

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITÉ AMAR TÉLÉDJI DE LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES
قسم الرياضيات
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Présenté par :

Bendjaballah Naima

THEME

Problème du véhicule de Dubins

Soutenance publique devant le jury composé de :

Dr.RAHMOUNE ABDELAZIZ

M.C.A

Président

Dr.MOUSSOUNI NACIMA

M.C.A

Encadreur

Dr.AHCENE BOUKEHILA

M.C.A

Examinateur

Année Universitaire 2022/2023

Remerciements

Avant, je remercie << Allah >> le tout puissant qui m'a donné le courage et la santé pour réaliser ce travail.

En second lieu, je remercie mes parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience, leurs conseils et leur aide durant la préparation de ce travail.

*Je tiens à exprimer ma profonde gratitude mes sincères et mes remerciements à ma promotrice **Dr.N.Moussouni** pour ses précieux conseils et son aide durant toute la période de préparation de ce mémoire.*

*Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury monsieur **Dr.Rahmoune Abdelaziz** et **Dr.Ahcene Boukehila** pour l'intérêt qu'ils ont accordé à ce travail et de l'avoir examiné.*

Enfin, je tiens à remercier tous mes enseignants pour leurs efforts fournis durant toute la période de mes études, ainsi qu'à toutes les personnes qui m'ont apporté l'aide et l'assistance nécessaires et à mes amis qui m'ont aidé et encouragé aux moments opportuns.

Bendjaballah

Naima

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A ma très chère mère

Quoi que je fasse ou je dise je ne saurai te remercier comme il se doit. Ton affection me couvre, ta bienveillance me guide et ta présence à mes côtés a toujours été ma source de force pour affronter les différents obstacles.

A mon très chère père

*Tu as toujours été à mes côtés pour me soutenir et m'encourager.
Que ce travail gratitude et mon affection .*

Et je le dédie :

A ma chère soeur

*"Fatna" pour son encouragement permanent, et son soutien moral. et à mes chères frères,
Zian, Ahmed et Hamza, pour leurs encouragements.*

A toutes mes amies

*Spécialement, "Freiha" et "Zakhroufa", "Khadra" et "Mama", "Fatna" et "Soundous"
,"Dounia Zad", "Mariem" et "Houria", "Assia", "OumHani" leurs une sincérité si
merveilleuse... jamais oubliable, je leurs souhaite plein de réussite et de bonheur.*

A ma famille Pour le soutien tout au long de mon parcours universitaire.

Naima.

Résumé :

Dans ce travail, en utilisant les lois de la physique, on a modélisé le déplacement d'un véhicule (de Dubins et / ou d'un rebot) en deux problèmes de contrôle optimal, le premier problème consiste à calculer théoriquement les vitesses linéaire et angulaire (volant) du véhicule, puis en second lieu on a calculé l'accélération angulaire. La contrôlabilité des systèmes considérés est étudiée en utilisant la notion de crochets de Lie du théorème de Chow pour les systèmes affines. Numériquement, on a utilisé une méthode directe (pour avoir un aperçu sur les trajectoires), puis une méthode plus efficace pour toutes les trajectoires.

Mots clés : Véhicule (de Dubins et / ou d'un rebot), Contrôle optimal, Vitesses linéaire et angulaire, Accélération angulaire ; Contrôlabilité ; Systèmes affines.

ملخص

في هذا العمل ، باستخدام قوانين الفيزياء ، قمنا بنمذجة حركة السيارة (ديبينزو / أو ربوت) في مشكلتين للتحكم الأمثل ، المشكلة الأولى هي الحساب نظرياً للسرعة الخطية والزاوية (عجلة القيادة) للمركبة ، ثم ثانياً تم حساب التسارع الزاوي. تتم دراسة إمكانية التحكم في الأنظمة المدروسة باستخدام فكرة أقواس لي من نظرية تشاو للأنظمة التآلفية. عددياً ، استخدمنا طريقة مباشرة (للحصول على نظرة عامة على المسارات) ، ثم طريقة أكثر فعالية لجميع المسارات. الكلمات المفتاحية : السيارة (ديبينزو / أو ريبوت) ، التحكم الأمثل ، السرعات الخطية والزاوية ، التسارع الزاوي ، إمكانية التحكم ، أنظمة التآلفية.

Abstract :

In this work, using the laws of physics, we modeled the movement of a vehicle (Dubins and / or a rebot) in two optimal control problems, the first problem is to theoretically calculate the linear and angular (steering wheel) of the vehicle, then secondly the angular acceleration was calculated. The controllability of the considered systems is studied using the notion of Lie brackets from Chow's theorem for affine systems. Numerically, we used a direct method (to have an overview of the trajectories), then a more efficient method for all the trajectories.

Keywords : Vehicle (from Dubins and/or a rebot), Optimal control, Linear and angular velocities, Angular acceleration ; Controllability ; Affine systems.

Table des matières

Introduction générale.	2
1 Notions de base	3
1.1 Introduction	3
1.2 Théorie du contrôle	3
1.3 Position du problème	4
1.3.1 Différents types de problèmes de commande optimale :	6
1.3.2 Rappels : Théorème de Cauchy-Lipschitz	7
1.4 Contrôlabilité	8
1.4.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires :	10
1.4.2 Cas des systèmes non linéaires	11
1.5 Méthodes de résolution.	14
1.5.1 Méthodes directes	14
1.5.2 Méthode indirecte	15
1.6 Principe du Maximum de Pontryagin	17
1.7 Exemples illustratifs	19
2 Problème de Reeds - Shepp car	30
2.1 Introduction	30
2.2 Position du problème	31
2.3 Existence des trajectoires	32
2.4 Existence de la commande : Contrôlabilité :	32
2.4.1 Systèmes affines en la commande	34
2.5 Contrôlabilité du système de Reeds - Shepp	37
2.6 Résolution théorique	39

2.6.1	Principe du Maximum de Pontryagin	39
2.7	Résolution numérique	41
2.7.1	Les graphes	41
3	Problème de Reeds - Shepp à accélération angulaire	43
3.1	Introduction	43
3.2	Position du problème	43
3.3	Existence de la solution du problème	44
3.3.1	Existence des trajectoires	44
3.4	Existence de la commande contrôlabilité :	45
3.4.1	Contrôlabilité du système considéré	45
3.5	Résolution théorique	46
3.5.1	Principe du Maximum de Pontryagin	46
3.6	Résolution numérique	48
3.6.1	Les graphes	48
	Bibliographie.	51

Table des figures

1.1	Variation de la trajectoire $x_u(\cdot)$	8
1.2	Trajectoire et commande optimales par la méthode directe.	21
1.3	Trajectoire et commande optimales par la méthode indirecte.	22
1.4	Trajectoire et commande optimales par la méthode directe.	22
2.1	Le modèle du robot monocycle.	32
2.2	Étapes pour garer la voiture.	38
2.3	Vitesses linéaire et angulaire.	42
2.4	Vitesse linéaire et angulaire.	42
3.1	Le modèle du robot monocycle.	44
3.2	48
3.3	48
3.4	L'accélération angulaire.	49

Notations

\mathbb{R}^n	Ensemble des n- tupls ordonnés de nombre réels .
$x(t)$	Le vecteur d'état du système .
$u(t)$	Le vecteur de contrôle (commande).
\mathbb{N}	Ensemble des entiers naturels .
\mathbb{R}^+	Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
$Acc(x_0, T)$	Ensemble accessible en temps T depuis le point x_0 .
$Acc_\Omega(x_0, T)$	Ensemble accessible en temps T depuis le point x_0 , pour contrôles à valeurs dans Ω .
$A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$	Matrice d'état.
$B \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$	Matrice de contrôle .
L^∞	L'ensemble des fonctions mesurables et essentiellement bornées.
$\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$	L'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes, à coefficients dans \mathbb{R} .
$\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$	L'ensemble des matrices carrées, à coefficients dans \mathbb{R} .
U'	Ensemble des points extrémaux de U .
x^T	Transposée du vecteur x .
A^T	Transposée de la matrice A .
e^A	Exponentielle de la matrice A .
$rg(A)$	Le rang de la matrice A .
$C^P(\Omega, \mathbb{K})$	Ensemble des applications de Ω dans \mathbb{K} , de classe C^P .
$L^P(\Omega, \mathbb{K})$	Ensemble des applications mesurables de Ω dans \mathbb{K} , de puissance p intégrables sur Ω pour $1 \leq p < +\infty$.
$L^P_{loc}(\Omega, \mathbb{K})$	Ensemble des applications mesurables sur tout compact de Ω , pour $1 \leq p < +\infty$ de Ω dans \mathbb{K} , de la puissance p intégrable.
$Ex_{0,T}$, ou E_T	(Si le point x_0 est sous-entendu) application entrée-sortie en temps T depuis le point x_0 .
H	L'hamiltonien.
$[X, Y]$	(Où X et Y sont des champs de vecteurs) Crochet de Lie des champ X et Y .
$Df(x)$	Différentielle de l'application f au point x .

Introduction générale

Ce travail est consacré aux problèmes de Dubins qui peut être décrit comme trouver le plus court chemin continûment différentiable entre deux points donnés emprunté par une voiture pour laquelle les positions et directions de départ et d'arrivée sont spécifiées.

Partout où la participation de l'homme est possible, il doit faire face au choix de la meilleure commande (la meilleure possible ou de la commande ou contrôle optimal). La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, ce sont des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen de commandes pour aller d'un état initial donné à un état final bien précis.

Les problèmes de contrôle optimal sont régis par des équations différentielles linéaires ou non linéaires.

Dans ce travail, on a modélisé deux problèmes simples en contrôle optimal, il s'agit d'un problème du véhicule de Dubin connu sous le nom de Dubins car.

le manuscrit est structuré comme suit : Dans le chapitre 1, on a donné des notations de base nécessaires pour la compréhension du reste du travail.

Nous avons mis un accent particulier sur la Contrôlabilité de Kalman [8], la Contrôlabilité locale [3] et le théorème de Chow [8] pour les systèmes affines.

Dans le chapitre deux, en se basant sur les notions de la physique, on a modélisé un problème d'un robot (Reeds-Shepp car), en considérant sa trajectoire dans le plan, sa vitesse linéaire et la vitesse angulaire considérées comme contrôles du problème étudié.

On a en premier lieu vérifié l'existence des trajectoires, puis l'existence de la commande optimale en suite on a résolu théoriquement le problème en utilisant le principe du maximum de Pontryagin [6], puis numériquement en utilisant deux méthodes à savoir la méthode directe (Euler) [3, 4, 5] et une méthode indirecte (méthode de Tir).

Dans le chapitre 3, on a remarqué que le modèle n'est pas complet, on a pour ceci ajouté la contrainte de l'accélération angulaire.

Chapitre 1

Notions de base

1.1 Introduction

Nous commençons ce chapitre en formulant la notion du problème de contrôle optimal suffisamment général pour correspondre aux problèmes qui seront considérés dans la suite du mémoire. Dans ce chapitre, on a donné de différentes notions de base nécessaires pour la compréhension de la suite du travail, on a mis un accent particulier sur le théorème d'existence des trajectoires, ainsi que les différents résultats de l'existence de la commande optimale, c'est à dire le problème de contrôlabilité des problèmes de contrôle optimal, et ce dans le cas des systèmes linéaires et des systèmes non linéaires. On a montiné les différentes méthodes de résolution des problèmes de contrôle optimal : méthodes directes et méthodes indirectes. Le chapitre est terminé par deux exemples illustratifs.

1.2 Théorie du contrôle

Un système de contrôle comportant beaucoup de variables et de paramètres. Les variables nommées variables d'état seront notées $x_i; i = 1; \dots; n$, si le système évolue dans le temps, les variables seront notées $x_i(t); i = 1; \dots; n$ où t désigne le temps défini dans un intervalle $I = [0, T]$. Les n variables $x_i(t)$ seront gouvernées par n équations différentielles du premier ordre, elles sont sous la forme :

$$\dot{x}_i(t) = \frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x, u), \quad i = 1; \dots; n \quad t \in [0, T]. \quad (1.1)$$

Ou T est le temps final, les composantes d'une fonction f sont notées f_i , ce sont des fonctions de \mathbb{R} de classe C^1 . Ces fonctions peuvent être linéaires ou non linéaires.

Définition 1.2.1. *La classe des commandes admissibles U est constituée de la fonction mesurable $u(t)$*

$$U = \{u(t), t \in I = [0, T]\}.$$

U est l'ensemble des applications mesurables, localement bornées sur I à valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Définition 1.2.2. Commande Bang- Bang :

- ◆ Soit U l'ensemble des commandes.
- ◆ Soit U' l'ensemble des points extrémaux de U .
- ◆ Un contrôle $u \in U$ est appelé contrôle de type Bang-Bang si $u \in U'$, il prend les valeurs extrêmes de U .

Condition initiale du système

Définition 1.2.3. *La condition initiale du système, $x_0 = x(0)$ est un vecteur donné dans un plan de phase. $x(t)$ et $x(0)$ peuvent représenter physiquement la vitesse, la température, ...etc.*

1.3 Position du problème

La théorie du contrôle étudie les propriétés des systèmes commandés (ou contrôlés), c'est à dire, des systèmes dynamiques dépendant d'une variable t qui représente le plus souvent le temps, sur les quels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle) [8]. Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. Les applications sont très nombreuses et dans des domaines très diverses, comme la mécanique [3], l'électricité, la biologie [8], la chimie, économie, etc ... L'objectif de la théorie de contrôle peut être :

1. De contrôler le système, c'est ce qu'on appelle le problème de contrôlabilité. Une fois le problème de contrôlabilité résolu, on peut de plus vouloir passer de l'état initial à l'état final en minimisant un certain critère .
2. De déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation ; c'est ce qu'on appelle le contrôle optimal.

De point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dont l'état est décrit par une fonction inconnue dite fonction d'état (ou variable d'état), qui vérifie une ou plusieurs lois d'évolution (très souvent ce sont des équations différentielles, mais d'autres types d'équations peuvent être envisagées : équations intégrales, aux dérivées partielles, stochastiques, etc ...). On supposera qu'on peut agir sur le système (en fait sur l'état du système) via une ou plusieurs fonctions qu'on appelle des contrôles (ou commandes). Un autre type de problème qu'on peut rencontrer, mais qui revient au même sur le plan mathématique, est le fait que le système en lui même est mal connu, c'est à dire qu'il y a un ou plusieurs paramètres qui ne sont pas connus, ou qui sont inaccessibles ou difficiles à mesurer directement [8]. On cherche alors à déduire ces paramètres en les voyant comme des contrôles et en observant l'état du système, c'est ce qu'on appelle le problème inverse. La formulation d'un problème de contrôle optimal est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(T, u) = g(T, x(T)) + \int_0^T f^0(t, x(t), u(t))dt \rightarrow \min_u, \quad (1) \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (2) \\ x(0) = x_0 \in M_0, \quad (3) \\ x(T) = x_1 \in M_1, \quad (4) \\ u \in U \quad , \quad t \in I = [0, T]. \quad (5) \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Où M_0 et M_1 sont deux variétés de \mathbb{R}^n , I un intervalle de \mathbb{R} , $x_0 = x(0)$ est la position initiale du système (1.2), $x(T)$ est sa position terminale (finale). En pratique, comme indiqué ci dessus, la position du système peut représenter la vitesse, la position, la température, ...etc. $u(.)$ est la commande du système (1.2). U est l'ensemble des applications mesurables, localement bornées sur I à valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, f une fonction de classe C^1 .

$$J(T, u) = g(T, x(T)) + \int_0^T f^0(t, x(t), u(t))dt,$$

est appelé coût, ou critère de qualité ou but du problème (1.2). f^0 une fonction de classe C^1 sur son domaine de définition et g continue.

1.3.1 Différents types de problèmes de commande optimale :

Il existe trois types de problèmes de commande optimale, ces trois types différents dans l'écriture de la fonction objectif.

- **Problème de Lagrange** : Pour ce problème, le critère est donné comme suit :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^T f^0(x(t), u(t), t) dt. \quad (1.3)$$

Où les contrôles $u(t)$ sont des fonctions définies de $[0, T]$ dans \mathbb{R} . f^0 est une fonction de classe C^1 .

- **Problème de Mayer** : Ici, le critère à minimiser est différent de celui de l'équation précédente. Il dépend uniquement de la valeur terminale de l'état de contrôle du système. Le critère à optimiser dans ce cas est défini comme suit :

$$J(u(t)) = g(T, x(T)). \quad (1.4)$$

- **Problème de Bolza (Mayer-Lagrange)** : Le problème de Bolza regroupe les deux précédentes formulations à savoir les formulations de Lagrange et de Mayer. On définit le critère comme suit :

$$J(u(t)) = g(T, x(T)) + \int_{t_0}^T f^0(x(t), u(t), t) dt. \quad (1.5)$$

f^0 une fonction de classe C^1 sur son domaine de définition et g continue.

Définition 1.3.1. quand $g(T, x(T)) = 0$ et $f^0(t, x, u) = 1$ et T est libre dans l'expression

$$\min \left\{ g(T, x(T)) + \int_{t_0}^T f^0(t, x, u) dt \right\}.$$

On parle alors d'un problème terminal en temps minimal.

Définition 1.3.2. Coût optimal : Lorsque le temps final T est fixé dans l'expression

$$\min \left\{ g(T, x(T)) + \int_{t_0}^T f^0(t, x, u) dt \right\}.$$

On parle alors d'un problème terminal en coût optimal.

1. Il existe des problèmes qui combinent les deux critères physiques. On parle alors d'un problème de contrôle en temps et en coût optimal (problème de Mayer-Lagrange) appelé aussi problème de Bolza .
2. Si u est un contrôle scalaire et f^0 proportionnelle à u on parle d'un problème de contrôle à coût d'approvisionnement.
3. Lorsque les équations d'état $\dot{x} = f(x, u)$ ne dépendent pas explicitement de t on parle de problème autonome.
4. Si t est présent dans les équations d'état on parle de problème non autonome.

1.3.2 Rappels : Théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème [6] Soient $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, I un intervalle de \mathbb{R} , et $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application choisie suffisamment régulière pour que tout ce qui suit ait un sens. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \\ \dot{x}(0) = x_0, t \in [0, T] = I, \end{cases} \quad (1.6)$$

On suppose que :

- i) L'application f est mesurable en t et continue en x , c'est à dire pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'application $t \mapsto f(t, x)$ est mesurable et pour presque tout $t \in [0, T]$, l'application $x \mapsto f(t, x)$ est continue.
- ii) L'application f est intégrable en t , i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}^n. \quad \exists \beta \in L^1(]0, T[, \mathbb{R}^+) \quad | \quad |f(t, x)| \leq \beta(t), \forall t \in [0, T].$$

- iii) L'application f est globalement lipschitzienne en x , i.e.

$$\exists C_0 \in L^1(]0, T[, \mathbb{R}^+) \quad | \quad |f(t, x_1) - f(t, x_2)|_{\mathbb{R}^n} \leq C_0 |x_1 - x_2|_{\mathbb{R}^n},$$

pour presque tout $t \in [0, T]$ et tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$. Alors, il existe une unique solution au problème de Cauchy considéré, et on a :

$$\forall t \in [0, T], \quad x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x(s)) ds.$$

1.4 Contrôlabilité

Le problème général étudié dans cette partie est le suivant. Soient $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, I un intervalle de \mathbb{R} , et $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application choisie suffisamment régulière pour que tout ce qui suit ait un sens. Soit U un sous-ensemble de \mathbb{R}^m et soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Le système de contrôle linéaire auquel on s'intéresse est

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ x(0) = x_0, t \in [0, T] = I. \end{cases} \quad (1.7)$$

Où l'ensemble des contrôles u considérés est l'ensemble des applications mesurables et bornées sur I , à valeurs dans le sous-ensemble $U \subset \mathbb{R}^m$.

Remarque 1.4.1. *Les théorèmes classiques d'existence de solutions d'équations différentielles nous assurent que, pour tout contrôle u , le système admet une unique solution $x(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, absolument continue. La solution x_u du système ci-dessus dépend de u . Donc si on change la fonction u , on obtient une autre trajectoire $t \mapsto x(t)$ dans \mathbb{R}^n . Deux questions se posent alors naturellement :*

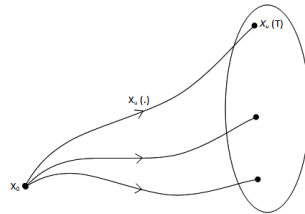


FIGURE 1.1 – Variation de la trajectoire $x_u(\cdot)$.

Etant donné un point $x_1 \in \mathbb{R}^n$, existe-t-il un contrôle u tel que la trajectoire associée à ce contrôle joigne x_0 à x_1 en un temps fini T ? **C'est le problème de contrôlabilité** .

Si la condition précédente est remplie, existe-t-il un contrôle joignant x_0 à x_1 , et qui de plus minimise une certaine fonctionnelle $u \rightarrow J(t, u)$? C'est le problème de contrôle optimal. La fonctionnelle $u \rightarrow J(t, u)$ est un critère d'optimisation, ou **le coût**. Par exemple Contrôlabilité coût peut être égale au temps de parcours, dans ce cas c'est **le problème du temps minimal**.

Ensemble accessible

On considère dans cette partie, le système (linéaire) contrôlé

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), & t \in [0, t] \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.8)$$

où A et B sont deux applications L^∞ sur $[0, T]$ à valeurs respectivement dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On suppose que le contrôle u est à valeurs dans un sous-ensemble non vide $U \subset \mathbb{R}^m$.

Définition 1.4.1. *Ensemble accessible : Considérons le système contrôlé (1.8). L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps $T > 0$ est défini par*

$$\text{Acc}(x_0, T) = \{x_u(T) \mid u \in L^\infty([0, T], \Omega)\},$$

où $x_u(\cdot)$ est la solution du système (1.8) associée au contrôle u . Autrement dit $\text{Acc}(x_0, T)$ est l'ensemble des extrémités des solutions de (1.8) au temps T , lorsqu'on fait varier le contrôle u . Pour la cohérence on pose $\text{Acc}(x_0, 0) = x_0$.

Définition 1.4.2. *Le système de contrôle (1.8) est dit contrôlable en temps T si*

$$\text{Acc}(x_0, T) = \mathbb{R}^n,$$

c'est à dire $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle u telle que la trajectoire associée relie x_0 à x_1 en temps T .

1.4.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires :

Soit $T > 0$ temps fini fixé. On considère un système dynamique dont l'état $x(t) \in \mathbb{R}^n$ pour tout $t \in [0, T]$ est régi par le système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & t \in I \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.9)$$

où $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $u(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ est le contrôle. Puisque la trajectoire x , solution de (1.9), dépend du contrôle u , nous la noterons souvent x_u . Il n'est pas toujours pertinent de chercher un contrôle u continu, on ne cherchera pas une trajectoire de classe $C^1([0, T]; \mathbb{R}^m)$. Un bon cadre fonctionnel pour la trajectoire est celui des fonctions absolument continues sur $[0, T]$.

Définition 1.4.3. *On dit que le système (1.9) est contrôlable en temps T à partir de x_0 si*

$$\forall x_1 \in \mathbb{R}^n, \exists u \in L^1([0, T], \mathbb{R}^m) \quad | \quad x_u(t) = x_1.$$

Un résultat remarquable, dû à Kalman, permet de caractériser la contrôlabilité du système différentiel ci-dessus à partir d'une condition purement algébrique ne faisant intervenir que les matrices A et B . On introduit la matrice de Kalman

$$Kal = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \in \mathbb{M}_{n,nm}(\mathbb{R}).$$

Cas des systèmes linéaires autonomes

Théorème 1.4.1. (*Critère de Kalman [8]*) *Le système linéaire autonome (1.9) est contrôlable pour tout $T > 0$ et pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si la matrice Kal est de rang maximal, i.e $rg(Kal) = n$.*

Remarque 1.4.2. *La condition de Kalman est indépendante du temps final T et du point initial x_0 , ce qui implique en particulier que lorsqu'un système de contrôle linéaire autonome est contrôlable, on peut atteindre à partir d'une donnée initiale toute cible en temps fini fixé même très court.*

Systèmes linéaires non autonomes

Considérons le système :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in I = [0, T], \quad x(0) = x_0. \quad (1.10)$$

La solution du système (1.10) en temps t est

$$x(t) = R(t)x_0 + \int_0^t R(t)R^{-1}(s)B(s)u(s)ds, \quad t \in I = [0, T]$$

où $R(\cdot)$ est la résolvante, solution du système :

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = A(t)R(t), \\ R(0) = Id, \end{cases}$$

où Id est la matrice identité.

Théorème 1.4.2. [6] *Le système (1.10) est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice*

$$D = \int_0^T R(t)^{-1}B(t)B(t)'R(t)^{-1'} dt,$$

est inversible.

D est appelée matrice de contrôlabilité.

1.4.2 Cas des systèmes non linéaires

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t)), \\ x(0) = x_0, \quad u \in U, \quad t \in I = [0, T]. \end{cases} \quad (1.11)$$

Où x est un vecteur de \mathbb{R}^n , A une matrice dans $M_n(\mathbb{R})$, $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, fonction non linéaire du contrôle $u(\cdot)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est l'état initial du système (1.11).

Pour les systèmes de contrôle non linéaires, il est impossible d'étudier la contrôlabilité globale, le problème est beaucoup plus compliqué du fait qu'on ne peut pas utiliser la caractérisation de Kalman. Dans ce qui suit, on s'intéressera à l'étude de la contrôlabilité locale du système (1.11).

Définition 1.4.4. Soit $x_1 \in \mathbb{R}^n$. On dit que le système (1.11) est localement contrôlable au voisinage de x_1 en temps T depuis x_0 , si $x_1 \in \text{Acc}(x_0, T)^\circ$.

Autrement dit, il existe un voisinage V dans $V(x_1)$ tel que $V \subset \text{Acc}(x_0, T)$.

Application entrée sortie [8]

Définition 1.4.5. Soit $T > 0$. L'application entrée sortie en temps T du système (1.11) initialisée à x_0 est l'application

$$\begin{aligned} E_T : U &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\mapsto x_u(T), \end{aligned}$$

où U est l'ensemble des contrôles u tels que la trajectoire associée est bien définie sur $[0, T]$. Étant donné un point $x_1 \in \mathbb{R}^n$, le problème est donc de trouver un temps T et un contrôle u telle que la trajectoire associée à u , solution du système (1.11) vérifie $x_u(0) = x_0$, $x_u(T) = x_1$, où x_u est la solution du système (1.11) associée au contrôle u initialisée à x_0 au temps $t = 0$.

On donne une autre caractérisation de la contrôlabilité locale.

Définition 1.4.6. Soit $x_1 \in \mathbb{R}^n$. On dit que le système (1.11) est localement contrôlable au voisinage de x_1 en temps T depuis x_0 si $\exists V \in V(x) \mid \forall y \in V, \exists u \in U$ tel que $y = E_T(u)$.

Remarque 1.4.3. L'application entrée sortie E_T est différentiable au sens de Fréchet.

Calculons sa différentielle à l'ordre un.

$$E_T(u + \delta u)(t) = E_T(u(t)) + dE_T(u(t))\delta u + o(\|\delta u\|_{L^\infty}), \quad t \in [0, T]. \quad (1.12)$$

Soit

$$\dot{x}_{u+\delta u}(t) = Ax_{u+\delta u}(t) + B((u + \delta u)(t)), \quad x_{u+\delta u}(0) = x_0, \quad t \in [0, T],$$

Notons par $\delta x(t) = x_{u+\delta u}(t) - x_u(t)$, la variation de la trajectoire $x_u(\cdot)$ (voir le figure 1.1).

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}(t) &= \dot{x}_{u+\delta u}(t) - \dot{x}_u(t), \\ &= Ax_{u+\delta u}(t) + B((u + \delta u)(t)) - Ax_u(t) - B(u(t)), \quad t \in [0, T], \\ &= A(x_{u+\delta u}(t) - x_u(t)) + B((u + \delta u)(t)) - B(u(t)), \quad t \in [0, T], \\ &= A\delta x(t) + dB(u(t))\delta u(t), \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

De la condition d'admissibilité $\delta x(0) = 0$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \delta \dot{x}(t) = A\delta x(t) + dB(u(t))\delta u(t), \\ \delta x(0) = 0, \quad u \in U, \quad t \in [0, T]. \end{cases} \quad (1.13)$$

Définition 1.4.7. *Le système (1.13) est appelé système linéarisé du système (1.11) le long de $u(\cdot)$.*

La solution du système linéarisé (1.13) en temps T est donnée par :

$$\delta x(T) = \int_0^T e^{(t-s)A} dB(u(s))\delta u(s) ds.$$

Proposition 1.4.1. [8] *$dE_T(u)$ est surjective si et seulement si le système linéarisé est contrôlable.*

Proposition 1.4.2. [8] *Le système (1.11) est localement contrôlable au voisinage de $x_1 \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si E_T est localement surjective au voisinage de x_1 .*

Remarque 1.4.4. *Si le système linéarisé (1.13) est contrôlable alors $dE_T(u)$ est surjective, en utilisant le théorème des fonctions implicites, on déduit que E_T est localement surjective, de la proposition 1.4.2, on déduit que le système de départ (1.11) est localement contrôlable au voisinage de x_1 .*

Théorème 1.4.3. [8] *Le système linéarisé (1.13) est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice*

$$D = \int_0^T e^{-tA} dB(u(t)) dB(u(t))' e^{-tA'} dt,$$

est inversible.

1.5 Méthodes de résolution.

1.5.1 Méthodes directes

Parmi les méthodes directes, on trouve la méthode de résolution par l'approche de la programmation linéaire, qui est la méthode adaptée appelée aussi méthode du support [3, 4, 5]. Seulement cette méthode résout les problèmes linéaires. Elle permet d'avoir une solution approchée ou une solution exacte. Une autre méthode directe est la méthode de discrétisation du problème initial. Pour un problème de départ linéaire, on fait une discrétisation de la commande. De là, on obtient un problème de programmation linéaire facile à résoudre. L'inconvénient de cette dernière approche est l'obtention d'une solution approchée.

La mise en œuvre des méthodes directes est simple, car elles ne nécessitent pas une étude théorique préalable, on n'a pas à étudier les variables adjointes ou bien à connaître à l'avance la structure des commutations. Ces méthodes sont moins précises.

Discrétisation totale [8]

C'est la méthode la plus évidente lorsqu'on aborde un problème de contrôle optimal. En discrétisant l'état et le contrôle, on se ramène à un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie (ou problème de programmation non linéaire) de la forme

$$\min_{Z \in C} J(Z), \quad (1.14)$$

où $Z = (x_1, \dots, x_N, u_1, \dots, u_n)$, et

$$C = \{Z | g_i(Z) = 0, i \in 1, \dots, r, g_j(Z) \leq 0, j \in r + 1, \dots, m\}. \quad (1.15)$$

Plus précisément, la méthode consiste à choisir les contrôles dans un espace de dimension finie, et à utiliser une méthode d'intégration numérique des équations différentielles. Considérons donc une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ de l'intervalle $[0, T]$. Réduisons l'espace des contrôles en considérant (par exemple) des contrôles constants par morceaux selon cette subdivision. Par ailleurs, choisissons une discrétisation de l'équation différentielle, par exemple choisissons ici (pour simplifier) la méthode d'Euler explicite. On obtient alors, en posant $h_i = t_{i+1} - t_i$,

$$x_{i+1} = x_i + h_i f(t_i, x_i, u_i).$$

Remarque 1.5.1. *Il existe une infinité de variantes. D'une part, on peut discrétiser l'ensemble des contrôles admissibles par des contrôles constants par morceaux, ou affines par morceaux, d'autre part, il existe de nombreuses méthodes pour discrétiser une équation différentielle ordinaire : méthode d'Euler (explicite ou implicite), point milieu, Heun, Runge-Kutta, Adams Moulton, ... etc. Le choix de la méthode dépend du problème abordé. La discrétisation précédente conduit donc au problème de programmation non linéaire*

$$x_{i+1} = x_i + h_i f(t_i, x_i, u_i), i = 0, \dots, N - 1.$$

$$\min C(x_0, \dots, x_N, u_0, \dots, u_N), u_i \in \omega, i = 0, \dots, N - 1,$$

i.e un problème du type (1.14).

1.5.2 Méthode indirecte

Les méthodes indirectes sont basées sur le principe du maximum de Pontryagin [6] qui donne une condition nécessaire d'optimalité, il faut vérifier à posteriori l'optimalité de la trajectoire calculée. Ces méthodes ont l'extrême précision numérique, mais elles sont très sensibles au choix

de la condition initiale. Contrairement aux méthodes directes, les méthodes indirectes nécessitent une étude théorique préalable et l'étude des variables adjointes. Pour ces méthodes, la structure des commutations doit être connue à l'avance, elles sont efficaces en toute dimension.

Méthode de tir simple

Le principe est le suivant. Considérons le problème de contrôle optimal (1.2), et supposons que le temps final T est fixé. Le principe du maximum donne une condition nécessaire d'optimalité et affirme que toute trajectoire optimale est la projection d'une extrémale. Si l'on est capable, à partir de la condition de maximum, d'exprimer le contrôle extrémal en fonction de $(x(t), p(t))$, alors le système extrémal est un système différentiel de la forme

$$\dot{Z}(t) = F(t, z(t)),$$

où

$$Z(t) = (x(t), p(t)),$$

et les conditions initiales, finales, et les conditions de transversalité, se mettent sous la forme $R(Z(0), Z(T)) = 0$. Finalement, on obtient le problème aux valeurs limites

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = F(t, Z(t)), Z(t) = (x(t), p(t)), \\ R(Z(0), Z(T)) = 0. \end{cases} \quad (1.16)$$

Notons $Z(t, Z_0)$ la solution du problème de Cauchy

$$\dot{Z}(t) = F(t, Z(t)), Z(0) = Z_0,$$

et posons

$$G(Z_0) = R(Z_0, Z(T, Z_0)).$$

Le problème (1.16) aux valeurs limites est alors équivalent à $G(Z_0) = 0$, i.e. il s'agit de déterminer un zéro de la fonction G . Ceci peut se résoudre par une méthode de Newton.

1.6 Principe du Maximum de Pontryagin

Avant d'énoncer le principe du maximum, introduisons certaines définitions et propriétés essentielles.

Définition 1.6.1. *Le contrôle u est dit extrémal sur $[0, t]$ si la trajectoire du système (2) du problème de contrôle (1.2) associée à u vérifie*

$$x(t) \in \partial Acc(x_0, t), \quad t \in I = [0, T].$$

Définition 1.6.2. *Un contrôle $u^0(t)$, $t \in [0, T]$ est dit optimal si $u^0(\cdot)$ est extrémal et $J(u^0(t)) < J(u(t))$ pour tout contrôle extrémal $u(t)$, $t \in [0, T]$.*

Théorème 1.6.1. [6] *Considérons le système*

$$\forall t \in I, \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0.$$

Supposons que le domaine des contraintes noté Ω est compact. Soit $T > 0$. Le contrôle u est extrémal sur $I = [0, T]$ si et seulement si il existe une solution non triviale $p(t)$, $t \in I$, de l'équation $\dot{p}(t) = -p(t)A(t)$ telle que

$$p(t)B(t)u(t) = \max_{v \in \Omega} p(t)B(t)v, \quad (1.17)$$

pour presque tout $t \in [0, T]$.

Définition 1.6.3. *Le vecteur $p(t) \in \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur adjoint.*

Cas particulier

Si $\Omega = [-a, a]$, $a \in \mathbb{R}$ positif, la condition (1.17) signifie que

$$u(t) = a \operatorname{sign}(p(t)B(t)).$$

On dit que $u(t)$, $t \in I$ est bang-bang.

Définition 1.6.4. Dans ce cas, la fonction $\gamma(t) = p(t)B(t)$ est appelée fonction de commutation.

Définition 1.6.5. Le temps t_c auquel le contrôle extrémal $u(t)$, $t \in [0, T]$ change de signe est appelé temps de commutation.

Théorème 1.6.2. [6] Ce théorème est l'énoncé général du principe du maximum de Pontryagin. Considérons le système de contrôle dans \mathbb{R}^n

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (1.18)$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , les contrôles sont des applications mesurables bornées à valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Soient M_0 et M_1 deux sous ensembles de \mathbb{R}^n . Notons par U l'ensemble des contrôles admissibles u dont les trajectoires associées relient un point initial de M_0 à un point final de M_1 en temps t .

On définit le coût

$$J(T, u) = \int_0^T f^0(t, x(t), u(t))dt + g(T, x(T)),$$

où $f^0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 , $x(\cdot)$ est la solution de (1.18) associée au contrôle u .

On considère le problème de contrôle optimal suivant : déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_1 en minimisant le coût J . Le temps final peut être fixé ou non.

Si le contrôle $u \in U$ associé à la trajectoire $x(\cdot)$ est optimal sur $[0, T]$, alors il existe une application $p(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue, appelé vecteur adjoint, et un réel $p^0 \leq 0$ tel que le couple $(p(\cdot), p^0)$ est non trivial et tels que pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \quad (1.19)$$

$$\dot{p}(t) = \frac{-\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \quad (1.20)$$

où $H(t, x, p, p^0, u) = p'(t)f(t, x, u) + p^0 f^0(t, x, u)$ est le Hamiltonien du système, et on a la condition de maximisation presque partout sur $[0, T]$

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{v \in U} H(t, x(t), p(t), p^0, v). \quad (1.21)$$

Si de plus le temps final pour joindre M_1 n'est pas fixé, on a la condition au temps final T

$$\max_{v \in U} H(t, x(t), p(t), p^0, v) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)). \quad (1.22)$$

Si de plus M_0 et M_1 (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de \mathbb{R}^n ayant des espaces tangents en $x(0) = x_0 \in M_0$ et $x(T) = x_1 \in M_1$, alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalités aux deux extrémités (ou juste l'une des deux)

$$p(0) \perp T_{x(0)} M_0, \quad (1.23)$$

$$p(T) - p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T)) \perp T_{x(T)} M_1. \quad (1.24)$$

1.7 Exemples illustratifs

Exemple 1.7.1. *Considérons le problème du temps minimal*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), \\ \dot{y}(t) = x(t). \end{cases} \quad (1.25)$$

Le contrôle $u(t)$, $t \in I = [0, T]$ vérifie $|u(t)| \leq 1$. Résoudre le problème de temps minimal pour atteindre le point final $(-2, 2)$, en allant de l'origine. Le problème de contrôle optimal aura donc la forme suivante :

$$\begin{cases} \int_0^T dt \rightarrow \min, \\ \dot{x}(t) = u(t), \\ \dot{y}(t) = x(t), \\ x(T) = -2, y(T) = +2, x(0) = 0, y(0) = 0, \\ -1 \leq u(t) \leq +1. \end{cases} \quad (1.26)$$

Ce système est équivalent à

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Où $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\dot{X} = AX + BU$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T$.

Vérifions la contrôlabilité : On a $Kal = [B, AB] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $rg(Kal) = 2$, donc la condition de Kalman est vérifiée. Ainsi le problème (1.26) est contrôlable.

Résolution théorique Cherchons la solution théoriquement et comparons les résultats des deux méthodes directe et indirecte.

L'Hamiltonien du système (1.26) est

$$H(x(t), y(t), p_x(t), p_y(t), u) = p_x(t)u + p_y(t)x(t) + p^0,$$

où p_x et p_y sont les composantes du vecteur adjoint. Elles sont solutions du système :

$$\begin{cases} \dot{p}_x(t) = \frac{-\partial H}{\partial x} = -p_y(t), \\ \dot{p}_y(t) = \frac{-\partial H}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} p_y(t) = cste = \gamma, \\ p_x(t) = -\gamma t + \mu. \end{cases}$$

Reprenons l'expression de l'Hamiltonien :

$$H = p_x(t)u + p_y(t)x(t) + p^0,$$

alors quelque soit la valeur de p^0 ,

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(p_x(t)u + p_y(t)x(t)),$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow u = \text{sign}(p_x(t)).$$

De là, le contrôle extrémal sera le suivant :

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } p_x(t) < 0, \\ +1 & \text{si } p_x(t) > 0, \quad t \in I. \end{cases}$$

Résolution numérique Nous avons mis en œuvre une méthode indirecte, les résultats sont tracés dans la Figure (1.2).

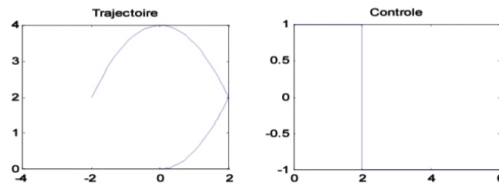


FIGURE 1.2 – Trajectoire et commande optimales par la méthode directe.

Dans le cas d'une méthode directe, on discrétise la commande $u(\cdot)$ et l'état $x(\cdot)$ en utilisant la subdivision :

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$$

Le problème (1.26) devient le problème suivant :

$$T \rightarrow \min$$

sous les contraintes :

$$x[i + 1] = x[i] + \frac{T}{N}u[i]$$

$$y[i + 1] = y[i] + \frac{T}{N}x[i].$$

Les résultats d'un tel problème sont tracés dans la figure (1.3)

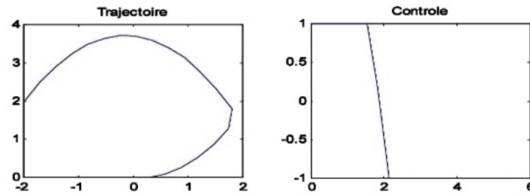


FIGURE 1.3 – Trajectoire et commande optimales par la méthode indirecte.

Les contrôles extrémaux ont en plus une commutation. Soit t_c , ce temps de commutation.

La trajectoire obtenue pour $u(t) = 1$ sur $[0, t_c]$ et pour $u(t) = -1$ sur $[t_c, T]$ est :

Si $t \in [0, t_c]$, on obtient $x(t) = t$ et $y(t) = \frac{1}{2}t^2$

Si $t \in [t_c, T]$, on obtient $x(t) = -t + t_c$ et $y(t) = \frac{-1}{2}t^2 + t_c t - \frac{1}{2}t_c^2$

Les trajectoires obtenues en prenant $u = +1$ puis $u = -1$ sont illustrées dans la figure (1.4)

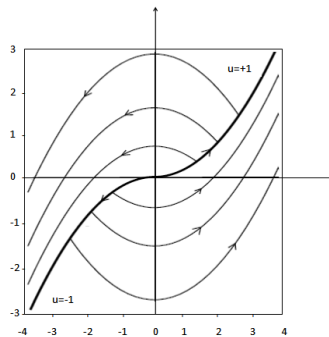


FIGURE 1.4 – Trajectoire et commande optimales par la méthode directe.

Exemple 1.7.2. Soit le problème simplifié de mouvement d'une fusée donné par :

$$\begin{cases} J(T, u) = \int_0^T dt \rightarrow \min_u, \\ \dot{x}(t) = u(t), \\ \dot{y}(t) = u^2(t), \\ |u(t)| \leq 1, \quad t \in I = [0, T], \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \end{cases} \quad (1.27)$$

où $x(t)$ représente la vitesse, $y(t)$ est inversement proportionnelle à la masse de l'engin. Le contrôle $u(t)$ est la poussée, elle vérifie la contrainte $|u(t)| \leq 1$.

On veut résoudre le problème du temps minimal pour atteindre un point (x_1, y_1) en allant de l'origine.

$$\text{Où } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(u(t)) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u^2(t) \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}.$$

On remarque que B est un vecteur fonction non linéaire de la commande $u(t)$, $t \in [0, T]$, le problème (1.27) est un problème de contrôle optimal avec une entrée non linéaire.

Contrôlabilité Pour vérifier la Contrôlabilité du système du problème (1.27), considérons la matrice

$$D = \int_0^T e^{-tA} dB(u(t))(dB(u(t)))'(e^{-tA})' dt,$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B(u(t)) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u^2(t) \end{pmatrix},$$

et de là, on a la dérivé de $B(u(t))$:

$$dB(u(t)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2u(t) \end{pmatrix}$$

$$(dB(u(t)))' = \begin{pmatrix} 1 & 2u(t) \end{pmatrix},$$

la résolvante est donnée par :

$$e^{-tA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(e^{-tA})' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice D sera alors égale :

$$D = \int_0^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2u(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2u(t) \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dt.$$

Le déterminant de D est égal à : $4T \int_0^T u^2(t) dt - 4 \left(\int_0^T u(t) dt \right)^2$, et d'après le théorème de Cauchy Schwarz (1.3.2) on a :

$$\left(\int_0^T u(t) dt \right)^2 < T \int_0^T u^2(t) dt \Rightarrow T \int_0^T u^2(t) dt - \left(\int_0^T u(t) dt \right)^2 > 0,$$

alors le problème (1.27) est contrôlable en temps T .

Résolution théorique

Application du Principe du maximum de Pontryagin le H 'amiltonien du système (1.27) précédent s'écrit :

$$\begin{aligned} H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) &= p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p^0, \\ &= p_x u(t) + p_y u^2(t) - 1, \quad \text{avec } p^0 = -1, \end{aligned}$$

où p_x et p_y sont les composantes du vecteur adjoint, elles vérifient :

$$\begin{cases} \dot{p}_x(t) = \frac{\partial H}{\partial x(t)} = 0, \\ \dot{p}_y(t) = -\frac{\partial H}{\partial y(t)} = 0, \end{cases} \quad (1.28)$$

les conditions de transversalité

$$p_x(T) = -\frac{\partial g(u(t))}{\partial x(t)} = k_1,$$

$$p_y(T) = -\frac{\partial g(u(t))}{\partial y(t)} = k_2.$$

De l'équation (1.28) on obtient :

$$\dot{p}_x(t) = 0 \Rightarrow p_x(t) = c_1 = \text{cste},$$

$$\dot{p}_y(t) = 0 \Rightarrow p_y(t) = c_2 = \text{cste}.$$

Cherchons le contrôle optimal :

$$\frac{\partial H}{\partial u(t)} = 0 \Leftrightarrow p_x(t) + 2p_y(t)u(t) = 0,$$

$$\Leftrightarrow 2p_y(t)u(t) = -p_x(t),$$

$$\Leftrightarrow u(t) = \frac{-p_x(t)}{2p_y(t)}.$$

$p_y(t) > 0$ donc :

$$u(t) = \begin{cases} +1, & \text{si } \frac{-p_x(t)}{2p_y(t)} \leq -1, \\ -1, & \text{si } \frac{-p_x(t)}{2p_y(t)} \geq 1, \\ \pm 1, & \text{si } \frac{-p_x(t)}{2p_y(t)} \in]-1, +1[. \end{cases}$$

Autrement dit :

$$u(t) \in \left\{ -1, +1, -\frac{p_x(t)}{2p_y(t)} \right\}$$

Soit $(x_1; y_1)$ le point final à atteindre, on distingue les cas suivants :

- ▶ $0 < y_1 < x_1$, il existe un seul contrôle optimal constant.
- ▶ $y_1 = |x_1|$, il existe un seul contrôle optimal égal à 1 ou -1 .
- ▶ si $y_1 > x_1$, il existe une infinité de contrôles optimaux qui sont des successions d'arcs ± 1 .

En effet :

1^{er} cas : Supposons que $0 < y_1 < x_1$:

$$x_1 = x(T) = \int_0^T u(s) ds = \begin{cases} \int_0^T ds = T, & \text{si } u(t) = +1. \\ \int_0^T - ds = -T, & \text{si } u(t) = -1. \\ \int_0^T \frac{-p_x(t)}{2p_y(t)} ds = \frac{-p_x(t)}{2p_y(t)} T, & \text{si } u(t) = \frac{-p_x(t)}{2p_y(t)}. \end{cases}$$

$$y_1 = y(T) = \int_0^T u^2(s) ds = \begin{cases} \int_0^T ds = T, & \text{si } u(t) = +1. \\ \int_0^T ds = T, & \text{si } u(t) = -1. \\ \int_0^T \left(\frac{-p_x(t)}{2p_y(t)} \right)^2 ds = \frac{p_x^2(t)}{4p_y^2(t)} T, & \text{si } u(t) = \frac{-p_x(t)}{2p_y(t)}. \end{cases}$$

C'est à dire :

$$y_1 < x_1 \Rightarrow T < T : \text{ cas impossible (pour } u(t) = +1).$$

$$y_1 < x_1 \Rightarrow T < -T : \text{ cas impossible (pour } u(t) = -1).$$

$$y_1 < x_1 \Rightarrow \frac{p_x^2(t)}{4p_y^2(t)}T < \frac{-p_x(t)}{2p_y(t)}T : \text{ cas possible (pour } u(t) = \frac{-p_x(t)}{2p_y(t)}).$$

On a donc un seul contrôle optimal constant.

2^{me} cas : Supposons que $y_1 = |x_1|$:

$$x_1 = x(T) = \int_0^T u(s) ds = \begin{cases} \int_0^T ds = T, & \text{si } u(t) = +1. \\ \int_0^T - ds = -T, & \text{si } u(t) = -1. \\ \int_0^T \frac{-p_x(t)}{2p_y(t)} ds = \frac{-p_x(t)}{2p_y(t)}T, & \text{si } u(t) = \frac{-p_x(t)}{2p_y(t)}. \end{cases}$$

$$y_1 = y(T) = \int_0^T u^2(s) ds = \begin{cases} \int_0^T ds = T, & \text{si } u(t) = -1. \\ \int_0^T ds = T, & \text{si } u(t) = +1. \\ \int_0^T \left(\frac{-p_x(t)}{2p_y(t)}\right)^2 ds = \frac{p_x^2(t)}{4p_y^2(t)}T, & \text{si } u(t) = \frac{-p_x(t)}{2p_y(t)}. \end{cases}$$

C'est à dire :

$$y_1 = |x_1| \Rightarrow T = |T| : \text{ cas possible (pour } u(t) = +1).$$

$$y_1 = |x_1| \Rightarrow T = |-T| : \text{ cas possible (pour } u(t) = -1).$$

$$y_1 = |x_1| \Rightarrow \frac{p_x^2(t)}{4p_y^2(t)}T = \left| \frac{-p_x(t)}{2p_y(t)}T \right| : \text{ cas impossible (pour } u(t) = \frac{-p_x(t)}{2p_y(t)}).$$

On a un seul contrôle optimal égal à 1 ou -1.

3^{me} cas : Supposons que $y_1 > x_1$:

$$x_1 = x(T) = \int_0^T u(s) ds = \begin{cases} \int_0^T ds = T, & \text{si } u(t) = +1. \\ \int_0^T -ds = -T, & \text{si } u(t) = -1. \\ \int_0^T \frac{-p_x(t)}{2p_y(t)} ds = \frac{-p_x(t)}{2p_y(t)}T, & \text{si } u(t) = \frac{-p_x(t)}{2p_y(t)}. \end{cases}$$

$$y_1 = y(T) = \int_0^T u^2(s) ds = \begin{cases} \int_0^T ds = T, & \text{si } u(t) = -1. \\ \int_0^T ds = T, & \text{si } u(t) = +1. \\ \int_0^T \left(\frac{-p_x(t)}{2p_y(t)} \right)^2 ds = \frac{p_x^2(t)}{4p_y^2(t)}T, & \text{si } u(t) = \frac{-p_x(t)}{2p_y(t)}. \end{cases}$$

C'est à dire :

$$y_1 > x_1 \Rightarrow T > T : \text{ cas impossible (pour } u(t) = +1).$$

$$y_1 > x_1 \Rightarrow T > -T : \text{ cas possible (pour } u(t) = -1).$$

$$y_1 > x_1 \Rightarrow \frac{p_x^2(t)}{4p_y^2(t)}T > \frac{-p_x(t)}{2p_y(t)}T : \text{ cas possible (pour } u(t) = \frac{-p_x(t)}{2p_y(t)}).$$

On a une infinité de solutions.

Exemple 1.7.3. Soit le système de contrôle dans \mathbb{R}^3 :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t). \quad (1.29)$$

$$\text{Avec } X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de contrôlabilité de Kalman est :

$$Kal = [B, AB, A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Le rang de la matrice K est $rg(K) = 2 \neq \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, donc le système (1.29) n'est pas contrôlable.

Chapitre 2

Problème de Reeds - Shepp car

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré au problème de Reeds - Shepp car qui peut être décrit comme la recherche du chemin continûment différentiable le plus court entre deux points donnés empruntés par une voiture (robot), pour lequel les directions de départ et d'arrivée sont spécifiées. La vitesse linéaire est constante soit elle est égale à $+1$ ou à -1 la disposition de ce chapitre est la suivante ; nous commençons par formuler le problème de Reeds - Shepp comme un problème de contrôle, optimal de la forme d'un problème de contrôle optimal apparaissant au début du chapitre 1. Deuxièmement, en appliquant les résultats du PMP présentés dans la section 1.5, nous caractérisons le contrôle optimal. On montrera que les chemins optimaux pour la "voiture de Dubins" [3, 4], consistent en la concaténation de trois segments de chemin distincts. Ces arcs de cercle correspondent respectivement au virage à droite et à gauche. Ce chapitre est structuré comme suit : Dans la première partie, on a modélisé le problème du modèle de robot monocycle en un modèle simple de contrôle optimal, puis par la suite, on a vérifié l'existence des trajectoires, puis l'existence des contrôles. Pour la résolution, on a commencé par résoudre le problème théoriquement en utilisant le Principe du Maximum de Pontryagin (PMP) [6], numériquement, on a utilisé deux méthodes citées dans le chapitre 1, à savoir la méthode directe et la méthode indirecte, puis on a comparé les résultats obtenus.

2.2 Position du problème

Pour bien caractériser l'état d'une voiture ou d'un robot, nous avons besoin au minimum de trois états. Deux sont nécessaires pour préciser la position du robot dans \mathbb{R}^2 et un pour préciser son orientation. Le point $(x(\cdot), y(\cdot))$ indique donc la position du robot dans \mathbb{R}^2 et $\omega(\cdot)$ donne son orientation.

A noter que $\omega(\cdot)$ est un nombre réel module 2π , de manière équivalente un membre du cercle unité S^1 . Par conséquent l'espace d'états dans ce cas est $X = \mathbb{R}^2 \times S^1$. Un point du plan muni d'une orientation (voir figure 2.1).

Dans ce chapitre, nous avons modélisé un problème de contrôle optimal d'une voiture ou d'un robot, où les commandes sont $v(\cdot)$ la vitesse linéaire et $\omega(\cdot)$ la vitesse angulaire. Le problème considéré dans ce chapitre est modélisé par

minimiser $\int_0^T 1 dt$.

sous réserve de

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= [v(t)\cos\theta(t), v(t)\sin\theta(t), w(t)]^T && \text{dynamique du système} \\
 x(0) &= [x_0, v_0, w_0]^T = X_0 && \text{position initiale} \\
 x(T) &= [x_f, y_f, w_f]^T = X_f && \text{position finale} \\
 x(\cdot) &\in \mathcal{H} \equiv \mathbb{R}^2 \times S^1 && \text{contrainte d'état} \\
 v(\cdot) &\in \{-1, 1\} && \text{contrainte de vitesse linéaire} \\
 w(\cdot) &\in [-1, 1] && \text{contrainte de vitesse angulaire} \\
 T &\in (0, \infty) && \text{temps final (à minimiser)}.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ce dernier problème peut être reformulé de la manière la plus simple suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 J(u) = T \rightarrow \min, \\
 \dot{x}(t) = v(t) \cos \theta(t), \\
 \dot{y}(t) = v(t) \sin \theta(t), \\
 \dot{\theta}(t) = w(t), \\
 x(0) = x_0, y(0) = 0, \theta(0) = \theta_0, t \in [0, T], \\
 v(\cdot) \in \{-1, 1\}; \quad -1 \leq w(t) \leq 1; \quad \theta(t) \in S^1.
 \end{array} \right. \tag{2.2}$$

Les deux contrôles sont :

$v(\cdot)$: la vitesse linéaire et $w(\cdot)$ la vitesse angulaire (volant)

A noter que la voiture peut effectuer des mouvements en reculant.

Problème de contrôle : Trouver v et w tels que $x(T) = x_T$, $y(T) = y_T$ et $\theta(T) = \theta_T$.

Problème de contrôle optimal : Résoudre le problème ci-dessus (2.2) en temps minimal T .

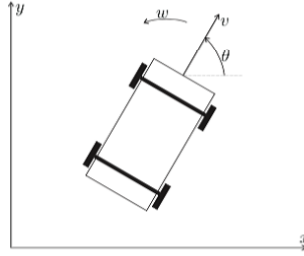


FIGURE 2.1 – Le modèle du robot monocycle.

2.3 Existence des trajectoires

Dans la théorie du contrôle, on est amené à considérer des contrôles continus par morceaux, on peut donc affaiblir les conditions du théorème de Cauchy Lipschitz 1.3.2 énoncé au chapitre 1, de la manière suivante :

L'ensemble des contrôles considérés est inclu dans $L_{loc}^{\infty}([0, T], \mathbb{R}^n)$, la fonction f est de classe C^1 sur son domaine de définition (car la fonction f est continue et continûment différentiable par rapport à x . C'est une propriété usuelle des équations différentielles ordinaires). Il est facile de remarquer dans notre cas, que pour chacun des contrôles considérés fixés, il existe une unique solution du problème considéré (2.2).

2.4 Existence de la commande : Contrôlabilité :

Pour vérifier la contrôlabilité du système considéré (2.2), nous ne pouvons pas utiliser le système linéarisé, ni le critère de Kalman, pour résoudre ce problème, on a utilisé le théorème de Chow [8], qui utilise des crochets de Lie pour affirmer la commandabilité des systèmes affines.

Définition 2.4.1. Crochet de Lie : Soit deux champs de vecteur $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . On définit leur crochet de Lie par :

$$[f, g](x) = Dg(x)f(x) - Df(x)g(x).$$

- ◇ En géométrie différentielle on définit un champ de vecteur comme une dérivation sur $C^1(M)$, aussi il faut vérifier que $[f, g]$ est une dérivation.
- ◇ Champs linéaires : ($f(x) = Ax$ et $g(x) = Bx$), $[f, g](x) = (BA - AB)(x)$ i.e. $[f, g]$ est le commutateur $BA - AB$.

Relation entre un créneau et le crochet de Lie : Pour la voiture :

$$f_1(x, y, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, f_2(x, y, \theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[f_1, f_2](x, y, \theta) = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- ◇ Créneau : suivre f_1 , puis f_2 , puis $-f_1$, puis $-f_2$ (voir figure 2.2) .

Définition 2.4.2. (Algèbre de Lie :) Une algèbre sur \mathbb{R} est un \mathbb{R} -espace vectoriel E muni d'une application bilinéaire de $E \times E$ dans E .

Définition 2.4.3. L'ensemble des champs de vecteurs sur \mathbb{R}^n , $\Sigma(\mathbb{R}^n)$, muni de l'addition et de la loi interne (ou produit) définie par le crochet de Lie est une algèbre sur \mathbb{R} . De plus, le crochet de Lie vérifie :

- i. $[X; Y] = -[Y; X]$.
- ii. $[X; [Y; Z]] + [Z; [X; Y]] + [Y; [Z; X]] = 0$ (identité de Jacobi).

Toute algèbre sur R dont la loi interne satisfait (i) et (ii) est appelée une algèbre de Lie. Ainsi, $\Sigma(\mathbb{R}^n)$ est une algèbre de Lie.

Exemple 2.4.1. $M_n(\mathbb{R})$ muni de la loi interne $[A, B] = AB - BA$ est une algèbre de Lie.

Définition 2.4.4. (Algèbres de Lie engendrées :)

- ◇ Une sous-algèbre de Lie de $\Sigma(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel de $\Sigma(\mathbb{R}^n)$ qui est stable par le crochet de Lie (c'est donc également une algèbre de Lie).
- ◇ Si \mathcal{F} est une famille de champs de vecteurs sur \mathbb{R}^n , on appelle sous algèbre de Lie engendrée par \mathcal{F} , notée $Lie(\mathcal{F})$ le plus petit sous-espace vectoriel S de $\Sigma(\mathbb{R}^n)$ qui contient \mathcal{F} et qui est stable par le crochet de Lie i.e. $[X, Y] \in S, \forall X, Y \in S$.

Exemple 2.4.2. Algèbre de Lie engendrée par deux champs de vecteur X_1 et X_2 :

$$Lie(X_1, X_2) = Vect([X_{i_1}, [X_{i_2}, \cdot [X_{i_{k-1}}, X_{i_k}] \cdot \cdot \cdot]], k \geq 1, i_j \in [1, 2]).$$

Notation : $Lie_p(\mathcal{F}) = X(p), X \in Lie(\mathcal{F})$.

2.4.1 Systèmes affines en la commande

- ◇ Soit $f_0, f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $m + 1$ champs de vecteur.
- ◇ Soit $U \subset \mathbb{R}^m$ et $\mathcal{U} = \{u : [0, \infty[\rightarrow U; \quad u \quad mes.\}$ l'ensemble des controles admissibles.

Définition 2.4.5. On appelle système affine en la commande un système du type :

$$\dot{X} = f_0(X) + \sum_{1 \leq j \leq m} u_j f_j(X).$$

f_0 : dérivé du système en l'absence du contrôle.

Afin de simplifier le travail, on pose $f_0 \equiv 0$.

On a le théorème suivant :

Théorème 2.4.1. (Théorème de Chow)[8] Considérons dans \mathbb{R}^n le système :

$$\dot{X} = \sum_{i=1}^n u_i f_i(X), \quad X(0) = X_0.$$

On suppose que l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs f_i est de dimension n . Alors le système est contrôlable.

Exemple 2.4.3. Nous allons considéré le problème du Reeds-Shepp simplifié suivant :

$$\begin{cases} J(u) = T \rightarrow \min, \\ \dot{x} = v \cos \theta, \\ \dot{y} = v \sin \theta, \\ \dot{\varphi} = \omega, \\ \dot{\theta} = \frac{v}{L} \tan \delta. \end{cases} \quad (2.3)$$

Les variables (x, y) représentent les coordonnées cartésiennes du véhicule Reeds-Shepp dans ce plan. θ : représente l'angle d'orientation du véhicule Reeds-Shepp par rapport à l'axe des abscisses. φ représente l'angle de braquage des roues avant par rapport à l'axe du robot. Les vitesses v et ω représentent respectivement la vitesse de translation du Reeds-Shepp et la vitesse de rotation des roues avant.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \\ \frac{1}{L} \tan \delta \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

avec

$$f_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \\ \frac{1}{L} \tan \delta \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$[f_1, f_2] = Df_2 f_1 - Df_1 f_2.$$

$$Df_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Df_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\tan^2(\delta)}{L} & 0 \end{bmatrix},$$

donc

$$[f_1, f_2] = Df_2 f_1 - Df_1 f_2 = 0 - Df_1 f_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\tan^2(\delta)}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1+\tan^2(\delta)}{L} \end{bmatrix},$$

$$[f_1, [f_1, f_2]] = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(\tan \delta + \tan^2(\delta))}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \\ \frac{\tan(\delta)}{L} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\tan^2(\delta)}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1+\tan^2(\delta)}{L} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\sin \theta \left(\frac{1+\tan^2(\delta)}{L} \right) \\ \cos \theta \left(\frac{1+\tan^2(\delta)}{L} \right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Afin de vérifier la dépendance linéaire des quatre vecteurs $f_1, f_2, [f_1, f_2]$ et $[f_1, [f_1, f_2]]$, on calcule

$$\left| \begin{array}{cccc} \cos \theta & \sin \theta & 0 & \frac{\tan \delta}{L} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 + \tan^2(\delta)}{L} \\ -\sin \theta \left(\frac{1 + \tan^2(\delta)}{L} \right) & \cos \theta \left(\frac{1 + \tan^2(\delta)}{L} \right) & 0 & 0 \end{array} \right| = - \left[\frac{1 + \tan^2(\delta)}{L} \right]^2,$$

qui vaut $\neq 0$, pour toutes les configurations $(x, y, \delta, \theta) \in \chi$. Ainsi, len tout point de l'espace d'états, et est donc contrôlable en petit temps.

Le système Contrôlable : On peut remarquer que $Rg[f_1, f_2, [f_1, f_2], [f_1, [f_1, f_2]]] = 4$ alors d'après le théorème (de Chow 2.4.1), le système (2.3) est donc contrôlable.

2.5 Contrôlabilité du système de Reeds - Shepp

On a le système affine en la commande de problème de Reeds - shepp (2.2).

$$\dot{X} = \sum_{1 \leq j \leq 2} u_j f_j(X).$$

$$\diamond f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

$$\diamond U = (v, \omega) \subset \mathbb{R}^2, \quad \text{où } v \in \{-1, 1\}^T, \omega \in [-1, 1]^T.$$

Alors

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = v f_1 + \omega f_2, \\ &= v \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a

$$[f_1, f_2] = Df_2 f_1 - Df_1 f_2.$$

Par définition, on a : $Df_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{21}}{\partial x} & \frac{\partial f_{21}}{\partial y} & \frac{\partial f_{21}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_{22}}{\partial x} & \frac{\partial f_{22}}{\partial y} & \frac{\partial f_{22}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_{23}}{\partial x} & \frac{\partial f_{23}}{\partial y} & \frac{\partial f_{23}}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

De même manière, on a :

$$Df_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donc

$$[f_1, f_2] = Df_2 f_1 - Df_1 f_2 = 0 - Df_1 f_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{pmatrix},$$

on vérifie $rg[f_1, f_2, [f_1, f_2]] = 3$, pour ceci, calcule le déterminant de $[f_1, f_2, [f_1, f_2]]$ on obtient :

$$\begin{vmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & -\cos \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \sin^2 \theta \neq 0,$$

avec

$$\theta \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Donc le rang de cette matrice est égale à 3, alors d'après le théorème de Chow (2.4.1), le système (2.2) est donc contrôlable.

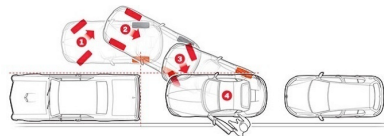


FIGURE 2.2 – Etapes pour garer la voiture.

2.6 Résolution théorique

2.6.1 Principe du Maximum de Pontryagin

Au départ, nous suivons les instructions par étapes données dans la section 1.6. décrivant comment résoudre les problèmes de contrôle optimal avec PMP. L'Hamiltonien du système (2.2) est donné pour $t \in [0, T]$:

$$H(x(t), p(t), \omega(t)) = p_x(t)v(t) \cos \theta(t) + p_y(t)v(t) \sin \theta(t) + p_\theta(t)\omega(t) - p_0. \quad (2.4)$$

On pose $p_0 = -1$, les composantes :

$p_x(t)$, $p_y(t)$ et $p_\theta(t)$ sont des composantes du vecteur adjoint. elles vérifient :

$$\begin{cases} \dot{p}_x(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \Rightarrow p_x(t) = c_1, \\ \dot{p}_y(t) = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \Rightarrow p_y(t) = c_2, \quad c_1, c_2 \text{ constantes de } \mathbb{R} \\ \dot{p}_\theta(t) = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = p_x(t)v(t) \sin \theta(t) - p_y(t)v(t) \cos \theta(t), \quad t \in [0, T]. \end{cases} \quad (2.5)$$

De là. L'hamiltonien sera donné par :

$$H(x(t), p(t), \omega(t)) = \left((c_1v(t)) \cos \theta(t) + (c_2v(t)) \sin \theta(t) \right) + \left((c_1v(t)) \sin \theta(t) - (c_2v(t)) \cos \theta(t) \right) \omega(t) - 1. \quad (2.6)$$

Avec c_1, c_2 sont des constantes de \mathbb{R} .

les conditions de transversalité T n'étant pas fixé, alors :

$$\begin{aligned} \dot{p}_x(T) &= k_1, \\ \dot{p}_y(T) &= k_2, \quad k_1, k_2 \text{ constantes de } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Cherchons le contrôle optimal : Le contrôle optimale est bang - bang, il de pend du signe de $\sigma_v(t)$ et $\sigma_\omega(t)$ respectivement.

On a donc :

$$\begin{aligned} v(t) &= \text{sign}(p_x(t) \cos \theta(t) + p_y(t) \sin \theta(t)), \\ \omega(t) &= \arg \max_{|\omega| \leq 1} \omega(t) \sigma_\omega(t). \end{aligned}$$

Notons que la vitesse ne peut pas être égale à 0 donc $v(t) = \pm 1$ pour $t \in [0, T]$. Ainsi

$$\arg \max_{|v|=1} H = \arg \max_{|v|=1} v(t) \sigma_v(t).$$

Finalement, on obtient

$$\omega(t) = \begin{cases} -1 & \text{Si } \sigma_\omega(t) < 0, & (\text{tourner à droite.}) \\ +1 & \text{Si } \sigma_\omega(t) > 0, & (\text{tourner à gauche.}) \\ \in [-1, 1] & \text{Si } \sigma_\omega(t) = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Remarque 2.6.1. On a :

$$\dot{p}_\theta(t) = c_1 \cos \theta(t) + c_2 \sin \theta(t).$$

Car $v(\cdot)$ prend des valeurs ± 1 (elle est constante.)

Posons $\rho = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ et $\frac{c_2}{c_1} = \text{tg} \varphi$.

Proposition 2.6.1. Si $\dot{p}_\theta(t) = 0$ pour $t \in [\tau_1, +\tau_2] \subseteq [0, T]$ alors $\omega(t) = 0$.

En effet : On sait que :

$$\begin{aligned} \dot{p}_\theta(t) &= c_1 \cos \theta(t) + c_2 \sin \theta(t), \\ &= \rho \sin(\theta(t) - \varphi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \dot{p}_\theta(t) = 0 &\Rightarrow \sin(\theta(t) - \varphi) = 0, & (**) \\ &\Rightarrow \cos(\theta(t) - \varphi) = \pm 1. \end{aligned}$$

En plus

$$\begin{aligned}
 H(x(t), p(t), \omega(t)) &= \rho \cos(\theta(t) - \varphi) + p_\theta(t)\omega(t) + p^0 = 0, \\
 &= \rho \cos(\theta(t) - \varphi) + p^0, \quad \text{car } p_\theta(t) = 0, \\
 &\Rightarrow \rho \pm p^0 = 0, \\
 &\Rightarrow \rho = \pm p^0 \neq 0.
 \end{aligned}$$

Revenons à (**)

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_\theta(t) = 0 \quad \text{alors} \quad \sin(\theta(t) - \varphi) = 0 &\Rightarrow \theta(t) - \varphi = 2k\pi, \quad t \in [0, T]. \\
 &\Rightarrow \theta(t) = \varphi + 2k\pi = \text{cste}, \quad k \in \mathbb{Z}, \\
 &\Rightarrow \dot{\theta}(t) = 0 = \omega(t), \quad t \in [0, T].
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\omega^*(t) = \begin{cases} -1 & \text{Si } p_\theta(t) > 0, \\ +1 & \text{Si } p_\theta(t) < 0, \\ 0 & \text{Si } p_\theta(t) = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

2.7 Résolution numérique

La résolution numérique du problème considéré est réalisée avec deux méthodes, la méthode directe, pour avoir une idée sur les trajectoires et la méthode indirecte. Vu que les résultats obtenus sont les mêmes dans les deux méthodes ; on a les a illustré dans les graphes suivants :

2.7.1 Les graphes

On peut remarquer lorsque la voiture manipule la marche arrière la vitesse linéaire est négative de 0 à 3, par contre la direction du volant (la vitesse angulaire) change de signe, elle est positive au départ ça tourne légèrement à gauche puis s'annule entre 0.3 et 2.7, car il n'y a aucun changement de direction. (Figure 2.3)

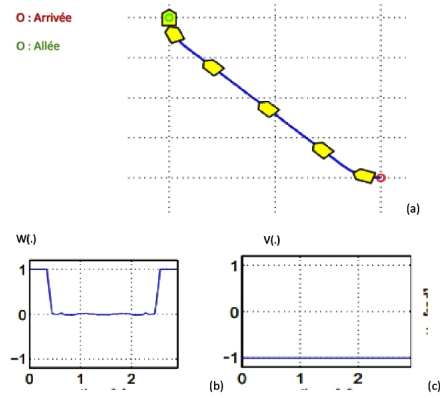


FIGURE 2.3 – Vitesses linéaire et angulaire.

La vitesse linéaire est positive, car le véhicule avance puis tourne à droite, dans ce cas là, $w(\cdot)$ est négative, quand le véhicule recule $v(\cdot)$ est égale à -1 . (Figure 2.4)

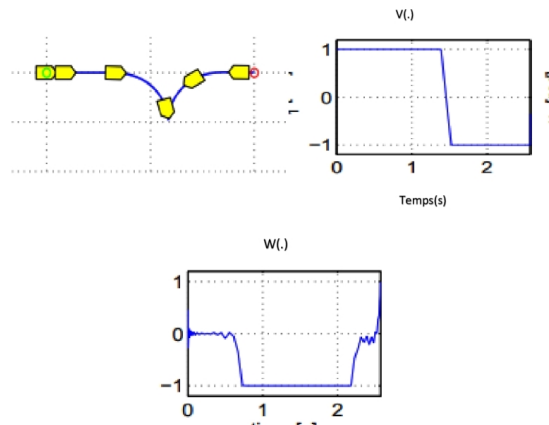


FIGURE 2.4 – Vitesse linéaire et angulaire.

Chapitre 3

Problème de Reeds - Shepp à accélération angulaire

3.1 Introduction

Dans le chapitre 2, on a remarqué que la courbure le long de la trajectoire ne varie pas continuellement, dans la réalité tout robot suivant une telle trajectoire serait contraint de s'arrêter à chaque discontinuité de courbure. Pour éviter ce problème, Boissonnat, cerezo et lebland [4] proposé une extension du problème précédent en contrôlant l'angle de l'accélération du vehicule au lieu de sa vitesse angulaire. Dans ce qui suit, on va considérer un problème de contrôle optimal à une seule commande qui représentera l'accélération angulaire. Donc on va résoudre un problème de contrôle optimal à une commande :

◇ $v(\cdot)$: l'accélération angulaire.

Ce problème est résolu théorique en utilisant le Principe du Maximum de Pontryagin (PMP); numériquement, nous avons utilisé deux méthodes de résolution, à savoir la méthode directe (Euler) et la méthode indirecte (méthode de tir), puis nous avons interprété les résultats.

3.2 Position du problème

Dans le chapitre précédent, on a considéré un problème de contrôle optimal avec deux commandes $v(\cdot)$ et $\omega(\cdot)$ qui représentent respectivement la vitesse linéaire et la vitesse angulaire de la voiture (du robot).

Dans ce chapitre, en gardant les mêmes notations, nous avons considéré un problème de voiture suivant :

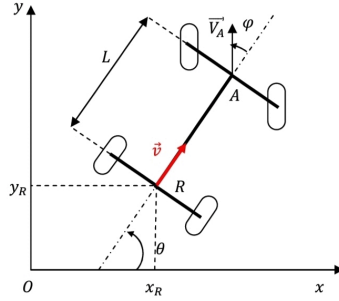


FIGURE 3.1 – Le modèle du robot monocycle.

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T dt \rightarrow \min, \\ \dot{x}(t) = \cos \theta(t), \\ \dot{y}(t) = \sin \theta(t), \\ \dot{\theta}(t) = \omega(t), \\ \dot{\omega}(t) = v(t), \quad t \in [0, T], |v(t)| \leq B, B \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Les variables (x, y) représentent les coordonnées cartésiennes du voiture Reeds-Shepp dans ce plan. θ : représentent l'angle d'orientation du voiture Reeds-Shepp par rapports à l'axe des abscisses. $v(t)$ représente l'accélération angulaire et $\omega(t)$ représente la vitesse angulaire. A noter que $v(\cdot)$ varie en fonction du temps.

3.3 Existence de la solution du problème

3.3.1 Existence des trajectoires

L'ensemble des contrôles considérés est inclu dans $L_{loc}^\infty ([0, T], \mathbb{R}^n)$, la fonction f est de classe C^1 sur son domaine de définition (car la fonction f est continue et continûment différentiable par rapport à x . C'est une propriété usuelle des équations différentielles ordinaires). Il est facile de remarquer dans notre cas, que pour chacun des contrôles considérés fixés, il existe une unique solution du problème considéré (3.1).

3.4 Existence de la commande contrôlabilité :

Comme dans la section 2.4, on peut vérifier la contrôlabilité du problème considéré (3.1), on a utilisé le théorème de Chow (2.4.1).

3.4.1 Contrôlabilité du système considéré

Le système (3.1) peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{X} = F(X, v) = f(X) + vg(X), \quad (3.2)$$

avec g et f qui sont donnés sous la forme :

$$f(X) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \\ \sin \theta \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'algèbre de Lie engendrée par g et f est donnée par :

$$\forall X \in \mathbb{R}^4 : [f, g](X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [f, g, [f, g]](X) = \begin{pmatrix} -\sin \theta(t) \\ \cos \theta(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On aura donc

$$[f, g, [f, g], [f, g, [f, g]]] = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & 0 & 0 & \sin \theta(t) \\ \sin \theta(t) & 0 & 0 & -\cos \theta(t) \\ \omega & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice est de déterminant égal à -1 , alors le système (3.2) est contrôlable.

Puisque : le rang de la matrice précédente est égale à 4, alors d'après le théorème de Chow 2.4.1, le point $X_f = (x_f, y_f, \theta_f, \omega_f)^T$ est atteignable à partir de $X_0 = (x_0, y_0, \theta_0, \omega_0)^T$.

3.5 Résolution théorique

3.5.1 Principe du Maximum de Pontryagin

Pour la résolution de ce problème, on applique le principe du maximum de pontryagin, afin d'obtenir les conditions nécessaires d'optimalité.

L'Hamiltonien du système (3.1) est donné pour $t \in [0, T]$ par :

$$H(x(t), p(t), v(t)) = p_x(t) \cos \theta(t) + p_y(t) \sin \theta(t) + p_\theta(t) \omega(t) + p_\omega(t) v(t) - p_0, \quad (3.3)$$

$p_x(t), p_y(t), p_\theta(t)$ et $p_\omega(t)$ sont des composantes du vecteur adjoint, elles sont données pour tout $t \in [0, T]$ par : $p(\cdot)$ est le vecteur adjoint, $x(\cdot)$ l'état du système.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_x(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \Rightarrow p_x(t) = c_1, \\ \dot{p}_y(t) = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \Rightarrow p_y(t) = c_2, \\ \dot{p}_\theta(t) = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = p_x(t) \sin \theta(t) - p_y(t) \cos \theta(t), \\ \quad = c_1 \cos \theta(t) - c_2 \sin \theta(t), \\ \dot{p}_\omega(t) = -p_\theta(t). \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Pour $\rho = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ et $\operatorname{tg} \varphi = \frac{c_2}{c_1}$, $\varphi \in [0, 2\pi[$.

On peut avoir :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_x(t) = \rho \cos \varphi, \\ p_y(t) = \rho \sin \varphi, \\ p_\theta(t) = \rho \sin(\theta(t) - \varphi), \\ p_\omega(t) = -p_\theta(t) = -\rho \sin(\theta(t) - \varphi). \end{array} \right. \quad (3.5)$$

$$H(x(t), p(t), v(t)) = \rho \cos(\theta(t) - \varphi) + p_\theta(t) \omega + p_\omega(t) v - p_0. \quad (3.6)$$

On aura donc

$$\begin{aligned} v(t) &= \text{sign}(p_\omega(t)), \\ &= \pm B \quad \text{si } p_\omega(t) \neq 0. \end{aligned}$$

Supposons $p_\omega(t) = 0$ sur $[a_1, a_2] \subseteq [0, T]$ alors $p_\theta(t) = 0$ donc $\dot{p}_\theta(t) = 0$.

On sait que $\rho \neq 0$ (voir chapitre 2).

On aura ainsi de (3.5) $\sin(\theta(t) - \varphi) = 0$ alors $\theta(t) = \varphi$ modulo (2π) . Constante tout le long de $[a_1, a_2]$.

Autrement dit

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) = 0 &\Rightarrow \dot{\omega}(t) = 0, \\ &\Rightarrow v(t) = 0. \end{aligned}$$

Finalement

$$v(t) = \begin{cases} +B & \text{si } p_\omega(t) > 0, \\ -B & \text{si } p_\omega(t) < 0, \\ 0 & \text{si } p_\omega(t) = 0, \quad t \in [0, T]. \end{cases} \quad (3.7)$$

3.6 Résolution numérique

La résolution numérique du problème considéré est réalisée avec deux méthodes, la méthode directe, pour avoir une idée sur les trajectoires et la méthode indirecte. Vu que les résultats obtenus sont les mêmes dans les deux méthodes ; on a les a illustré dans les graphes suivants :

3.6.1 Les graphes

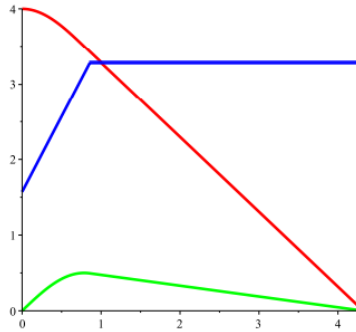


FIGURE 3.2 –

$x(\cdot)$ en rouge, $y(\cdot)$ en vert et $\theta(\cdot)$ en bleu.

On peut remarque que $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$ sont décroissantes.

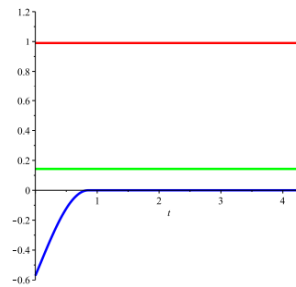


FIGURE 3.3 –

$p_x(\cdot)$ en rouge, $p_y(\cdot)$ en vert et $p_\theta(\cdot)$ en bleu.

Comme trouvé en utilisant la résolution théorique, p_x et p_y sont constants et non nuls, p_θ croit puis s'anulle.

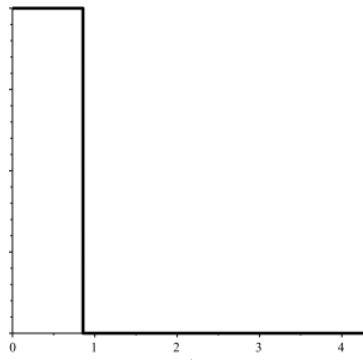


FIGURE 3.4 – L'accélération angulaire.

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons considéré deux problèmes de voiture de Dubins, modélisés en problèmes de contrôle optimal, dont les commandes sont les vitesses linéaire (l'accélération angulaire) et angulaire. Nous avons rencontré un problème dans l'étude de la contrôlabilité des systèmes car ni le critère de Kalman, ni la linéarisation du système n'a fonctionné, il faut remarquer que les systèmes considérés sont affines, donc on a utilisé la notion de crochet de Lie dans le théorème de Chow pour régler la contrôlabilité. On a résolu théoriquement les deux problèmes puis on a illustré dans de différentes courbes les résultats trouvés théoriquement. Prochainement, il est intéressant de considérer un problème complet de voiture de Dubins, car les problèmes étudiés dans ce travail sont simplifiés.

Bibliographie

- [1] Boissonnat, J.-D., A. Cerezo, and J. Leblond (1994), Shortest paths of bounded curvature in the plane, 11 (1-2), 520, doi :10.1007/BF01258291.
- [2] Boissonnat, J.-D., A. Cerezo, and J. Leblond (1994), Shortest paths of bounded curvature in the plane, 11 (1-2), 520, doi :10.1007/BF01258291.
- [3] J.D. Boissonnat, A. Cerezo, and J. Leblond. “Shortest paths of bounded curvature in the plane” . In IEEE International Conference on Robotics and Automation, Nice, France, 1992.
- [4] Aliane, M., Moussouni, N., and Bentobache, M. (2020). Optimal control of a rectilinear motion of a rocket. *Statistics, Optimization and Information Computing*, 8, 281-295.
- [5] Aliane, M., Moussouni, N., and Bentobache, M.(2019). Nonlinear optimal control of the heel angle of a rocket. 6th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CODIT’19), Paris, 756-760.
- [6] Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V., Mishchenko, E.F. (1962). The mathematical theory of optimal processes. Intersciences Publisher, New York.
- [7] Reeds, J. A., and L. A. Shepp (1990), Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards., *Pacific Journal of Mathematics*, 145 (2), 367-393.
- [8] Trélat, E. (2005). *Contrôle optimal, théorie et Applications* Vuibert, Concrete mathematics collection, Paris.