

الجمهورية الجزائرية الشعبية الديمقراطية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثلجي الأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES



Mémoire de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatiques

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématiques

Par : Kabache Aicha

THEME

Dérivées fractionnaires et applications

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Mr. A. Mokhtari

Mr. Y. Belabbaci

Mr. A. Rahmoune

M. Y. Boukhatem

Professeur

M.C.A

M.C.B

M.C.A

Président

Examineur

Examineur

Encadreur

Année Universitaire 2017/2018

Remerciements

*En premier lieu, mes remerciements s'adressent à **ALLAH** le tout puissant pour les chances qui m'offert pour réaliser ce travail.*

*Je tiens à exprimer mes vifs remerciements pour mon encadrante, Madame **Boukhatem Yamna** d'avoir accepté de m'encadrer pour mon projet de fin d'études, ainsi que pour ses remarques pertinentes et s'encouragement.*

*Un très grand merci aux professeurs : **Y. Belabbaci** , **A. Mokhtari**, et **A. Rahmoune** qui ont accepté de participer à mon jury de ce mémoire.*

Mes remerciements vont aussi à tous les professeurs, et toutes les personnes qui ne m'ont soutenu jusqu'au bout, et qui m'ont pas cessé de me donner des conseils très importants en signe de reconnaissance.

Dédicaces

*Ma dédicace s'adresse d'abord à ma mère et mon père
pour leurs confiances et leurs encouragements.*

*A mes soeurs et mes frères pour leurs douceurs et leurs
gentillesse.*

A toute ma famille ainsi qu'à mes amis...

ملخص

في هذه المذكرة، ندرس مختلف المشتقات الكسرية الأكثر تداولاً: وأهمها صيغة ريمان ليوفيل، كابيتو وغرونوال.

من جهة أخرى نكرس جزء من هذه المذكرة لدراسة المسائل الحدية ذات المشتقات الكسرية، ولبرهنة وجود ووحداية الحل نستعمل نظرية النقطة الثابتة.

الكلمات المفتاحية: المشتقات الكسرية بصيغة ريمان ليوفيل، المشتقات الكسرية بصيغة كابيتو، المشتقات الكسرية بصيغة غرونوال، دالة غرين، المسألة الحدية ذات المشتقات الكسرية.

Résumé :

Dans ce mémoire, on traite les différentes notions de dérivées fractionnaires, les plus utilisées : dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, Caputo et Grünwald-Letnikov. Ensuite, on étudie des problèmes aux limites pour les équations différentiels d'ordre fractionnaire. Nous utilisons le théorème de point fixe pour montrer l'existence et l'unicité de la solution .

Mots clés : Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville ; Dérivée fractionnaire au sens de Caputo ; Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov ; Fonction de Green ; Problème au limite pour des équations différentiels d'ordre fractionnaire.

Abstract :

In this work, we study the different notions of fractional derivatives, the most used : fractional derivative in the sense of Riemann-Liouville, Caputo and Grünwald-Letnikov.

Then, we consider a boundary problems for the fractional order differential equations. We use the fixed point theorem to show the existence and uniqueness of the solution.

Keywords : Fractional derivative in the sense of Riemann-Liouville ; Fractional derivative in the sense of Caputo ; Fractional derivative in the sense of Grünwald-Letnikov ; Green function ; Boundary problems for the fractional order differential equations.

Table des matières

Introduction	3
1 Définitions et notions de bases	5
1.1 Espaces fonctionnels	5
1.1.1 Espace $L^p(\Omega)$	6
1.1.2 Espace des fonctions continues avec poids $C_\gamma([a, b])$	7
1.2 Fonctions spéciales	7
1.2.1 Fonction Gamma	7
1.2.2 Propriétés de la fonction Gamma	8
1.2.3 La fonction Bêta	10
1.2.4 Propriétés de la fonction Bêta	11
1.2.5 Fonction de Mittag-Leffler	13
1.2.6 Fonction de Green	14
1.3 Transformée de Laplace	15
2 Dérivées et Intégrales fractionnaires	18
2.1 Dérivée au sens de Riemann-Liouville	18
2.1.1 Intégrale fractionnaire au sens Riemann-Liouville	18
2.1.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	22
2.2 Dérivée fractionnaire de Caputo	27
2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov	32
2.3.1 Intégrale fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov	32
2.3.2 Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov	33
3 Problème de Cauchy et problèmes aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire	35
3.1 Problème de Cauchy pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire	35
3.1.1 Résultat d'existence	35

TABLE DES MATIÈRES

3.2	Problèmes aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire	43
3.2.1	Existence des solutions	43
3.3	Problèmes aux limites pour des équation différentielles avec des conditions intégrales	47
3.3.1	Existence des solutions	47
	Conclusion	52
	Bibliographie	54

Introduction

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent à la fin du 17^{me} siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral (Voir les références [6],[8], [9], [11],[12],[13]), mais ce n'est que lors des trois dernières décennies que le calcul fractionnaire a connu un plus large intérêt, voir les ouvrages [10], [12], [13], [14].

En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n}{dt^n}$ pour désigne la n^{me} dérivée d'une fonction f . Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu : Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$?

Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques.

Le calcul fractionnaire a un champ d'applications très vaste, (voir [8],[11]), par exemples : viscoélasticité, théorie du contrôle, équation de diffusion, électricité, électromagnétique, biologie . . .

L'objectif de ce mémoire de présenter quelques définitions des dérivées fractionnaire et d'étudier l'existence et l'unicité des solutions de problèmes aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Ce travail est constitué de trois chapitres :

- Le premier chapitre contient des définitions et notions de bases de quelques fonctions spéciales comme les fonctions Gamma, Bêta, Mittag-Leffler et Green, on rappelle la transformation de laplace, et quelques espaces fonctionnels utiles dans la suite.
- Le seconde chapitre contient plusieurs définitions et propriétés de l'intégration

et la dérivation de différents types d'ordre fractionnaire, nécessaires dans le chapitre suivant.

- Le dernier chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution des problèmes aux limites pour des équations différentiels d'ordre fractionnaire. Pour cela, nous utiliserons le théorème de point fixe. Exactement nous étudions les trois problèmes aux limites suivants :

(P_1) Problème de Cauchy pour une équation différentielle d'ordre fractionnaire :

$$(P_1) : \begin{cases} {}^c D_a^\alpha y(t) = f(t, y(t)), & \text{pour tout } t \in J = [0, T], 0 < \alpha < 1 \\ y(0) = y_0 & y_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1)$$

Où ${}^c D_a^\alpha$ est la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo, $a=0$, $f : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, y_0 est la condition initiale, et $T > 0$ un réel strictement positive.

(P_2) Problème aux limites pour une équation différentielle d'ordre fractionnaire :

$$(P_2) : \begin{cases} {}^c D_a^\alpha y(t) = f(t, y(t)), & \text{pour tout } t \in J = [0, T], 0 < \alpha < 1 \\ ay(0) + by(T) = c_1, \end{cases} \quad (2)$$

Où ${}^c D_a^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue, a, b, c sont des constantes réelles avec $a + b \neq 0$.

(P_3) Problème aux limites pour une équation différentielle avec condition intégrale :

$$(P_3) : \begin{cases} {}^c D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), & \text{pour tout } t \in J = [0, T], 0 < \alpha < 1 \\ y(0) + \mu \int_0^T y(s) ds = y(T), & \mu \in \mathbb{R}^* \end{cases} \quad (3)$$

Où ${}^c D^\alpha$ la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo, $f : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée, et $\mu \in \mathbb{R}^*$.

Chapitre 1

Définitions et notions de bases

Dans ce chapitre, nous présentons les propriétés fondamentales des fonctions Gamma, Bêta, Mittag-Leffler et Green. Ces fonctions jouent un rôle importants dans la théorie du calcul fractionnaire .

1.1 Espaces fonctionnels

Soit $J = [a, b]$. Notons $C([a, b])$ l'espace de Banach des fonctions réelles continues définies sur J . Muni de la norme

$$\|y\|_{\infty} = \sup_{t \in J} |y(t)|.$$

$C^m(J)$ désigne la classe des fonctions f telle que $f^{(k)}$ soit continue pour tout k , $k = 1, 2, \dots, m$.

Définition 1.1. Soient E et F deux espaces normés. Une application $T : E \longrightarrow F$ linéaire c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in E : T(x + y) = Tx + Ty$$

$$T(\lambda x) = \lambda Tx \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{K},$$

est souvent appelée opérateur linéaire.

Définition 1.2. On dit que l'opérateur T est continue, s'il existe une constante k positive telle que, pour tout $x \in E$,

$$\|Tx\| \leq k\|x\|.$$

Proposition 1.1. *soit $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. T continue en 0
2. T continue
3. T borné.

Définition 1.3. Soit $T : E \longrightarrow E$. On dit que $x \in E$ est un point fixe de T si

$$Tx = x.$$

Définition 1.4. On dit que T est un opérateur lipschitzien, s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall x, y \in E : \|T(x) - T(y)\|_E \leq k\|x - y\|_E.$$

De plus, Si $0 < k < 1$, on dit que T est un opérateur contracte.

Théorème 1.1. *(Théorème de Banach du point fixe)*

Si E est un espace de Banach et T est contractante, alors T admet un unique point fixe .

1.1.1 Espace $L^p(\Omega)$

Soit $\Omega = (a, b)$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq \infty$.

1. Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est l'ensemble des classes des fonctions réelles mesurables f sur Ω , vérifiant :

$$\int_a^b |f(x)|^p dx < +\infty.$$

De plus $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme suivante :

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_a^b |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. Pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables f bornées presque partout (p.p) sur Ω , de plus est un espace de Banach muni de la norme suivante :

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \left\{ M \geq 0 : |f(x)| \leq M \text{ p.p sur } \Omega \right\}.$$

1.1.2 Espace des fonctions continues avec poids $C_\gamma([a, b])$

Définition 1.5. Soit $\Omega = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{C}$ tel que $0 \leq \operatorname{Re}(\gamma) < 1$: $C_\gamma([a, b])$: l'espace des fonctions f définies sur $]a, b[$ à valeur dans $\mathbb{C}$ telles que la fonction $t \mapsto (t - a)^\gamma f(t) \in C([a, b])$.

Il est muni de la norme suivante :

$$\|f\|_{C_\gamma} = \sup_{t \in \Omega} |(t - a)^\gamma f(t)|.$$

Avec la convention $C_0([a, b]) = C([a, b])$.

1.2 Fonctions spéciales

1.2.1 Fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler.

Définition 1.6. Pour tout nombre complexe α , de partie réelle positive $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, on définit la fonction Gamma, notée $\Gamma(\alpha)$, par l'intégrale suivant :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \quad (1.1)$$

Remarque 1.1. L'intégrale impropre $\int_0^\infty e^{-x} x^{y-1} dx$ existe pour tout $y > 0$.

Si $y \geq 1$, alors l'intégrale est une intégrale impropre du premier type, car la fonction $f(x) = e^{-x} x^{y-1}$ est bien définie sur l'intervalle $[0, \infty)$. Notons que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x/2} x^{y-1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{y-1}}{e^{x/2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(y-1)x^{y-2}}{(1/2)e^{x/2}} \\ &\quad \vdots \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(y-1)(y-2) \dots (y-k+1)x^{y-k}}{(1/2)^{k-1} e^{x/2}} = 0 \end{aligned}$$

en utilisant la règle de l'Hopital, si nécessaire, jusqu'à ce que $y - k \leq 0$.

Il existe donc une constante M telle que $0 \leq e^{-x/2} x^{y-1} \leq M$ pour tout $x \in [0, +\infty)$.

1.2. FONCTIONS SPÉCIALES

Après multiplication par $e^{-x/2}$, nous obtenons inégalité $0 \leq e^{-x}x^{y-1} \leq Me^{-x/2}$ pour tout $x \in [0, \infty)$. Nous pouvons noter que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x}x^{y-1}dx &\leq \int_0^\infty Me^{-x/2}dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b Me^{-x/2}dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-2Me^{-x/2} \right]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (2M - 2Me^{-b/2}) = 2M. \end{aligned}$$

nous avons que $\int_0^\infty e^{-x}x^{y-1}dx$ existe si $y \geq 1$.

Si $0 < y < 1$, alors l'intégrale est une intégrale impropre du premier et deuxième type, car la fonction $f(x) = e^{-x}x^{y-1}$ n'est pas définie à $x = 0$.

En effet,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x}x^{y-1} = \infty.$$

Donc $\int_0^\infty e^{-x}x^{y-1}dx$ existe si et seulement si $\int_0^1 e^{-x}x^{y-1}dx$ et $\int_1^\infty e^{-x}x^{y-1}dx$ existent. La première de ces deux dernières intégrales est du premier type, alors que le second est du deuxième type. Pour ce qui est de l'intégral $\int_1^\infty e^{-x}x^{y-1}dx$, il suffit de procéder comme dans le cas $y \geq 1$.

En effet, il existe une constante M telle que $0 \leq e^{-x/2}x^{y-1} \leq M$ pour tout $x \geq 1$. Donc $0 \leq e^{-x}x^{y-1} \leq Me^{-x/2}$ pour tout $x \geq 1$ et $\int_1^\infty e^{-x}x^{y-1}dx$ existe, parce que $\int_1^\infty e^{-x/2}x^{y-1}dx$ existe.

Pour ce qui est de l'intégrale $\int_0^1 e^{-x}x^{y-1}dx$, il faut noter que

$$0 \leq e^{-x}x^{y-1} = \frac{x^{y-1}}{e^x} \leq x^{y-1} \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Parce que $y-1 > -1$, nous avons que $\int_0^1 x^{y-1}dx$ existe, donc l'intégrale $\int_0^1 e^{-x}x^{y-1}dx$ existe si $0 < y < 1$ et conséquemment $\int_0^\infty e^{-x}x^{y-1}dx$ existe pour tout $y > 0$.

1.2.2 Propriétés de la fonction Gamma

Citons quelques propriétés :

1. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ avec $\Gamma(1) = 1$.

En effet, :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha + 1) &= \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n t^\alpha e^{-t} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ t^\alpha (-e^{-t}) \Big|_0^n + \int_0^n \alpha t^{\alpha-1} e^{-t} dt \right\} \\ &= \alpha \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt.\end{aligned}$$

2. Pour $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$ $\Gamma(n + 1) = n!$.

En effet

par définition,

$$\Gamma(1) = 1,$$

d'après la propriété 1,

$$n = 2 : \Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1!$$

$$n = 3 : \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2 \times 1$$

$$n = 4 : \Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3 \times 2 \times 1.$$

Il suffit donc de faire un raisonnement par récurrence, et on obtient le résultat désiré .

Ce ci montre que la fonction Gamma est une généralisation du factoriel, c'est pour que la fonction Gamma est aussi appelée fonction factorielle, et est notée, parfois $\alpha!$ (avec la convention $0! = 1$).

3. $\Gamma(\alpha) = 2 \int_0^\infty t^{2\alpha-1} e^{-t^2} dt$.

En effet, on a :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt,$$

Posons $t = x^2$. Alors $dt = 2x dx$ et donc :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha) &= 2 \int_0^{+\infty} (x^2)^{\alpha-1} e^{-x^2} x dx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} x^{2(\alpha-1)} e^{-x^2} x dx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} x^{2\alpha-1} e^{-x^2} dx.\end{aligned}$$

4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. En effet,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt. \quad (1.2)$$

Posons $t = y^2$. Alors $dt = 2y dy$ et donc :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy, \quad (1.3)$$

on a aussi :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx. \quad (1.4)$$

Par conséquent

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy. \quad (1.5)$$

L'équation (1.5) est un intégrale double qui peut être évaluée par passage en coordonnées *pôlaires*. On obtient :

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{+\infty} r e^{-r^2} dr d\theta = \pi, \quad (1.6)$$

et donc :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

1.2.3 La fonction Bêta

Définition 1.7. La fonction Bêta, notée par $B(.,.)$, est une autre espèce de fonction d'Euler, elle est définie par :

$$Re(p) > 0, Re(q) > 0 : B(p, q) = \int_0^1 \tau^{p-1} (1 - \tau)^{q-1} d\tau, \quad (1.7)$$

avec p, q deux nombres complexes des parties réelles strictement positives, et $\tau \in [0, 1]$.

Remarque 1.2. *L'intégrale $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ existe pour tout $p, q > 0$.*

Notons premièrement que si $p, q \geq 1$, alors l'intégrale ci-dessus est une intégrale propre. Par contre si $0 < p < 1$ ou encore $0 < q < 1$, alors nous avons affaire à une intégrale impropre.

Si $0 < p < 1$ et $q \geq 1$, alors $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq x^{p-1}$ pour tout $x \in (0, 1]$, car $0 \leq (1-x)^{q-1} \leq 1$. donc $\int_0^1 x^{p-1}dx$ existe, alors nous obtenons que $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ existe.

Si $0 < q < 1$ et $p \geq 1$, alors $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq x^{q-1}$ pour tout $x \in (0, 1]$, car $0 \leq (1-x)^{p-1} \leq 1$. donc $\int_0^1 x^{q-1}dx$ existe, alors nous obtenons que $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ existe.

Finalement si $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$, alors la fonction $x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ n'est pas définie aux deux extrémités de l'intervalle $[0, 1]$. Il faut considérer séparément ces deux cas. Nous avons donc

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx + \int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

et il faut vérifier que ces deux intégrales impropres existent.

Notons premièrement qu'il existe un nombre réel positif M tel que $0 \leq (1-x)^{q-1} \leq M$ pour tout x tel que $0 \leq x \leq 1/2$. De ceci, nous avons

$$0 \leq x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq Mx^{p-1}$$

si $0 \leq x \leq 1/2$ et comme l'intégrale $\int_0^{1/2} Mx^{p-1}dx$ existe, alors $\int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ existe.

Pour ce qui est de l'autre intégrale, il faut noter qu'il existe un nombre réel positif N tel que $0 \leq (1-x)^{p-1} \leq N$ pour tout x tel que $1/2 \leq x \leq 1$. De ceci, nous avons

$$0 \leq x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq Nx^{q-1} \text{ si } 1/2 \leq x \leq 1 \text{ et comme l'intégrale } \int_{1/2}^1 Nx^{q-1}dx$$

existe, alors $\int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ existe.

Donc la fonction Bêta est bien définie pour tout $p, q > 0$.

1.2.4 Propriétés de la fonction Bêta

Citons les propriétés fondamentales de la fonction B

1. La fonction Bêta est symétrique : $B(p, q) = B(q, p)$.

En effet, on a :

$$B(p, q) = \int_0^1 \tau^{p-1} (1 - \tau)^{q-1} d\tau,$$

Posons $\tau = 1 - u$. Alors :

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^1 (1 - u)^{p-1} (1 - 1 + u)^{q-1} du \\ &= \int_0^1 u^{q-1} (1 - u)^{p-1} du \\ &= B(q, p). \end{aligned}$$

2. $B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta$.

En effet, on a :

$$B(p, q) = \int_0^1 \tau^{p-1} (1 - \tau)^{q-1} d\tau.$$

Posons $\tau = \sin^2 \theta$ il vient que

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^{\pi/2} 2 \sin \theta \cos \theta \sin^{2(p-1)} \theta \cos^{2(q-1)} \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2q-1} \theta \cos^{2p-1} \theta d\theta. \end{aligned}$$

- 3.

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (1.8)$$

En effet, on a :

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} dt.$$

Posons $t = x^2$. Alors $dt = 2x dx$

$$\begin{aligned}
\Gamma(p) &= 2 \int_0^{+\infty} (x^2)^{p-1} e^{-x^2} x dx \\
&= 2 \int_0^{+\infty} x^{2(p-1)} e^{-x^2} x dx \\
&= 2 \int_0^{+\infty} x^{2p-1} e^{-x^2} dx \\
\Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(2 \int_0^{+\infty} x^{2p-1} e^{-x^2} dx \right) \left(2 \int_0^{+\infty} y^{2q-1} e^{-y^2} dy \right) \\
&= 4 \int_0^{+\infty} x^{2p-1} y^{2q-1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.
\end{aligned}$$

Par passage en coordonnées *pôlaires*, on trouve :

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= 4 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{+\infty} \left(\cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta \right) \left(r^{2p+2q-2} e^{-r^2} \right) dr d\theta \\
&= 4 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{+\infty} \left(\cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta \right) \left(r^{2p+2q-1} e^{-r^2} \right) dr d\theta \\
&= \left(2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta \right) \left(2 \int_0^{+\infty} r^{2(p+q)-1} e^{-r^2} dr \right) \\
&= B(p, q) \Gamma(p+q).
\end{aligned}$$

D'où

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

1.2.5 Fonction de Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler est une généralisation directe de la fonction exponentielle, et joue un rôle majeur dans le calcul fractionnaire. Les représentations de la fonction de Mittag-Leffler à un et à deux paramètres peuvent être définies en termes d'une série :

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \quad (1.9)$$

$$E_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Re}(\beta) > 0, \quad x \in \mathbb{C}. \quad (1.10)$$

De la définition (1.10) résulte que :

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x).$$

En effet, par définition on a,

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1) + \beta)} \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{xx^k}{\Gamma(\alpha k + (\alpha + \beta))} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + (\alpha + \beta))} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x). \end{aligned} \tag{1.11}$$

La fonction de Mittag-Leffler se réduit à des fonctions simples, pour des cas particuliers. Ainsi

$$\begin{aligned} E_{1,1}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \\ E_{1,2}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^x - 1}{x} \\ E_{2,1}(x^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh(x). \end{aligned}$$

1.2.6 Fonction de Green

On appelle fonction de Green, une solution élémentaire ou fondamentale d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, ou d'une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants.

Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un point de $\mathbb{R}^n$, et D un opérateur différentiel linéaire. On cherche la solution $\varphi(x)$ de équation aux dérivées partielles linéaire :

$$D\varphi(x) = f(x)$$

où $f : x \mapsto f(x)$ est une fonction donnée, appelée source de champ $\varphi(x)$ inconnu.

Définition 1.8. (Distribution de Dirac)

On note δ la distribution de Dirac, la distribution vérifie la propriété fondamentale pour toute fonction $x \mapsto \varphi(x)$ lisse, $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$.

On appelle fonction de Green toute solution G de l'équation aux dérivées partielles linéaire :

$$DG = \delta.$$

Il existe en général plusieurs fonctions de Green associé à la même équation. Ces fonctions diffèrent entre elles par leurs conditions aux limites. C'est pourquoi il est très important de spécifier deux choses pour définir de façon unique une fonction de Green précise :

- L'équation aux dérivées partielles linéaire ;
- Les conditions aux limites.

1.3 Transformée de Laplace

Définition 1.9. La transformée de Laplace d'une fonction f de la variable réelle $t \in \mathbb{R}_+$ est définie par :

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \quad s \in \mathbb{C}, \quad (1.12)$$

e^{-st} est appelée le noyau de transformée de Laplace $\mathcal{L}f$.

Remarque 1.3. La transformée de Laplace d'une fonction existe si l'intégrale (1.12) est convergente. C'est le cas, il existe des constantes M , a et t_0 tels que $|f(t)| \leq Me^{at}$, pour $t > t_0$.

La transformée de Laplace existe donc pour $\operatorname{Re}(s) > a$. f est appelée la transformée de Laplace inverse :

$$\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}f)(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \mathcal{L}f(s) ds, \quad c > a. \quad (1.13)$$

Proposition 1.2. La transformée de Laplace est linéaire i.e(si f_1, f_2 sont intégrables pour $\operatorname{Re}(s) > a$ et $\operatorname{Re}(s) > b$, avec a, b sont des ordres exponentielles des fonctions f_1, f_2 respectivement, alors

$$\mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2)(s) = c_1 \mathcal{L}f_1(s) + c_2 \mathcal{L}f_2(s) \quad \text{pour } \operatorname{Re}(s) > \max\{a, b\}. \quad (1.14)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2)(s) &= \int_0^\infty (c_1 f_1 + c_2 f_2)(t) e^{-st} dt \\
&= \int_0^\infty (c_1 f_1(t) e^{-st} + c_2 f_2(t) e^{-st}) dt \\
&= \int_0^\infty c_1 f_1(t) e^{-st} dt + \int_0^\infty c_2 f_2(t) e^{-st} dt \\
&= c_1 \int_0^\infty f_1(t) e^{-st} dt + c_2 \int_0^\infty f_2(t) e^{-st} dt \\
&= c_1 \mathcal{L}f_1(s) + c_2 \mathcal{L}f_2(s).
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.3. *La transformée de laplace de la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de la fonction f est donnée par :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f^{(n)})(s) &= s^n \mathcal{L}f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0^+) \\
&= s^n \mathcal{L}f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0^+)
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Définition 1.10. Soient f, g deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$, le produit de convolution de laplace de f et g , notée $f * g$, est une fonction $x \mapsto (f * g)(x)$ définie par l'intégrale suivant :

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt. \tag{1.16}$$

Proposition 1.4. *Si les transformées de Laplace de f et g existent alors la transformée de Laplace du produit de convolution vérifie :*

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}f(s)\mathcal{L}g(s). \tag{1.17}$$

Exemple 1.1. 1. Si $f(t) = 1$ pour $t > 0$, alors :

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s}. \tag{1.18}$$

2. Si $f(t) = e^{at}$, où a est une constante, alors :

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \mathcal{L}(e^{at})(s) \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a}. \tag{1.19}$$

3. Si $f(t) = t^n$, où n est un entier positif alors

$$\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}. \quad (1.20)$$

En effet, pour $n = 1$:

$$\mathcal{L}(t)(s) = \int_0^\infty te^{-st} dt = \frac{1}{s^2}.$$

Pour $n = 2$:

$$\mathcal{L}(t^2)(s) = \int_0^\infty t^2 e^{-st} dt = \frac{2}{s^{2+1}} = \frac{2}{s^3}.$$

Pour $n = 3$:

$$\mathcal{L}(t^3)(s) = \int_0^\infty t^3 e^{-st} dt = \frac{2 \times 3}{s^{3+1}} = \frac{3!}{s^4}.$$

Pour n un entier positif, alors :

$$\mathcal{L}(t^n)(s) = \int_0^\infty t^n e^{-st} dt = \frac{(n-1)! \times n}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

4. Si $f(t) = \sin at$, a est un constant réel, alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\sin at)(s) &= \int_0^\infty \sin ate^{-st} dt = \frac{1}{2i} \int_0^\infty (e^{-t(s-ia)} - e^{-t(s+ia)}) dt \\ &= \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia} \right] = \frac{a}{s^2 + a^2}. \end{aligned}$$

De même pour $f(t) = \cos at$:

$$\mathcal{L}(\cos at)(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

Chapitre 2

Dérivées et Intégrales fractionnaires

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions de dérivées fractionnaires. Elles ne sont pas toutes équivalentes. Nous présentons dans cette partie les définitions de Riemann-Liouville, Caputo ainsi que Grunwald-letnikov . Elles sont les plus utilisées.

2.1 Dérivée au sens de Riemann-Liouville

Comme la majorité des ouvrages introductifs au calcul fractionnaire, nous commençons la définition de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

2.1.1 Intégrale fractionnaire au sens Riemann-Liouville

Définition 2.1. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie continue sur $[a, b]$. On appelle intégrale fractionnaire (à droite) de Riemann-Liouville de f la fonction :

$$(I_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a+}^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad (2.1)$$

où $\Gamma(\alpha)$ désigne la fonction Gamma, et $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $Re(\alpha) > 0$ ou $\alpha \in \mathbb{R}_+$. On note I_{a+}^{α} par I_a^{α} intégrale fractionnaire (à droite) de Riemann-Liouville .

Exemple 2.1. Soit $f(x) = (x-a)^c$ avec $c > -1$, alors

$$I_a^{\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(\alpha+c+1)} (x-a)^{\alpha+c}. \quad (2.2)$$

En effet

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^c dt.$$

Utilisons le changement de variable :

$$t-a = s(x-a), \quad 0 < s < 1, \quad (2.3)$$

$$dt = (x-a)ds$$

donc :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a-s(x-a))^{\alpha-1} (s(x-a))^c (x-a) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+c} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^c ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+c} B(\alpha, c+1) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+c} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(c+1)}{\Gamma(\alpha+c+1)} \\ &= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(\alpha+c+1)} (x-a)^{\alpha+c}. \end{aligned}$$

1. Cas particulier où $\alpha = 1$. D'après les propriétés de la fonction Gamma on obtient,

$$\begin{aligned} I_a^1 (x-a)^c &= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(1+(c+1))} (x-a)^{1+c} \\ &= \frac{\Gamma(c+1)}{(c+1)\Gamma(c+1)} (x-a)^{1+c} \\ &= \frac{1}{(c+1)} (x-a)^{1+c}. \end{aligned}$$

2. Cas particulier où $c = 0$. On a dans ce cas

$$(I_a^\alpha 1)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (x-a)^\alpha, \quad (I_a^\alpha 1)(x) \rightarrow 1 \quad \text{lorsque } \alpha \rightarrow 0.$$

3. Cas particulier où $a = 0$, on a :

$$I_0^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(\alpha+c+1)} x^{\alpha+c}.$$

Remarque 2.1. Pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$:

$$I_a^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (2.4)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt. \quad (2.5)$$

Proposition 2.1. Si f est intégrable (ie $f \in L^1([a, b])$) et $I_a^\alpha f$ existe, alors $I_a^\alpha f \in L^1([a, b])$.

Démonstration. En introduisant la définition et le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_a^b |(I_a^\alpha f)(x)| dx &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t)| dt dx \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} dx dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)| (b-t)^\alpha dt \\ &\leq \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)| dt. \end{aligned}$$

Puisque $f \in L^1([a, b])$, la dernière quantité est finie, ce qui établit le résultat désiré. $\square$

Proposition 2.2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Re}(\beta) > 0$, pour toute fonction $f \in L^1([a, b])$, on a :

$$I_a^\alpha (I_a^\beta f(x)) = I_a^\beta (I_a^\alpha f(x)) = I_a^{\alpha+\beta} f(x) \quad (2.6)$$

pour presque tout $x \in [a, b]$.

Démonstration. Supposons d'abord que $f \in L^1([a, b])$, on a :

$$\begin{aligned} [I_a^\alpha (I_a^\beta f)](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a+}^x (x-s)^{\alpha-1} (I_a^\beta f)(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} \left[\int_a^s (s-t)^{\beta-1} f(t) dt \right] ds. \end{aligned}$$

En vertu de la proposition 2.1, les intégrales figurant dans l'égalité précédente existent pour presque tout $x \in [a, b]$. Le théorème de Fubini permet donc d'écrire :

$$[I_a^\alpha (I_a^\beta f)](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) \left[\int_a^s (x-s)^{\alpha-1} (s-t)^{\beta-1} ds \right] dt.$$

En effectuant le changement de variable

$$s = t + (x - t)y \quad (0 \leq y \leq 1),$$

on obtient

$$\begin{aligned} [I_a^\alpha(I_a^\beta f)](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} dy dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t) dt \\ &= [I_a^{\alpha+\beta} f](x). \end{aligned}$$

□

Lemme 2.1. Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ et $f \in L^1(0, b)$ pour tout $b > 0$. Alors la transformée de Laplace de l'intégral fractionnaire de R-L est donnée par :

$$\mathcal{L}(I_0^\alpha f)(s) = s^{-\alpha} \mathcal{L}f(s), \quad (2.7)$$

($[\cdot]$ dénote la partie entier d'un nombre réel).

Démonstration. On peut écrire $I_0^\alpha f$ comme une convolution de deux fonctions $x \mapsto g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}$ et f

$$I_0^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt = (g * f)(x).$$

D'après la proposition 1.2, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(I_0^\alpha f(x))(s) &= \mathcal{L}\left(\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t)\right)(s) \\ &= \mathcal{L}\left(\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)(s) \mathcal{L}(f(t))(s). \end{aligned}$$

D'après (1.20), on a :

$$\mathcal{L}(x^{\alpha-1})(s) = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha},$$

et donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(I_0^\alpha f(x))(s) &= \frac{\Gamma(\alpha)s^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\mathcal{L}(f(t))(s) \\ &= s^{-\alpha}\mathcal{L}f(s).\end{aligned}$$

□

2.1.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.2. Soit $\alpha \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle dérivée d'ordre α au sens de Riemann-Liouville à droite de la fonction f définie sur $[a, b]$, la fonction définie par :

$$D_{a+}^\alpha f(x) = D_a^\alpha f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_a^{n-\alpha} f)(x) \quad (2.8)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt. \quad (2.9)$$

Où $(n = [\alpha] + 1, x \in [a, b])$.

On note D_{a+}^α par D_a^α dérivée fractionnaire (à droite) de Riemann-Liouville.

Remarque 2.2. Pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$:

$$D_a^n f(x) = f^{(n)}(x), \quad (2.10)$$

où $f^{(n)}$ désigne la dérivée usuelle d'ordre n de f .

Si $0 < \alpha < 1$, alors :

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt. \quad (2.11)$$

Exemple 2.2. Soit $f(x) = (x-a)^\beta$, $x \in [a, b]$, avec $\beta > -1$. Par définition :

$$\begin{aligned}D_a^\alpha f(x) = D^n I^{n-\alpha} f(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[I^{n-\alpha} (x-a)^\beta \right] \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)} (x-a)^{n-(\alpha-\beta)} \right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}\end{aligned} \quad (2.12)$$

En posant $\beta = 0$ dans l'égalité (2.12) devient :

$$D_a^\alpha 1 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}.$$

Ce ci montre que la dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle.

Exemple 2.3. Nous avons les relations suivantes :

$$D_a^0 1 = 1, \quad D_a^{-1} 1 = x - a, \quad D_a^{\frac{1}{2}} 1 = \frac{1}{\sqrt{\pi(x-a)}} \quad .x \in [a, b].$$

Proposition 2.3. Soit $f(x) = x^\beta$ pour $x > 0$, et soit $\alpha \geq 0$ $\beta > -1$. Alors $D^\alpha x^\beta = c \in \mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\alpha = \beta$.

Démonstration. Soit $x > 0$. Alors :

$$D^\alpha x^\beta = c \Leftrightarrow \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha} = c$$

$$\Leftrightarrow x^{\beta-\alpha} = \frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)} c > 0$$

$$\Leftrightarrow (\beta-\alpha) \ln x = \ln \frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)} c$$

$$\Leftrightarrow \text{pour } (\beta-\alpha) = 0, \quad \frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)} c = 1$$

$$\Leftrightarrow (\beta = \alpha) \quad \text{et} \quad c = \Gamma(\beta+1).$$

□

Proposition 2.4. Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Alors pour tout entier $m > \alpha$ on a :

$$D_a^\alpha f(x) = D_a^m I_a^{m-\alpha} f(x). \quad (2.13)$$

Démonstration. Comme $m \geq n$, on a :

$$\begin{aligned} D_a^m I_a^{m-\alpha} f(x) &= D^n D^{m-n} I_a^{m-n} I_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= D^n I_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= D_a^\alpha f(x), \end{aligned}$$

$$\text{car } D^{m-n} I_a^{m-n} = Id.$$

□

Lemme 2.2. Soient $\alpha > 0$ et $f \in L^1([a, b])$, alors l'égalité :

$$D_a^\alpha I_a^\alpha f(x) = f(x) \quad (2.14)$$

est vraie pour presque tout $x \in [a, b]$.

Démonstration. En utilisant la définition 2.2, on a :

$$D_a^\alpha I_a^\alpha f(x) = D^n I_a^{n-\alpha} I_a^\alpha f(x) = D^n I_a^n f(x) = f(x). \quad (2.15)$$

□

Proposition 2.5. Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de R-L existent, pour c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$, alors : $D_a^\alpha(c_1 f + c_2 g)$ existe, et on a :

$$D_a^\alpha(c_1 f + c_2 g)(x) = c_1 D_a^\alpha f(x) + c_2 D_a^\alpha g(x). \quad (2.16)$$

Démonstration. Par définition de dérivée fractionnaire au sens de R-L, on a :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha(c_1 f + c_2 g)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (c_1 f + c_2 g)(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (c_1 f(t) + c_2 g(t)) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \left[\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} c_1 f(t) dt + \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} c_2 g(t) dt \right] \\ &= c_1 \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \\ &\quad + c_2 \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} g(t) dt \\ &= c_1 D_a^\alpha f(x) + c_2 D_a^\alpha g(x). \end{aligned}$$

□

Propositions 2.1. Soient $\alpha, \beta > 0$ et $n-1 < \alpha < n$, et $m-1 < \beta < m$ tels que $n, m \in \mathbb{N}^*$. Alors :

1. Si $\alpha > \beta > 0$, alors pour $f \in L^1([a, b])$ l'égalité :

$$D_a^\beta(I_a^\alpha f)(x) = I_a^{\alpha-\beta} f(x), \quad (2.17)$$

est presque partout sur $[a, b]$.

2. S'il existe une fonction $\varphi \in L^1([a, b])$ telle que $f = I_a^\alpha \varphi$ alors :

$$I_a^\alpha D_a^\alpha f(x) = f(x) \quad (2.18)$$

pour presque tout $x \in [a, b]$.

3. Pour $\alpha > 0, k \in \mathbb{N}^*$. Si les dérivées fractionnaires $D_a^\alpha f$ et $D_a^{k+\alpha} f$ existent, alors :

$$D_a^k(D_a^\alpha f(x)) = D_a^{k+\alpha} f(x). \quad (2.19)$$

4. Si $\beta \geq \alpha > 0$ et la dérivée fractionnaire $D_a^{\beta-\alpha} f$ existe, alors :

$$D_a^\beta(I_a^\alpha f)(x) = D_a^{\beta-\alpha} f(x). \quad (2.20)$$

Démonstration. Pour $\alpha > \beta > 0$, alors $n \geq m$, on a :

1. en utilisant la définition 2.2, et la relation (2.6), on obtient :

$$\begin{aligned} D_a^\beta(I_a^\alpha f)(x) &= D^n I_a^{n-\beta}(I_a^\alpha f)(x) \\ &= D^n(I_a^{\alpha+n-\beta} f)(x) \\ &= D^n I_a^n(I_a^{\alpha-\beta} f)(x) \\ &= I_a^{\alpha-\beta} f(x), \end{aligned}$$

presque pour tout $x \in [a, b]$.

2. Par la relation (2.14), on obtient :

$$I_a^\alpha D_a^\alpha f(x) = I_a^\alpha(D_a^\alpha I_a^\alpha \varphi(x)) = I_a^\alpha \varphi(x) = f(x).$$

3. On a :

$$\begin{aligned} D_a^k[D_a^\alpha f(x)] &= D_a^k D^n I_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= D^{k+n} I_a^{n-\alpha+k-k} f(x) \\ &= D_a^{k+n} I_a^{n+k-(\alpha+k)} f(x) \\ &= D_a^{\alpha+k} f(x), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

4. On a

$$D_a^\beta(I_a^\alpha f)(x) = D_a^n I_a^{n-\beta}(I_a^\alpha f)(x) = D_a^n I_a^{n-(\beta-\alpha)} f(x) = D_a^{\beta-\alpha} f(x),$$

existe pour tout $i-1 \leq \beta-\alpha \leq i$ et $i \leq n, i \in \mathbb{N}^*$.

□

Théorème 2.1. *Si $f \in L^1([0, b])$, $b > 0$, la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de R-L de f est :*

$$\mathcal{L}(D_0^\alpha f)(s) = s^\alpha (\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0} \quad (2.21)$$

avec $n - 1 < \alpha < n$.

Démonstration. Par la définition 2.2, on trouve :

$$\mathcal{L}(D_0^\alpha f)(s) = \mathcal{L}(D^n I_0^{n-\alpha} f)(s),$$

d'après la proposition 1.2, on obtient :

$$\mathcal{L}(D_0^\alpha f)(s) = s^n \mathcal{L}(I_0^{n-\alpha} f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{k-n-1} [D^k I_0^{n-\alpha} f(t)]_{t=0},$$

et d'après le lemme 2.1, on a :

$$= s^\alpha \mathcal{L}(f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{k-n-1} [D^k I_0^{n-\alpha} f(t)]_{t=0} .$$

□

Remarque 2.3. *(Dérivée de fonctions exponentielles) La dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$, d'une fonction exponentielle e^{bx} où b est une constante, est donnée par l'expression suivante :*

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{bx} = b^n e^{bx}.$$

Liouville a étendu cette définition pour inclure les dérivées d'ordre arbitraire α :

$$D_a^\alpha e^{bx} = b^\alpha e^{bx}. \quad (2.22)$$

On peut utilisé le développement en série entier pour trouver toutes les fonctions exponentielles :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{b_n x}, \quad (2.23)$$

avec $\operatorname{Re}(b_n) > 0$ et $c_n \in \mathbb{R}$,
d'où

$$D_a^\alpha \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{b_n x} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n b_n^\alpha e^{b_n x}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Remarque 2.4. (*Dérivée de fonctions trigonométriques*) :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha(e^{ibx}) &= (ib)^\alpha e^{ibx} \\ &= \left(\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) \right) (\cos(bx) + i \sin(bx)) b^\alpha \\ &= b^\alpha \left[\cos\left(bx + \alpha\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(bx + \alpha\frac{\pi}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit les identités suivantes :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha \cos(bx) &= b^\alpha \cos\left(bx + \alpha\frac{\pi}{2}\right); \\ D_a^\alpha \sin(bx) &= b^\alpha \sin\left(bx + \alpha\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

2.2 Dérivée fractionnaire de Caputo

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville ait un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, plusieurs auteurs dont Caputo (1967-1969) ont soulevé la question de la révision de cette définition, car les problèmes posés en visco-élasticité, mécanique des solides et en rhéologie, exigent des conditions initiales physiquement interprétables par des dérivées classiques, ce qui n'est pas le cas dans la modélisation par l'approche de Riemann-Liouville qui exige la connaissance des conditions initiales des dérivées fractionnaires.

Définition 2.3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in C^n([a, b])$. On appelle dérivée de f au sens de Caputo à droite la fonction définie par :

$${}^c D_{a+}^\alpha f(x) = {}^c D_a^\alpha f(x) = I_{a+}^{n-\alpha} f^n(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt \quad (2.24)$$

On note ${}^c D_{a+}^\alpha$ par ${}^c D_a^\alpha$ dérivée fractionnaire (à droite) au sens de Caputo.

Remarque 2.5. Par définitions la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in]n-1, n[$ s'obtient par une application de $I_a^{n-\alpha}$ suivie par une dérivation classique d'ordre n , c'est-à-dire $\left(\left(\frac{d}{dx} \right)^n I_a^{n-\alpha} \right)$.

Alors que la dérivée fractionnaire de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations, c'est-à-dire, $\left(I_a^{n-\alpha} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \right)$.

Exemple 2.4. Soit $f(x) = (x - a)^\gamma$ avec $\gamma > 0$, pour $(0 < \alpha \leq 1)$ et utilisant le changement de variable (2.3) on a :

$$\begin{aligned}
 {}^c D_a^\alpha f(x) &= I_a^{1-\alpha} f'(x) = \gamma I_a^{1-\alpha} (x - a)^{\gamma-1} \\
 &= \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} (t-a)^{\gamma-1} dt \\
 &= \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha+\gamma} \int_0^1 s^{\gamma-1} (1-s)^{-\alpha} ds \\
 &= \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha+\gamma} B(\gamma, 1-\alpha) \\
 {}^c D_a^\alpha f(x) &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(1-\alpha+\gamma)} (x-a)^{-\alpha+\gamma}.
 \end{aligned}$$

Remarque 2.6. Nous avons :

$${}^c D_a^\alpha (x-a)^\beta = D_a^\alpha (x-a)^\beta, \beta \notin \mathbb{N}$$

mais si,

$$\begin{aligned}
 \beta \in \mathbb{N}, \beta < n, \text{ on a } {}^c D_a^\alpha (x-a)^\beta &= 0 \\
 \text{et } D_a^\alpha (x-a)^\beta &\neq 0,
 \end{aligned}$$

où $n = [\alpha] + 1$.

Le théorème suivant établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.

Théorème 2.2. Soient $\alpha \geq 0$, $n = [\alpha] + 1$, si f possède $(n-1)$ dérivées, et si $D_a^\alpha f$ existe, alors :

$${}^c D_a^\alpha f(x) = D_a^\alpha \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right). \quad (2.25)$$

Pour presque tout $x \in [a, b]$.

Démonstration. D'après la définition 2.2 de la dérivée de R-L, on a :

$$\begin{aligned}
 D_a^\alpha \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right) &= D^n I_a^{n-\alpha} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right) \\
 &= \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{(x-a)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right),
 \end{aligned}$$

en utilisant l'intégration par partie on obtient :

$$\begin{aligned}
 & I_a^{n-\alpha} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right) \\
 &= \int_a^x \frac{(x-a)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right) dt \\
 &= -\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \left[\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right) (x-t)^{n-\alpha} \right]_{t=0}^{t=x} \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha} \left[Df(t) - D \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] dt,
 \end{aligned}$$

où

$$I_a^{n-\alpha} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] = I_a^{n-\alpha+1} D \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right],$$

de la même façon pour n - fois alors :

$$\begin{aligned}
 I_a^{n-\alpha} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] &= I_a^{n-\alpha+n} D^n \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] \\
 &= I_a^n I_a^{n-\alpha} D^n \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right],
 \end{aligned}$$

mais $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ est un polynôme de degré (n - 1), alors :

$$I_a^{n-\alpha} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] = I_a^n I_a^{n-\alpha} D^n f(x),$$

donc

$$\begin{aligned}
 D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] &= D^n I_a^n I_a^{n-\alpha} D^n f(x) \\
 &= I_a^{n-\alpha} D^n f(x) \\
 &= {}^c D_a^\alpha f(x),
 \end{aligned}$$

pour presque tout $x \in [a, b]$. □

Corollaire 2.1. Soient $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$, si ${}^c D_a^\alpha f$ et $D_a^\alpha f$ existent, on suppose que $D^k f(a) = 0$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, alors :

$${}^c D_a^\alpha f = D_a^\alpha f. \quad (2.26)$$

Démonstration. En effet :

$${}^c D_a^\alpha f = D_a^\alpha \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right),$$

comme $D^k f(a) = 0$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, alors :

$${}^c D_a^\alpha f = D_a^\alpha f.$$

□

Lemme 2.3. Soit $\alpha > 0$, alors

$$I^\alpha ({}^c D^\alpha h(t)) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1},$$

pour $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, $n = [\alpha] + 1$.

Démonstration. On a par la définition de la dérivée fractionnaire de Caputo :

$${}^c D^\alpha h(t) = I^{n-\alpha} h^{(n)}(t),$$

on applique l'opérateur de l'intégral fractionnaire au sens de R-L aux deux membres de l'égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} I^\alpha ({}^c D^\alpha h(t)) &= I^\alpha (I^{n-\alpha} h^{(n)}(t)), \\ &= I^n D^n h(t), \\ &= h(t) - \sum_{j=1}^n \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{d}{dt} \right)^{n-j} I^{n-n} h(t), \\ &= h(t) - \sum_{j=1}^n \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} \left(\left(\frac{d}{dt} \right)^{n-j} h(t) \right) (0), \\ &= h(t) - \sum_{j=1}^n \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} h^{(n-j)}(0). \end{aligned}$$

Par le changement de variable $k = n - j$, on obtient :

$$\begin{aligned} I^\alpha({}^c D^\alpha h(t)) &= h(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{(k)}(0)t^k}{k!} \\ &= h(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c'_k t^k}{k!} \\ &= h(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k t^k}{k!}. \end{aligned}$$

□

Théorème 2.3. *Si $f \in C([a, b])$ et si $\alpha > 0$, $(n - 1 < \alpha \leq n)$, alors :*

$${}^c D_a^\alpha I_a^\alpha f(x) = f(x). \quad (2.27)$$

Démonstration. Soit $g = I_a^\alpha f$ et par le corollaire précédent $D^k f(a) = 0$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$, et d'après l'égalité (2.14), on a :

$${}^c D_a^\alpha I_a^\alpha f(x) = {}^c D_a^\alpha g(x) = D_a^\alpha g(x) = D_a^\alpha I_a^\alpha f(x) = f(x).$$

□

Proposition 2.6. *Soient f_1 et f_2 deux fonctions définies sur $[a, b]$, telles que ${}^c D_a^\alpha f_1$ et ${}^c D_a^\alpha f_2$ existent presque partout. Soient c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$. Alors, ${}^c D_a^\alpha (c_1 f_1 + c_2 f_2)$ existe presque partout sur $[a, b]$, et on a :*

$${}^c D_a^\alpha (c_1 f_1 + c_2 f_2)(x) = c_1 {}^c D_a^\alpha f_1(x) + c_2 {}^c D_a^\alpha f_2(x). \quad (2.28)$$

Démonstration. On a, par définition de la dérivée au sens de Caputo :

$$\begin{aligned} {}^c D_a^\alpha (c_1 f_1 + c_2 f_2)(x) &= \frac{1}{(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} (c_1 f_1 + c_2 f_2)^{(n)}(t) dt \\ &= \frac{1}{(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} (c_1 f_1 + c_2 f_2)^{(n)}(t) dt \\ &= \frac{1}{(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} c_1 f_1^{(n)}(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} c_2 f_2^{(n)}(t) dt \\ &= c_1 \frac{1}{(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} f_1^{(n)}(t) dt \\ &\quad + c_2 \frac{1}{(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} f_2^{(n)}(t) dt \\ &= c_1 {}^c D_a^\alpha f_1(x) + c_2 {}^c D_a^\alpha f_2(x). \end{aligned}$$

□

Théorème 2.4. *Si $f \in C([0, b])$, pour tout $b > 0$, alors, la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo de f est donnée par :*

$$\mathcal{L}({}^c D_0^\alpha f)(s) = s^\alpha \mathcal{L}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0^+). \quad (2.29)$$

Démonstration. Pour $n - 1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x > 0$ alors :

$${}^c D_0^\alpha f(x) = I_0^{n-\alpha} f^{(n)}(x).$$

Donc d'après (2.7)

$$\mathcal{L}({}^c D_0^\alpha f(x))(s) = \mathcal{L}(I_0^{n-\alpha} f^{(n)}(x))(s) = s^{-n+\alpha} (\mathcal{L}f^{(n)})(s)$$

et d'après (1.15) :

$$\mathcal{L}({}^c D_0^\alpha f(x))(s) = s^\alpha \mathcal{L}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0^+).$$

□

2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov

2.3.1 Intégrale fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov

Définition 2.4. Soit $\alpha > 0$ et f une fonction continue, l'intégrale fractionnaire de G-L est définie par :

$${}^{GL}I_a^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} f(x - kh) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} f(t) dt. \quad (2.30)$$

$$\text{Où } \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Si la dérivée f' est continue sur $[a, b]$, alors l'intégration par partie donne :

$${}^{GL}I_a^\alpha f(x) = \frac{f(a)}{\Gamma(\alpha+1)} (x-a)^\alpha + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f'(t) dt. \quad (2.31)$$

Si la fonction f est de classe C^{n+1} , nous obtenons :

$${}^{GL}I_a^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(\alpha+k+1)} (x-a)^{\alpha+k} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+k+1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+n} f^{(n+1)}(t) dt. \quad (2.32)$$

2.3.2 Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov

L'idée de cette approche est de généraliser la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraire.

Définition 2.5. Soit $\alpha > 0$, et f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b] \in \mathbb{R}$, la dérivée fractionnaire au sens Grünwald-Letnikov (G-L) est définie par :

$${}^{GL}D_a^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kh) \quad (2.33)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt \quad (2.34)$$

Les coefficients binomiaux sont définis comme

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{\alpha!}{k!(\alpha-k)!} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)} \quad .$$

La formule (2.34) est obtenue sous l'hypothèse que les dérivées $f^{(k)}$ sont continues sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et que n un nombre entier vérifiant la condition $n > \alpha - 1$, la plus petite valeur pour n est déterminée par l'inégalité $n \leq \alpha < n + 1$.

Exemple 2.5. La dérivée de $f(x) = (x-a)^\alpha$ au sens de Grünwald-Letnikov. Soit β non entier et $0 \leq n-1 < \beta < n$ avec $\alpha > n-1$ alors on a :

$$f^{(k)}(a) = 0 \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2.35)$$

et

$$f^{(n)}(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)} (t-a)^{\alpha-n}, \quad (2.36)$$

d'où

$${}^{GL}D_a^\beta f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-\beta)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^x (x-t)^{n-\beta-1} (t-a)^{\alpha-n} dt. \quad (2.37)$$

En faisant le changement de variable $t = a + s(x - a)$ on trouve :

$$\begin{aligned}
 {}^{GL}D_a^\beta (x - a)^\alpha &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(n - \beta)\Gamma(\alpha - n + 1)} \int_a^x (x - t)^{n-\beta-1} (t - a)^{\alpha-n} dt \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(n - \beta)\Gamma(\alpha - n + 1)} (x - a)^{\alpha-\beta} \int_0^1 (1 - s)^{n-\beta-1} s^{\alpha-n} ds \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)B(n - \beta, \alpha - n + 1)}{\Gamma(n - \beta)\Gamma(\alpha - n + 1)} (x - a)^{\alpha-\beta} \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(n - \beta)\Gamma(\alpha - n + 1)}{\Gamma(n - \beta)\Gamma(\alpha - n + 1)\Gamma(\alpha - \beta + 1)} (x - a)^{\alpha-\beta} \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - \beta + 1)} (x - a)^{\alpha-\beta}.
 \end{aligned}$$

Exemple 2.6. Si $0 < \beta < 1$, la dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov est donnée par :

$${}^{GL}D_a^\beta (C) = \frac{C}{\Gamma(1 - \alpha)} (x - a)^{-\alpha}.$$

Chapitre 3

Problème de Cauchy et problèmes aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire

Dans ce chapitre, on définit quelques problèmes aux limites et de Cauchy, pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire .

3.1 Problème de Cauchy pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire

Dans cette section on aborde la question d'existence et d'unicité des solutions du problème de Cauchy pour l'équation différentielle fractionnaire :

$$(P_1) : \begin{cases} {}^c D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), & \text{pour tout } t \in J = [0, T], 0 < \alpha < 1 \\ y(0) = y_0 & y_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.1)$$

Où ${}^c D^\alpha$ est la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo, $\alpha=0$, et $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue. $y(0) = y_0$ est la condition initiale, et $T > 0$ est un réel strictement positif.

Les résultats de cette section à préciser des travaux de A.Aghajani et al.[1].

3.1.1 Résultat d'existence

Dans cette sous section, on donne les conditions de l'existence et de l'unicité de la solution du problème (P_1) dans l'espace $C_\gamma([0, T])$. Les espaces $C_\gamma([0, T])$ et

3.1. PROBLÈME DE CAUCHY POUR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE FRACTIONNAIRE

$C_\gamma^\alpha([0, T])$ sont définis comme suit, où $0 < \alpha < 1$ et $(0 \leq \gamma \leq \alpha)$

$$C_\gamma([0, T]) = \left\{ f : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(t) = (t)^\gamma f(t) \in C([0, T]) \right\}. \quad (3.2)$$

On pose

$$\|f\|_{C_\gamma} = \|\psi\|_\infty$$

$$C_\gamma^\alpha([0, T]) = \left\{ f \in C([0, T]) : {}^c D_0^\alpha f \in C_\gamma([0, T]) \right\}. \quad (3.3)$$

L'approche est basée sur la résolution du problème considéré en une équation intégrale de Volterra

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.4)$$

Lemme 3.1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ ($0 < \alpha < 1$), et $f_{1-\alpha}(t) = I_0^{1-\alpha} f(t)$. Si $f \in C_\gamma([0, T])$ et $f_{1-\alpha} \in C_\gamma^1([0, T])$, alors

$$(I^\alpha D_0^\alpha f)(t) = f(t) - \frac{f_{1-\alpha}(t)}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}, \quad t \in [0, T]. \quad (3.5)$$

Lemme 3.2. Si $\gamma \in \mathbb{R}$ ($0 \leq \gamma < 1$), alors l'opérateur d'intégration I_0^α (avec $\alpha \in \mathbb{R}$) est borné dans $C_\gamma([0, T])$

$$\|I_0^\alpha g\|_{C_\gamma} \leq T^\alpha \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)} \|g\|_{C_\gamma} \quad \text{pour } g \in C_\gamma([0, T]). \quad (3.6)$$

L'équivalence entre le problème (P_1) et l'équation intégrale (3.4) est donnée par le lemme suivant.

Lemme 3.3. Soit $0 < \alpha < 1$ et soit $h : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est solution de l'équation intégrale fractionnaire

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds, \quad (3.7)$$

si et seulement si y est la solution du problème à valeur initiale pour l'équation différentielle fractionnaire

$${}^c D^\alpha y(t) = h(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.8)$$

$$y(0) = y_0, \quad y_0 \in \mathbb{R}. \quad (3.9)$$

3.1. PROBLÈME DE CAUCHY POUR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE FRACTIONNAIRE

Démonstration. Soit y une solution de l'équation intégrale (3.7).

On commence par la vérification de la condition initiale. On a d'après (3.7)

$$|y(t) - y_0| = \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \right|.$$

Donc,

$$\begin{aligned} |y(t) - y_0| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |(t-s)^{\alpha-1}| |h(s)| ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |(t-s)^{\alpha-1}| \sup_{s \in [0, T]} |h(s)| ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |(t-s)^{\alpha-1}| \|h\|_\infty ds \\ &\leq \frac{\|h\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |(t-s)^{\alpha-1}| ds \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \frac{\|h\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} |t|^\alpha. \end{aligned}$$

On prend la limite quand $t \rightarrow 0$, et on obtient :

$$y(0) = y_0.$$

Donc (3.7) vérifie la condition initiale (3.9). Il reste à montrer qu'elle vérifie l'équation (3.8). On a,

$$\begin{aligned} y(t) - y_0 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ &= I_0^\alpha h(t). \end{aligned}$$

En appliquant l'opérateur D_0^α aux deux membres de l'égalité, on obtient :

$$D_0^\alpha (y(s) - y_0)(t) = h(t).$$

De plus, d'après le théorème 2.2, on a :

$$D_0^\alpha (y(s) - y_0)(t) = {}^c D_0^\alpha y(t).$$

Par suite

$${}^c D^\alpha y(t) = h(t), t \in [0, T].$$

3.1. PROBLÈME DE CAUCHY POUR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE FRACTIONNAIRE

Réciproquement, on a :

$${}^c D^\alpha y(t) = \frac{d}{dt} I_0^{1-\alpha} [y(s) - y_0](t).$$

Comme h est continue, il s'ensuit que ${}^c D^\alpha y$ est continue, et par suite $I_0^{1-\alpha} [y(s) - y_0]$ est continue. En appliquant l'opérateur I_0^α aux deux membres de l'égalité précédente, on obtient :

$$I_0^\alpha ({}^c D_0^\alpha y(t)) = y(t) - y_0 - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} I_0^{1-\alpha} [y(s) - y(0)](t).$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} |I_0^{1-\alpha} [y(s) - y(0)](t)| &\leq \frac{\sup_{t \in [0, T]} |y(t) - y(0)|}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t |t-s|^{-\alpha} ds \\ &= \frac{\|y - y_0\|_\infty}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} |t|^{1-\alpha}, \end{aligned}$$

et par suite,

$$\lim_{t \rightarrow 0} |I_0^{1-\alpha} [y(s) - y(0)](t)| = 0.$$

Par conséquent

$$I_0^\alpha ({}^c D_0^\alpha y(t)) = y(t) - y_0.$$

On a $h \in C([0, T], \mathbb{R}) = C([0, T])$, et par conséquent $I_0^\alpha h$ est continu. Appliquons I_0^α aux deux membres de (3.8)

$$I_0^\alpha ({}^c D_0^\alpha y(t)) = I_0^\alpha h(t). \quad (3.10)$$

D'après le calcul précédent, on obtient

$$y(t) = y_0 + I_0^\alpha h(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T;$$

c'est à dire $y \in C([0, T])$ est la solution de l'équation intégrale (3.7). □

Lemme 3.4. Soit $J = [0, T]$, $0 < c < T$, $g \in C([0, c])$ et $g \in C([c, T])$ alors $g \in C([0, T])$ et

$$\|g\|_{C([0, T])} \leq \sup \left[\|g\|_{C([0, c])}, \|g\|_{C([c, T])} \right]. \quad (3.11)$$

3.1. PROBLÈME DE CAUCHY POUR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE FRACTIONNAIRE

Maintenant, on va établir l'existence et l'unicité de la solution pour le problème de Cauchy (P_1) dans l'espace $C_\gamma([0, T])$ sous les hypothèses du lemme 3.3 et une condition de Lipschitz.

Théorème 3.1. *Soit $0 < \alpha < 1$, et $0 \leq \gamma \leq \alpha$. Soit J_1 un ouvert de $\mathbb{R}$, et $f : [0, T] \times J_1 \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction telle que, pour chaque $y \in J_1$, $f(\cdot, y) \in C_\gamma([0, T])$ et vérifie la condition de Lipschitz suivante :*

(H1) Il existe une constante $A > 0$ telle que :

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq A|y_1 - y_2|, \text{ pour tous } t \in [0, T], \text{ et tout } y_1, y_2 \in J_1.$$

Alors il existe une solution unique y du problème de Cauchy (P_1) dans l'espace $C_\gamma([0, T])$.

Démonstration. On montre le résultat en premier temps sur une partie de l'intervalle $[0, T]$, l'équation intégrale (3.7) a un sens sur chaque intervalle $[0, t_1] \subset [0, T]$. Choisissons t_1 tel que l'inégalité,

$$A \frac{t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1 \tag{3.12}$$

soit vérifiée. On montre l'existence d'une solution unique $y \in C([0, t_1])$ pour l'équation intégrale de Volterra (3.7) sur $[0, t_1]$. Pour cela on utilise le théorème du point fixe de Banach pour l'espace $C([0, T])$ qui est un espace métrique complet avec la distance donnée par

$$d(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\|_{C[0, t_1]} = \sup_{t \in [0, t_1]} |y_1(t) - y_2(t)|.$$

On réécrit l'équation intégrale (3.7) sous la forme suivante :

$$y(t) = (Ty)(t),$$

où

$$(Ty)(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds.$$

Pour appliquer le théorème de Banach, il faut montrer :

1. Si $y \in C([0, t_1])$ alors $(Ty) \in C([0, t_1])$.
2. Pour chaque $y_1, y_2 \in C([0, t_1])$

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_\infty \leq w \|y_1 - y_2\|_\infty, \text{ avec } (0 < w < 1). \tag{3.13}$$

3.1. PROBLÈME DE CAUCHY POUR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE FRACTIONNAIRE

Comme $f(., y) \in C([0, t_1])$ alors, tenant compte du lemme 3.2, on a

$$\left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \right\|_{\infty} \leq \frac{t_1^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|f(t, y(t))\|_{\infty} \quad (3.14)$$

alors $(Ty) \in C([0, t_1])$. Montrons maintenant (3.13).

Et en vertu de (3.7), du lemme 3.2, et utilisant la condition de Lipschitz (H1) de ce théorème, donc On obtient

$$\begin{aligned} \|Ty_1 - Ty_2\|_{\infty} &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))) (t-s)^{\alpha-1} ds \right\|_{\infty} \\ &\leq \frac{t_1^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\|_{\infty} \\ &\leq \frac{At_1^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|y_1(t) - y_2(t)\|_{\infty} \end{aligned}$$

à l'aide du (3.12), on obtient (3.13), avec $w = \frac{At_1^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$, et alors par le théorème du point fixe de Banach, il existe une solution unique $y^* \in C([0, t_1])$ de l'équation intégrale (3.4) sur $[0, t_1]$. Par le théorème de Banach, la solution y^* est une limite de la suite convergente $(T_n y_0)$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n y_0^* - y^*\|_{\infty} = 0, \quad (3.15)$$

on prend

$$y_0^* = y_0.$$

Tenant compte de l'équation intégrale (3.7), la suite $(T_n y_0^*)$ est définie par la formule de récurrence :

$$(T_n y_0^*)(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, (T_{n-1} y_0^*)(s)) ds, \quad n = 1, 2, \dots$$

Si on note, $y_n(t) = (T_n y_0^*)(t)$ alors la relation précédente prend la forme suivante :

$$y_n(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_{n-1}(s)) ds, \quad n \in \mathbb{N},$$

et (3.15) devient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|y_n - y\|_{\infty} = 0. \quad (3.16)$$

3.1. PROBLÈME DE CAUCHY POUR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE FRACTIONNAIRE

Après, on considère l'intervalle $[t_1, t_2]$, où $t_2 = t_1 + h_1$ et $h_1 > 0$, avec $t_2 < T$. Réécrivons l'équation intégrale (3.4) sous la forme

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds + y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds, \quad (3.17)$$

nous obtenons

$$y(t) = y_{0_1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds, \quad (3.18)$$

où

$$y_{0_1} = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds. \quad (3.19)$$

Par une technique similaire pour avoir l'existence et l'unicité de la solution sur $[0, t_1]$, on peut déduire qu'il existe une solution unique $y_1^* \in C([t_1, t_2])$ de l'équation intégrale (3.4) sur l'intervalle $[t_1, t_2]$. On prend l'intervalle suivant $[t_2, t_3]$, où $t_3 = t_2 + h_2$ et $h_2 > 0$, avec $t_3 < T$. En répétant ce processus, on trouve qu'il existe une solution unique y de l'équation (3.4), telle que

$$y(t) = y_k^*(t)$$

et

$$y_k^* \in C([t_{k-1}, t_k]), \quad (k = 1, \dots, L) \quad (3.20)$$

où $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_L = T$.

Par le lemme 3.4, il s'ensuit qu'il existe une solution unique $y \in C([0, T])$ sur l'intervalle $[0, T]$ tout entier. Par conséquent, il existe une solution unique $y = y^* \in C([0, T])$ de l'équation intégrale de Volterra (3.4) et alors du problème de Cauchy (P_1) .

Pour compléter la démonstration, il reste à montrer que cette solution $y \in C([0, T])$, appartient à l'espace $C_\gamma^\alpha([0, T])$. Par définition, il faut montrer que ${}^c D^\alpha y \in C_\gamma([0, T])$. D'après ce qui précède $y \in C([0, T])$ est une limite de la suite $(y_n)_n = (T_n y_0^*)_n \subset C([0, T])$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|y_n - y\|_\infty = 0. \quad (3.21)$$

En utilisant ensuite (3.1) et la condition de Lipschitz, on trouve

$$\begin{aligned} \|{}^c D^\alpha y_n - {}^c D^\alpha y\|_\infty &\leq \|f(t, y_n(t)) - f(t, y(t))\|_{C_\gamma([0, T])} \\ &\leq A \|y_n - y\|_{C_\gamma([0, T])} \\ &\leq A T^\gamma \|y_n - y\|_\infty \\ &\leq A \|y_n - y\|_\infty \end{aligned}$$

3.1. PROBLÈME DE CAUCHY POUR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE FRACTIONNAIRE

de plus (3.21) permet d'obtenir

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \| {}^c D^\alpha y_n - {}^c D^\alpha y \|_\infty = 0,$$

alors ${}^c D^\alpha y \in C_\gamma([0, T])$, et donc, $y \in C_\gamma^\alpha([0, T])$. Ce qui achève la démonstration. $\square$

3.2 Problèmes aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire

Dans cette section, on va étudier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites du premier ordre, pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire,

$$(P_2) : \begin{cases} {}^c D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), & \text{pour tout } t \in J = [0, T], 0 < \alpha < 1 \\ ay(0) + by(T) = c_1. \end{cases} \quad (3.22)$$

Où ${}^c D^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue, a, b, c_1 sont des constantes réelles avec $a + b \neq 0$. Pour ce problème on énonce le théorème d'existence et l'unicité, qui est basé sur le théorème de point fixe de Banach.

Ce résultat est dû à Benchohra et Al [3].

3.2.1 Existence des solutions

On commence par la définition d'une solution du problème (P_2) .

Définition 3.1. Une fonction $y \in C^1([0, T])$ est dite solution du problème (P_2) si y satisfait l'équation

$${}^c D^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \quad \text{sur } J,$$

et la condition aux bords suivante :

$$ay(0) + by(T) = c.$$

Pour l'existence de la solution du problème (P_2) , on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.5. Soit $0 < \alpha < 1$ et soit $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire :

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds - c \right], \quad (3.23)$$

si et seulement si y est la solution du problème aux limites pour l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$${}^c D^\alpha y(t) = h(t), t \in [0, T] \quad , \quad (3.24)$$

$$ay(0) + by(T) = c \quad . \quad (3.25)$$

3.2. PROBLÈMES AUX LIMITES POUR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE FRACTIONNAIRE

Démonstration. D'après le lemme 3.3, On a :

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

Il reste à vérifier les conditions aux limites, on a :

$$y(T) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

Mais :

$$ay(0) + by(T) = c,$$

par suite :

$$ay(0) + by(0) + \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds = c \quad \text{avec} \quad a+b \neq 0,$$

c'est à dire :

$$y(0) = \frac{1}{a+b} \left[c - \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds \right].$$

□

On va donner un résultat concernant l'unicité de la solution du problème (P_2) , en utilisant le théorème de point fixe de Banach .

Théorème 3.2. *Supposons que :*

(H1) Il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq k|u_1 - u_2|, \text{ pour tout } t \in J, \text{ et tout } u_1, u_2 \in \mathbb{R}.$$

Si :

$$\frac{kT^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\Gamma(\alpha+1)} < 1, \tag{3.26}$$

alors, le problème (P_2) admet une solution unique sur $[0, T]$.

3.2. PROBLÈMES AUX LIMITES POUR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE FRACTIONNAIRE

Démonstration. On va transformer le problème (P_2) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur :

$$F : C([0, T]) \rightarrow C([0, T]),$$

défini par :

$$F(y)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - c \right].$$

Les points fixes de l'opérateur F sont les solutions du problème (P_2) .

F est bien défini, en effet,

si $y \in C([0, T])$, alors $Fy \in C([0, T])$.

Pour montrer que F admet un point fixe, il suffit de montrer que F est une contraction, en effet : si $x, y \in C([0, T])$, pour tout $t \in J$, On a :

$$\begin{aligned} |F(x)(t) - F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\ &\quad + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\ &\leq k \frac{\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &\quad + \frac{|b|k\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds \\ &\leq \frac{kT^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|x-y\|_\infty, \end{aligned}$$

et par suite :

$$\|F(x) - F(y)\|_\infty \leq \frac{kT^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|x-y\|_\infty$$

En vertu de (3.26), on peut déduire que F est une contraction, et d'après le théorème de Banach F admet un seul point fixe qui est une solution du problème (P_2) . $\square$

Exemple 3.1. Considérons le problème aux limites fractionnaire suivant :

$${}^c D^\alpha y(t) = \frac{e^{-t}|y(t)|}{(9+e^t)(1+|y(t)|)}, \quad t \in J = [0, 1], \quad 0 < \alpha < 1, \quad (3.27)$$

3.2. PROBLÈMES AUX LIMITES POUR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE FRACTIONNAIRE

$$y(0) + y(1) = 0. \quad (3.28)$$

Posons

$$f(t, x) = \frac{e^{-t}x}{(9 + e^t)(1 + x)}, \quad (t, x) \in J \times [0, +\infty).$$

Soient $x, y \in [0, +\infty)$ et $t \in J$. Alors on a :

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t, y)| &= \frac{e^{-t}}{(9 + e^t)} \left| \frac{x}{(1 + x)} - \frac{y}{(1 + y)} \right|, \\ &= \frac{e^{-t}|x - y|}{(9 + e^t)(1 + x)(1 + y)}, \\ &\leq \frac{e^{-t}}{(9 + e^t)} |x - y|, \\ &\leq \frac{1}{10} |x - y|. \end{aligned}$$

Alors la condition (H1) est vérifiée avec $k = \frac{1}{10}$. On doit vérifier que la condition (3.26) est satisfaite pour des valeurs appropriées de $\alpha \in (0, 1]$ avec $a = b = T = 1$. En effet

$$\frac{3k}{2\Gamma(\alpha + 1)} < 1 \Leftrightarrow \Gamma(\alpha + 1) > \frac{3k}{2} = 0.15. \quad (3.29)$$

Alors d'après le Théorème (3.2) le problème (3.27)-(3.28) a une seule solution sur $[0, 1]$ pour les valeurs de α satisfaisant (3.29).

3.3 Problèmes aux limites pour des équation différentielles avec des conditions intégrales

Cette section est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions du problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire avec des conditions intégrales suivant :

$$(P_3) : \begin{cases} {}^c D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), & \text{pour tout } t \in J = [0, T], 0 < \alpha \leq 1 \\ y(0) + \mu \int_0^T y(s) ds = y(T), & \mu \in \mathbb{R}^* \end{cases} \quad (3.30)$$

Où ${}^c D^\alpha$ la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo, $f : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée vérifiant certaines hypothèses qui seront précisées plus tard, et $\mu \in \mathbb{R}^*$. Le résultat de cette section s'inspirent des travaux de Benchohra et Ouair [4].

3.3.1 Existence des solutions

Nous commençons par donner la définition de la solution du problème (P_3) .

Définition 3.2. Une fonction $y \in C([0, T])$ est dite une solution de (P_3) , si elle satisfait l'équation du problème (P_3) sur $[0, T]$, et la condition intégrale.

Pour l'existence de la solution du problème (P_3) nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.6. Soit $0 < \alpha \leq 1$ et soit $h \in C([0, T])$ une fonction donnée. Alors le problème aux limites

$${}^c D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \text{ pour tout } t \in J = [0, T], 0 < \alpha \leq 1, \quad (3.31)$$

$$y(0) + \mu \int_0^T y(s) ds = y(T), \quad \mu \in \mathbb{R}^*, \quad (3.32)$$

admet une seule solution donnée par

$$y(t) = \int_0^T G(t, s) h(s) ds, \quad (3.33)$$

où $G(t, s)$ est la fonction de Green donnée par :

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{-(T-s)^\alpha + \alpha T(t-s)^{\alpha-1}}{T\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{T\mu\Gamma(\alpha)} & \text{si } 0 \leq s \leq t, \\ \frac{-(T-s)^\alpha}{T\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{T\mu\Gamma(\alpha)} & \text{si } t \leq s < T. \end{cases} \quad (3.34)$$

3.3. PROBLÈMES AUX LIMITES POUR DES ÉQUATION DIFFÉRENTIELLES AVEC DES CONDITIONS INTÉGRALES

Démonstration. Par le lemme 2.3, on peut réduire le problème (3.31)-(3.32) à un équivalent d'équation intégrale :

$$\begin{aligned} y(t) &= I_0^\alpha h(t) - c_0 \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s) ds - c_0, \end{aligned}$$

pour une constante $c_0 \in \mathbb{R}$. On a par une intégration :

$$\begin{aligned} \int_0^T y(s) ds &= \int_0^T \left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(\tau) d\tau - c_0 \right) ds \\ &= \int_0^T \left(\int_\tau^T \frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \right) h(\tau) d\tau - c_0 T \\ &= \int_0^T \frac{(T-\tau)^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} h(\tau) d\tau - c_0 T. \end{aligned}$$

En appliquant la condition intégrale (3.32), on trouve :

$$y(0) = -c_0 \tag{3.35}$$

$$y(T) = \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s) ds - c_0. \tag{3.36}$$

Il reste à trouver c_0 . On a, d'après (3.32).

$$y(0) + \mu \int_0^T y(s) ds = y(T), \tag{3.37}$$

c'est à dire :

$$-c_0 + \mu \int_0^T y(s) ds = \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s) ds - c_0,$$

d'où

$$\int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s) ds = \mu \int_0^T \frac{(T-\tau)^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} h(\tau) d\tau - c_0 \mu T,$$

donc

$$c_0 \mu T = \mu \int_0^T \frac{(T-s)^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} h(s) ds - \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s) ds,$$

3.3. PROBLÈMES AUX LIMITES POUR DES ÉQUATION DIFFÉRENTIELLES AVEC DES CONDITIONS INTÉGRALES

par conséquent

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \left(-\frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\mu\Gamma(\alpha)} + \frac{(T-s)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) h(s) ds.$$

Par suite, la solution unique de (3.31)-(3.32) est donnée par :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s) ds - \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{-(T-s)^{\alpha-1}}{\mu\Gamma(\alpha)} + \frac{(T-s)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) h(s) ds \\ &= \int_0^t \left(\frac{-(T-s)^\alpha + \alpha T(t-s)^{\alpha-1}}{T\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{T\mu\Gamma(\alpha)} \right) h(s) ds \\ &\quad + \int_t^T \left(\frac{(-T-s)^\alpha}{T\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{T\mu\Gamma(\alpha)} \right) h(s) ds \\ &= \int_0^T G(t,s) h(s) ds. \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration □

Remarque 3.1. la fonction $t \in J \mapsto \int_0^T |G(t,s)| ds$ est continue sur J , et est donc bornée.

Soit

$$\widehat{G} = \sup \left\{ \int_0^T |G(t,s)| ds \quad t \in J \right\}.$$

Théorème 3.3. Supposons que :

(H1) Il existe un $k > 0$, tel que

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq k|u - v|, \text{ pour tout } t \in [0, T] \text{ et pour chaque } u, v \in \mathbb{R}.$$

Si

$$k\widehat{G} < 1, \tag{3.38}$$

alors, il existe une solution unique pour le problème aux limites (P_3) .

Démonstration. Considérons l'opérateur $N : C([0, T]) \rightarrow C([0, T])$ défini par :

$$(Ny)(t) = \int_0^T G(t,s) f(s, y(s)) ds$$

3.3. PROBLÈMES AUX LIMITES POUR DES ÉQUATION DIFFÉRENTIELLES AVEC DES CONDITIONS INTÉGRALES

Où G est la fonction de Green donnée par (3.34). D'après le lemme 3.6 les points fixes de l'opérateur N sont les solutions du problèmes (P_3) . On doit montrer que N est une contraction.

Considérons $x, y \in C([0, T])$. Alors, pour tout $t \in [0, T]$. On a :

$$\begin{aligned} |(Nx)(t) - (Ny)(t)| &\leq \int_0^T |G(t, s)| |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds, \\ &\leq k \|x - y\|_\infty \int_0^T |G(t, s)| ds, \\ &\leq k \hat{G} \|x - y\|_\infty. \end{aligned}$$

Donc, on obtient que

$$\|N(x) - N(y)\|_\infty \leq L \|x - y\|_\infty,$$

où

$$L := k \hat{G} < 1,$$

et le théorème est prouvé. □

Exemple 3.2. Considérons le problème aux limites

$${}^c D^\alpha y(t) = \frac{e^{-t}}{10(1+e^t)} |y(t)| \quad t \in J := [0, 1] \quad \alpha \in (0, 1] \quad (3.39)$$

$$y(0) + \int_0^1 y(s) ds = y(1) \quad (3.40)$$

Soit

$$f(t, x) = \frac{e^{-t}}{10(1+e^t)} x, \quad (t, x) \in J \times (0, \infty),$$

soit $x, y \in [0, \infty)$ et $t \in J$. Alors on a

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t, y)| &= \frac{e^{-t}}{10(1+e^t)} |x - y| \\ &\leq \frac{1}{20} |x - y|, \end{aligned}$$

alors la condition (H1) est vérifiée avec $k = \frac{1}{20}$. D'après (3.6) G est donnée par

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{-(1-s)^\alpha + \alpha(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & si \quad 0 \leq s \leq t, \\ \frac{-(1-s)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & si \quad t \leq s < 1, \end{cases} \quad (3.41)$$

3.3. PROBLÈMES AUX LIMITES POUR DES ÉQUATION DIFFÉRENTIELLES AVEC DES CONDITIONS INTÉGRALES

D'après (3.41), on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 G(t, s) ds &= \int_0^t G(t, s) ds + \int_t^1 G(t, s) ds \\
&= \int_0^t \left(\frac{-(1-s)^\alpha + \alpha(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) ds \\
&\quad + \int_t^1 \left(\frac{-(1-s)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) ds \\
&= \left[\frac{(1-s)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)} \right]_0^t - \left[\frac{\alpha(t-s)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha+1)} \right]_0^t + \left[\frac{-(1-s)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \right]_0^t \\
&\quad + \left[\frac{(1-s)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)} \right]_t^1 - \left[\frac{(1-s)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \right]_t^1 \\
&= \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{(1-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{(1-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},
\end{aligned}$$

par suite

$$\hat{G} < \frac{4}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{3}{\Gamma(\alpha+2)},$$

alors la condition (3.38) est satisfaite pour $T = \mu = 1$.

En effet $\hat{G}k < 1$ est satisfaite pour chaque $\alpha \in (0, 1]$, alors d'après le théorème 3.2, le problème (3.39)-(3.40) a une seule solution sur $[0, 1]$.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté les dérivées fractionnaires en trois sens : Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov, et leurs propriétés.

Nous avons considéré un problème de Cauchy pour une équation différentielle d'ordre fractionnaire. Puis, on a considéré deux problèmes aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire avec conditions aux limites différentes.

Finalement, nous avons illustré les deux problèmes avec des exemples détaillés.

Bibliographie

- [1] A.Aghajani, E.Pouhadi and J.J Trujillo, *Application of measure of noncompactness to a Cauchy problem for fractional differential equations in Banach spaces*, Fractional Calculus and Applied Analysis, An International Journal for Theory and Applications, vol.16, no 4, 2013.
- [2] J.Banàs,K.Goebel,*Measure of noncompactness in Banach spaces*, In Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Volume 60,Marcel Dekker, New York, 1980.
- [3] M. Benchohra, S. Hamani and S.K. Ntouyas, *Boundary value problems for differential equations with fractional order and non local conditions*, Surv. Math. Appl. 3 (2008), 1-12.
- [4] M. Benchohra and F.Ouaar, *Existence results for nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions* , Math. Anal and Appl 2 (2010), 7-15.
- [5] L. Debnath & D. Bhatta, *Integral transforme and their applications second edition*, Chapman & Hall/CRC, 2007 .
- [6] A. M. A. El-Sayed, *Fractional order evolution equations*, , J. Fract. Calc. 7 (1995), 89-100.
- [7] L. Gaul, P. Klein and S. Kempfle, *Damping description involving fractional operators*, Mech. Systems Signal Processing 5 (1991), 81-88.
- [8] R. Hilfer, *Applications of fractional calculus in physics*, World Scientific, Singapore, 2000.
- [9] A. A. Kilbas and S. A. Marzan, *Nonlinear differential equations with the Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions*, Differential Equations 41 (2005),84-89.
- [10] A.A. Kilbas, Hari M. Srivastava, and Juan J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

BIBLIOGRAPHIE

- [11] F. Mainardi, *Fractional calculus : Some basic problems in continuum and statistical mechanics*, in "Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics" (A. Carpinteri and F. Mainardi, Eds), pp. 291-348, Springer-Verlag, Wien, 1997.
- [12] K. S. Miller and B. Ross, *An introduction to the fractional calculus and differential equations*, John Wiley, New York, 1993.
- [13] I. Podlubny, *Fractional differential equation*, Academic Press, San Diego, 1999.
- [14] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications*, Gordon and Breach, Yverdon, 1993.
- [15] E. C. Titchmarsh, *The theory of functions second edition*, Oxford University Press, 1939.