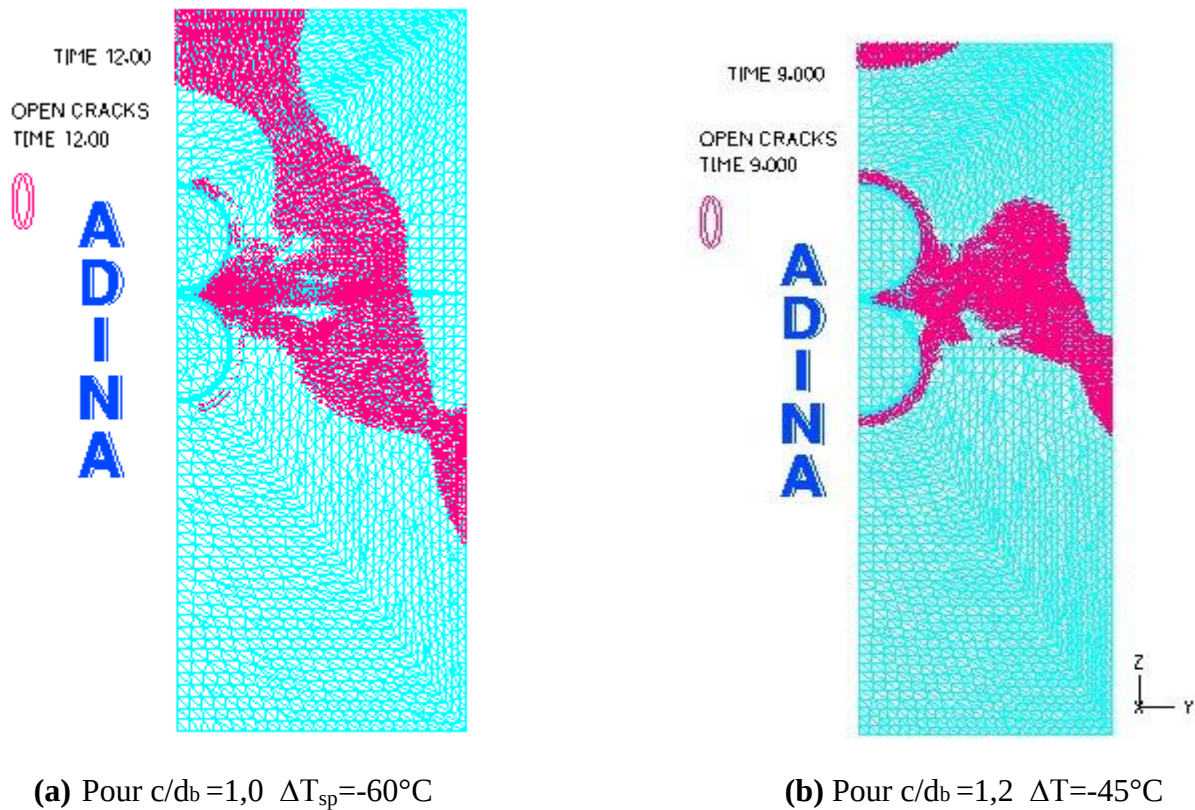


Figure III .16 Fissuration de l'enrobage du béton (Poutre P.#19.20 ayant $c/d_b=1,0$; $\Delta T_{sp}=-60^\circ\text{C}$) et poutre P # 25.30 ayant $c/d_b = 1,2$; $\Delta T= -45^\circ\text{C}$)

Le tableau III.8 présente les valeurs de la variation de température ΔT_{sp} , à partir de laquelle l'enrobage du béton est complètement fissuré, en fonction du rapport d'épaisseur d'enrobage du béton au diamètre de la barre en PRFV (c/d_b), des poutre en béton armé de deux barres en PRFV chevauchées, on remarque que la rupture d'enrobage de béton se fait à une variation de température ΔT_{sp} varie de -45°C à -60°C pour un rapport de $c/d_b = 1$ à $1,9$, cependant pour des rapport $c/d_b \geq 2$ aucune fissure circonférentielle n'atteint la surface externe de l'enrobage .

Tableau III .8 Variation de température (ΔT_{sp}) produisant la rupture de l'enrobage du béton des poutres en béton armé de deux barres en PRFV chevauchées.

C (mm)	$d_b(mm)$	c/d_b	$\Delta T_{sp} (^\circ C)$
20	19.1	1,0	-60
30	25.4	1,2	-45
25	19.1	1,3	-60
35	25.4	1,4	-55
25	15.9	1,6	-60
30	15.9	1,9	-60

III.5.4 Etude des déformations thermiques :

Les Figures III.17 à III.21 montrent les déformations thermiques transversales des barres en PRF de verre (PRFV) à l'interface armature en PRF/béton des zone d'enrobage de béton et inter-barres (zones extérieure et intérieure) pour des rapports c/d_b variant de 1,0 à 3,2 des poutres en béton arme de barres en PRFV chevauchées sous basses températures. On remarque que la déformation thermique transversale à l'interface armature/béton de la zone d'enrobage est linéaire pour des variations de température allant jusqu'à $-30^\circ C$ environ. Cependant, pour $\Delta T > -30^\circ C$, pour la même zone d'enrobage, la courbe de déformation devient parabolique à cause de la formation des fissures dans le béton entourant les barres d'armature en PRFV. Mêmes remarques peuvent être notées pour les déformation thermiques transversales à l'interface armature/béton de la zone d'inter-barres sauf que le changement de la pente des courbes de déformation se fait en général à $\Delta T = -10^\circ C$ environ au lieu de $-30^\circ C$, la déformation thermique transversale à l'interface des deux barres en PRFV/béton de la zone inter-barres est en général assez importante particulièrement avant rupture d'enrobage de béton par rapport à celle prédite à l'interface armature/béton de la zone d'enrobage (zone extérieure) car la zone inter-barres est soumise à la double pression de deux barres en PRFV. En outre, on peut noter que les déformations thermiques transversales, à l'interface armature/béton de la zone d'enrobage, augmentent brutalement à $\Delta T = -30^\circ C$ dépendant du rapport c/d_b . Ceci est dû à la formation d'une bande de fissures approfondie dans le béton d'enrobage entourant la barre en PRFV.

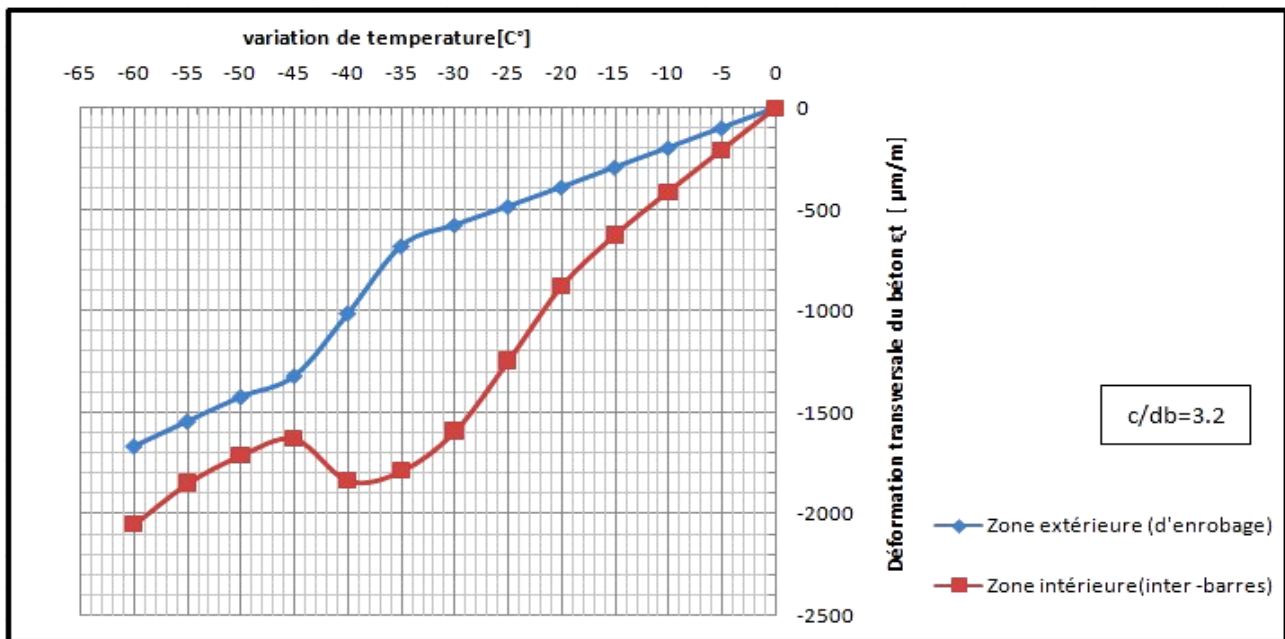


Figure III .17 Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 3,2$ (Poutre P.#10.30)

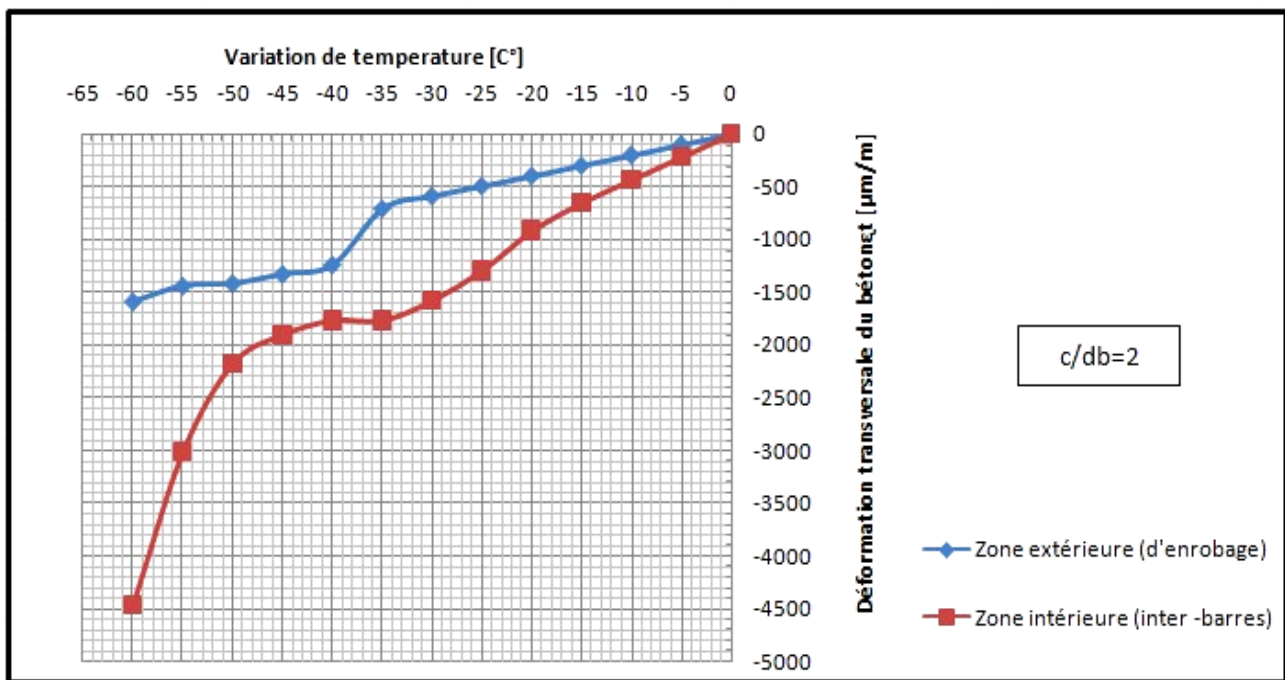


Figure III .18 Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 2,0$ (Poutre P.#13.25)

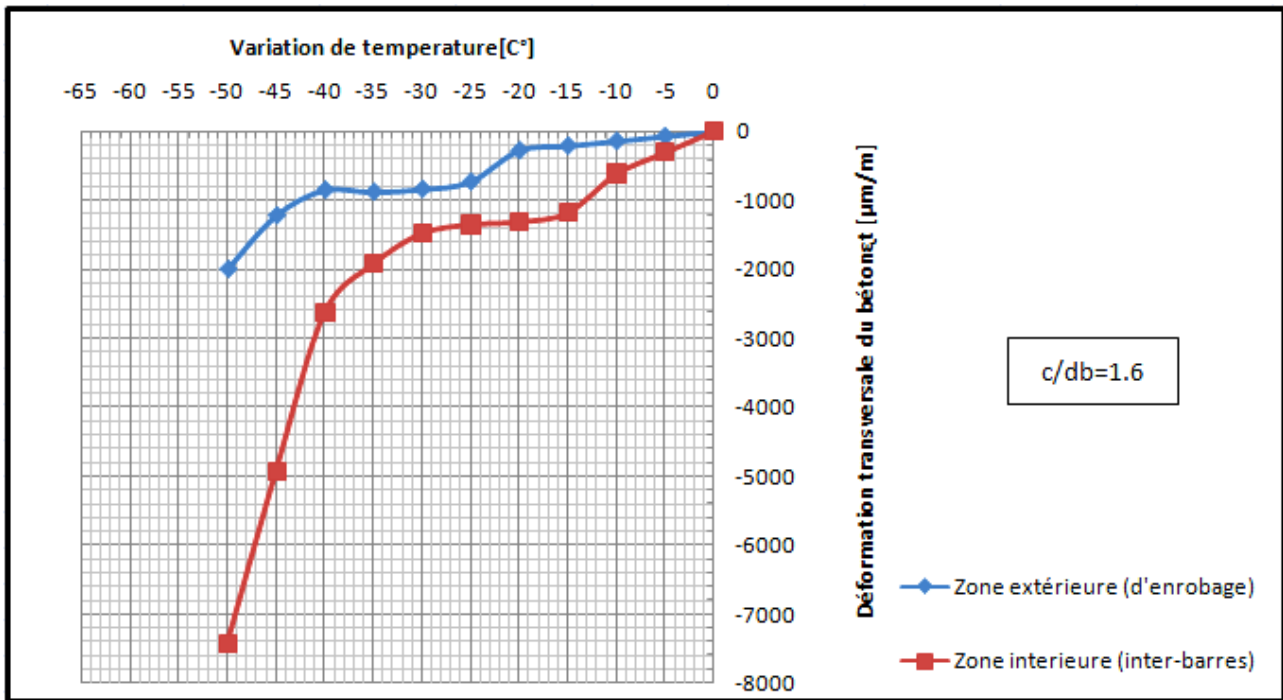


Figure III .19 Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,6$ (Poutre P.#16.25)

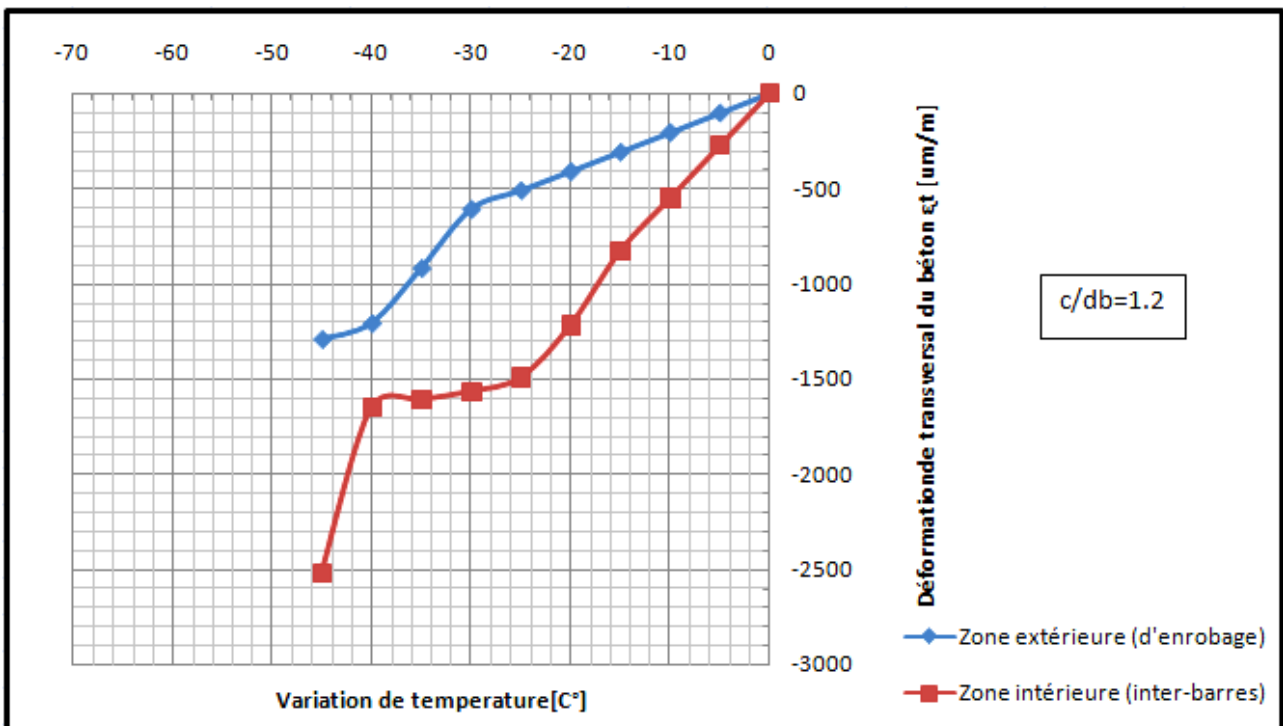


Figure III .20 Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,2$ (Poutre P.#25.30)

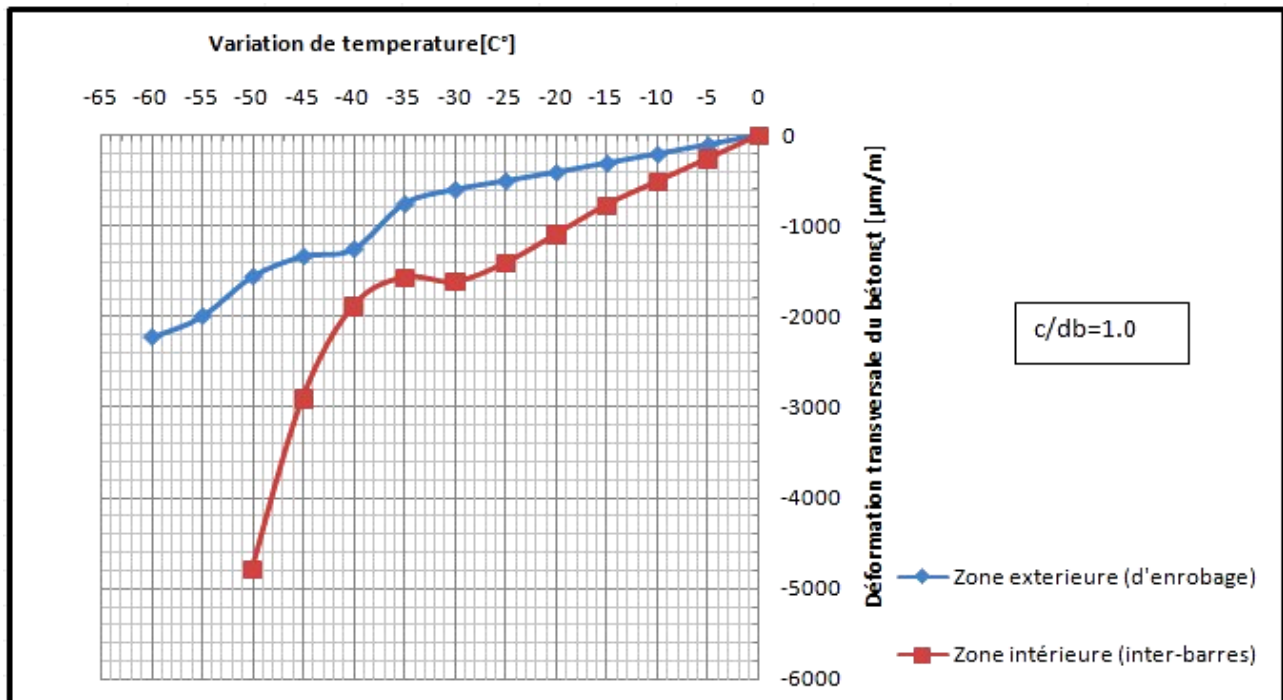


Figure III .21 Déformation transverse du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,0$ (Poutre P.#19.20).

D'après Les figures III.22 et III.23, On remarques que les déformations thermiques transversales à la surface externe de l'enrobage a béton sont linéaires pour des rapports $c/d_b \geq 2$ car aucune fissure n'a atteint la surface externe d'enrobage du béton pour ces poutres. Cependant pour des rapports $c/d_b < 2$, on remarques que les déformations thermiques transversales sont linéaires pour des variations de température allant jusqu'à ΔT_{sp} au-delà de laquelle la courbe de déformation devient parabolique à cause de la formation des fissures dans le béton à la surface externe de l'enrobage de béton.

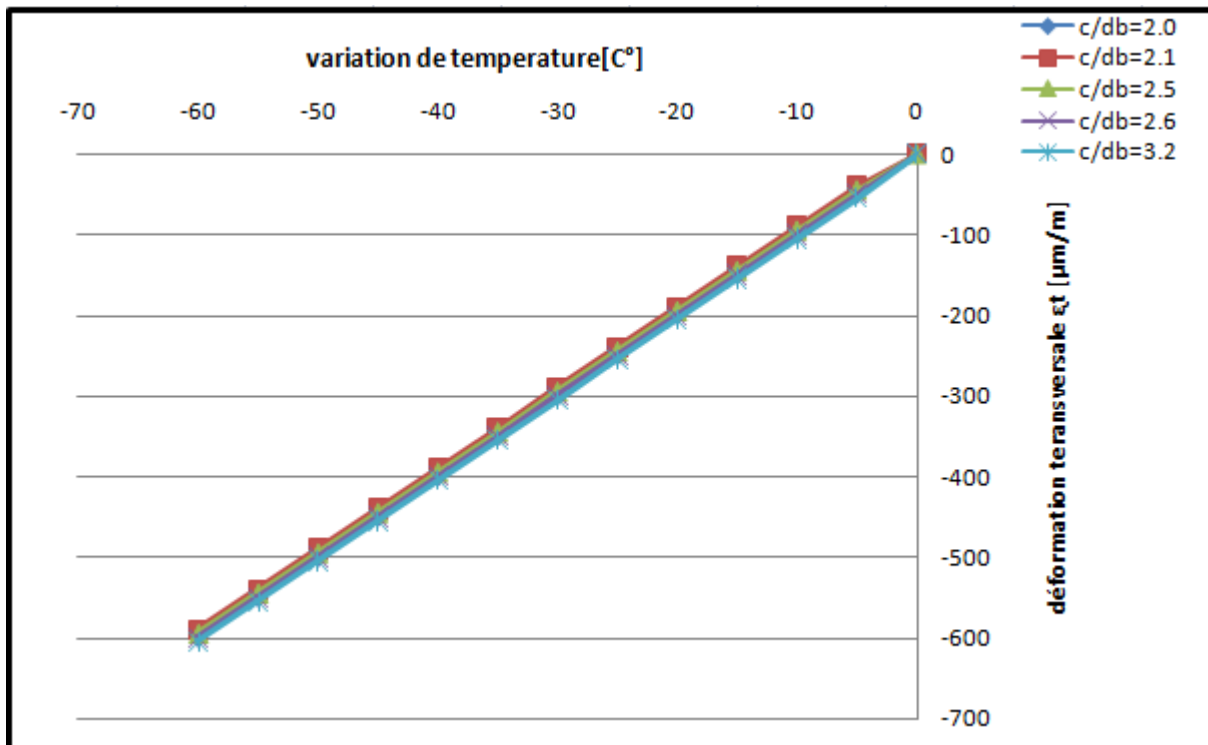


Figure III.22 : Déformations transversales en fonction de la variation de température à la surface externe de l'enrobage de béton pour des valeurs de c/d_b variant de 2 à 3,2

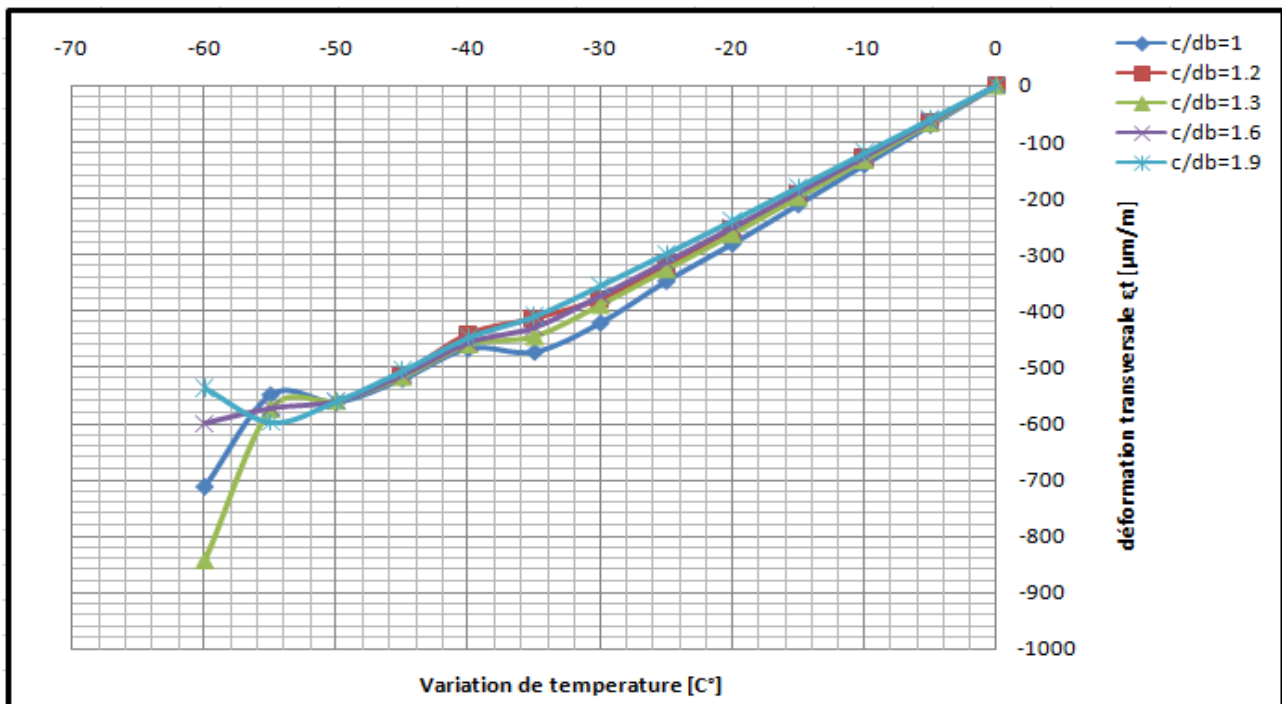


Figure III.23 : Déformations transversales en fonction de la variation de température à la surface externe de l'enrobage de béton pour des valeurs de c/d_b variant de 1 à 1,9

IV Modèle analytique :**IV.1. Introduction :**

Ce chapitre présente l'étude analytique du comportement thermique des poutres en béton armé d'une barre et de deux barres en PRF de verre. Cette étude analytique, basée sur la théorie d'élasticité linéaire, comprend l'étude de l'effet du chevauchement vertical des barres en PRF sur la distribution des contraintes et déformations dans l'enrobage du béton et dans la barre en PRF sous basses température en variant le rapport de l'épaisseur d'enrobage de béton au diamètre de la barre c/d_b . Elle permet aussi l'évaluation des charges thermiques ΔT_{cr} produisant les premières fissures dans le béton à l'interface armature/béton de la zone d'enrobage (zone extérieure) et le zone inter-barres(zone intérieure).

IV.2 Comportement thermique du béton avant fissuration :

La différence entre les coefficients d'expansion thermique transversale des barres en PRF et du béton dans les structures en béton armé engendre une pression radiale P à l'interface armature/béton sous chargement thermique comme le montre la Figure IV.1. Cette pression produit des contraintes de traction radiales qui peuvent causer des fissures circonférentielles dans le béton .

Le modèle analytique est établi pour déterminer les contraintes et les déformations thermiques dans une poutre prismatique en béton armé de barre en PRF sous une variation de température ΔT .

Le modèle étudié est basé sur les hypothèses suivantes :

- ✓ Une adhérence parfaite entre le béton et la barre en PRF.
- ✓ La barre en PRF et le béton présentent un comportement élastique linéaire.
- ✓ La section de la poutre prismatique reste plane après déformations thermiques.
- ✓ Absence des armatures transversales afin d'évaluer uniquement la contribution de l'enrobage du béton pour soutenir les contraintes de traction due à la variation de température. [ZAIDI, 2006]

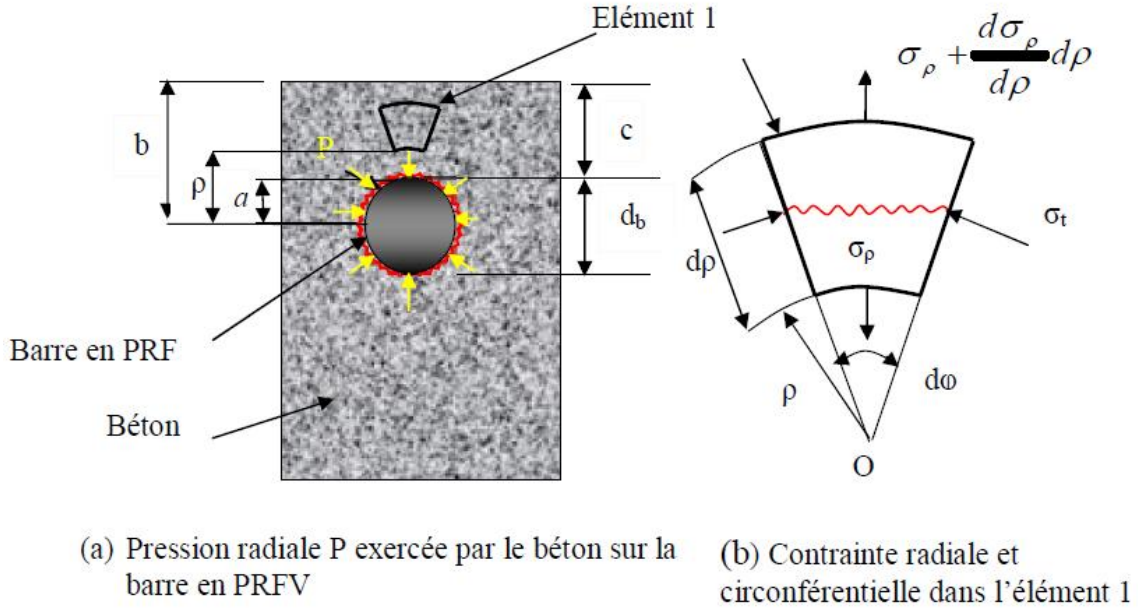


Figure IV.1: a) Poutre prismatique en béton armé d'une barre en PRF. b) Contraintes thermiques appliquées à l'élément 1 de la poutre.

IV.2.1. Contraintes dans le béton dues à la pression radiale P :

La déformation de la poutre prismatique en béton sous la pression radiale interne P exercée par la barre en PRF sur le béton se compose d'un déplacement radial variable le long du rayon de surface cylindrique et un déplacement circonférentiel constant le long du périmètre de rayon de cette surface.

u est le déplacement radial de la surface cylindrique de rayon ρ

$u + \frac{du}{d\rho}d\rho$ est le déplacement radial de la surface cylindrique de rayon $\rho + d\rho$

La déformation radiale ε_ρ et la déformation circonférentielle ε_t , dans un élément du béton situé à un rayon ρ mesuré à partir du centre de gravité de la barre en PRF, figure IV.1(b), sont comme suit :

$$\varepsilon_\rho = \frac{du}{d\rho} \quad (\text{IV.1})$$

$$\varepsilon_t = \frac{u}{\rho} \quad (\text{IV.2})$$

Les expressions de la contrainte radiale σ_ρ et de la contrainte circonférentielle σ_t , en fonction des déformations de l'élément considéré, déterminées par la théorie d'élasticité [TIMOSHENKO ET GOODIER, 1970] pour les cylindres creux sous pression hydrostatique interne P en considérant la solution en contraintes planes, sont données par :

$$\sigma_\rho = \frac{E_c}{1-\nu_c^2} (\varepsilon_\rho + \nu_c \varepsilon_t) = \frac{E_c}{1-\nu_c^2} \left[\frac{du}{d\rho} + \nu_c \frac{u}{\rho} \right] \quad (\text{IV.3})$$

$$\sigma_t = \frac{E_c}{1-\nu_c^2} (\varepsilon_t + \nu_c \varepsilon_\rho) = \frac{E_c}{1-\nu_c^2} \left[\frac{u}{\rho} + \nu_c \frac{du}{d\rho} \right] \quad (\text{IV.4})$$

Où

E_c : le module d'élasticité du béton.

ν_c : le coefficient de Poisson du béton.

L'équation d'équilibre de l'élément 1 est déterminée en faisant la somme des forces suivant la direction de la bissectrice de l'angle $d\varphi$; on obtient :

$$\sigma_\rho \cdot \rho \cdot d\varphi + 2\sigma_t \cdot d\rho \cdot \frac{d\varphi}{2} - \left(\sigma_\rho + \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} d\rho \right) (\rho + d\rho) d\varphi = 0 \quad (\text{IV.5})$$

En négligeant les termes de second ordre, l'équation IV.5 devient :

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho + \sigma_t}{\rho} = 0 \quad (\text{IV.6})$$

Remplaçant les expressions de σ_ρ de l'équation (IV.3) et σ_t de l'équation (IV.4) dans l'équation (IV.6), on obtient l'équation d'équilibre en termes de déplacement.

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} - \frac{u}{\rho^2} = 0 \quad (\text{IV.7})$$

La solution générale de cette équation différentielle est de la forme :

$$u = C_1 \rho + \frac{C_2}{\rho} \quad (\text{IV.8})$$

Les constantes C_1 et C_2 sont déterminées par les conditions aux limites interne et externe. Remplaçant l'expression de u de l'équation (IV.8) dans les équations (IV.3) et (IV.4), on obtient :

$$\sigma_\rho(\rho) = \frac{E_c}{1-\nu_c^2} \left[C_1(1+\nu_c) - C_2 \frac{1-\nu_c}{\rho^2} \right] \quad (\text{IV.9})$$

$$\sigma_t(\rho) = \frac{E_c}{1-\nu_c^2} \left[C_1(1+\nu_c) + C_2 \frac{1-\nu_c}{\rho^2} \right] \quad (\text{IV.10})$$

Les conditions aux limites de la surface interne ($\rho = a$) et de la surface externe ($\rho = b$) de poutre prismatique en béton sont :

$$\sigma_\rho(\rho = a) = -P \quad (\text{IV.11})$$

$$\sigma_\rho(\rho = b) = 0 \quad (\text{IV.12})$$

Les constantes C_1 et C_2 sont obtenues en utilisant les conditions aux limites ci-dessus dans l'équation IV.9, on a :

$$C_1 = \frac{1-\nu_c}{E_c} \frac{a^2}{b^2 - a^2} P \quad (\text{IV.13})$$

$$C_2 = \frac{1-\nu_c}{E_c} \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} P \quad (\text{IV.14})$$

Les expressions de la contrainte radiale σ_ρ et de la contrainte circonférentielle σ_t du béton dues à la pression radiale P sont obtenues en substituant les expressions des constantes C_1 et C_2 (équations IV.13 et IV.14) dans les équations IV.9 et IV.10, on a : [ZAIDI, 2006]

$$\sigma_\rho = \frac{a^2 P}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{\rho^2} \right) \quad (\text{IV.15})$$

$$\sigma_t = \frac{a^2 P}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{\rho^2} \right) \quad (\text{IV.16})$$

Où $a = d_b/2$
 $b = c + d_b/2$.

d_b : le rayon de l'armature en PRF.

c : l'épaisseur de l'enrobage de béton.

Posant $r = b/a$, les équations IV.15 et IV.16 deviennent :

$$\sigma_\rho = \frac{P}{r^2 - 1} \left(1 - \frac{b^2}{\rho^2} \right) \quad (\text{IV.17})$$

$$\sigma_t = \frac{P}{r^2 - 1} \left(1 + \frac{b^2}{\rho^2} \right) \quad (\text{IV.18})$$

La contrainte de traction radiale maximale dans le béton due à la pression radiale P , à l'interface armature/béton ($\rho = a$), est donnée par : [ZAIDI, 2006]

$$\sigma_{\rho \max} = -P \quad (\text{IV.19})$$

Dans le cas d'une poutre en béton armé en deux barres en PRF chevauchées (Figure IV.3) ; les contraintes de traction radiale dues à la pression de la première barre P_1 , est donnée par :

$$\sigma_{\rho 1}(\rho) = \frac{P_1}{r_1^2 - 1} \left(1 - \frac{b_1^2}{\rho^2} \right) \quad (\text{IV.20})$$

Les contraintes de traction radiale dues à la pression de la deuxième barre P_2 , est donnée par :

$$\sigma_{\rho 2}(\rho) = \frac{P_2}{r_2^2 - 1} \left(1 - \frac{b_2^2}{\rho^2} \right) \quad (\text{IV.21})$$

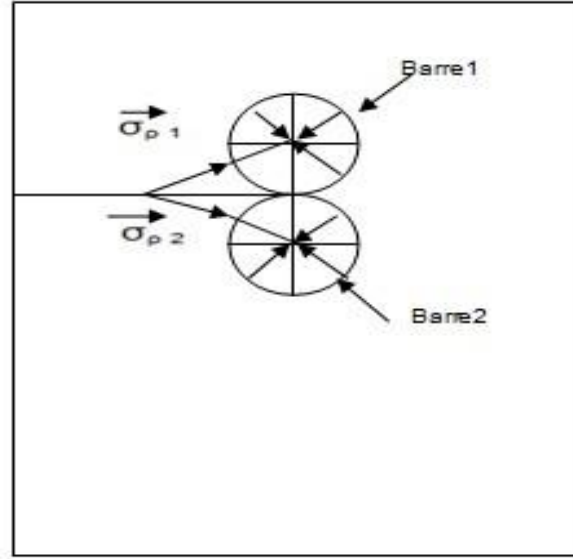


Figure IV.2 : les contraintes radiales dans la section d'une Poutre prismatique en béton armé de deux barres en PRF sous basses températures.

Les contrainte radiale dans le béton situé entre les barres due à la pression de la première barre P_1 et la pression de la deuxième barre P_2 à la ligne d'interface dans la zone d'interférence d'effets des deux barres, est donnée par :

$$\vec{\sigma}_\rho(\rho) = \vec{\sigma}_{\rho 1}(\rho) + \vec{\sigma}_{\rho 2}(\rho) \quad (\text{IV.22})$$

$$\sigma^2(\rho) = \sigma_{\rho 1}^2 + \sigma_{\rho 2}^2 + 2\sigma_{\rho 1}\sigma_{\rho 2}\cos(2\alpha) \quad (\text{IV.23})$$

Remplaçant les expressions des $\sigma_{\rho 1}$ et $\sigma_{\rho 2}$ des équations IV.20 et IV.21 dans l'équation IV.22.

Les contraintes de traction radiale pour le béton situé entre les barres est donnée par :

$$\sigma_\rho^2(\rho) = \left[\frac{P_1}{r_1^2 - 1} \left(1 - \frac{b_1^2}{\rho^2} \right) \right]^2 + \left[\frac{P_2}{r_2^2 - 1} \left(1 - \frac{b_2^2}{\rho^2} \right) \right]^2 + \frac{2P_1P_2}{(r_1^2 - 1)(r_2^2 - 1)} \left(1 - \frac{b_1^2}{\rho^2} \right) \left(1 - \frac{b_2^2}{\rho^2} \right) \cos(2\alpha) \quad (\text{IV.24})$$

Où:
$$r_1 = \frac{2c_1 + d_b}{d_b}$$

$$r_2 = \frac{2c_2 + d_b}{d_b}$$

$$b_1 = c_1 + a$$

$$b_2 = c_2 + a$$

P_1 et P_2 : pression due à la première barre et à la deuxième barre en PRF respectivement.

c_1 et c_2 : l'épaisseur d'enrobage de la première barre et celle de la deuxième barre en PRF respectivement.

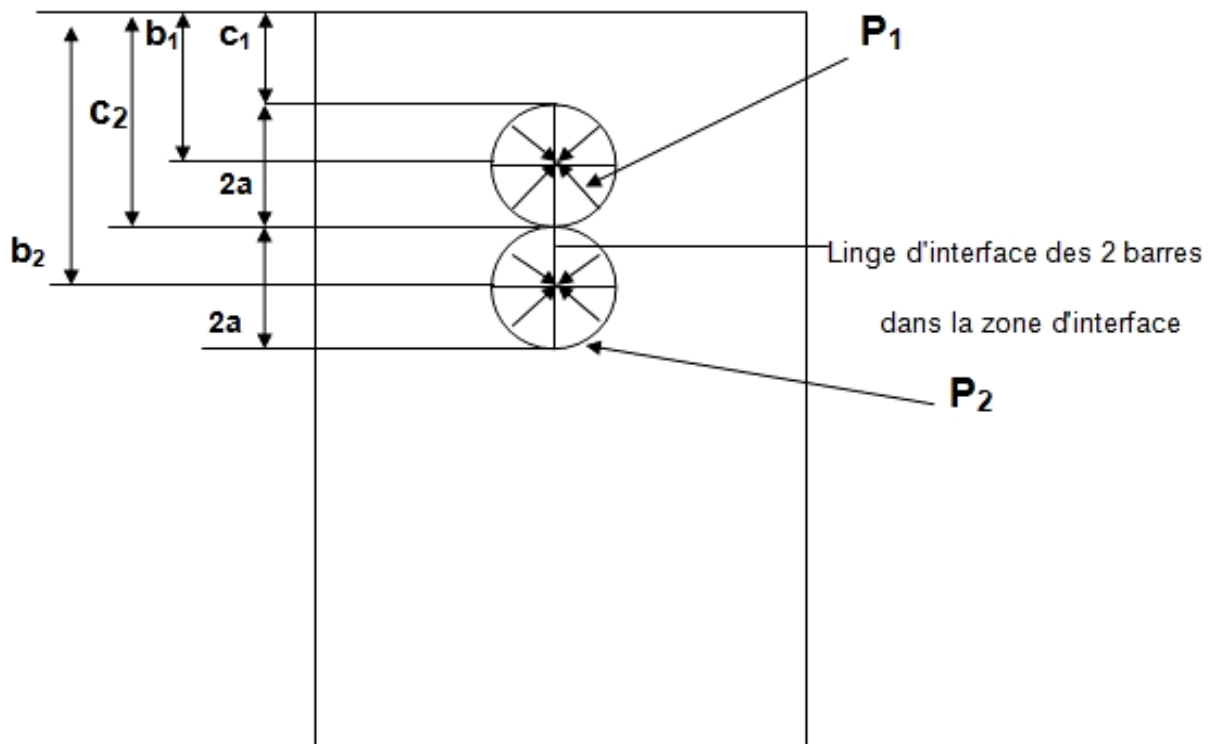


Figure IV.3 : Section d'une Poutre prismatique en béton armé de deux barres en PRF.

Le béton situé entre les barres dans la zone d'interférence à la ligne d'interface des deux barres est soumis à des contraintes de compression dues à la pression de la première barre et celle de la deuxième barre.

$$\vec{\sigma}_t(\rho) = \vec{\sigma}_{t1}(\rho) + \vec{\sigma}_{t2}(\rho) \quad (\text{IV.25})$$

La contrainte de compression circonférentielle due à la pression de la première barre P_1 , est donnée par :

$$\sigma_{t1}(\rho) = \frac{P_1}{r_1^2 - 1} \left(1 + \frac{b_1^2}{\rho^2} \right) \quad (\text{IV.26})$$

La contrainte de compression circonférentielle due à la pression de la deuxième barre P_2 , est donnée par :

$$\sigma_{t2}(\rho) = \frac{P_2}{r_2^2 - 1} \left(1 + \frac{b_2^2}{\rho^2} \right) \quad (\text{IV.27})$$

Remplaçant les expressions des σ_{t1} et σ_{t2} des équations IV.26 et IV.27 dans l'équation IV.25, on obtient la contrainte de compression circonférentielle donnée par :

$$\sigma_t^2(\rho) = \left[\frac{P_1}{r_1^2 - 1} \left(1 + \frac{b_1^2}{\rho^2} \right) \right]^2 + \left[\frac{P_2}{r_2^2 - 1} \left(1 + \frac{b_2^2}{\rho^2} \right) \right]^2 + \frac{2P_1P_2}{(r_1^2 - 1)(r_2^2 - 1)} \left(1 + \frac{b_1^2}{\rho^2} \right) \left(1 + \frac{b_2^2}{\rho^2} \right) \cos(2\alpha) \quad (\text{IV.28})$$

La contrainte radiale maximale de traction due à la pression radiale P_1 de la première barre et P_2 de la deuxième barre à la zone intérieure (zone inter-barres), où $\rho = a$ et $\alpha = 0^\circ$, est donnée par :

$$\sigma_{\rho \max}(a) = \sigma_{\rho 1}(a) + \sigma_{\rho 2}(a) = -P_1 - P_2 = -(P_1 + P_2) \quad (\text{IV.29})$$

IV.2.2. Déformations dans le béton dues à la pression radiale P :

Le déplacement radial u à n'importe quel point de la paroi de la poutre prismatique, sous la pression radiale P , est obtenu en remplaçant les expressions de C_1 et C_2 (équations IV.13 et IV.14) dans l'équation IV.8, on a :

$$u(\rho) = \frac{1-\nu_c}{E_c} \frac{P}{r^2-1} \rho + \frac{1+\nu_c}{E_c} \frac{b^2}{r^2-1} \frac{P}{\rho} \quad (\text{IV.30})$$

D'après l'équation IV.30 et IV.1, La déformation radiale $\varepsilon_{c\rho}$ dans le béton due à la pression radiale P est :

$$\varepsilon_{c\rho}(\rho) = \frac{P}{E_c(r^2-1)} \left[\left(1 - \frac{b^2}{\rho^2} \right) - \nu_c \left(1 + \frac{b^2}{\rho^2} \right) \right] \quad (\text{IV.31})$$

$$\varepsilon_{c\rho}(\rho) = \frac{1}{E_c} (\sigma_\rho - \nu_c \sigma_t) \quad (\text{IV.32})$$

Remplaçant l'expression u de l'équation IV.1 dans l'équation IV.31, la déformation circonférentielle ε_{ct} dans le béton due à la pression radiale P est :

$$\varepsilon_{ct}(\rho) = \frac{P}{E_c(r^2-1)} \left[\left(1 + \frac{b^2}{\rho^2} \right) - \nu_c \left(1 - \frac{b^2}{\rho^2} \right) \right] \quad (\text{IV.33})$$

$$\varepsilon_{ct}(\rho) = \frac{1}{E_c} (\sigma_t - \nu_c \sigma_\rho) \quad (\text{IV.34})$$

IV.2.3. Déformations dans le béton dues à la pression radiale P et à la variation de température ΔT :

La déformation radiale $\varepsilon_{c\rho}$ dans le béton due à la pression radiale P et à la variation de température ΔT est donnée par ZAIDI (2006) :

$$\varepsilon_{c\rho}(\rho) = \frac{P}{E_c(r^2-1)} \left[\left(1 - \frac{b^2}{\rho^2} \right) - \nu_c \left(1 + \frac{b^2}{\rho^2} \right) \right] + \alpha_c \Delta T \quad (\text{IV.35})$$

α_c : le coefficient d'expansion thermique du béton.

La déformation circonférentielle ε_{ct} dans le béton due à la pression radiale P et à la variation de température ΔT est :

$$\varepsilon_{ct}(\rho) = \frac{P}{E_c(r^2 - 1)} \left[\left(1 + \frac{b^2}{\rho^2} \right) - \nu_c \left(1 - \frac{b^2}{\rho^2} \right) \right] + \alpha_c \Delta T \quad (\text{IV.36})$$

La déformation circonférentielle ε_{ct} dans le béton, à l'interface armature/béton ($\rho = a$), due à la pression radiale P et à la variation de température ΔT est donnée par :

$$\varepsilon_{ct} = \frac{P}{E_c} \left(\frac{r^2 + 1}{r^2 - 1} + \nu_c \right) + \alpha_c \Delta T \quad (\text{IV.37})$$

Pour une poutre en béton armé de deux barres en PRF, la déformation circonférentielle ε_{ct} dans le béton dues aux pressions radiales P_1 de la première barre et P_2 de la deuxième barre à la zone intérieure (zone inter-barres), où $\rho = a$, ainsi à la variation de température ΔT , et donnée par :

$$\varepsilon_{ct} = \varepsilon_{ct1}(a) + \varepsilon_{ct2}(a) \quad (\text{IV.38})$$

$$\varepsilon_{ct} = \frac{P_1}{E_c} \left(\frac{r_1^2 + 1}{r_1^2 - 1} + \nu_c \right) + \frac{P_2}{E_c} \left(\frac{r_2^2 + 1}{r_2^2 - 1} + \nu_c \right) + \alpha_c \Delta T \quad (\text{IV.39})$$

La déformation circonférentielle ε_{ct} dans la surface externe de l'enrobage de béton à la zone extérieure ($\rho = b_I$), due à la pression radiale P_1 et à la variation de température ΔT est donnée par :

$$\varepsilon_{ct} = \frac{2P_1}{E_c(r_1^2 - 1)} + \alpha_c \Delta T \quad (\text{IV.40})$$

IV.2.4. Déformation transversale de la barre en PRF due à l'effet de la pression radiale P et à la variation de température ΔT

De la même façon que l'on a procédé pour la poutre prismatique en béton sous pression interne, on peut déterminer les déformations transversales de la barre en PRF sous pression externe due à la réaction du béton sur la barre en PRF. Le déplacement radial u à n'importe quel point de la barre en PRF est donné par ZAIDI (2006) :

$$u(\rho) = -\frac{(1 - \nu_{tt})P}{E_t} \rho \quad (\text{IV.41})$$

Où

E_t : Le module d'élasticité de la barre en PRF dans la direction transversale

ν_{tt} : Le coefficient de Poisson de la barre en PRF dans la direction transversale (le premier indice indique la direction transversale de l'application de la contrainte et le deuxième indice indique la direction transversale dans laquelle on détermine la déformation).

La déformation circonférentielle ε_{ft} de la barre en PRF due à la pression radiale P est donnée par :

$$\varepsilon_{ft} = \frac{u(\rho)}{\rho} = -\frac{(1 - \nu_{tt})P}{E_t} \quad (\text{IV.42})$$

La déformation circonférentielle de la barre en PRF due à la pression radiale P et à la variation de température ΔT , est donnée par :

$$\varepsilon_{ft} = \alpha_t \Delta T - \frac{(1 - \nu_{tt})P}{E_t} \quad (\text{IV.43})$$

α_t : le coefficient d'expansion thermique transversale de la barre en PRF.

IV.2.5. Pression radiale P :

La pression radiale P exercée par la barre en PRF sur le béton due à la variation de température ΔT est déterminée en utilisant l'équation de compatibilité des déformations transversales à l'interface armature/béton.

$$\varepsilon_{ft} = \varepsilon_{ct} \quad (\text{IV.44})$$

À partir des équations IV.36 et IV.42, on obtient l'expression de la pression radiale P donnée par ZAIDI (2006) :

$$P = \frac{(\alpha_t - \alpha_c)\Delta T}{\frac{1}{E_c} \left(\frac{r^2 + 1}{r^2 - 1} + \nu_c \right) + \frac{1}{E_t} (1 - \nu_t)} \quad (\text{IV.45})$$

Où $(\alpha_t - \alpha_c)\Delta T$ est la déformation thermique différentielle transversale;

$$r = \frac{2c + d_b}{d_b}$$

d_b : diamètre de la barre ($d_b = 2a$);

c : épaisseur d'enrobage du béton.

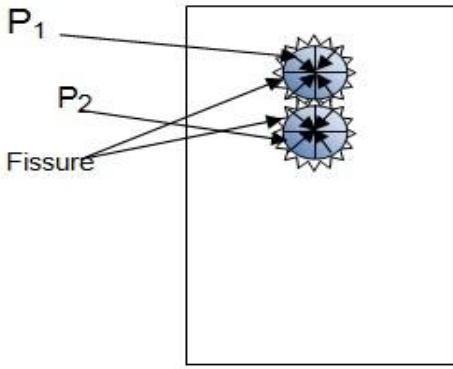
Pour le cas des poutres en béton armé de deux barres en PRF, on suppose que la pression sur l'interface armature/béton est déterminée de la même manière que celle d'une poutre renforcée d'une barre. La poutre a deux épaisseurs d'enrobage c_1 et c_2 (r_1 et r_2), donc chaque barre a une pression radiale différente de l'autre (P_1 et P_2), leurs valeurs sont :

$$P_1 = \frac{(\alpha_t - \alpha_c)\Delta T}{\frac{1}{E_c} \left(\frac{r_1^2 + 1}{r_1^2 - 1} + \nu_c \right) + \frac{1}{E_t} (1 - \nu_t)} \quad (\text{IV.46})$$

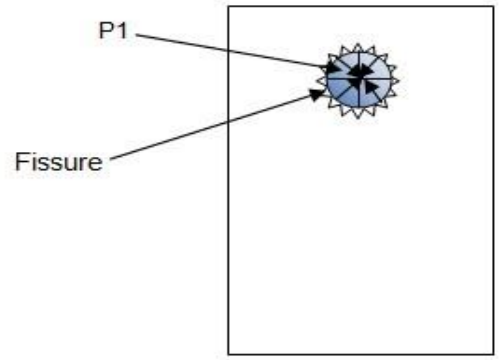
$$P_2 = \frac{(\alpha_t - \alpha_c)\Delta T}{\frac{1}{E_c} \left(\frac{r_2^2 + 1}{r_2^2 - 1} + \nu_c \right) + \frac{1}{E_t} (1 - \nu_t)} \quad (\text{IV.47})$$

Il est important de noter que $(\alpha_t - \alpha_c)\Delta T$ est la déformation thermique différentielle transversale, c'est la principale source de la pression radiale [ZAIDI, 2006].

IV.3. Variation de température ΔT_{cr} produisant la première fissure :



(a) Cas de deux barres en PRF.



(b) Cas d'une seule barre en PRF.

Figure IV.4 : Première fissure apparue dans le béton au niveau de l'interface barre/béton à la variation de température ΔT_{cr} pour les deux cas (a) et (b).

La première fissure radiale apparaît dans le béton à l'interface armature en PRF/béton quand la contrainte radiale de traction atteint la résistance à la traction du béton (f_{ct}). De l'équation (IV.19), on peut écrire :

$$\sigma_{\rho \max} = f_{ct} \quad (IV.48)$$

On remplace l'expression de $\sigma_{\rho \max}$ (équation IV.19) et l'expression de la pression P de l'équation IV.45 dans l'équation IV.48. La variation de température (ΔT_{cr}) qui produit la première fissure dans le béton à l'interface armature/béton est donc :

$$\Delta T_{cr} = \frac{-f_{ct}}{(\alpha_t - \alpha_c)} \left[\frac{1}{E_c} \left(\frac{r^2 + 1}{r^2 - 1} + \nu_c \right) + \frac{1}{E_t} (1 - \nu_t) \right] \quad (IV.49)$$

Pour le cas des poutres en béton renforcé par deux barres en PRF, on calcule la variation de température produisant la première fissure radiale dans le béton à l'interface armature en PRF/béton pour chaque barre de PRF.

On remplace l'expression de $\sigma_{\rho \max}$ (équation IV.29) et les expressions des pressions P_1 et P_2 des équations IV.46 et IV.47 dans l'équation IV.48. Donc, la première fissure, à l'interface des deux barres, (zone inter-barres) / béton, apparaît à ΔT_{cr} donne par :

$$\Delta T_{cr1} = \frac{-f_{ct}}{(\alpha_t - \alpha_c)} \left[\frac{1}{\frac{1}{E_c} \left(\frac{r_1^2 + 1}{r_1^2 - 1} + \nu_c \right) + \frac{1}{E_t} (1 - \nu_{tt})} + \frac{1}{\frac{1}{E_c} \left(\frac{r_2^2 + 1}{r_2^2 - 1} + \nu_c \right) + \frac{1}{E_t} (1 - \nu_{tt})} \right]^{-1} \quad (IV.50)$$

IV.4 Analyse des résultats analytiques des poutres en béton renforcé par deux barres en PRF chevauchées :

La figure IV.8 et le tableau IV.1 montrent la variation de température ΔT_{cr} , produisant la première fissure circonférentielle dans le béton à l'interface armature/béton des poutres prismatiques en béton armé de deux barres en PRFV chevauchées, en fonction du rapport de l'épaisseur d'enrobage du béton au diamètre de la barre en PRF (c/d_b) pour un béton de résistance à la traction $f_{ct} = 4,1$ MPa. On remarque que la valeur algébrique de ΔT_{cr} augmente lorsque le rapport c/d_b augmente. Aussi, on remarque que les valeurs de $\Delta T_{cr \text{ ext}}$ à l'interface armature/béton de la zone d'enrobage (zone extérieure), sont autour de -25°C . Cependant les valeurs de $\Delta T_{cr \text{ int}}$ à l'interface des deux armatures/béton dans la zone d'inter-barres (zone d'intérieure) sont autour de -13°C .

En outre, il est à noter que les valeurs de $\Delta T_{cr \text{ ext}}$ produisant la 1^{ier} fissure dans le béton à l'interface armature/béton de la zone d'enrobage sont deux fois plus grandes que celles prédites à l'interface des deux armatures/béton dans la zone d'inter-barres (zone intérieure fig III.9). Ceci est dû à l'effet des pressions (P_1 et P_2) des deux barres en PRFV chevauchées en engendrant dans la zone d'inter-barres des contraintes de traction assez importantes.

Tableau IV.1 : Variation de température ΔT_{cr} en fonction de c/d_b .

<i>Poutre</i>	<i>c/d_b</i>	$\Delta T_{cr \text{ int}}$	$\Delta T_{cr \text{ ext}}$
P# 10, 30	3,2	-12.50	-25.00
P# 10, 25	2,6	-12.55	-25.09
P# 13, 30	2,5	-12.58	-25.17
P# 10, 20	2,1	-12.63	-25.26
P# 13, 25	2,0	-12.66	-25.32
P# 16, 30	1,9	-12.68	-25.36
P# 13, 20	1,6	-12.79	-25.58
P#16,25	1,6	-12.79	-25.58
P# 19, 30	1,6	-12.79	-25.58
P# 25, 35	1,4	-12.89	-25.76
P# 19, 25	1,3	-12.93	-21,87
P# 16, 20	1,3	-12.97	-25.94
P#25, 30	1,2	-13.03	-26.06
P# 19,20	1,0	-13.17	-26.33
P# 25, 25	1,0	-13.24	-26.49

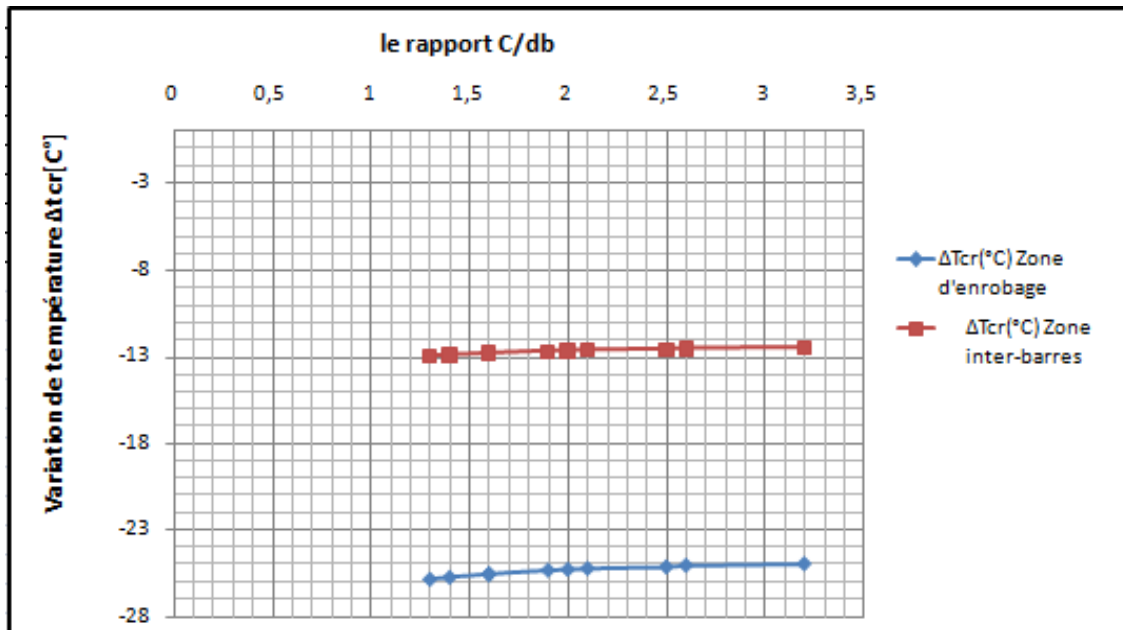


Figure IV.5: Variation de température (ΔT_{cr}) produisant la première fissure circonférentielle dans le béton à l'interface armature/béton des poutres en béton armé de deux barres en PRFV chevauchées en fonction du rapport c/d_b pour un béton de résistance à la traction $f_{ct} = 4,1\text{MPa}$.

Les figures IV.6 à IV.10 montrent les contraintes de traction radiales et déformations transversales en fonction de la variation de température à l'interface armature/béton des poutres prismatiques en béton armé de barres en PRFV pour des épaisseurs d'enrobage du béton de 20 et 35 mm. À partir de ces figures, on remarque que la contrainte de traction du béton diminue avec la déminution du rapport de l'épaisseur d'enrobage du béton au diamètre de la barre en PRF (c/d_b). On remarque encore que le modèle linéaire donne des contraintes de traction du béton assez élevées qui dépassent la résistance à la traction du béton ($f_{ct}=4,1\text{MPa}$) et qui peuvent atteindre des valeurs de 10 MPa à des variations de températures de -60°C dans la zone extérieure (zone d'enrobage) et 20MPa dans la zone intérieure (zone d'inter-barres ou d'interférence) et pour la déformations transversales on remarque que la déformation sont linéaire et peuvent atteindre des valeurs de $-1200\text{ }\mu\text{m/m}$ à des variations de températures de -60°C dans la zone extérieure (zone d'enrobage) $-1600\mu\text{m/m}$ dans le zone intérieure (zone d'inter-barres ou d'interférence) et $-800\text{ }\mu\text{m/m}$ dans la surface externe de l'enrobage .

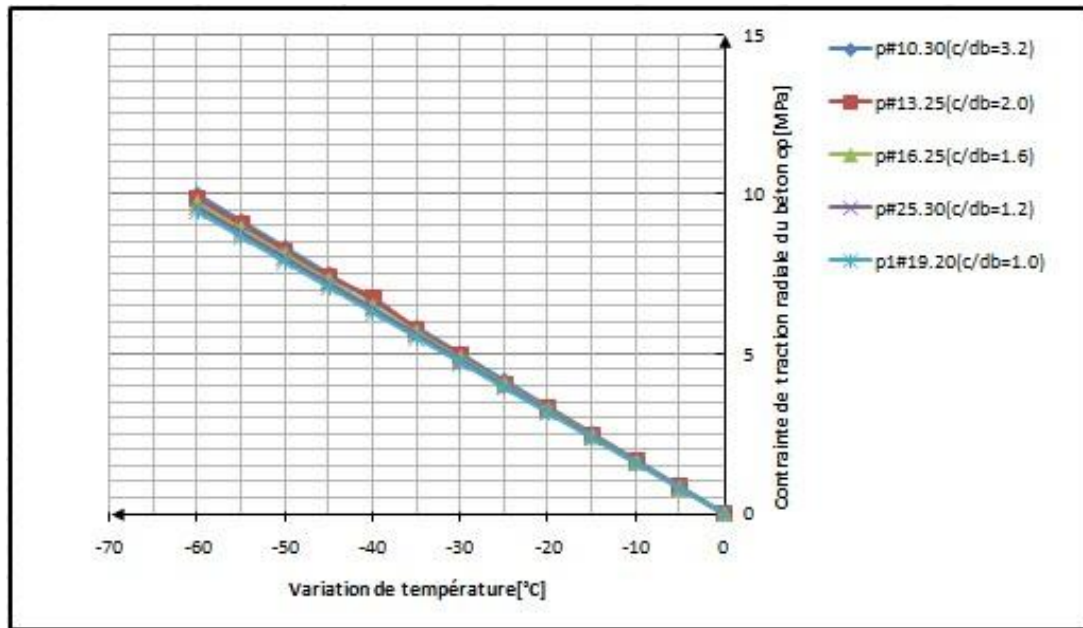


Figure IV. 6: Contraintes de traction radiales en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone extérieure (d'enrobage) pour des valeurs de c/d_b variant de 1 à 3,2

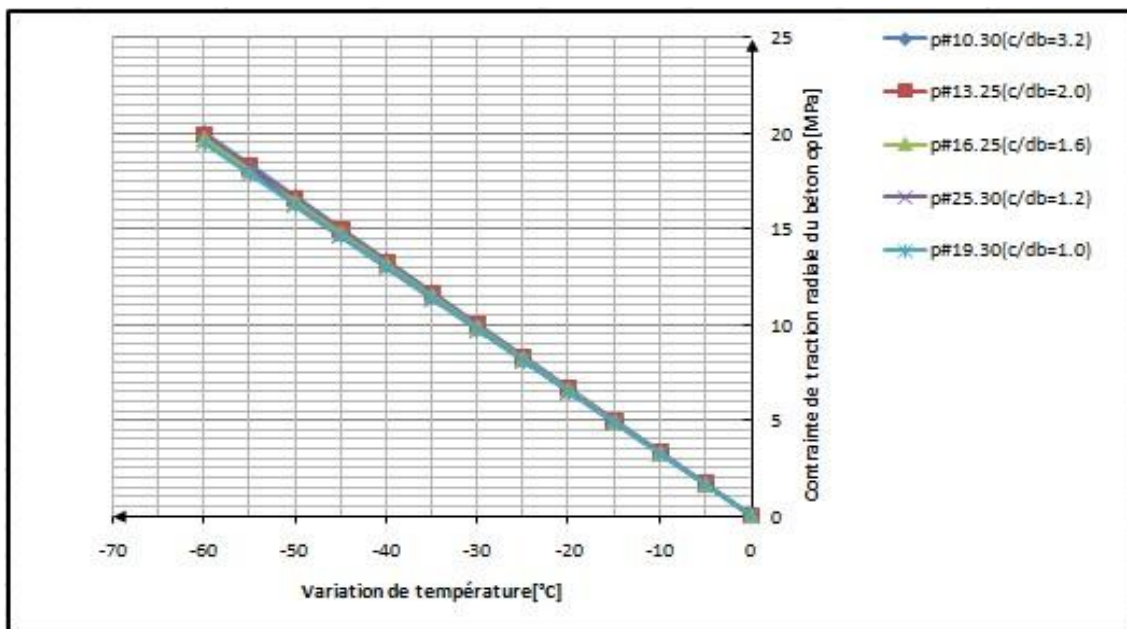


Figure IV.7 : Contraintes de traction radiales en fonction de la variation de température à l'interface des deux armatures en PRF/béton de la zone intérieure (inter-barres) pour des valeurs de c/d_b variant 1 à 3,2

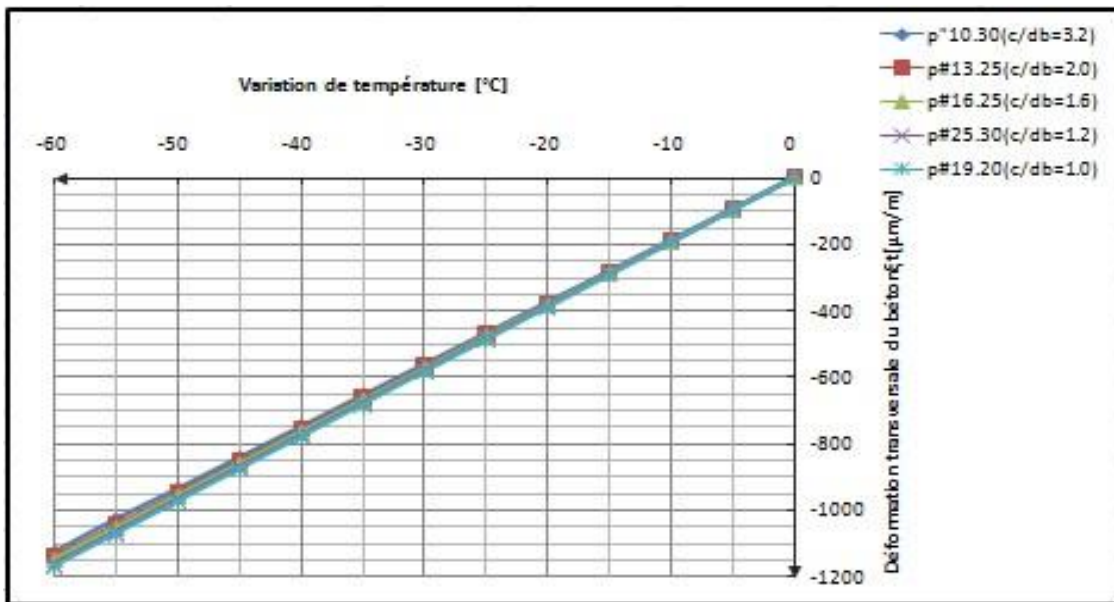


Figure IV.8 : Déformations transversales en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone extérieure (d'enrobage) pour des valeurs de c/d_b variant 1 à 3,2

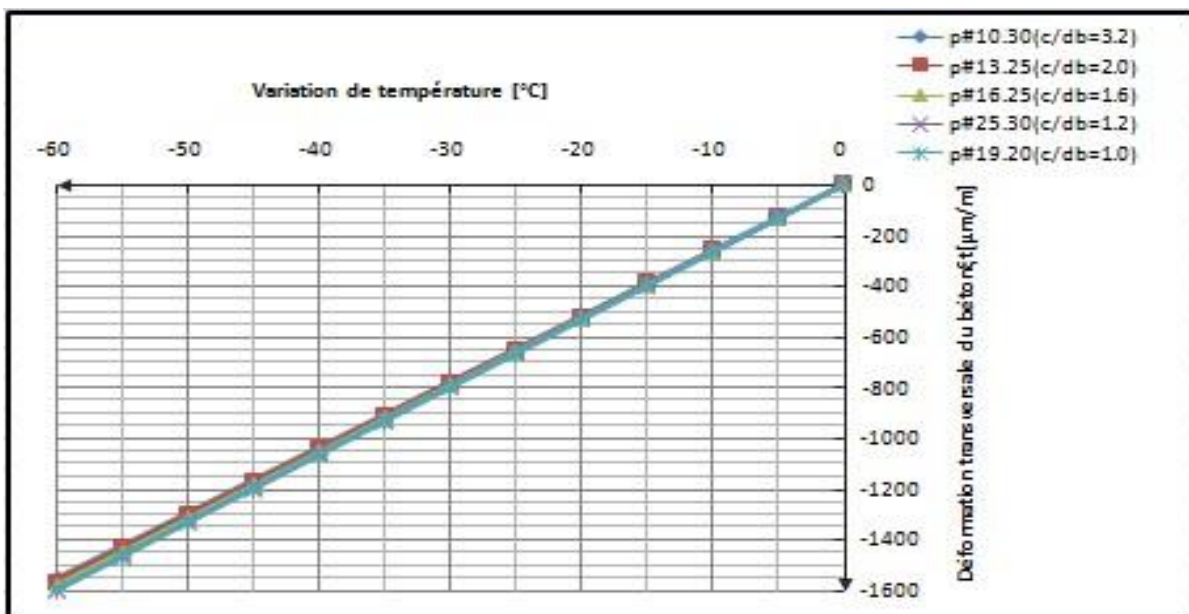


Figure IV.9 : Déformations transversales en fonction de la variation de température à l'interface des deux armatures en PRF/béton de la zone intérieure (inter-barres) pour des valeurs de c/d_b variant 1 à 3,2

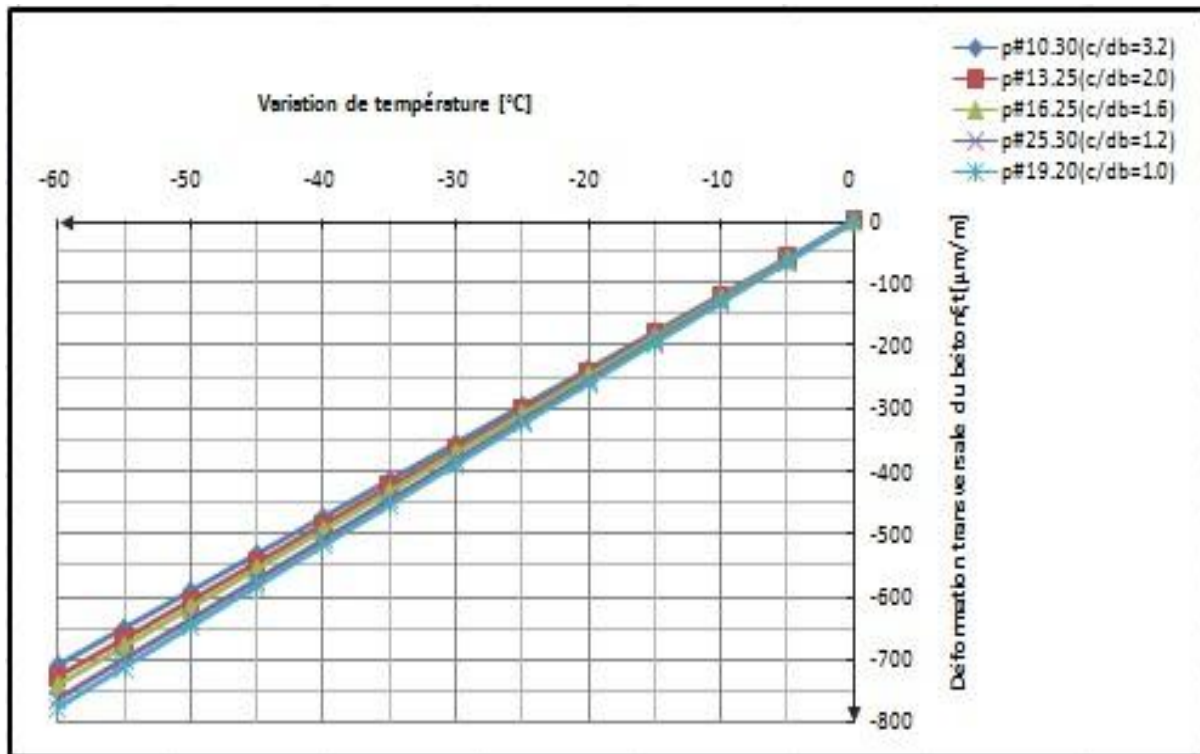


Figure IV.10 : Déformations transversales en fonction de la variation de température à la surface externe de l'enrobage pour des valeurs de c/d_b variant 1 à 3,2

V Comparaisons des résultats analytiques et numériques :

V.1 Introduction :

Ce chapitre compare les résultats analytiques et numériques en termes de déformations thermiques transversales sur la surface externe de l'enrobage du béton et à l'interface armature/béton (Figure V.1) , de variations de température (ΔT_{cr}) produisant la première fissure dans le béton à l'interface armature en PRF/béton. Aussi, il compare les contraintes thermiques radiales, prédites par le modèle numérique non-linéaire avec celles obtenues à partir du modèle analytique, à l'interface armature/béton de la zone d'enrobage (zone extérieure) et à l'interface de deux barres/béton dans la zone inter-barres (zone intérieure), pour des poutres en béton armé de deux barres en PRFV chevauchées sous basses températures.

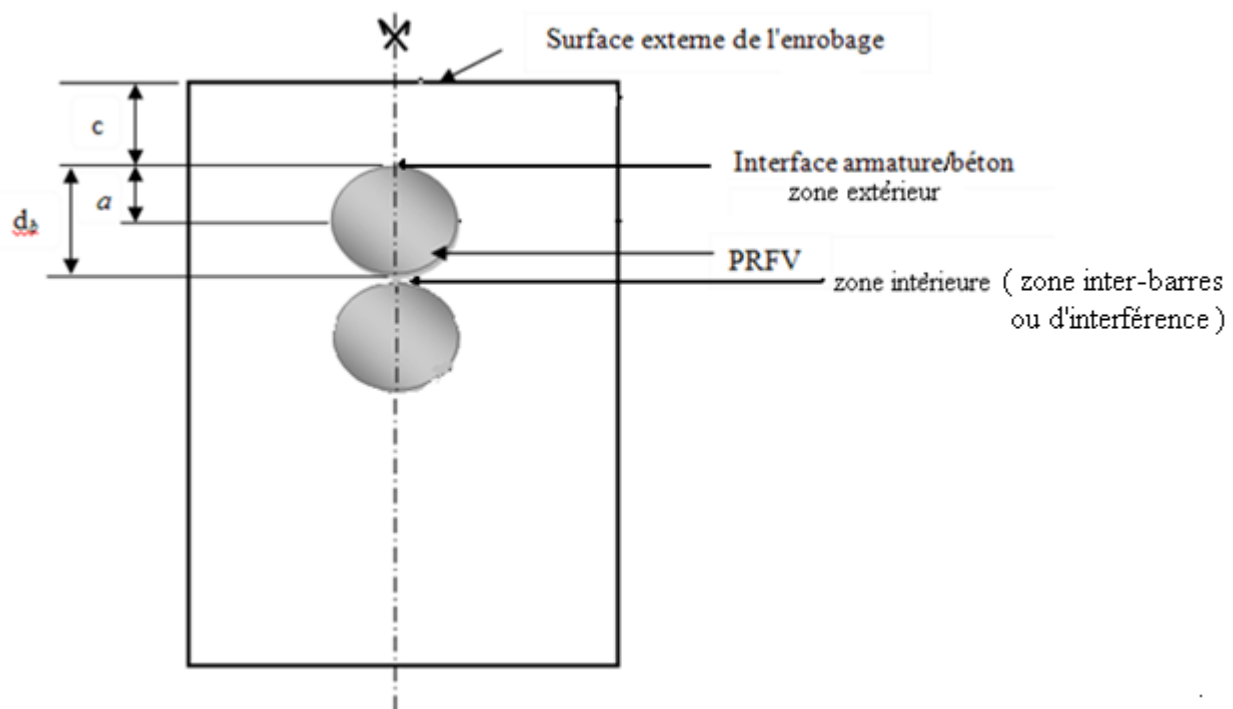


Figure V.1 Section de la poutre prismatique en spécifiant la surface externe de l'enrobage du béton, l'interface armature en PRF/béton et l'interface des deux barres en PRF/béton dans les zones extérieure et intérieure respectivement.

V.2 Variation de température ΔT_{cr} produisant la première fissure :

D'après le tableau V.1, les valeurs de variation de température ΔT_{cr} , produisant la première fissure circonférentielle dans le béton à l'interface armature/béton, prédites par le modèle analytique varient entre -25 et -26,5°C dans la zone extérieure ($\Delta T_{cr \text{ ext}}$ de la zone d'enrobage) et entre -12,5°C et -13,24°C dans la zone intérieure ($\Delta T_{cr \text{ int}}$ de la zone d'inter-barres) pour un rapport d'épaisseur d'enrobage du béton au diamètre de la barre en PRF (c/d_b) variant de 1,0 à 3,2. Cependant, les valeurs de ΔT_{cr} prédites par le modèle numérique varient entre -22,16 et -26,97°C dans la zone extérieure et entre -9,5°C et -10,5 °C dans la zone intérieure pour un rapport de c/d_b variant entre 1,0 et 3,2. On remarque que les modèles analytique et numérique donnent des valeurs assez proches.

Tableau V.1 : Variation de température ΔT_{cr} en fonction de c/d_b .

c/d_b	Modèle analytique		Modèle numérique	
	$\Delta T_{cr \text{ int}} (^{\circ}\text{C})$	$\Delta T_{cr \text{ ext}} (^{\circ}\text{C})$	$\Delta T_{cr \text{ int}} (^{\circ}\text{C})$	$\Delta T_{cr \text{ ext}} (^{\circ}\text{C})$
3,2	-12,50	-25,00	-9,70	-22,16
2,6	-12,55	-25,09	-9,48	-25,21
2,4	-12,58	-25,17	-9,68	-25, 28
2,1	-12,63	-25,26	-9,70	-25,49
2	-12,66	-25,32	-9,46	-25,56
1,9	-12,68	-25,36	-10,53	-25,62
1,6	-12,79	-25,58	-9,68	-25,75
1,4	-12,89	-25,78	-10,30	-25,94
1,3	-12,97	-25,94	-10,27	-26,14
1,2	-13,03	-26,06	-10,26	-26,21
1	-13,24	-26,49	-10,30	-26.97

V.3 Déformations thermiques transversales :

Les Figures V.2 à V.10 montrent la comparaison entre les courbes analytiques et numériques de déformations thermiques transversales du béton à l'interface armature/béton de la zone d'enrobage (zone extérieure) et à l'interface des deux barres en PRF/béton de la zone inter-barres (zone intérieure) ainsi au niveau de la surface externe de l'enrobage de béton de la zone extérieure des poutres en béton armé de deux barres en PRFV chevauchées.

D'après ces graphes, on remarque que les courbes de déformations transversales obtenues à partir du modèle numérique non-linéaire sont presque similaires avec celles obtenues à partir du modèle analytique linéaire et ceci pour une augmentation de température ΔT inférieure à -30°C à l'interface armature/béton de la zone d'enrobage (zone extérieure) et pour ΔT inférieure à -10°C à l'interface des dans barres/béton de la zone intérieure (zone inter-barres) ainsi pour ΔT inférieure à -30°C à la surface externe de l'enrobage de béton de la zone extérieure. on remarque que les valeurs de déformations prédites par le modèle numérique dans sont plus élevées que celles évaluées par le modèle analytique à cause de la présence des fissures dans béton qui n'ait pas été prises en considération dans le modèle analytique.

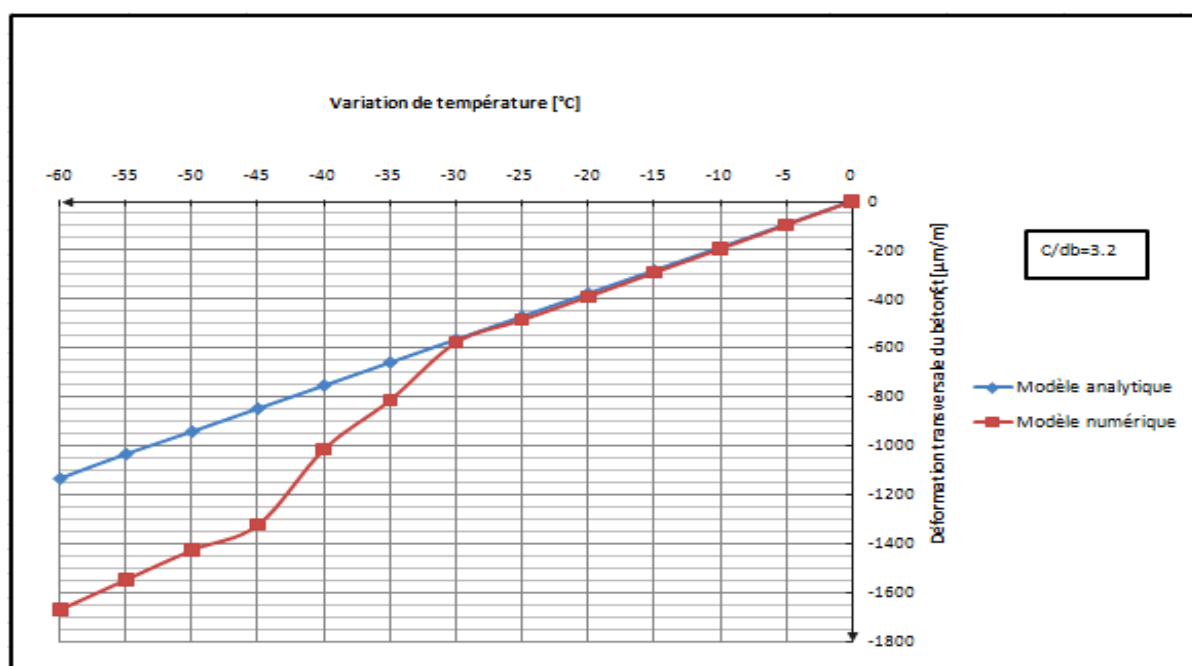


Figure V.2 Déformations thermiques transversales du béton à l'interface armature/béton de la zone d'enrobage de la poutre P.#10.30 - Comparaison des résultats analytiques et numériques ($c/d_b = 3,2$).

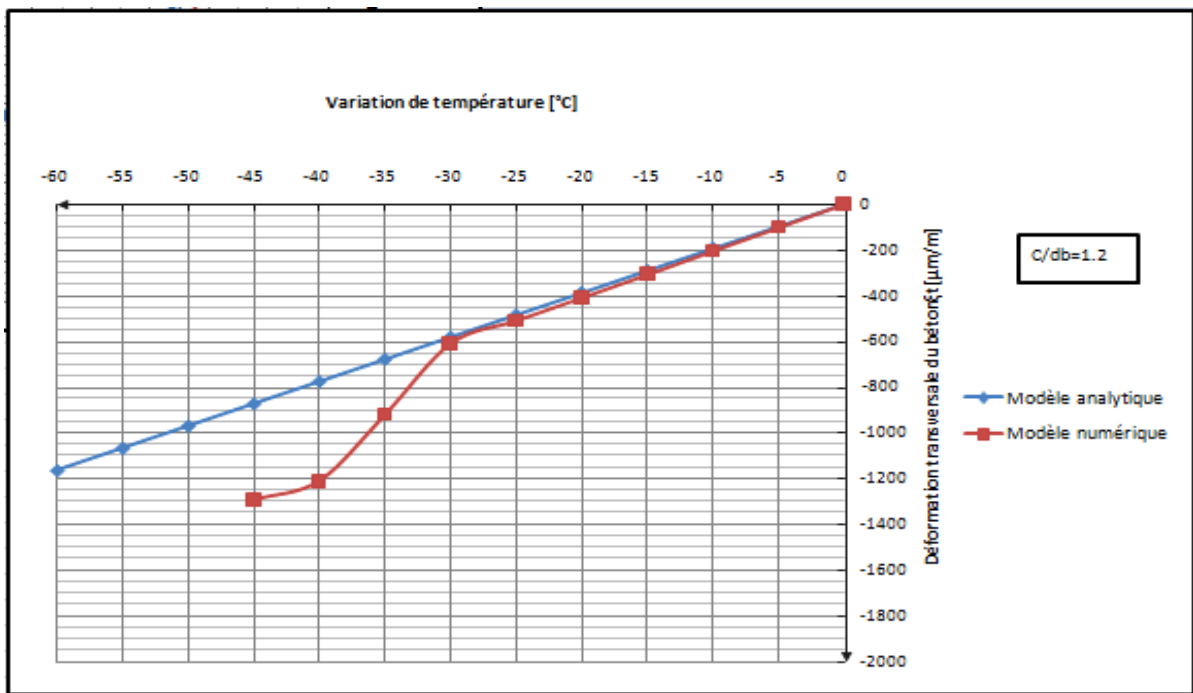


Figure V.3 Déformations thermiques transversales du béton à l'interface des deux barres/béton de la zone d'enrobage de la poutre P.#25,30 - Comparaison des résultats analytiques et numériques ($c/d_b=1,2$).

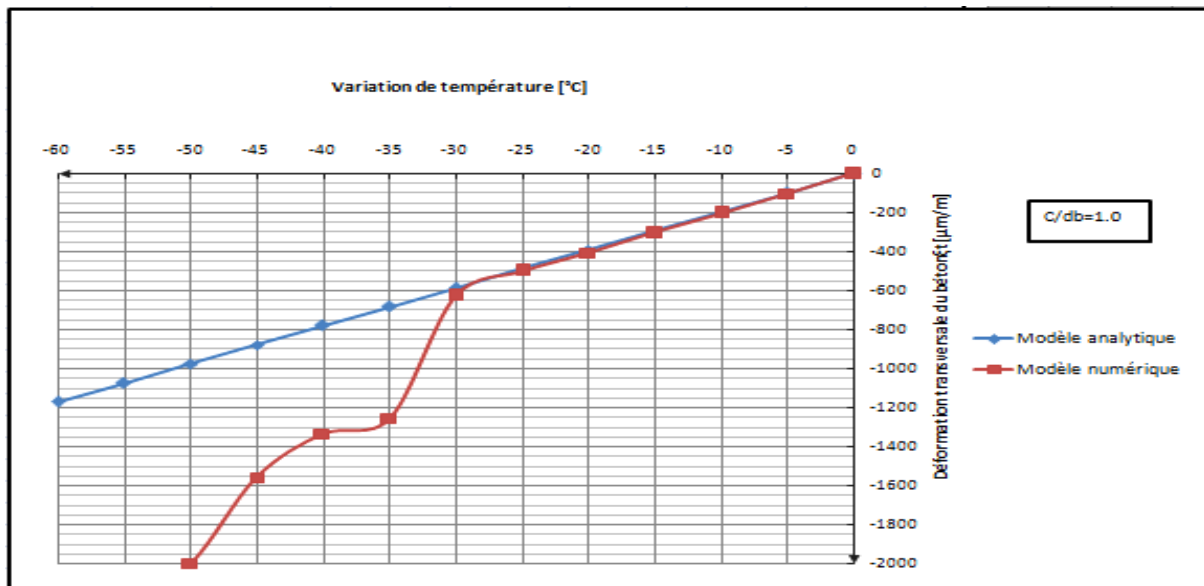


Figure V.4 Déformations thermiques transversales du béton à l'interface des deux barres/béton de la zone d'enrobage de la poutre P.#19,20 - Comparaison des résultats analytiques et numériques ($c/d_b=1,0$).

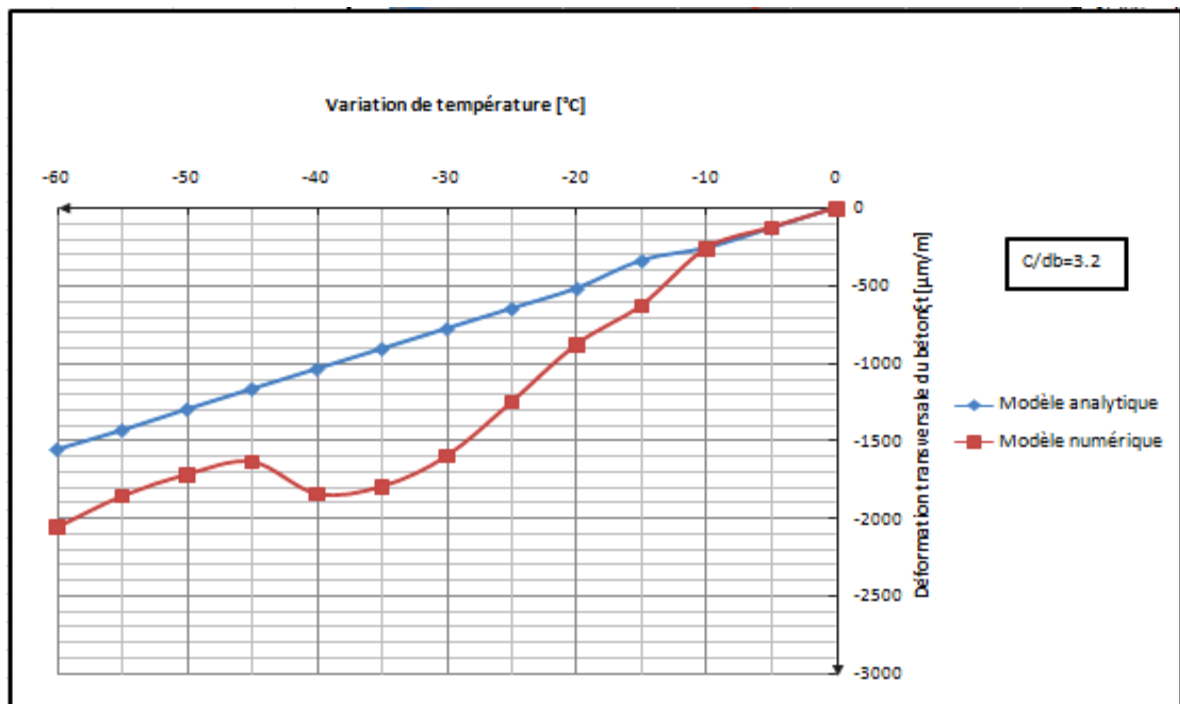


Figure V.5 Déformations thermiques transversales du béton à l'interface des deux barres/béton de la zone inter-barres (zone intérieure) de la poutre P.#10.30- Comparaison des résultats analytiques et numériques ($c/d_b=3,2$).

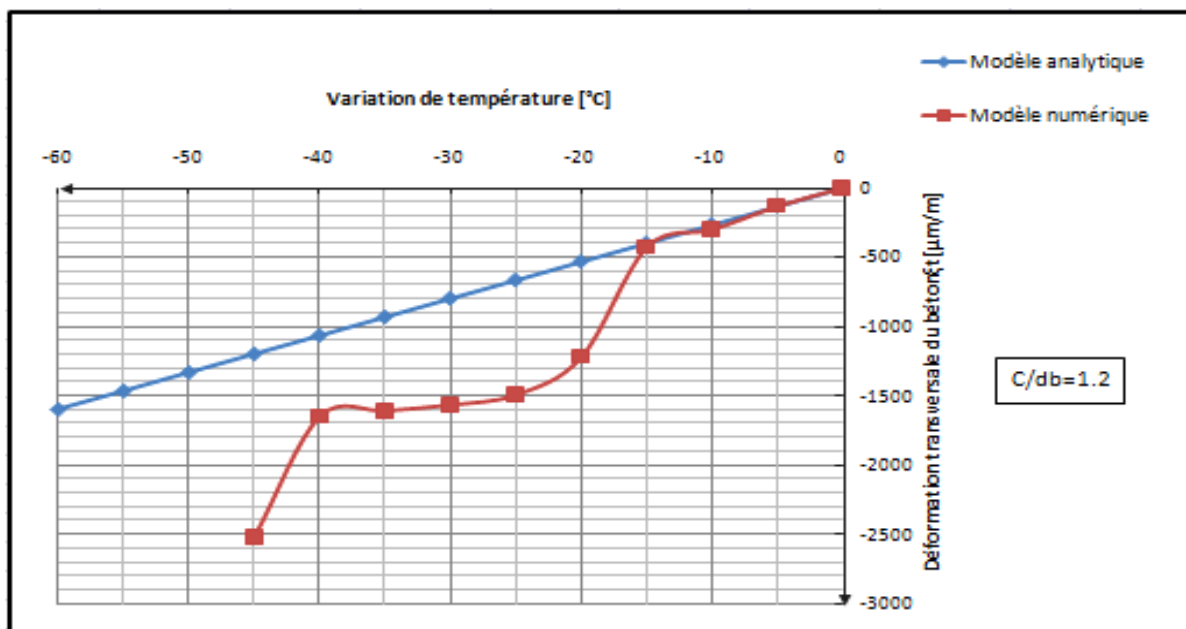


Figure V.6 Déformations thermiques transversales du béton à l'interface des deux barres/béton de la zone inter-barres (zone intérieure) de la poutre P.#25.30 - Comparaison des résultats analytiques et numériques ($c/d_b = 1,2$).

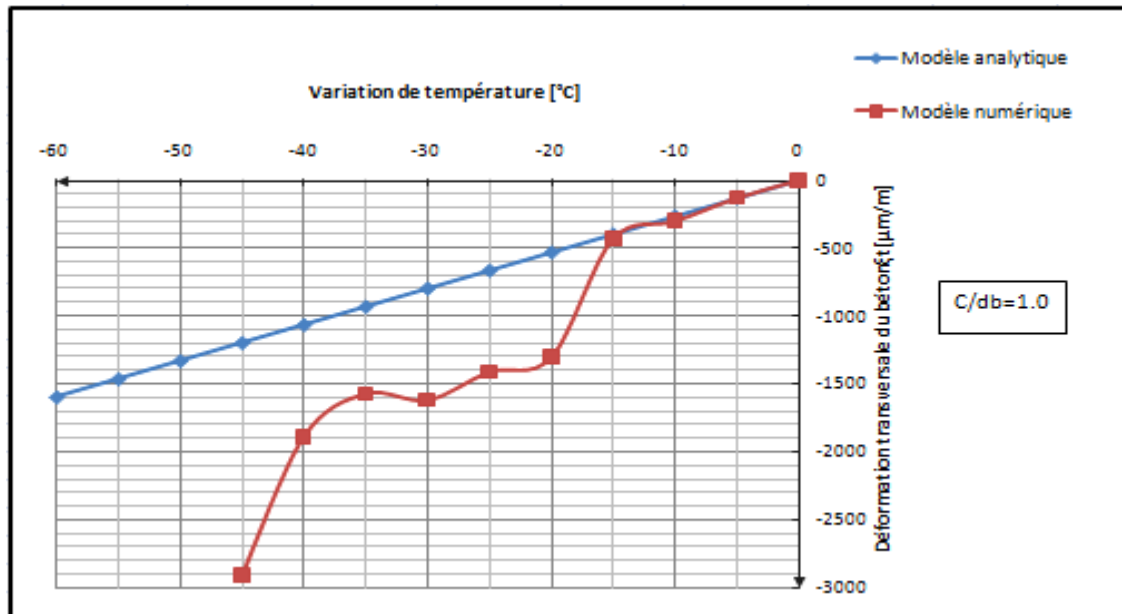


Figure V.7 Déformations thermiques transversales du béton à l'interface des deux barres/béton de la zone inter-barres (zone intérieure) de la poutre P.#19,20- Comparaison des résultats analytiques et numériques ($c/d_b=1,0$).

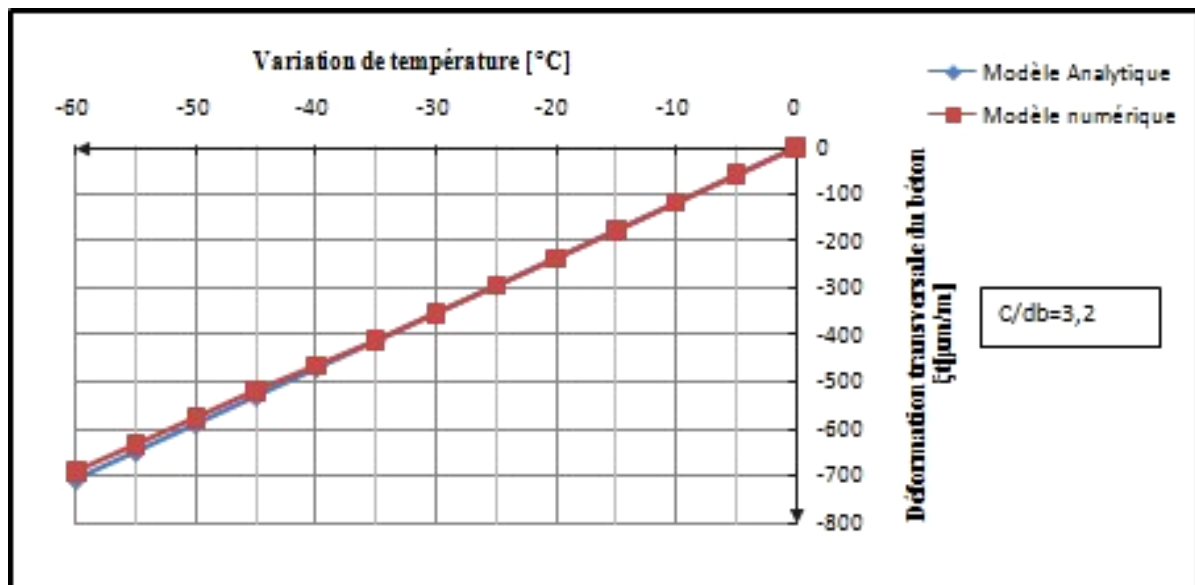


Figure V.8 Déformations thermiques transversales du béton à la surface externe de l'enrobage de béton de la zone extérieure de la Poutre P.#10,30 - Comparaison des résultats analytiques et numériques ($c/d_b = 3,2$).

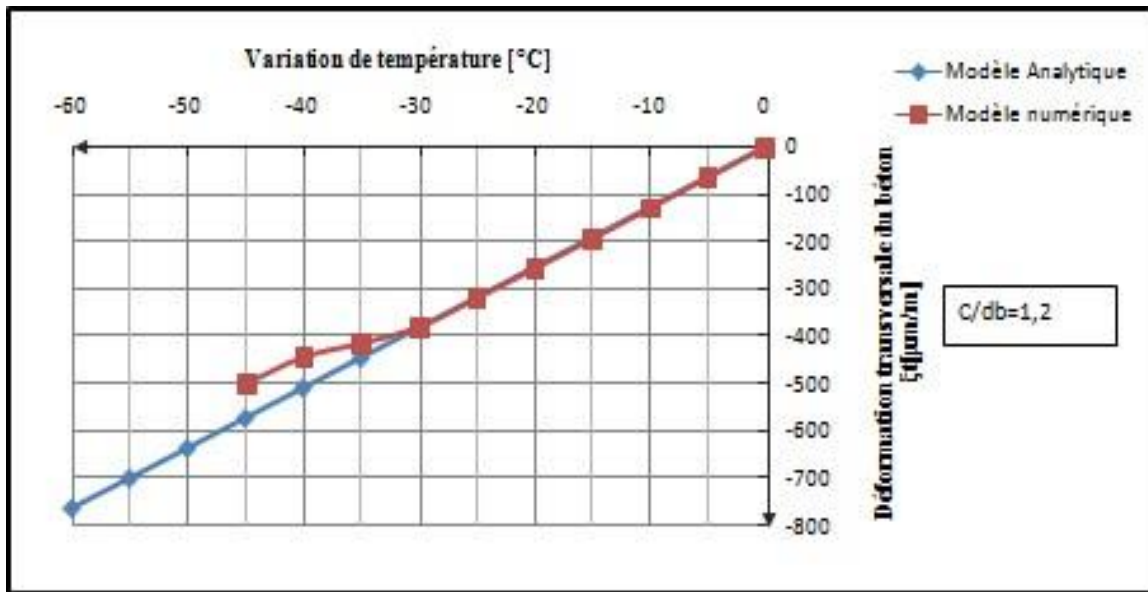


Figure V.9 Déformations thermiques transversales du béton à la surface externe de l'enrobage de béton de la zone extérieure de la Poutre P.#25,30 - Comparaison des résultats analytiques et numériques ($c/d_b = 1,2$).

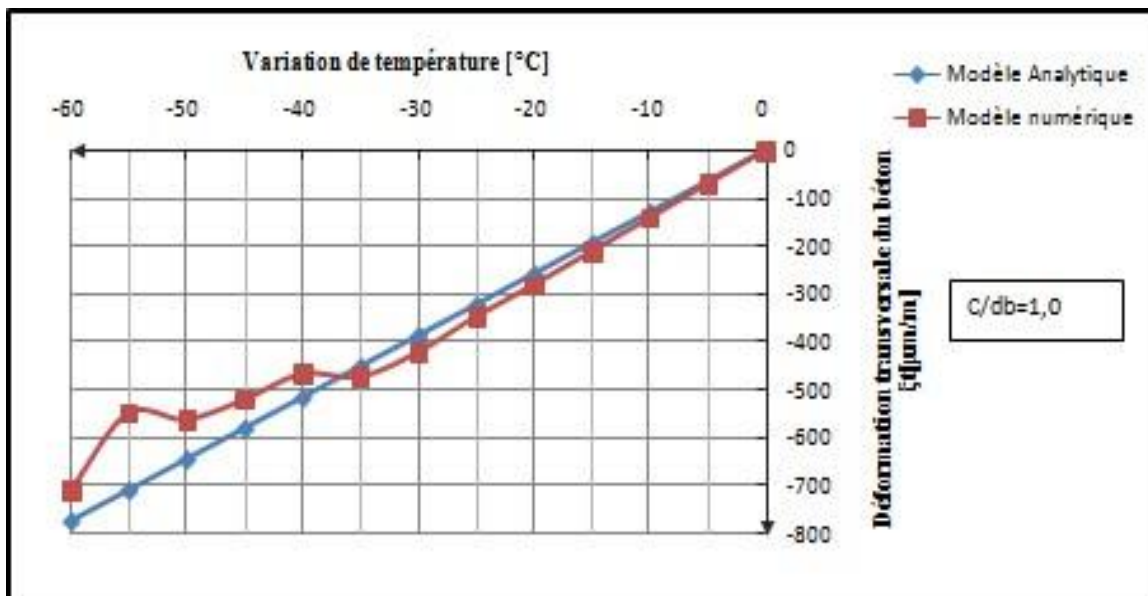


Figure V.10 Déformations thermiques transversales du béton à la surface externe de l'enrobage de béton de la zone extérieure de la Poutre P.#19,20 - Comparaison des résultats analytiques et numériques ($c/d_b = 1,0$).

V.4 Contraintes thermiques radiales :

Les Figures V.11 à V.16 montrent la comparaison entre les courbes analytique et numérique des contraintes de traction radiale du béton à l'interface armature/béton de la zone d'enrobage et l'interface des deux barres PRF/béton de la zone inter-barres (voir figure V.1) des poutres prismatiques en béton armé de deux barres en PRFV chevauchées verticalement ayant un rapport d'épaisseur d'enrobage de béton au diamètre de la barre en PRFV c/d_b variant de 1 à 3,2. Les courbes analytiques donnent des contraintes de traction du béton à l'interface armature/béton assez élevées que celle données par les courbes numériques non linéaires. Ces contraintes analytiques dépassent la résistance à la traction du béton ($f_{ct} = 4,1\text{MPa}$) et qui peuvent atteindre des valeurs de 10 MPa environ à l'interface armature/béton de la zone d'enrobage et de 20 MPa à l'interface des deux barres PRF/béton de la zone inter-barres à des variations de températures de -60°C . On remarque que pour le modèle numérique, la résistance à la traction du béton ($f_{ct} = 4,1\text{MPa}$) est atteinte à des variations de température (ΔT_{cr}) variant entre -9.5°C et -10.5°C au niveau de l'interface des deux barres PRF/béton de la zone inter-barres et de -25.49 et 28.08°C au niveau de l'interface armature/béton de la zone d'enrobage. À cette variation de température (ΔT_{cr}), les premières fissures circonférentielles commencent à se développer dans le béton à l'interface armature en PRF/béton et, par conséquent, les contraintes de traction radiales du béton diminuent considérablement, ce qui l'ignore carrément le modèle analytique linéaire à cause de la présence des fissures dans le béton qui n'ait pas été prise en considération dans le modèle analytique.

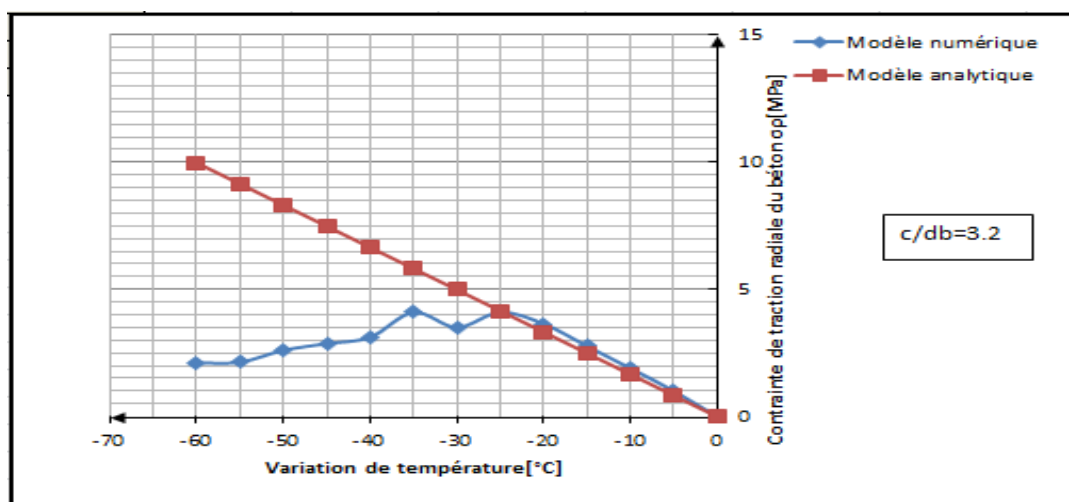


Figure V.11 Contrainte de traction du béton à l'interface armature/béton de la zone d'enrobage de la poutre P.#10.30 - Comparaison des résultats analytiques et numériques ($c/d_b = 3,2$).

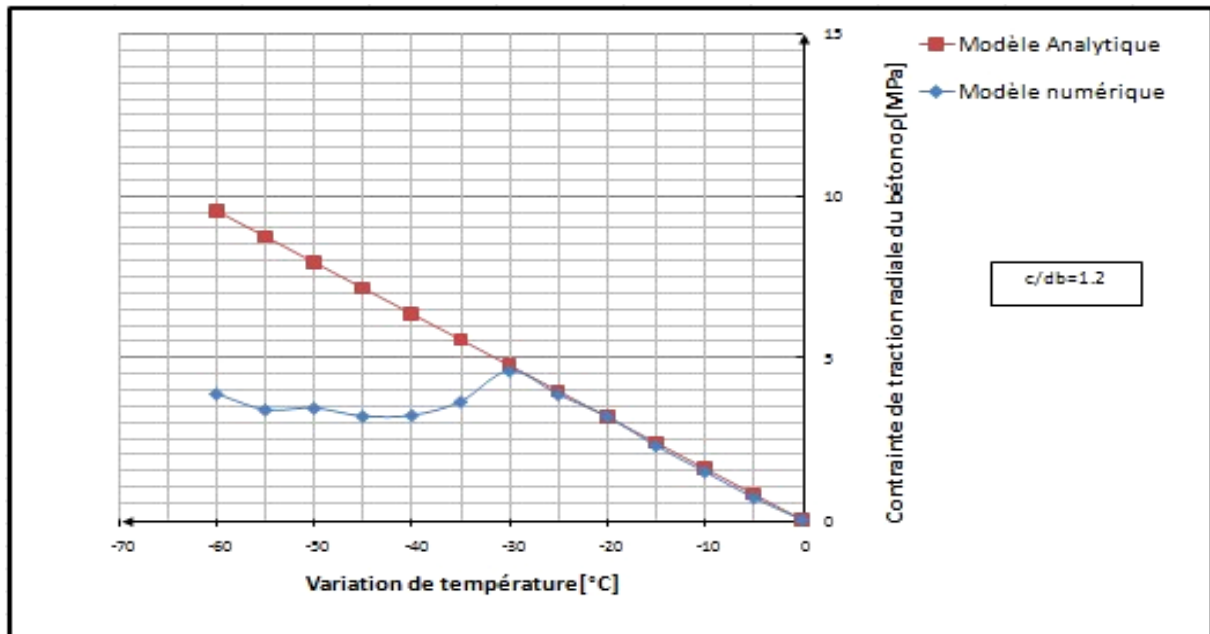


Figure V.12 Contrainte de traction du béton à l'interface armature/béton de la zone d'enrobage de la poutre P.#25,30 - Comparaison des résultats analytiques et numériques ($c/d_b = 1,2$).

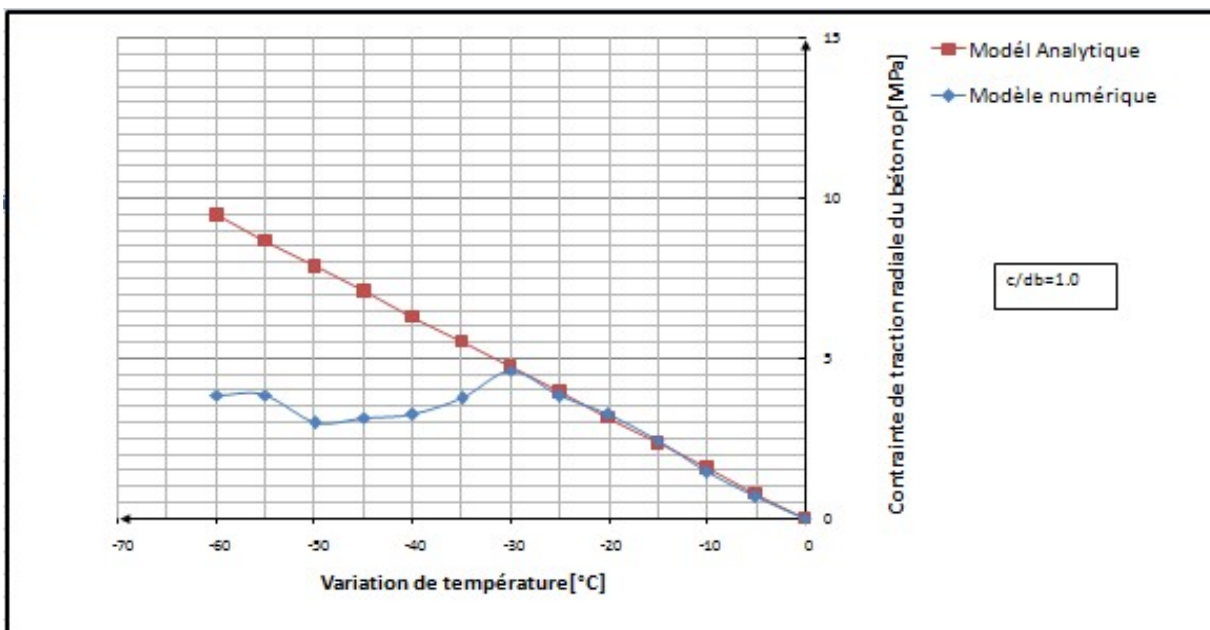


Figure V.13 Contrainte de traction du béton à l'interface armature/béton de la zone d'enrobage de la poutre P.#19,20 - Comparaison des résultats analytiques et numériques ($c/d_b = 1,0$).

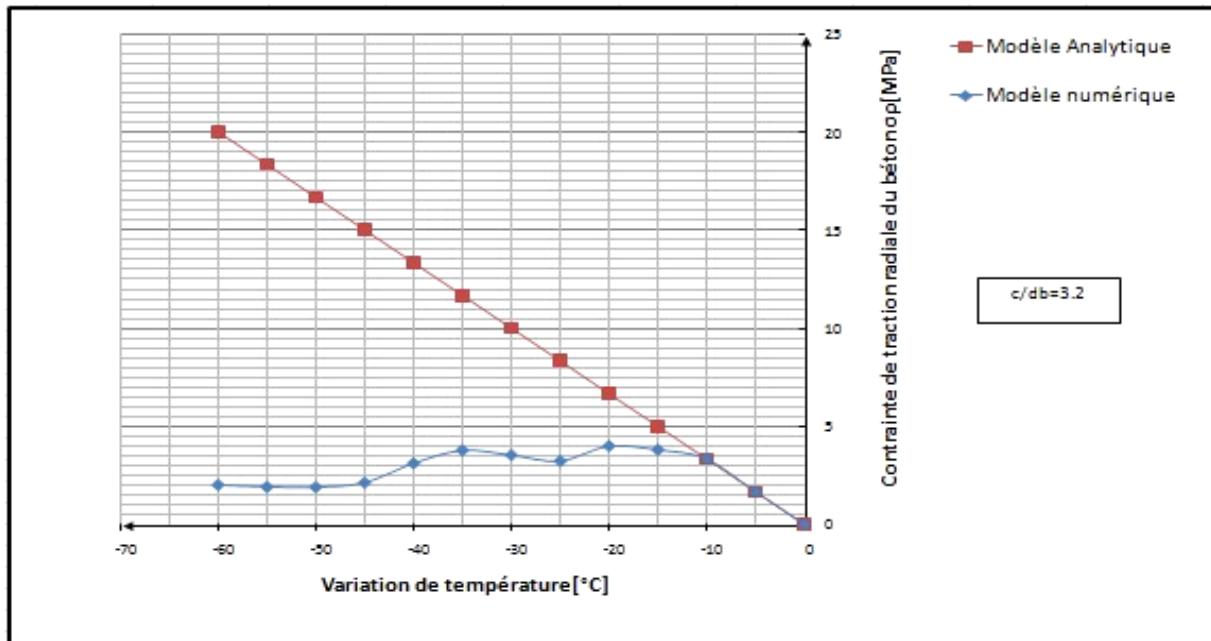


Figure V.14 Contrainte de traction du béton du béton à l'interface des deux barres/béton de la zone inter-barres (zone intérieure) de la poutre P.#10,30 - Comparaison des résultats analytiques et numériques ($c/d_b = 3,2$).

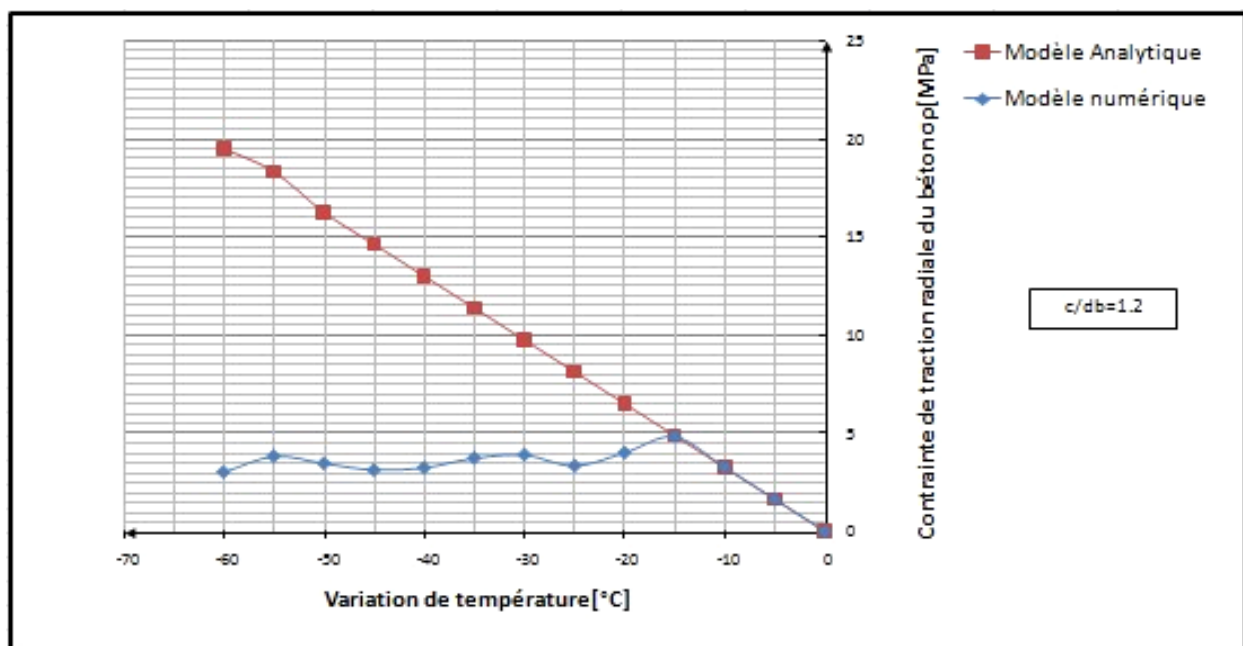


Figure V.15 Contrainte de traction du béton du béton à l'interface des deux barres/béton de la zone inter-barres (zone intérieure) de la poutre P.#25,30 - Comparaison des résultats analytiques et numériques ($c/d_b = 1,2$).

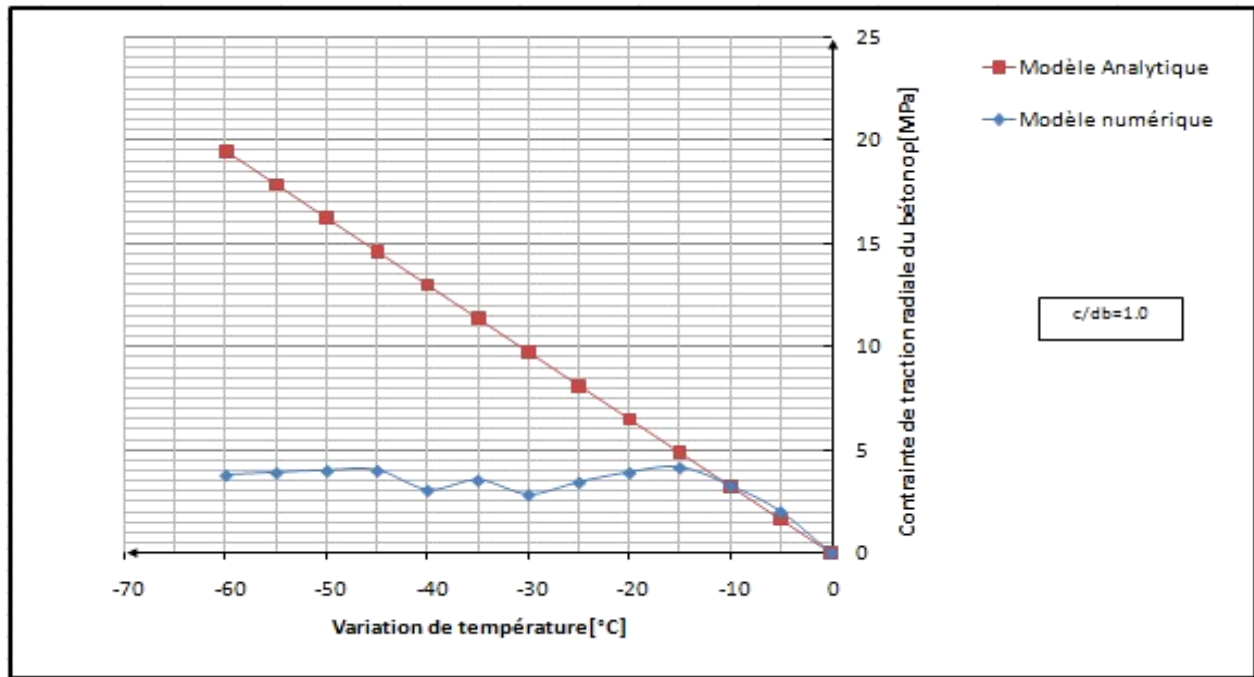


Figure V.16 Contrainte de traction du béton du béton à l'interface des deux barres/béton de la zone inter-barres (zone intérieure) de la poutre P.#19.20 - Comparaison des résultats analytiques et numériques ($c/d_b = 1,0$).

Conclusions :

L'objectif principal de ce travail est d'étudier à l'aide de la méthode des éléments finis en utilisant le logiciel ADINA, l'effet de chevauchement vertical de deux barres en PRF de verre (PRFV) ancrées dans le béton sur les déformations et les contraintes des poutres sous basses températures. Ces déformations et contraintes permettent d'évaluer la variation de température (ΔT_{cr}) produisant la première fissure circonférentielle dans le béton à l'interface armature/béton et à l'interface des deux barres /béton.

L'analyse des résultats analytique et numérique de l'effet de chevauchement vertical de deux barres en PRF de verre ancrées dans le béton, a permis de dresser les conclusions suivantes :

1. Pour les déformations thermiques transversales à l'interface armature/béton de la zone d'enrobage (zone extérieure) des poutres prismatiques, les résultats numériques sont en bon accord avec les résultats analytiques pour $\Delta T < -30$ °C. Cependant, pour $\Delta T \geq -30$ °C, les déformations numériques sont supérieures à cause de l'effet de la présence des fissures circonférentielles dans le béton.
2. Pour les déformations thermiques transversales à l'interface des deux barres/béton de la zone intérieure (zone inter-barres) du béton des poutres prismatiques, les résultats numériques sont en bon accord avec les résultats analytiques pour $\Delta T < -10$ °C. Cependant, pour $\Delta T \geq -10$ °C, les déformations numériques sont plus élevées à cause de l'influence du développement des fissures de traction dans la zone d'inter-barres.
3. Selon le modèle analytique linéaire la variation du diamètre de la barre en PRFV et de la variation de l'épaisseur d'enrobage du béton n'ont pas de grande influence sur la déformation thermique transversale qui dépend principalement de la variation de température.
4. Pour les contraintes thermiques radiales à l'interface armature/béton de la zone d'enrobage (zone extérieure) des poutres prismatiques en béton armé de barres en PRFV ayant un rapport c/d_b varie entre 1,0 et 3,2; le modèle analytique linéaire donne des résultats en bon accord avec ceux du modèle numérique jusqu'à l'apparition des premières fissures circonférentielle dans le béton à l'interface à ΔT_{cr} autours de -30 °C à partir de laquelle les résultats numériques diminuent brusquement à cause des fissures qui ne sont prises en considération dans le calcul analytique.
5. Pour les contraintes thermiques transversales à l'interface des deux barres en PRFV/béton de la zone intérieure (zone inter-barres) du béton des poutres prismatiques ayant un rapport c/d_b varie entre 1,0 et 3,2; le modèle analytique linéaire donne des résultats en bon accord avec ceux du modèle numérique jusqu'à l'apparition des premières fissures dans le béton à l'interface des 2 barres à ΔT_{cr} autour de -10 °C à partir de laquelle les résultats numériques diminuent brusquement à cause des fissures qui sont prises en considération dans le modèle numérique contrairement au modèle analytique linéaire .
6. Selon les modèles analytique et numérique, les premières fissures circonférentielles apparaissent dans le béton à l'interface des deux barres/béton de la zone intérieure (zone inter-barres) et à l'interface de la barre/béton de la zone d'enrobage à des variations de température ΔT_{cr} (-10 à -15°C) et (-25 à -30 °C) respectivement pour des poutres prismatiques en béton armé de deux barres en PRFV sous variation de température allant jusqu'à -60 °C et de résistance à la traction du béton $f_{ct28} = 4,1$ MPa.

7. Les variations de températures ΔT_{cr} prédites par le modèle analytique linéaire produisant les premières fissures circonférentielles dans le béton à l'interface des deux barres/béton de la zone intérieure (zone inter-barres) et l'interface armature/béton de la zone d'enrobage (zone extérieure), sont relativement proche avec les résultats numériques obtenus par ADINA pour des poutres en béton armé de deux barres en PRFV sous basse variation de température (ΔT) allant jusqu'à -60 et ayant des rapports de c/d_b variant entre 1,0 et 3,2.
8. Les variation de température (ΔT_{sp}) prédites par le modèle numérique produisant la rupture d'enrobage de béton variant de -45 à -60°C pour des rapports c/d_b variant de 1 à 1,9 pour des poutres en béton armé de deux barres en PRF sous basse variation de température (ΔT) allant jusqu'à -60 °C.
9. Pour des rapport $c/d_b > 1,9$ aucune fissure circonférentielle n'atteint la surface extérieure de l'enrobage du béton des poutres en béton armé de deux barres en PRFV sous basse variation de température (ΔT) allant jusqu'à -60 et ayant des rapports de c/d_b variant entre 1,0 et 3,2.

Recommandations :

Pour des futurs travaux de recherche, on recommande ce qui suit :

- Refaire l'étude présentée dans ce mémoire portant sur l'effet de chevauchement verticale de deux barres en PRF de verre ancrées dans le béton avec une étude analytique approfondie pour la détermination des variations de température (ΔT_{sp}) produisant la rupture d'enrobage du béton ainsi que les déformations transversales et les contraintes radiales .
- Etudier l'effet des propriétés de béton et des barres de PRF sur les contraintes et déformations des poutres en béton armé de deux en PRF chevauchées sous basses températures .
- Refaire l'étude numérique de ce mémoire pour des barres en PRF de carbone chevauchées.

BIBLIOGRAPHIES

- ABDALLA, H. (May 2006) *Concrete cover requirements for FRP reinforced members in hot climates*, Composite Structures, vol. 73, n° 1, p. 61-69.
- ACI 440 (1995) *State of the art report on FRP Reinforcements for concrete structures*, ACI 440R-96, approved in (2002), American Concrete Institute, Detroit, Michigan.
- ACI 440.1R-01 (2001). "Guide for the Design and Construction of Concrete Reinforced with FRP Bars", American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan, 41p.
- AIELLO, M.A., FOCACCI, F., and NANNI, A. 2001, *Effects of thermal loads on concrete cover of fiber reinforced polymer reinforced elements: Theoretical and experimental analysis*, ACI Materials Journal, vol. 98, n° 4, p. 332-339.
- AIELLO, M.A. ,(1999) *Concrete cover failure in FRP reinforced beams under thermal loading*, Journal of Composites for Construction, vol. 3, n° 1, p. 46-52.
- ALFIO QUARTERONI , RICCARDO SACCO, FAUSTO SALERI,(2007) *Méthodes Numériques Algorithmes, analyse et applications*, Springer
- ALLA CHATEAUNEUF, (2005), *Comprendre les éléments finis : Principes, Formulation et exercices corrigés*, Ellipses
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE ,(2003), *Guide for the Design and Construction of Concrete with FRP Bars*, ACI 440.1R 03, American Concrete Institute, Detroit, 42 p.
- BADJOUDA BOUHAS (2013), *analyse comparative par éléments finis du comportement d'éléments en béton armé de barres en PRF de confinement symétrique et asymétrique sous hautes températures*, mémoire de master université de Laghouat.
- BATHE. K. J. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1996.
- BERTHELOT, J.M., (1996) *Matériaux composites – Comportement mécanique et analyse des structures*, Masson, Paris, 620 p.
- BENABDESSELAM, Y. (1998) *Étude de l'effet de cycles thermiques sur l'adhérence béton /armature en matériaux composites constituée de polymères renforcés de fibres de carbone et de fibres de verre*, Mémoire de maîtrise ès sciences appliquées, Département de génie civil, Université de Sherbrooke, 138 p.
- BENMOKRANE, B., and EL-SALAKAWY, E. eds. (2002) *Proceedings of 2nd International Conference on Durability of Composites for Construction*, CDCC02, Sherbrooke, Canada.
- COOMARASAMY,A.et GOODMAN ,S (1997). *Investigation of the Durability Characteristics of Fiber Reinforced Polymer (FRP) Materials in Concrete Environment*, American Society for Composites-Twelfth Technical Conference, Dearborn, Michigan.
- CANADIAN STANDARDS ASSOCIATION (2000) *Canadian Highway Bridge Design Code*, CAN/CSA. S6-00 , Canadian Standards Association, Toronto, Ontario, Canada.
- CHAALLAL, O., and BENMOKRANE, B. (1993) *Physical and mechanical performance of innovative glass fiber reinforced plastic rod for concrete and grouted anchorages*, Canadian Journal of Civil Engineering, vol. 20, n° 2, p. 254-268.
- CHAALLAL, O., HOUDE, J., BENMOKRANE, B., and AITCIN, P.-C. (1991) *Use of a new glass-fiber rod as reinforcement for concrete structures*, ACI Special Publication on Evaluation and Rehabilitation of Concrete Structures and Innovations in Design, P128-132
- DHATT. G ET TOUZOT.G. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Québec Les presses de l'Université Laval, (1981)

- DUTTA, P.K. (Aug. 1994) *Low-temperature compressive strength of glass-fiber-reinforced polymer composites*, Journal of Offshore
- Mechanics and Arctic Engineering, Transactions of the ASME, vol. 116, n° 3, p. 167-172.
- ERKI, M.A., and RIZKALLA, S.H. (Jun. 1993) *FRP reinforcement for concrete structures*, Concrete International: Design and Construction, vol. 15, n° 6, p. 48-53.
- ERKI, M. A, and RIZKALLA, S.H. (Jun. 1993) *FRP reinforcement for concrete structures*, Concrete International: Design and Construction, vol. 15, n° 6, p. 48-53.
- GAY, D. (1997) *Matériaux composites*, 4e édition Hermès, Paris, France, 672 p.
- GAY, D. (1997) *Matériaux composites*, 4e édition Hermès, Paris, France, 672 p
- GENTRY, T.R., and HUDAK, C.E. (August 1996) *Thermal Compatibility of Plastic Composite Reinforcement and Concrete*, Proceedings of 2nd International Conference on Advanced Composite Materials in Bridges and Structures, ACMBS-II, Montreal, QC, p.149-156
- HAMDI, B. (JUNE2011) *Étude numérique du comportement thermique des poutres en béton armé de barres en polymères renforcés de fibres (PRF)* Mémoire de Master Département de génie civil, université de Laghouat
- HANCOX, N.L. (1981) *Fiber composite hybrid materials*, Materials Development Division, Atomic Energy Research Establishment, Harwell, Oxford shire, UK, Applied Science Publishers LTD, London, 290 p.
- HANCOX, N.L., and MAYER, R.M. (1994) *Design data for reinforced plastics - A guide for engineers and designers*, Chapman & Hall, London, 326 p.
- ISIS (INTELLIGENT SENSING FOR INNOVATIVE STRUCTURES, Manuel de calcul N° 3 Document traduit de la version originale en anglais intitulée : *Reinforcing Concrete Structures with Fiber Reinforced Polymers (FRPs)*, Design Manual N°3, (September 2001).
- KUMAHARA, S., MASUDA, Y., TANANO, H., and SHIMIZU, A. (1993) *Tensile strength of continuous fiber bar under high temperature*, International symposium, Vancouver, ACI SP-138-44, P. 731-742.
- KATZ ,A.,BERMAN ,N.et BANK ,L.C.(1998). "Effect of Cyclic Loading and Elevated temperature on the Bond Properties of FRP Rebars," International Conference on the Durability of Fiber Reinforced Polymer (FRP) Composites for Construction, Sherbrooke, Québec, Canada, pp.403-413.
- KATZ ,A.,BERMAN ,N.et BANK ,L.C. (1999). "Effect of High Temperature on the Bond Strength of FRP Rebars," Journal of Composites for Construction, May 1999.
- MALLICK, P. K, (1993) *Fiber-reinforced composites – Materials, Manufacturing, and Design*, 2nd Edition, Revised and Expanded, Marcel Dekker, INC., New York, 566 p.
- MALLICK, P.K., (1988) *Fiber-reinforced composites – Materials, Manufacturing, and Design*, Marcel Dekker, INC., New York, 469 p.
- MERDAS ABDE-ELGHANI (2005) *Utilisation du TFC dans la réparation et le renforcement des poutres en BA*, mémoire de magister université de Constantine.
- Nanni, A., Nenninger, J., Ash, K. et Liu, J. (1997). 'Experimental Bond Behaviour of Hybrid Rods for Concrete Reinforcement,' Structural Engineering and Mechanics, V. 5, No. 4, pp. 339-354.
- RAHMAN, H.A., and KINGSLEY, C.Y. (1996) *Fatigue behavior of a fiber reinforced plastic grid as reinforcement for concrete*, Proceedings of 1st International Conference on composites in infrastructure: Fiber composite in infrastructure, Tucson, AZ: ICCI, p. 427-439.

- RAHMAN, H. A., KINGSLEY, C. Y., and TAYLOR, D. A. _1995_. "Thermal stress in FRP reinforced concrete." *Proc., Ann. Conf. of the Canadian Society for Civil Engineering*, CSCE, Ottawa, 605–614.
- RAUGEL.G, 'Résolution numérique par une méthode d'éléments finis du problème de Dirichlet pour le Laplcien dans un polygone'' , C.R.A.S., Paris, t.286(1978), p791-794.
- SAYES –AHMED ,E.Y.et SHRIV ,N.G (1999) . "*Smart FRP Prestressing Tendons: Properties and Prospects*," Proceedings of the Second Middle East Symposium on Structural Composites for Infrastructure Applications, Edited by Hosny, Mahfouz and Sarkani, pp. 80-93
- TIMOSHENKO, S.P., and GOODIER, J.N. (1970) *Theory of elasticity*, Mc-Graw-Hill, New York.
- Tanigaki, M., Okamoto, T., Tamura, T., Matsubara, S. et Nomura, S. (1989). "*Study of Braided Aramid Fiber Rods for Reinforcing Concrete*," Braided Aramid Rods for Reinforcing Concrete, FiBRA
- VOGEL, H., and SVECOVA, D. (July 2004) *Effect of Temperature on concrete cover of FRP Prestressed Elements*, Proceedings of 4thInternational Conference, Advanced Composite Materials in Bridges and Structures, ACMBS-IV, Calgary, Alberta, p. 1-8.
- ZAIDI, A. (Mai 2006) *Comportement Thermique d'Eléments en Béton Armé de Barres en Polymères Renforcés de Fibres (PRF)*,thèse de ph. d, université Sherbrooke, Département de génie civil, (Québec), Canada.
- ZAIDI, A. and MASMOUDI, R. (May 2006) *Thermal effect on FRP-reinforced concrete Slabs*. Proceedings of the 1st International Structural Specialty Conference CSCE, Calgary, Alberta, Canada, 10p.
- ZAIDI,A. and MASMOUDI, R. (August 2006) *Effect of low and high temperatures on the transverse thermal expansion of FRP bars embedded in concrete*, 7th International Conference on Short & Medium Span Bridges, Montreal, Quebec, Canada, 11p.
- ZAIDI, A. and MASMOUDI, R. (May 2007) *Numerical analysis of the transverse thermal behavior of FRP Bars embedded in concrete*.3rd International Conference on Durability & Field Applications of fiber Reinforced Polymer (FRP) Composites for Constructions, Quebec, Canada.
- ZAIDI, A. and MASMOUDI, R. (July 2007) *Effect of Concrete Cover Thickness and FRP-Bars Spacing on the Transverse Thermal Expansion of FRP Bars*. 8th International Symposium on Fiber Reinforced Polymer Reinforcement for Concrete Structures, University of Patras, Department of Civil Engineering, Patras, Greece,10p.
- ZAIDI, A. and MASMOUDI, R. (March 2008) *Thermal effect on fiber reinforced polymer reinforced concrete slabs*. Canadian Journal of Civil Engineering, NRC-Canada, vol . 35, n°3, p 312-320.
- ZAIDI, A. ,HAMDI , B. , MASMOUDI,R., AMARA, S., MOUTTAH, K. (November 2012) *Finite element modeling of prismatic concrete beams reinforced with FRP bars under high temperatures*, 1st International Conference on civil Engineering, ICCE-2012, University of Laghout, Algeria.
- ZIENCKIEWICZ O.C. *The finite element method*. 4e édition, deux volumes. McGraw Hill, (1989).
- YAGI , K, HOSHIJIMA ,T. ,ANDO , T. et TANAKA ,T .(1997). "*The Durability Tests of Carbon Fiber Reinforced Plastics Rod Produced by Pultrusion Method*," Proceedings, International Conference on Engineering Materials, Edited by Al-Manaseer, Nagataki and Joshi, CSCE/JSCE, Ottawa, Ontario, Volume 2, pp. 327-340.

1-Courbes obtenus par les résultats numérique :

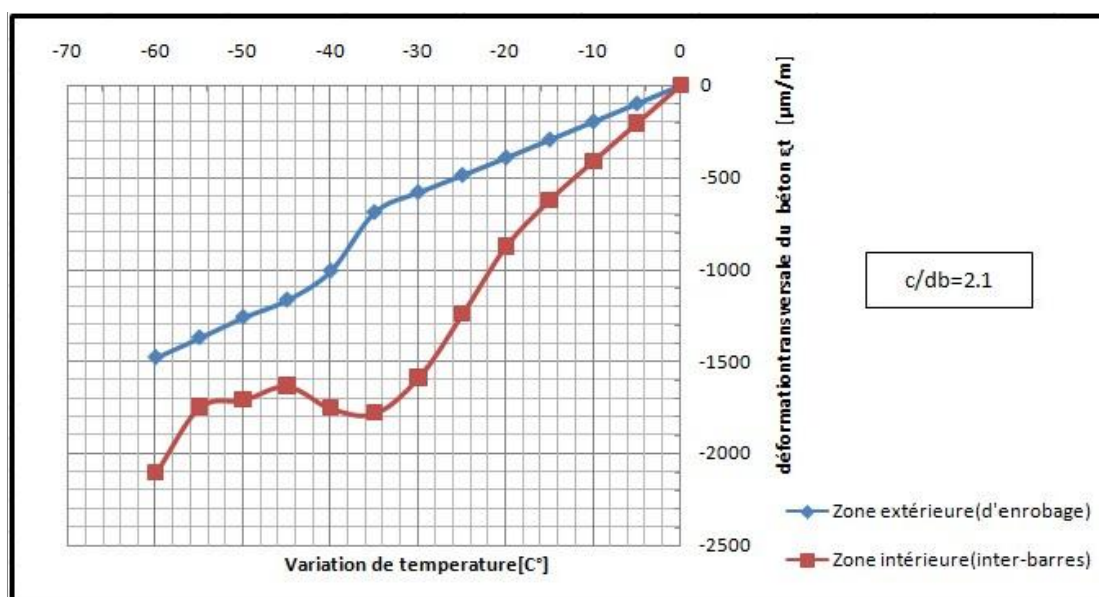


Figure 1 Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 2,1$ (P.#10.20).

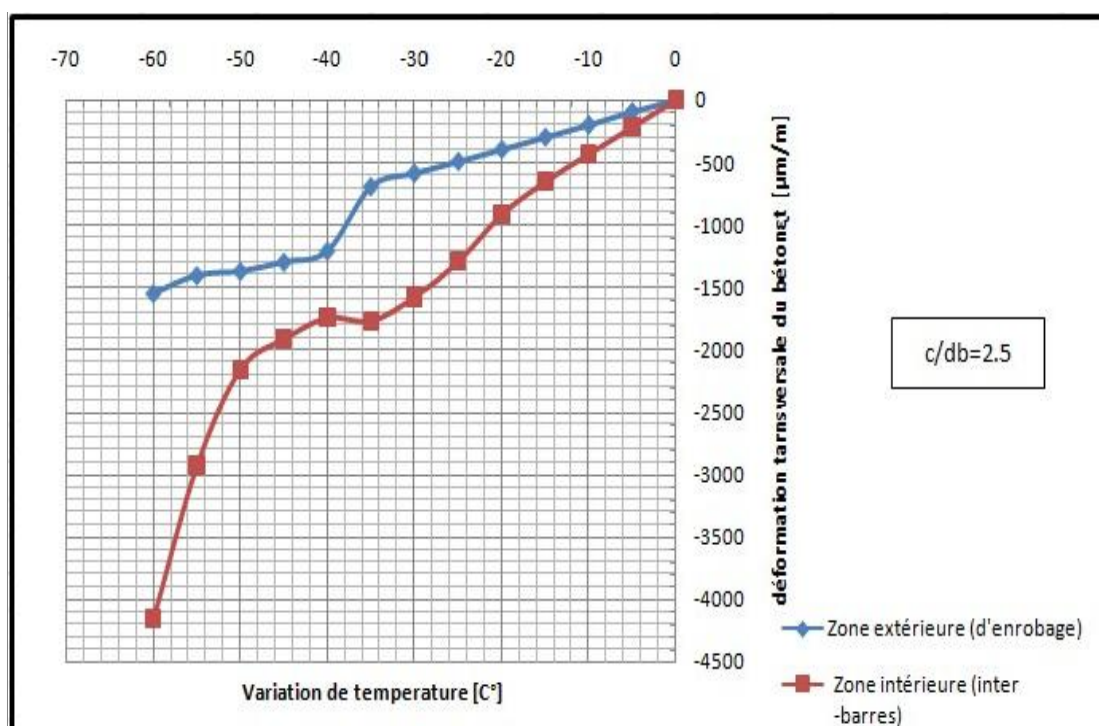


Figure 2 Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 2,5$ (P.#13.30).

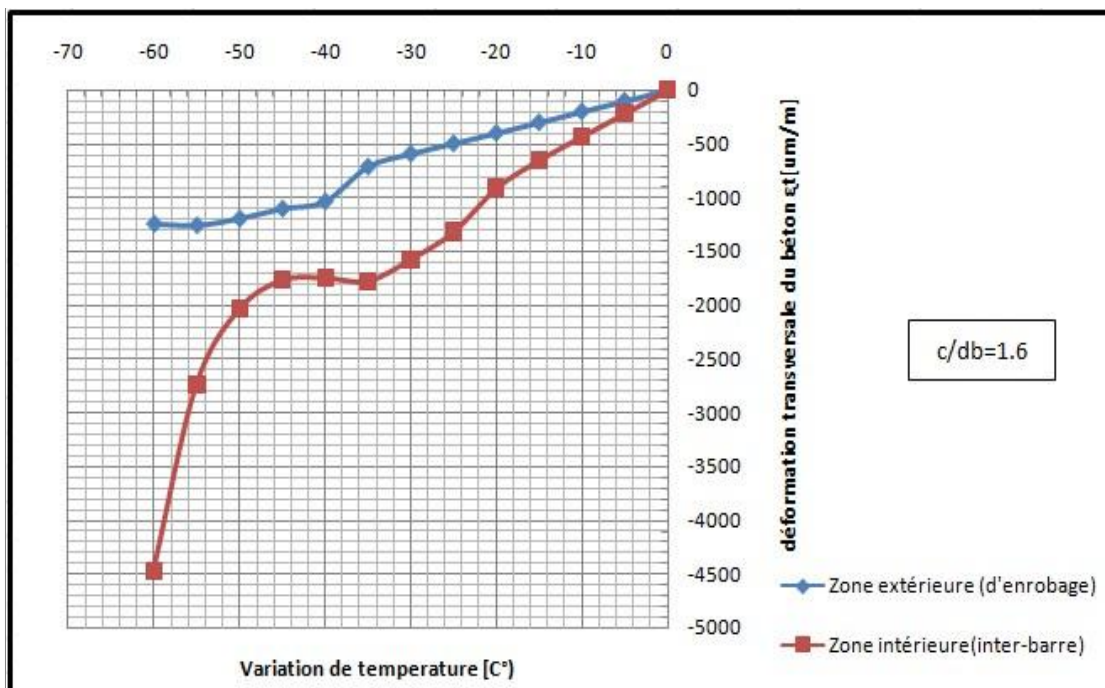


Figure 3 Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,6$ (P.#13.20).

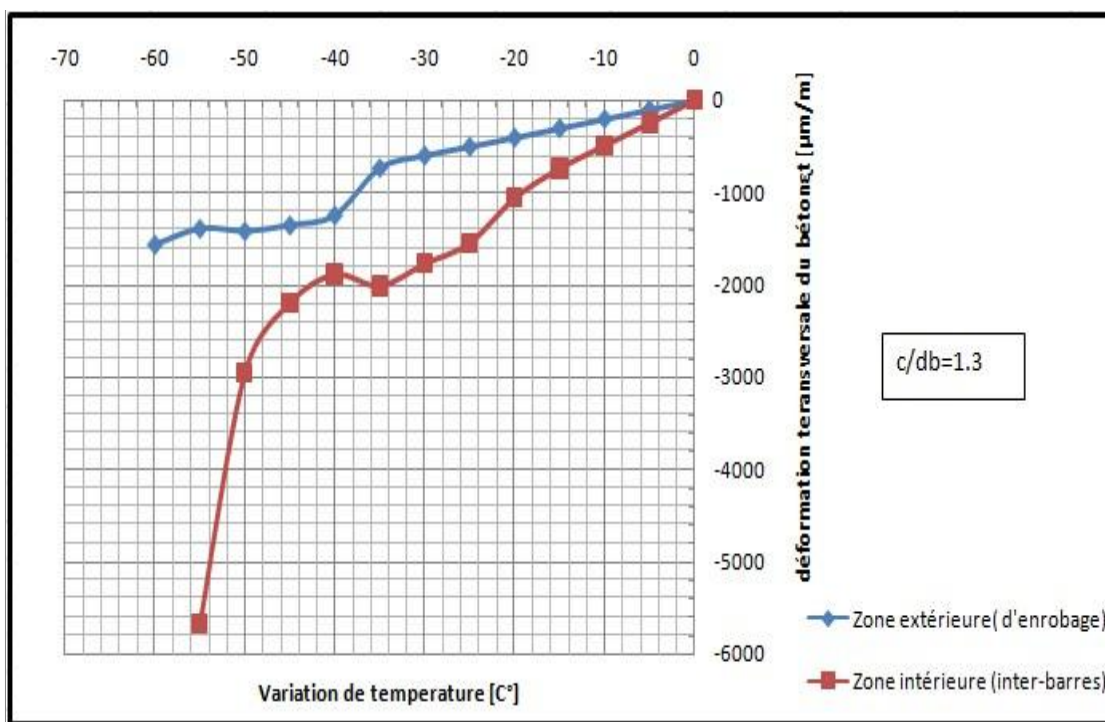


Figure 4 Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,3$ (P.#16.20).

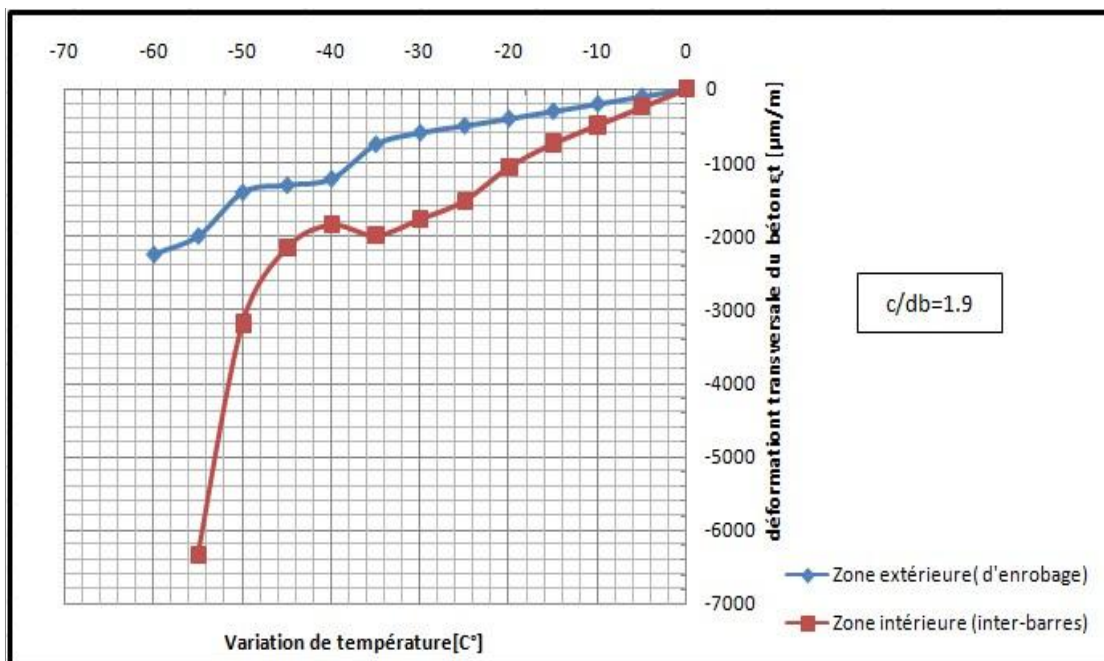


Figure 5 Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,9$ (P.#16.30).

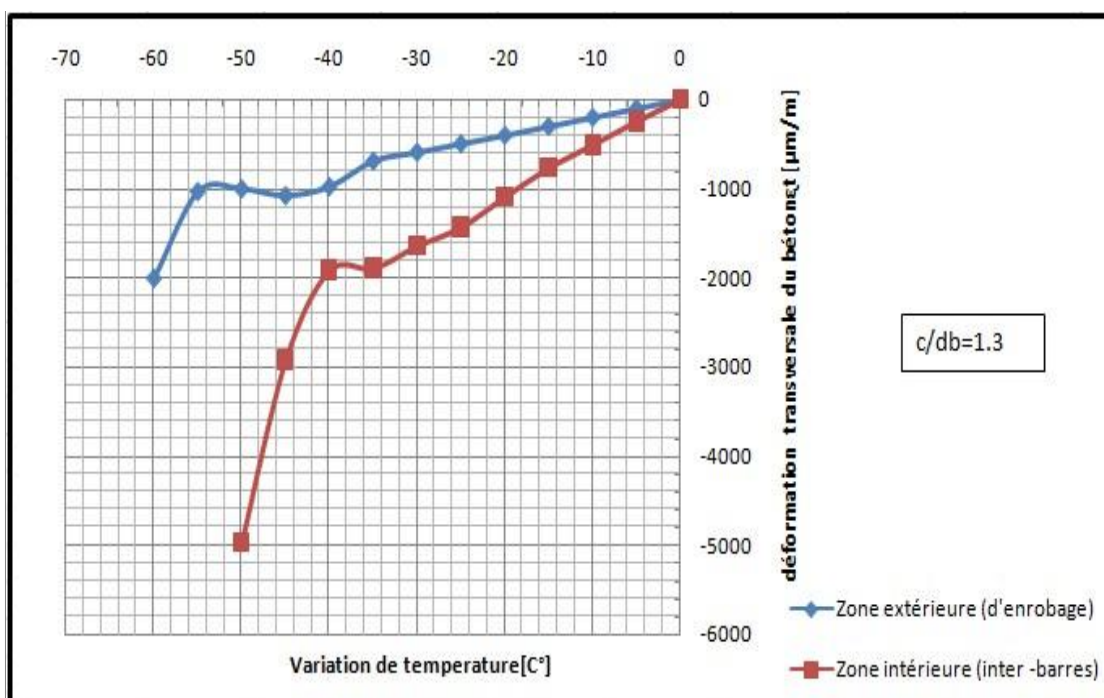


Figure 6 Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,3$ (P.#19.25).

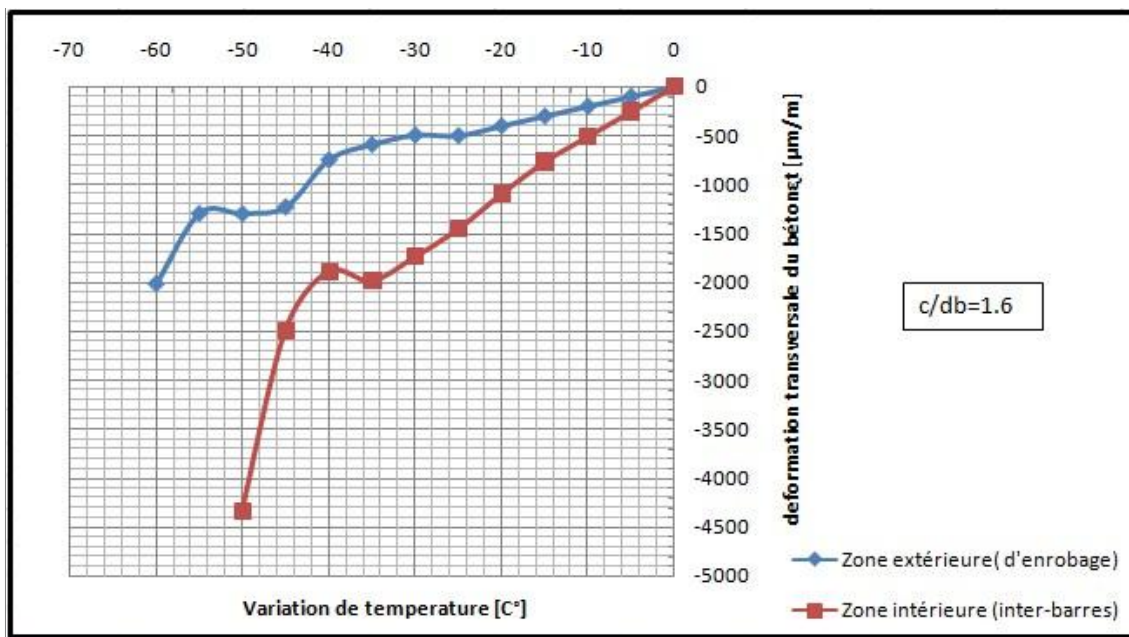


Figure 7 Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,6$ (P.#19.30).

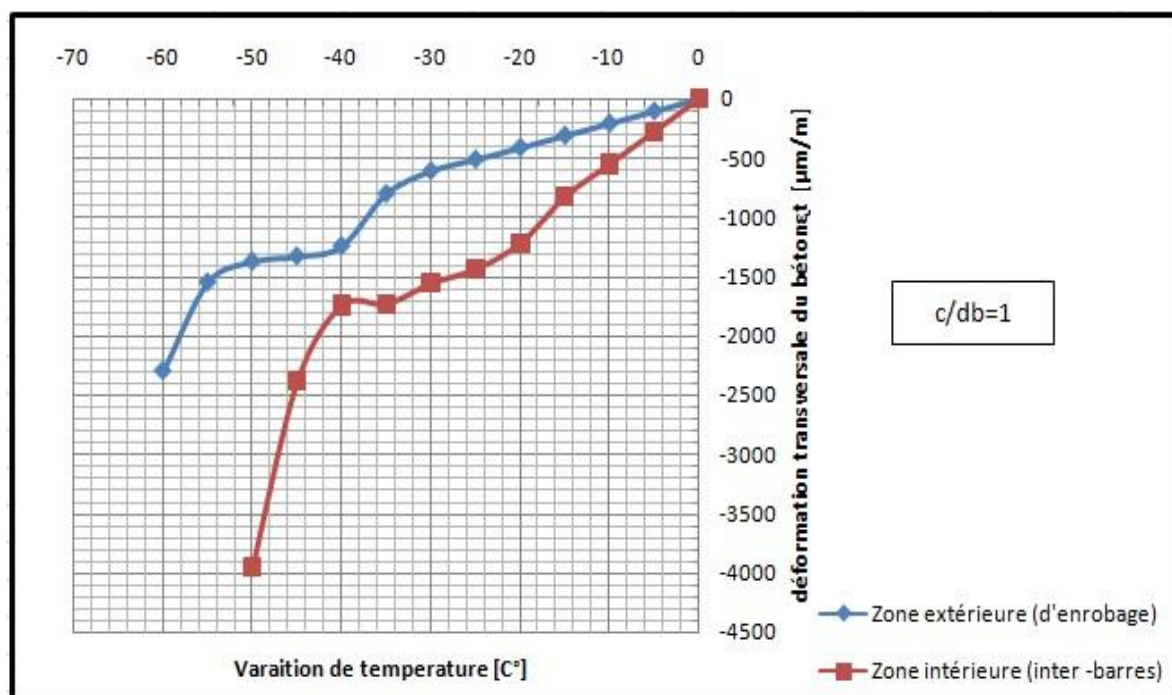


Figure 8 Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,0$ (P.#25.25).

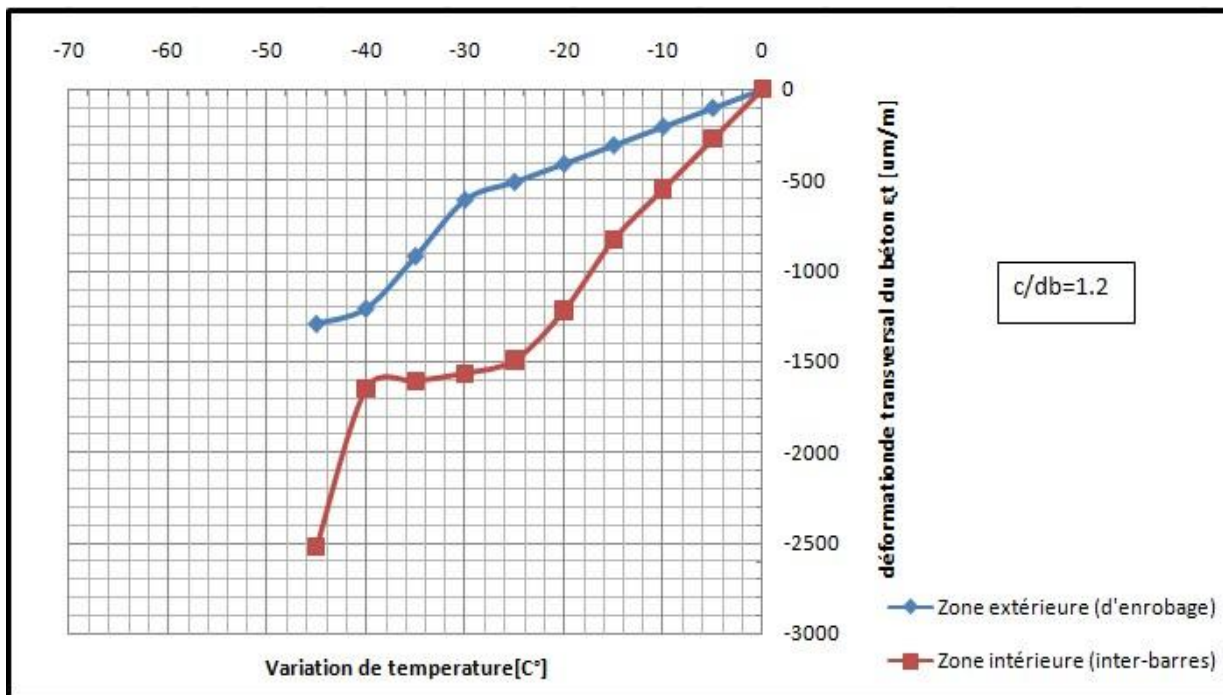


Figure 9 Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,2$ (P.#25.30).

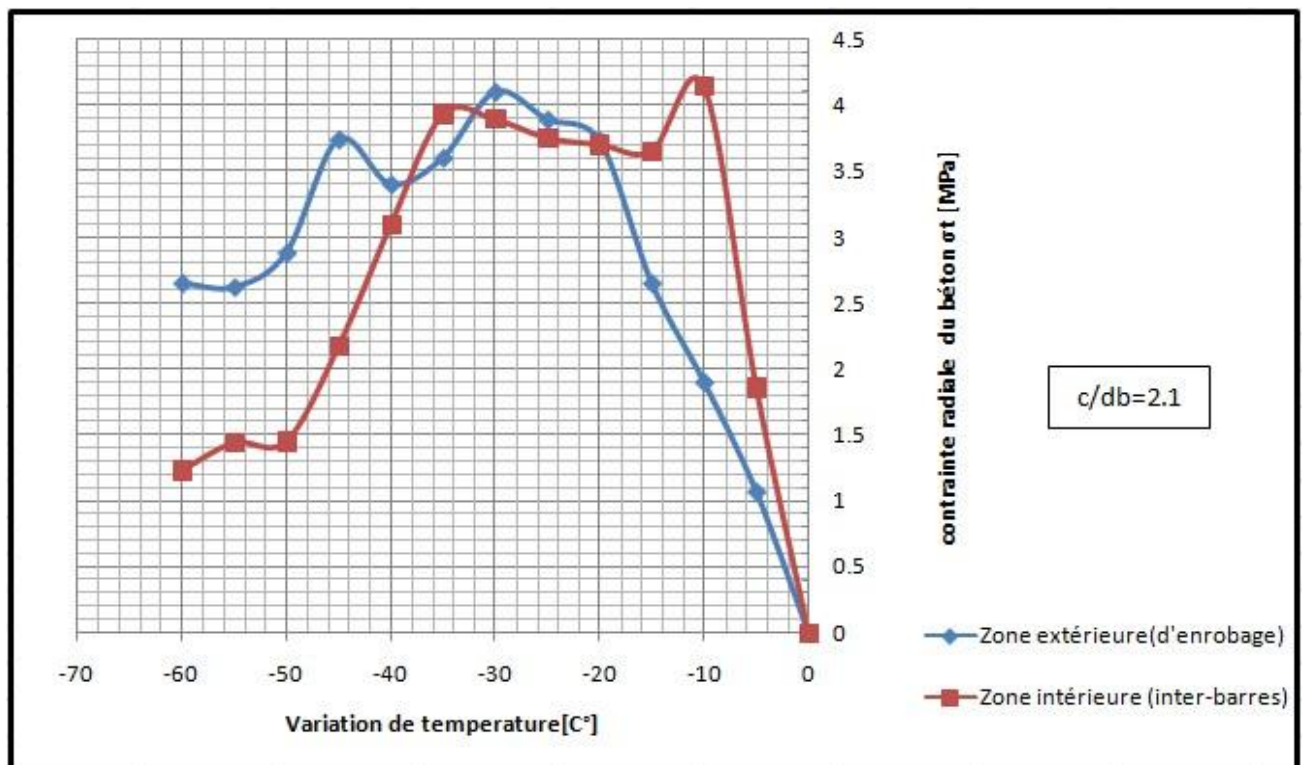


Figure 10 Contrainte de traction radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone d'enrobage et la zone inter-barres pour $c/d_b = 2,1$ (P.#10.20).

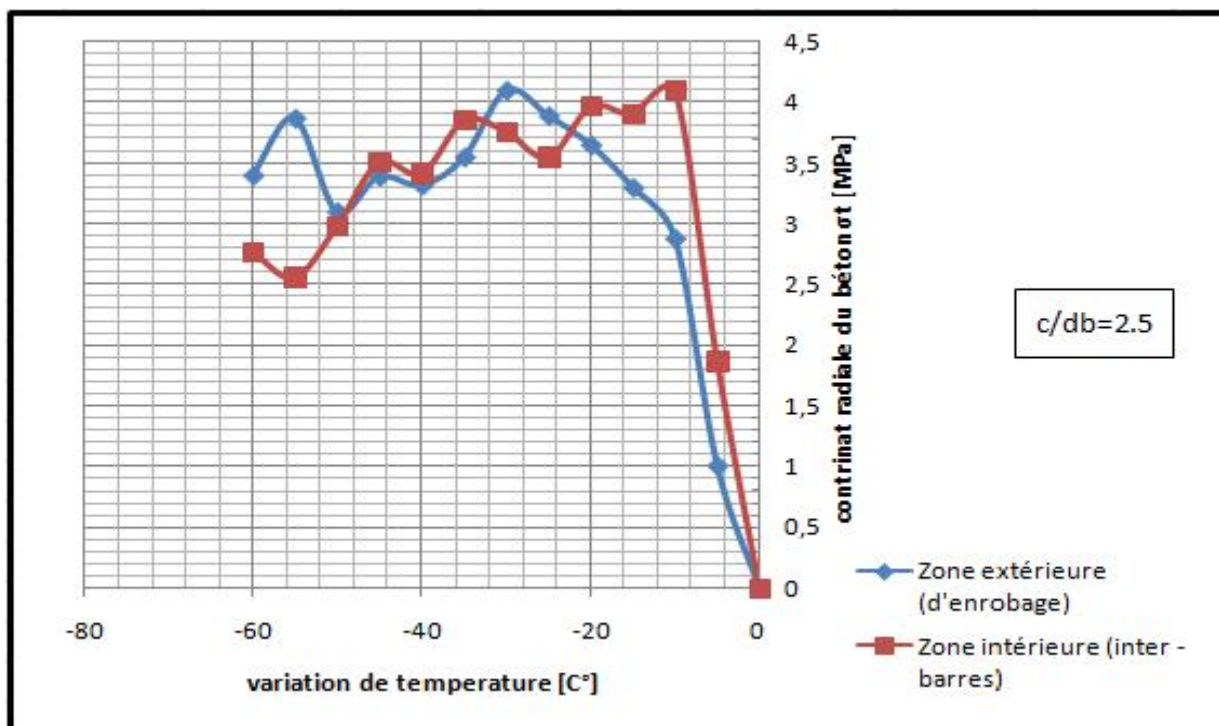


Figure 11 Contrainte de traction radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone d'enrobage et la zone inter-barres pour $c/d_b = 2,5$ (P.#13.30).

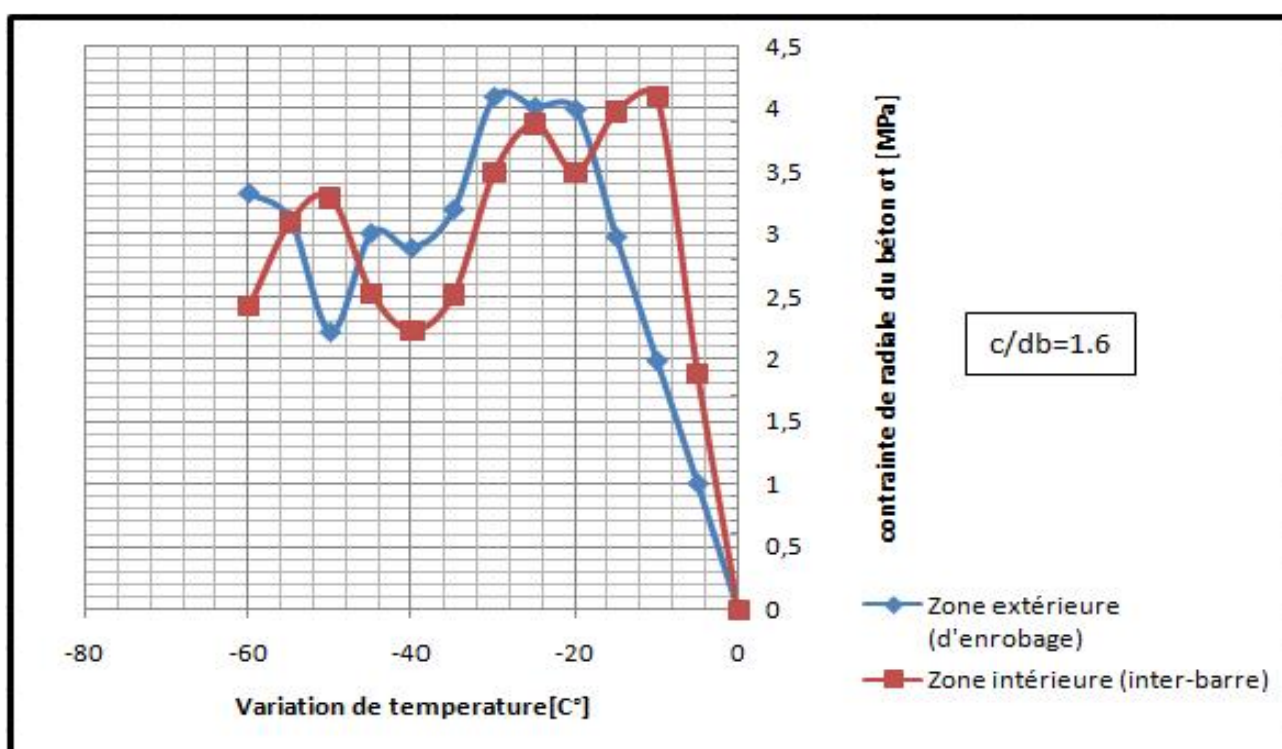


Figure 12 Contrainte de traction radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone d'enrobage et la zone inter-barres pour $c/d_b = 1,6$ (P.#13.20).

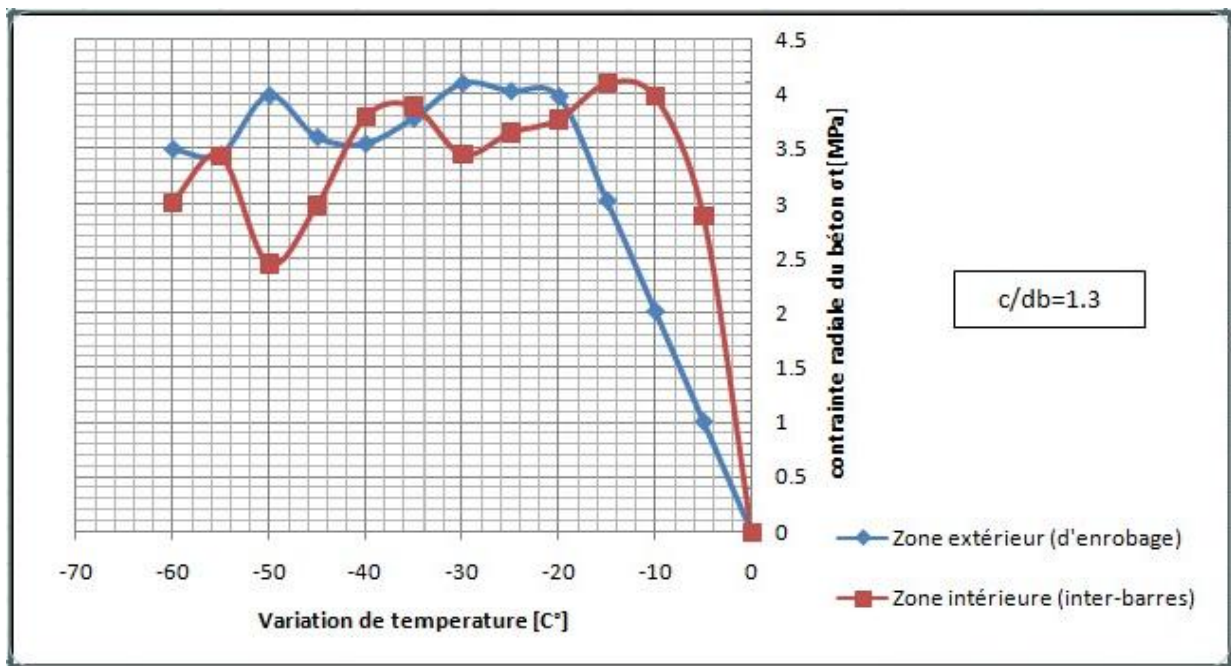


Figure 13 Contrainte de traction transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone d'enrobage et la zone inter-barres pour $c/d_b = 1,3$ (P.#16.20).

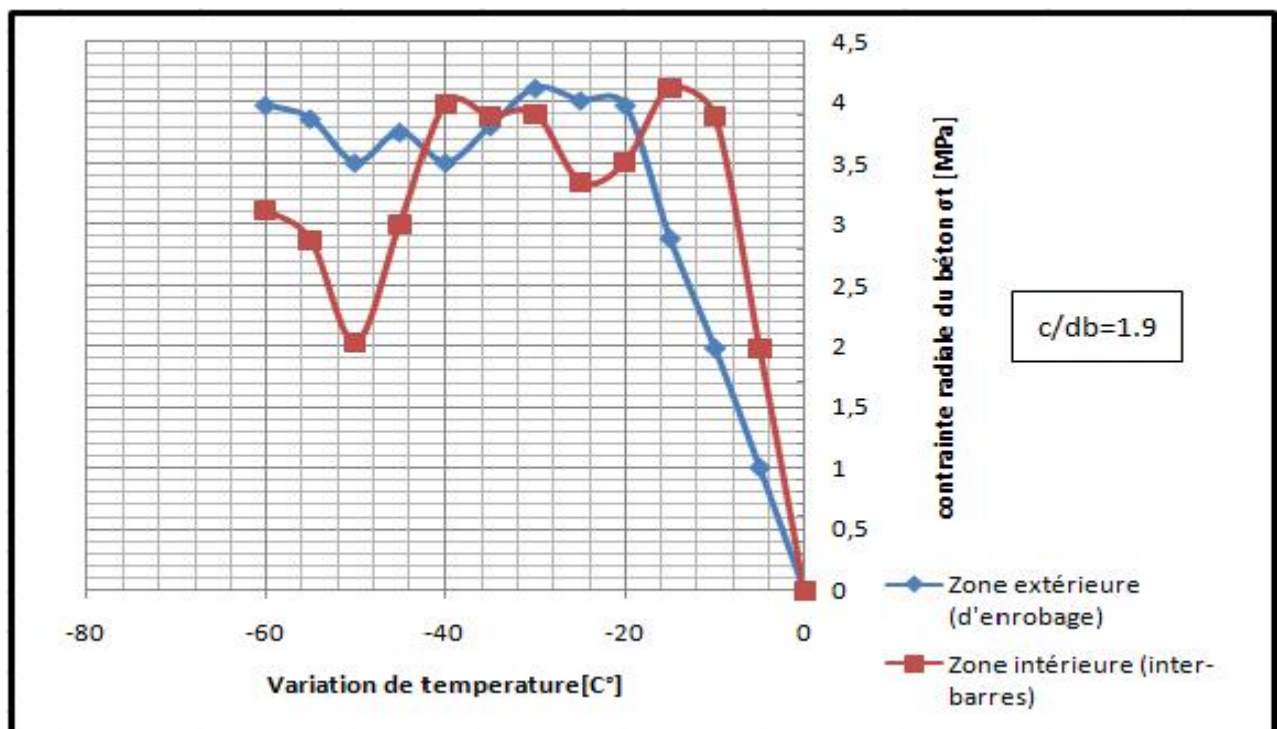


Figure 14 Contrainte de traction radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone d'enrobage et la zone inter-barres pour $c/d_b = 1,9$ (P.#16.30)

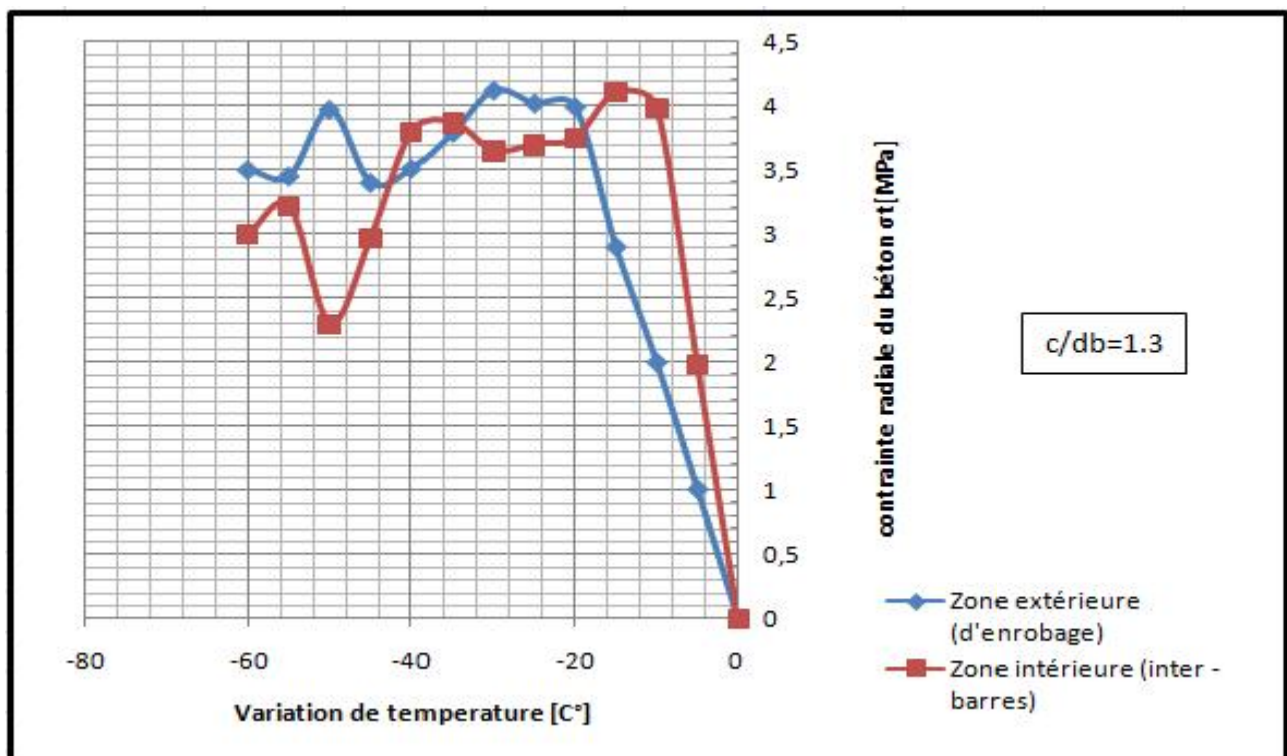


Figure 15 Contrainte de traction radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone d'enrobage et la zone inter-barres pour $c/d_b = 1,3$ (P.#19.25).

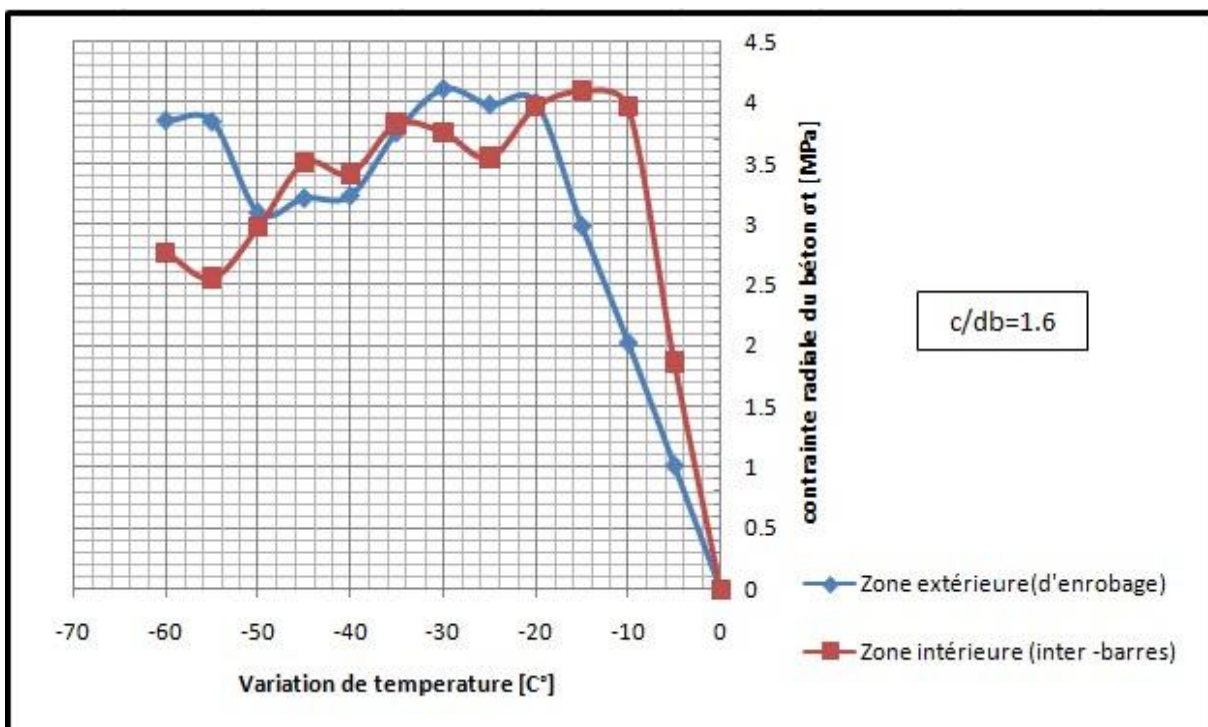


Figure 16 Contrainte de traction radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone d'enrobage et la zone inter-barres pour $c/d_b = 1,6$ (P.#19.30).

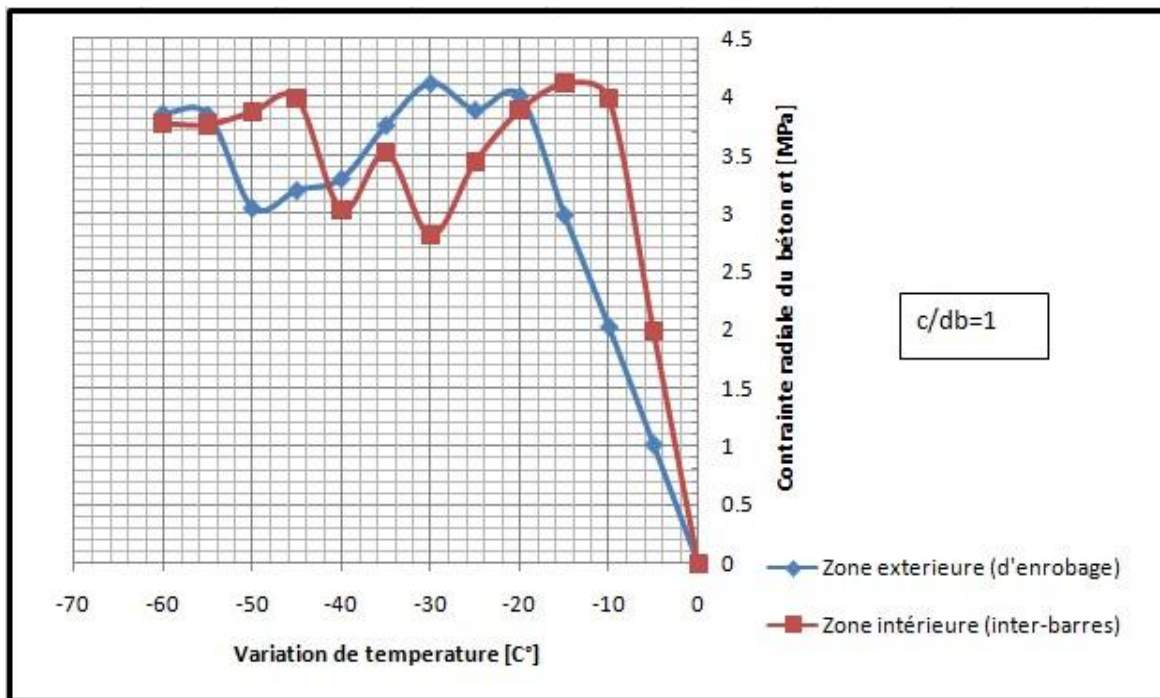


Figure 17 Contrainte de traction radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone d'enrobage et la zone inter-barres pour $c/d_b = 1,0$ (P.#25.25).

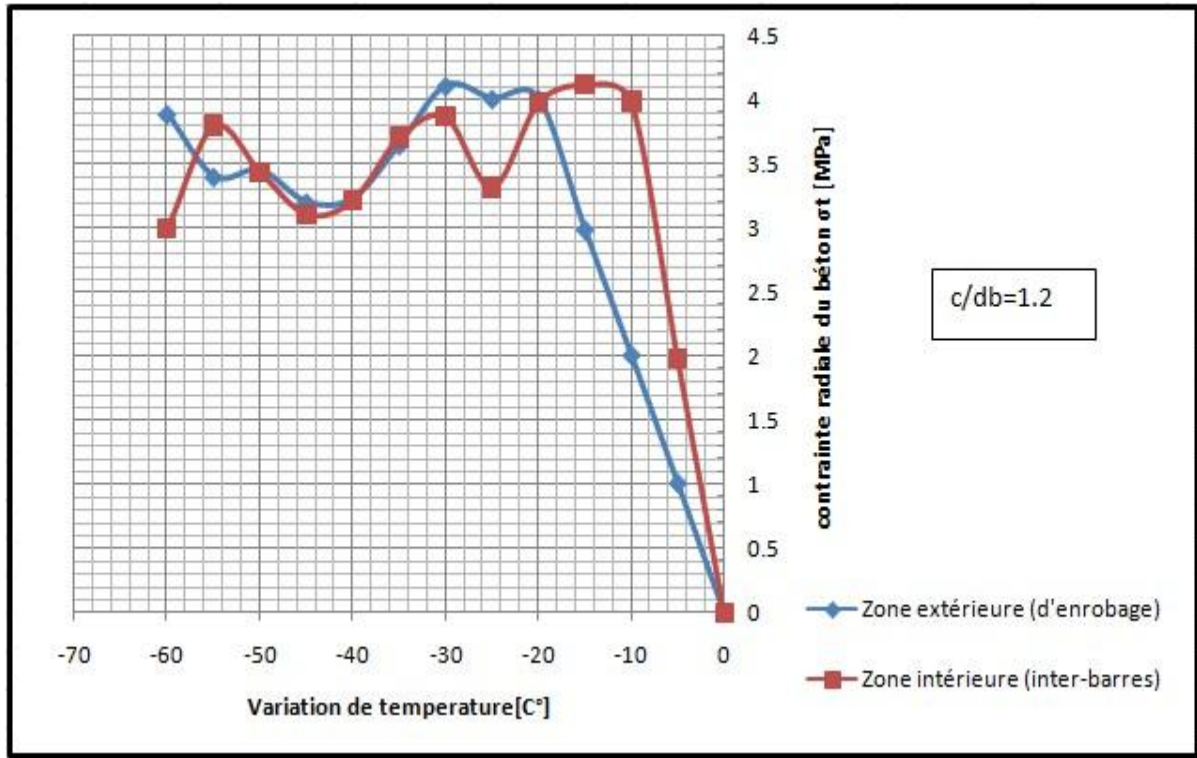


Figure 18 Contrainte de traction radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone d'enrobage et la zone inter-barres pour $c/d_b = 1,2$ (P.#25.30).

2-Courbes obtenus par les résultats analytique :

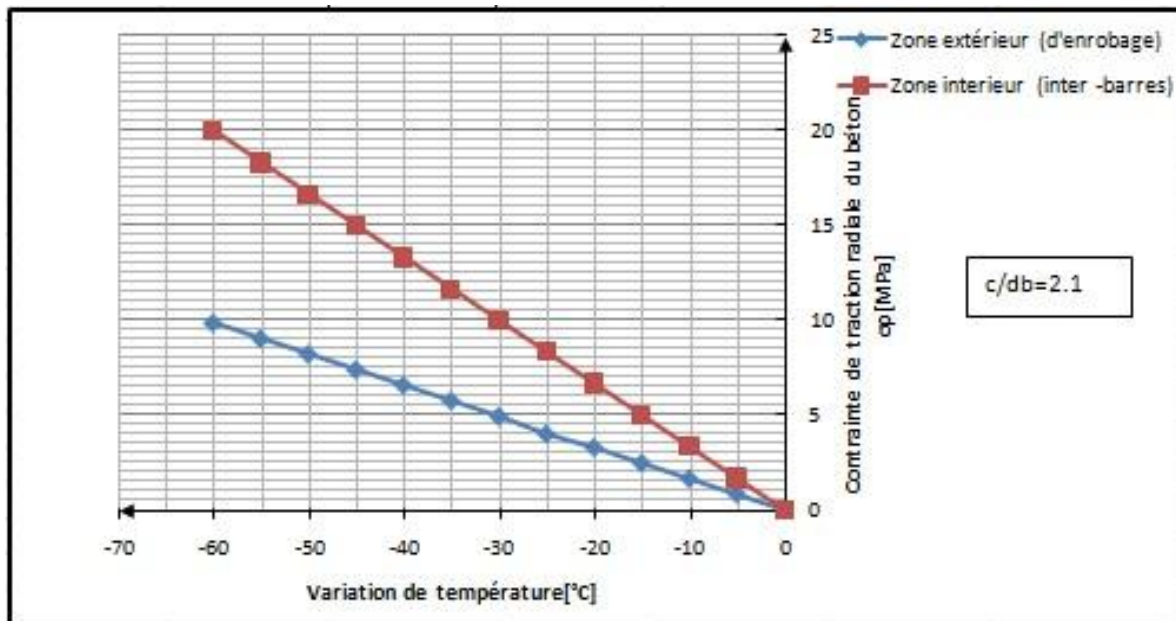


Figure 1 Contrainte de traction radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone d'enrobage et la zone inter-barres pour $c/d_b = 2,1$

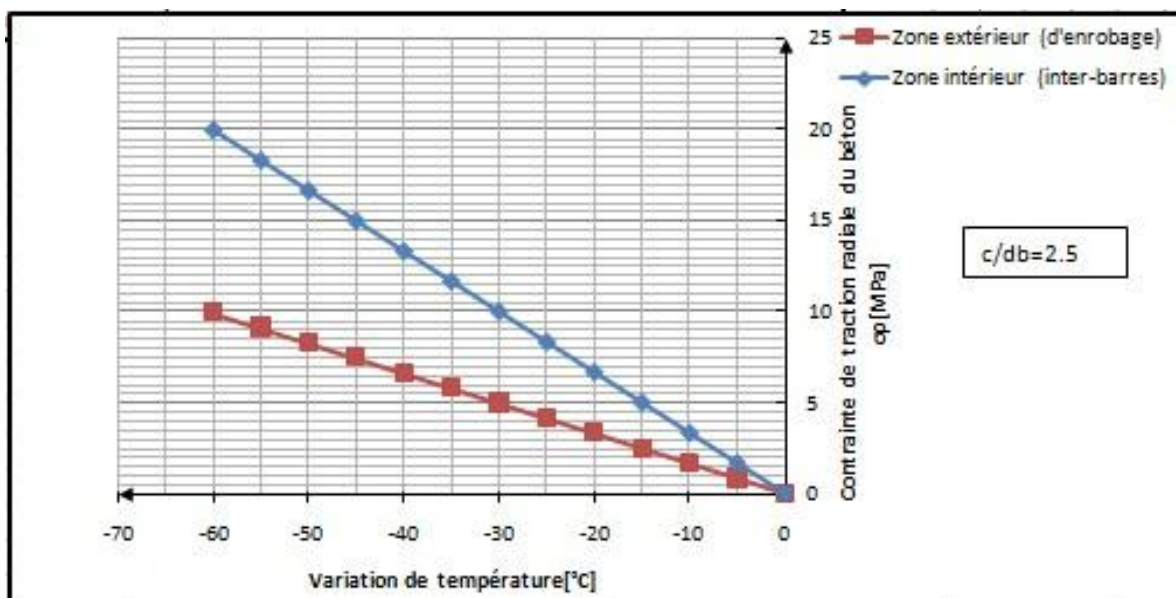


Figure 2 Contrainte de traction radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone d'enrobage et la zone inter-barres pour $c/d_b = 2,5$

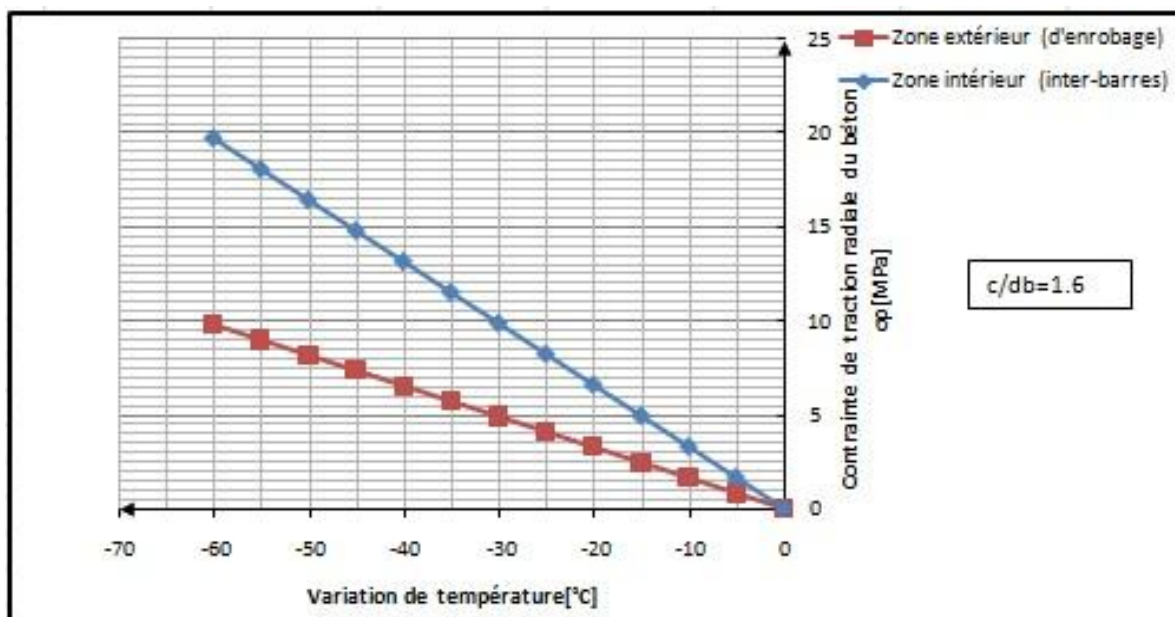


Figure 3 Contrainte de traction radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone d'enrobage et la zone inter-barres pour $c/d_b = 1,6$

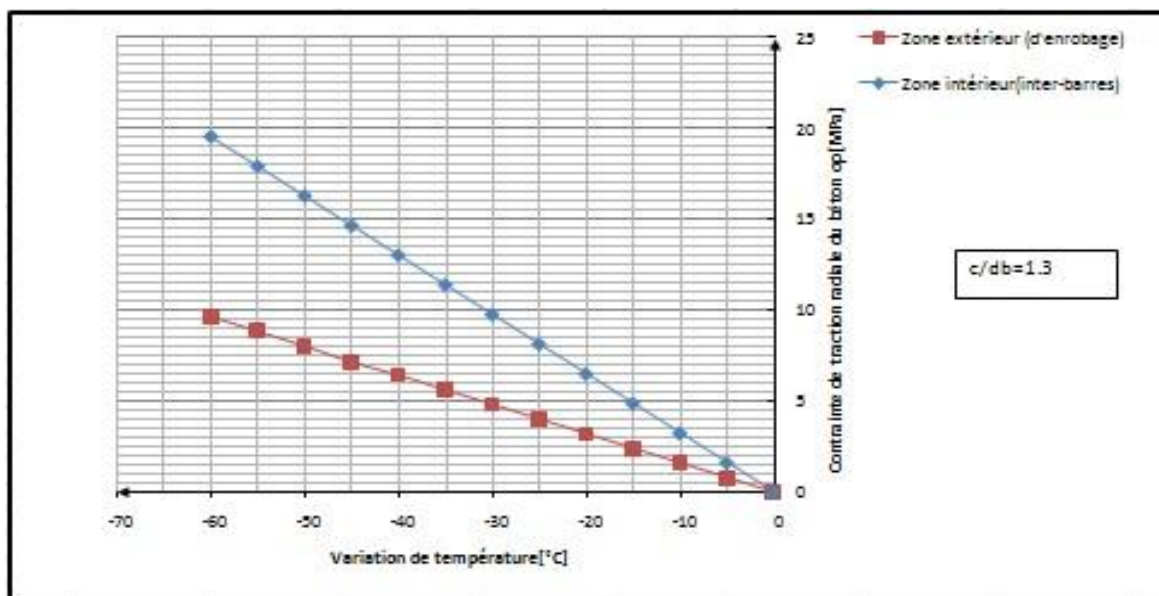


Figure 4 Contrainte de traction radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone d'enrobage et la zone inter-barres pour $c/d_b = 1,3$

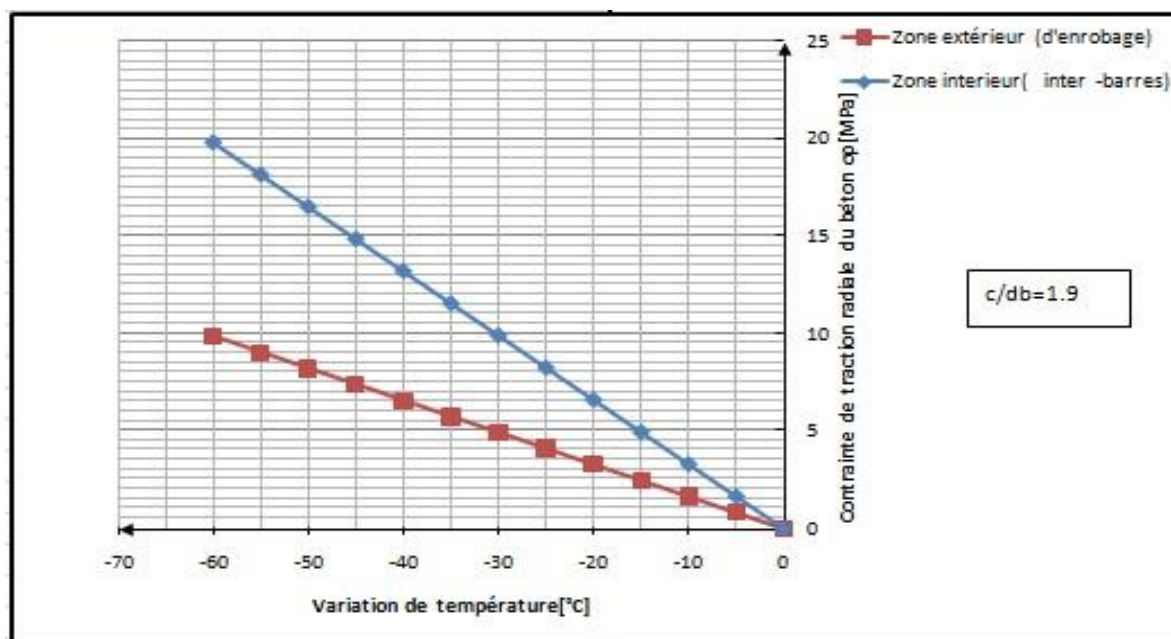


Figure 5 Contrainte de traction radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone d'enrobage et la zone inter-barres pour $c/d_b = 1,9$

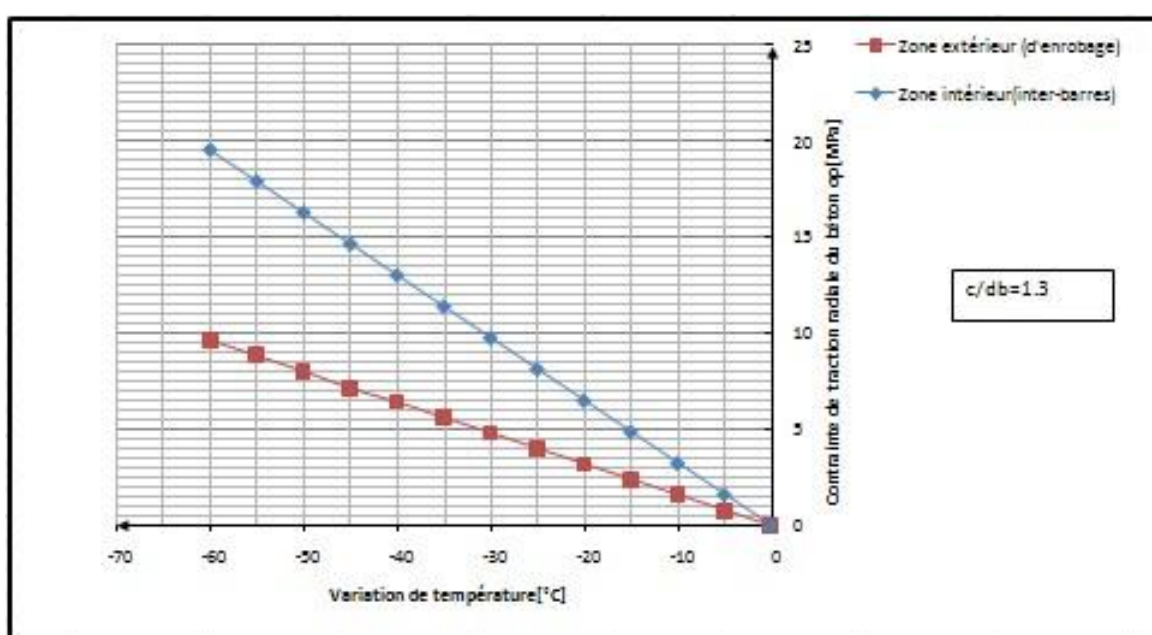


Figure 6 Contrainte de traction radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone d'enrobage et la zone inter-barres pour $c/d_b = 1,3$

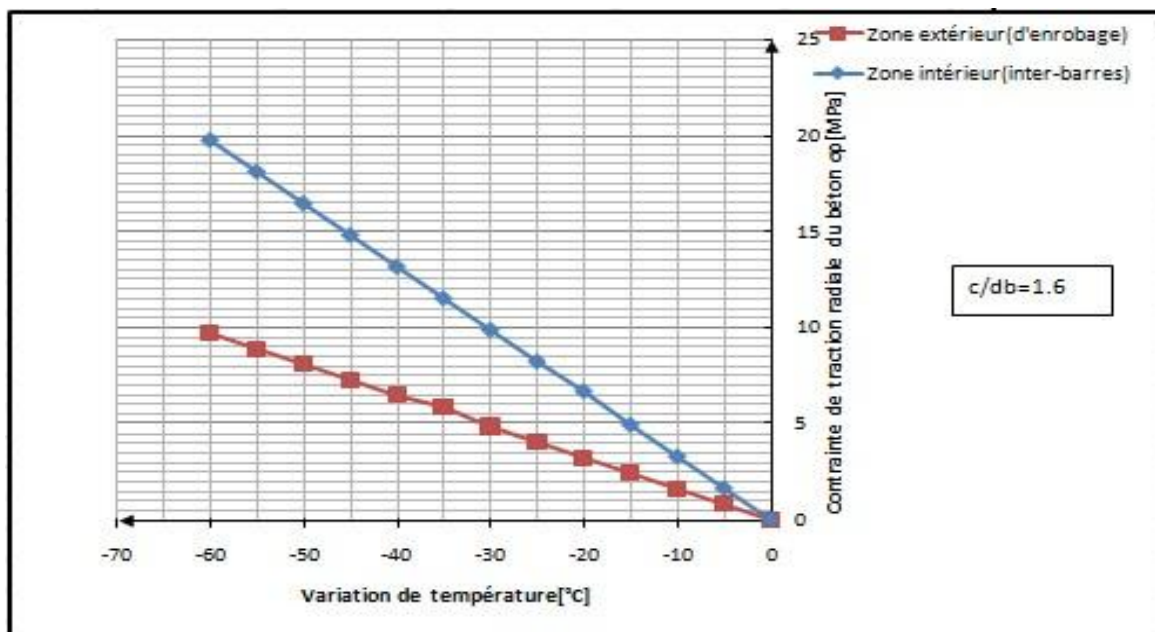


Figure 7 Contrainte de traction radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone d'enrobage et la zone inter-barres pour $c/d_b = 1,6$

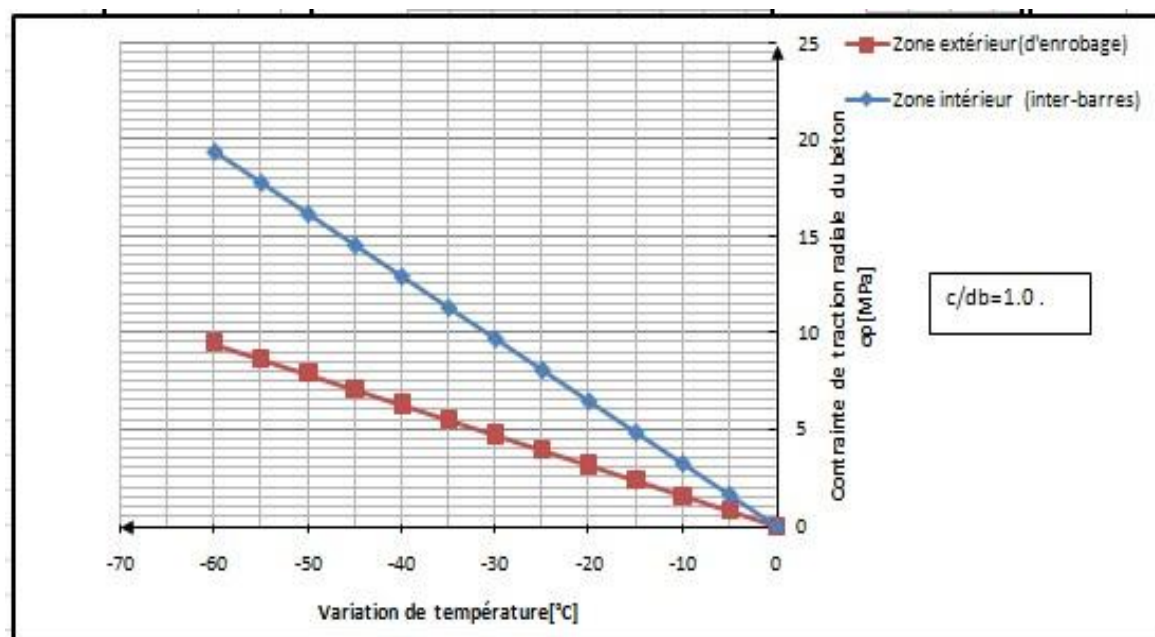


Figure 8 Contrainte de traction radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone d'enrobage et la zone inter-barres pour $c/d_b = 1,0$

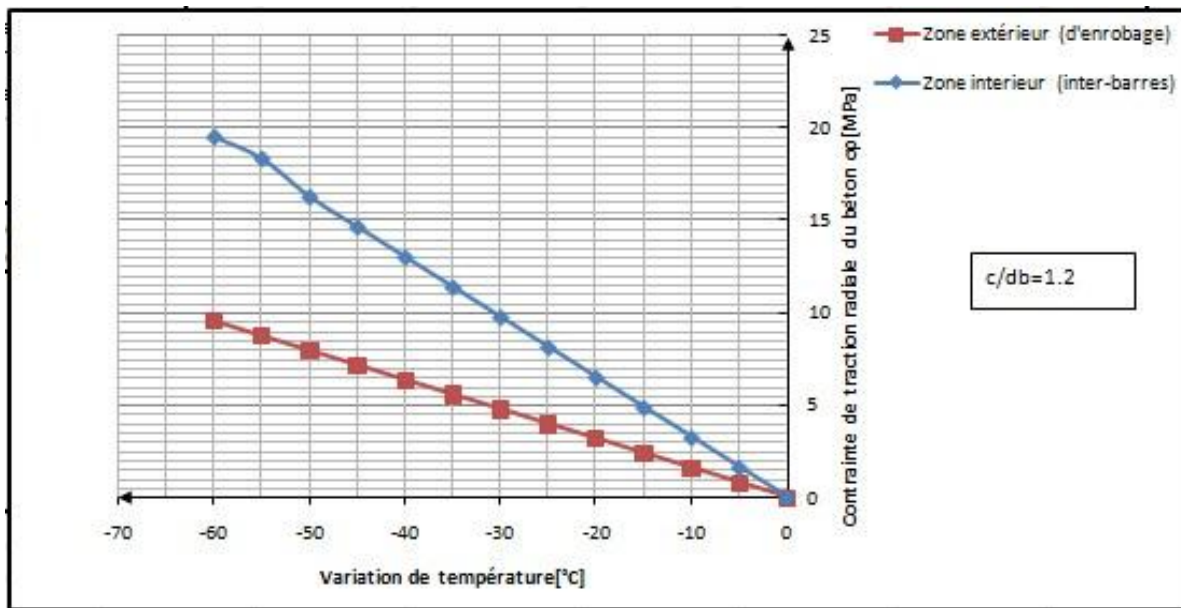


Figure 9 Contrainte de traction radiale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton de la zone d'enrobage et la zone inter-barres pour $c/d_b = 1,2$

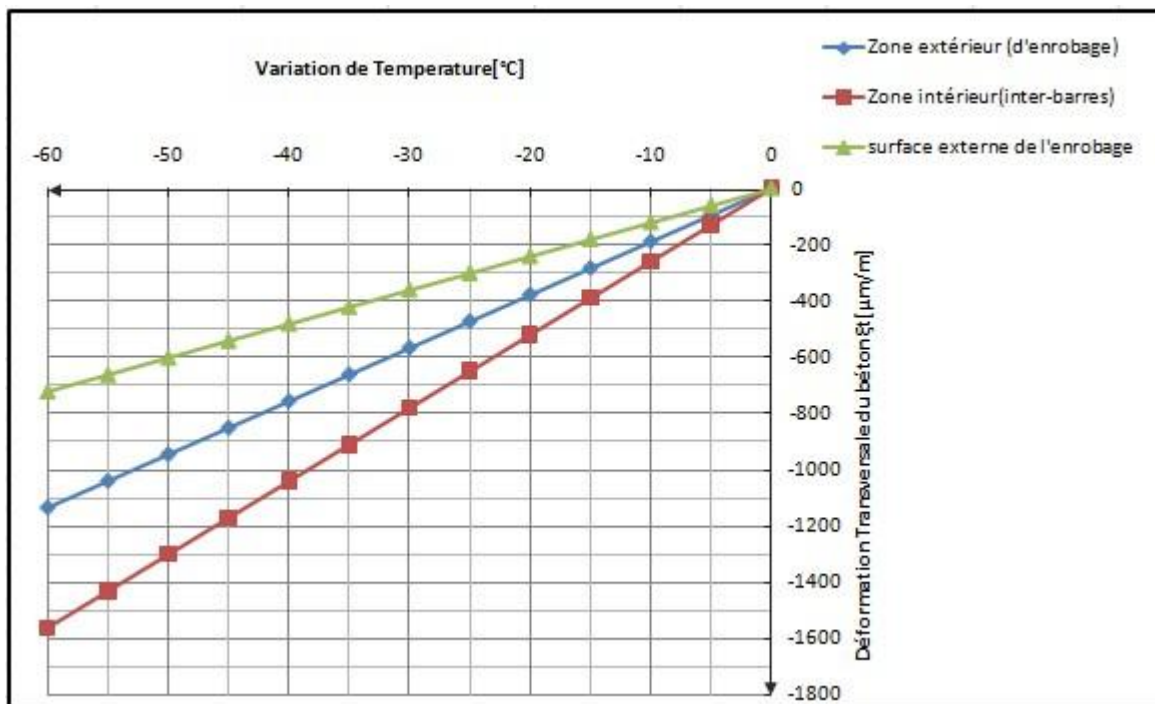


Figure 10 Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 2,1$

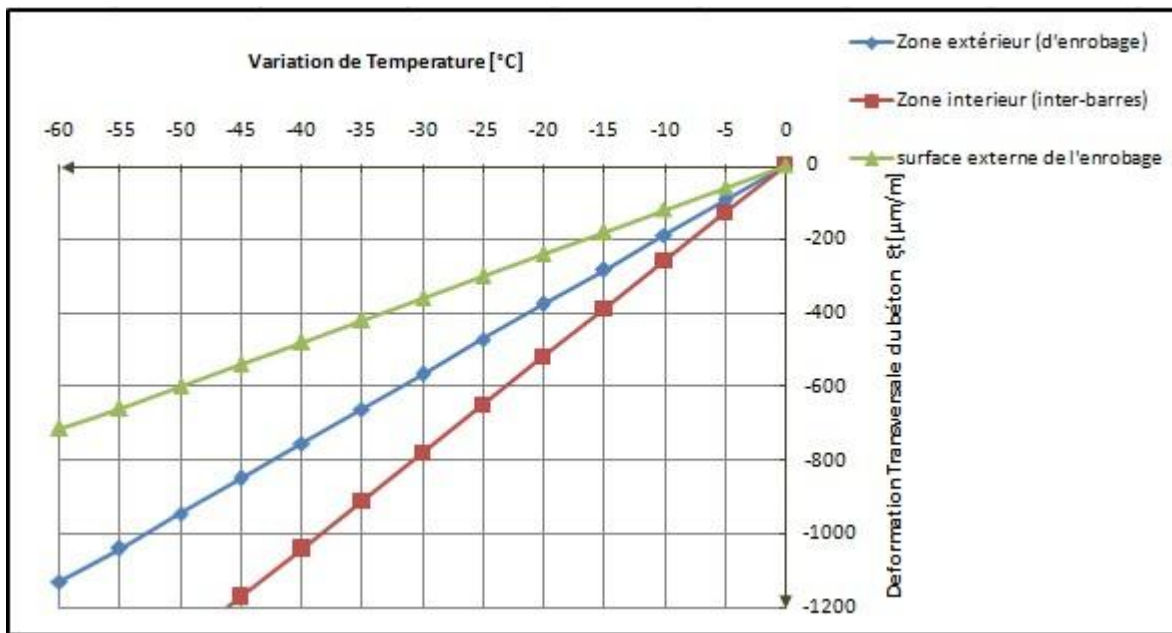


Figure 11 Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 2,5$

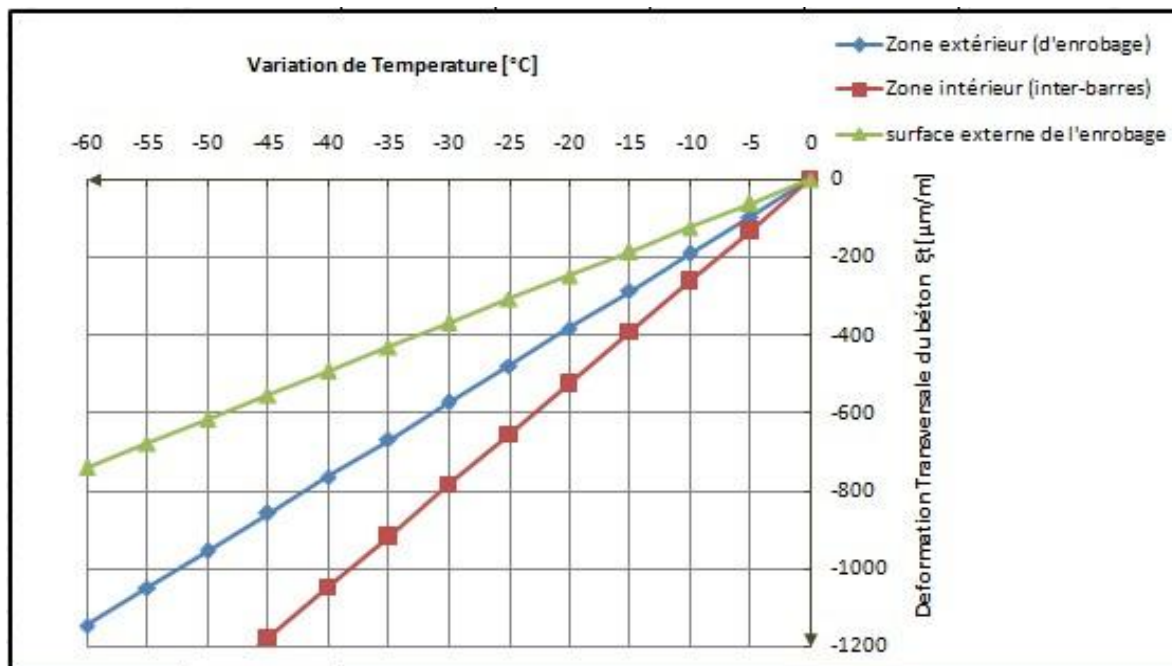


Figure 12 Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,6$

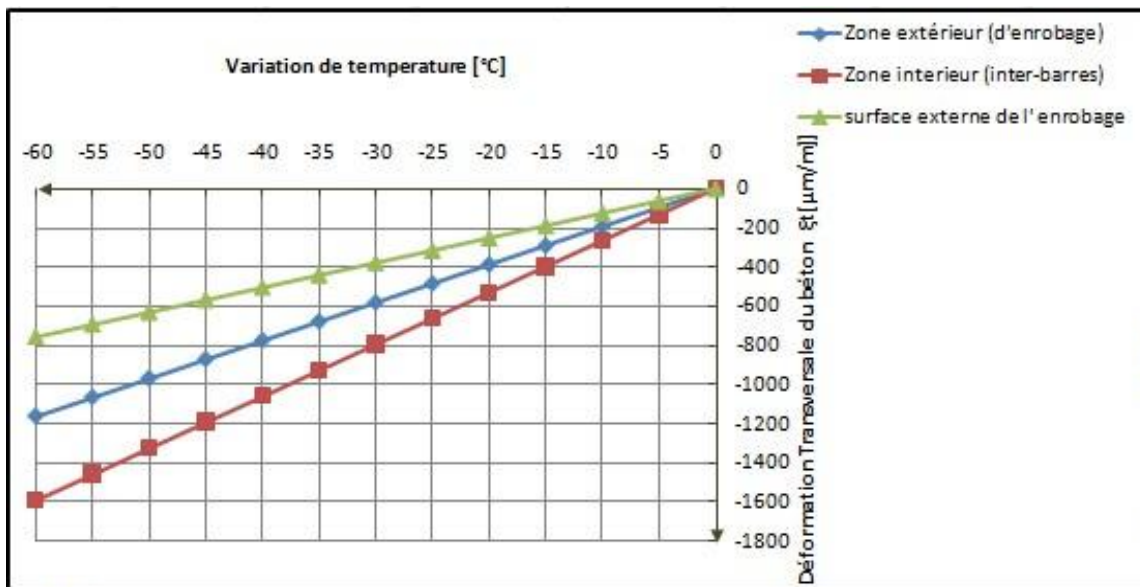


Figure 13 Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,3$

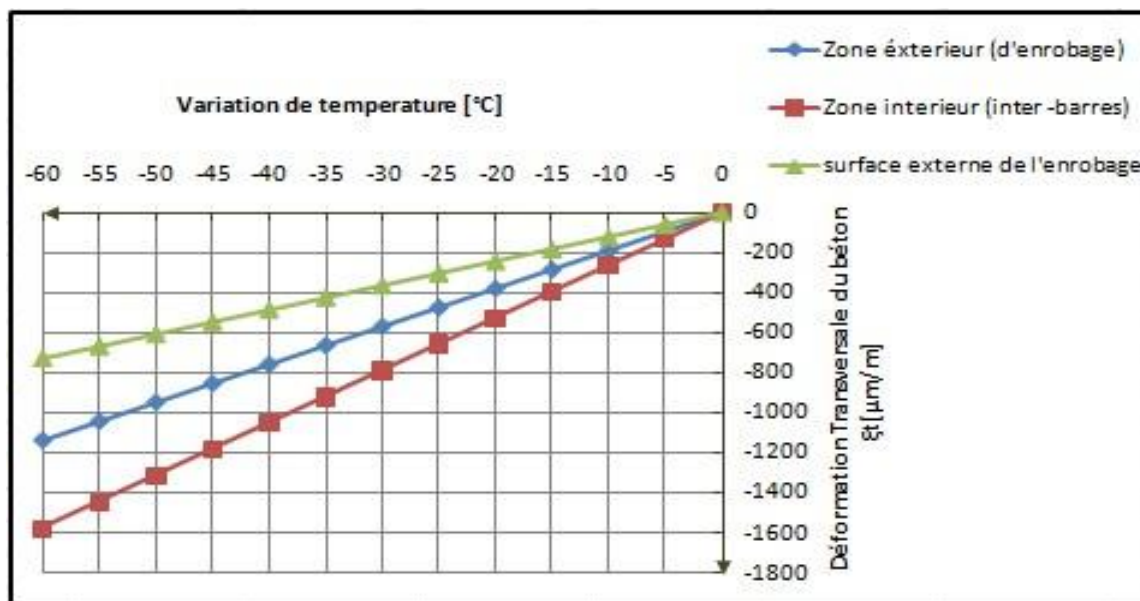


Figure 14 Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,9$

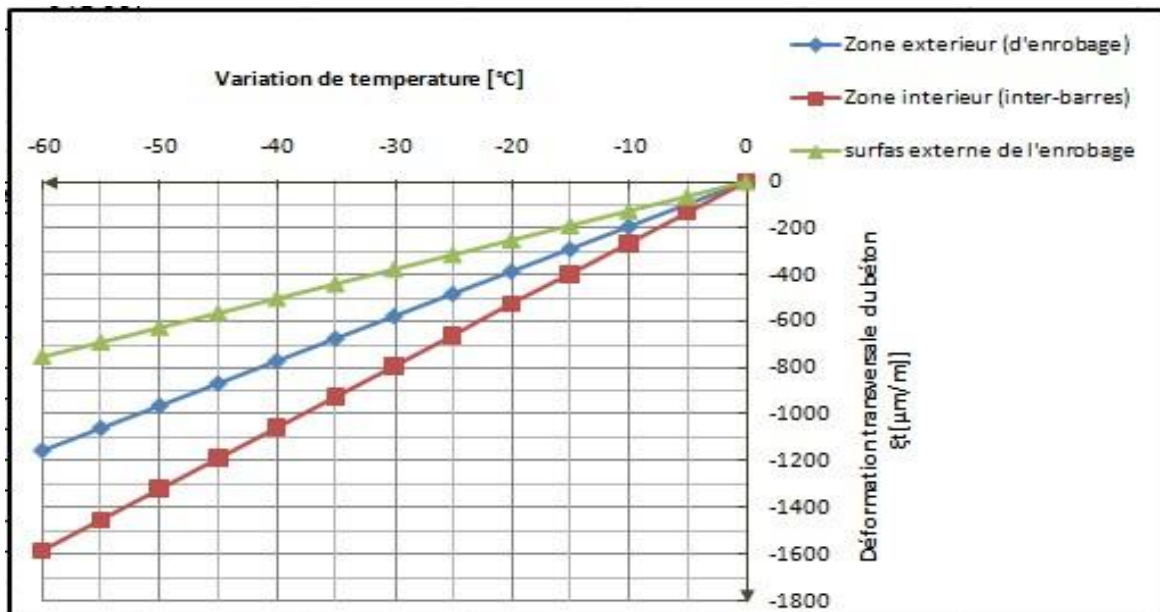


Figure 15 Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,3$

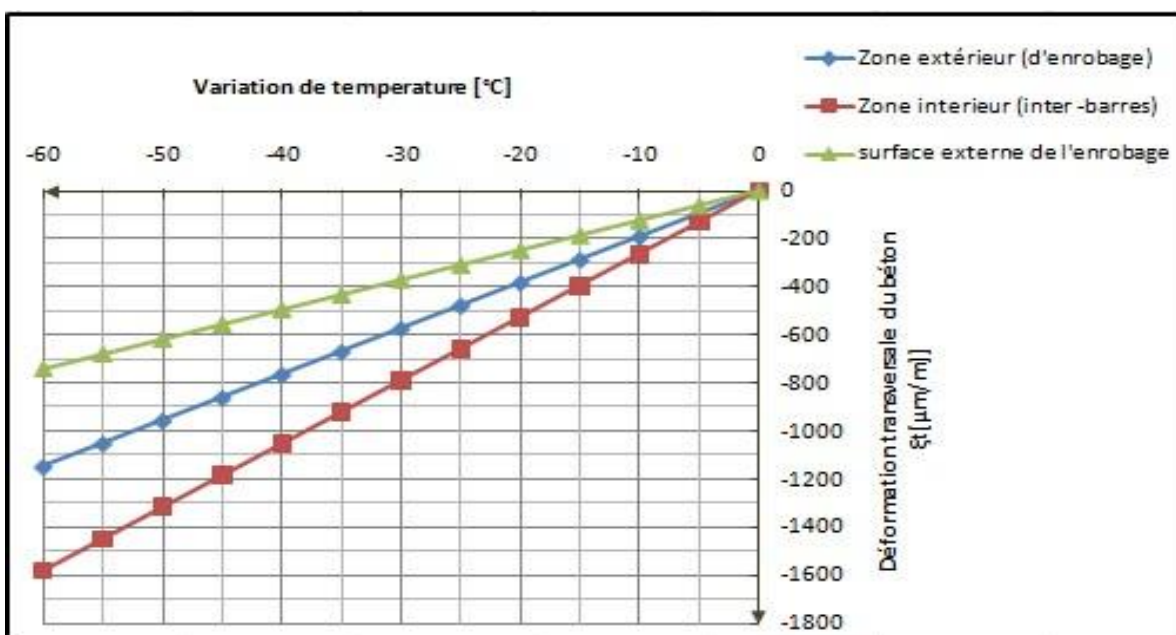


Figure 16 Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,6$

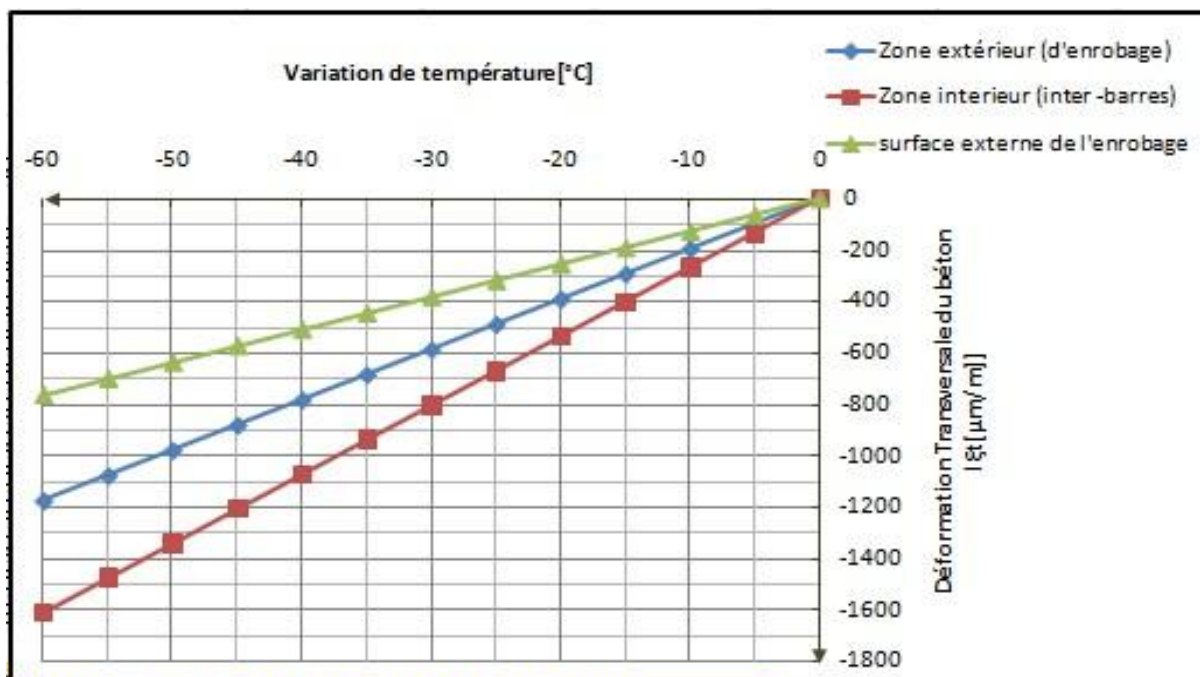


Figure 17 Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,0$

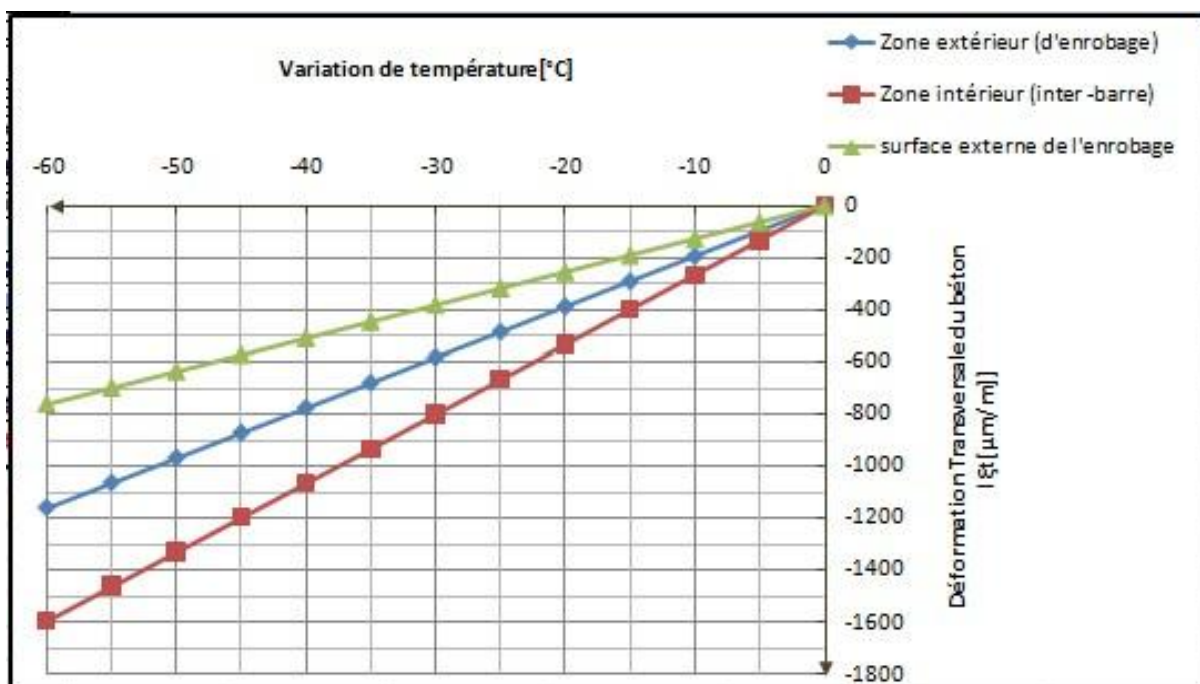
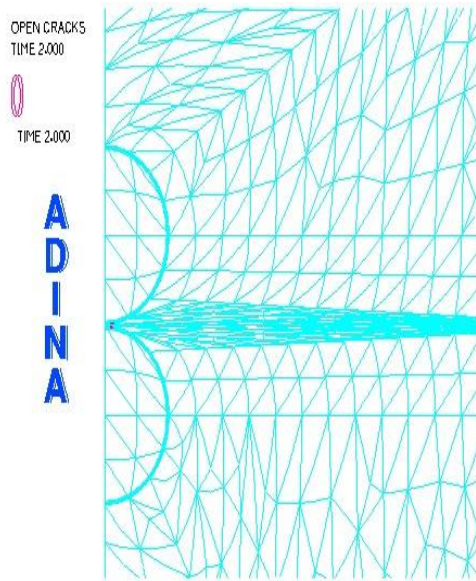


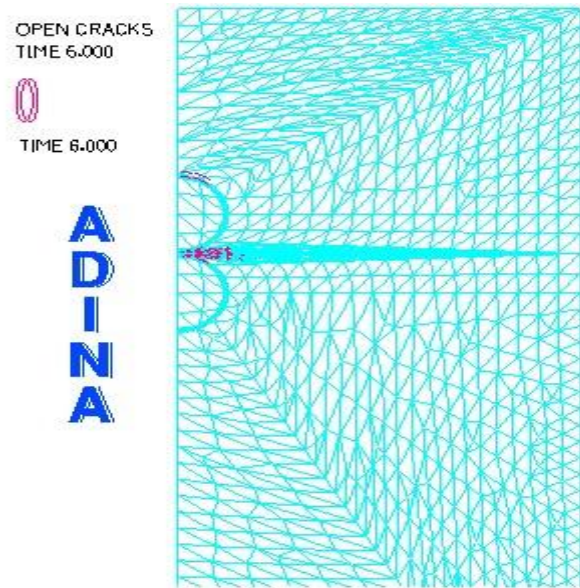
Figure 18 Déformation transversale du béton en fonction de la variation de température à l'interface armature en PRF/béton pour $c/d_b = 1,2$

Formation des Fissures

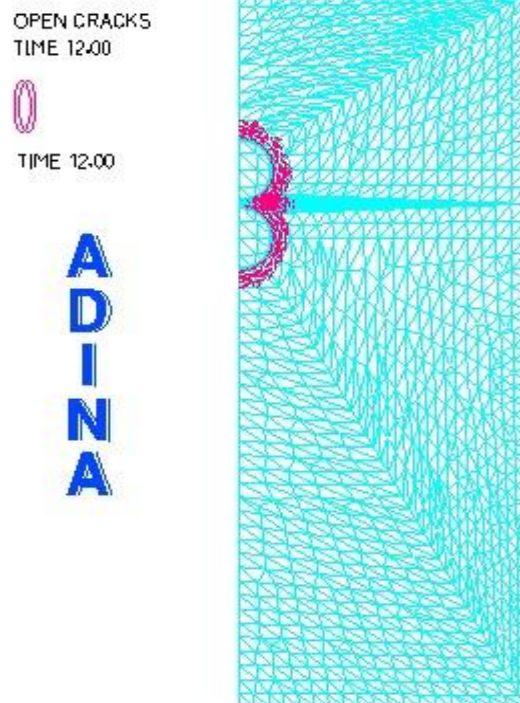
- Poutre P.#10.20 ayant $c/d_b = 2,1$



À la zone inter-barres (intérieure)
 $\Delta T_{cr} = -10^\circ\text{C}$



À la zone d'enrobage (extérieure)
 $\Delta T_{cr} = -30^\circ\text{C}$

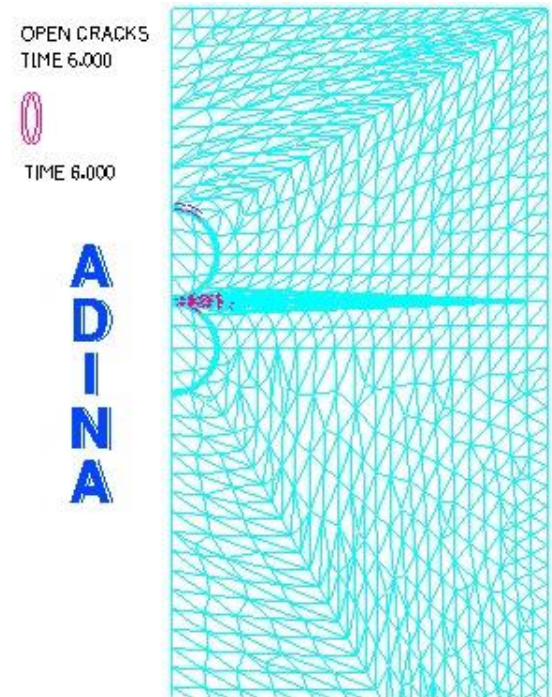


À la zone d'enrobage (extérieure) $\Delta T_{cr} = -60^\circ\text{C}$

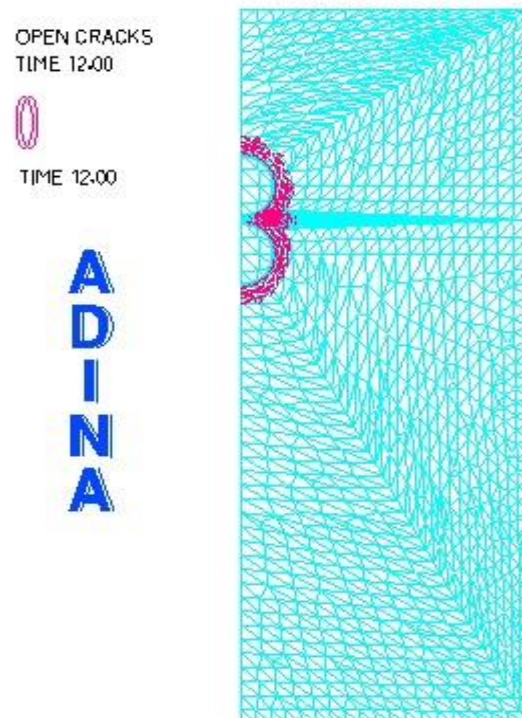
- Poutre P.#10.25 ayant $c/d_b = 2,6$



À la zone inter-barres (intérieure)
 $\Delta T_{cr} = -10^\circ\text{C}$



À la zone d'enrobage (extérieure)
 $\Delta T_{cr} = -30^\circ\text{C}$

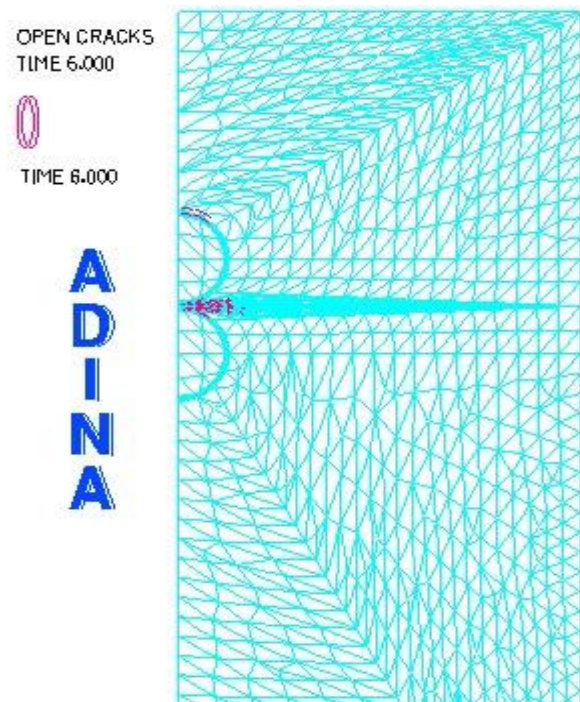


À la zone d'enrobage (extérieure) $\Delta T_{cr} = -60^\circ\text{C}$

- Poutre P.#10.30 ayant $c/d_b = 3,2$



À la zone inter-barres (intérieure)
 $\Delta T_{cr} = -10^{\circ}\text{C}$

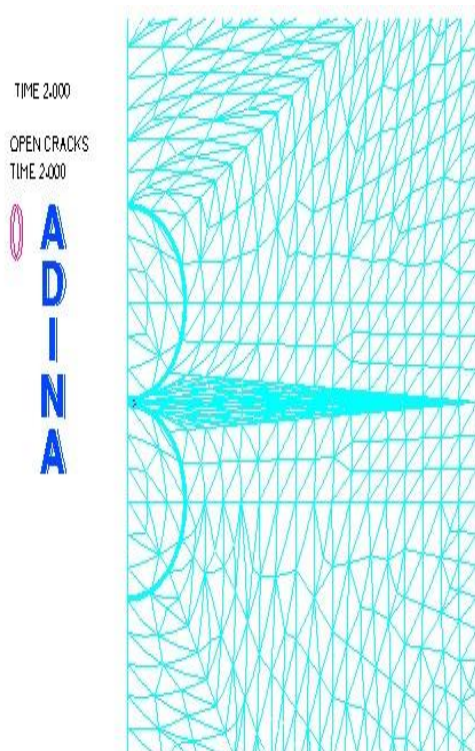


À la zone d'enrobage (extérieure)
 $\Delta T_{cr} = -30^{\circ}\text{C}$

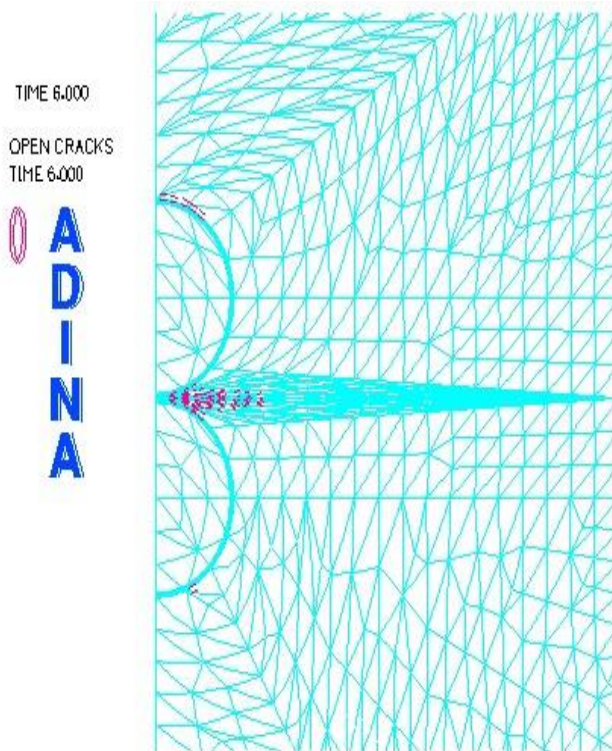


À la zone d'enrobage (extérieure) $\Delta T_{cr} = -60^{\circ}\text{C}$

- Poutre P.#13.20 ayant $c/d_b = 1,6$



À la zone inter-barres (intérieure)
 $\Delta T_{cr} = -10^\circ\text{C}$

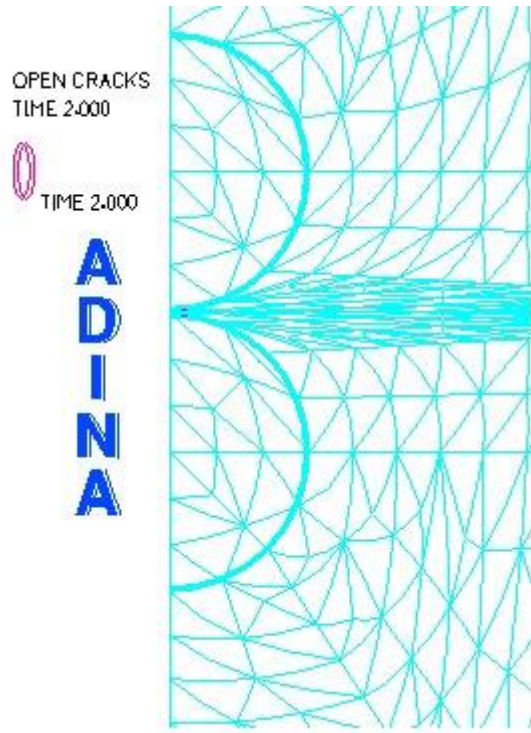


À la zone d'enrobage (extérieure)
 $\Delta T_{cr} = -30^\circ\text{C}$.

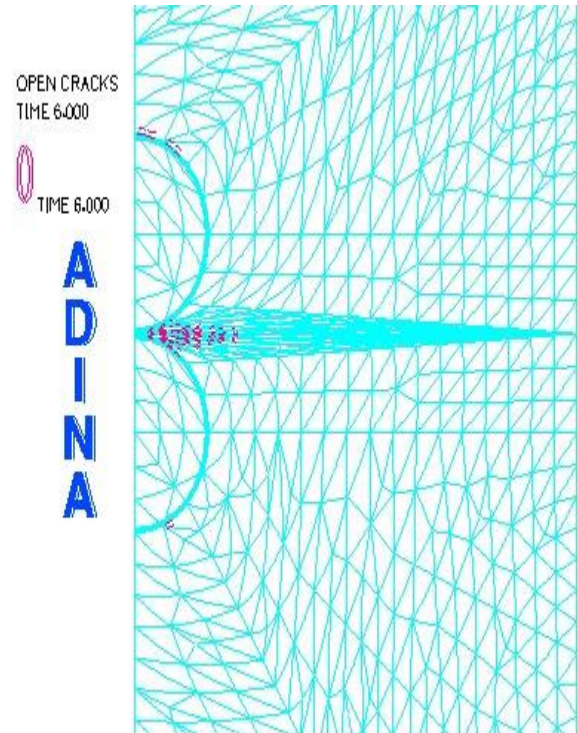


À la zone d'enrobage (extérieure) $\Delta T_{cr} = -60^\circ\text{C}$.

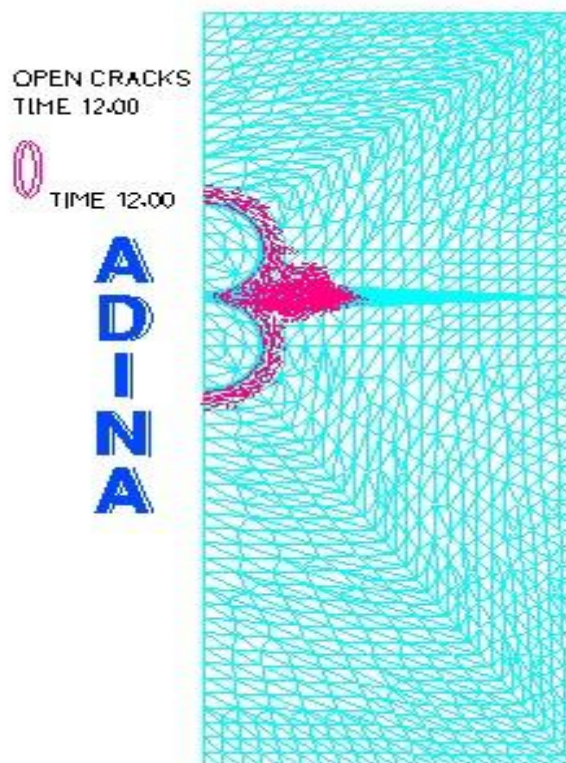
- Poutre P.#13.25 ayant $c/d_b = 2,0$



À la zone inter-barres (intérieure)
 $\Delta T_{cr} = -10^\circ\text{C}$



À la zone d'enrobage (extérieure)
 $\Delta T_{cr} = -30^\circ\text{C}$.



À la zone d'enrobage (extérieure) $\Delta T_{cr} = -60^\circ\text{C}$.

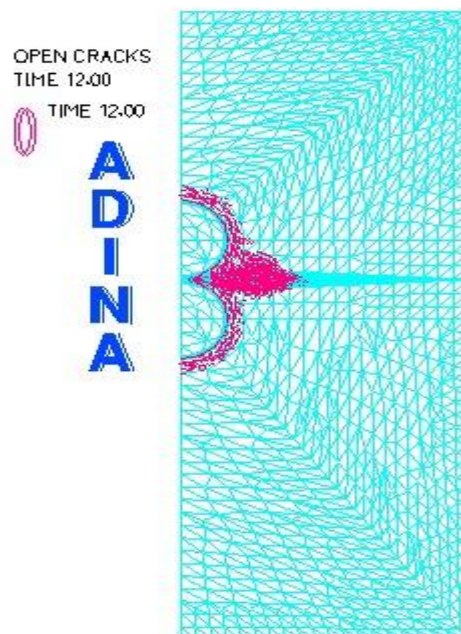
- Poutre P.#13.30 ayant $c/d_b = 2,5$



À la zone inter-barres (intérieure)
 $\Delta T_{cr} = -10^\circ\text{C}$

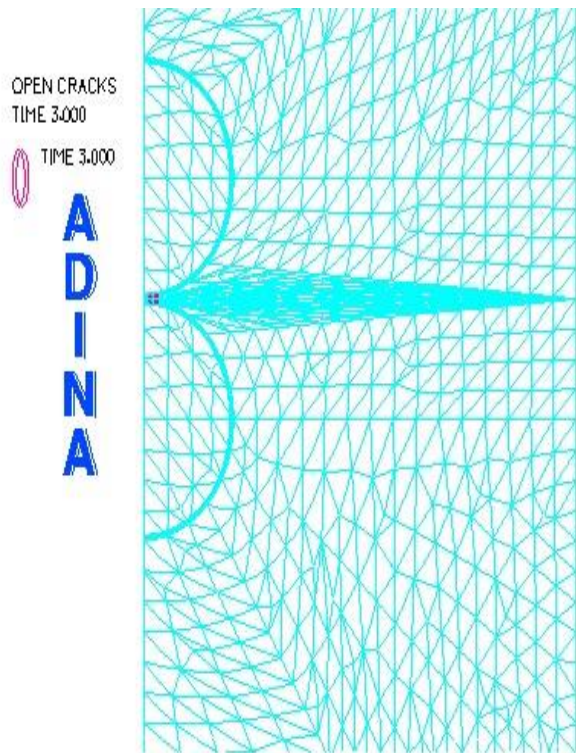


À la zone d'enrobage (extérieure)
 $\Delta T_{cr} = -30^\circ\text{C}$

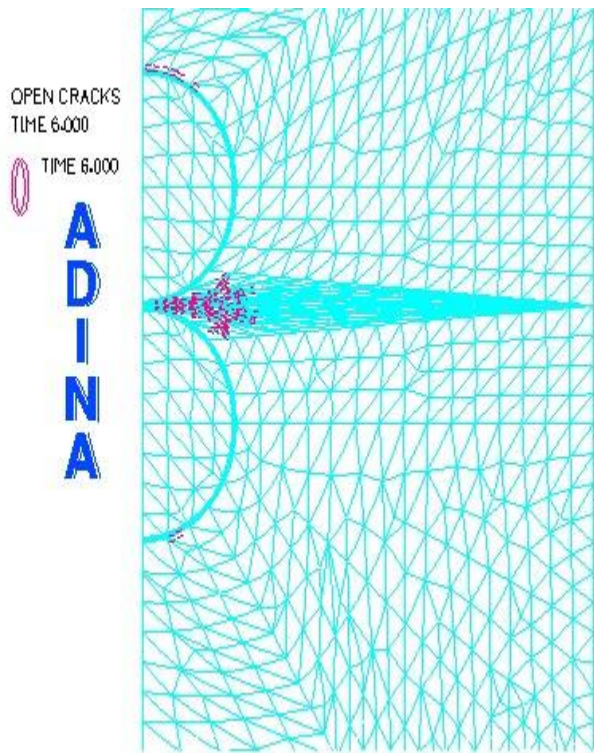


À la zone d'enrobage (extérieure) $\Delta T_{cr} = -60^\circ\text{C}$

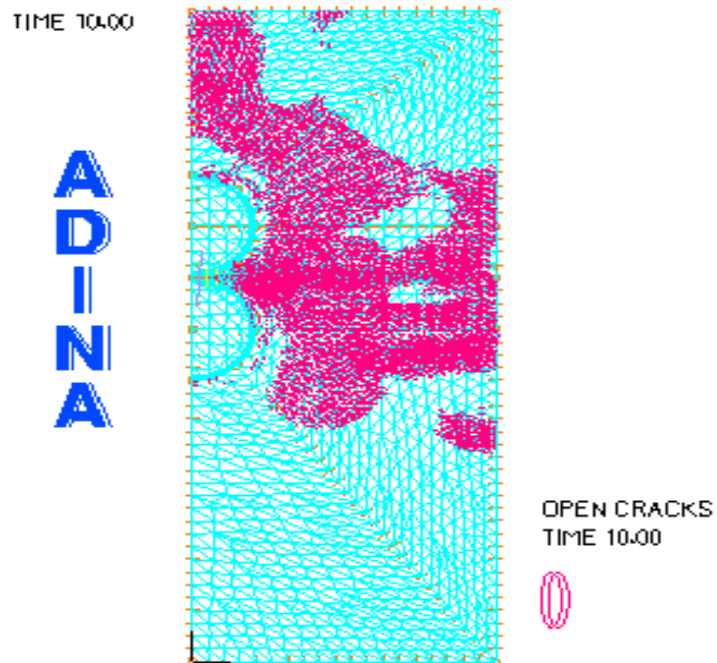
- Poutre P.#16.20 ayant $c/d_b = 1,3$



À la zone inter-barres (intérieure)
 $\Delta T_{cr} = -15^{\circ}\text{C}$



À la zone d'enrobage (extérieure)
 $\Delta T_{cr} = -30^{\circ}\text{C}$.

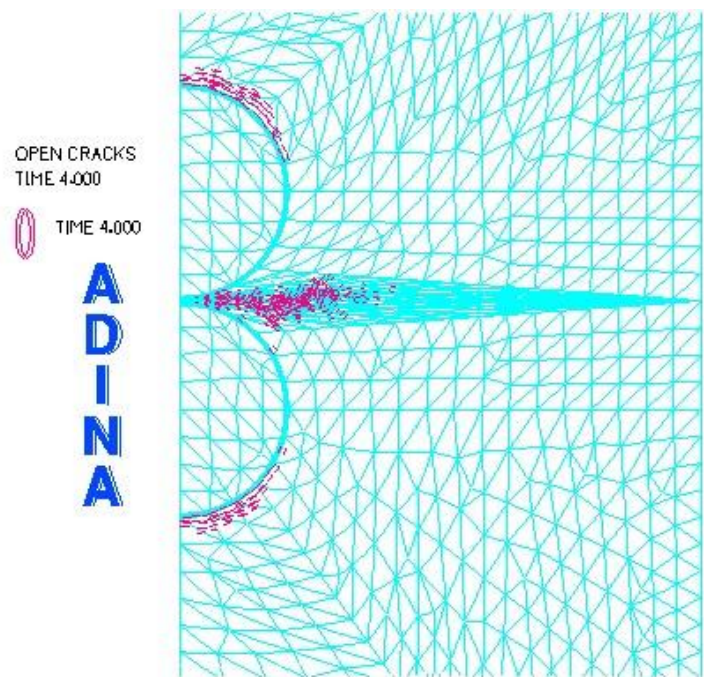


Fissuration de l'enrobage du béton ; $\Delta T_{sp} = -50^{\circ}\text{C}$

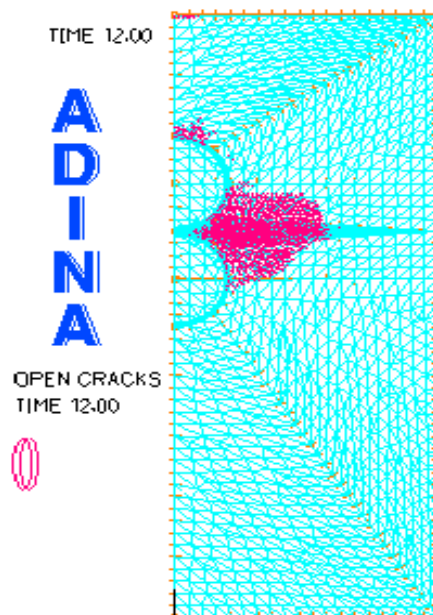
- Poutre P.#16.25 ayant $c/d_b = 1,6$



À la zone inter-barres (intérieure)
 $\Delta T_{cr} = -15^\circ\text{C}$

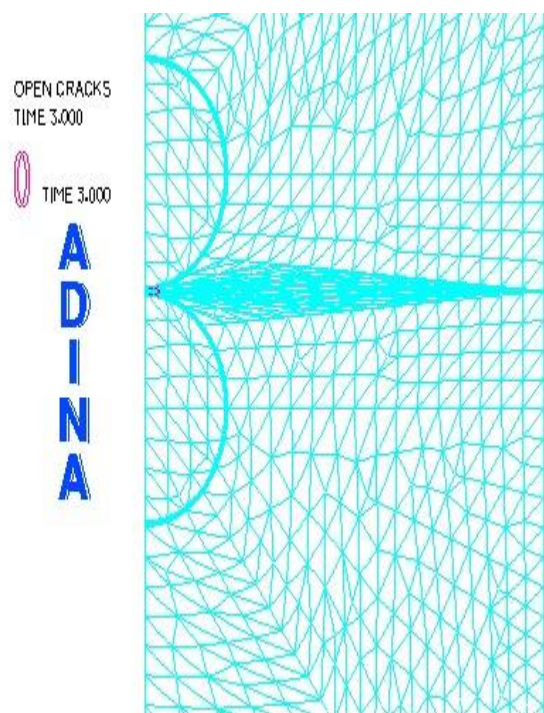


À la zone d'enrobage (extérieure)
 $\Delta T_{cr} = -20^\circ\text{C}$

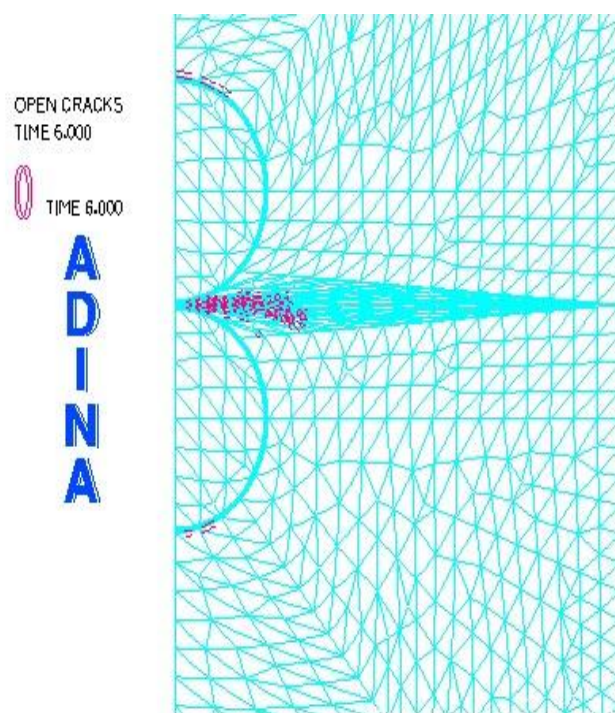


Fissuration de l'enrobage du béton ; $\Delta T_{sp} = -60^\circ\text{C}$

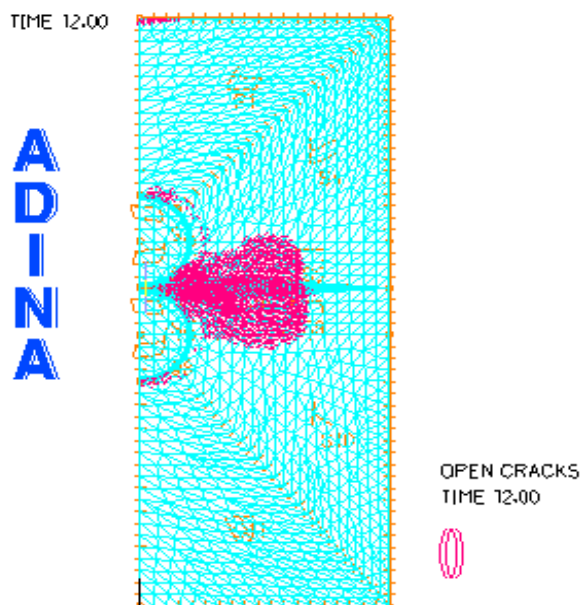
- Poutre P.#16.30 ayant $c/d_b = 1,9$



À la zone inter-barres (intérieure)
 $\Delta T_{cr} = -15^\circ\text{C}$

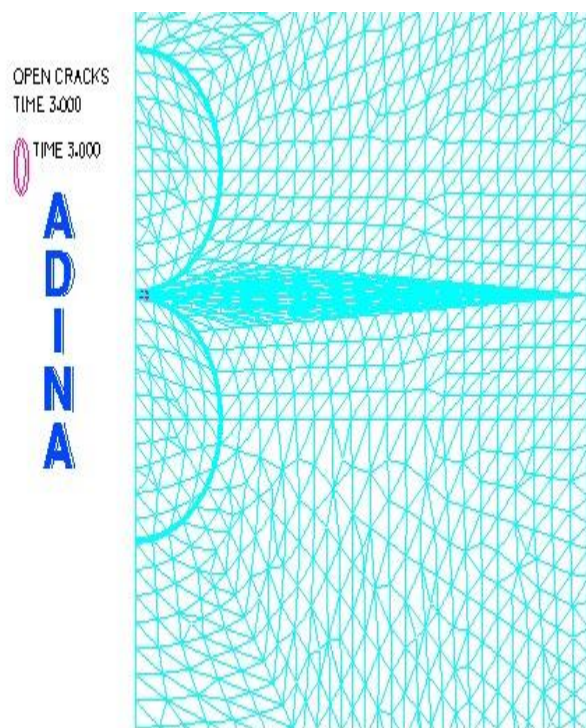


À la zone d'enrobage (extérieure)
 $\Delta T_{cr} = -30^\circ\text{C}$.

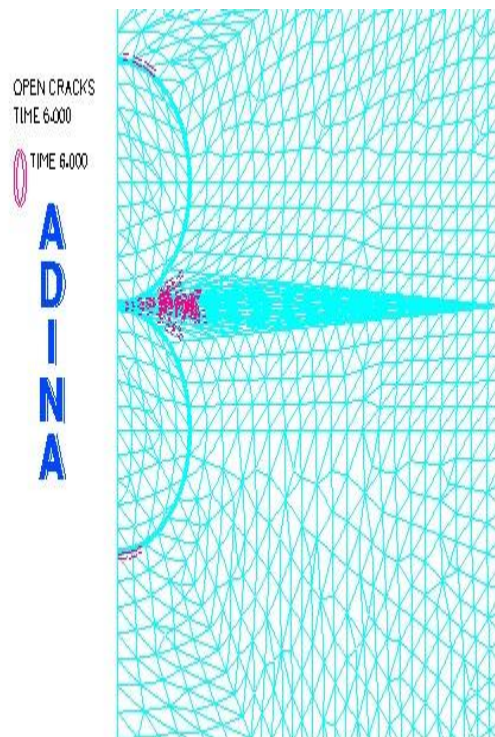


Fissuration de l'enrobage du béton ; $\Delta T_{sp} = -60^\circ\text{C}$

- Poutre P.#19.20 ayant $c/d_b = 1,0$



À la zone inter-barres (intérieure)
 $\Delta T_{cr} = -15^\circ\text{C}$

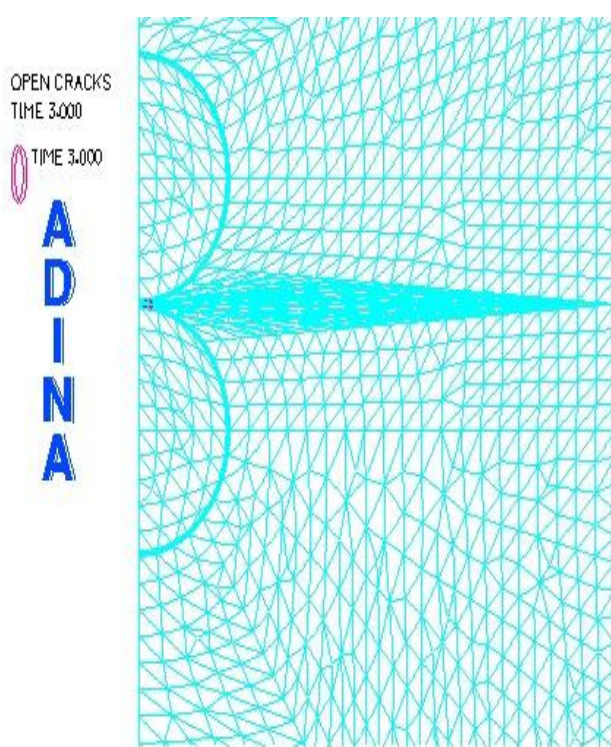


À la zone d'enrobage (extérieure)
 $\Delta T_{cr} = -30^\circ\text{C}$

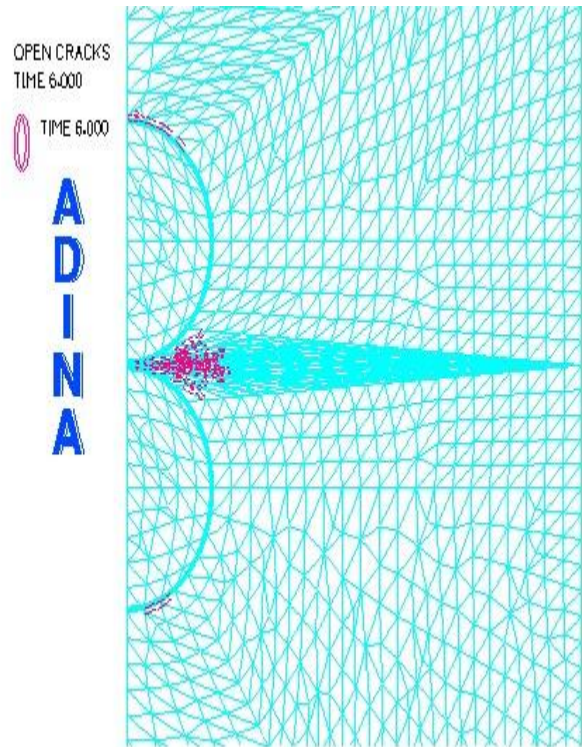


Fissuration de l'enrobage du béton ; $\Delta T_{sp} = -60^\circ\text{C}$

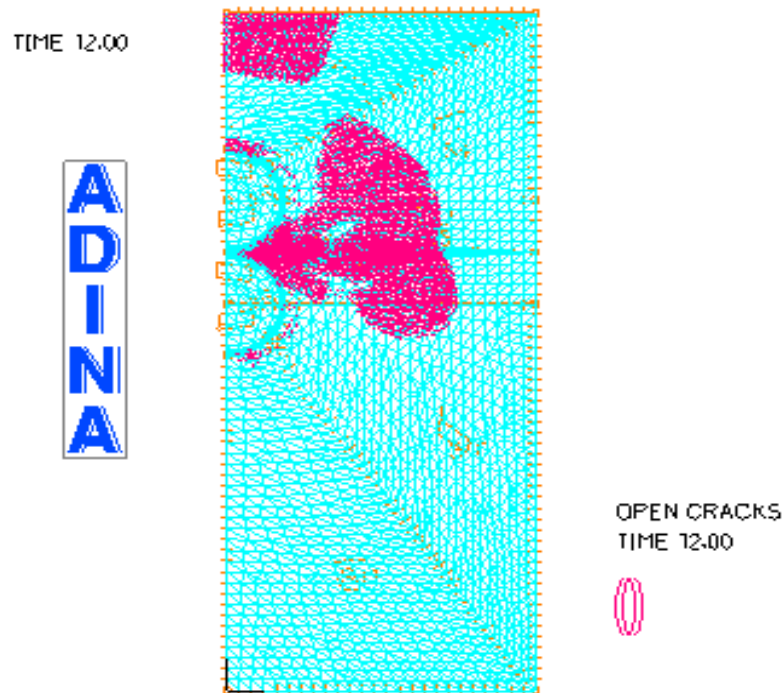
- Poutre P.#19.25 ayant $c/d_b = 1,3$



À la zone inter-barres (intérieure)
 $\Delta T_{cr} = -15^\circ\text{C}$

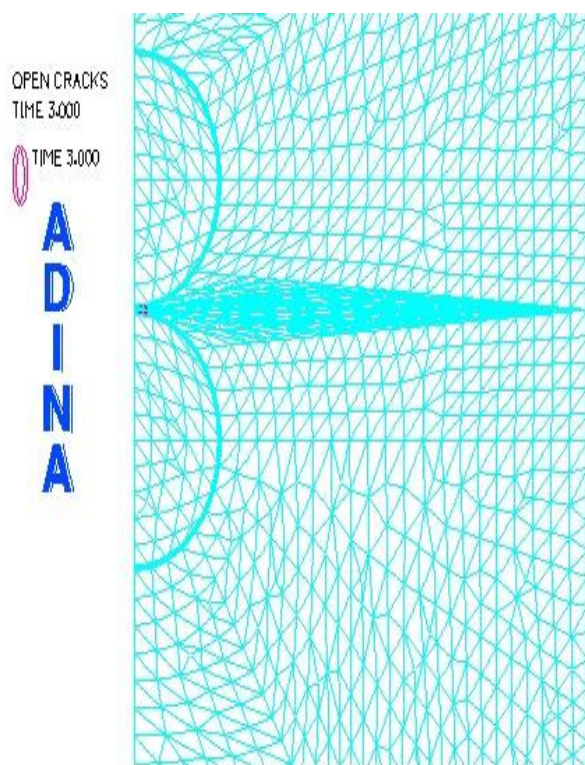


À la zone d'enrobage (extérieure)
 $\Delta T_{cr} = -30^\circ\text{C}$.

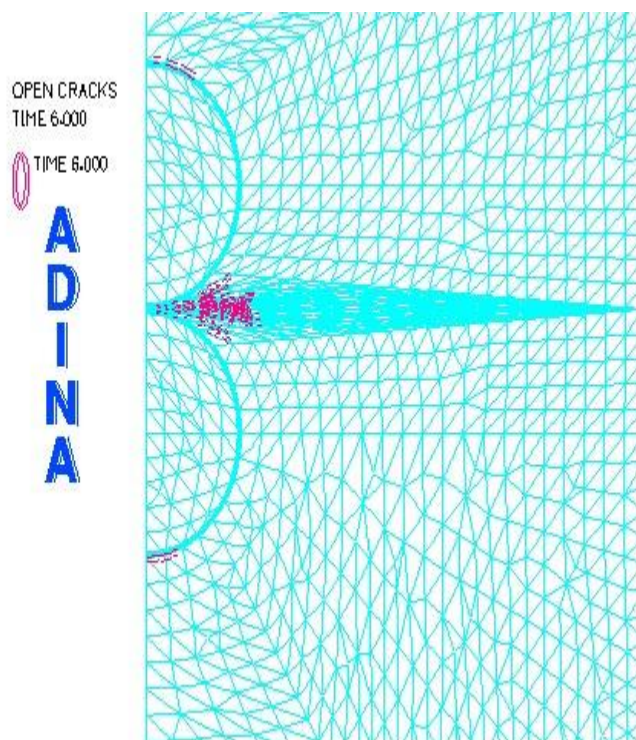


Fissuration de l'enrobage du béton ; $\Delta T_{sp} = -60^\circ\text{C}$

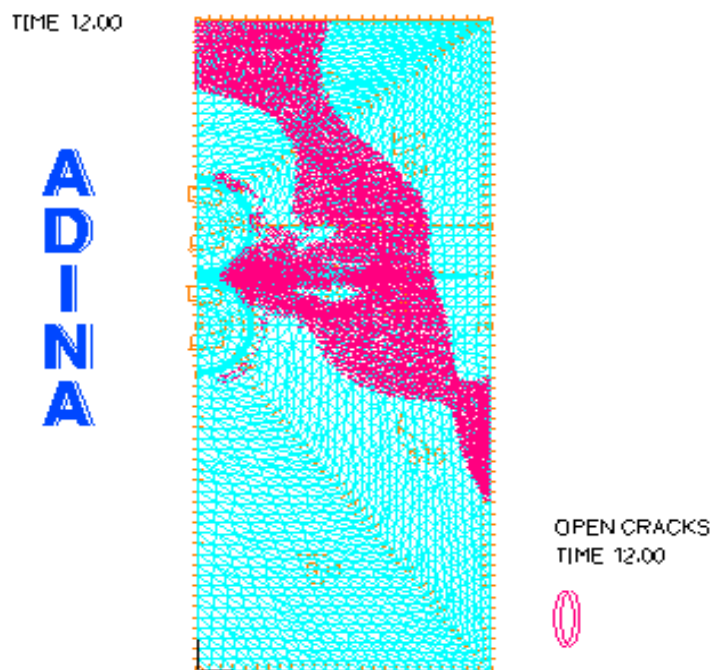
- Poutre P.#19.30 ayant $c/d_b=1,6$



À la zone inter-barres (intérieure)
 $\Delta T_{cr} = -15^\circ\text{C}$

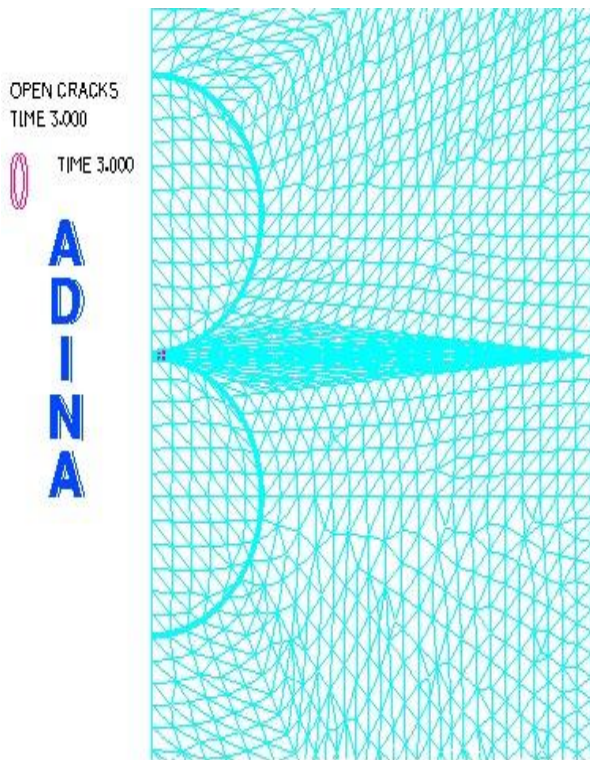


À la zone d'enrobage (extérieure)
 $\Delta T_{cr} = -30^\circ\text{C}$

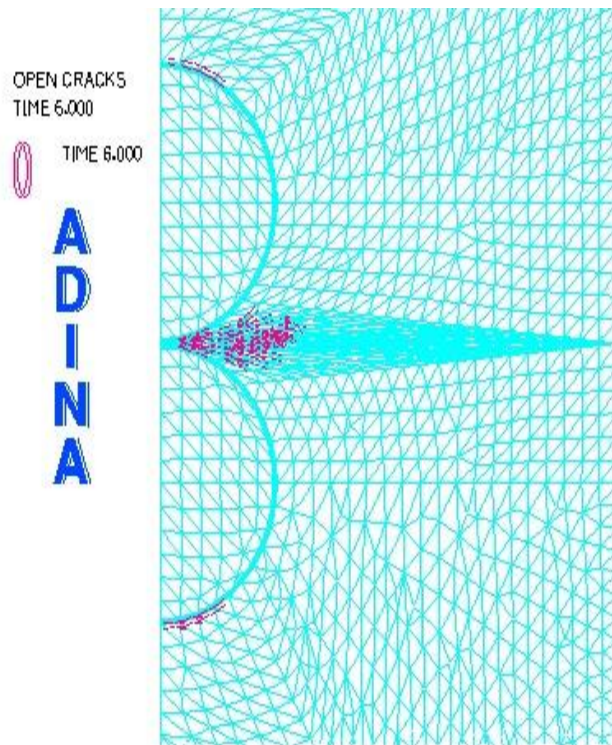


Fissuration de l'enrobage du béton ; $\Delta T_{sp} = -60^\circ\text{C}$

- Poutre P.#25.25 ayant $c/d_b=1,0$



À la zone inter-barres (intérieure)
 $\Delta T_{cr} = -15^\circ\text{C}$



À la zone d'enrobage (extérieure)
 $\Delta T_{cr} = -30^\circ\text{C}$

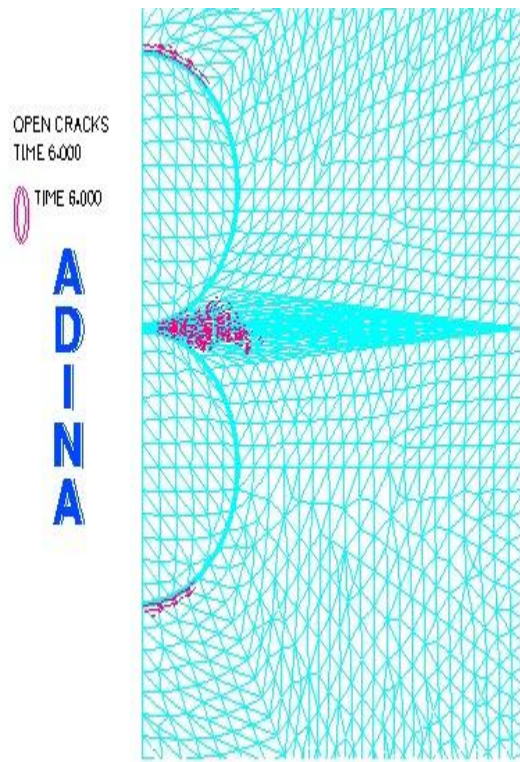


Fissuration de l'enrobage du béton ; $\Delta T_{sp} = -60^\circ\text{C}$

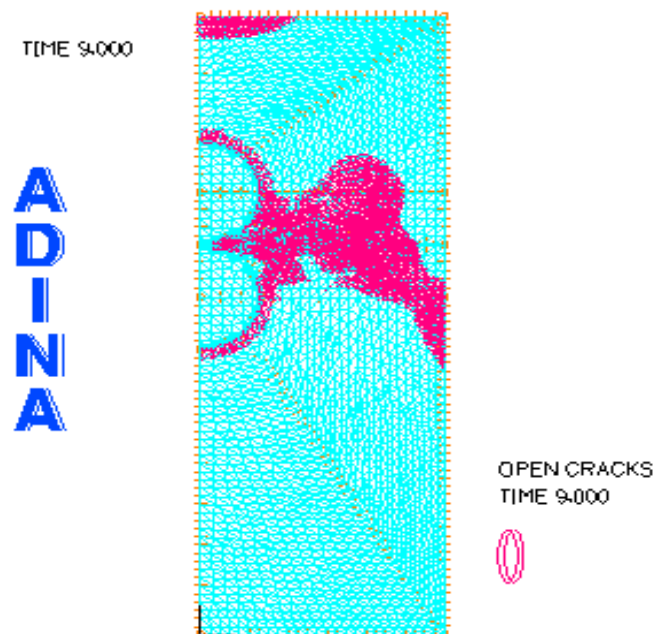
- Poutre P.#25.30 ayant $c/d_b=1,2$



À la zone inter-barres (intérieure)
 $\Delta T_{cr} = -15^\circ\text{C}$

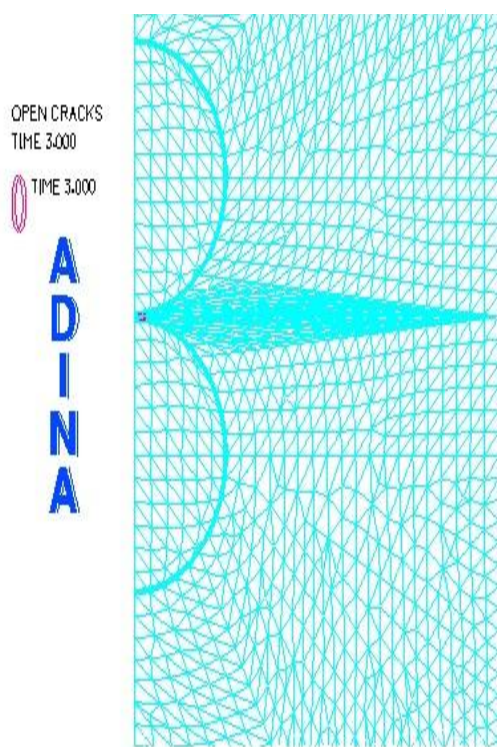


À la zone d'enrobage (extérieure)
 $\Delta T_{cr} = -30^\circ\text{C}$

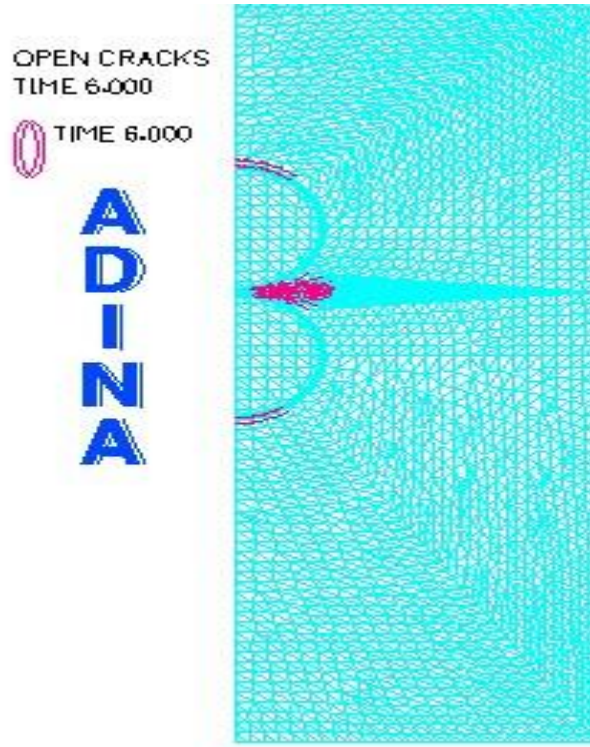


Fissuration de l'enrobage du béton ; $\Delta T_{sp} = -45^\circ\text{C}$

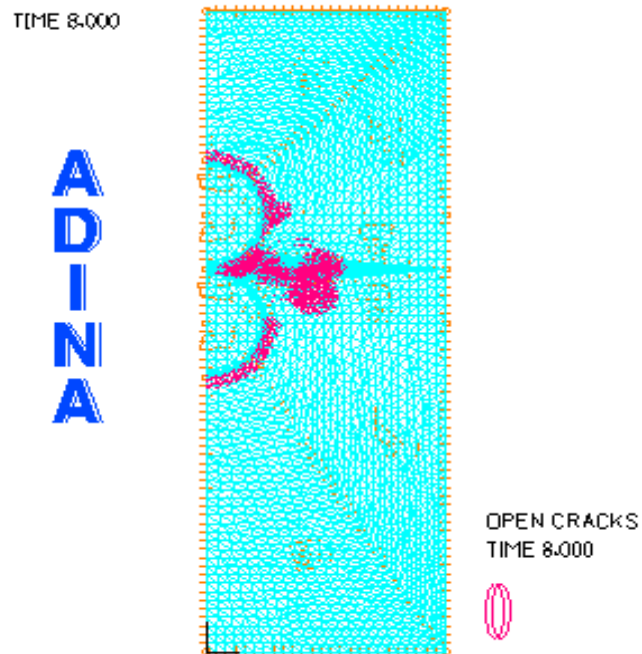
- Poutre P.#25.35 ayant $c/d_b=1,4$



À la zone inter-barres (intérieure)
 $\Delta T_{cr}=-15^{\circ}\text{C}$



À la zone d'enrobage (extérieure)
 $\Delta T_{cr}=-30^{\circ}\text{C}$.



Fissuration de l'enrobage du béton ; $\Delta T_{sp}=-40^{\circ}\text{C}$

Les étapes détaillées de modélisation à titre d'exemple de la poutre prismatique P.#10.20 en utilisant logiciel ADINA.

1. Définition des paramètres de modèle

- ✓ **Titre de problème :** Choisir Control → Heading, écrire « prob de température sur PRF » et cliquer sur OK. (Figure A.1)

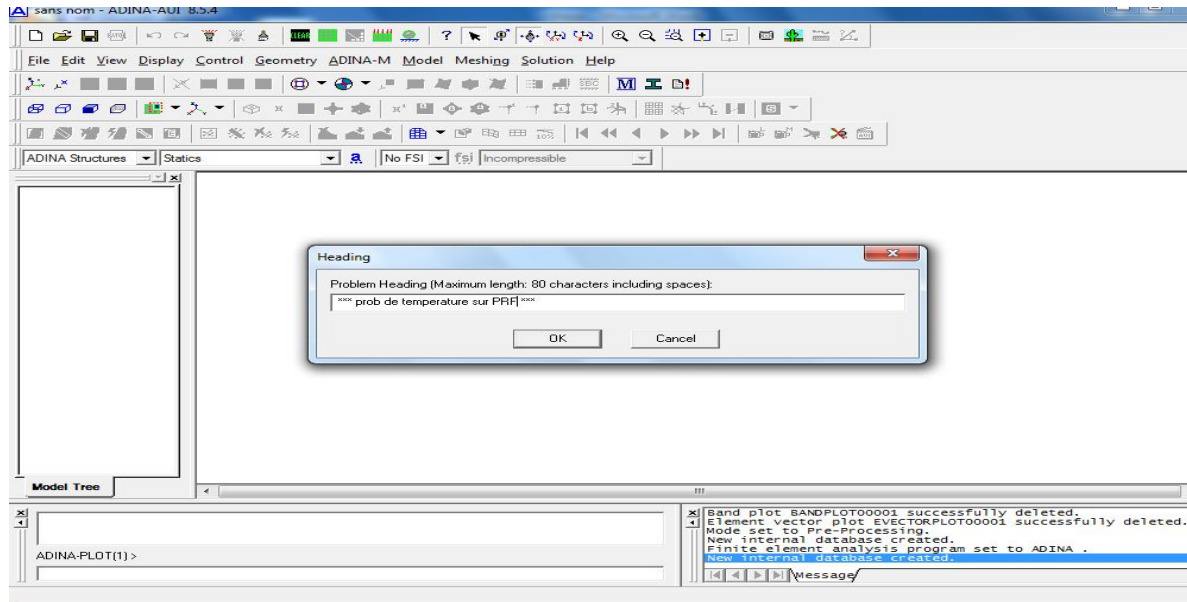


Figure A. 1

- ✓ **Maîtrises de liberté :** Choisir Control → Degrees of Freedom, coucher les Boutons: X-Translation, X-Rotation, Y-Rotation et Z-Rotation et cliquer sur OK. (Figure A.2)

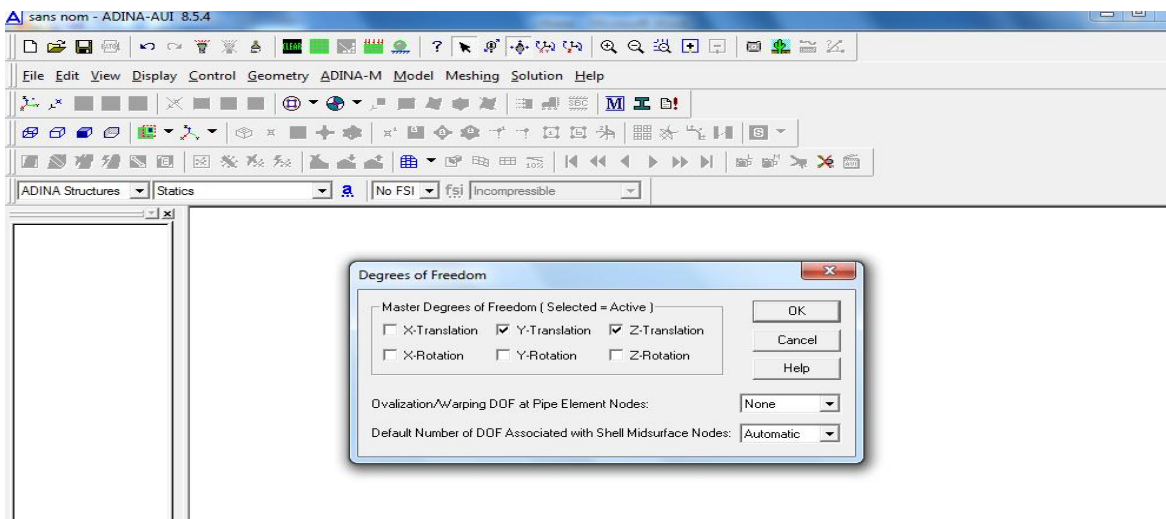


Figure A. 2

2. Géométrie et Coordonnées des points de la section de la poutre modélisée :

Vue la symétrie de la section de la poutre prismatique par rapport à l'axe oz, l'étude peut être effectuée uniquement pour la moitié de la section.

Points : Cliquer sur 'Define Points icon' , écrire les coordonnées des points de la section de la poutre dans les colonnes de tableau X2, X3 (Figure A.3), puis cliquer sur OK. A titre d'exemple les coordonnées des points de la section de la Poutre P. #10.20. (Figure A.4)

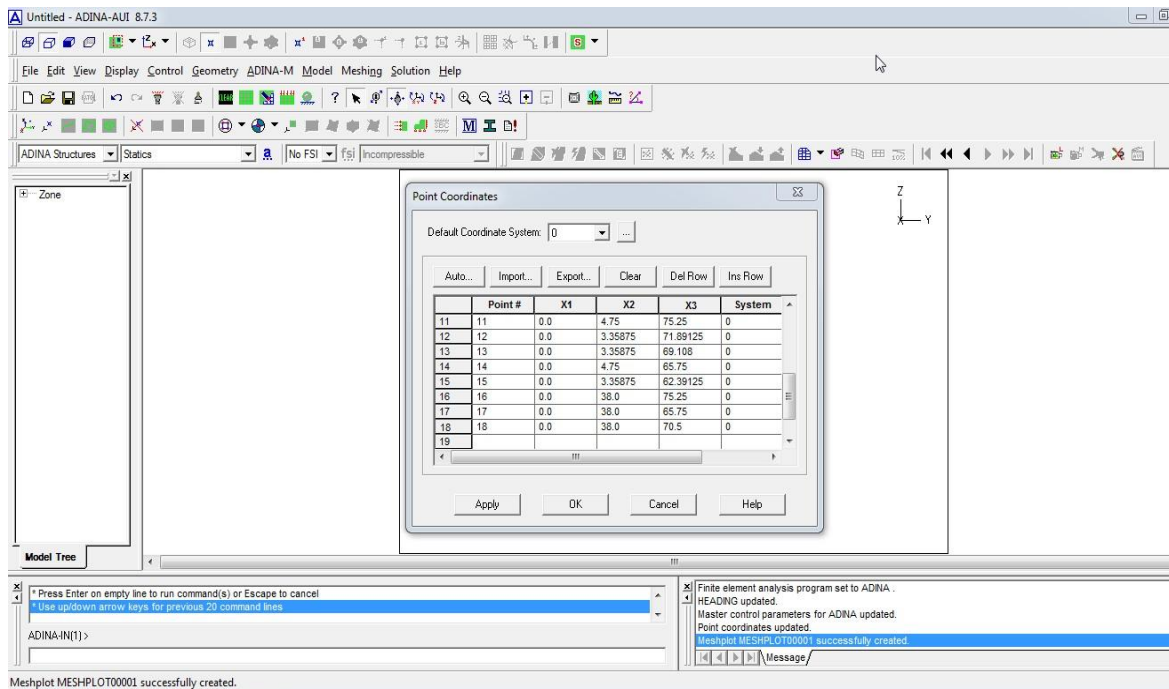


Figure A. 3

Lignes d'arc : Cliquer sur 'Define Lines icon' , ajouter la ligne 1, placer Type : Arc, placer P1 à 5, P2 à 10, centre à 6 (Figure A.5) et cliquer sur Add. Alors ajouter les lignes 2 ; 3 jusqu'à 8 de même manière comme ligne 1 et cliquer sur OK. (Figure A.5) et ajouter la ligne 9, placer type : straight, placer P1 à 2, P2 à 5 et cliquer sur add pour 2^{ème} ligne P1 5, P2 6. De même manière pour tout les lignes .

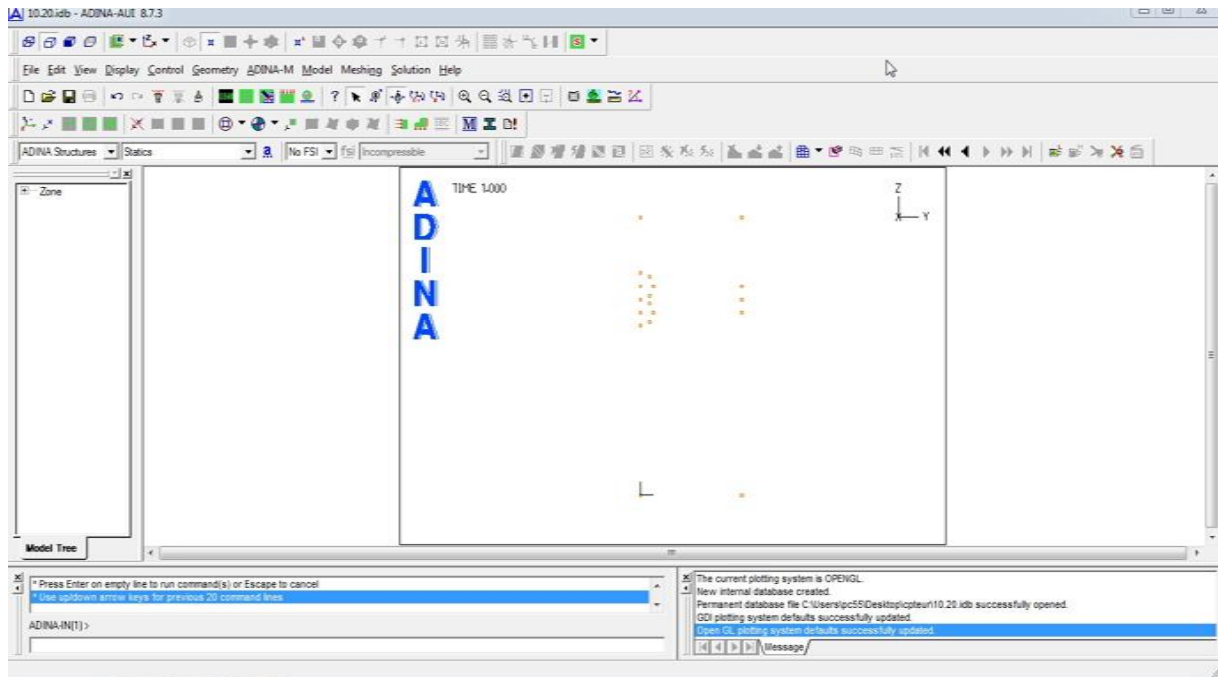


Figure A. 4

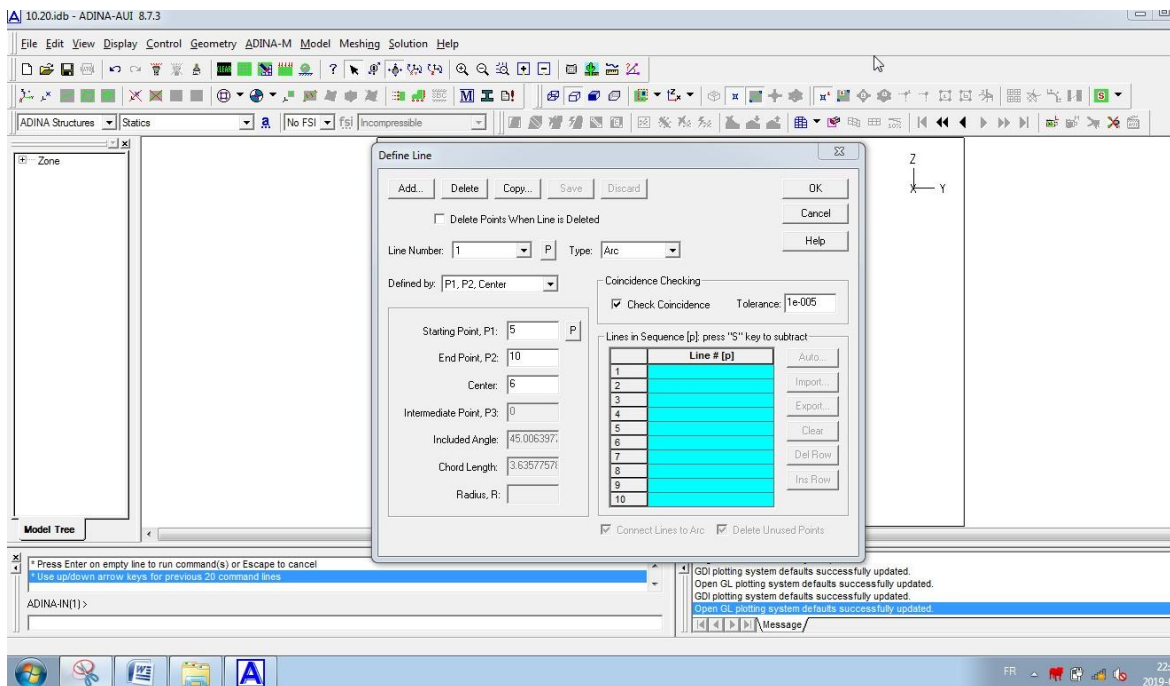


Figure A. 5

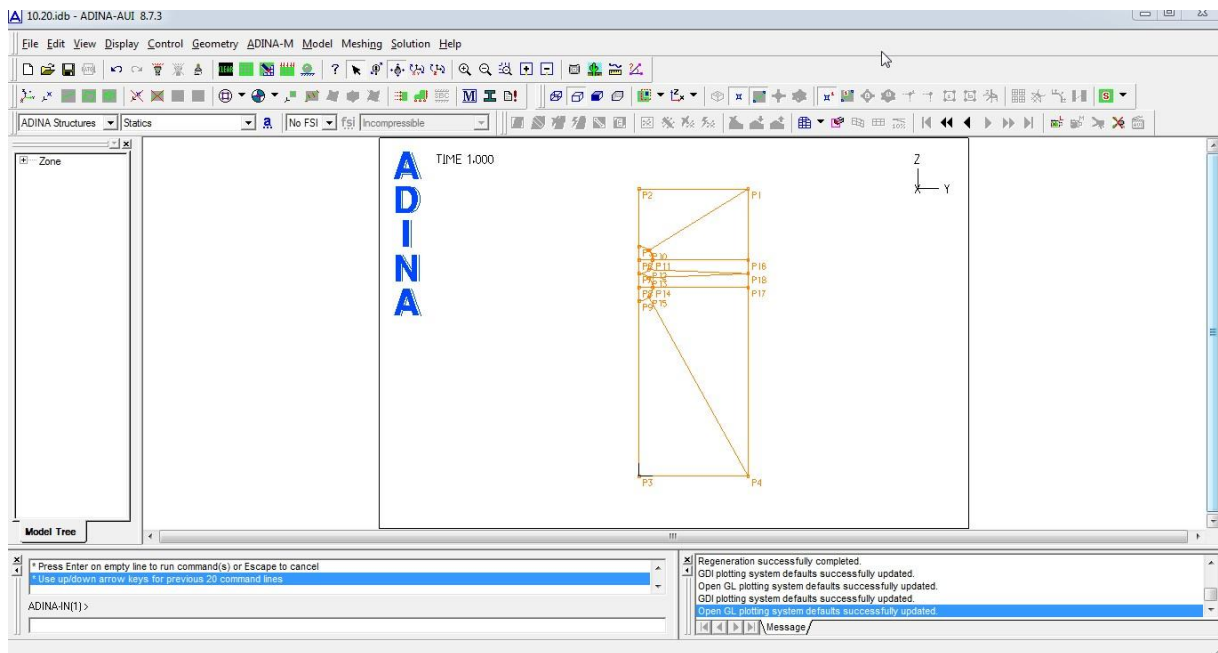


Figure A. 6

Surfaces : Cliquer sur 'Define Surfaces icon' , ajouter la surface 1, s'assurer que le Type est placé à Vertex (Figure A.7), définissent les surfaces suivantes 1 ; 2 ; 3 jusqu'à 11 et cliquer sur OK. (Figure A.8) (ex: surfce 1: 1,2,5,10 ; surfce 2: 10,1,16,6).

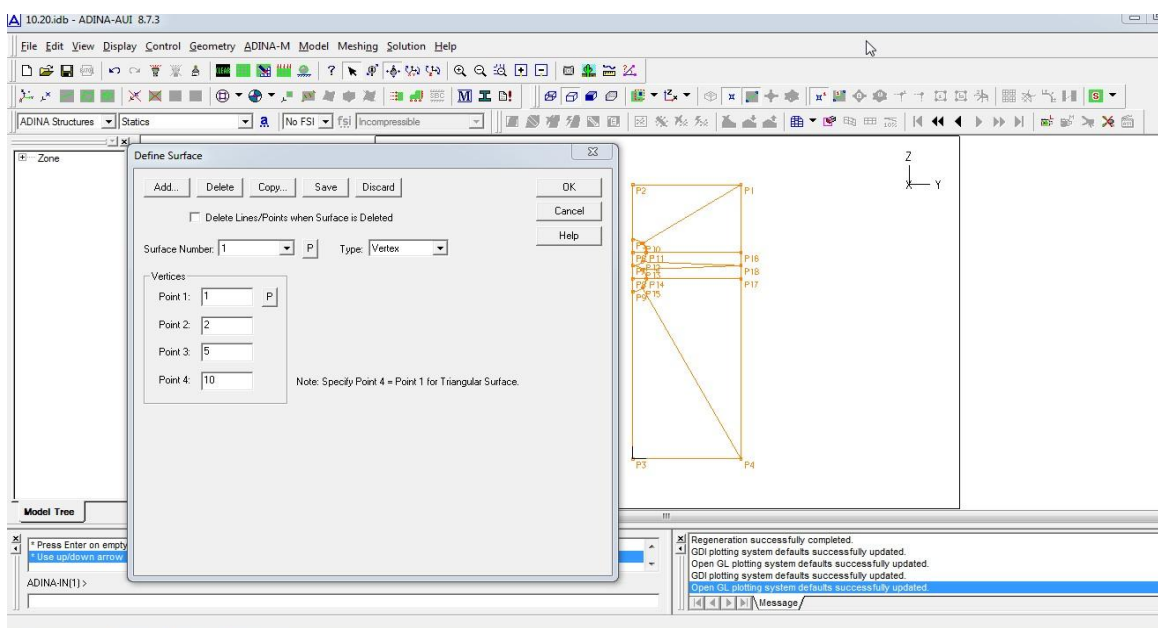


Figure A. 7

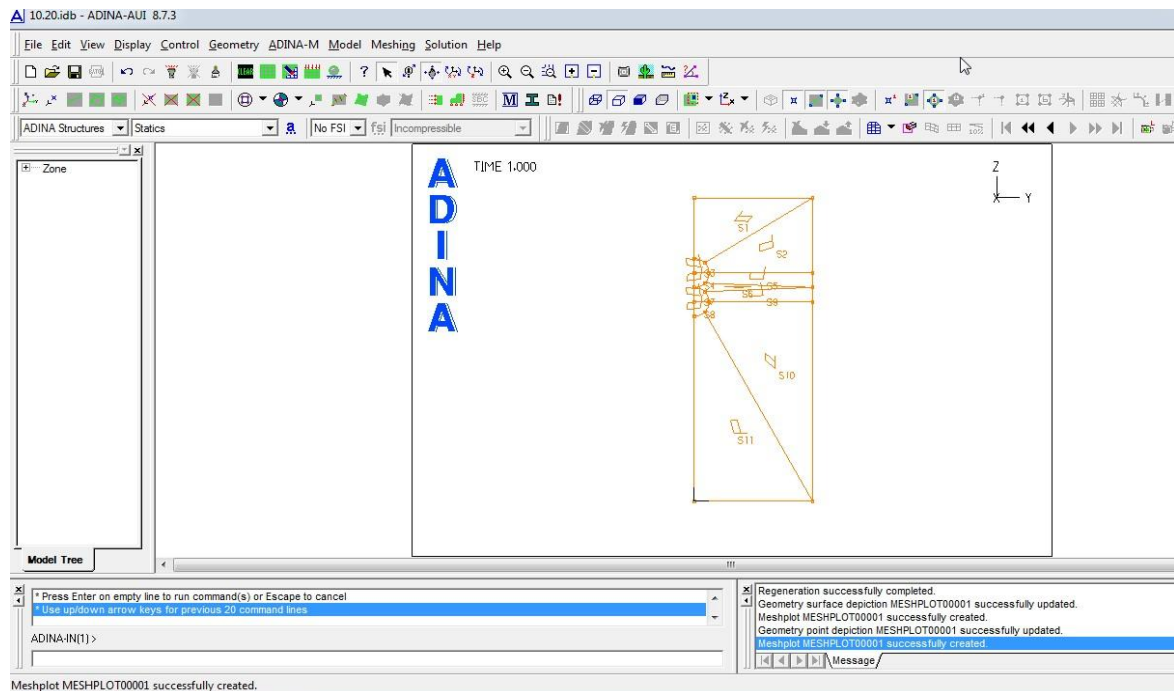


Figure A. 8

'Point Labels icon'  ¹, 'Line/Edge Labels icon'  ¹ et 'Surface/Face Labels icon'  ¹. (Figure A.9)

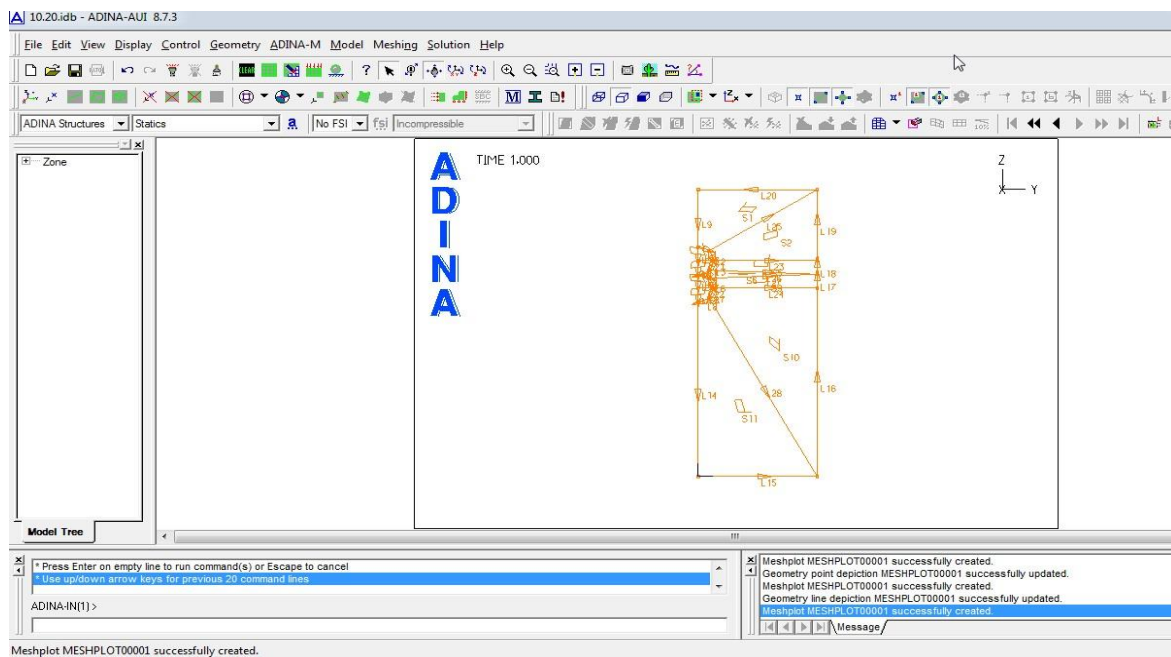


Figure A. 9

3. Conditions aux limites :

L'étude du modèle s'effectue en deux dimensions (2D) car les déformations thermiques transversales dues à l'effet de la compatibilité des déformations axiales sont négligeables. Le nombre de degré de liberté à considérer est égal à 2 donc seulement les déplacements suivants u_y et u_z sont considérés comme suit :

- à $z = 0$ $u_z = 0$ et $u_y \neq 0$
- à $y = 0$ $u_z \neq 0$ et $u_y = 0$

Cliquer sur 'Apply Fixity icon'  et cliquer sur le bouton de 'Define', Dans la zone Define Fixity dialog box, ajouter la fixité nommé ZT, vérifier le bouton de Z-Translation et cliquer sur Save (Figure A.10). Ajouter alors la fixité nommé YT, vérifie le bouton de Y-Translation et cliquer sur OK (Figure A.11). Dans la zone de Apply Fixity dialog box, placé 'Apply to': Lignes. Pour fixer la fixité pour la ligne 15 à YT, présenter 15 dans la première ligne et colonne de tableau, pour déplacer alors le curseur à la première ligne, la deuxième colonne, cliquer pour montrer la liste, et choisie YT de la liste Fixity. D'une manière semblable, et pour ZT fixer la fixité pour les lignes 9 ; 10; 11,12,13 et 14 et cliquer sur OK.

(Figure A.12)

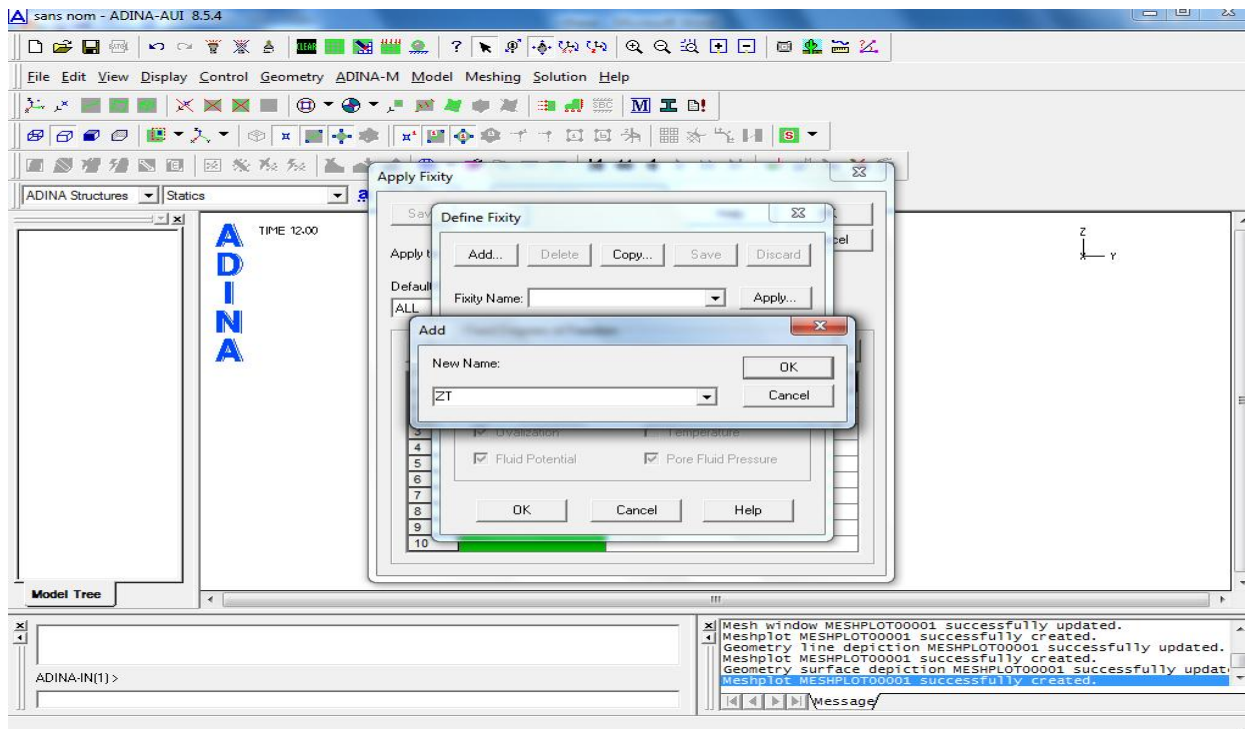


Figure A. 10

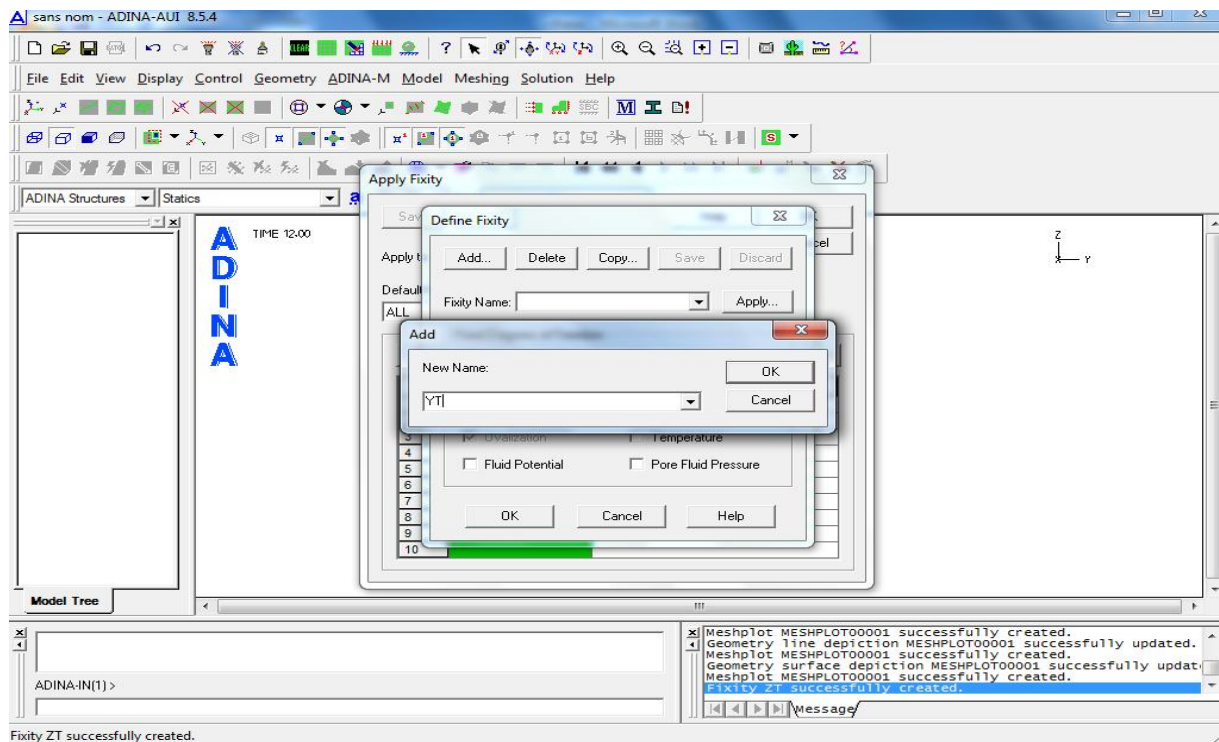


Figure A. 11

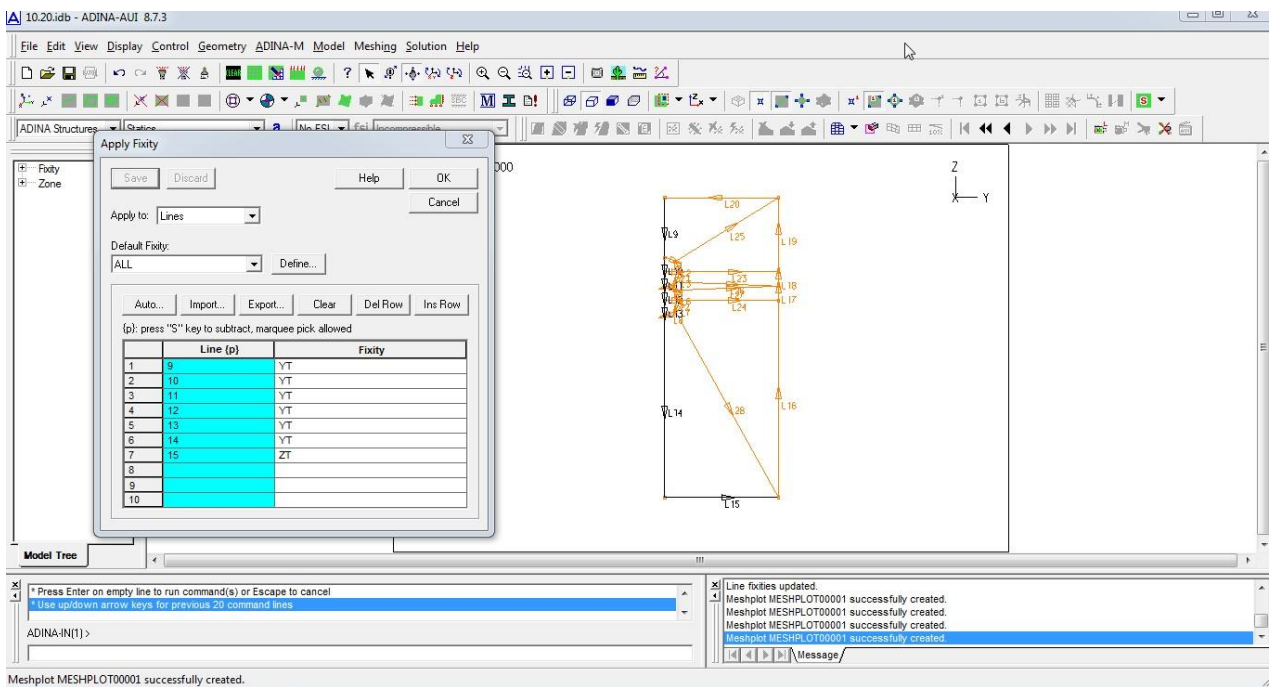


Figure A. 12

Quand vous cliquez sur 'Plot icon' , la fenêtre de graphique comme dans la Figure A.13

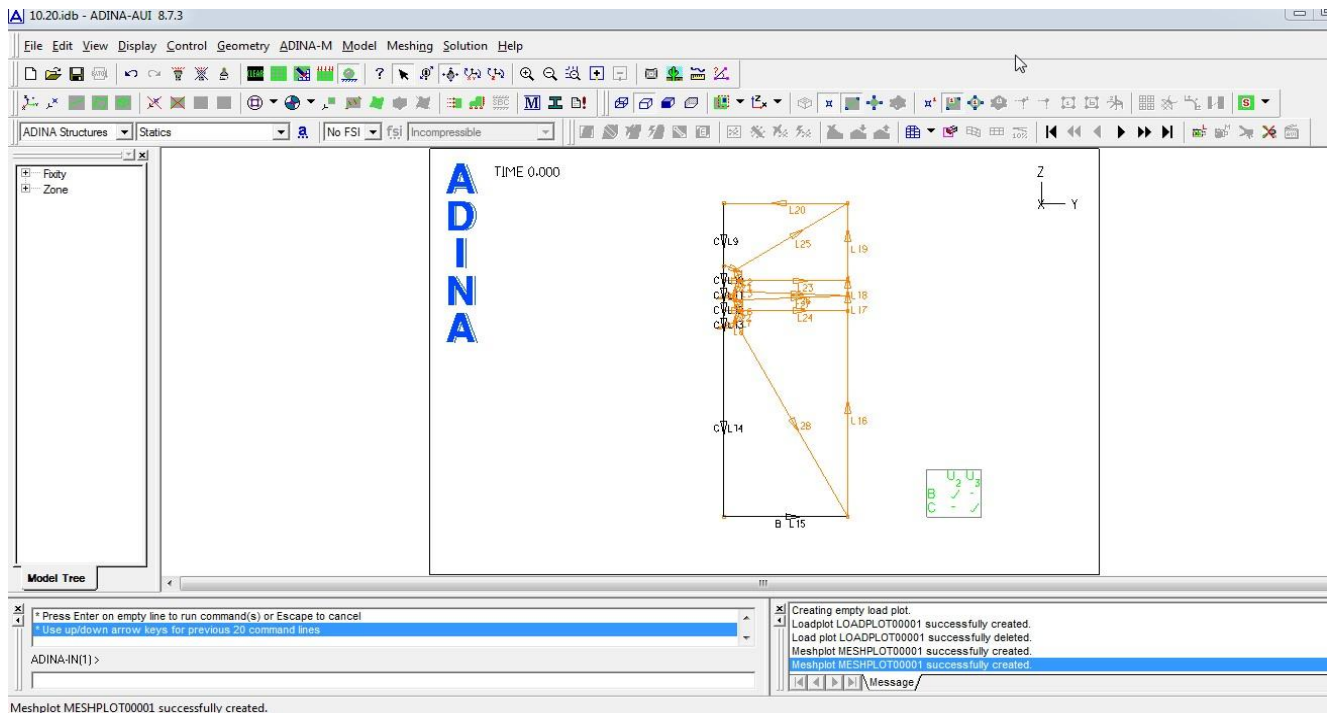


Figure A. 13

Noter que la ligne 15 est identifiée par un B à la droite inférieure de la fenêtre de graphique indique que le degré de liberté U2 (y) est libre et que le degré de liberté U3 (z) est fixe. De même, les lignes 9, 10, 11, 12, 13 et 14 sont identifiées par le C.L., et la table indique que le degré de liberté U2 (y) est fixé et que le degré de liberté U3 (z) est libre.

4. Conditions de chargement :

La variation de température ΔT est appliquée statiquement sur les surfaces des deux matériaux, béton et armature. La variation de température ΔT augmente par incrément de 5°C (Tableau A.1)

Tableau A.1 Variation de température pour chaque incrément du temps.

temps	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ΔT (°C)	0	-5	-10	-15	-20	-25	-30	-35	-40	-45	-50	-55	-60

Choisir Control → Time Function, cliquer sur Add, dans la 1^{ère} colonne et 1^{ère} ligne de 'Time' écrire valeur 0 dans la 2^{ème} colonne et 1^{ère} ligne de 'Value' écrire valeur 1, dans la 1^{ère} colonne et 2^{ème} ligne de 'Time' écrire valeur 12, dans la 2^{ème} colonne et 2^{ème} ligne de 'Value' écrire valeur 0, cliquer sur Save puis sur OK. (Figure A.14)

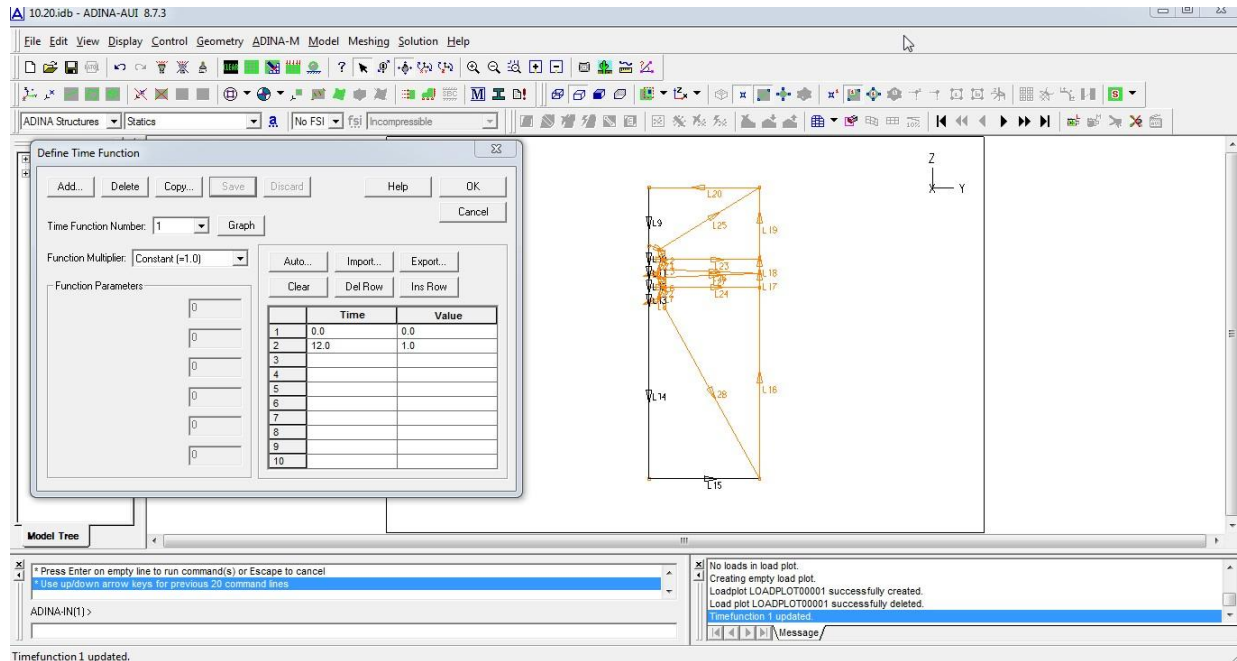


Figure A.14

Choisir Control → Time step, dans la 1^{ère} colonne et 1^{ère} ligne de 'Time' écrire valeur 1 dans la 2^{ème} colonne et 1^{ère} ligne de 'Value' écrire valeur 12, , cliquer sur Save puis sur OK. (Figure A.15)

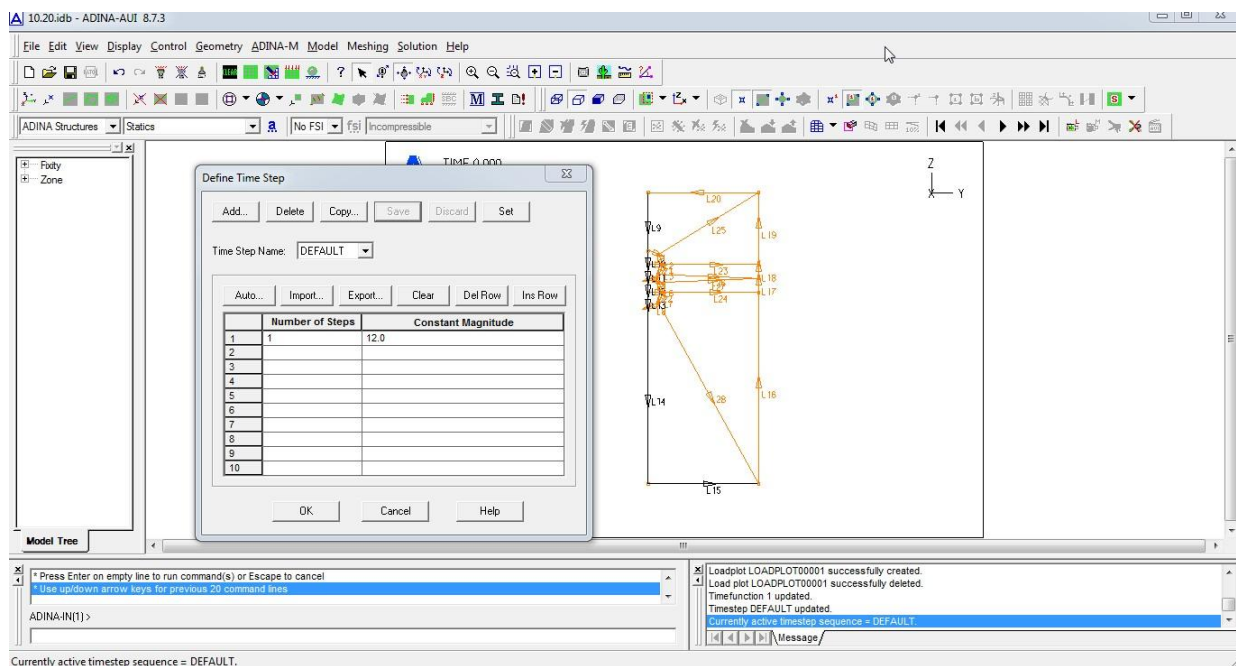


Figure A.15

-Cliquer sur 'Apply Load icon'  : placer 'Load Type' : temperature,' Apply To' : Surface (Figure A.16) et cliquer sur le bouton 'Define', à la droite du Load Number. Dans la zone de Define Temperature', cliquer sur Add, 'Temperature Number' : 1, placer 'Magnitude' : -60 et cliquer sur OK (Figure A.16). Dans la première colonne du tableau 'Site #', écrire les surfaces 1 ; 2 ; 3 ; à 11 (Figure A.17), puis cliquer sur 'Apply', et sur OK pour fermer la zone Apply Load dialog box.

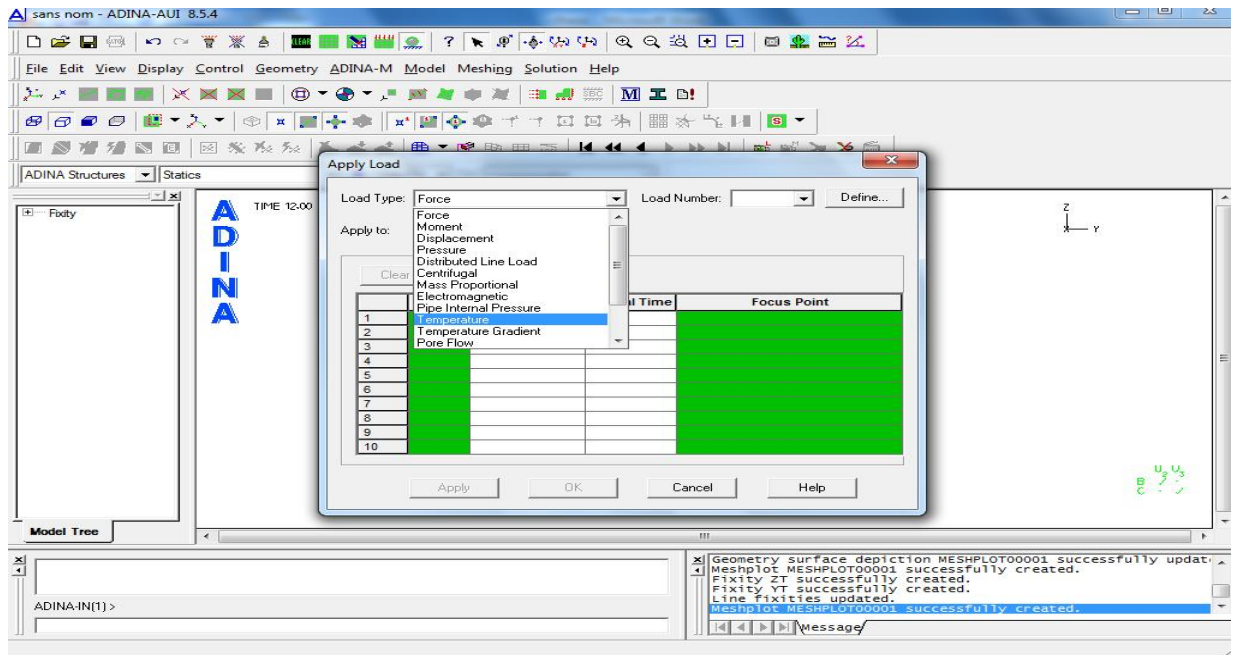


Figure A. 16

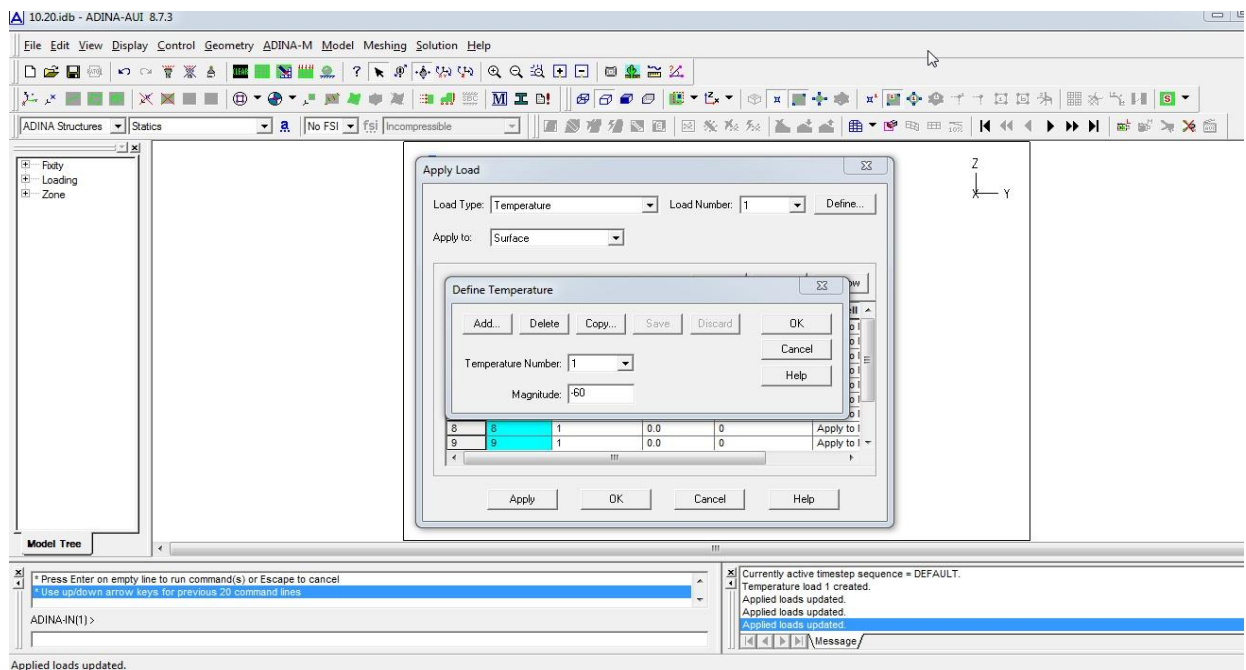


Figure A. 17

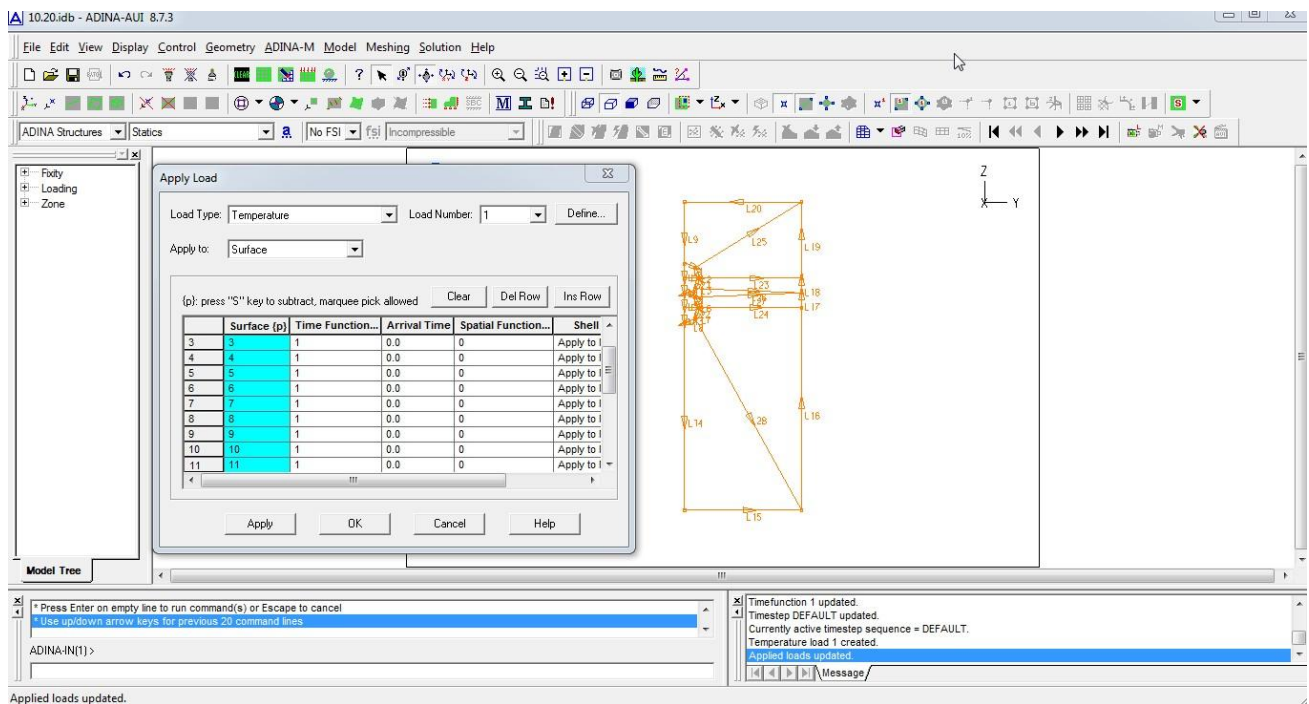


Figure A. 18

5. Propriétés des matériaux :

Le béton est considéré comme un matériau de comportement non linéaire. La Figure A.19 montre l'allure de la courbe des contraintes-déformations du béton utilisée dans le programme ADINA.

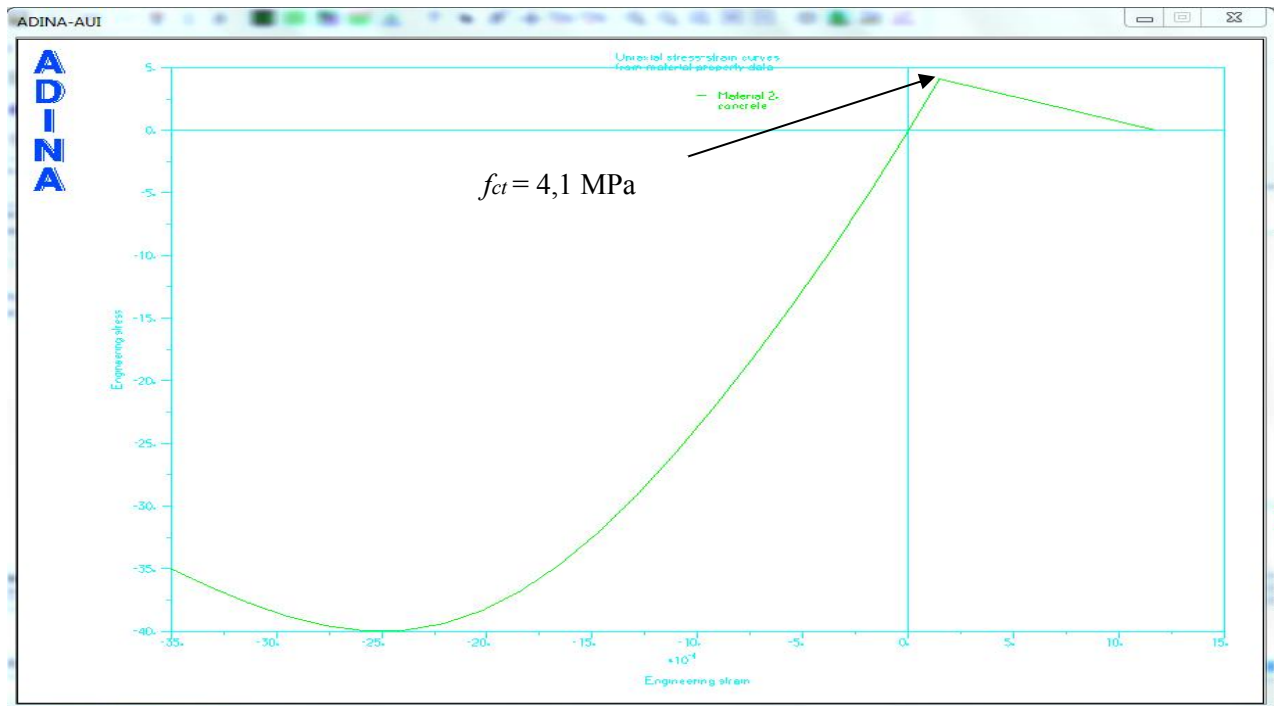


Figure A. 15 Allure de la courbe contraintes-déformations du béton utilisée dans ADINA.

Cliquer sur 'Manage Materials icon' , puis sur le bouton 'Elastic Isotropic', Add →
Material Number: 1, écrire les propriétés telques :

Young's Modulus : 7100

Poisson's Ratio : 0,38

Density : 2

Coef.of Thermal Expansion : 3,3E-5

Cliquer sur OK (Figure A.20), puis sur le bouton Concrete → Add → Material Number : 1,
écrire les propriétés telques :

Initial Value : 0,17 Density : 2,4

Tangent Modulus of Zero Strain : 28000

Uniaxial Out of Tensile Stress : 4,1

Post-Cracking Stress : 4,1

Uniaxial Maximum Compressive Stress : - 40

Uniaxial Maximum Compressive Strain of Above Stress : - 0,0025

Uniaxial Ultimate Compressive Stress : -35

Uniaxial Ultimate Compressive Strain : -0,0035

Mean Coef.of of Thermal Expansion: 1, 16E-5

Cliquer sur OK. (Figures 20 et 21)

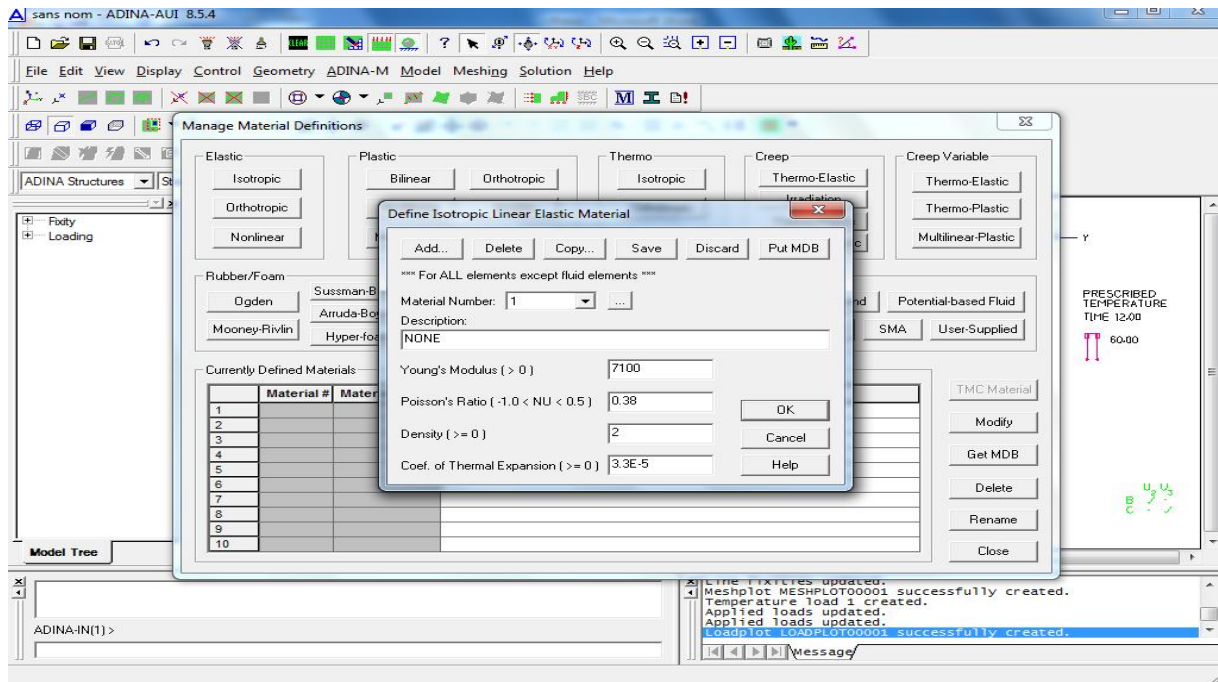


Figure A. 16

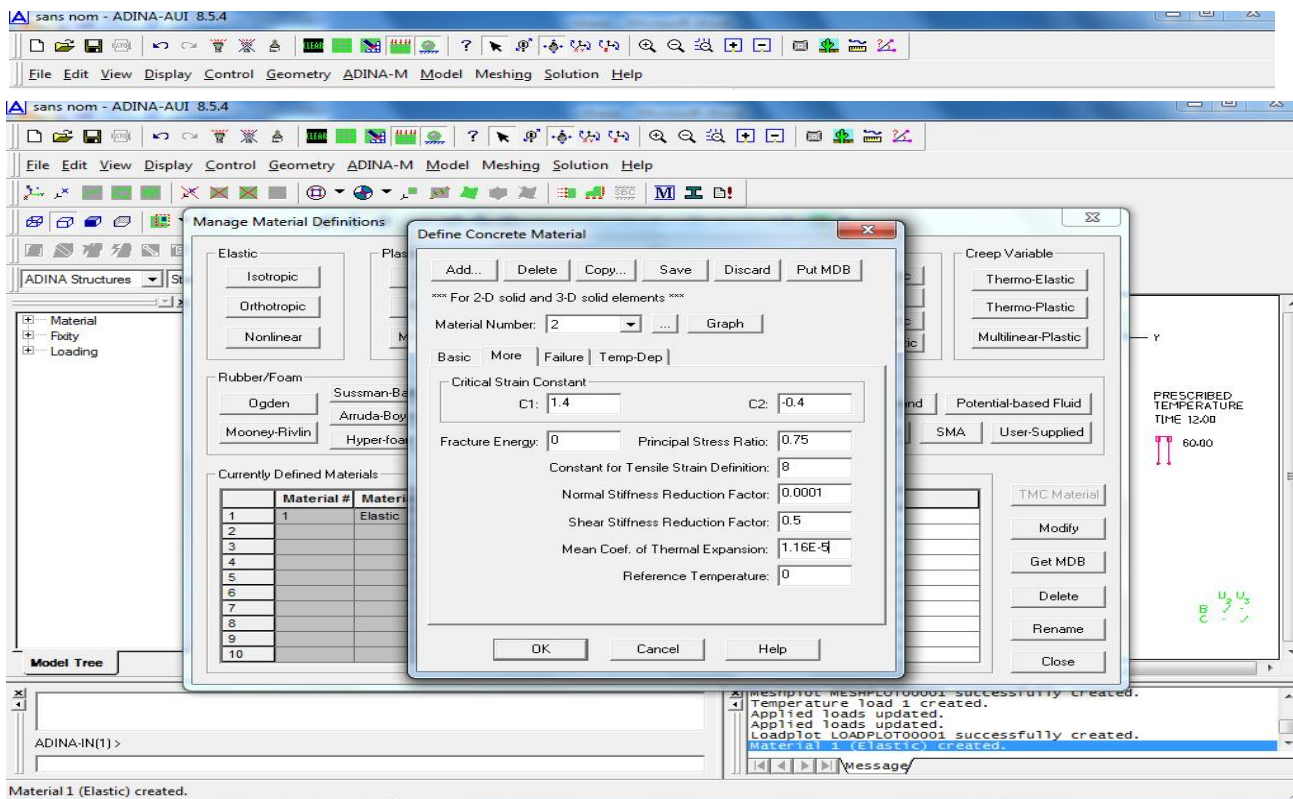


Figure A. 21

6-Définition des éléments

- ✓ **Groupe d'élément** : Cliquer sur 'Define Element Groups icon' , ajouter 'Group Number': 1. placer le 'Type' : 2-D Solid. placer 'Element Sub-Type': Plane Stress.'Defaut Material': 1 (Figure A.22). puis cliquer sur Add,'Group Number': 2.'Type': 2-D Solid. 'Element Sub-Type': Plane Stress.'Defaut Material': 2 et cliquer sur OK. (Figure A.24)

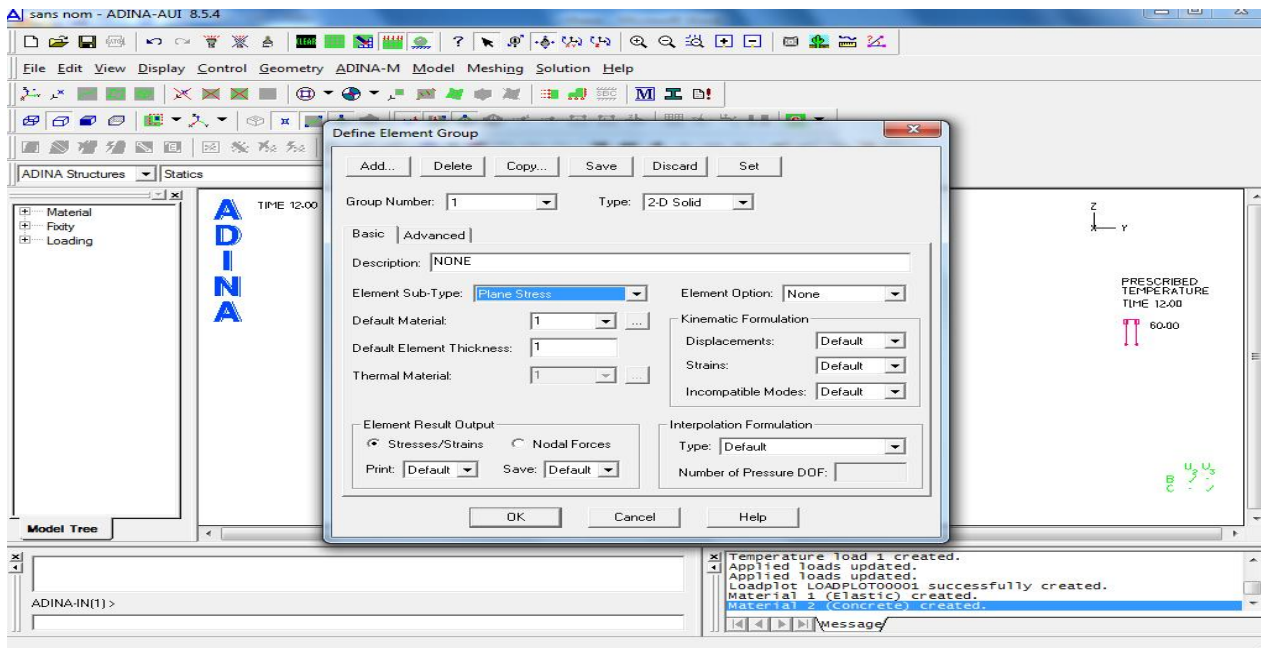


Figure A. 22

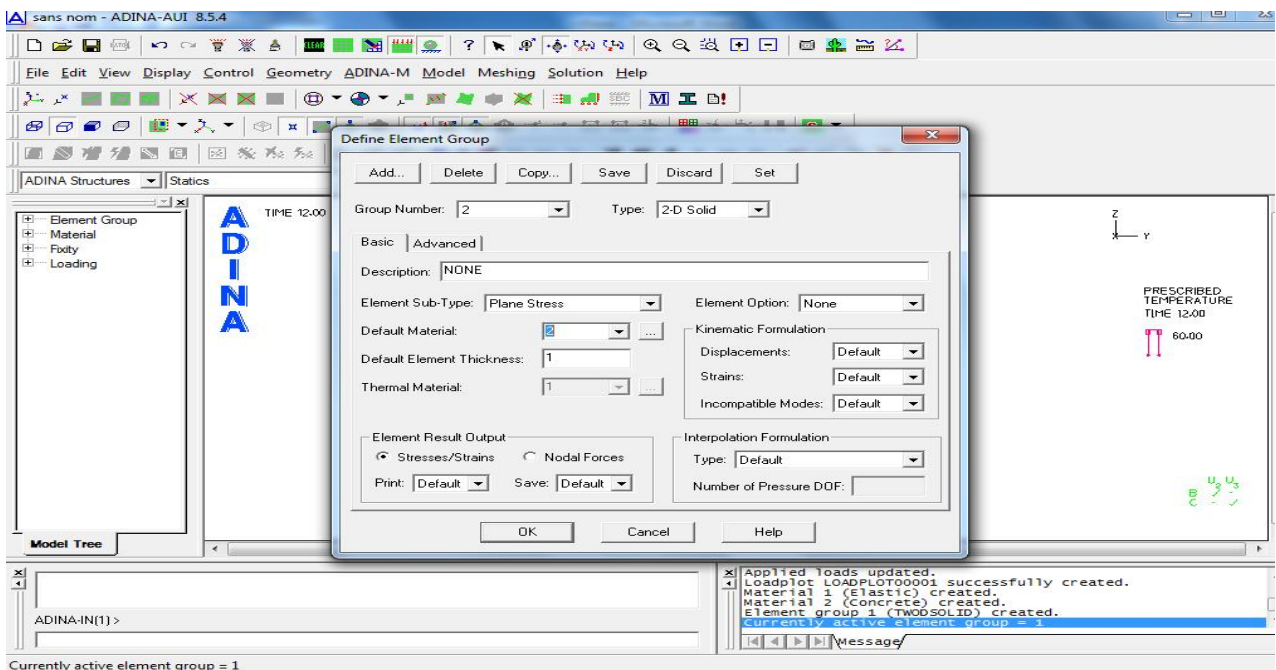


Figure A. 23

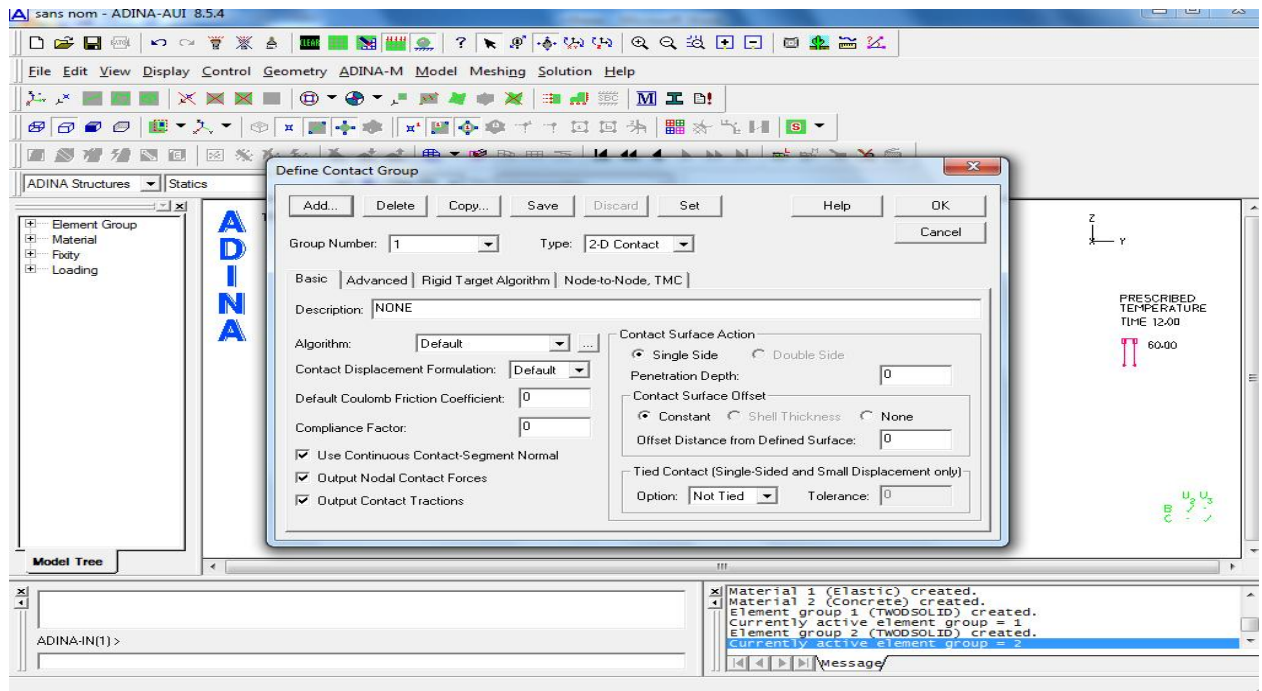


Figure A. 24

Cliquer sur + Contact Group → par le bouton droite de la souris sur 1.2-D Solid (Figure A.25) → Contact Surface → Add → Line #:1(dans le 1^{ère} colonne, 1^{ère} ligne) → Save (Figure A.27) → Add → 'Line #': 2, et de même manière pour 3 ; 4 jusqu'à 13 et cliquer sur OK.

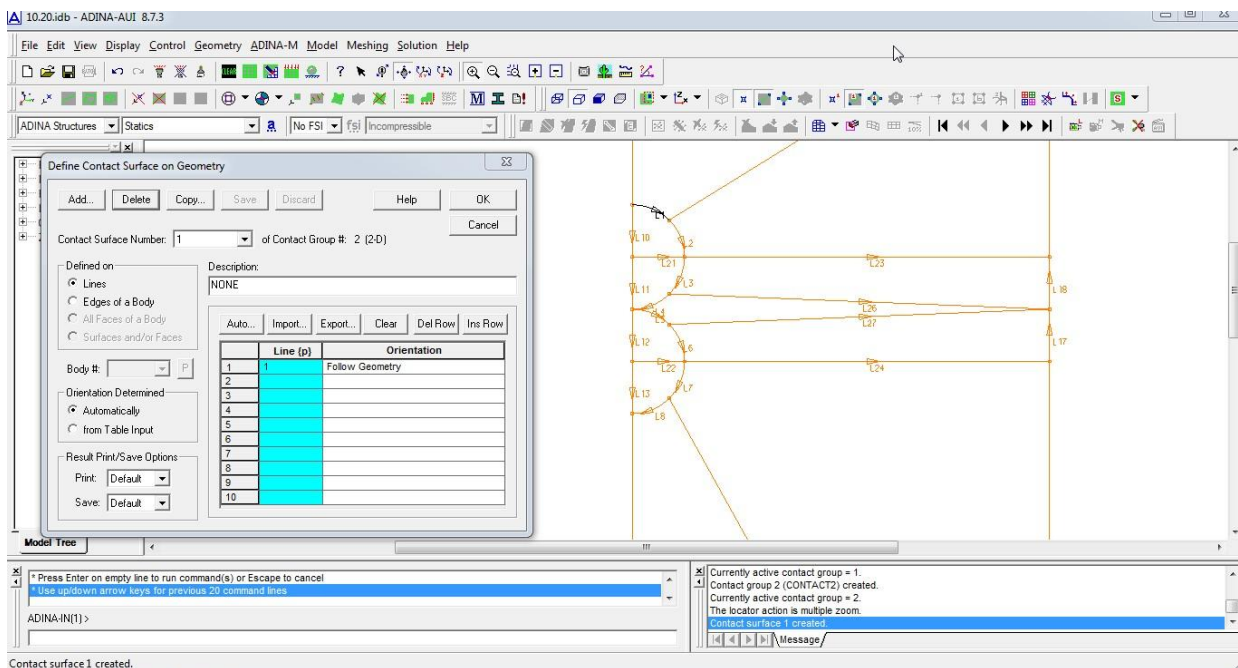


Figure A. 25

[illegible]

7- Maillage :

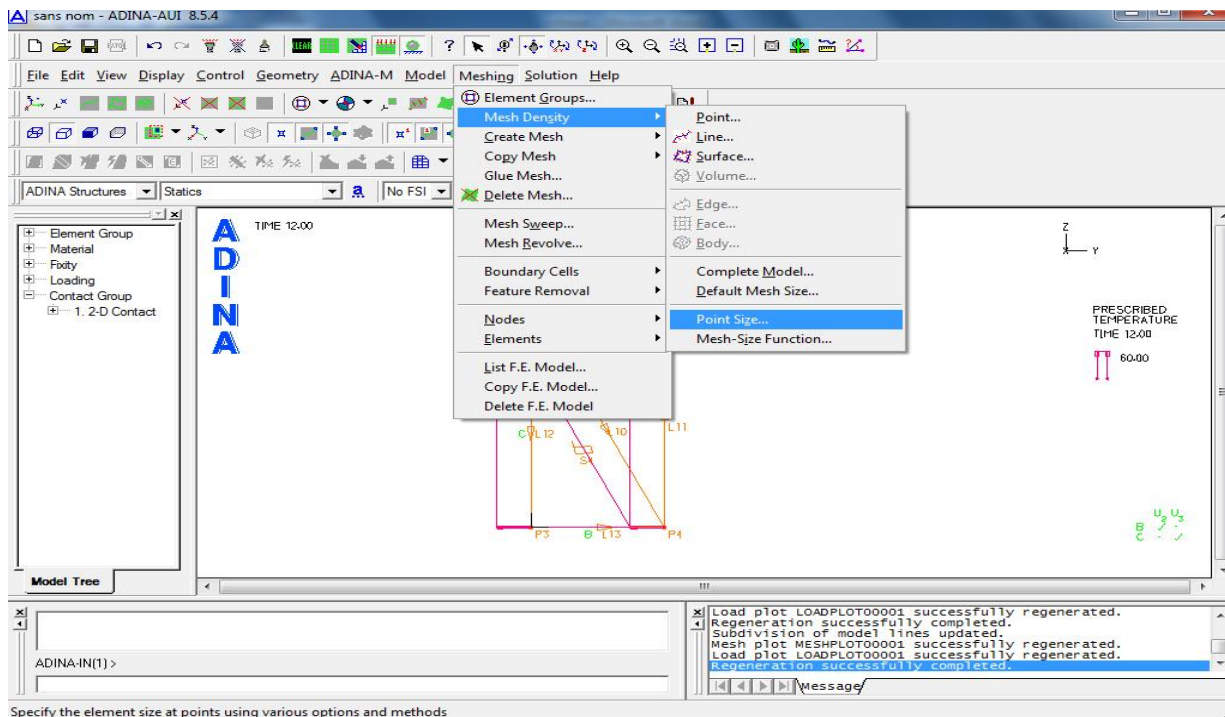


Figure A. 28

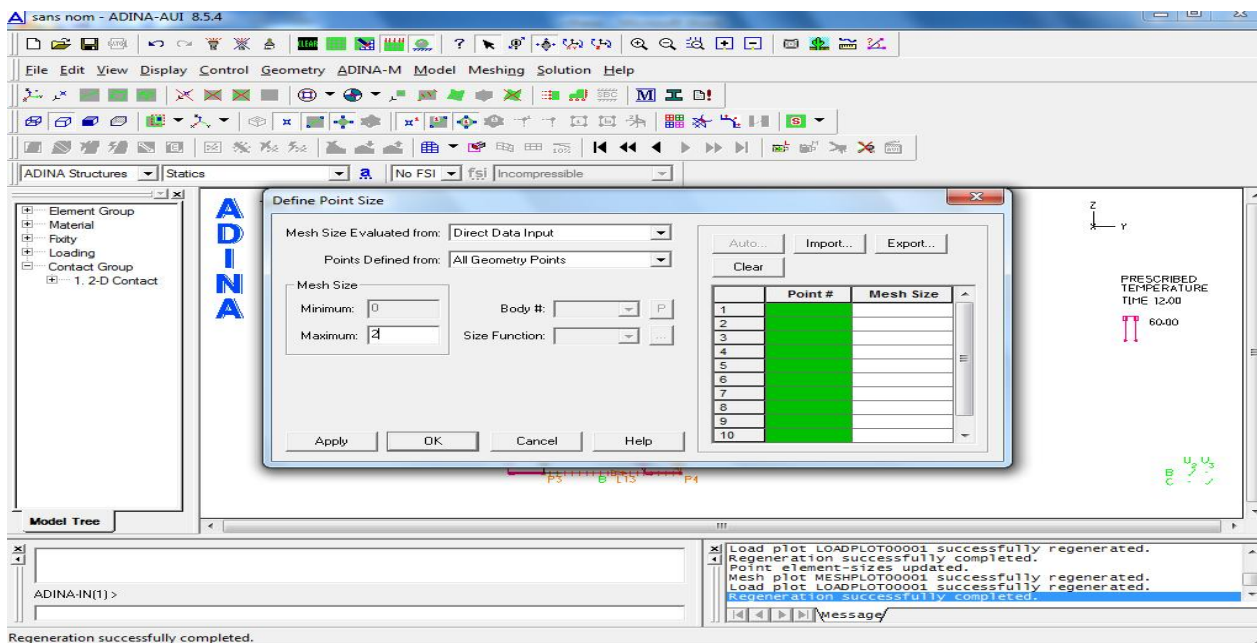


Figure A. 29

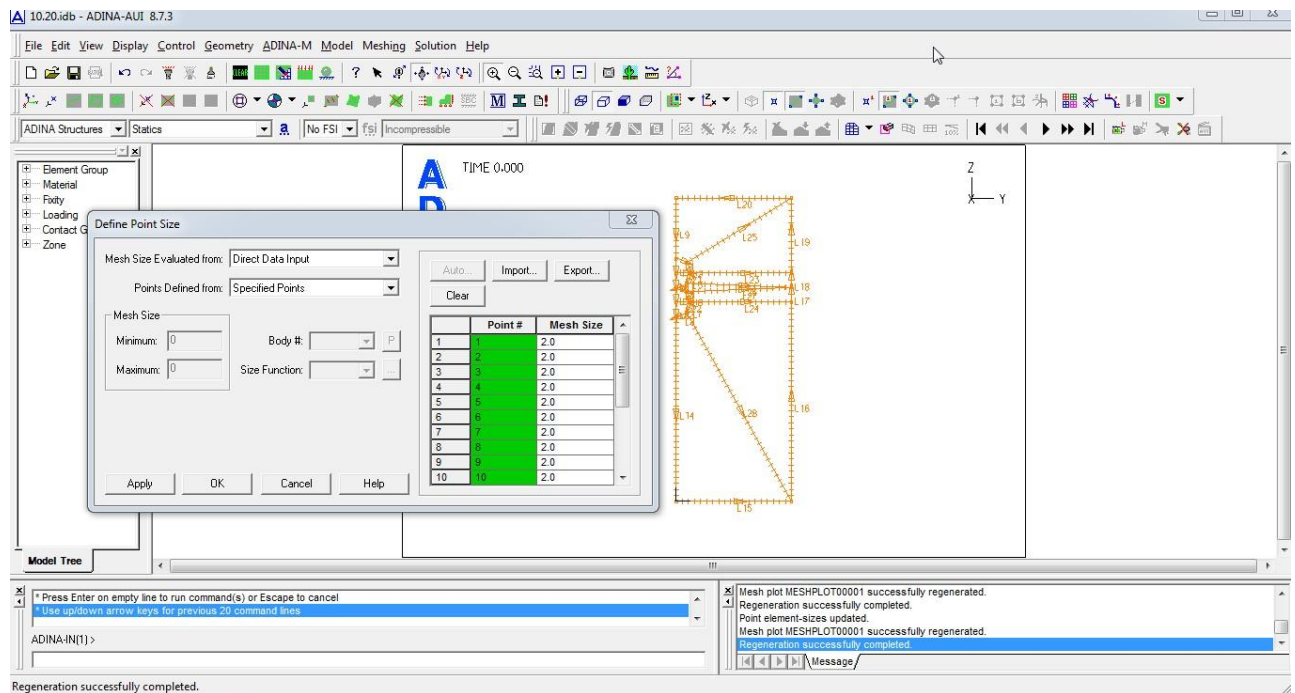


Figure A. 30

Cliquer sur 'Mesh Surfaces icon' → vérifier que Type : 2-D Solid, Element Group : 3,4 → écrire 7,8 dans les deux premières lignes de tableau 'Surface #' → Nodes Per Element : 6, Prefem Col Shape : Triangular → cocher 'Triangular Surfaces Treated as Degenerate' → Apply. (Figure A.31)

Choisir Element Group : 2 → écrire les surfaces 1 ; 2 ; 5;6 ; 9 ; 10 ; 11 dans les 6 premières lignes de Tableau 'Surface #' → Apply (Figure A.32) → OK. (Figure A.33)

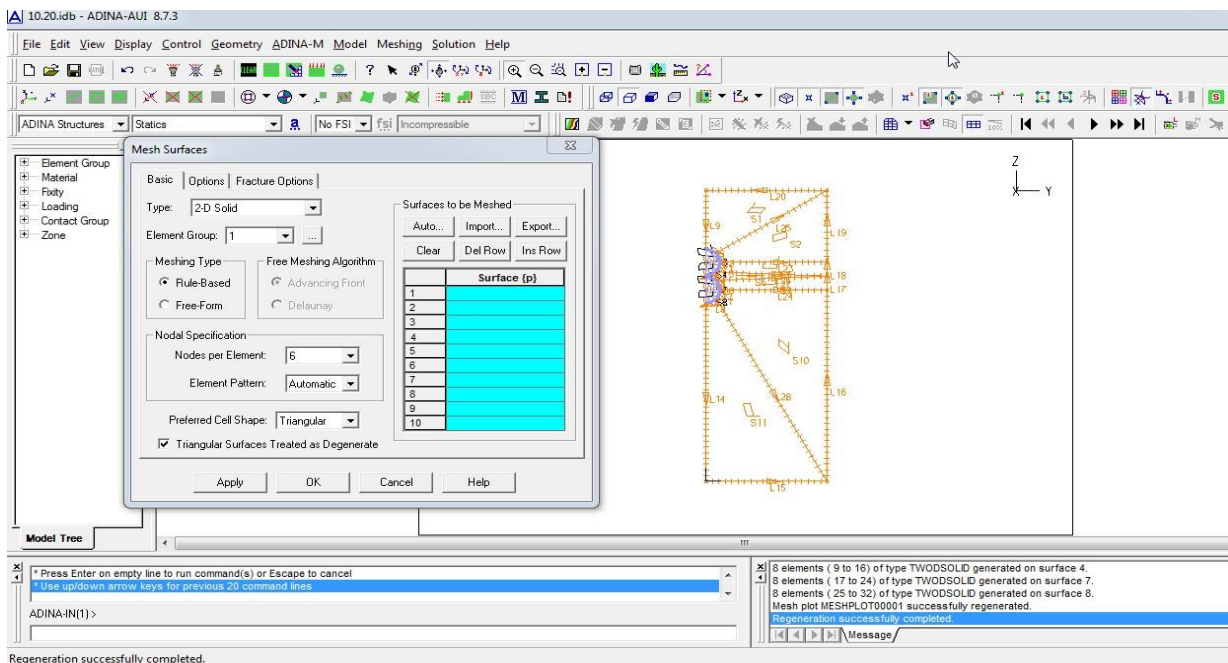


Figure A. 31

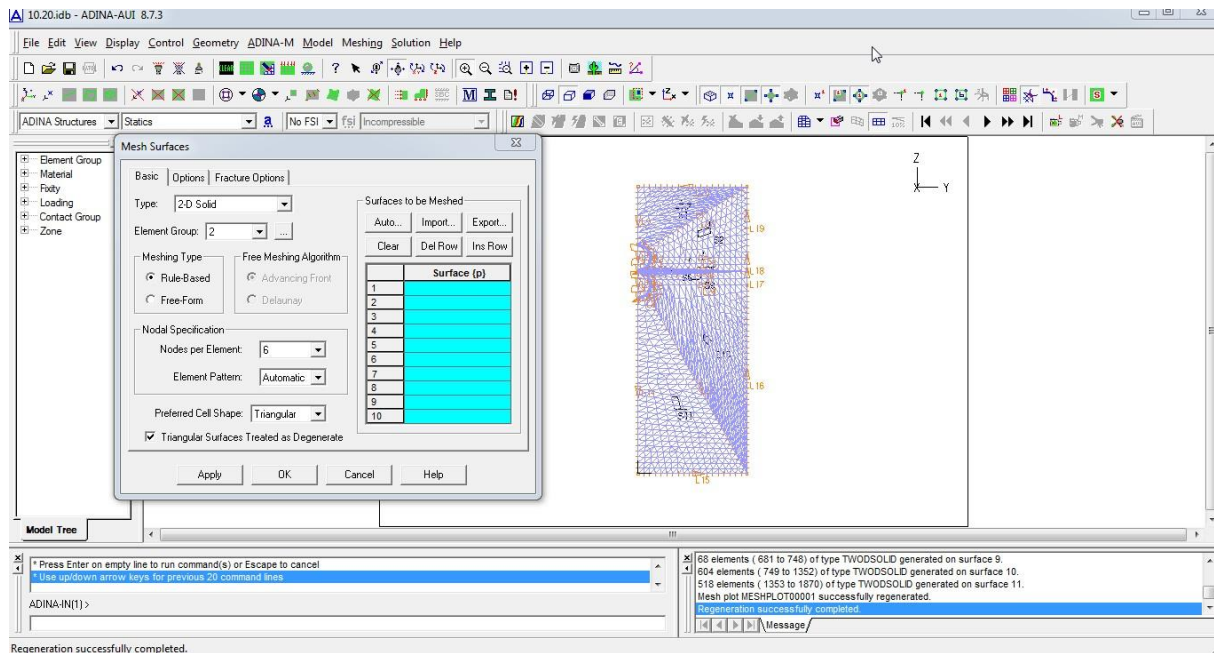


Figure A. 32

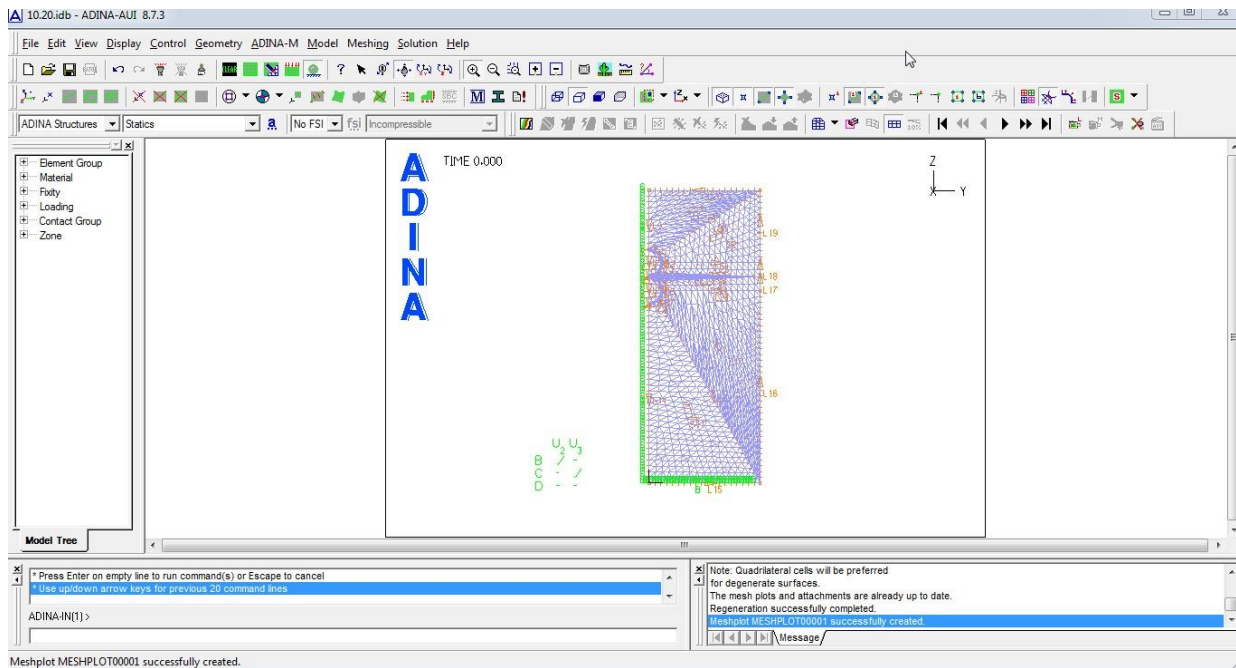


Figure A. 33

8- Exécution et calcul

Cliquer sur 'Save icon'  → vérifier que Type : 'ADINA-IN Database Files (*.ldb)', Nom du fichier : P.#10.20 → Enregistrer. (Figure A.34)

Cliquer sur 'Data File/Solution icon'  → Type : 'ADINA-IN Database Files (*.dat)', choisir Nom du fichier : P.#10.20 → Enregistrer. (Figure A.35)

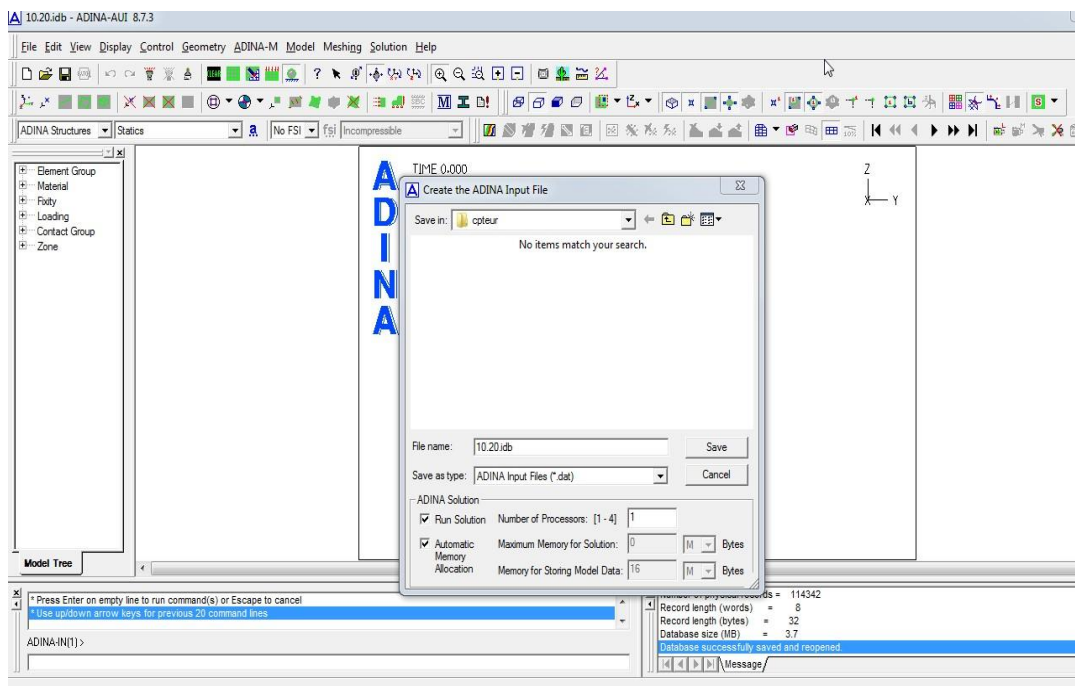
Quand ADINA est terminé, cliquer sur 'Close' pour fermer les fenêtres de graphique.

Choisir Post-Processing → 'Do you really want to discard all changes and continue': Oui (Figure A.36).

Cliquer sur 'Open icon'  → choisir Type : ADINA-IN Database Files (*.ldb), Nom du fichier : P.#10.20 (Figure A.37) → Ouvrir. (Figure A.40)

Cliquer sur 'Open icon'  → Type : ADINA/-T/-F Porthole Files (*.Por*), Nom du fichier : P.#10.20 (Figure A.38) → Ouvrir. (Figure A.42)

Figure A. 34



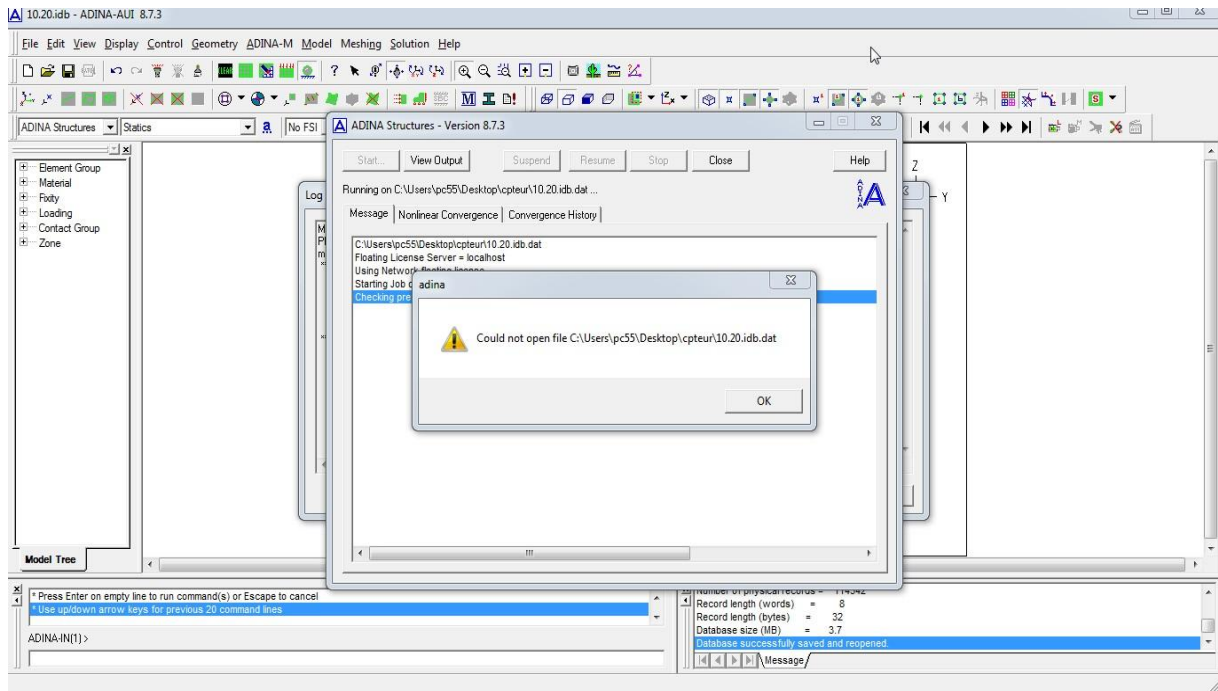


Figure A. 35

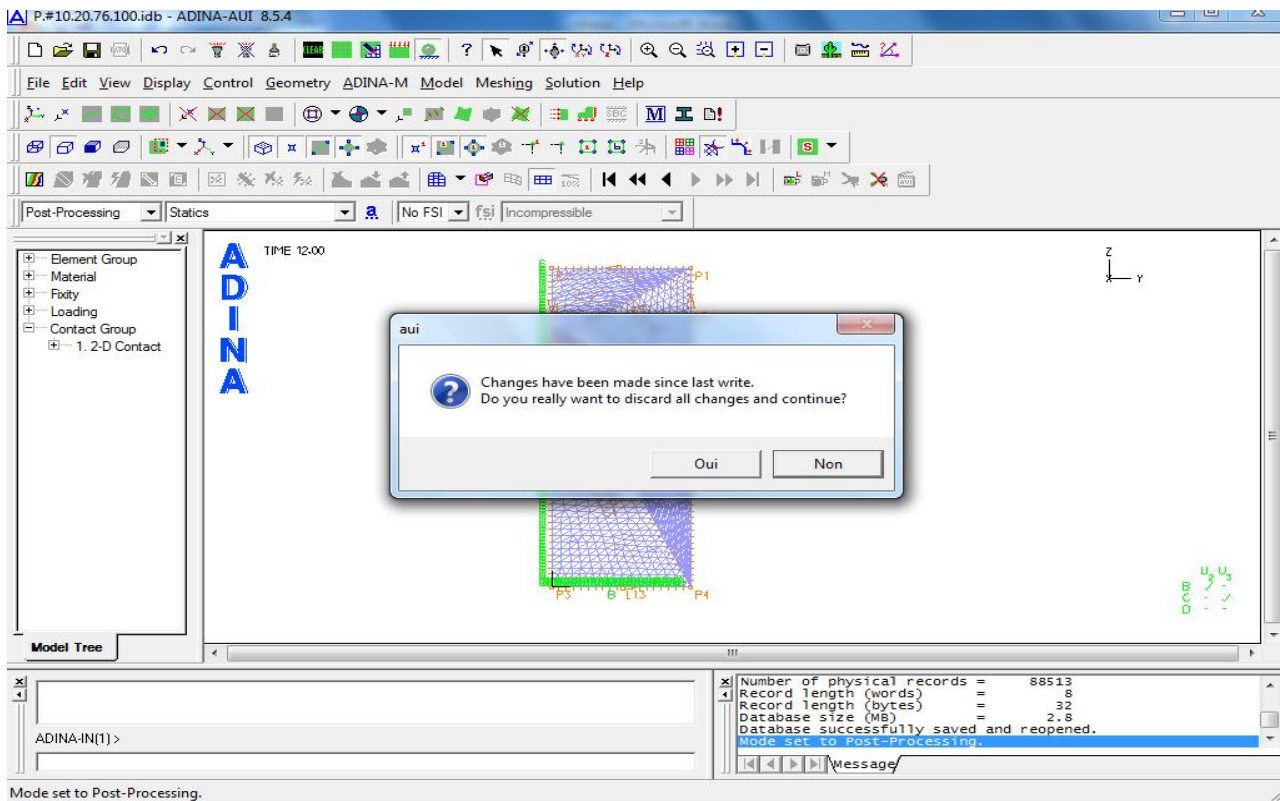


Figure A. 36

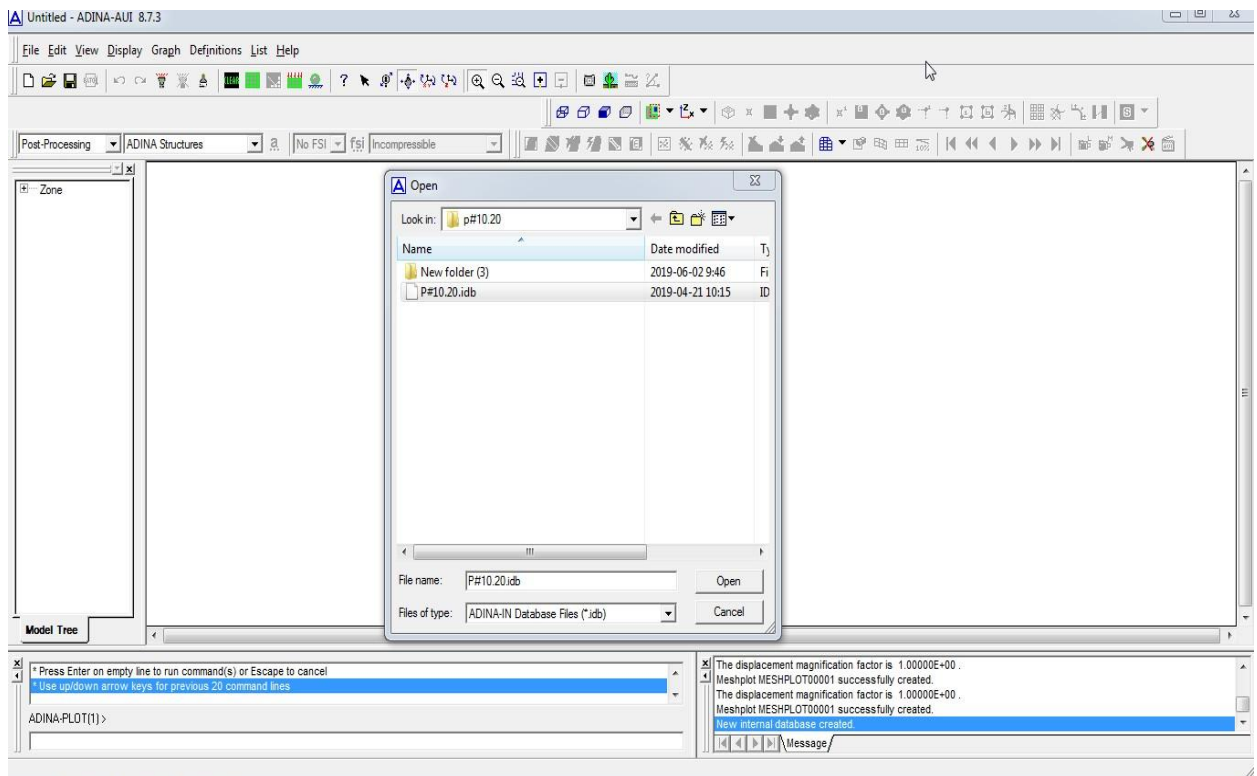


Figure A. 37

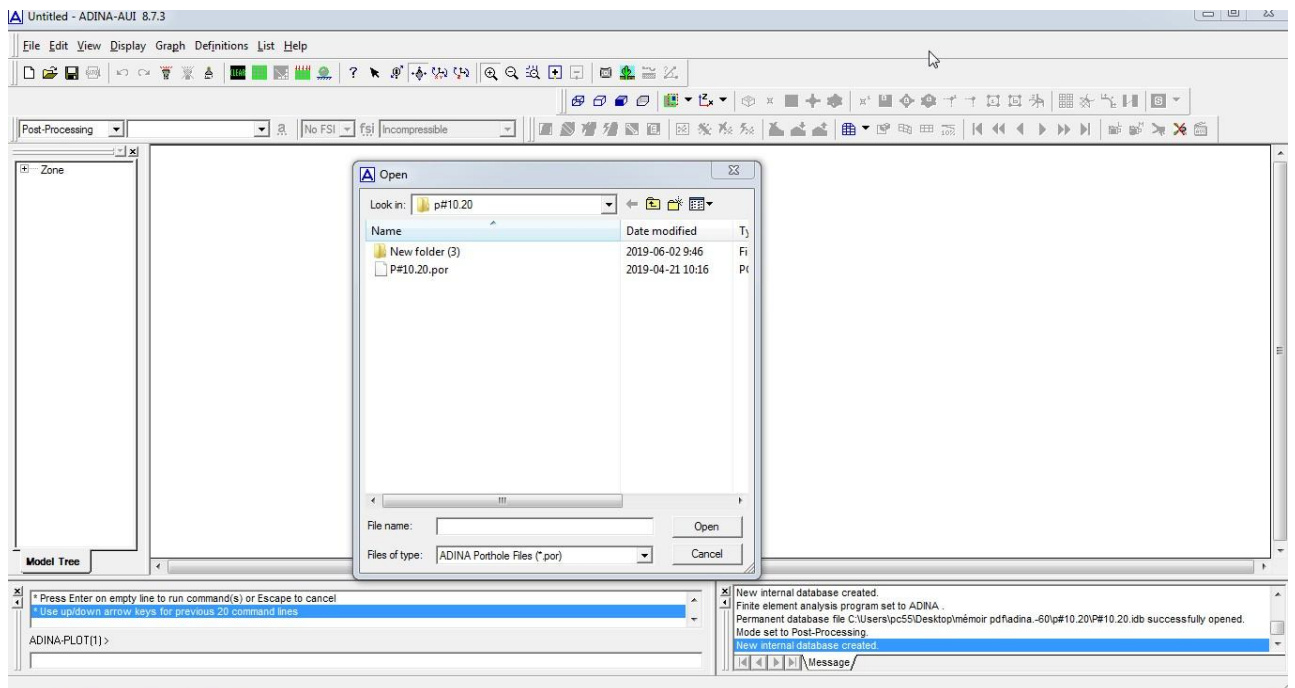


Figure A. 38

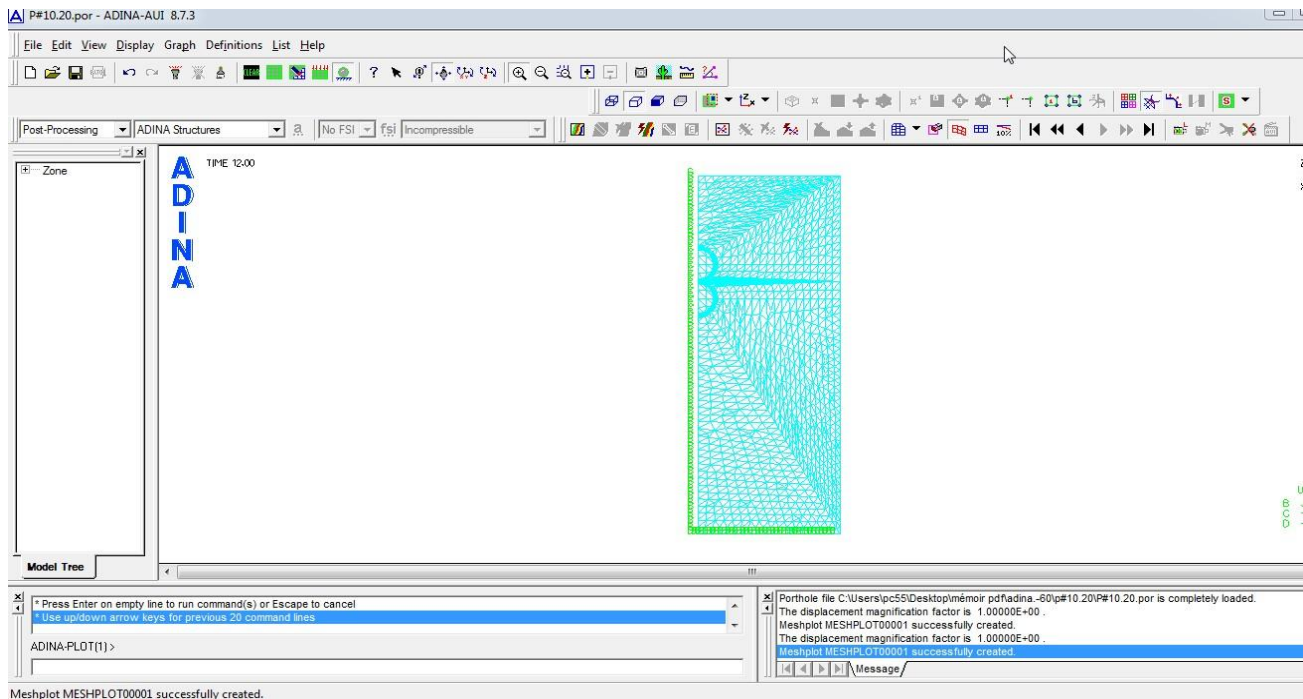


Figure A. 21

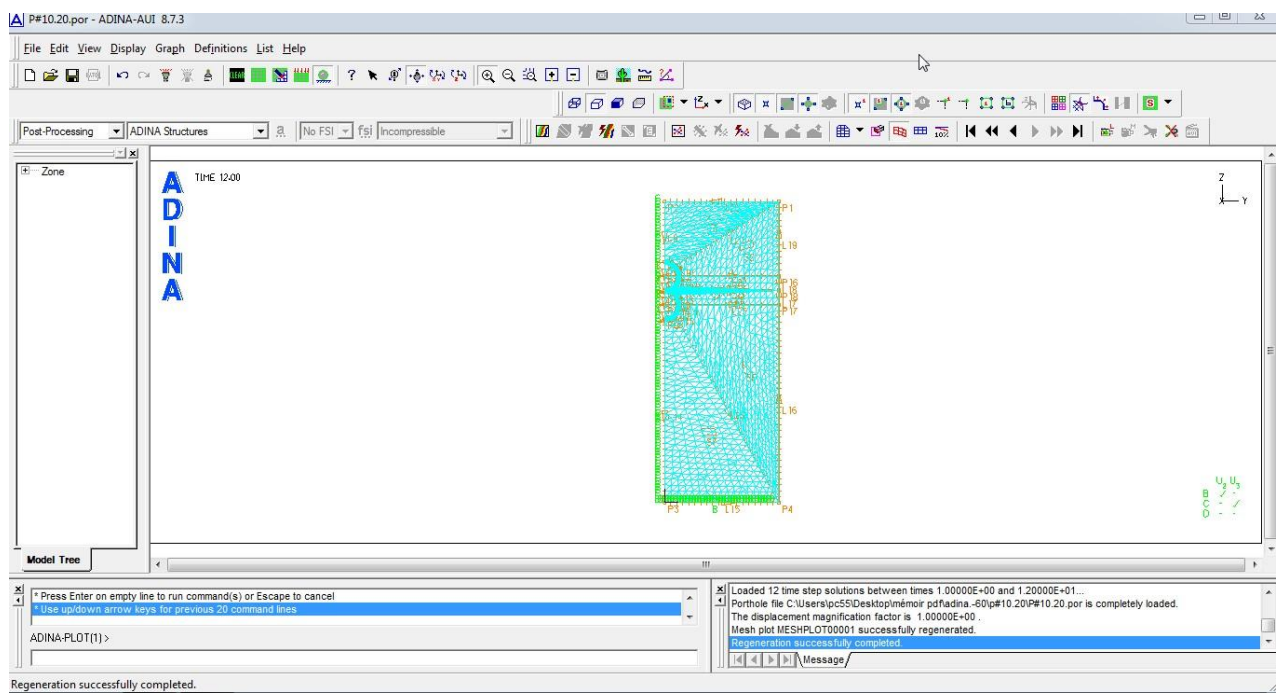


Figure A. 40

10 -Les étapes d'analyse des résultats par logiciel ADINA :

Choisir Post-processing → List → Extreme value → Zone Name : EG2(pour montrer le groupe numéro 2 'concrete') → ok (Figure A41)

Vérifier que 'List Zone Extreme Values' : → 'Zone Name' :EG2.(Figure A....)

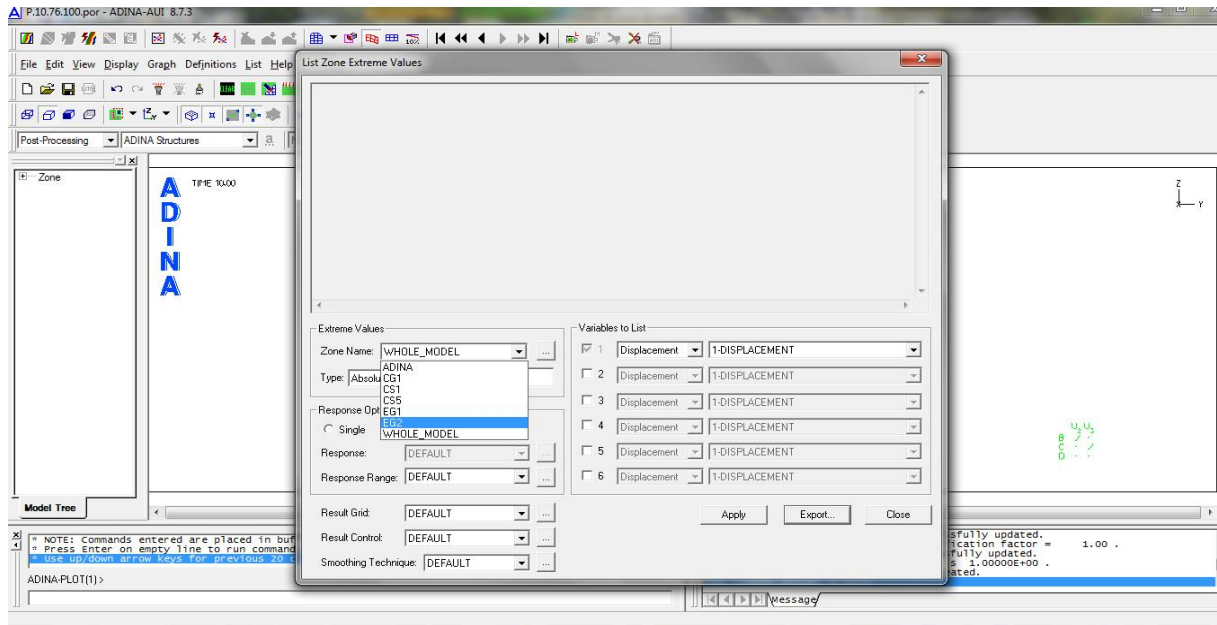
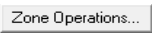


Figure A41

Zone Name → Cliquer sur le bouton 

Cliquer sur  dans la fenêtre 'Define Zone (Opération)' vérifier que 'Zone Name' EG2 .Ecrire dans la première case de tableau : 2(figure A42)

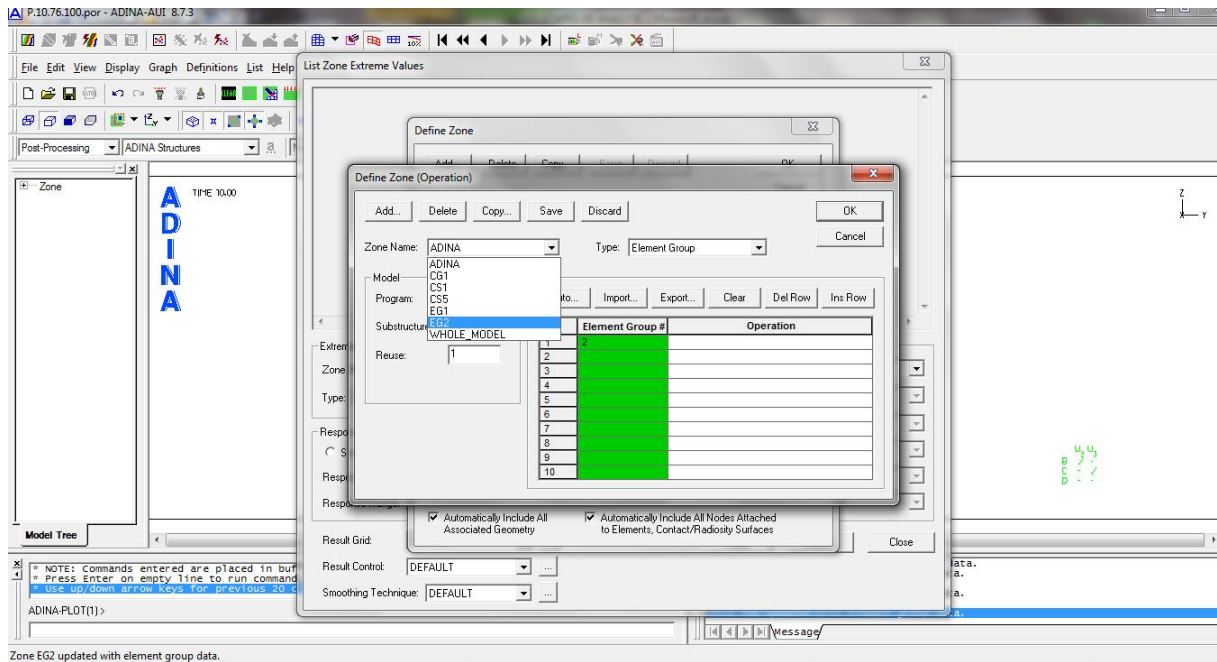


Figure A42

Cliquer sur  puis 

Vérifier que 'Objet' → 'Interface Element' (figure A43)

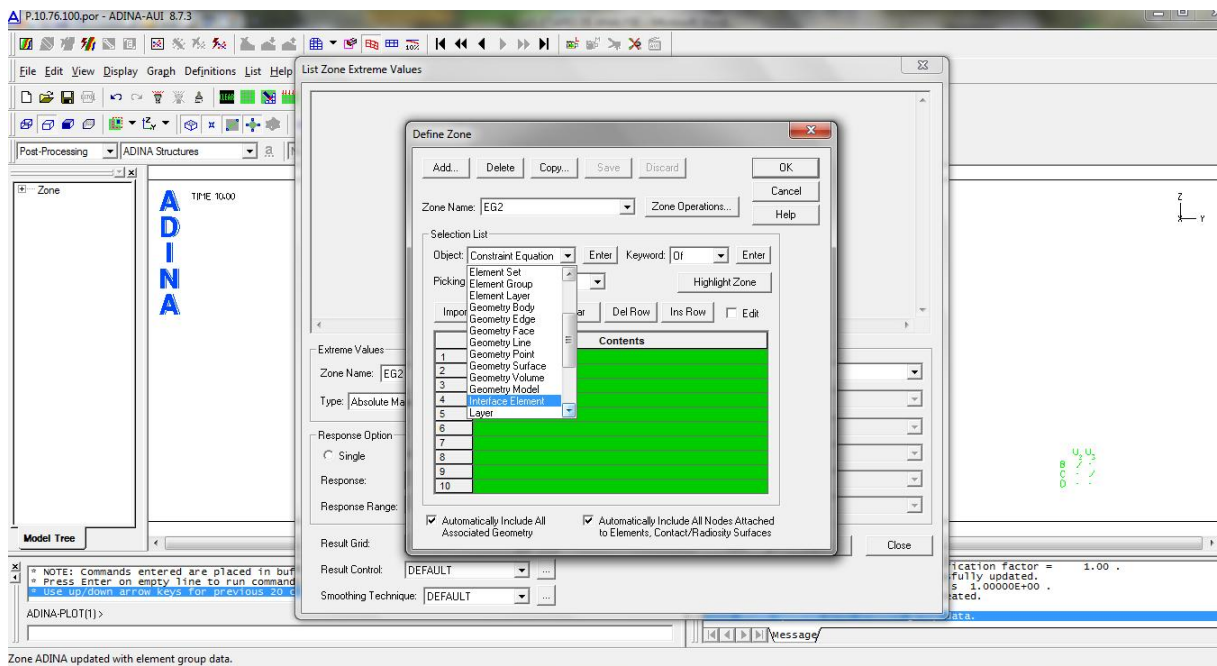


Figure A 43

Pour 'picking filter' choisir 'Element' (figure A44)

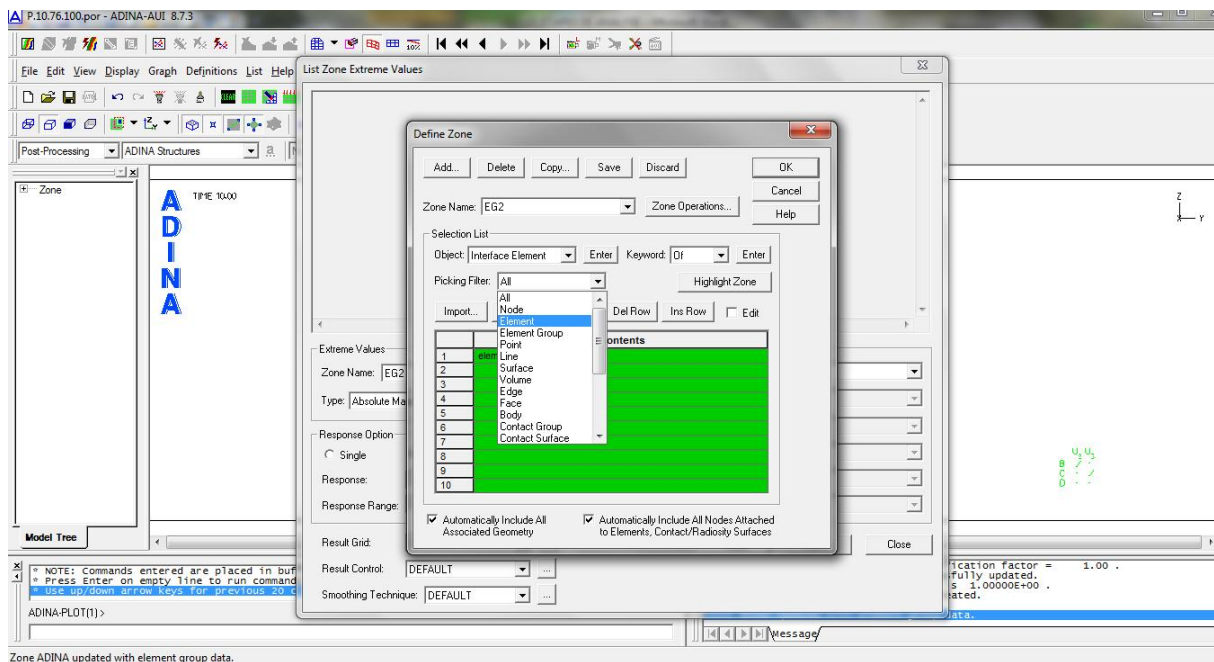
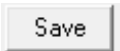
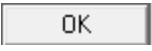


Figure A44

Cliquer sur  puis 

Pour 'Type' choisir 'Maximum' (Figure A 45)

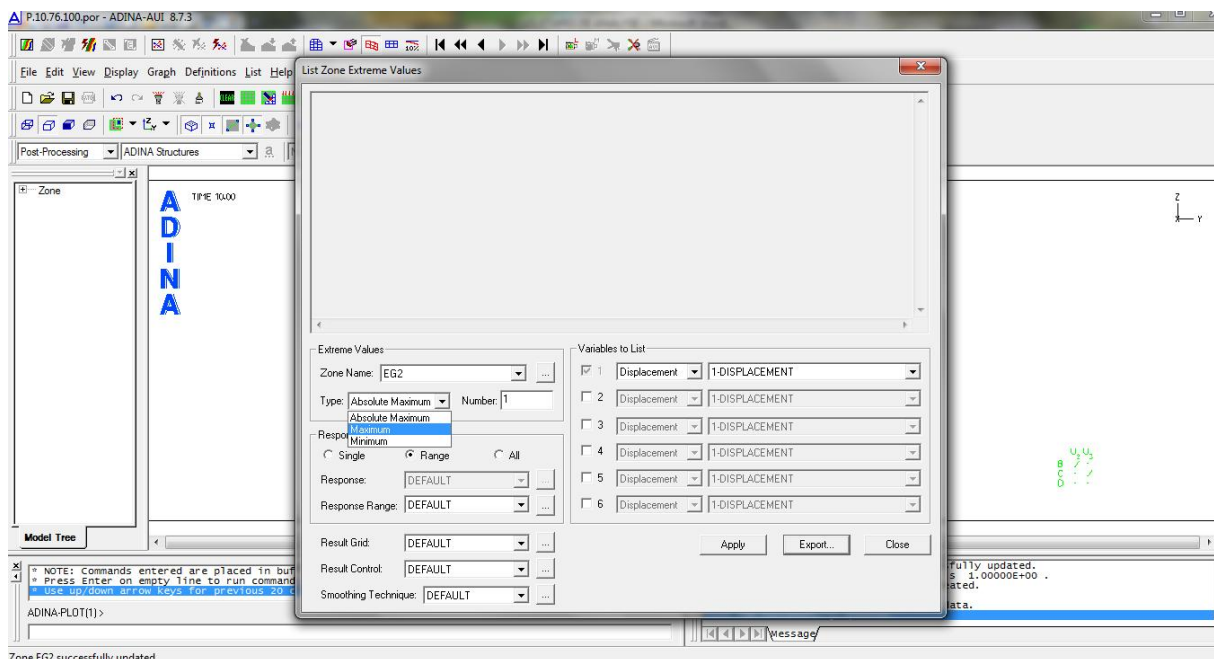


Figure A 45

Dans la fenêtre 'Variables to List' à gauche → 'Stress' (figure A 46) et à droite → 'Stress-11' (figure A 47)

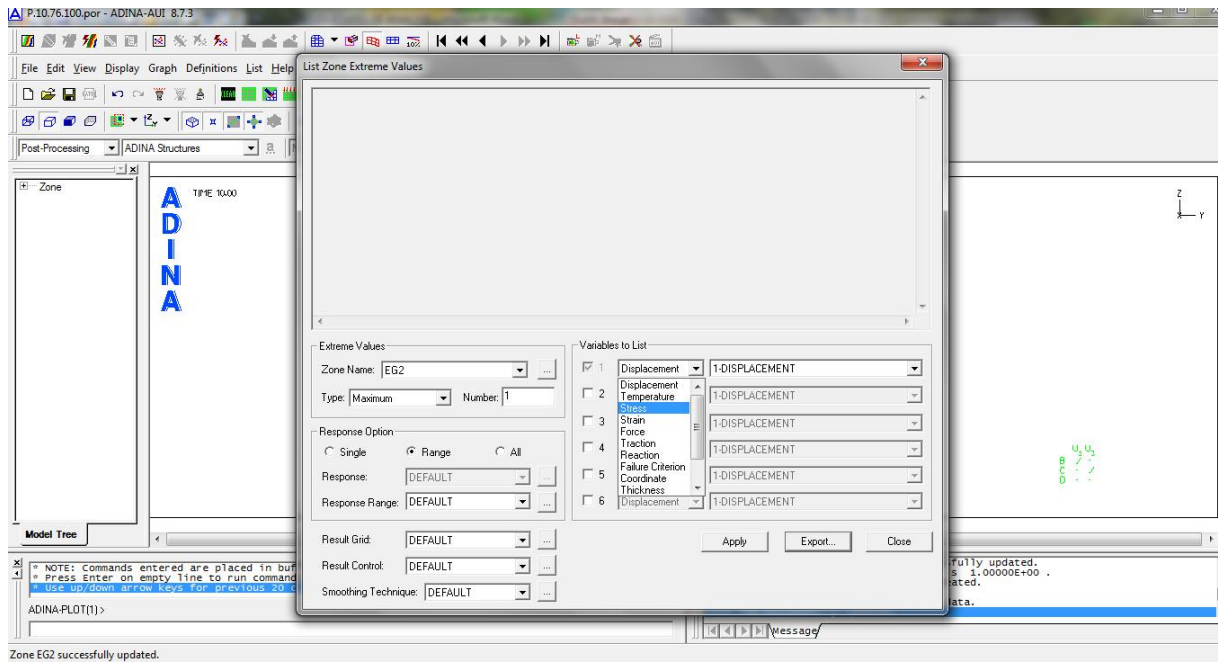


Figure A 46

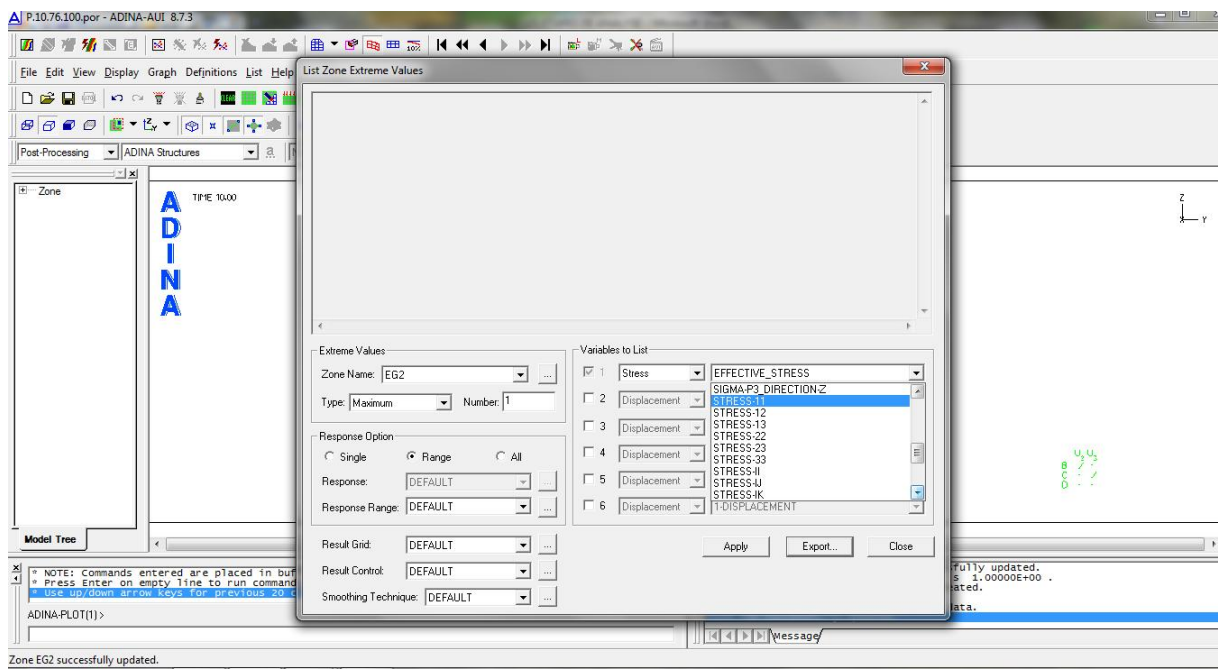


Figure A 47

Choisir 'Reponse Range' cliquer sur le bouton  (figure A 48)

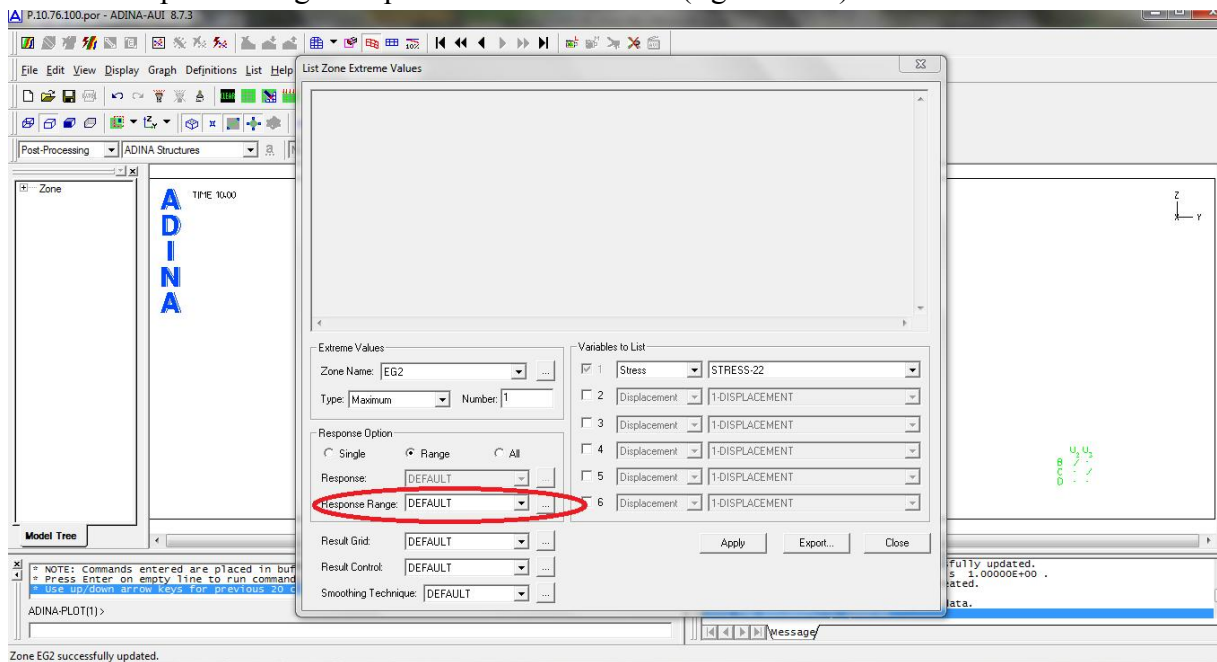


Figure A 48

Dans la nouvelle fenêtre ➡ 'Type' : 'Load Step' (figure A 49)

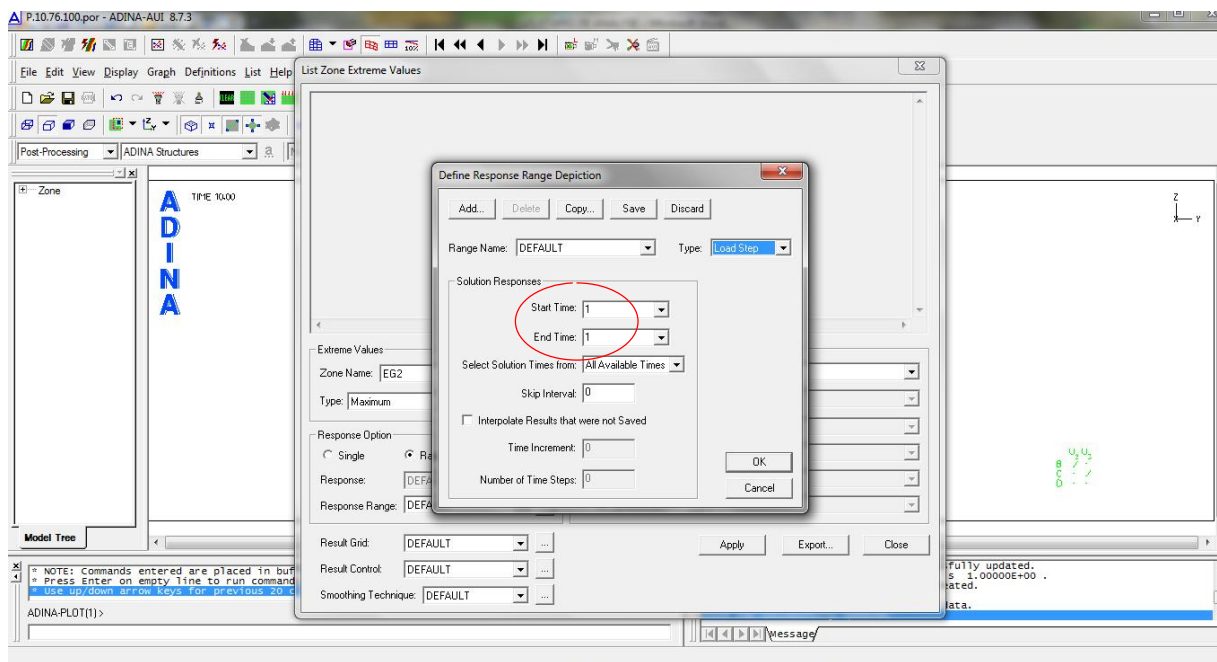


Figure A49

Mêmes démarches pour la variation de température ΔT qui augmente par incrément de -5°C .

Choisir 'Result Control' cliquer sur le bouton  (figure A50)

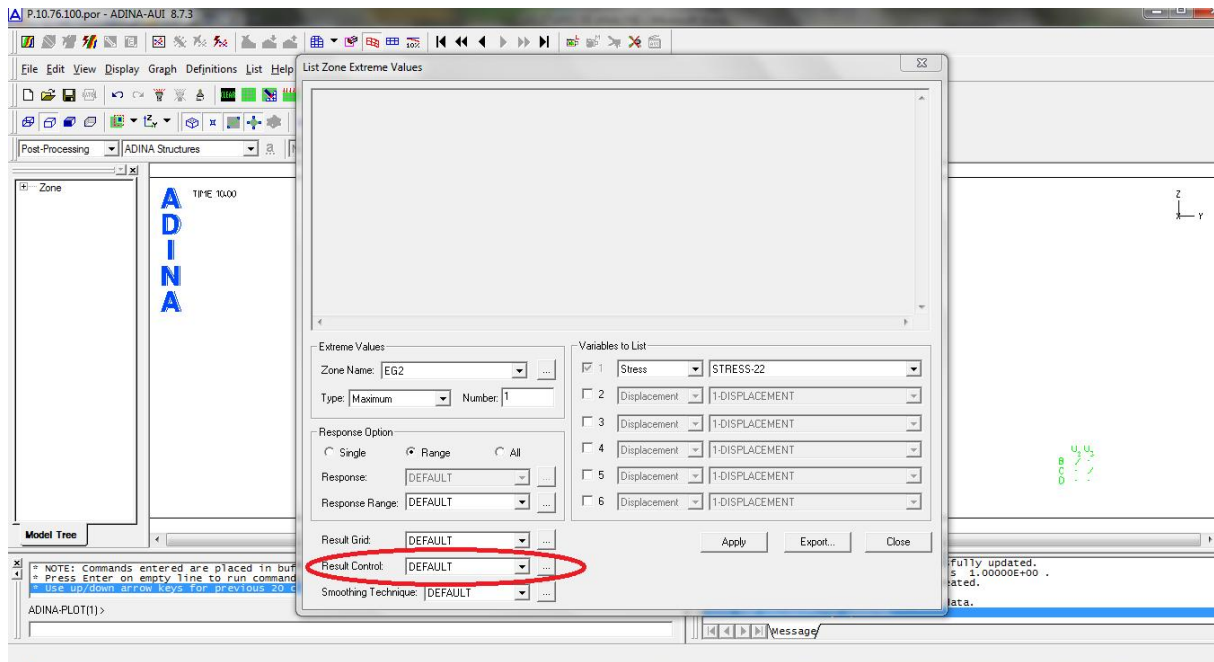


Figure A50

Dans la nouvelle fenêtre 'Coord Sys. For Transformed Stress/Strain' choisir numéro 1 (fig A00) puis cliquer sur ... (figure A 51)

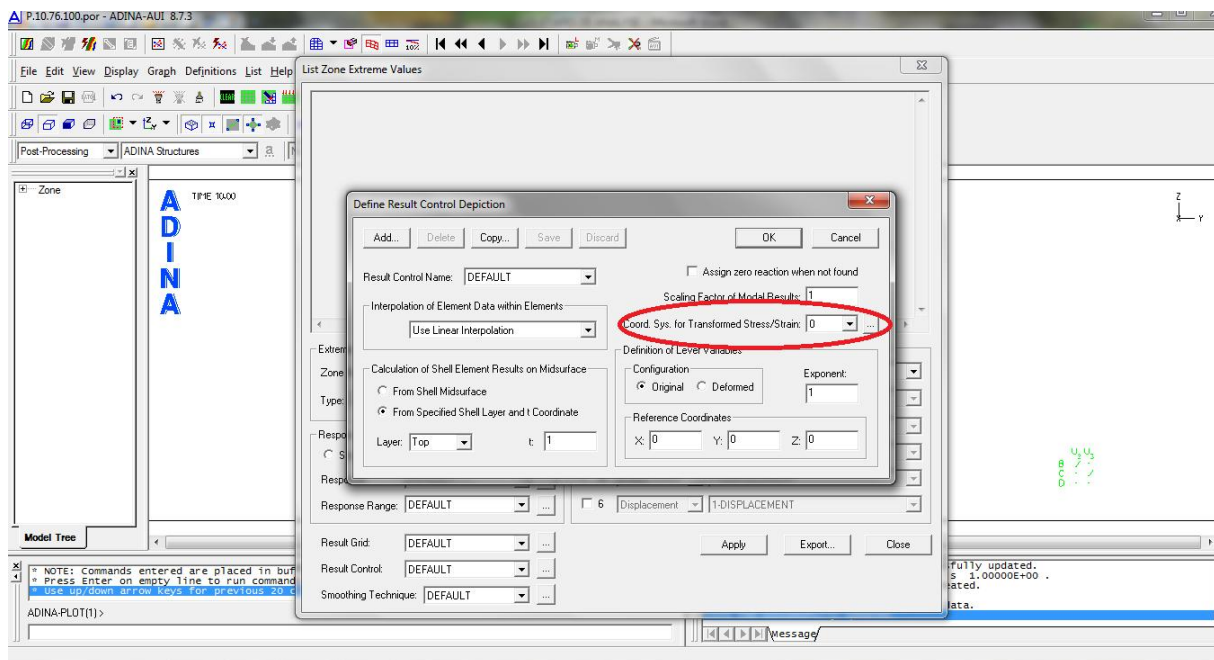
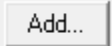


Figure A51

Maintenant cliquer sur  → vérifier que Type : 'Cylindrical' → Save → ok (figure A52)

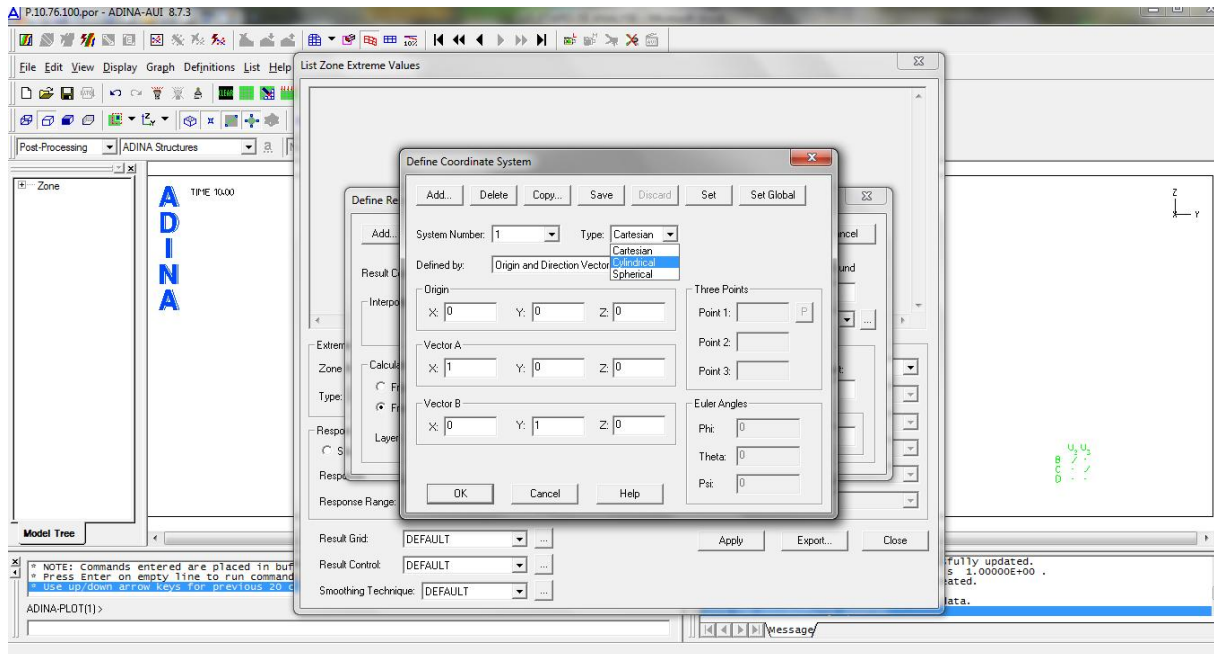


Figure A52

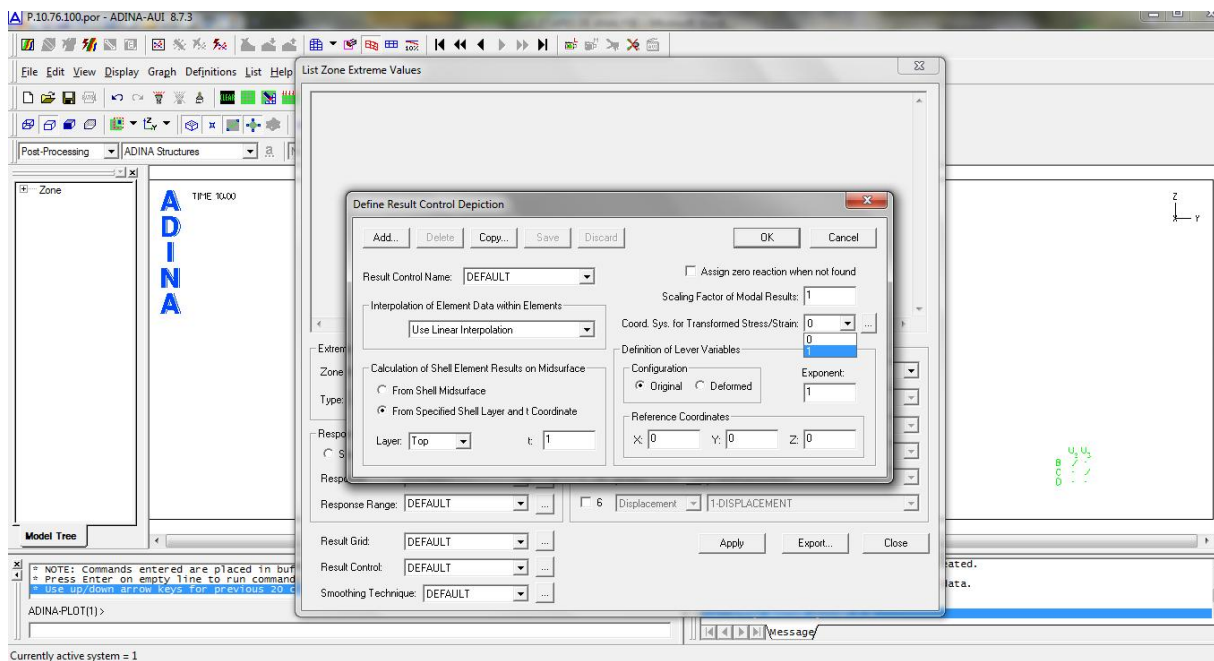


Figure A.53

Choisir 'Number':10(pour lire les dix premiers résultats maximums et ses éléments correspondants).Cliquer sur Apply (figure A54)

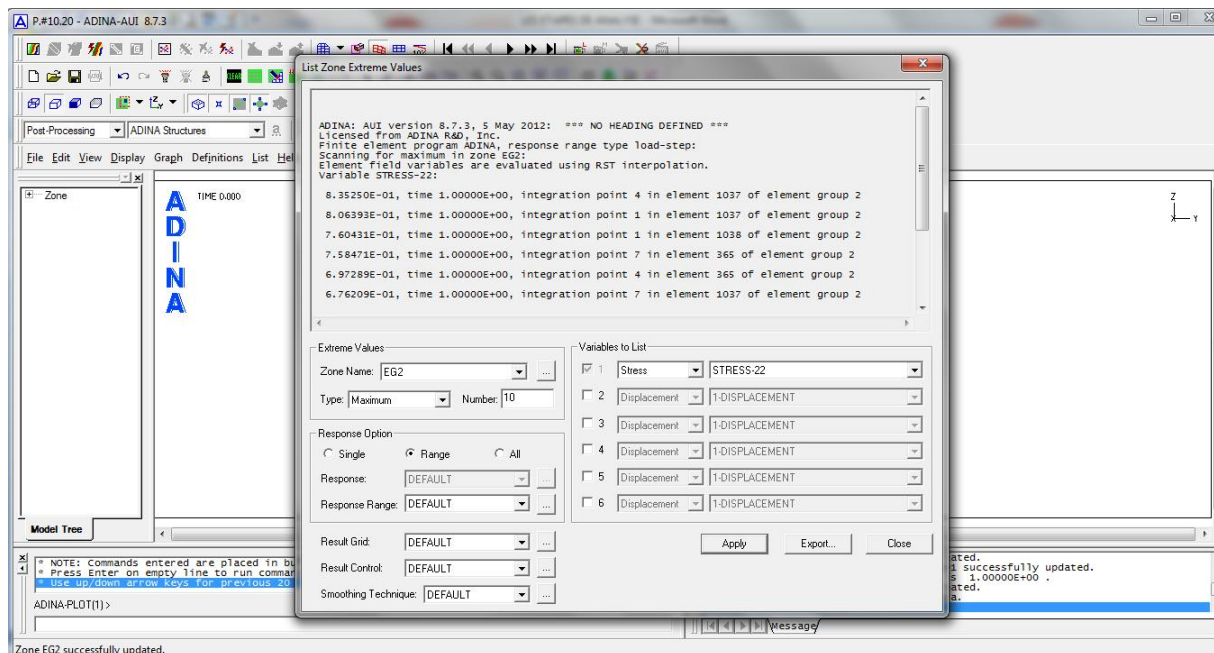


Figure .A.53

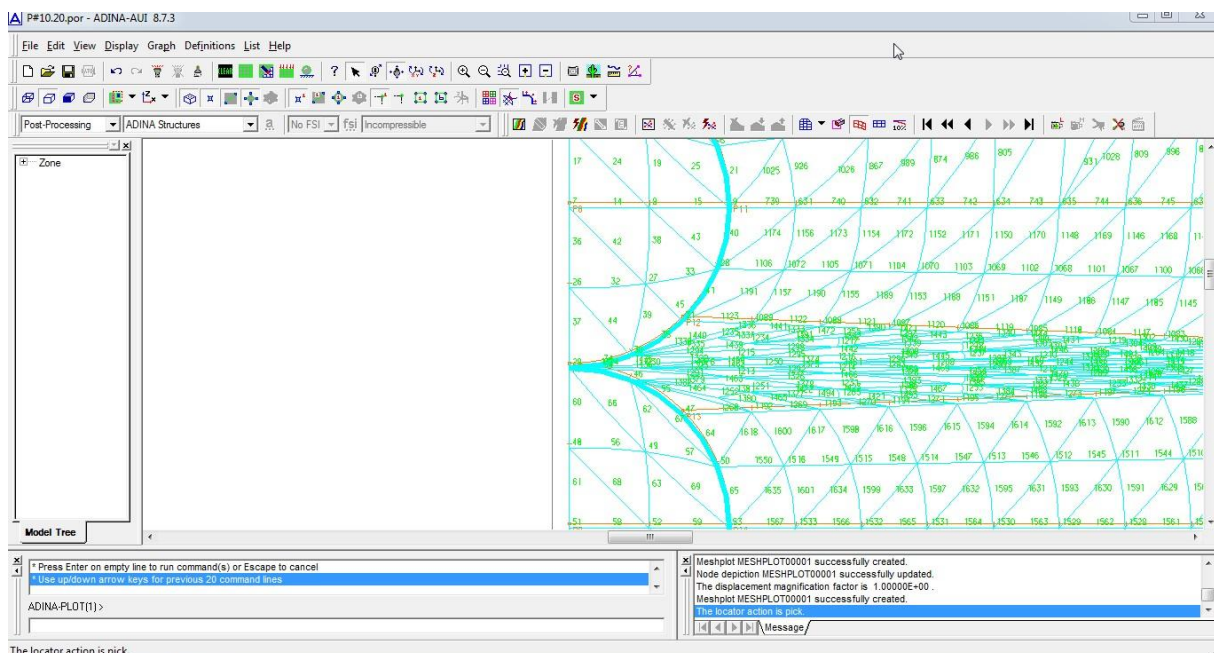


Figure A.54

Pour découvrir la variation de température critique ΔT_{cr} , la forme des fissures et la profondeur des fissures l_{cr} cliquer sur « create vector plot ».

Maintenant cliquer sur le troisième bouton [...] puis sur Add... vérifier que Type : 'Cylindrical' → Save → ok (figure A55), choisir numéro 1 → save → ok. (figure A.56)

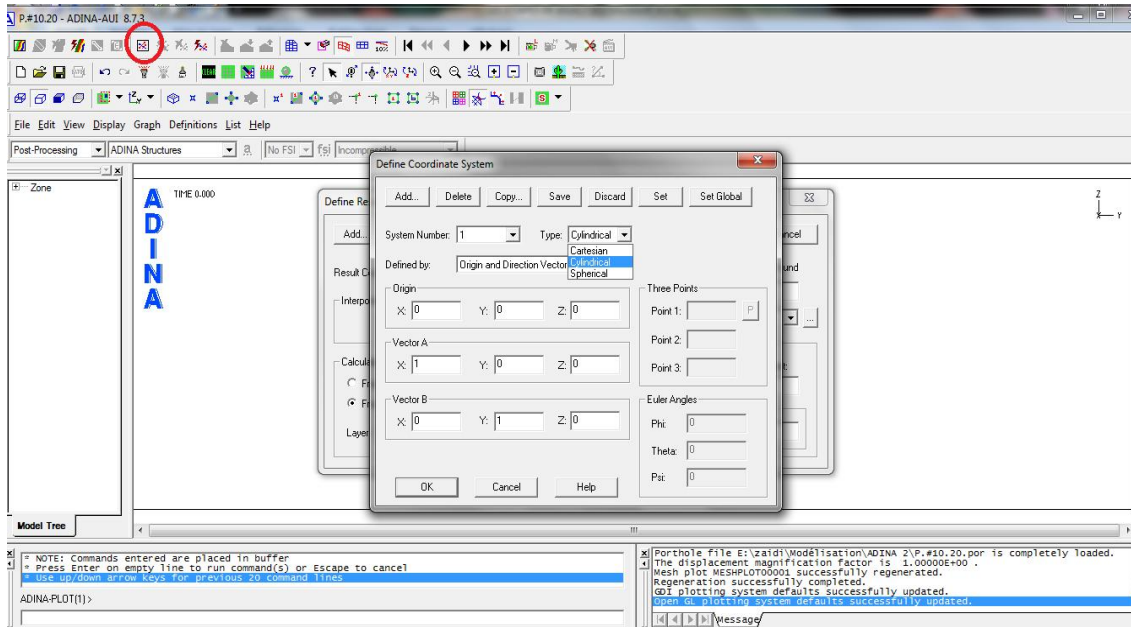


Figure A.55

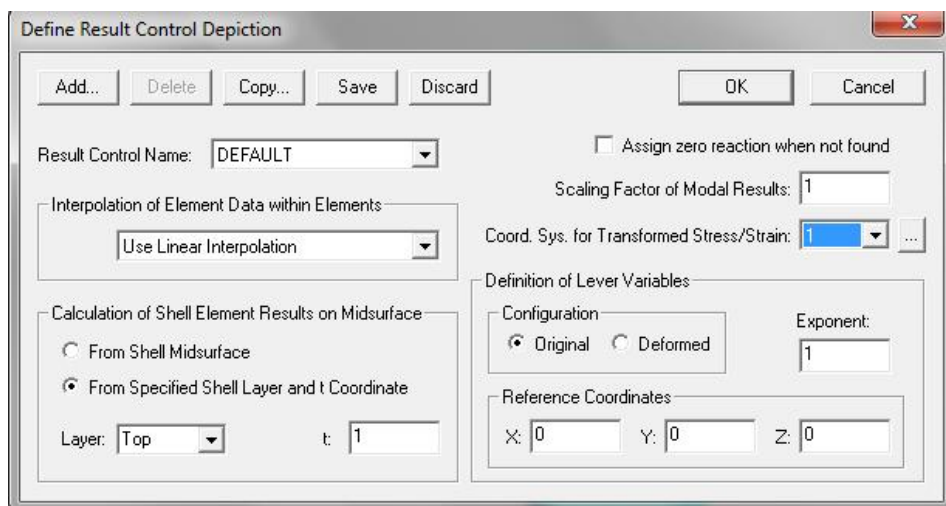


Figure A.56

Choisir « AVERAGED » puis « OPEN CRACKS » puis sur Apply (figure A.57et A.58)

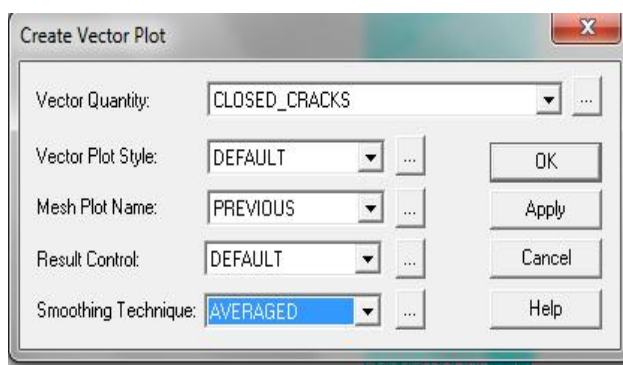


Figure A.57

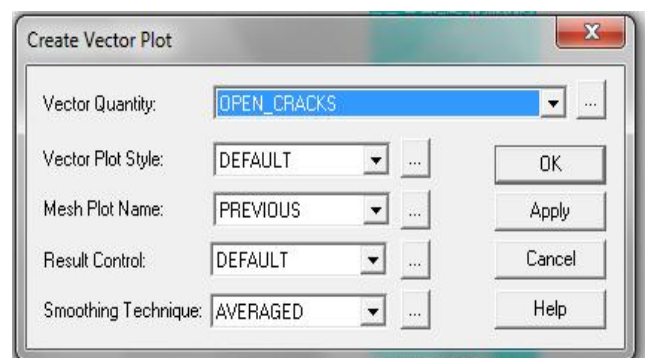


Figure A.58

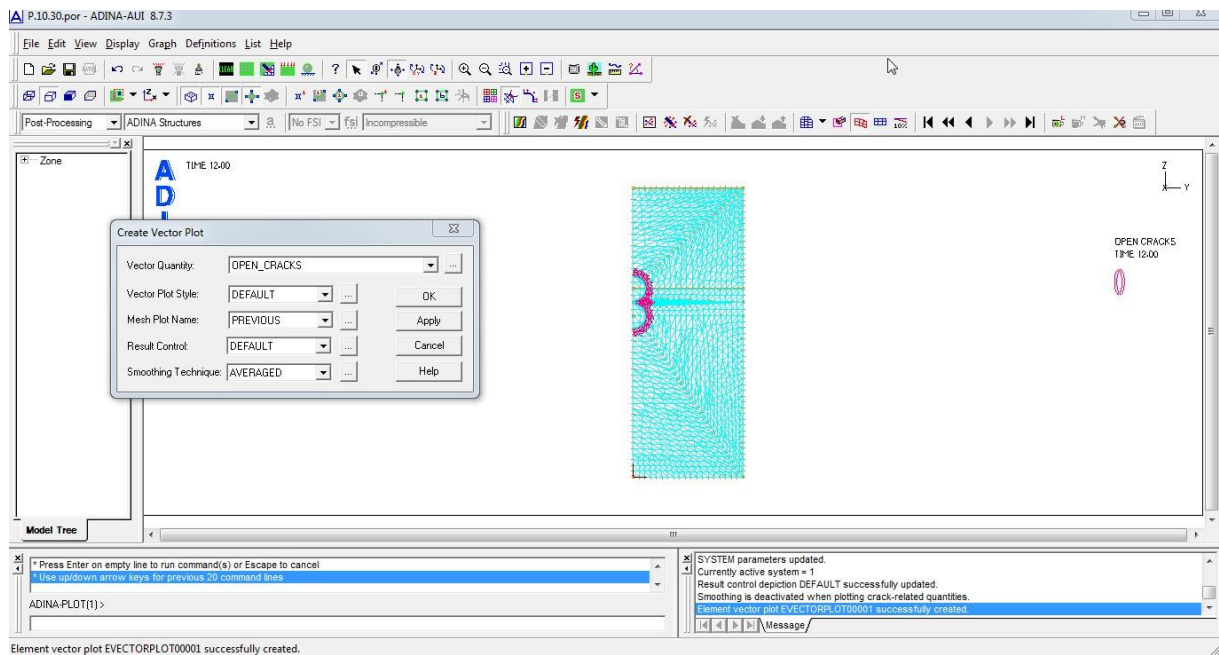


Figure A.59

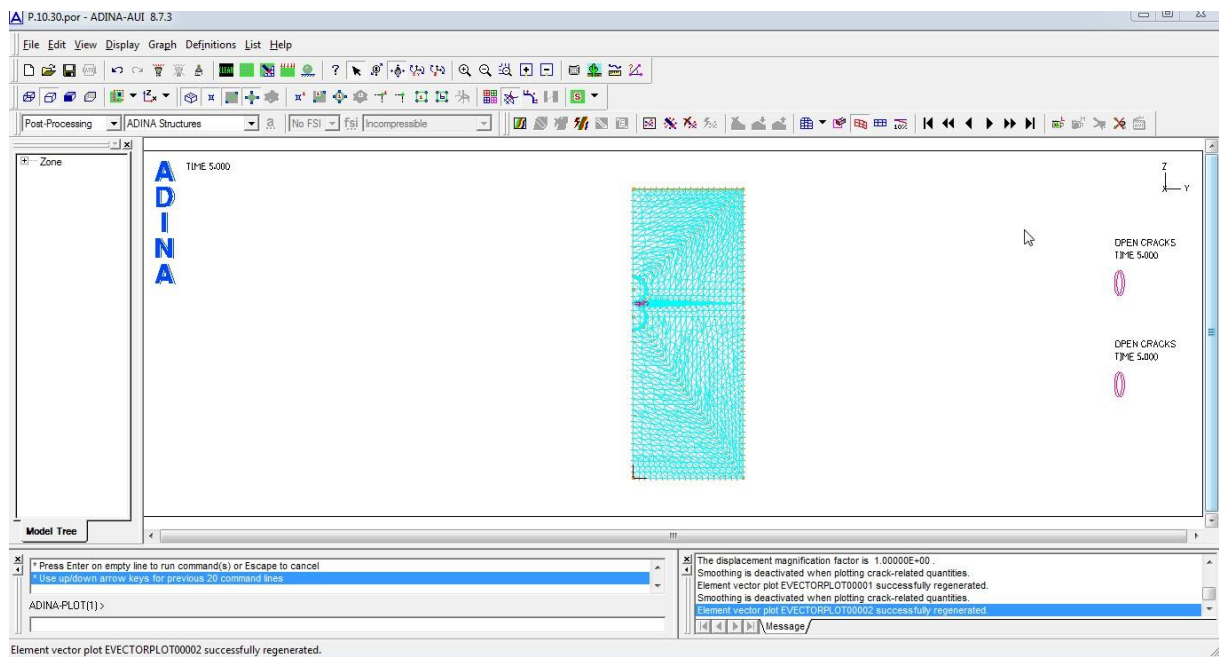


Figure A.60

RÉSUMÉ

Plusieurs structures en béton armé déficientes en raison de la corrosion de l'armature en acier, nécessitent des réparations dont le coût peut être estimé à des milliards de dinars. De nombreuses recherches ont été réalisées afin substituer l'acier par un matériau résistant à la corrosion tel les matériaux composites de polymères renforcés de fibres (PRF). Ces matériaux composites se caractérisent par une grande immunité contre la corrosion, légers et de haute résistance, une longue durée de vie et une mise en place aisée. Néanmoins, l'incompatibilité thermique transversale entre le béton et les barres d'armatures en PRF peut engendrer des fissures de traction dans le béton sous basse température.

Pour cela , nous avons utilisé le logiciel d'analyse non linéaire des phénomènes physiques (ADINA) basé sur la méthode des éléments finis afin d'effectuer une étude du comportement thermique de l'effet de chevauchement vertical de deux barres en PRFV ancrées dans le béton sur les déformations transversales et les contraintes radiales des poutres prismatiques en béton armé sous basses températures. Ces déformations et contraintes permettent d'évaluer la variation de température (ΔT_{cr}) produisant la première fissure dans le béton à l'interface armature/béton et à l'interface des deux barres/béton en fonction du rapport d'épaisseur d'enrobage du béton au diamètre de la barre en PRF (c/d_b).

Mots clés : Basses Températures, barres, PRF, déformations, contraintes, enrobage du béton, chevauchement, fissuration.

ملخص

الكثير من هياكل الخرسانة المسلحة تضعف بسبب تآكل القضبان الفولاذية و هذا ما يستدعي إصلاحات قد تكلف ملايين الدينارات. ولكن جل البحوث التي أجريت تهدف لإستبدال هذه القضبان الفولاذية بمادة مقاومة للتآكل، كالمواد المركبة من البوليمير المدعم بالألياف (PRF)، هذه الأخيرة تتميز بمقاومة عالية للتآكل، خفيفة، مدة حياة أطول وسهولة الإستعمال. غير أن عدم التكافؤ الحراري العرضي بين الخرسانة وقضبان البوليمير (PRF) قد تسبب تشققات الشد عند التعرض لدرجة حرارة منخفضة، وهذا من المحتمل أن يؤدي إلى تصدع كلي للخرسانة المحيطة بالقضبان. وهذه الدراسة تظهر بعض الآثار الناجمة عن نقصان درجة الحرارة في الخرسانة المدعمة بقضبان PRF و لهذا استخدمنا التحليل الغير خطي للظواهر الفيزيائية البرنامج (ADINA) المعتمد على العناصر المحددة لإجراء هذا البحث حول التأثير الحراري المنخفض على قضبان PRF المترددة في الخرسانة وهذه الدراسة تتمثل في دراسة الإجهاد و التشققات التي تحدث في الخرسانة وكذلك بتقدير التغير في درجة الحرارة الذي ينجم عنه بداية التشقق (ΔT_{cr}).

الكلمات الرئيسية: درجة الحرارة المنخفضة، القضبان، بوليمير مدعم بالألياف PRF، التشوهات، الإجهاد، الغطاء الخرساني، ترادف القضبان، التشقق

Abstract

Several deficient structures in reinforced concrete due to corrosion of the steel reinforcement need repairs whose cost can be estimated to billions of dinars. Lot of research was carried out to substitute the steel by a material resistant to corrosion such as fibres reinforced polymer (FRP) composites. These composite materials are characterized by high immunity to corrosion, lightweight and high strength, long service life and easy installation. Nevertheless, the transverse thermal incompatibility between concrete and FRP reinforcing bars can cause tensile cracks in concrete at low temperatures.

For this reason, we used the nonlinear physical phenomena analysis software (ADINA) based on the finite element method to perform a study of the thermal behavior of the vertical overlap effect of two FRP bars anchored in concrete. On the transversal deformations and the tensile radial stresses of the prismatic beams in reinforced concrete under low temperatures. These strains and stresses make it possible to evaluate the temperature variation (ΔT_{cr}) producing the first crack in the concrete at the reinforcement / concrete interface and at the interface of the two bars / concrete as a function of the ratio concrete cover thickness to FRP bar diameter (c/d_b).

Key words: Low temperatures, bars, PRF, strains, stresses, concrete cover, overlap, cracking.

Introduction générale

Chapitre 1:

Revue de littérature

Chapitre 2 : Présentation de la méthode des éléments finis

Chapitre 3 :

Modèle numérique

Chapitre 4 :

Modèle analytique

Chapitre 5 :

Comparaisons des

résultats analytiques et

numériques

Conclusions

Recommendations

Bibliographies

Annexes
