الجمهورية الجزائرية الشعبية الديموقراطية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي الأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كـلـيـــــةالـعـلـــــوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de MASTER

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Analyse Mathématique

Par: OBADA Kheira

THEME

Opérateurs d'intégral singulière sur L^2.

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

***Mr.* MOKHTARI Abdelkader**	***Pr***	***Président***
***Mr.* ALLAOUI Salah Eddine**	***Pr***	***Examinateur***
***Mr. BOUGATAIA* Amar**	***M.A.B***	***Examinateur***
***Mr.* YAGOUB Ameur**	***M.C.B***	***Encadreur***

.

Année Universitaire 2019/2018

Remerciements

Je remercie Allah le tout puissant de m'avoir donné le courage, la volonté et la patience de mener à terme ce présent travail.

*Je tiens tout d'abord à exprimer mes sincères remerciements à mon encadreur **Dr. Ameur Yagoub** pour ces orientations et tous ses efforts consentis dans la préparation de ce travail.*

*Je remercie vivement **Professeur Abdelkader Mokhtari** pour avoir accepté de présider le jury de soutenance. Je tiens également à remercier **Professeur Allaoui Salah Eddine** d'avoir accepté d'examiner ce travail ainsi que **Dr. Bougataia Amar** pour avoir accepté d'examiner ce mémoire.*

Un très grand merci à mes parents et toute ma famille sans oublier tous mes chers enseignants pour les efforts qu'ils ont fournis pour avoir participer à notre formation.

Enfin, mes meilleurs et vifs remerciements s'adressent à tous mes amis et tous ceux qui m'on aidé de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

A mes très chers parents

A mes frères, mes soeurs et mes amies.

Résumé :

Soient L^2, H^2 l'espace de Lebesgue de fonctions carrées intégrables et l'espace de Hardy, sur le cercle unité $\mathbb{T}$. Soient P, Q les projections orthogonaux de L^2 sur H^2 et $(H^2)^{\perp}$. L'opérateur d'intégrale singulière de symboles $\alpha, \beta \in L^{\infty}$ sur L^2, est défini par :

$$S_{\alpha,\beta}(f) = \alpha P(f) + \beta Q(f).$$

Le but de ce travail est de faire une étude large sur les propriétés algébrique d'opérateurs d'intégral singulière (unitaire, isométrie, normal, auto-adjoint, positif ...).

Mots clés :
Espaces de Lebesgue, espaces de Hardy, opérateurs d'intégral singulière, opérateurs de multiplication.

Abstract :

Let L^2, H^2 the space of Lebesgue square integrable functions, and the Hardy space, on the unit circle $\mathbb{T}$. Let P, Q be the orthogonal projections of L^2 on H^2 and $(H^2)^{\perp}$. The singular integral operator of symbols $\alpha, \beta \in L^{\infty}$, on L^2, is defined by :

$$S_{\alpha,\beta}(f) = \alpha P(f) + \beta Q(f).$$

In this work, we studied some classical results on the algebraic properties of singular integral operators (unitary, isometry, normal, self-adjoint, positive ...).

Key words :
Lebesgue Spaces, Hardy spaces, singular integral operators, multiplication operators.

Table des matières

Introduction.

Ce mémoire se situe à l'interface entre l'analyse fonctionnelle, la théorie des opérateurs et l'analyse complexe. Il est dédié à l'étude de certains opérateurs sur l'espace fonctionnel L^2.
On note par $\mathbb{T}$ le cercle unité du plan complexe. $dm := dm(\theta) = \frac{d\theta}{2\pi}$ la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle unité, et par $L^2 := L^2(\mathbb{T}, dm)$ l'espace de Lebesgue de fonctions carrées intégrables sur le cercle unité $\mathbb{T}$, il est bien connu que L^2 muni de produit scalaire défini par

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{T}} f\overline{g}dm.$$

L'espace de Hardy H^2 est l'ensemble des fonctions $f \in L^2$ tel le coefficient de Fourier négatives sont nulles.

$$H^2 = \{f \in L^2, \widehat{f}(n) = 0, n < 0\},$$

où,

$$\widehat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}\frac{d\theta}{2\pi}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Soient P, Q les projections orthogonaux de L^2 sur H^2 et $(H^2)^{\perp}$ respectivement. L'opérateur d'intégrale singulière de symboles $\alpha, \beta \in L^\infty$ sur L^2, est défini par :

$$\begin{aligned} S_{\alpha,\beta}(f) &= \alpha P(f) + \beta Q(f), f \in L^2, &(1)\\ &= \frac{\alpha(z)+\beta(z)}{2}f(z) + \frac{\alpha(z)-\beta(z)}{2}\frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi. &(2)\end{aligned}$$

Il existe trois types d'intégrales singulières : les intégrales faiblement singulières, les intégrales singulières au sens de la valeur principale de Cauchy et les intégrales hypersingulières pour plus de détails voir [14]. Mathématiquement parlant, à cause de la singularité de la fonction sous le signe d'intégral, une petite région au voisinage de la singularité doit être exclue du domaine d'intégration, et l'on cherche alors la limite lorsque la distance de cette région tend vers zero si cette existe et est indépendante de la forme du voisinage, l'intégrale singulière est dite faiblement singulière, si cette limite existe uniquement si la forme du voisinage exclu est un cercle, alors on parle d'intégrale singulière en valeur principale de Cauchy, et dans le cas d'une singularité d'ordre supérieure, on parle d'intégrale hypersingulière. En d'autre termes, les intégrales singulières sont des intégrales dont l'intégrant atteint une valeur infinie en quelques points dans le domaine d'intégration. Malgré cette situation, les intégrales peuvent converger pour certaines valeurs (dans ce cas on dit que l'intégrale existe).

L'objectif de ce travail est consacré aux propriétés algébrique d'opérateurs d'intégral singulière en valeur principale de Cauchy (opérateurs 1), basés principalement sur une caractérisation spéciale pour connaître ces opérateurs.

Le mémoire se compose de trois chapitres. Il nous a semblé utile de l'entamer par un chapitre consacré aux rappels sur les notions de l'analyse fonctionnelle, les espaces de Hilbert, l'espace L^2 et l'espace de Hardy.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons quelques définitions consacré les opérateurs linéaires bornés. Nous présentons les opérateurs bornés sur les espace de Hilbert, les opérateurs de rang 1, ensuite on introduit les opérateurs de multiplication et intégrale singulière sur L^2.

Dans le troisième chapitre, on expose le but de notre travail, concertant les propriétés algébrique d'opérateurs d'intégrale singulière sur L^2. Nous donnons un caractérisation pour connaître les opérateurs d'intégrale singulière. Ensuite on va étudier les propriétés algébrique de ces opérateurs.

Chapitre 1

Préliminaires.

Dans ce chapitre, nous allons présenter un rappel sur les espaces fondamentaux en analyse fonctionnelle qui contient quelques notions essentielles qui concernent espaces de Hilbert, les espaces L^2, et les espaces de Hardy, qu'ils sont nécessaire de connaître pour aborder la suite de ce mémoire.

1.1 Espaces de Hilbert.

Les résultats dans ce chapitre et ses preuves sont tirés de [15, 3, 18] et d'autres références.

1.1.1 Produits scalaires et notion d'espace de Hilbert.

Définition 1.1.1. *Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel réel ou complexe. L'application $\langle .,. \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ est un produit scalaire et si $\mathcal{H}$ un espace vectoriel réel, vérifiant*

1. $\forall y \in \mathcal{H} : x \longmapsto \langle x, y \rangle$ *est linéaire (en x),*
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
3. $\langle x, x \rangle \geq 0$ *et si* $\langle x, x \rangle = 0$ *alors* $x = 0$.

Lemme 1.1. *Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel réel ou complexe muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle$. Alors, pour tous $x, y \in \mathcal{H}$*

$$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + 2\mathcal{R}e\langle x, y \rangle + \| y \|^2$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\langle x+y,x+y\rangle &= \langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle\\ &= \langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\overline{\langle x,y\rangle}+\langle y,y\rangle\\ &= \parallel x\parallel^2 +2\mathcal{R}e\langle x,y\rangle+\parallel y\parallel^2 .\end{aligned}$$

Nous vérifions aisément certaines propriétés de la norme pour $\|.\|$:

- $\|x\|\geq 0$ par définition, et si $\|x\|=0$ c'est que $\langle x,x\rangle=0$ et donc $x=0$
- pour $\lambda\in\mathbb{C}$ nous avons
$$\parallel \lambda x\parallel=\sqrt{\langle\lambda x,\lambda x\rangle}=\sqrt{\lambda\overline{\lambda}\langle x,x\rangle}=\sqrt{|\lambda|^2\langle x,x\rangle}.$$

□

Proposition 1.1.1. ***(Inégalité de Cauchy Schwarz).***
Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel (réel ou complexe) muni du produit scalaire $\langle x,y\rangle$. Alors pour tous $x,y\in\mathcal{H}$

$$|\langle x,y\rangle|\leq\|x\|\|y\|.$$

Démonstration.
Si $\|x\|=0$ c'est que $x=0$ et l'inégalité est immédiate. Sinon, $\|x\|>0$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$ nous avons

$$0\leqslant\parallel tx+y\parallel^2=\parallel x\parallel^2 t^2+2\mathcal{R}e\langle x,y\rangle t+\parallel y\parallel^2 .$$

Le discriminant de ce polynôme quadratique doit donc être ≤ 0 :

$$0\geq(2\mathcal{R}e\langle x,y\rangle)^2-4\|x\|^2\|y\|^2$$

d'où

$$\|x\|\|y\|\geq|\mathcal{R}e\langle x,y\rangle|\geq\mathcal{R}e\langle x,y\rangle$$

De plus il existe $\alpha\in\mathbb{C}$ de module 1 tel que $\langle x,y\rangle=\alpha|\langle x,y\rangle|$, d'où $\overline{\alpha}\langle x,y\rangle=|\langle x,y\rangle|$ et

$$\begin{aligned}\|x\|\|y\| &= \|x\|\|\alpha y\|\\ &\geq \mathcal{R}e\langle x,\alpha y\rangle\\ &= \mathcal{R}e(\overline{\alpha}\langle x,y\rangle)\\ &= \mathcal{R}e|\langle x,y\rangle|\\ &= |\langle x,y\rangle|.\end{aligned}$$

□

Corollaire 1.1. *Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel (réel ou complexe) muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle$.Alors $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$ définit une norme.*

Démonstration.
Il ne nous reste plus qu'à vérifier l'inégalité triangulaire. On a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \| x+y \|^2 &= \| x \|^2 + 2\mathcal{R}e\langle x,y\rangle + \| y \|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \| y \|^2 \\ &\leqslant \| x \|^2 + 2 \| x \| \| y \| + \| y \|^2 \\ &= (\| x \| + \| y \|)^2. \end{aligned}$$

Cette norme est appelée la norme associée au produit scalaire $\langle .,. \rangle$. □

Définition 1.1.2. *On dit que deux vecteurs x, y d'un espace vectoriel complexe sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle .,. \rangle$ si $\langle x,y \rangle = 0$.*

Lemme 1.2. *Soient x, y deux vecteurs d'un espace vectoriel réel ou complexe $\mathcal{H}$. Alors on a*

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2 + i \| x+iy \|^2 - i \| x-iy \|^2)$$

si $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2)$$

si $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel En plus on a l'identité de la médiane ou du parallélogramme

$$\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2).$$

Si x et y sont orthogonaux on a l'identité de Pythagore

$$\| x+y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 .$$

Démonstration. Par Lemme 1.1,

$$\| x+y \|^2 = (\| x \|^2 + 2\mathcal{R}e\langle x,y\rangle + \| y \|^2),$$

$$\| x-y \|^2 = (\| x \|^2 - 2\mathcal{R}e\langle x,y\rangle + \| y \|^2),$$

d'où

$$\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2,$$
$$\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2 = 4\mathcal{R}e\langle x,y\rangle.$$

Nous avons donc démontré l'identité du parallélogramme. Nous en déduisons également que

$$\mathcal{R}e\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2),$$
$$\mathcal{I}m\langle x,y\rangle = \mathcal{R}e(-i\langle x,y\rangle) = \mathcal{R}e\langle x,iy\rangle = \frac{1}{4}(\| x+iy \|^2 - \| x-iy \|^2),$$

Ce qui établit la première identité sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Finalement, si $x \perp y$:

$$\| x+y \|^2 = \| x \|^2 + 2\mathcal{R}e(0) + \| y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 .$$

□

Définition 1.1.3. *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire et qui est complet pour la norme associée.*

1.1.2 Somme directe et complémentaire orthogonal.

Définition 1.1.4. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux sous-espaces vectoriels. On dit que $\mathcal{H}$ est la somme directe orthogonale de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$, notée $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus^{\perp} \mathcal{H}_2$,*
si $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = 0$ et $\forall x_1 \in \mathcal{H}_1, \quad x_2 \in \mathcal{H}_2 : \langle x_1, x_2\rangle = 0.$

Le complémentaire orthogonal d'un sous-espace $F \subset \mathcal{H}$ est défini par $F^{\perp} := \{x \in \mathcal{H} \mid \forall y \in F : \langle x,y\rangle = 0\}$.

Théorème 1.1.1. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $F \subset \mathcal{H}$ un sous-espace fermé. Soit $x \in \mathcal{H}$. Alors*

1. *Il existe un unique $y \in F$ qui satisfait*

$$\| x+y \|^2 = d(x,F) := inf \{\|x-z\| : z \in F\} .$$

On note $y = P_F(x)$. Ceci définit alors une application

$$P_F : \mathcal{H} \longrightarrow F.$$

2. *$y = P_F(x)$ est l'unique vecteur dans F qui satisfait $x - P_F(x) \perp F$.*
3. *$\forall x \in \mathcal{H} : \|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|P_{F^\perp}(x)\|^2$.*
4. *L'application $P_F : \mathcal{H} \longrightarrow F$ est linéaire est continue. C'est la projection sur F le long $F^\perp$.*
5. *Le complémentaire orthogonal $F^\perp$ est un sous espace fermé de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H} = F \oplus F^\perp$.*

Démonstration.
Pour $\varepsilon > 0$, prenons $y, z \in F$ et supposons que $d(x,y)^2 \leq d(x,F)^2 + \varepsilon$ et $d(x,z)^2 \leq d(x,F)^2 + \varepsilon$. Posons : $\omega = \dfrac{y+z}{2}, u = \dfrac{y-z}{2}$, de telle façon que $\omega \in F$ et $y = \omega + u, z = \omega - u$. D'après l'identité du parallélogramme :

$$\|(x-w)+u\|^2 + \|(x-w)-u\|^2 = 2(\|x-w\|^2 + \|u\|^2)$$

$$\frac{\|x-z\|^2 + \|x-y\|^2}{2} = d(x,w)^2 + \frac{1}{4}d(y,z)^2$$

$$d(x,F)^2 + \varepsilon > d(x,F)^2 + \frac{1}{4}d(y,z)^2$$

$$d(y,z) < 2\sqrt{\varepsilon}$$

Soit maintenant $(y_n) \subseteq F$ une suite telle que $d(x,y_n) \longrightarrow d(x,F)$. Alors d'après notre calcul c'est une suite de Cauchy, qui doit donc converger vers un $y \in F$ (puisque H est complet et F fermé). Nous obtenons $d(x,y) = \lim d(x,y_n) = d(x,F)$. Pour l'unicité,supposons que $z \in F$ vérifie lui aussi $d(x,z) = d(x,F)$. Alors encore d'après le calcul précédent $d(y,z) < 2\sqrt{\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui donne $d(y,z) = 0$ et $y = z$. Ceci montre le premier point et donc l'existence de l'application P_F.

Pour le deuxième point, supposons que $x - P_F(x) \not\perp F$. Il existe donc $z \in F$ tel que $\langle x - P_F(x), z\rangle = s \neq 0$, et quitte à diviser z par s nous pouvons supposer que $\langle x - P_F(x), z\rangle = 1$. Soit encore t une variable réelle. Alors $P_F(x) + tz \in F$ et

$$d(x, P_F(x) + tz)^2 = \|x - P_F(x) - tz\|^2 = t^2\|z\|^2 - 2t + \|x - P_F(x)\|^2.$$

Ce polynôme en t atteint son minimum ailleurs qu'à $t = 0$, donc $d(x,F) < d(x, P_F(x))$, une contradiction au choix de P_F. Nous avons donc bien $x -$

$P_F(x) \perp F$. Pour l'unicité, supposons que $x - y \perp F$ et $x - z \perp F$, où $y, z \in F$ (par exemple, on pourrait avoir $y = P_F(x)$). Alors $y - z \in F$, d'où $\langle x-y, y-z\rangle = \langle x-z, y-z\rangle = 0$. Une soustraction donne $\langle y-z, y-z\rangle = 0$, d'où $y - z = 0$ et $y = z$.

Le troisième point découle du deuxième, vu que $x - P_F(x) \perp P_F(x)$.

Pour (4), on vérifie aisément que $(x + \lambda y) - (P_F(x) + P_F(y)) = (x - P_F(x)) + \lambda(y - P_F(y)) \in F^{\perp}$, d'où $P_F(x) + \lambda P_F(y) = P_F(x + \lambda y)$ d'après (2), et p_F est linéaire. D'après (3) nous avons $\| P_F(x) \| \leq \| x \|$, donc P_F est continu (de norme ≤ 1).

Finalement, pour tout $x \in \mathcal{H}$ nous avons $x = (x - P_F(x)) + P_F(x)$, où $x - P_F(x) \in F^{\perp}$ et $P_F(x) \in F$, ce qui donne bien $F \oplus F^{\perp} = \mathcal{H}$. □

Corollaire 1.2. *Pour tout sous-espace vectoriel fermé $F \subset \mathcal{H}$ on a $(F^{\perp})^{\perp} = F$. En particulier l'orthogonale d'un sous-espace vectoriel non-fermé est fermé. En outre F est dense dans $\mathcal{H}$ si et seulement si $F^{\perp} = \{0\}$.*

Corollaire 1.3. *(Théorème de représentation de Riesz). Soit $\varphi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire continue. Alors il existe un unique $y \in \mathcal{H}$ tel que pour tout x :*

$$\varphi(x) = \langle x, y\rangle.$$

En outre, nous avons $\|\varphi\| = \|y\|$ où

$$\|\varphi\| = sup\{|\varphi(x)| : \|x\| \leq 1\}.$$

Démonstration.
Si $\varphi = 0$, alors $y = 0$ convient. Si $\varphi \neq 0$, soit $F = \varphi^{-1}(\{0\})$. Alors F est un hypeplan fermé de $\mathcal{H}$, distinct de $\mathcal{H}$. Donc $F = F \oplus^{\perp} F^{\perp}$, où $F^{\perp}$ est de dimension 1. Soit $y_0 \in F^{\perp}$ avec $\|y_0\| = 1$. Tout $x \in \mathcal{H}$ s'écrit $x = P_F(x) + P_{F^{\perp}}(x)$ avec $P_{F^{\perp}}(x) = ty_0$ (t dépend de x). Comme φ est linéaire, on obtient

$$\varphi(x) = t\varphi(y_0) \text{ avec } t = \langle x, y_0\rangle.$$

Par conséquent, on a :

$$\varphi(x) = \varphi(y_0)\langle x, y_0\rangle = \langle x, \overline{\varphi(y_0)}y_0\rangle.$$

Par conséquent, en posant $y = \overline{\varphi(y_0)}y_0$, on a $\varphi(x) = \langle x, y\rangle$.

Pour l'unicité, il suffit de constater que si $\langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle$ pour tout $x \in \mathcal{H}$, alors $y_1 - y_2 \perp \mathcal{H}$ et donc $y_1 = y_2$.

Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, $|\varphi(x) \leq \|x\|\|y\|$, et donc $\|\varphi\| \leq \|y\|$. De plus, comme $\varphi(y/\|y\|) = \|y\|$, on obtient $\|\varphi\| \geqslant \|y\|$, ce qui implique l'égalité désirée. □

1.1.3 Bases orthonormales.

Définition 1.1.5. *Un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est séparable s'il possède un ensemble au plus dénombrable qui est dense dans $\mathcal{H}$.*

Définition 1.1.6. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable. On appelle base orthonormale de $\mathcal{H}$ tout sous-ensemble fini ou dénombrable $\{e_n\}_n$ qui vérifie*

1. $\|e_n\| = 1$ *et* $\langle e_n, e_m \rangle = 0$ *si* $n \neq m$,
2. *le sous-espace vectoriel engendré par $\{e_n\}_n$ (par combinaisons linéaires finies) est dense dans $\mathcal{H}$.*

Lemme 1.3. *Soit $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une famille orthonormée et soit F le sous-espace engendré (donc $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, mais on ne demande pas que F soit dense). Alors pour tout x :*

$$P_{\overline{F}}(x) = \sum_{i<n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Démonstration.
Il suffit de prouver que

$$x - \sum_{i<n} \langle x, e_i \rangle e_i \perp F,$$

ce qui est immédiat. □

Théorème 1.1.2. ***(Existence des bases orthonormales).*** *Tout espace de Hilbert séparable possède une base orthonormale.*

Démonstration.
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite dense de H.

On en extrait un système libre (linéairement indépendant) que l'on appelle $(v_n)_{n\geqslant 0}$. On construit ensuite une base orthonormale à partir de $(v_n)_{n\geqslant 0}$ suivant le ***principe d'orthonormalisation de Gram–Schmidt.*** :

On pose $e_0 = \dfrac{v_0}{\|v_0\|}$. On remarque que $v_1 - \langle v_1, e_0\rangle \perp e_0$. De plus le sous-espace engendré par e_0 et e_1 coïncide avec celui engendré par v_0 et v_1. On obtient e_1 en posant

$$e_1 = \frac{v_1 - \langle v_1, e_0\rangle \perp e_0}{\| v_1 - \langle v_1, e_0\rangle \perp e_0 \|}.$$

Supposons $e_0, \ldots, e_n$ construits de sorte que ce soit un système orthonormal qui engendre le même sous-espace vectoriel que celui engendré par $v_0, \ldots, v_n$, noté F_n. On obtiendra e_{n+1} en posant

$$e_{n+1} = \frac{v_{n+1} - P_{F_n} v_{n+1}}{\|v_{n+1} - P_{F_n} v_{n+1}\|}.$$

Par construction on obtiendra une base orthonormale de $\mathcal{H}$. □

Théorème 1.1.3. *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormale.*

1. *Pour toute $(\lambda_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N})$ la série*

$$\sum_{n\geq 0} \lambda_n e_n$$

converge dans $\mathcal{H}$ et sa somme

$$x = \sum_{n\geq 0} \lambda_n e_n$$

vérifie

$$\langle x, e_n\rangle = \lambda_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n\geq 0} |\lambda|^2.$$

2. *Pour tout $x \in \mathcal{H}$ la série $\sum_{n\geq 0} |\langle x, e_n\rangle|^2$ converge et*

$$x = \sum_n \langle x, e_n\rangle e_n, \|x\|^2 = \sum_n |\langle x, e_n\rangle|^2.$$

Démonstration.

1. Soit $u_N = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n e_n$. Si $p \geq N$, on obtient

$$\|u_p - u_N\|^2 = \| \sum_{n=N+1}^{p} \lambda_n e_n\|^2 = \sum_{n=N+1}^{p} |\lambda_n|^2$$

car $\langle e_n, e_p\rangle = 1$ si $n = p$ et 0 sinon. Comme $(\lambda_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N}), (u_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathcal{H}$ qui est complet, donc $(u_n)_n$ converge dans $\mathcal{H}$. De plus, pour tout $N \geq n$, on a $\langle u_n, e_p\rangle = \lambda_n$. Par continuité du produit scalaire (cf. Cauchy–Schwarz), $\langle x, e_p\rangle = \lambda_n$. Par continuité de la norme

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} \|u_N\|^2 = \lim_{N\longrightarrow\infty} \sum_{n=0}^{N} |\lambda_n|^2.$$

2. Soit $u_N = \sum_{n=0}^{N} |\langle x, e_n\rangle|^2$. La suite $(v_n)_n$ est croissante et positive. Elle converge si et seulement si elle est majorée. Nous allons montrer que $v_n \leq \|x\|^2$. Pour cela posons

$$x_N = x - \sum_{k=0}^{N} \langle x, e_k\rangle e_k.$$

Alors $x_N \perp e_k$ pour tout $k = 0, \ldots, N$. D'après l'identité de Pythagore,

$$\|x\|^2 = \|x_N\|^2 + \| \sum_{k=0}^{N} \langle x, e_k\rangle e_k\|^2 = \|x_N\|^2 + \sum_{k=0}^{N} |\langle x, e_k\rangle|^2,$$

qui implique $v_N \leq \|x\|^2$. On conclut ensuite en appliquant (1).

□

1.2 Espace L^2.

Soient $\mathbb{T}$ le cercle unité de $\mathbb{C}$ et $dm := dm(\theta) = \frac{d\theta}{2\pi}$ la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$ de sorte que $m(\mathbb{T}) = 1$ (voir [9]). On note par

$$L^2 := L^2(\mathbb{T}, dm)$$

l'ensemble des fonctions carrée intégrable sur $\mathbb{T}$ par rapport à la mesure $d\mu$. Il est bien connu que L^2 est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{T}} f\overline{g} dm$$

et que la suite des fonctions $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, définies par $e_n(z) = z^n$ est une base orthonormée de L^2. Chaque fonction $f \in L^2$ peut se développer en série de Fourier sous la forme

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) z^n;$$

$$\widehat{f}(n) := \langle f, z^n \rangle = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}\frac{d\theta}{2\pi}, n \in \mathbb{Z}.$$

Nous avons besoin de l'espace $L^\infty := L^\infty(\mathbb{T}, dm)$ de toutes les fonctions bornées essentiellement mesurables sur $\mathbb{T}$, équipé de la norme

$$\|f\|_\infty := supess_{\zeta\in\mathbb{T}}|f(\zeta)|,$$

où

$$supess_{\zeta\in\mathbb{T}}|f(\zeta)| = sup\left\{a \geq 0 : m(\zeta \in \mathbb{T}, |f(\zeta)| > a) > 0\right\}.$$

Lemme 1.4. *la famille de toute les fonctions exponentielle-modèles* $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$ *est une famille orthonormée de* L^2*, à savoir*

$$\langle e_{n_1}, e_{n_2}\rangle_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in_1\theta}\overline{e^{in_2\theta}}\frac{d\theta}{2\pi} = \delta_{n_1,n_2}.$$

Démonstration.
En effet, si $n_1 \neq n_2$, la fonction $e^{i(n_1-n_2)\theta}$ admet la primitive $\dfrac{e^{i(n_1-n_2)\theta}}{i(n_1-n_2)}$, et l'intégrale s'annule par 2π-périodicité :

$$\left[\frac{e^{i(n_1-n_2)\theta}}{i(n_1-n_2)}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

et lorsque $n_1 = n_2$, on a bien $\int_0^{2\pi} 1\dfrac{d\theta}{2\pi} = 1.$ □

Théorème 1.2.1. *Sur le cercle unité* $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$*, l'espace des fonctions de carré intégrable :*

$$L^2 = \left\{f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C} \ \ mesurables \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\frac{dt}{2\pi} < \infty\right\}$$

s'identifie à l'espace :

$$\ell_2(\mathbb{C}) := \left\{z = (z_k)_{k\in\mathbb{Z}} : \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} |z_k|^2 < \infty\right\}$$

via l'application " prise de coefficients de Fourier " :

$$\begin{aligned} L^2 &\longrightarrow \ell_2(\mathbb{C}) \\ f &\longmapsto (\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-ik\theta}\frac{d\theta}{2\pi}\right)_{k\in\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

de telle sorte qu'on peut écrire, seulement au sens L^2 *:*

$$f(.) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)e^{ik(.)}.$$

1.3 Espace de Hardy.

L'espace de Hardy H^2 est l'ensemble des fonctions $f \in L^2$ tel que les coefficient de Fourier négatives sont nulle.

$$H^2 = \{f \in L^2, \widehat{f}(n) = 0, n < 0\}.$$

et

$$H^\infty = \{f \in L^\infty, \widehat{f}(n) = 0, n < 0\},$$

où,

$$\widehat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}\frac{d\theta}{2\pi}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

est le n-ème coefficient de Fourier de f (voir [8]).
L'espace de Hardy H^2 admet noyau reproduisant donné par la formule :

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{1 - \overline{\lambda}z}, \quad \lambda, z \in \overline{\mathbb{D}},$$

et

$$f(z) = \langle f, k_\lambda \rangle, \qquad f \in H^2.$$

Donc la projection orthogonale P de L^2 sur H^2 est donnée par :

$$Pf = \langle f, k_\lambda \rangle, \qquad f \in L^2, \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

L'opérateur P est donné par l'intégrale de Cauchy :

$$(Pf)(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}z} dm(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}, \quad f \in L^2.$$

De plus $P(\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\theta}) = \sum_0^{+\infty} a_n e^{in\theta}$. Clairement, $\|Pf\| \leq \|f\|$ pour tout $f \in L^2$. L'opérateur de shift sur H^2 est défini par :

$$S[f](z) = zf(z), \qquad f \in H^2,$$

avec son adjoint $S^* : H^2 \to H^2$ défini par :

$$S^*[f](z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}, \qquad f \in H^2.$$

Soit $M \in H^2$, M est dit sous-espace invariant par S, lorsque M fermé et $SM \subset M$, et il dit que M non trivial lorsque $\{0\} \subsetneq M \subsetneq H^2$.

Une fonction $\theta \in H^\infty$ est dit intérieure lorsque $|\theta| = 1$, p.p sur $\mathbb{T}$.

Le théorème classique de Beurling (voir [2] ou [8]) donne une caractérisée complète des sous-espaces invariants non triviaux , sont tous de la forme $M = \theta H^2$, où θ est une fonction intérieure.

Chapitre 2

Opérateurs bornés.

Dans ce chapitre on va rappeler quelques définitions et résultats classiques concernant les opérateurs linéaires bornés sur les espaces de Hilbert (voir par exemple [1, 5, 8]), nous rappelons aussi des définitions et propriétés éléments sur les opérateurs de multiplication et d'intégrale singulière sur L^2.

2.1 Définition.

Définition 2.1.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$. On dit que l'application ou l'opérateur $A : E \longrightarrow F$ est linéaire si*

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : A(x+y) = Ax + Ay$$
$$A(\lambda x) = \lambda Ax.$$

C'est un homomorphisme d'espaces vectoriels et l'on a A(0) = 0.

Cas particuliers : Si A est bijectif alors, A est un isomorphisme. Si $E = F$ alors, A est un endomorphisme de E. Si A est un isomorphisme de E dans E alors, A est un automorphisme. Si $F = \mathbb{K}$ alors, A est une forme linéaire sur E. Quand E est un ensemble de fonctions, A est souvent appelé une fonctionnelle linéaire.

Exemple 2.1. *Dans l'espace usuel les rotations, les homothéties, les similitudes et les projections sont des applications linéaires.*

Définition 2.1.2. *Soit $A : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. On définit l'image de l'opérateur A par*

$$Im(A) = \{Ax, x \in E\}$$

et le noyau de l'opérateur A par

$$Ker(A) = \{x \in E : Ax = 0\}.$$

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $A : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. Le théorème suivant caractérise la continuité d'un opérateur linéaire.

Théorème 2.1.1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) A est continu,

(2) A est continu en 0,

(3) il existe une constante c telle que $\|Ax\| \leq c\|x\|$ pour tout $x \in E$.

Démonstration.
L'implication (1) $\Longrightarrow$ (2) est évidente. On va montrer l'implication (2) $\Longrightarrow$ (3). On suppose que A est continu en 0, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E : (\|x\| < \delta) \Longrightarrow (\|Ax\| < \varepsilon). \tag{2.1}$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in E, x \neq 0$. On pose $x' = \frac{\delta}{2\|x\|}x$, alors $\|x'\| = \frac{\delta}{2}$.
D'où, $\|x'\| < \delta$ et par conséquent $\|Ax'\| < \varepsilon$ (de (2.1))

$$\begin{aligned} \|Ax'\| &= \|A(\frac{\delta}{2\|x\|}x)\| \\ &= \frac{\delta}{2\|x\|}\|Ax\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Il résulte que $\|Ax\| < \dfrac{2\varepsilon}{\delta}\|x\|$. Il existe alors c satisfaisant (3).
Cette inégalité est vraie aussi pour $x = 0$ et (3) est vérifiée avec $c = \dfrac{2\varepsilon}{\delta}$.
On va montrer l'implication (3) $\Longrightarrow$ (1). On suppose que (3) est vérifiée, alors, pour tous $x, y \in E$, on a

$$\|A(x - y)\| \leq c\|x - y\|,$$

c'est à dire

$$\|Ax - Ay\| \leq c\|x - y\|.$$

L'application A est lipschitzienne donc, elle est continue. □

Définition 2.1.3. *Une application linéaire $A : E \longrightarrow F$ entre espaces vectoriels normés qui est continue est souvent dite bornée.*

Notation :

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues entre E et F. Quand $E = F, \mathcal{L}(E,F)$ est noté $\mathcal{L}(E)$. Quand $F = K$, on note E' l'espace dual (topologique) de E qui est l'espace vectoriel des formes linéaires continues de E dans K.
Par E'', on note le bidual de E.

Remarque 2.1.1. *Si E est de dimension finie, alors, toute application linéaire de E dans F est continue.*
On définit maintenant la norme d'un opérateur linéaire continu.

Définition 2.1.4. *(Norme d'un opérateur linéaire continu) Soit $A : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire continu entre les espaces vectoriels normés. Le nombre $\sup_{x\in E, x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$, qui est par le Théorème 2.1.1 fini, est appelé la norme de A et est noté $\|A\|$.*

Remarque 2.1.2.
1. *Si pour une constante c, on a $\|Ax\| \leq c\|x\|$ pour tout $x \in E$, alors, A est borné et $\|A\| \leq c$. De plus, on a*
$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \text{ pour tout } x \in E.$$
2. *On vérifie facilement que $\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|$ ainsi que*
$$\|A\| = \inf \{c : \|Ax\| \leq c\|x\| \text{ pour tout } x \in E\}.$$

Proposition 2.1.1. *(Propriétés de la norme d'opérateur) Soient E, F et G des espaces vectoriels normés.*

1. *Si $A \in \mathcal{L}(E,F)$, alors, $\|A\| = 0$ si et seulement si $A = 0$.*
2. *Si $A, B \in \mathcal{L}(E,F)$, alors, $A+B \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\|A+B\| \leq \|A\|+\|B\|$.*
3. *Si $\alpha \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{L}(E,F)$, alors, $\alpha A \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$.*
4. *Si $A \in \mathcal{L}(E,F)$ et $B \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $B \circ A \in \mathcal{L}(E,G)$ et $\|B \circ A\| \leq \|B\|\|A\|$.*

De (1)-(3) de la Proposition 2.1.1, $\|.\|$ définit une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$.

Notation :

La composée $A \circ B$ de deux opérateurs A et B sera souvent noté AB.

Exemple 2.2. *(Projection orthogonale sur un sous-espace fermé) Soit F un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H . L'opérateur projection P_F est continu de norme 1 car $P_F(x) = x$ pour tout $x \in F$ et $\|P_F(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in H$ avec égalité si $x \in F$.*

Exemple 2.3. *Soit $E = C([0,1], \mathbb{K})$. On définit l'opérateur linéaire de Volterra (primitive s'annulant en 0) A sur E par*

$$\forall f \in E, \quad Af(x) = \int_0^x f(t)dt, \forall x \in [0,1].$$

Pour tout $f \in E$, on a $\|Af\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, donc $A \in \mathcal{L}(E)$ et $\|A\| \leq 1$. De plus, $\|A\| = 1$ car si $f \equiv 1$, on obtient $\|f\|_\infty = 1$ et $\|Af\|_\infty = 1$. à ces deux exemples, s'ajoutent d'autres comme suit

Exemple 2.4.

1. *L'opérateur schift en anglais, opérateur de décalage en français S défini sur $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$*

$$S(x_0, x_2, \dots) = (0, x_0, x_2, \dots),$$

est borné et on a $\|S\| = 1$.

2. *Soient (X, Ω, μ) un espace mesuré σ-fini et $H = L^2(X, \Omega, \mu)$. Si $\varphi \in L^\infty(X, \Omega, \mu)$, on peut définir un opérateur $M_\varphi \in \mathcal{L}(H)$ en posant $M_\varphi f = \varphi f$, et alors, on a $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_{L_\infty}$. On rappelle que la norme $\|\varphi\|_{L_\infty}$ est définie comme le supremum essentiel de φ*

$$\|\varphi\|_{L_\infty} = \inf \{c > 0 : \mu(x \in X : |\varphi(x)| > c) = 0\}.$$

L'opérateur M_φ défini ainsi s'appelle opérateur de multiplication et la fonction φ s'appelle le symbole de M_φ.

3. *Soit H un espace de Hilbert séparable admettant une base orthonormée $(h_n)_n$. Soit $\alpha = (\alpha_n)_n$ une suite bornée de nombres complexes. On définit l'opérateur Δ_α sur H par*

$$\forall c = (c_n)_n \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}), \Delta_\alpha(\sum_{n \geq 0} c_n h_n) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n c_n h_n.$$

L'opérateur linéaire Δ_α est dit diagonal car il admet une représentation matricielle diagonale relativement 'a la base $(h_n)_n$, avec $(\alpha_n)_n$ sur sa diagonale. Cet opérateur est continu et l'on a $\|\Delta_\alpha\| = \|\alpha\|_\infty$.

Théorème 2.1.2. *Soient E un espace vectoriel normé et F un espace de Banach. Alors, l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace de Banach.*

Démonstration.
Soit $(A_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E,F)$, c'est à dire,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N > 0, \quad \forall n, m \in \mathbb{N} : (n \geq N, m \geq N) \Longrightarrow (\|A_n - A_m\|) < \varepsilon).$$

Soit $x \in E$. Comme $\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\|\|x\|$, alors, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N > 0, \quad \forall x \in E, \quad \forall n, m \in \mathbb{N} : (n \geq N, m \geq N) \Longrightarrow (\|A_n x - A_m x\|) < \varepsilon\|x$$

Cela dit que la suite $(A_n x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans F. L'espace F étant complet, cette suite est convergente et la limite $Ax = \lim_{n \longrightarrow \infty} A_n x$ existe dans F. Soit l'application

$$A : E \longrightarrow F$$

$$x \longmapsto Ax.$$

Cet opérateur est linéaire. En effet, pour tous $n \in \mathbb{N}, x, y \in E, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a

$$A_n(\alpha x + \beta y) = \alpha A_n x + \beta A_n y.$$

Par passage 'a la limite, on trouve

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

Cet opérateur est continu. En effet, la suite $(A_n)_n$ étant de Cauchy, alors, elle est bornée en norme, c'est à dire, $\exists M \in R_+ : \|A_n x\| \leq M\|x\|, \forall n \in \mathbb{N}$. Par passage 'a la limite, on obtient

$$\|Ax\| \leq M\|x\|, \forall x \in E.$$

Reste à montrer que la suite $(A_n)_n$ converge en norme vers A dans $\mathcal{L}(E,F)$. On a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N > 0, \quad \forall x \in E, \quad \forall n, m \in \mathbb{N} : (n, m \geq N) \Longrightarrow (\|A_n x - A_m x\|) < \varepsilon\|x\|).$$

En faisant tendre m vers $+\infty$, il résulte

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N > 0, \forall x \in E, \quad \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N) \Longrightarrow (\|A_n x - Ax\|) < \varepsilon\|x\|).$$

Ceci montre que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N) \Longrightarrow (\|A_n - A\|) < \varepsilon).$$

La démonstration du théorème est alors terminée. □

2.2 Opérateurs de rang 1.

Nous allons rappeler la définition et les propriétés élémentaires du produit tensoriel.

Définition 2.2.1. *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable, $f, g \in \mathcal{H}/\{0\}$ alors on définit l'opérateur borné de rang 1, $f \otimes g$ par :*

$$\begin{array}{rcl} f \otimes g : \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ h & \longmapsto & f \otimes g(h) = \langle h, g \rangle f. \end{array}$$

L'image de $f \otimes g$ est le sous-espace de dimension 1 noté $\mathbb{C}f$.

On peut voir réciproquement que tout opérateur Il est clair que tout opérateur A de rang 1 a la forme peut $f \otimes g$ pour certains vecteurs $f, g \in \mathcal{H}$.

En effet, comme ImA est de dimension 1, pour $f \in ImA$ non nul, $ImA = \mathbb{C}f$. Pour tout $h \in \mathcal{H}$, il existe $c_h \in \mathbb{C}$ tel que $Ah = c_h f$ et la forme linéaire $h \in \mathcal{H} \mapsto c_h$ est continue, par continuité de $f \otimes g$. Le Théorème de Riesz assure l'existence de $g \in \mathcal{H}$ tel que $c_h = \langle h, g \rangle$, et alors pour

$$h \in \mathcal{H}, Ah = \langle h, g \rangle f = f \otimes g(h).$$

Proposition 2.2.1. *On a les propriétés suivantes : pour tout $f, f_1, g, g_1 \in \mathcal{H}$ éventuellement non nuls, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$,*

1. *$A(f \otimes g) = (Af \otimes g)$ et $(f \otimes g)A = (f \otimes A^* g)$.*
2. *$(f \otimes g)(f_1 \otimes g_1) = \langle f_1, g \rangle (f \otimes g_1)$.*
3. *$(\alpha f + \beta f_1) \otimes g = \alpha(f \otimes g) + \beta(f_1 \otimes g)$ et $f \otimes (\alpha g + \beta g_1) = \overline{\alpha}(f \otimes g) + \overline{\beta}(f \otimes g_1)$.*
4. *$Ker(f \otimes g) = (\mathbb{C}g)^{\perp}$ et $Im(f \otimes g) = \mathbb{C}f$.*
5. *$(f \otimes g)^* = (g \otimes f)$.*
6. *$(f \otimes g) = (f_1 \otimes g_1)$ avec f, f_1, g, g_1 tous non nuls, si et seulement si il existe $\gamma, \lambda \in \mathbb{C}$ tels que $f = \gamma f_1, g = \lambda g_1$ et $\overline{\lambda}\gamma = 1$.*

Démonstration.

1. Pour tout $h \in \mathcal{H}, A(f \otimes g)(h) = \langle h, g \rangle Af = (Af \otimes g)(h)$ et

$$(f \otimes g)(Ah) = \langle Ah, g \rangle f = \langle h, A^* g \rangle f = f \otimes (A^* g)(h).$$

2. Pour tout $h \in \mathcal{H}$,

$$(f \otimes g)(f_1 \otimes g_1)(h) = f \otimes g \langle h, g_1 \rangle f_1 = \langle h, g_1 \rangle = \langle f_1, g \rangle f = \langle f_1, g \rangle (f \otimes g_1).$$

3. Par linéarité du produit scalaire.
4. Nous avons déjà vu la seconde affirmation. Pour la seconde :

$$Ker(f \otimes g) = \{h \in \mathcal{H} | f \otimes g(h) = 0\} = \{h \in \mathcal{H} | \langle h, g \rangle = 0\} = (\mathbb{C}g)^{\perp}.$$

5. Soient $h, k \in \mathcal{H}$.

$$\langle (f \otimes g)^*(h), k \rangle = \langle h, f \otimes g(h) \rangle = \langle g, k \rangle \langle h, f \rangle = \langle \langle h, f \rangle g, k \rangle = \langle g \otimes f(h), k \rangle.$$

6. Si $f \otimes g = f_1 \otimes g_1$ alors ils ont mêmes images. Or $Imf \otimes g = \mathbb{C}f$ et $Imf_1 \otimes g_1 = \mathbb{C}f_1$ donc il existe $\gamma \in \mathbb{C}$ non nul tel que $f = \gamma f_1$. En considérant les adjoints de ces opérateurs, l'assertion précédente affirme que $g \otimes f = g_1 \otimes f_1$. Le raisonnement similaire au précédent affirme qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $g = \lambda g_1$. Ainsi, $\gamma f_1 \otimes \lambda g_1 = f_1 \otimes g_1$ ce qui implique $\gamma \overline{\lambda} = 1$. La réciproque se vérifie trivialement.

□

2.3 Opérateurs de multiplication sur L^2.

Définition 2.3.1. *Soient E et F deux espaces de Hilbert.*

(a) *$U \in \mathcal{L}(E, F)$ est appelé unitaire si $U^*U = I_E$ et $UU^* = I_F$.*

(b) *$U \in \mathcal{L}(E, F)$ est appelé isométrique (co-isométrique) si $U^*U = I_E$ ($UU^* = I_E$).*

(c) *$N \in \mathcal{L}(E)$ est appelé normal si $\|N^*(x)\| = \|N(x)\|$ pour tout $x \in E$, ou $NN^* = N^*N$.*

(d) *$U \in \mathcal{L}(E)$ est appelé hermitien ou auto-adjoint si $U^* = U$.*

(e) *$P \in \mathcal{L}(E)$ est appelé positif (notation : $P \geq 0$) si P est auto-adjoint et si pour tout $x \in E$, $\langle P(x), x \rangle \geq 0$.*

(f) *Deux opérateurs $A : E \to E$ et $B : F \to F$ sont unitairement équivalents s'il existe un opérateur unitaire $U : E \to F$ tel que $A = U^*BU$.*

Définition 2.3.2. *Soient $\phi \in L^2$ et $D(M_\phi) = \{f \in L^2 : \phi f \in L^2\}$. On appelle opérateur de multiplication, de symbole ϕ sur L^2 l'opérateur défini par*

$$\begin{array}{rcl} M_\phi : D(M_\phi) \subseteq L^2 & \longrightarrow & L^2 \\ f & \longmapsto & M_\phi f = \phi f. \end{array}$$

([6]) Il est clair que $D(M_\phi)$ est dense dans L^2 puisqu'il contient l'espace des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{T}$ qui lui est dense dans L^2. De plus, si $\phi \in L^\infty$ alors M_ϕ est borné et $\|M_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$ en fait le théorème suivant, exposé par Arlen Brown et P. R. Halmos dans [4], montre que les seuls symboles ϕ pour lesquels M_ϕ est borné sont les fonctions bornées sur $\mathbb{T}$.

Théorème 2.3.1. *[4] Soient $\phi \in L^2$ et M_ϕ opérateur de multiplication. Alors les assertions suivantes sont satisfaites*

(i) Les assertions suivantes sont équivalentes

- *(a) $\phi \in L^\infty$*
- *(b) $D(M_\phi) = L^2$*
- *(c) M_ϕ est borné sur L^2, et $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$.*

(ii) $M_\phi^* = M_{\overline{\phi}}$.

(iii) M_ϕ est normal.

Le théorème suivant donne la première caractérisation de l'opérateur de multiplication.

Théorème 2.3.2 (Brown, Halmos [4])**.** *Un opérateur borné sur L^2 est un opérateur de multiplication si et seulement s'il commute avec M_z.*

2.4 Opérateurs d'intégrale singulière.

Dans cette section nous rappelons les définitions et les notions nécessaires dans l'étude des opérateurs d'intégrale singulière définis dans les espaces de L^2. Les résultats énoncés dans cette section sont tirés de [11, 12, 16, 17].

Définition 2.4.1. *L'opérateur d'intégrale singulière classique S_0, sur L^2, est donné par*

$$S_0(f) = \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad p.p, z \in \mathbb{T}.$$

D'après Theorem 2.1 de [11], l'opérateur d'intégrale singulière linéaire S_0, est borné.

Soient P et $Q = I - P$ les projections orthogonaux de L^2 sur H^2 et $L^2 \ominus H^2 = \overline{zH^2}$ respectivement.

Définition 2.4.2. *Soient $\alpha, \beta \in L^\infty$, l'opérateur intégral singulier (ou l'opérateur intégral singulier de Cauchy) $S_{\alpha,\beta}$ est défini par*

$$\begin{array}{rcl} S_{\alpha,\beta} : L^2 & \longrightarrow & L^2 \\ f & \longmapsto & S_{\alpha,\beta} f = \alpha P(f) + \beta Q(f). \end{array}$$

Il est clair que

$$\begin{array}{rcl} \| S_{\alpha,\beta}(f) \| & \leq & \| \alpha P f \| + \| \beta Q f \| \\ & \leq & \| \alpha \|_\infty \| P f \| + \| \beta \|_\infty \| Q f \| \\ & \leq & (\| \alpha \|_\infty + \| \beta \|_\infty) \| f \| \end{array}$$

donc $S_{\alpha,\beta}$ est un opérateur borné (voir [16]). L'opérateur $S_{\alpha,\beta}$ a une représentation intégrale avec le noyau de Cauchy, donné par

$$\begin{array}{rcl} S_{\alpha,\beta}(f) & = & \frac{\alpha(z)+\beta(z)}{2} f(z) + \frac{\alpha(z)-\beta(z)}{2} \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\ & = & \frac{\alpha(z)+\beta(z)}{2} f(z) + \frac{\alpha(z)-\beta(z)}{2} S_0(f). \end{array}$$

Dans les deux volumes [11] et [12] de Gohberg et Krupnik , il y a plusieurs propriétés de ces opérateurs.

Définition 2.4.3. *Soit $B(L^2)$ l'algèbre de tous les opérateurs linéaires bornés sur L^2.*

1. *S l'ensemble d'opérateurs d'intégrale singulière*

$$S = \{S_{\alpha,\beta} \in B(L^2), \alpha, \beta \in L^\infty\}.$$

2. M l'ensemble d'opérateurs de multiplication sur L^2*,*

$$\begin{aligned} M &= \{M_\alpha \in B(L^2), \alpha \in L^\infty\} \\ &= \{A \in B(L^2), M_z A = A M_z\}. \end{aligned}$$

3. Soient $A, B \in B(L^2)$*, le commutateur de* A *et* B*, est défini par*

$$[A, B] = AB - BA$$

Remarque 2.4.1. *Soit* $S_{\alpha,\beta} \in S$*. On a*

$$\begin{aligned} S_{\alpha,\beta} &= M_\beta + S_{\alpha-\beta,0} \\ &= M_\beta + M_{\alpha-\beta} S_{1,0}. \end{aligned}$$

Si $\alpha = \beta$ *alors* $S_{\alpha,\alpha} = M_\alpha$

Chapitre 3

Propriétés algébriques d'opérateurs d'intégrale singulière.

Dans ce chapitre, on donne quelques résultats algébriques d'opérateurs d'intégrale singulière.

3.1 Caractérisation.

Dans cette partie on va présenter, la caractérisation de l'ensemble S (l'ensemble d'opérateurs d'intégrale singulière).

Proposition 3.1.1. *Soit $A \in B(L^2)$. Alors $A \in S$ si et seulement si il existe une $\psi \in L^\infty$ tel que*

$$[A, M_z] = \psi \otimes e_{-1}. \tag{3.1}$$

Dans se cas $A = S_{\psi+\beta,\beta}$ pour certains $\beta \in L^\infty$.

Démonstration.
Soit $A = S_{\alpha,\beta} \in S$ pour certains $\beta, \alpha \in L^\infty$. Soit $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^n \in L^2$, alors

$$\begin{aligned} S_{\alpha,\beta} M_z(f) &= \alpha P[zf] + \beta Q[zf] \\ &= \alpha[zPf + f_{-1}] + \beta[zQf - f_{-1}] \\ &= z\alpha Pf + z\beta Qf + (\alpha - \beta) f_{-1} \\ &= M_z S_{\alpha,\beta}(f) + [(\alpha - \beta) \otimes e_{-1}](f). \end{aligned}$$

Nous avons, l'égalité (3.1) avec $\psi = (\alpha - \beta) \in L^\infty$. Maintenant supposons que $A \in B(L^2)$ et (3.1) est satisfaite. Par l'argument ci-dessus

$$S_{\psi,0} M_z - M_z S_{\psi,0} = \psi \otimes e_{-1}.$$

Donc

$$\begin{aligned}(A - S_{\psi,0})M_z - M_z(A - S_{\psi,0}) &= (AM_z - AM_z) - (S_{\psi,0}M_z - S_{\psi,0}M_z)\\ &= \psi \otimes e_{-1} - \psi \otimes e_{-1}\\ &= 0\end{aligned}$$

et

$$(A - S_{\psi,0})M_z = M_z(A - S_{\psi,0})$$

donc l'opérateur $A - S_{\psi,0}$ est commute avec M_z, alors, il est de multiplication, de-pulse $A - S_{\psi,0} = M_\beta = S_{\beta,\beta}$ pour certains $\beta \in L^\infty$, alors

$$A = S_{\psi,0} + S_{\beta,\beta} = S_{\psi+\beta,\beta}.$$

$\square$

En général, l'adjoint $S^*_{\alpha,\beta}$ n'est pas dans S. Le résultat suivant nous donnons les conditions nécessaires et suffisantes pour $S^*_{\alpha,\beta}$ appartient à S.

Proposition 3.1.2. *L'adjoint, $S^*_{\alpha,\beta} \in S$ si et seulement si $(\alpha - \beta) = \lambda$ pour certains constante λ. Dans ce cas $S^*_{\alpha,\beta} = S_{\overline{\alpha},\overline{\beta}}$.*

Démonstration.
Par proposition (3.1.1) $S^*_{\alpha,\beta} \in S$ si et seulement si

$$S^*_{\alpha,\beta}M_z - M_zS^*_{\alpha,\beta} = \psi \otimes e_{-1}$$

pour certains $\psi \in L^\infty$. Mais $M_z^*M_z = M_zM_z^* = I$ et

$$\begin{aligned}S^*_{\alpha,\beta}M_z - M_zS^*_{\alpha,\beta} &= M_z(M_z^*S^*_{\alpha,\beta} - S^*_{\alpha,\beta}M_z^*)M_z\\ &= M_z[S_{\alpha,\beta}, M_z]^*M_z\\ &= M_z[e_{-1} \otimes (\alpha - \beta)]M_z\\ &= e_0 \otimes \overline{z}(\alpha - \beta).\end{aligned}$$

Donc

$$\psi \otimes e_{-1} = e_0 \otimes \overline{z}(\alpha - \beta)$$

et $(\alpha - \beta)\overline{z} = \lambda e_{-1}$ et $\psi = \overline{\lambda} e_0$ pour un certains nombre complexe λ. Dans ce cas

$$S^*_{\alpha,\beta} = (M_\beta + S_{\alpha-\beta,0})^* = M_{\overline{\beta}} + S_{\overline{\lambda},0} = S_{\overline{\alpha},\overline{\beta}}.$$

$\square$

On note par M_+ le sous-ensemble d'opérateurs de S et leur adjoints dans S, $M \subset M_+ \subset S$, par :

$$M_+ = \{S_{\beta+\lambda,\beta}, \beta \in L^\infty, \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Le corollaire suivant, c'est le théorème 2.1 dans [17], (voir aussi [16]).

Corollaire 3.1. *[16, 17] $S_{\alpha,\beta}$ est auto-adjoint si et seulement si α et β sont des fonctions réelles et $(\alpha-\beta)$ est une constante réelle.*

Démonstration.
If $S^*_{\alpha,\beta} = S_{\alpha,\beta} \in S$, d'après proposition 3.1.2, $(\alpha-\beta)$ est une constante, de plus

$$S^*_{\alpha,\beta} = S_{\overline{\alpha},\overline{\beta}} = S_{\alpha,\beta}$$

implique que $\alpha = \overline{\alpha}$ et $\beta = \overline{\beta}$. □

L'ensemble M est une sous-algèbre de S. Existe-t-il d'autres sous-algèbres de S ? Pour répondre à cette question, nous étudions le produit de deux opérateurs de S appartient à S. Nous avons le lemme suivant pour les produits des opérateurs de S ou S^*.

Lemme 3.1. *Soient $S_{\alpha_1,\beta_1}, S_{\alpha_2,\beta_2} \in S$ alors*

$$[S_{\alpha_1,\beta_1} S_{\alpha_2,\beta_2}, M_z] = (\alpha_1 - \beta_1) \otimes S^*_{\alpha_2,\beta_2} e_{-1} + S_{\alpha_1,\beta_1}(\alpha_2 - \beta_2) \otimes e_{-1}$$

de même manière :

$$[S_{\alpha_1,\beta_1} S^*_{\alpha_2,\beta_2}, M_z] = \alpha_1 \otimes \overline{z}\alpha_2 - \beta_1 \otimes \overline{z}\beta_2$$

et

$$[S^*_{\alpha_2,\beta_2} S_{\alpha_1,\beta_1}, M_z] = e_0 \otimes S^*_{\alpha_1,\beta_1} \overline{z}(\alpha_2 - \beta_2) + S^*_{\alpha_2,\beta_2}(\alpha_1 - \beta_1) \otimes e_{-1}.$$

Démonstration.
Par un calcul direct :

$$\begin{aligned}
[S_{\alpha_1,\beta_1} S_{\alpha_2,\beta_2}, M_z] &= [S_{\alpha_1,\beta_1}, M_z] S_{\alpha_2,\beta_2} + S_{\alpha_1,\beta_1}[S_{\alpha_2,\beta_2}, M_z] \\
&= [(\alpha_1 - \beta_1) \otimes e_{-1}] S_{\alpha_2,\beta_2} + S_{\alpha_1,\beta_1}[(\alpha_2 - \beta_2) \otimes e_{-1}] \\
&= (\alpha_1 - \beta_1) \otimes S^*_{\alpha_2,\beta_2} e_{-1} + S_{\alpha_1,\beta_1}(\alpha_2 - \beta_2) \otimes e_{-1}.
\end{aligned}$$

De même manière

$$\begin{aligned}
[S_{\alpha_1,\beta_1}S^*_{\alpha_2,\beta_2}, M_z] &= [S_{\alpha_1,\beta_1}, M_z]S^*_{\alpha_2,\beta_2} + S_{\alpha_1,\beta_1}[S^*_{\alpha_2,\beta_2}, M_z] \\
&= [S_{\alpha_1,\beta_1}, M_z]S^*_{\alpha_2,\beta_2} + S_{\alpha_1,\beta_1}M_z[S_{\alpha_2,\beta_2}, M_z]^*M_z \\
&= (\alpha_1 - \beta_1) \otimes \overline{z}\beta_2 + \alpha_1 \otimes \overline{z}(\alpha_2 - \beta_2) \\
&= \alpha_1 \otimes \overline{z}\alpha_2 - \beta_1 \otimes \overline{z}\beta_2
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
[S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1}, M_z] &= [S^*_{\alpha_2,\beta_2}, M_z]S_{\alpha_1,\beta_1} + S^*_{\alpha_2,\beta_2}[S_{\alpha_1,\beta_1}, M_z] \\
&= M_z[S_{\alpha_2,\beta_2}, M_z]^*M_zS_{\alpha_1,\beta_1} + S^*_{\alpha_2,\beta_2}[S_{\alpha_1,\beta_1}, M_z] \\
&= e_0 \otimes S^*_{\alpha_1,\beta_1}\overline{z}(\alpha_2 - \beta_2) + S^*_{\alpha_2,\beta_2}(\alpha_1 - \beta_1) \otimes e_{-1}.
\end{aligned}$$

□

3.2 Produit des opérateurs intégrales singuliers.

Premièrement on va étudier quand le produit de deux opérateurs de S reste dans S. Ce résultat nous aidera a identifier des sous-algèbres de S.

Théorème 3.2.1. *Soit* $S_{\alpha_1,\beta_1}, S_{\alpha_2,\beta_2} \in S$. *Supposons que* S_{α_1,β_1} *n'est pas dans* M. *Alors* $S_{\alpha_1,\beta_1}S_{\alpha_2,\beta_2} \in S$ *si et seulement si* $\alpha_2 \in H^\infty, \beta_2 \in \overline{H^\infty}$, *dans ce cas*

$$S_{\alpha_1,\beta_1}S_{\alpha_2,\beta_2} = S_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2}.$$

Démonstration.
D'après proposition 3.1.1 $S_{\alpha_1,\beta_1}, S_{\alpha_2,\beta_2} \in S$ si et seulement si

$$[S_{\alpha_1,\beta_1}S_{\alpha_2,\beta_2}, M_z] = \psi \otimes e_{-1}. \tag{3.2}$$

Pour un certains $\psi \in L^\infty$, d'après lemme 3.1

$$[S_{\alpha_1,\beta_1}S_{\alpha_2,\beta_2}, M_z] = (\alpha_1 - \beta_1) \otimes S^*_{\alpha_2,\beta_2}e_{-1} + S_{\alpha_1,\beta_1}(\alpha_2 - \beta_2) \otimes e_{-1} = \psi \otimes e_{-1}.$$

Par hypothèse $\alpha_1 - \beta_1 \neq 0$, alors il existe un nombre complexe λ telle que

$$S^*_{\alpha_2,\beta_2}e_{-1} = \overline{\lambda}e_{-1} \tag{3.3}$$

$$S_{\alpha_1,\beta_1}(\alpha_2 - \beta_2) = -\lambda(\alpha_1 - \beta_1) + \psi. \tag{3.4}$$

Remarquons que $S^*_{\alpha_2,\beta_2}(f) = P[\overline{\alpha_2} f] + Q[\overline{\beta_2} f]$ on a de 3.3

$$(P[\overline{\alpha_2} e_{-1}] + Q[\overline{\beta_2} e_{-1}] = \overline{\lambda}\overline{z}$$

ce qui implique que $\alpha_2 \in H^\infty$ et $\beta_2 = \lambda + \sum_{-\infty}^{-1} \beta_{2n} z^n \in \overline{H^\infty}$. Pour 3.4, on a

$$\begin{aligned} \alpha_1 P[\alpha_2 - \beta_2 + \beta_1 Q[\alpha_2 - \beta_2] &= -\lambda(\alpha_1 - \beta_1) + \psi, \\ \alpha_1(\alpha_2 - \lambda) + \beta_1(-\beta_2 + \lambda) &= -\lambda(\alpha_1 - \beta_1) + \psi \end{aligned}$$

donc

$$\alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2 + \psi. \tag{3.5}$$

Puisque $\alpha_2 \in H^\infty$ et $\beta_2 \in \overline{H^\infty}$

$$\begin{aligned} S_{\alpha_1,\beta_1} S_{\alpha_2,\beta_2} f &= S_{\alpha_1,\beta_1}(\alpha_2 Pf + \beta_2 Qf) \\ &= \alpha_1 P[\alpha_2 Pf + \beta_2 Qf] + \beta_1 Q[\alpha_2 Pf + \beta_2 Qf] \\ &= \alpha_1\alpha_2 Pf + \beta_1\beta_2 Qf \\ &= S_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2} f \\ &= S_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_1\alpha_2-\psi} f \\ &= S_{\beta_1\beta_2+\psi,\beta_1\beta_2} f. \end{aligned}$$

□

Remarque 3.2.1. *(a) Si $S_{\alpha_1,\beta_1} = M_{\alpha_1}$, alors $S_{\alpha_1,\beta_1} S_{\alpha_2,\beta_2} \in S$ pour tout S_{α_2,β_2} et*

$$S_{\alpha_1,\beta_1} S_{\alpha_2,\beta_2} = M_{\alpha_1} S_{\alpha_2,\beta_2} = S_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2}.$$

(b) Supposons que $S_{\alpha_1,\beta_1} \notin M$ et $S_{\alpha_2,\beta_2} = M_{\alpha_2}$. Si $S_{\alpha_1,\beta_1} S_{\alpha_2,\beta_2} \in S$, alors d'après théorème 3.2.1, α_2 est constante,

$$S_{\alpha_2,\beta_2} = \alpha_2 I, S_{\alpha_1,\beta_1} S_{\alpha_2,\beta_2} = S_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2}.$$

(c) Si $\alpha_2 \in H^\infty, \beta_2 \in \overline{H^\infty}$, alors

$$S_{\alpha_1,\beta_1} S_{\alpha_2,\beta_2} = S_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2}$$

cette formule est vraie, pour des opérateurs intégrales singuliers plus générale. Voir équation (6.3) dans [11].

L'opérateur de multiplication M_α, pour un certains $\alpha \in L^\infty$, est inversible si et seulement si α est inversible dans L^∞, dans ce cas $M_\alpha^{-1} = M_{\alpha^{-1}}$. Notons par $erange(\alpha)$ le rang essentielle de α. Alors $\sigma(M_\alpha) = erange(\alpha)$ où $\sigma(M_\alpha)$ est le spectre de M_α. On va étudier maintenant quand $S_{\alpha,\beta}$ est inversible et est-ce-que l'inverse est dans S.

Corollaire 3.2. *Soit $S_{\alpha,\beta} \in S$ pour un certains $\alpha, \beta \in L^\infty$. Supposons que $S_{\alpha,\beta} \notin M$. Alors $S_{\alpha,\beta}$ est inversible et $S^{-1}_{\alpha,\beta} \in S$ si et seulement si $\alpha, \overline{\beta} \in H^\infty$ et $\alpha, \overline{\beta}$ sont inversibles dans H^∞.Dans ce cas*

$$S^{-1}_{\alpha,\beta} = S_{\alpha^{-1},\beta^{-1}}.$$

Démonstration.
Si S_{α_1,β_1} est l'inverse de $S_{\alpha,\beta}$ alors

$$S_{\alpha_1,\beta_1} S_{\alpha,\beta} = S_{\alpha_1\alpha,\beta_1\beta} = I \in S$$

comme $S_{\alpha_1,\beta_1} \notin M$(sinon $S_{\alpha,\beta} \in M$), d'après théorème 3.2.1 $\alpha, \overline{\beta} \in H^\infty$ et $\alpha_1\alpha = \beta_1\beta = 1$.

□

La démonstration de théorème 3.2.1, c'est vrai aussi quand $S_{\alpha_1,\beta_1} S_{\alpha_2,\beta_2} \in M$, pour $\psi = 0$. (Voir [12]).

Corollaire 3.3. *Soient $S_{\alpha_1,\beta_1} S_{\alpha_2,\beta_2} \in S$. Supposons que $S_{\alpha_1,\beta_1} \notin M$. Alors $S_{\alpha_1,\beta_1} S_{\alpha_2,\beta_2} \in M$ si et seulement si $\alpha_2 \in H^\infty, \beta \in \overline{H^\infty}$ et $\alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2$. Dans ce cas*

$$S_{\alpha_1,\beta_1} S_{\alpha_2,\beta_2} = M_{\beta_1\beta_2}.$$

Nous avons besoin du résultat important suivant (une partie du théorème de F. et M. Riesz), voir le corollaire 4.2 à la page 62 de [10].

Lemme 3.2. *Si $\alpha \in H^2$ et $\alpha \not\equiv 0$, alors $\alpha \neq 0$ presque partout dans le cercle unité $\mathbb{T}$.*

Le résultat suivant caractérise quand $S_{\alpha_1,\beta_1} S_{\alpha_2,\beta_2} = 0$.

Corollaire 3.4. *Soient $S_{\alpha_1,\beta_1}, S_{\alpha_2,\beta_2} \in S$. Supposons que $S_{\alpha_1,\beta_1} \notin M$ et $S_{\alpha_2,\beta_2} \neq 0$, alors $S_{\alpha_1,\beta_1} S_{\alpha_2,\beta_2} = 0$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite*
(i) $\alpha_1 \neq 0, \beta_1 \neq 0, \alpha_2 = 0$ et $\beta_2 \in \overline{H^\infty}$.
(ii) $\beta_1 \neq 0, \alpha_1 = 0, \beta_2 = 0$ et $\alpha_2 \in H^\infty$.

Démonstration.
D'après corollaire 3.2, $\alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2 = 0$. Le résultat est obtenue d'après cette équation et le lemme 3.2 comme $\alpha_2 \in H^\infty$ *et* $\beta_2 \in \overline{H^\infty}$. □

Nous identifions maintenant quelques sous-algèbres de S qui apparentés aux sous-algèbres de H^∞.

Corollaire 3.5. *L'algèbre maximale K de S n'est contenue dans M est :*

$$K = \{S_{\alpha,\beta}, \alpha \in H^\infty, \beta \in \overline{H^\infty}.\}$$

Démonstration.
Soit K un sous algèbre de S qui est pas dans M. Soit $S_{\alpha,\beta} \in S$ mais $S_{\alpha,\beta} \notin M$. d'âpres théorème 3.2.1, $S^*_{\alpha,\beta} \in K \subset S$ implique que $\alpha \in H^\infty, \beta \in \overline{H^\infty}$. Soit S_{α_1,β_1} un élément arbitraire de K, alors $S_{\alpha,\beta}S_{\alpha_1,\beta_1} \in K \subset S$ implique que $\alpha \in H^\infty, \beta_1 \in \overline{H^\infty}$. □

Si $S_{\alpha,\beta} \in K$, alors $S^*_{\alpha,\beta} \notin S$ sauf si α, β sont constants (d'après proposition 3.1.2), pour toutes fonctions intérieures fixés θ_1, θ_2. l'ensemble suivante de K_{θ_1,θ_2} est un sous-algèbre de S.

$$K_{\theta_1,\theta_2} = \{S_{\theta_1\alpha,\overline{\theta_2}\beta}, \alpha \in H^\infty, \beta \in \overline{H^\infty}\} = S_{\theta_1,\overline{\theta_2}}K.$$

Ensuite nous considérons quand $S^*_{\alpha_1,\beta_1}S_{\alpha_2,\beta_2}$ appartient à S. Cette caractérisation est légèrement plus compliqué.

Proposition 3.2.1. *Soient $S_{\alpha_1,\beta_1}, S_{\alpha_2,\beta_2} \in S$. Alors $S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1} \in S$ si et seulement si $\alpha_1(\overline{\alpha_2} - \overline{\beta_2}), \overline{\beta_1}(\alpha_2 - \beta_2) \in H^\infty$.Dans ce cas*

$$S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1} = S_{\overline{\alpha_2}\alpha_1,\overline{\beta_2}\beta_1}.$$

Démonstration.
D'après proposition 3.1.1 $S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1} \in S$ si et seulement si

$$[S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1}, M_z] = \psi \otimes e_{-1}.$$

Pour un certains $\psi \in L^\infty$. D'après lemme 3.1

$$\begin{aligned}[S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1}, M_z] &= e_0 \otimes S^*_{\alpha_1,\beta_1}\overline{z}(\alpha_2 - \beta_2) + S^*_{\alpha_2,\beta_2}(\alpha_1 - \beta_1) \otimes e_{-1} \\ &= \psi \otimes e_{-1}.\end{aligned}$$

Alors il existe un nombre complex λ telle que

$$\begin{aligned} S^*_{\alpha_1,\beta_1}\overline{z}(\alpha_2 - \beta_2) &= \overline{\lambda}e_{-1} \\ \lambda e_0 + S^*_{\alpha_2,\beta_2}(\alpha_1 - \beta_1) &= \psi.\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} P[\overline{\alpha_1 z}(\alpha_2-\beta_2)]+Q[\overline{\beta_1}\overline{z}(\alpha_2-\beta_2) &= \overline{\lambda}\overline{z} \\ \lambda+P[\overline{\alpha_2}(\alpha_1-\beta_1)]+Q[\overline{\beta_2}(\alpha_1-\beta_1)] &= \psi. \end{aligned}$$

Alors $\overline{\alpha_1}(\alpha_2-\beta_2)=\overline{h_1}$ *et* $\overline{\beta_1}(\alpha_2-\beta_2)=\overline{\lambda}+zh_2$ pour un certains $h_1,h_2\in H^\infty$. Maintenant

$$\begin{aligned} S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1}f &= P[\overline{\alpha_2}\alpha_1Pf+\overline{\alpha_2}\beta_1Qf]+Q[\overline{\beta_2}\alpha_1Pf+\overline{\beta_2}\beta_1Qf] \\ &= P[\alpha_1(\overline{\alpha_2}-\overline{\beta_2})Pf+\beta_1(\overline{\alpha_2}-\overline{\beta_2})Qf]+\overline{\beta_2}\alpha_1Pf+\overline{\beta_2}\beta_1Qf \\ &= \alpha_1(\overline{\alpha_2}-\overline{\beta_2})Pf+\overline{\beta_2}\alpha_1Pf+\overline{\beta_2}\beta_1Qf \\ &= \overline{\alpha_2}\alpha_1Pf+\overline{\beta_2}\beta_1Qf \\ &= S_{\overline{\alpha_2}\alpha_1,\overline{\beta_2}\beta_1}f. \end{aligned}$$

□

Corollaire 3.6. *Soient* $S_{\alpha_1,\beta_1},S_{\alpha_2,\beta_2}\in S$*.Alors*

(a) $S^*_{\alpha_2,\beta_2},S_{\alpha_1,\beta_1}\in M$ *si et seulement si* $\alpha_1(\overline{\alpha_2}-\overline{\beta_2}),\overline{\beta_2}(\alpha_2\beta_2)\in H^\infty$ *et* $\overline{\alpha_2}\alpha_1=\overline{\beta_2}\beta_1$*, dans ce cas* $S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1}=M_{\overline{\alpha_2}\alpha_1}$*.*

(b) Si $S_{\alpha_1,\beta_1}\neq 0$ *et* $S_{\alpha_2,\beta_2}\neq 0$*, alors* $S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1}=0$ *si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite*

(i) $\alpha_1\neq 0,\beta_2\neq 0,\beta_1=0,\alpha_2=0$ *et* $\alpha_1\overline{\beta_2}\in H^\infty$.

(ii) $\alpha_2\neq 0,\beta_1\neq 0,\alpha_1=0,\beta_2=0$ *et* $\overline{\beta_1}\alpha_2\in H^\infty$.

Démonstration.
La partie (a) découle de la preuve du proposition 3.2.1.Nous prouvons maintenant (b). Si $S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1}=0$, alors $\overline{\alpha_2}\alpha_1=\overline{\beta_2}\beta_1=0$.Puisque $\alpha_1\overline{\beta_2}\in H^\infty$, d'aprés lemme 3.2 ou bien $\alpha_1\overline{\beta_2}=0$ ou bien $\alpha_1\overline{\beta_2}\neq 0$ presque partout sur $\mathbb{T}$. Donc si les deux α_1,β_2 sont pas des fonctions nulles, alors

$$\overline{\alpha_2}\alpha_1=\overline{\beta_2}\beta_1=0$$

implique que les deux α_1,β_2 sont des fonctions nulles. ce prouve (i). La preuve de (ii) est similaire. □

Corollaire 3.7. *Soit* $\alpha\in L^\infty$ *et supposons que* α *est inversible dans* L^∞*, soit aussi* $h\in H^\infty$ *et supposons que* h *soit inversible dans* H^∞*. Alors* $S_{\alpha,h\alpha}$ *est inversible a gauche avec l'inverse gauche* $S^*_{\frac{1}{\overline{\alpha}},\frac{1}{\overline{h\alpha}}}$*.*

Par la proposition 3.1.2, $S^*_{\frac{1}{\overline{\alpha}},\frac{1}{\overline{h\alpha}}}$. n'est généralement pas l'inverse de $S_{\alpha,h\alpha}$ sauf si h est une constante.

Corollaire 3.8. *[17] L'opérateur $S_{\alpha,\beta}$ est une isométrie si et seulement si $|\alpha| = |\beta| = 1$ et $\alpha = \theta\beta$ pour une fonction intérieure θ.*
L'opérateur $S_{\alpha,\beta}$ est un opérateur unitaire si et seulement si $|\alpha| = |\beta| = 1$ et $\alpha = \lambda\beta$ pour une constante unimodulaire λ.

Démonstration.
L'opérateur $S_{\alpha,\beta}$ est une isométrie si et seulement si

$$S^*_{\alpha,\beta}S_{\alpha,\beta} = I.$$

Par corollaire 3.6 $\overline{\alpha}\alpha = \overline{\beta}\beta = 0$. La fonction $\alpha(\overline{\alpha} - \overline{\beta}) = 1 - \alpha\overline{\beta} \in H^\infty$ implique que $\alpha\overline{\beta} \in H^\infty$. Mais $|\alpha\overline{\beta}| = 1$, alors $\alpha\overline{\beta} = \theta \in H^\infty$ est une fonction intérieure. Donc $\alpha = \alpha\overline{\beta}\beta = \theta\beta$.
Si $S_{\alpha,\beta} = S_{\theta f,\beta}$ est un opérateur unitaire, alors

$$\begin{aligned} \beta &= S_{\theta f,\beta}S^*_{\theta\beta,\beta}\beta \\ &= S_{\theta\beta,\beta}[P(\overline{\theta\beta}\beta) + Q(\overline{\beta}\beta)] \\ &= S_{\theta\beta,\beta}P(\overline{\theta}) \\ &= \theta\beta P(\overline{\theta}). \end{aligned}$$

Donc $\theta P(\overline{\theta}) = 1$ puisque $|\beta| = 1$. Donc θ est une constante de module un. □

Il est naturel de demander quand $S_{\alpha,\beta}$ est une coisométrie. Nous pouvons répondre à cette question en va étudier le produit $S_{\alpha_1,\beta_1}S^*_{\alpha_2,\beta_2}$.

Proposition 3.2.2. *Soit $S_{\alpha_1,\beta_1}, S_{\alpha_2,\beta_2} \in S$. Supposons que $S_{\alpha_1,\beta_1} \neq 0$. Alors $S_{\alpha_1,\beta_1}S^*_{\alpha_2,\beta_2} \in S$ si et seulement si l'une des quatre déclarations suivantes est vérifiée.*
(i) $\alpha_1 = 0$ et β_2 est une constante.
(ii) $\beta_1 = 0$ et α_2 est une constante.
(iii) α_2 et β_2 sont des constantes.
(iv) $\beta_1 = \overline{\lambda}\alpha_1, \alpha_2 = \lambda\beta_2 + \mu$ pour deux constantes λ et μ.
Dans tous les cas,

$$S_{\alpha_1,\beta_1}S^*_{\alpha_2,\beta_2} = S_{\alpha_1\overline{\alpha_2},\beta_1\overline{\beta_2}}.$$

Démonstration.
Par la proposition 3.1, $S_{\alpha_1,\beta_1}, S^*_{\alpha_2,\beta_2} \in S$ si et seulement si

$$[S_{\alpha_1,\beta_1}S^*_{\alpha_2,\beta_2}, M_z] = \psi \otimes e_{-1}$$

pour certains $\psi \in L^\infty$. Par le lemme 3.2.2

$$\begin{aligned} [S_{\alpha_1,\beta_1}S^*_{\alpha_2,\beta_2}, M_z] &= \alpha_1 \otimes \overline{z}\alpha_2 - \beta_1 \otimes \overline{z}\beta_2 && (3.6) \\ &= \psi \otimes e_{-1}. && (3.7) \end{aligned}$$

Il y a deux cas. α_2 et β_2 sont linéairement dépendants ou α_1 et β_1 sont linéairement dépendant.
Supposons que α_2 et β_2 sont linéairement dépendants. Si $\beta_2 = 0$ et $\psi = 0$, alors $\alpha_1 = 0$ (supposons que $\alpha_2 \neq 0$). Pour (i) avec $\beta_2 = 0$. Si $\beta_2 = 0$ et $\psi \neq 0$, alors par 3.6 , α_2 est une constante. Pour (iii) avec $\beta_2 = 0$. Si $\beta_2 \neq 0$, alors

$$\alpha_2 = \lambda\beta_2 \tag{3.8}$$

pour une constante λ. Maintenant l'équation 3.6 devient

$$(\overline{\lambda}\alpha_1 - \beta_1) \otimes \overline{z}\beta_2 = \psi \otimes e_{-1}.$$

Si $\psi = 0$, alors $\overline{\lambda}\alpha_1 - \beta_1 = 0$. Cela conduit à la déclaration (iv) avec $\mu = 0$. Si $\psi \neq 0$, $\overline{z}\beta_2 = \mu e_{-1}$ pour une constante μ, donc β_2 est une constante. Donc, on a la condition (iii).
Supposons maintenant que α_1 et β_1 dépendent linéairement, mais que α_2 et β_2 sont linéairement indépendants. Si $\beta_1 = 0$, alors 3.6 implique que α_2 est une constante (en supposant que $\alpha_1 \neq 0$). donc, on a la condition (ii). Si $\beta_1 \neq 0$, alors

$$\alpha_1 = \lambda\beta_1. \tag{3.9}$$

Maintenant l'équation 3.6 devient

$$\beta_1 \otimes \overline{z}(\overline{\lambda}\alpha_2 - \beta_2) = \psi \otimes e_{-1}.$$

Si $\psi = 0$, alors $\overline{\lambda}\alpha_2 - \beta_2 = 0$, ce qui est impossible. Si $\psi \neq 0$, il existe une constante $\mu \neq 0$ tel que

$$(\overline{\lambda}\alpha_2 - \beta_2) = -\mu, \overline{\mu}\beta_1 = \psi. \tag{3.10}$$

Si $\lambda = 0$, alors par 3.9 et 3.10, $\alpha_1 = 0$ et β_2 est une constante. Donc, on a la condition (i). Si $\lambda \neq 0$, cela conduit à la déclaration (iv). Dans ce cas, par 3.9 et 3.10,

$$\begin{aligned} S_{\alpha_1,\beta_1}S^*_{\alpha_2,\beta_2}f &= S_{\alpha_1,\beta_1}[P[\overline{\alpha_2}f] + Q[\overline{\beta_2}f]] \\ &= \alpha_1 P[\overline{\alpha_2}f] + \beta_1 Q[\overline{\beta_2}f] \\ &= \lambda\beta_1 P[\overline{\alpha_2}f] + \beta_1 Q[(\lambda\overline{\alpha_2} + \overline{\mu})f] \\ &= \lambda\beta_1\overline{\alpha_2}f + \beta_1\overline{\mu}Q[f] \\ &= S_{\lambda\beta_1\overline{\alpha_2},\lambda\beta_1\overline{\alpha_2}+\overline{\mu}\beta_1} \\ &= S_{\alpha_1\overline{\alpha_2},\beta_1\overline{\beta_2}}. \end{aligned}$$

□

Le corollaire 3.8 montre que $S_{\beta,\beta}$ une isométrie mais pas un opérateur unitaire. Le corollaire suivant montre que $S_{\beta,\beta}$ est une coisométrie implique que $S_{\beta,\beta}$ est un opérateur unitaire.

Corollaire 3.9. *L'opérateur $S_{\alpha,\beta}$ est un coisométrie si et seulement si $S_{\alpha,\beta}$ est un opérateur unitaire.*

Démonstration.
L'opérateur $S_{\alpha,\beta}$ est une coisométrie si et seulement si $S_{\alpha,\beta}S^*_{\alpha,\beta} = I$. Selon la proposition 3.2.2,

$$S_{\alpha,\beta}S^*_{\alpha,\beta} = S_{\alpha\overline{\alpha},\beta\overline{\beta}} = I,$$

donc $|\alpha| = |\beta| = 1$. Si la déclaration (iii) de la proposition 3.2.2 est vérifiée, alors $S_{\alpha,\beta}$ est un multiple de l'identité, donc $S_{\alpha,\beta}$ est un opérateur unitaire. Si l'affirmation (iv) de la proposition 3.2.2 est vérifiée, alors $\alpha = \lambda\beta$ pour une constante unimodulaire σ et $S_{\alpha,\beta}$ est un opérateur unitaire du corollaire 3.6. □

3.3 Commutativité des opérateurs d'intégrale singulière.

Dans cette section, nous intéressons aux opérateurs de S commutent. Contrairement à l'ensemble M, deux opérateurs quelconques de M commutent toujours, nous prouvons que deux opérateurs de S commutent si et seulement si l'un est essentiellement un multiple scalaire de l'autre opérateur. Rappelons que l'algèbre K est définie par

$$K = \left\{S_{\alpha,\beta}, \alpha \in H^\infty, \beta \in \overline{H^\infty}\right\}.$$

Si S_{α_1,β_1} ou S_{α_2,β_2} est un multiple scalaire de l'identité, alors $S_{\alpha_1,\beta_1}S_{\alpha_2,\beta_2} = S_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1}$. Ainsi, dans le prochain théorème, nous supposons que S_{α_1,β_1} et S_{α_2,β_2} ne sont pas multiples scalaires de l'opérateur d'identité.

Théorème 3.3.1. *Si $S_{\alpha_1,\beta_1}S_{\alpha_2,\beta_2} = S_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1}$, alors l'une des conditions suivantes est satisfaite*

(i) $S_{\alpha_1,\beta_1}, S_{\alpha_2,\beta_2} \in M$.

(ii) $S_{\alpha_1,\beta_1}, S_{\alpha_2,\beta_2} \in K$.

(iii) $S_{\alpha_1,\beta_1} = \lambda S_{\alpha_2,\beta_2} + \mu I$ *pour certaines constantes* λ *et* μ.

Démonstration.
Supposons que (i) ne tienne pas. Nous prouverons que (ii) ou (iii) est valable. Par Lemme (3.1, $S_{\alpha_1,\beta_1}S_{\alpha_2,\beta_2} = S_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1}$ implique que

$$(\alpha_1-\beta_1)\otimes S^*_{\alpha_2,\beta_2}e_{-1}+S_{\alpha_1,\beta_1}(\alpha_2-\beta_2)\otimes e_{-1} = (\alpha_2-\beta_2)\otimes S^*_{\alpha_1,\beta_1}e_{-1}+S_{\alpha_2,\beta_2}(\alpha_1-\beta_1)\otimes e_{-1}. \tag{3.11}$$

Il y a trois cas.

Cas A. Soit $\alpha_1 - \beta_1 = 0$ ou $\alpha_2 - \beta_2 = 0$ Sans perte de généralité, supposons que $\alpha_1 - \beta_1 = 0$ et $\alpha_2 - \beta_2 \neq 0$. Puis par 3.11,

$$S^*_{\alpha_1,\beta_1}e_{-1} = \sigma e_{-1}$$

pour une constante σ. Cela implique que $\alpha_1 = \beta_1 = \overline{\sigma}$, donc $S_{\alpha_1,\beta_1} = \overline{\sigma}I$.

Cas B. $\alpha_1 - \beta_1 \neq 0, \alpha_2 - \beta_2 \neq 0$ et $(\alpha_1 - \beta_1) \neq \lambda(\alpha_2 - \beta_2)$ pour toute constante λ. Puis par 3.11,

$$S^*_{\alpha_2,\beta_2}e_{-1} = \mu e_{-1}, S^*_{\alpha_1,\beta_1}e_{-1} = \sigma e_{-1} \tag{3.12}$$

pour certaines constantes μ et σ. Ainsi

$$\overline{\mu}(\alpha_1 - \beta_1) + S_{\alpha_1,\beta_1}(\alpha_2 - \beta_2) = \overline{\sigma}(\alpha_2 - \beta_2) + S_{\alpha_2,\beta_2}(\alpha_1 - \beta_1).$$

L'équation 3.12 est la même que 3.3. Ainsi, l'équation 3.12 implique que $\alpha_2 \in H^\infty, \beta_2 \in \overline{H^\infty}$ et $\alpha_1 \in H^\infty, \beta_1 \in \overline{H^\infty}$. Par conséquent, $S_{\alpha_1,\beta_1}, S_{\alpha_2,\beta_2} \in K$ et

$$S_{\alpha_1,\beta_1} S_{\alpha_2,\beta_2} = S_{\alpha_2,\beta_2} S_{\alpha_1,\beta_1} = S_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2}$$

donc on a (ii).

Cas C. $\alpha_1 - \beta_1 \neq 0, \alpha_2 - \beta_2 \neq 0$ et $(\alpha_1 - \beta_1) = \lambda(\alpha_2 - \beta_2)$ pour une certaine constante λ. Notez que $\lambda\alpha_2 - \alpha_1 = \lambda\beta_2 - \beta_1$, alors 3.11 devient

$$\begin{aligned}
(\alpha_2 - \beta_2) \otimes (\overline{\lambda} S^*_{\alpha_2,\alpha_2} e_{-1} - S^*_{\alpha_1,\alpha_1} e_{-1}) &= (S_{\alpha_2,\alpha_2}(\alpha_1 - \beta_1) - S_{\alpha_1,\alpha_1}(\alpha_2 - \beta_2)) \otimes e_{-1} \\
&= (S_{\alpha_2,\alpha_2} \lambda(\alpha_2 - \beta_2) - S_{\alpha_1,\alpha_1}(\alpha_2 - \beta_2)) \otimes e_{-1} \\
&= S_{\lambda\alpha_2 - \alpha_1, \lambda\beta_2 - \beta_1}(\alpha_2 - \beta_2) \otimes e_{-1} \\
&= [(\lambda\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \beta_2)] \otimes e_{-1}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une constante μ telle que

$$\overline{\lambda} S^*_{\alpha_2,\beta_2} e_{-1} - S^*_{\alpha_1,\beta_1} e_{-1} = \overline{\mu} e_{-1} \tag{3.13}$$

$$(\lambda\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \beta_2) = \mu(\alpha_2 - \beta_2). \tag{3.14}$$

Il résulte de 3.13 que

$$(P[\overline{\lambda}\overline{\alpha_2 z} - \overline{\alpha_1 z}] + Q[\lambda\overline{\beta_2}\overline{z} - \overline{\beta_1 z}]) = \overline{\mu z}$$

D'où $\overline{\lambda}\overline{\alpha_2} - \overline{\alpha_1} = \overline{h_1}, \overline{\lambda\beta_2} - \beta_1 = \overline{\mu} + zh_2$ pour certains $h_1, h_2 \in H^\infty$. Équation 3.14 devient

$$(\lambda\alpha_2 - \alpha_1 - \mu)(\alpha_2 - \beta_2) = 0.$$

Mais $\lambda\alpha_2 - \alpha_1 - \mu = h_1 - \mu \in H^\infty$. En lemme 3.2, soit $\alpha_2 - \beta_2 = 0$ ou $\lambda\alpha_2 - \alpha_1 - \mu = 0$. Dans le cas $\alpha_2 - \beta_2 = 0$, nous avons $(\alpha_1 - \beta_1) = \lambda(\alpha_2 - \beta_2) = 0$, donc les deux S_{α_1,β_1} et S_{α_2,β_2} sont en M ce qui est exclu au début de la preuve. Donc $\lambda\alpha_2 - \alpha_1 - \mu = 0$. En outre, $\lambda\beta_2 - \beta_1 = \lambda\alpha_2 - \alpha_1 = \mu$, C'est-à-dire, $\alpha_1 = \lambda\alpha_2 - \mu$ et $\beta_1 = \lambda\beta_2 - \mu$. En conclusion $S_{\alpha_1,\beta_1} = \lambda S_{\alpha_2,\beta_2} - \mu I$. $\square$

Remarque 3.3.1. *Si S_{α_1,β_1} (ou S_{α_2,β_2}) est en K mais pas en M, alors $S_{\alpha_1,\beta_1} S_{\alpha_2,\beta_2} = S_{\alpha_2,\beta_2} S_{\alpha_1,\beta_1}$ implique que S_{α_2,β_2} est aussi en K. Si S_{α_1,β_1} est en M, alors $S_{\alpha_1,\beta_1} S_{\alpha_2,\beta_2} = S_{\alpha_2,\beta_2} S_{\alpha_1,\beta_1}$ implique que S_{α_2,β_2} est aussi en M ou $S_{\alpha_1,\beta_1} = cI$ pour une certaine constante c.*

3.4 Commutativité des opérateurs d'intégrale singulière avec leurs adjoints.

Dans cette section, nous étudions quand $S_{\alpha_1,\beta_1}S^*_{\alpha_2,\beta_2} = S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1}$. Nous retrouvons le résultat dans [17] à propos du moment où S_{α_1,β_1} est un opérateur normal. La preuve du théorème 3.4.1 est élémentaire en utilisant le lemme 3.1, mais il est assez long et un peu compliqué. Nous divisons la preuve en plusieurs lemmes. Si S_{α_1,β_1} or S_{α_2,β_2} est un multiple scalaire d'opérateur d'identité, puis $S_{\alpha_1,\beta_1}S^*_{\alpha_2,\beta_2} = S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1}$. Ainsi, dans cette section, nous supposons que les deux S_{α_1,β_1} et S_{α_2,β_2} ne sont pas des multiples scalaires de l'opérateur d'identité.

Lemme 3.3. *Si $S_{\alpha_1,\beta_1}S^*_{\alpha_2,\beta_2} = S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1}$, Alors*

$$\alpha_1 \otimes \overline{z}\alpha_2 - \beta_1 \otimes \overline{z}\beta_2 = e_0 \otimes S^*_{\alpha_1,\beta_1}\overline{z}(\alpha_2 - \beta_2) + S^*_{\alpha_2,\beta_2}(\alpha_1 - \beta_1) \otimes e_{-1}. \quad (3.15)$$

Démonstration.
Notez que $S_{\alpha_1,\beta_1}S^*_{\alpha_2,\beta_2} = S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1}$ implique que

$$[S_{\alpha_1,\beta_1}S^*_{\alpha_2,\beta_2}, M_z] = [S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1}, M_z]$$

Par le lemme 3.1,

$$\alpha_1 \otimes \overline{z}\alpha_2 - \beta_1 \otimes \overline{z}\beta_2 = e_0 \otimes S^*_{\alpha 1,\beta 1}\overline{z}(\alpha_2 - \beta_2) + S^*_{\alpha_2,\beta_2}(\alpha_1 - \beta_1) \otimes e_{-1}.$$

La preuve est complète. □

Lemme 3.4. *Si les deux côtés de 3.15 sont des opérateurs nuls, l'une des conditions suivantes est satisfaite.*

(i) Les deux S_{α_1,β_1} et S_{α_2,β_2} sont en M.

(ii) $\alpha_2 = \beta_1 = 0$ et $\alpha_1\overline{\beta_2} \in H^\infty$. Dans ce cas, $S_{\alpha_1,\beta_1}S^*_{\alpha_2,\beta_2} = S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1} = 0$.

(iii) $\alpha_1 = \beta_2 = 0$ et $\overline{\beta_1}\alpha_2 \in H^\infty$. Dans ce cas, $S_{\alpha_1,\beta_1}S^*_{\alpha_2,\beta_2} = S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1} = 0$.

(iv) Il existe certaines constantes $\lambda(\lambda \neq 0, 1)$ et μ telles que

$$\alpha_1 = \lambda\beta_1, \beta_2 = \overline{\lambda}\alpha_2, , \overline{\alpha_1}\alpha_2 = \mu.$$

Dans ce cas, $S_{\alpha_1,\beta_1}S^*_{\alpha_2,\beta_2} = S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1} = \overline{\mu}I$.

Démonstration.
Si les deux côtés de 3.15 sont des opérateurs nuls et que $\beta_1 = 0$, alors $\alpha_1 \otimes \overline{z}\alpha_2 = 0$ implique que $\alpha_2 = 0$. Si le côté droit de 3.15 est un opérateur nul, alors

$$S^*_{\alpha_1,\beta_1}\overline{z}(\alpha_2 - \beta_2) = \eta e_{-1}, S^*_{\alpha_2,\beta_2}(\alpha_1 - \beta_1) = -\overline{\eta}e_0$$

pour certains constante η. Donc

$$S^*_{\alpha_1,\beta_1}\overline{z}(\alpha_2 - \beta_2) = P[\overline{\alpha_1 z}(0 - \beta_2)] = \eta\overline{z},$$

ce qui implique que $\overline{\alpha_1}\beta_2 \in \overline{H^\infty}$. Cela conduit à (ii). Si les deux côtés de 3.15 sont à zéro opérateurs et $\beta_1 \neq 0$, alors

$$\alpha_1 = \lambda\beta_1, \beta_2 = \overline{\lambda}\alpha_2, S^*_{\alpha_1,\beta_1}\overline{z}(\alpha_2 - \beta_2) = \eta e_{-1}, S^*_{\alpha_2,\beta_2}(\alpha_1 - \beta_1) = -\overline{\eta}e_0$$

pour certaines constantes λ et η.

Si $\lambda = 0$, alors $\alpha_1 = \beta_2 = 0$ et $\overline{\beta_1}\alpha_2 \in H^\infty$. Cela conduit à la déclaration (iii).

Si $\lambda = 1$, alors les deux S_{α_1,β_1} et S_{α_2,β_2} sont en M. Ceci mène à l'énoncé (i).

Si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$

$$P[\overline{\alpha_1 z}(1 - \overline{\lambda})\alpha_2] + Q[\overline{\beta_1 z}(1 - \overline{\lambda})\alpha_2] = \eta\overline{z},$$

ce qui implique que $\overline{\alpha_1}\alpha_2 = \overline{\lambda\beta_1}\alpha_2 \in \overline{H^\infty}, \overline{\beta_1}\alpha_2 \in H^\infty$. Par conséquent, $\overline{\alpha_1}\alpha_2$ est une constante. Dans ce cas, il est facile de vérifier que $S_{\alpha_1,\beta 1}S^*_{\alpha_2,\beta_2} = S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1} = \overline{\mu}I$. D'où on a (iv). □

Lemme 3.5. *Si les deux côtés de 3.15 sont des opérateurs de rang un, l'une des conditions suivantes est satisfaite*

(1) α_2 *et* β_2 *sont des constantes. Dans ce cas,* $S_{\alpha_1,\beta_1}S^*_{\alpha_2,\beta_2} = S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1} = S_{\alpha_1\overline{\alpha_2},\beta_1\overline{\beta_2}}$ *.*

(2) α_1 *et* β_1 *sont des constantes. Dans ce cas,* $S_{\alpha_1,\beta_1}S^*_{\alpha_2,\beta_2} = S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1} = S_{\alpha_1\overline{\alpha_2},\beta_1\overline{\beta_2}}$ *.*

(3a) $\alpha_1 = 0, \beta_2$ *est une constante et* $\overline{\beta_1}(\alpha_2 - \beta_2) \in H^\infty$.

(3b) $\alpha_1 = \lambda\beta_1, \overline{\lambda}\alpha_2 - \beta_2 = \delta$ *pour certaines constantes* $\lambda \neq 0$ *et* δ, *et* $\overline{\beta_1}(\alpha_2 - \beta_2)$ *constant. Dans les cas (3a) et (3b),* $S_{\alpha_1,\beta_1}S^*_{\alpha_2,\beta_2} = S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1} = S_{\alpha_1\overline{\alpha_2},\beta_1\overline{\beta_2}}$ *.*

(4a) $\beta_2 = 0, \alpha_1$ *est une constante et* $\alpha_2(\overline{\beta_1} - \overline{\alpha_1}) \in H^\infty$.

(4b) $\beta_2 = \eta\alpha_2, \alpha_1 - \overline{\eta}\beta_1 = \delta$ *pour certaines constantes* $\eta \neq 0$ *et* δ, *et* $\overline{\beta_2}(\alpha_1 - \beta_2)$ *est un constant. Dans les cas (4a) et (4b),* $S_{\alpha_1,\beta_1}S^*_{\alpha_2,\beta_2} = S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1} = S^*_{\overline{\alpha_1},\alpha_2,\overline{\beta_1},\beta_2}$.

(5a) $\alpha_2 = 0, \beta_1$ *est une constante et* $\overline{\beta_2}(\alpha_1 - \beta_1) \in H^\infty$. *Dans ce cas,* $S_{\alpha_1,\beta_1}S^*_{\alpha_2,\beta_2} = S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1} = S^*_{\alpha_1\overline{\alpha_2},\beta_1\overline{\beta_2}}$.

(5b) $\beta_1 = 0, \alpha_2$ *est une constante, et* $\alpha_1(\overline{\alpha_2} - \overline{\beta_2}) \in H^\infty$. *Dans ce cas,* $S_{\alpha_1,\beta_1}S^*_{\alpha_2,\beta_2} = S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1} = S_{\alpha_1\overline{\alpha_2},\beta_1\overline{\beta_2}}$.

Démonstration.
Supposons que d'abord $\alpha_2 \neq 0$ et $\beta_1 \neq 0$. Si le côté gauche de 3.15 est de rang un, alors il existe des constantes η et λ telles que

$$\textit{soit } \beta_2 = \eta\alpha_2 \tag{3.16}$$

$$\textit{ou } \alpha_1 = \lambda\beta_1 \tag{3.17}$$

Si le côté droit de 3.15 est de rang 1, alors il existe des constantes σ et μ telles que

$$\textit{soit } S^*_{\alpha_1,\beta_1}\overline{z}(\alpha_2 - \beta_2) = \sigma e_{-1} \tag{3.18}$$

$$\textit{ou } S^*_{\alpha_2,\beta_2}\overline{z}(\alpha_1 - \beta_1) = \mu e_0 \tag{3.19}$$

Il y a quatre cas.

Case A. Soient 3.16 et 3.18 sont vrais. En branchant 3.16 et 3.18 en 3.15, on a

$$(\alpha_1 - \overline{\eta}\beta_1) \otimes \overline{z}\alpha_2 = [\overline{\sigma}e_0 + S^*_{\alpha_2,\beta_2}(\alpha_1 - \beta_1)] \otimes e_{-1}.$$

Par conséquent, α_2 et β_2 sont des constantes.

Cas B. Soient 3.17 et 3.19 sont vrais. En branchant 3.17 et 3.19 en 3.15, on a

$$\beta_1 \otimes \overline{z}(\overline{\lambda}\alpha_2 - \beta_2) = e_0 \otimes [S^*_{\alpha_1,\beta_1}\overline{z}(\alpha_2 - \beta_2) + \overline{\mu}e_{-1}].$$

Par conséquent, α_1 et β_1 sont des constantes.

Cas C. Soient 3.17 et 3.18 sont vrais. En branchant 3.17 et 3.18 en 3.15, on a

$$\beta_1 \otimes \overline{z}(\overline{\lambda}\alpha_2 - \beta_2) = [\overline{\sigma}e_0 + S^*_{\alpha_2,\beta_2}(\alpha_1 - \beta_1)] \otimes e_{-1}.$$

Par conséquent, $\overline{\lambda}\alpha_2 - \beta_2$ est une constante. Dans ce cas, par la partie (iv) de la proposition 3.2.2,

$$S_{\alpha_1,\beta_1}S^*_{\alpha_2,\beta_2} = S_{\alpha_1\overline{\alpha_2},\beta_1\overline{\beta_2}}.$$

Par conséquent $S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1} = S_{\alpha_1,\beta_1}S^*_{\alpha_2,\beta_2} \in S$. By Proposition 3.2.1, $\alpha_1(\overline{\alpha_2} - \overline{\beta_2}), \overline{\beta_1}(\alpha_2 - \beta_2) \in H^\infty$. Si $\lambda = 0$, alors nous avons (3a). Si $\lambda \neq 0$, alors $\lambda\beta_1(\overline{\alpha_2} - \overline{\beta_2}), \overline{\beta_1}(\alpha_2 - \beta_2) \in H^\infty$. implique que $\overline{\beta_1}(\alpha_2 - \beta_2)$ est une constante. C'est (3b).

Cas D. Soient 3.16 et 3.19 sont vrais. En branchant 3.16 et 3.19 en 3.15, on a

$$(\alpha_1 - \overline{\eta}\beta_1) \otimes \overline{z}\alpha_2 = e_0 \otimes [S^*_{\alpha_1,\beta_1}\overline{z}(\alpha_2 - \beta_2) + \overline{\mu}e_{-1}]. \tag{3.20}$$

Par conséquent $\alpha_1 - \overline{\eta}\beta_1 = \delta$ pour une constante δ. Le cas D est en quelque sorte le double du cas C en considérant $\left(S_{\alpha_1,\beta_1}S^*_{\alpha_2,\beta_2}\right)^* = \left(S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1}\right)^*$. Ici nous donnons une preuve directe ce qui démontre que le cas C peut également être prouvé directement sans utiliser la proposition 3.2.2 et proposition 3.2.1. Par $\alpha_1 - \overline{\eta}\beta_1 = \delta$ et 3.20,

$$S^*_{\alpha_1,\beta_1}\overline{z}(\alpha_2 - \beta_2) + \overline{\mu}e_{-1} = \overline{\delta}\overline{z}\alpha_2.$$

Donc

$$P[\overline{\alpha_1 z}(\alpha_2 - \beta_2) - \overline{\delta}\overline{z}\alpha_2] + Q[\overline{\beta_1 z}(\alpha_2 - \beta_2) - \overline{\delta}\overline{z}\alpha_2] = -\overline{\mu}e_{-1}.$$

Par conséquent

$$\overline{\alpha_1}(\alpha_2 - \beta_2) - \overline{\delta}\alpha_2 \in \overline{H^\infty}, \overline{\beta_1}(\alpha_2 - \beta_2) - \overline{\delta}\alpha_2 \in H^\infty.$$

En utilisant $\beta_2 = \eta\alpha_2, \alpha_1 - \overline{\eta}\beta_1 = \delta$, nous avons

$$\overline{\alpha_1}(\alpha_2 - \beta_2) - \overline{\delta}\alpha_2 = \eta\alpha_2(\overline{\beta_1} - \overline{\alpha_1}) \in \overline{H^\infty},$$

$$\overline{\beta_1}(\alpha_2 - \beta_2) - \overline{\delta}\alpha_2 = \alpha_2(\overline{\beta_1} - \overline{\alpha_1}) \in H^\infty.$$

Si $\eta = 0$, nous avons (4a). Si $\eta \neq 0$, nous avons (4b). Dans ce cas, nous pouvons vérifier que

$$\left(S_{\alpha_1,\beta_1}S^*_{\alpha_2,\beta_2}\right)^* = \left(S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1}\right)^* = S_{\overline{\alpha_1}\alpha_2,\overline{\beta_1}\beta_2}.$$

Nous traitons maintenant la situation $\alpha_2 = 0$ ou $\beta_1 = 0$. La preuve est similaire. Puisque le côté droit de 3.15 est de rang 1, il existe des constantes σ et μ telles cette

$$\textit{soit } S^*_{\alpha_1,\beta_1}\overline{z}(\alpha_2 - \beta_2) = \sigma e_{-1} \tag{3.21}$$

$$\textit{ou } S^*_{\alpha_2,\beta_2}(\alpha_1 - \beta_1) = \mu e_0. \tag{3.22}$$

Il y a quatre cas. Lorsque $\alpha_2 = 0$ et 3.21 est vrai, l'équation 3.15 implique que β_2 est une constante. Cela conduit à la déclaration (1). Lorsque $\alpha_2 = 0$ et 3.22, l'équation 3.15 implique que β_1 est une constante et $\alpha_1(\overline{\alpha_2} - \overline{\beta_2}) \in H^\infty$. d'où (5a). Lorsque $\beta_1 = 0$ et 3.21 est valide, l'équation 3.15 implique que α_2 est une constante et $\alpha_1(\overline{\alpha_2} - \overline{\beta_2}) \in H^\infty$. Cela conduit à la déclaration (5b). Lorsque $\beta_1 = 0$ et 3.22 est valide, l'équation 3.15 implique que α_1 est une constante. Cela conduit à la déclaration (2). □

Lemme 3.6. *Si les deux côtés de 3.15 sont rang 2, l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

(i) β_1 *et* α_2 *sont des constantes, et* $\overline{\beta_2}(\alpha_1 - \beta_1) - \overline{\alpha_2}\alpha_1 \in H^\infty$ *(équivalent* $\overline{\alpha_1}(\alpha_2 - \beta_2) - \overline{\beta_1}\beta_2 \in H^\infty$*).*

(ii) α_1 *et* β_2 *sont des constantes, et* $\overline{\beta_1}(\alpha_2 - \beta_2) - \overline{\alpha_1}\alpha_2 \in H^\infty$ *(de façon équivalente* $\alpha_2(\overline{\alpha_1} - \overline{\beta_1}) - \overline{\beta_2}\beta_1 \in H^\infty$*).*

(iii) Il existe des constantes $\lambda \neq 0,\delta_1$ *et* δ_2 *telles que*

$$\alpha_1 = \lambda\beta_1 + \delta_1, \beta_2 = \overline{\lambda}\alpha_2 + \delta_2$$

et $\overline{\beta_1}(\alpha_2 - \beta_2) - \overline{\delta_1}\alpha_2$ *est une constante (équivalent* $\alpha_2(\overline{\alpha_1} - \overline{\beta_1}) + \delta_2\overline{\beta_1}$ *est une constante). Dans tous les cas* $S_{\alpha_1,\beta_1}S^*_{\alpha_2,\beta_2} = S^*_{\alpha_2,\beta_2}S_{\alpha_1,\beta_1}$.

Démonstration. Rappelons l'équation 3.15,

$$\alpha_1 \otimes \overline{z}\alpha_2 - \beta_1 \otimes \overline{z}\beta_2 = e_0 \otimes f + g \otimes e_{-1} \tag{3.23}$$

où

$$f = S^*_{\alpha_1,\beta_1}\overline{z}(\alpha_2 - \beta_2), g = S^*_{\alpha_2,\beta_2}(\alpha_1 - \beta_1).$$

Si les deux côtés de 3.23 sont des opérateurs de rang deux, alors il existe des constantes $\lambda_1, \lambda_2, \eta_1, \eta_2$ tel que

$$\begin{bmatrix} e_0 \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}. \tag{3.24}$$

En branchant l'équation ci-dessus dans le côté gauche de 3.23, nous avons

$$\alpha_1 \otimes \overline{z}\alpha_2 - \beta_1 \otimes \overline{z}\beta_2 = \alpha_1 \otimes (\overline{\eta_1} f + \overline{\lambda_1} e_{-1}) + \beta_2(\otimes(\overline{\eta_2} f + \overline{\lambda_2} e_{-1})$$

. Ainsi

$$\begin{bmatrix} \overline{\eta_1} & \overline{\lambda_1} \\ \overline{\eta_2} & \overline{\lambda_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ e_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{z}\alpha_2 \\ -\overline{z}\beta_2 \end{bmatrix}, \Omega \begin{bmatrix} \overline{\lambda_2} & \overline{-\lambda_1} \\ \overline{-\eta_2} & \overline{\eta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{z}\alpha_2 \\ -\overline{z}\beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ e_{-1} \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

où $\Omega = 1 / (\overline{\eta_1}\overline{\lambda_2} - \overline{\eta_2}\overline{\lambda_1})$.

Les équations 3.24 et 3.25 impliquent que

$$e_0 = \eta_1\alpha_1 + \eta_2\beta_1 \tag{3.26}$$

$$e_{-1} = -\Omega\overline{z}(\overline{\eta_2}\alpha_2 + \overline{\eta_1}\beta_2). \tag{3.27}$$

If $\eta_1 = 0$, alors β_1 et α_2 sont des constantes. L'équation 3.23 devient

$$(\alpha_1\overline{\alpha_2} - g) \otimes e_{-1} = e_0 \otimes (f + \overline{z}\beta_2\overline{\beta_1}).$$

Donc

$$\alpha_1\overline{\alpha_2} - g = \mu e_0, f + \overline{z}\beta_2\overline{\beta_1} = \overline{\mu} e_{-1}$$

pour certains constante μ. Il s'ensuit que

$$\alpha_1\overline{\alpha_2} - P[\overline{\alpha_2}(\alpha_1 - \beta_1)] + Q[\overline{\beta_2}(\alpha_1 - \beta_1)] = \mu e_0,$$

$$P[\overline{\alpha_1 z}(\alpha_2 - \beta_2)] + Q[\overline{\beta_1 z}(\alpha_2 - \beta_2)] + \overline{z}\beta_2\overline{\beta_1} = \overline{\mu} e_{-1}.$$

Donc

$$Q[\overline{\beta_2}(\alpha_1 - \beta_1) - \alpha_1\overline{\alpha_2}] = \mu e_0 - \overline{\alpha_2}\beta_1 e_0,$$
$$P[\overline{\alpha_1 z}(\alpha_2 - \beta_2) + \overline{z}\beta_2\overline{\beta_1}] = \overline{\mu} e_{-1} - \overline{\beta_1}\alpha_2 e_{-1}.$$

Donc, $\overline{\beta_2}(\alpha_1 - \beta_1) - \alpha_1\overline{\alpha_2} \in H^\infty$ (équivalent $\overline{\alpha_1}(\alpha_2 - \beta_2) + \beta_2\overline{\beta_1} \in \overline{H^\infty}$). Cela conduit à la déclaration (i). Si $\eta_1 \neq 0$, on réécrivons les 3.26) et 3.27 comme

$$\alpha_1 = \lambda\beta_1 + \delta_1, \beta_2 = \overline{\lambda}\alpha_2 + \delta_2 \tag{3.28}$$

pour certaines constantes $\lambda_1 \neq 0, \delta_1, \delta_2$. Maintenant, en branchant ces deux relations dans 3.24, nous avons

$$\delta_1 \otimes \overline{z}\alpha_2 - \beta_1 \otimes \overline{z}\delta_2 = e_0 \otimes f + g \otimes e_{-1},$$

$e_0 \otimes (f - \overline{\delta_1}\overline{z}\alpha_2) + (g + \overline{\delta_2}\beta_1) \otimes e_{-1} = 0.$

Il existe donc une constante μ telle que

$$(f - \overline{\delta_1}\overline{z}\alpha_2) = \mu e_{-1}$$

$$g + \overline{\delta_2}\beta_1 = -\overline{\mu}.$$

Il s'ensuit que

$$P[\overline{\alpha_1 z}(\alpha_2 - \beta_2)] + Q[\overline{\beta_1 z}(\alpha_2 - \beta_2)] = \overline{\mu}e_{-1} + \overline{\delta_1}\overline{z}\alpha_2$$

$$P[\overline{\alpha_2}(\alpha_1 - \beta_1)] + Q[\overline{\beta_2}(\alpha_1 - \beta_1)] = -\overline{\mu} - \overline{\delta_2}\beta_1.$$

De manière équivalente

$$P[\overline{\alpha_1 z}(\alpha_2 - \beta_2) - \overline{\delta_1}\overline{z}\alpha_2] + Q[\overline{\beta_1 z}(\alpha_2 - \beta_2) - \overline{\delta_1}\overline{z}\alpha_2] = \overline{\mu}e_{-1}$$

$$P[\overline{\alpha_2}(\alpha_1 - \beta_1) + \overline{\delta_2}\beta_1] + Q[\overline{\beta_2}(\alpha_1 - \beta_1) + \overline{\delta_2}\beta_1] = -\overline{\mu}.$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} \overline{h_1} & := & \overline{\alpha_1}(\alpha_2 - \beta_2) - \overline{\delta_1}\alpha_2 \in \overline{H^\infty} \\ h_2 & := & \overline{\beta_1}(\alpha_2 - \beta_2) - \overline{\delta_1}\alpha_2 \in H^\infty \\ \overline{h_3} & := & \overline{\alpha_2}(\alpha_1 - \beta_1) + \overline{\delta_2}\alpha_1 \in \overline{H^\infty} \\ h_4 & := & \overline{\beta_2}(\alpha_1 - \beta_1) + \overline{\delta_2}\alpha_1 \in H^\infty. \end{array}$$

En utilisant 3.28 et un calcul direct

$$h_1 = -h_4, h_2 = -h_3, \overline{h_1} = \overline{\lambda}h_2$$
$$h_2 = (1 - \overline{\lambda})\overline{\beta_1}\alpha_2 - \delta_2\overline{\beta_1} - \overline{\delta_1}\alpha_2.$$

Donc, si $\lambda \neq 0$, alors h_1, h_2, h_3, h_4 sont toutes des constantes (l'une d'entre elles est une constante). Cela conduit à la déclaration (iii). Si $\lambda = 0$, alors

α_1 et β_2 sont des constantes et $h_1 = -h_4 = 0$ et $h_2, h_3 \in H^\infty$. Cela conduit à la déclaration (ii). Dans les deux cas, notez que

$$(\overline{\beta_2} - \overline{\alpha_2})\alpha_1 = -(h_1 + \delta_1\overline{\alpha 2})$$
$$(\overline{\beta_2} - \overline{\alpha_2})\beta_1 = (\overline{h_2} + \delta_1\overline{\alpha 2})$$

où $h_1, \overline{h_2} \in H^\infty$. Nous avons, pour toute $f \in L^2$,

$$\begin{aligned}
S^*_{\alpha_2\beta_2}S_{\alpha_1\beta_1}f &= P[\overline{\alpha_2}\alpha_1 Pf + \overline{\alpha_2}\beta_1 Qf] + Q[\overline{\beta_2}\alpha_1 Pf + \overline{\beta_2}\beta_1 Qf] \\
&= \overline{\alpha_2}\alpha_1 Pf + \overline{\alpha_2}\beta_1 Qf + Q[(\overline{\beta_2} - \overline{\alpha_2})\alpha_1 Pf + (\overline{\beta_2} - \overline{\alpha_2})\beta_1 Qf] \\
&= \overline{\alpha_2}\alpha_1 Pf + \overline{\alpha_2}\beta_1 Qf + Q[-(h_1 + \delta_1\overline{\alpha_2})Pf - (\overline{h_2} + \delta_1\overline{\alpha_2})Qf] \\
&= \overline{\alpha_2}\alpha_1 Pf + \overline{\alpha_2}\beta_1 Qf - Q[\delta_1\overline{\alpha_2}Pf] - \overline{h_2}Qf - Q[\delta_1\overline{\alpha_2}Qf] \\
&= \overline{\alpha_2}\alpha_1 Pf + \overline{\alpha_2}\beta_1 Qf - Q[\delta_1\overline{\alpha_2}f] - \overline{h_2}Qf \\
&= \overline{\alpha_2}\alpha_1 Pf + \overline{\alpha_2}\beta_1 Qf - Q[\delta_1\overline{\alpha_2}f] + [(\overline{\beta_2} - \overline{\alpha_2})\beta_1 + \delta_1\overline{\alpha_2}]Qf \\
&= \overline{\alpha_2}\alpha_1 Pf + \overline{\beta_2}\beta_1 Qf - \delta_1 Q[\overline{\alpha_2}f] + \delta_1\overline{\alpha_2}Qf \\
&= \overline{\alpha_2}(\lambda\beta_1 + \delta_1)Pf + (\lambda\overline{\alpha_2} + \overline{\delta_2})\beta_1 Qf - \delta_1 Q[\overline{\alpha_2}f] + \delta_1\overline{\alpha_2}Qf \\
&= \overline{\alpha_2}\lambda\beta_1 f + \delta_1\overline{\alpha_2}f + \overline{\delta_2}\beta_1 Qf - \delta_1 Q[\overline{\alpha_2}f] \\
&= \alpha_1\overline{\alpha_2}f + \overline{\delta_2}\beta_1 Q[f] - \delta_1 Q[\overline{\alpha_2}f].
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Notez aussi

$$\begin{aligned}
S_{\alpha_1\beta_1}S^*_{\alpha_2\beta_2}f &= \alpha_1 P[\overline{\alpha_2}f] + \beta_1 Q[\overline{\beta_2}f] \\
&= \alpha_1\overline{\alpha_2}f + \beta_1 Q[\overline{\beta_2}f] - \alpha_1 Q[\overline{\alpha_2}f] \\
&= \alpha_1\overline{\alpha_2}f + \beta_1 Q[(\lambda\overline{\alpha_2} + \overline{\delta_2})f] - (\lambda\beta_1 + \delta_1)Q[\overline{\alpha_2}f] \\
&= \alpha_1\overline{\alpha_2}f + \overline{\delta_2}\beta_1 Q[f] - \delta_1 Q[\overline{\alpha_2}f].
\end{aligned}$$

Par conséquent $S^*_{\alpha_2\beta_2}S_{\alpha_1\beta_1} = S_{\alpha_1\beta_1}S^*_{\alpha_2\beta_2}$ □

Remarque 3.4.1. *La vérification de* $S^*_{\alpha_2\beta_2}S_{\alpha_1\beta_1} = S_{\alpha_1\beta_1}S^*_{\alpha_2\beta_2}$ *comme dans 3.29 est long. Puisque*

$$[S_{\alpha_1\beta_1}S^*_{\alpha_2\beta_2}, M_z] = [S^*_{\alpha_2\beta_2}S_{\alpha_1\beta_1}, M_z]$$

nous avons $S_{\alpha_1\beta_1}S^*_{\alpha_2\beta_2} - S^*_{\alpha_2\beta_2}S_{\alpha_1\beta_1} = M_\alpha$ pour certains $\alpha \in L^\infty$. Il suffit de vérifier $S_{\alpha_1\beta_1}S^*_{\alpha_2\beta_2}e_0 - S^*_{\alpha_2\beta_2}S_{\alpha_1\beta_1}e_0 = \alpha = 0$, qui sera légèrement plus court que le vérification comme dans 3.29. Cependant, nous avons choisi la méthode ci-dessus plus directe. En résumant les trois lemmes ci-dessus, nous avons le théorème suivant.

Théorème 3.4.1. *$S_{\alpha_1\beta_1}S^*_{\alpha_2\beta_2} = S^*_{\alpha_2\beta_2}S_{\alpha_1\beta_1}$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite.*

(i) les deux $S_{\alpha_1\beta_1}$ et $S_{\alpha_2\beta_2}$ sont en M.

(ii) α_1 et β_1 sont des constantes.

(iii) α_2 et β_2 sont des constantes.

(iv) β_1 et α_2 sont des constantes, et $\overline{\beta_2}(\alpha_1 - \beta_1) - \overline{\alpha_2}\alpha_1 \in H^\infty$.

(v) α_1 et β_2 sont des constantes, et $\overline{\beta_1}(\alpha_2 - \beta_2) - \overline{\alpha_1}\alpha_2 \in H^\infty$.

(vi) $\alpha_1 = \lambda\beta_1 + \delta_1, \beta_2 = \overline{\lambda}\alpha_2 + \delta_2$ pour certaines constantes $\lambda \neq 0, \delta_1, \delta_2$, et $\overline{\beta_1}(\alpha_2 - \beta_2) - \overline{\delta_1}\alpha_2$ est une constante.

Corollaire 3.10. *[17] L'opérateur $S_{\alpha,\beta}$ est normal si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite*

(i) α, β sont des constantes.

(ii) $\alpha = \lambda\beta + \delta$ pour certaines constantes δ et λ avec $|\lambda| = 1$ et $(\lambda - 1)|\beta|^2 + \delta\overline{\beta} - \overline{\delta}\lambda\beta$ est une constante.

Nous pouvons représenter la condition (ii) un peu plus explicitement en examinant les cas $\lambda = 1$ et $\lambda \neq 1$ séparément. Nous nous référons aux théorèmes 3.1 et 3.2 dans [17] pour plus de détails. Nous énonçons le résultat ci-dessus comme corollaire du théorème 3.4.1. Nous pouvons prouver ce corollaire directement en suivant la preuve du théorème 3.4.1. La preuve directe de cela le corollaire est considérablement plus simple que la preuve du théorème 3.4.1. Le preuve directe dans la suivante.

Corollaire 3.11. *L'opérateur $S_{\alpha,\beta}$ est normal si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite.*

(i) $S_{\alpha,\beta} = M_\beta + S_{\delta,0}$ où δ est une constante telle que $\delta\overline{\beta} - \overline{\delta}\beta$ est une constante.

(ii) $S_{\alpha,\beta} = \lambda S_{\alpha_1,\beta_1} + \mu I$ pour certaines constantes λ et μ et opérateur unitaire S_{α_1,β_1}.

L'opérateur $S_{\alpha,\beta}$ en (i) ci-dessus est un opérateur normal dans l'ensemble M_+.

Bibliographie

[1] F. Baratin, «Introduction à l'étude des opérateurs Fouriers Intégraux : Intégrale oscillante ». exp. n 23, p. 1-11, 1971.

[2] A. Beurling : On two problems concerning linear transformations in Hilbert space. Acta Math., 81(17) :239-255, 1948.

[3] H.Brezis, Analyse Fonctionnelle. Théorie et application. Masson(1983).

[4] A. Brown and P. R. Halmos. Algebraic properties of Toeplitz operators. J. Reine Angew. Math., 213 :89-102, 1963/1964.

[5] J. B. Conway. A course in operator theory, volume 21 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[6] Djaa. B. Messirdi, Etude spectrale des Opérateurs de Multiplications .Maghreb. Math .Rev. Volume 8 No 1/2, 1999.

[7] J. J. Duistermaat, Fourier integral operators. Courant Institute Lecture Notes, New-york 1973.

[8] P. L. Duren, Theory of H^p spaces,Pure Appl. Math. Academic Press, New York-London, 1970.

[9] S. R. Garcia, J. E. Mashreghi, W. Ross, Introduction to Model Spaces and their Operators, Cambridge University Press, 2016.

[10] J. B. Garnett, Bounded Analytic Functions, Springer, GTM 236, 2007.

[11] I. Gohberg and N. Krupnik, One-dimensional Linear Singular Integral Equations, Vol. I, Operator Theory : Advances and Applications, Vol. 53, Birkhauser, 1992.

[12] I. Gohberg and N. Krupnik, One-dimensional Linear Singular Integral Equations, Vol. II, Operator Theory : Advances and Applications, Vol. 54, Birkhauser, 1993.

[13] N. Krupnik, The conditions of selfadjointness of the operator of singular integration, Integral Equations Operator Theory, 14 (1991) 760-763.

[14] P. K. Kythe, Michael R. Schäferkotter, Handbook of computational methods for integration, CRC Press. 2005.

[15] J. Ph. Labrousse, Quelque topologies sur des espaces d'opérateurs dans des espaces de Hilbert. Dept. De Math. Univ. de Nice(1970)

[16] N. Krupnik, Survey on the best constants in the theory of one-dimensional singular inte- gral operators, Oper. Theory Adv. Appl. 202, 2010, 365-393.

[17] T. Nakazi and T. Yamamoto, Normal singular integral operators with Cauchy kernel on L^2, Integral Equations and Operator Theory, 78 (2014) 233-248.

[18] Wa. Rudin. Analyse réelle et complexe. Masson, Paris, 1980.