الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTÉRE DE l'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITÉ AMAR TÉLÉDJI DE LAGHOUAT
كـلـيـــــةالـعـلـــــــوم
FACULTE DES SCIENCES
قـســـــم الـريـاضـــيـات
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématique

Présenté par :

Zineb Bouchra BOUDELLAA

THEME

Etude de quelques problèmes d'évolution avec deuxième son

Soutenance publique devant le jury composé de :

Dr. Djamel OUCHENANE	M.C.A	Président
Dr. AbdelAziz RAHMOUNE	M.C.A	Encadreur
Dr. Ameur YAGOUB	M.C.A	Examinateur

Année Universitaire 2022/2023

Remerciement

Je remercie « **Allah** » qui nous a donné la volonté pour la réalisation de ce modeste mémoire.

Je tiens à notifier un remerciement spécial à tous nos professeurs qui ont contribué à notre formation de mathématique, en particulier, notre encadreur pédagogique Monsieure **"Rahmoune AbdelAaziz"**.

Je remercie également tous nos collègues d'étude, particulièrement notre promotion de master mathématique, 2022/2023 à l'université de **Amar Teliji Laghouat**.

De tous mon cœur je remercie **mes chères parents**, pour leur soutienet leur amour sans faille tout au long de ces années, ma sœur, mes frères et tout ma familles.

Dédicace

Je dédie ce travail,

à mon père **Mohamed**,

à ma mère **Halima**,

à ma sœur **Hiba** avec sa petite famille et mon anges **Nour**, **Yasmine**, **Ziyad**,

à tout mes frères **Salah**, **Yahya**, **Toufik**, **Imad**, **Bachir**,

à tout ceux qui **m'aiment**.

Notations

$\mathbb{R}^n$	espace euclidien de dimension n .
$\parallel . \parallel$	la norme euclidien .
H	Espace de Hilbert .
X	Espace de Banach .
I	L'opérateure identité sur X
$(S(t))_{t\geq 0}$	Une famille a un paramètre d'opérateure linéaire A.
$D(A)$	Le domaine de l'opérateure linéaire A.
X'	Le dual topologique de l'espace de Banach X .
$\rho(A)$	L'ensemble résolvant de A.
	$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda I - A : D(A) \to X$est bijectif et $(\lambda I - A)^{-1} : X \to D(A)$est borné }
$R(\lambda, A)$	La résolvante de A en $\lambda \in \rho(A)$, c'est l'opérateure linéaire $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$.
Ω	Un ouvert bornée dans $\mathbb{R}^n$.
A*	adjoint de A.
$C^k(\Omega)$	l'espace des fonctions k fois dérivable et la dérivé d'ordore k est continue .
C_c^∞	l'espace des fonctions indéfiniment derivable la support compact .
$L^1(I, \mathbb{R})$	l'espace des fonctions $x : I \to \mathbb{R}$ Lebesgue intégrables .
$L^1_{loc}(I, \mathbb{R})$	l'espace des fonctions localement intégrables .
L^2	est l'espace des fonctions de carré intégrable.
$L^p(\Omega)$	l'espace de Lebesgue ,$1 \leq p \leq \infty$.
$\mathfrak{D}(\Omega)$	l'espace des distributions .
$\nabla f(x)$	$= (\frac{\partial f}{\partial x_1(x)}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n(x)})$, le gradient de la fonction f en $x \in \mathbb{R}^n$.
$W^{m,p}(\Omega)$	l'espace de Sobolev , $1 \leq p \leq \infty$.
$W_0^{m,p}(\Omega)$	la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$.
$\triangle$	le laplacian ($\triangle = \sum_{i=0}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(x)$).

Table des matières

Introduction

Le système de Bresse prend en compte les déformations d'arc d'un cercle soumis aux déplacements longitudinal, vertical et l'angle de rotation indiqués par w, φ et ψ respectivement. Le système est donné par les équations suivantes

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - lk_0(w_x - l\varphi) = F_1 & \text{dans } (0, L) \times (0, \infty). \\ \rho_2\varphi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) = F_2 & \text{dans}(0, L) \times (0, \infty). \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + lk(\varphi_x + \psi + lw) = F_3 & \text{dans}(0, L) \times (0, \infty). \end{cases} \tag{1}$$

Où F_1, F_2 et F_3 représentent les forces extérieures et les coefficients ρ_i, k, k_0, l et b sont des constantes positives. Le système de Bresse (1) est composé de trois équations des ondes et il a été introduit par Bresse [2]. Lorsque $F_1 = F_2 = F_3 = 0$, le système (1) est purement conservateur. En d'autres termes, en prenant en compte toutes les conditions aux limites, l'énergie du système définie par la fonctionnelle suivante

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + \rho_1 w_t^2 + b\psi_x^2 + k(\varphi_x + \psi + lw)^2 + k_0(w_x - l\varphi)^2\right] dx.$$

Satisfait $E'(t) = 0$. Par conséquent, $E(t) = E(0)$ pour tout $t \geq 0$. Cette identité est appelée la propriété de conservation de l'énergie.

En outre, si $l \equiv 0$, alors le système de Bresse se réduit au système de Timoshenko. Santos et Almeida Jùnior [11] ont considéré (1) lorsque $F_1 = \gamma_1\varphi_t, F_2 = \gamma_2\psi_t$, $F_3 = \gamma_3 w_t$, avec des conditions initiales et les conditions aux limites de type Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet, et ils ont montré que le système est exponentiellement stable sans imposer aucune condition sur les coefficients. Le même résultat a été obtenu par Soriano et al [19] lorsque $F_1 = a(x)g_1(\varphi_t), F_2 = g_2(\psi_t)$ et $F_3 = \gamma(x)g_3(w_t)$,où $a, \gamma \in L^\infty(0, L)$ et les fonctions g_1, g_2 et g_3 sont continues et monotones .

Un résultat similaire an été également par Guesmia et Kafini [7] lorsque
$F_1 = -\int_0^\infty g_1(s)\varphi_{xx}(x, t-s)ds$, $F_2 = -\int_0^\infty g_2(s)\psi_{xx}(x, t-s)ds$,
$F_3 = -\int_0^\infty g_3(s)w_{xx}(x, t-s)ds$, où g_i sont des fonctions différentiables décroissantes satisfaisant certain hypothèses. Précisément, ils ont établi l'existence et l'unicité des solutions et asymptotique de ce système, mais sans imposer aucune condition sur les coefficients. Lorsque $F_1 = F_3 = 0$ et $F_2 = \gamma\psi_t$ avec $\gamma > 0$. Alabau Boussouira et al [1] ont montré que le système est exponentiellement stable sous les conditions

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b} etk = k_0, \tag{2}$$

sinon le système manque de stabilité exponentielle.

Dans ce chapitre, en utilisant des conditions aux limites de type Dirichlet, ils ont preuvé que les solutions se désintègrent polynomialement vers zéro avec toux $t^{-\frac{1}{6}+\epsilon}$ ou $t^{-\frac{1}{3}+\epsilon}$ pour ϵ petit. Le résultat a ensuite amélioré par Fatori et Monteiro [4].

concernant le système thermoélastique de Bresse, Liu et Rao [10] ont considéré

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - lk_0(w_x - l\varphi) + l\gamma\theta_1 = 0. \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = 0. \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + lk(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_{1x} = 0. \\ \rho_3\theta_t - \theta_{xx} + \gamma\psi_{tx} = 0. \\ \rho_3\theta_{1x} - \theta_{1xx} + \gamma(w_{tx} - l\varphi_t) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

dans $(0, L) \times (0, \infty)$, ainsi que les conditions aux limites initiales et prouvé un résultat de stabilité exponentielle à condition que (2) soit vérifié. Sinon, seul un type polynomial la pourriture s'installe. Fatori et Munoz Rivera [5] considèrent (3) sans θ_1 et la dernière equation dans (3),

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - lk_0(w_x - l\varphi) = 0. \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = 0. \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + lk(\varphi_x + \psi + lw) = 0. \\ \rho_3\theta_t - \theta_{xx} + \gamma\psi_{tx} = 0 \end{cases}$$

et obtenu un résultat similaire à [10]. Nous renvoyons le lecteur à [2,8,14,15,17,18,20,21], pour quelques autres résultats sur le système de Bresse.

Dans le système (3), l'équation de la chaleur est régie par la loi de conduction de la chaleur de Fourier, qui stipule que le flux de chaleur est proportionnel au gradient de température. De plus, il est bien connu que le modèle utilisant la loi de Fourier classique conduit au la physique paradoxe de la vitesse infinie de propagation de la chaleur. Autrement dir, toute perturbation thermique à un moment donné sera instantanément transféré aux autres parties du corps. Pour surmonter ce paradoxe physique tout en gardent l'essentiel d'un processus de conduction thermique, de nombreuses théories ont ensuite émergé. L'un d'eux est l'avènement du second effet sonores qui surviennent lorsque la chaleur est transportée par un processus de propagation d'ondes au lieu de la diffusion habituelle. La théorie propose de remplacer la loi de Fourier classique $q + \gamma\theta_x = 0$, où q est le flux de chaleur et γ est le coefficient de conductivité thermique, par une loi modifiée de conduction thermique appelée loi de Cattaneo $\tau > 0$ représente le temps de relaxation décrivant le décalage temporel dans réponse du flux de chaleur à un gradient de température. Le système thermique obtenu est de type hyperbolique et donc, automatiquement, élimine le paradoxe de la vitesse infinie. En tenant compte de la théorie ci-dessus, nous obtenons le système de Bresse suivant où le flux de chaleur est donné par la loi de Cattaneo

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - lk_0(w_x - l\varphi) = 0 & \text{dans } (0,1)\times(0,\infty). \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = 0 & \text{dans } (0,1)\times(0,\infty). \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + lk(\varphi_x + \psi + lw) = 0 & \text{dans } (0,1)\times(0,\infty). \\ \rho_3\theta_t + q_x + \gamma\psi_{tx} = 0 & \text{dans } (0,1)\times(0,\infty). \\ \tau q_t + \beta q + \theta_x = 0 & \text{dans } (0,1)\times(0,\infty). \end{cases} \tag{4}$$

On considère (4) avec les conditions initiales et aux limites suivantes

$$\begin{aligned} &\varphi(x,0) = \varphi_0(x)\ ,\ \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x)\ ,\ \theta(x,0) = \theta_0(x) && \text{dans } (0,\infty)\ . \\ &\psi(x,0) = \psi_0(x)\ ,\ \psi_t(x,0) = \psi_1(x)\ ,\ q(x,0) = q_0(x) && \text{dans } (0,\infty)\ . \\ &w(x,0) = w_0(x)\ ,\ w_t(x,0) = w_1(x) && \text{dans } (0,\infty). \\ &\varphi(0,t) = \psi_x(0,t) = w_x(0,t) = \theta(0,t) = 0 && \forall t \geq 0. \\ &\varphi_x(1,t) = \psi(1,t) = w(1,t) = q(1,t) = 0 && \forall t \geq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Dans le chapitre 1, on va donner quelques rappels, défintions et théorèmes fondamentaux pour traiter notre problème. Dans le chapitre 2, on va utiliser la théorie de semi-groupes pour preuver l'existence et l'unicité de notre système. Dernièrement, sur base sur un résultat de stabilité exponentielle pour va montrer que le système (4) est exponentiellement stable soundso les hypothèses $\xi = 0, k = k_0$, où

$$\xi = \left(1 - \frac{\tau k \rho_3}{\rho_1}\right)\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right) - \frac{\gamma^2\tau}{b} \quad \text{et} \quad k = k_0. \tag{6}$$

Chapitre 1

Rappels et notions preliminaires

1.1 Quelques espaces

1.1.1 Espace $L^p(\Omega)$

Définition 1 On définit sur $L^p(\Omega)$ ($p \in [1, +\infty[$) par :

1. Si $p \in [1, +\infty[$:

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tq } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty\}$$

On définit sur $L^p(\Omega)$ la norme

$$\| f \|_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |f(x)|^p \, dx)^{\frac{1}{p}}.$$

2. Si $p = +\infty$:

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tq } \exists \text{ c} \in \mathbb{R} \text{ vérifiant } :|f| \leq c \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

On définit sur $L^\infty(\Omega)$ la norme

$$\| f \|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ \text{ c} \in \mathbb{R} \text{ tq } |f| \leq c \text{ p.p sur } \Omega.\}$$

Proposition 2

1) Si $p \in [1, +\infty]$ alors $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

2) Si $p \in [1, +\infty[$ alors $L^p(\Omega)$ est séparable (i.e. il existe un ensemble dénombrable dense dans $L^\infty(\Omega)$).

3) $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

1.1.2 Espace de Sobolev

Définition 3 Soient $(m, p) \in \mathbb{N} \times [1, +\infty]$. On définit $W^{m,p}(\Omega)$ par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \text{ tq } \forall\alpha \in \mathbb{N}^n \text{ avec } |\alpha| \leq \text{m } \exists \pounds_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ vérifiant :}$$
$$\int_\Omega f(x)D^\alpha\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \pounds_\alpha(x)\varphi(x)dx, \forall\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)\} \ .$$

On pose $D^\alpha f = \pounds_\alpha$

On définit sur $W^{m,p}(\Omega)$ la norme

$$\parallel f \parallel_{W^{m,p}(\Omega)} = \textstyle\sum_{|\alpha|\leq m} \parallel \pounds_\alpha \parallel_{L^p(\Omega)}.$$

Si $1 \leq p < +\infty$ on peut considérer sur $W^{m,p}(\Omega)$ la norme équivalente

$$\parallel f \parallel_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\textstyle\sum_{|\alpha|\leq m} \parallel \pounds_\alpha(x) \parallel^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Cas particulier :

1. $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.
2. $p = 2 : W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

Proposition 4 $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\forall f, g \in H^m(\Omega) : \langle f, g\rangle = \sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega D^\alpha f(x)D^\alpha g(x)dx = \sum_{|\alpha|\leq m}\langle D^\alpha f(x), D^\alpha g(x)\rangle_{L^2\Omega}$$

. **Remarque :** $C^m(\Omega) \subset H^m(\Omega)$ mais l'inverse n'est pas vrai.

Proposition 5 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est danse dans $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Définition 6 On définit $H^m_0(\Omega) = \overline{\mathfrak{D}(\Omega)}$ (par rapport a la norme de $H^m(\Omega)$) ;
C'est-a-dire :

$H^m_0(\Omega) = \{f \in H^m(\Omega)/\exists(\varphi_k) \in \mathfrak{D}(\Omega)$ vérifient $:\parallel \varphi_k - f \parallel_{H^m(\Omega)} \to 0$ quand $k \to +\infty\}$.

De même $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathfrak{D}(\Omega)}$ par rapport à la norme de $W^{m,p}(\Omega)$.

Définition 7 Dérivée normale

On définit la dérivée normale d'une fonction f, notée par $\frac{\partial f}{\partial v}$ comme étant $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} v_i(x)$ pour tout $x \in \Gamma$.

On pose

$$\begin{array}{llll} \gamma: & \mathfrak{D}(\overline{\Omega}) & \rightarrow & L^2(\Gamma) \\ & \varphi & \rightarrow & \gamma(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial v}/_{\Gamma} \\ \gamma_0: & \mathfrak{D}(\overline{\Omega}) & \rightarrow & L^2(\Gamma) \\ & \varphi & \rightarrow & \gamma_0(\varphi) = \varphi/_{\Gamma} \end{array}$$

L'applicationγ_0 se prolonge par continuité à $H^1(\Omega)$

$$\begin{array}{lll} \gamma_0: & H^1(\Omega) \rightarrow & L^2(\Gamma) \\ & f & \rightarrow \gamma_0(f) = \lim_{n\rightarrow+\infty} \varphi_n/_{\Gamma} \end{array}$$

(γ_0 est dit l'application de trace).

Théorème 8 Si Γ est de classe C^2 alors γ se prolonge sur $H^2(\Omega)$

$$\begin{array}{lll} \gamma: & H^2(\Omega) & \rightarrow L^2(\Omega) \\ & f & \rightarrow \gamma(f) = \frac{\partial f}{\partial v}/_{\Gamma} \end{array}$$

Définition 9 $H_0^2(\Omega)$.

$H_0^2(\Omega) = \overline{\mathfrak{D}(\Omega)}$ (par rapport la norme de $H^2(\Omega)$).

Proposition 10 Si Γ est de classe C^2, alors $H_0^2(\Omega) = ker\gamma_0 \cap ker\gamma$ (i.e f $\in H^2(\Omega)$ tq :$f = 0$ p.p sur Γ et $\frac{\partial f}{\partial v} = 0$ p.p sur Γ. De même, $H_0^1(\Omega) = ker\gamma_0 = \{f \in H^1(\Omega)$ tq : $f = 0$ p.p sur

Γ $\}$ si Γ est de classe C^1.

1.2 Quelques inégalités

1.2.1 Inégalité d'interpolation

Soit $m \in \mathbb{N}^*/1$ et $p_1, p_2, ..., p_m \in [1, +\infty]$ tq $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + ... + \dfrac{1}{p_m} \geq 1$. On pose $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + ... + \dfrac{1}{p_m}$. On a : $\forall f_i \in L^{p_i}(\Omega), i = 1, ..., m$, alors $f = f_1, f_2, ..., f_m \in L^p(\Omega)$ et on a :$\parallel f \parallel_{L^p(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^m \parallel f_i \parallel_{L^{p_i}(\Omega)}$.

1.2.2 Inégalité de Holder

Soient $p, q \in [1, +\infty]$ tq $1 = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$. Alors pour tous $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$: $fg \in L^1(\Omega)$ et on a :

$$\parallel fg \parallel_{L^1(\Omega)} \leq \parallel f \parallel_{L^p(\Omega)} \parallel g \parallel_{L^q(\Omega)}$$

$$\left(i.e \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leq (\int_\Omega |f(x)|^p)^{\frac{1}{p}} (\int_\Omega |g(x)|^q)^{\frac{1}{q}} & \text{si } p, q \in]1, +\infty[\\ \displaystyle\int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leq \parallel g \parallel_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |f(x)|\, dx & \text{si } p = 1 \text{ et } q = +\infty \end{cases} \right).$$

1.2.3 Formule de Green

Soient $f, g \in H^1(\Omega)$ (ou $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné) de frontière Γ de classe C^1. Alors

$$\int_\Omega \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} g(x) dx = -\int_\Omega f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} + \int_\Gamma f(x) g(x) v_i dx.$$

1.2.4 Inégalité de Young

Soient p et q deux nombres réels conjugués dans $]1, +\infty[$. Alors, pour tout α et $\beta \in \mathbb{R}_+$ on a

$$\alpha\beta \leq \frac{\varepsilon}{p}\alpha^p + \frac{1}{q\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}}\beta^q, \forall \varepsilon > 0.$$

En particulier pour p=q=2 on a

$$\alpha\beta \leq \frac{\varepsilon}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\beta^2, \forall \varepsilon > 0.$$

1.2.5 Inégalité de Poincaré

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Il existe une constante $c > 0$ vérifiant :

$$\parallel f \parallel_{L^2(\Omega)} \leq c \parallel \nabla f \parallel_{L^2(\Omega)} \ , \forall f \in H_0^1(\Omega),$$

ou $(\nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_n})$, c'est-à-dire :

$$\int_\Omega f^2(x)dx \leq \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^2 dx.$$

Preuve. On peut écrire :

$$f(x) = \int_a^x f'(y)dy.$$

Alors, pour $x \in]a, b[$,

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \left(\int_a^x f'(y)dy \right)^2 \\ &\leq \int_a^x (f'(y))^2 dy \int_a^x dy \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \int_a^x f^2(x)dx &\leq \int_a^b \left[\int_a^x (f'(y))^2 dy \times (x-a) \right] dx \\ &\leq \parallel f' \parallel_{L^2(a,b)}^2 \times \int_a^b (x-a)dx. \end{aligned}$$

cela implique :

$$\parallel f \parallel_{L^2(a,b)}^2 \leq \frac{(b-a)^2}{2} \parallel f' \parallel_{L^2(a,b)}^2 \Rightarrow \parallel f \parallel_{L^2(a,b)} \leq \frac{(b-a)}{\sqrt{2}} \parallel f' \parallel_{L^2(a,b)},$$

d'où

$$\parallel f \parallel_{L^2(\Omega)} \leq c \parallel \nabla f \parallel_{L^2(\Omega)} \ , \forall f \in H_0^1(\Omega),$$

1.3 Théorie de semi-groupes

Soit H un espace de Hilbert réel ou complexe muni de la norme $x \to \| x \|_H$. On désigne par $L(H)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de H en lui même. $L(H)$ est un espace de Banach pour la norme $S \to \| S \|$ définie par :

$$\| S \| = \sup_{\|x\|_H=1} \| Sx \|_H = \sup_{x\neq 0} \frac{\| Sx \|_H}{\| x \|_H}.$$

Définition 10 On appele l'application $S : [0,+\infty[\to L(H)$ semi-groupes fortement continu dans H si elle vérife les propriétés suivantes :

i) $S(0) = I_d$.

ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall t \geq 0$, $\forall s \geq 0$.

iii) $\forall x \in H$, l'application $S(.)x$ est continue sur $[0,+\infty[$ dans H.

Dans la suite, on appelle une telle application semi-groupes de classe C_0 et on la note par C_0-semi-groupe.

Proposition 11 Si $(S(t))_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupes dans H, alors l'opérateur adjoint $(S^*(t))_{t\leq 0}$ est aussi semi-groupes de classe C_0 dans H.

Lemme 12 Soit $S(t)$ un C_0-semi-groupes, Alors

$$\exists M \geq 1, \exists w \in \mathbb{R} \text{ tels que : } \| S(t) \| \leq Me^{wt}, \forall t \leq 0.$$

Preuve : Considérons le compact [0,1], comme $(S(t))_{t\geq 0}$ est fortement continue, alors l'application $t \to S(t)x$ est continue. Donc l'image de [0,1] par cette application est compact, et par conséquent

$$\exists M_x \text{ tel que : } \| S(t)x \| \leq M_x \text{ , } \forall t \in [0,1] \text{ .}$$

D'aprés le théorème de Banach-Steinhauss :

$$\exists M \text{ tel que : } \| S(t) \| \leq M \text{ , } \forall t \in [0,1].$$

On remarque que la constante $M \geq 1 (1 = \| S(0) \| \leq M)$. Maintenant si $t \notin [0,1]$, on écrit $t = n + \theta$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in]0,1[$ donc

$$\begin{aligned} S(t) &= S(n+\theta) \\ &= S(n)S(\theta) \\ &= (S(1))^n S(\theta). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \| S(t) \| = \| (S(1))^n S(\theta) \| &\leq \| (S(1))^n \| \| S(\theta) \| \\ &\leq M^n M \\ &\leq M e^{n \log M}. \end{aligned}$$

On pose $\log M = w$, donc

$$\| S(t) \| \leq M e^{nw} \leq M e^{tw}.$$

Définition 13 On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ l'opérateur linéaire (non-borné) $A : D(A) \to X$ défini par

$$\begin{aligned} D(A) &= \{x \in X, \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \text{ existe dans } X\} \\ Ax &= \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}(S(t)u - u). \end{aligned}$$

Proposition 14 Soit $S(t)$ un semi-groupe C_0 de générateur infinitésimal A, alors

1. Pour tout $u_0 \in X$, $\displaystyle\int_0^t S(s)u_0 \in D(A)$ et
$$A\left(\int_0^t S(\tau)u_0 d\tau\right) = S(t)u_0 - u_0.$$
2. Si $u_0 \in D(A)$, alors $S(t)u_0 \in D(A)$ pour tout $t \geq 0$, $S(t)u_0$ est de classe C^1 et
$$\frac{d}{dt} S(t)u_0 = AS(t)u_0 = S(t)Au_0.$$

Démonstration : Soit $u_0 \in x$ et $t \geq 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{S(\varepsilon - I_d)}{\varepsilon} \int_0^t S(\tau)u_0 d\tau &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (S(\tau + \varepsilon) - S(\tau))u_0 d\tau \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{t+\varepsilon} S(\tau)u_0 d\tau - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} S(\tau)u_0 d\tau. \end{aligned}$$

Quand ε tend vers 0^+, le membre de droite tand vers $S(t)u_0 - u_0$. Ceci démontre 1).

Soit $u_0 \in D(A)$ et $t \geq 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on

$$\frac{S(\varepsilon) - I_d}{\varepsilon} S(t)u_0 = S(t)\frac{S(\varepsilon) - I_d}{\varepsilon} u_0 \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} S(t)Au_0.$$

Pour obtenir 2), il reste à utiliser que si $S(t)u_0$ est dérivable à droite et de dérivée continue, alors $S(t)u_0$ est de classe C^1 (petit lemme à démontrer : utiliser l'uniforme continuité du reste dans le taux de variation à droite).

Théorème 15 [12]

Soit $S(t)$ un semi-groupe C_0, alors son génarateur infinitésimal A est fermé et son domaine $D(A)$ est dense dans X.

Démonstration : Soit $u_0 \in X$. D'aprés la proposition précédante, $u_0^\varepsilon = \varepsilon^{-1} \int_0^\varepsilon S(t)u_0 dt$ est dans $D(A)$ pour tout $\varepsilon > 0$ et en outre u_0^ε tend vers u_0 quand ε tend vers 0.

Donc $D(A)$ est dense dans X.

Soit $(u_n) \subset D(A)$ et $(v_n) \subset X$ tels que $Au_n = v_n$ et les deux suites convergent vers u et v dans X. D'aprés la proposition précédente , $S(t)u_n - u_n = \int_0^t S(\tau)Au_n d\tau = \int_0^t S(\tau)v_n d\tau$. A la limite, on trouve que $S(t)u - u = \int_0^t S(\tau)v d\tau$ et donc que $(S(t)u - u)/t$ tend vers v quand t tend vers 0. D'où $u \in D(A)$ et $Au = v$.

Théorème 16 [12]

Si $S(t)$ et $T(t)$ sont deux semi-groupes de même générateur infinitésimal A, alors $S(t) = T(t)$. On notera souvent $S(t) = e^{At}$ l'unique semi-groupe associé à A.

Démonstration : Soit $t > 0$. Pour $\tau \in [0, t]$ et $x \in D(A)$, on pose $f(\tau) = S(t - \tau)T(\tau)x$. On a

$$f'(\tau) = -S(t - \tau)AT(\tau)x + S(t - \tau)AT(\tau)x = 0$$

et donc $S(t)x = T(t)x$. On complète en suite par densité de $D(A)$.

Théorème 17 Le semi-groupe $S(t)$ est uniformément continu si et seulement si A est borné. Dans ce cas, on a $S(t) = e^{At}$ et $S(t)$ est prolongeable en groupe d'opérateurs.

Démonstration : Si A est borné, on montre que e^{At} est un semi-groupe uniformément continu et que A est son générateur.

Soit $S(t)$ un semi-groupe uniformément continu. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $\varepsilon^{-1}\int_0^\varepsilon S(\tau)d\tau$ est proche de l'édentité et donc inversible. Donc $L = \int_0^\varepsilon S(\tau)d\tau$ est inversible. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(S(h) - I_d)\int_0^\varepsilon S(\tau)d\tau &= \frac{1}{h}\left(\int_0^\varepsilon S(\tau + h)d\tau - \int_0^\varepsilon S(\tau)d\tau\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_h^{h+\varepsilon} S(\tau)d\tau - \int_0^h S(\tau)d\tau\right). \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{h}(S(h) - I_d) = \frac{1}{h}\left(\int_h^{h+\varepsilon} S(\tau)d\tau - \int_0^h S(\tau)d\tau\right) L^{-1}.$$

et quand h tend vers 0, $\frac{1}{h}(S(h) - I_d)$ tend fortement vers $(S(\varepsilon) - I_d)L^{-1}$.

Corollaire 18 Soit $S(t)$ un $C_0 - semi - groupes$ sur H de générateur infinitésimal A. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$, le système :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, \forall t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

admet une unique solution $u \in C^1([0, +\infty[; H) \cap C([0, +\infty[; D(A))$ donnée par

$$u(t) = S(t)u_0.$$

1.3.1 Opérateur maximal monotone

Soit H un espace de Hilbert et $A : D(A) \to H$ un opérateur donné où $D(A)$ est son domaine de définition défini par $D(A) = u \in HtqAu \in H$.

Définition 19 On dit que A est monotone si

$$\langle Au - Av, u - v\rangle_H \geq 0, \forall u, v \in D(A).$$

Remarque : Si A est linéaire, alors A est monotone si $\langle Au, u\rangle_H \geq 0$, $\forall u \in D(A)$.

Définition 20 On dit que A est maximal si $I_d + A : D(A) \to H$ est surjectif, c'est-à-dire

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A) \text{ tq : } u + Au = f.$$

Proposition 21 Soit H un espace de Hilbert (réel). Les propriétés suivantes sont équivalantes :

1) A est maximal monotone dans H.

2) $(I - \lambda A)^{-1}$ est de contraction pour tout $\lambda \geq 0$.

3) A est monotone s'il existe λ positif tel que $(I + \lambda A)$ est surjectif.

Théorème 22 Supposons que A est maximal monotone. Alors :

1) Pour tout $u_0 \in \overline{D(A)}$, le système (1) admet une solution unique $u \in C(\mathbb{R}_+, H)$ (c'est-à-dire $\forall t_0 \in \mathbb{R}_+ :\parallel u(t) - u(t_0) \parallel \forall_H \to 0$ quand $t \to t_0$). La solutuion u est dite faible (u n'est pas dérivable au sens classique mais vérifie (1) au sens des distributions $\langle u'(t) + Au(t), v\rangle_H = 0, \forall v \in H$).

2) Si $u_0 \in D(A)$, alors $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, D(A))$ où sur $D(A)$ on consédère la norme du graph $\parallel u \parallel_{D(A)} = \sqrt{\parallel u \parallel_H^2 + \parallel Au \parallel_H^2}$. La solutuion u est est forte (la régularité de u signifie que :$\sup_{t\geq 0} \parallel u(t) \parallel_H < \infty, \sup_{t\geq 0} \parallel u(t) \parallel_{D(A)} < \infty$ et u est dérivable au sens des distributions).

3) Si A est linéaire et $u_0 \in D(A)$, alors $u \in C(\mathbb{R}_+, D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}_+)$. La solution u est dite classique.

1.3.2 Les théorèmes de Hille-Yosida

Dans toute la suite H désigne un espace de Hilbert.

Définition 23

Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur linéaire "non borné". On dit que A est monotone si

$$(Av, v) \leq 0, \forall v \in D(A).$$

A est maximal monotone si de plus $R(I + A) = H$, i.e.

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A) \text{ telle que } u + Au = f.$$

Proposition 24 [voir 22]

Soit A un opÈrateur maximal monotone. Alors

1. $D(A)$ est dense dans H.
2. A est fermé.
3. Pour tout $\lambda < 0, (I+\lambda A)$ est bijectif de $D(A)$ sur $H, (I+\lambda A)^{-1}$ est un opérateure borné et $\| (I+\lambda A)^{-1} \|_{L(H)} \leq 1$.

Théorème (Hille-Yosid) [voir 22]

Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ il existe une fonction

$$u \in C^1([0,+\infty[; H) \cap C([0,+\infty[; D(A))$$

unique telle que

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 \quad t > 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

De plus, on a :

$$|u(t)| \leq |u_0| \text{ et } \left| \frac{du}{dt}(t) \right| = Au(t) \leq |Au_0|, \forall t \geq 0.$$

Remarque L'intérét principal du théorème de Hille-Yosida réside dans le fait que pour résoudre le problème d'évolution on se ramène à vérifier que A est maximal monotone, c'est-à-dire, à étudier l'équation stationnaire $u + \lambda Au = f$.

Théorème 25 Un opérateur linéaire A est dissipatif si et seulement si

$$\forall \lambda > 0, \forall x \in D(A), \| (\lambda I_d - A)x \| \geq \lambda \| x \|.$$

Démonstration : : On restera dans le cadre hilbertien, voir [Pazy] pour le cadre général. Soit A dissipatif, $x \in X$, $\lambda > 0$ et soit x^*. On a

$$\| (\lambda I_d - A)x \|^2 \geq \lambda^2 \| x \|^2 + \| Ax \|^2 \geq \lambda^2 \| x \|^2 .$$

Réciproquement, si $\| (\lambda I_d - A)x \| \geq \lambda \| x \|$ alors

$$\| (\lambda I_d - A)x \|^2 = \lambda^2 \| x \|^2 + \| Ax \|^2 - 2\lambda Re < Ax|x > \geq \lambda^2 \| x \|^2 .$$

Quand λ tend vers $+\infty$, on voit que $Re < Ax|x > \leq 0$.

1.3.3 Théorème de Lumer-Phillips

Théorème 26 Soit A un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ dense dans X .

1) Si A est dissipatif et s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda_0 I_d - A$ est surjectif, alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions .

2) Si A est le génération infinitésimal d'un semi-groupe de contractions, alors $\lambda I_d - A$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$ et A est dissipatif.

Démonstration : On restera dans le cadre Hilbertien, voir [Pazy] pour le cadre général. Si A engendre un semi-group de contractions, le théorème de Hille-Yosida implique que $\lambda I_d - A$ est inversible pour tout $\lambda > 0$ avec l'estimation de la proposition 25 et donc A est dissipatif.
Soit A dissipatif et soit $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda_0 I_d - A$ est surjectif. La proposition 25 montre que $\lambda_0 I_d - A$ est inversible et donc fermé. Il s'en suit que A est fermé.
Pour appliquer le théorème de Hille-Yosida, il reste à montrer que pour tout $\lambda > 0, \lambda I_d - A$ est surjective, ce qui équivant à inversible et d'inverse borné par $1/\lambda$ d'aprés la proposition 1.3.4. L'ensemble $\Lambda = \lambda > 0, \lambda I_d - Aestsujective$ est ouvert car l'ensemble des applications inversible est un ouvert. Soit $\lambda_n \in \Lambda$ convergent vers $\lambda_\infty > 0$ et soit $y \in D(A)$. Soit x_n tel que $\lambda_n x_n - Ax_n = y$. On sait que $\| x_n \| \leq \lambda_n^{-1} \| y \|$ et en

outre

$$\lambda_m \parallel x_n - x_m \parallel \leq \parallel \lambda_m(x_n - x_m) - A(x_n - x_m) \parallel = |\lambda_n - \lambda_m| \parallel x_n \parallel .$$

Donc (x_n) est de Cauchy et converge vers x .Comme $Ax_n = \lambda_n x_n - y$ et que A est fermé, on a que $x \in D(A)$ et $\lambda_\infty x - Ax = y$.Donc $\lambda_\infty \in \Lambda$. Au final, Λ est ouvert et fermé non vide et donc $\Lambda = \mathbb{R}_+^*$.

1.3.4 Le Théorème de Lax-Miligram

Le théorème de Lax-Miligram est un outil simple et efficace pour la résolvante d'équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles linéaires.

Définition 27 On dit qu'une forme bilinéaire

$$a(u, v) : H \times H \to \mathbb{R}$$

est

1. Continue s'il existe une constante C telle que

$$|a(u, v)| \leq c \parallel u \parallel \parallel v \parallel, \forall u, v \in H$$

,

2. Coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(v, v) \geq \alpha \parallel v \parallel^2, \forall v \in H.$$

Théorème 28 Lax-Miligram Soit a une forme bilinéaire, continue et coercive .
Alors pour tout $\varphi \in H'$ il existe $u \in H$ unique tel que

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \forall v \in H.$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in H \text{ et } \frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \underset{v \in H}{Min} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

Chapitre 2

Existence et Unicité

Dans ce chapitre, on va donner un résultat d'existance et d'unicité pour le problème (4)-(5), en utilisant la théorie de semi groupes. Pour cela, en posant
$\phi = (\varphi, u, v, \psi, w, \omega, \theta, q)^T$, où $u = \varphi_t, v = \psi_t$, et $\omega = w_t$, le système (4)-(5)

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - lk_0(w_x - l\varphi) = 0 & \text{dans } (0,1)\times(0,\infty). \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = 0 & \text{dans } (0,1)\times(0,\infty). \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + lk(\varphi_x + \psi + lw) = 0 & \text{dans } (0,1)\times(0,\infty). \\ \rho_3\theta_t + q_x + \gamma\psi_{tx} = 0 & \text{dans } (0,1)\times(0,\infty). \\ \tau q_t + \beta q + \theta_x = 0 & \text{dans } (0,1)\times(0,\infty). \end{cases}$$

$$\begin{array}{lr} \varphi(x,0) = \varphi_0(x)\ ,\ \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x)\ ,\ \theta(x,0) = \theta_0(x) & \text{dans } (0,\infty)\ . \\ \psi(x,0) = \psi_0(x)\ ,\ \psi_t(x,0) = \psi_1(x)\ ,\ q(x,0) = q_0(x) & \text{dans } (0,\infty)\ . \\ w(x,0) = w_0(x)\ ,\ w_t(x,0) = w_1(x) & \text{dans } (0,\infty). \\ \varphi(0,t) = \psi_x(0,t) = w_x(0,t) = \theta(0,t) = 0 & \forall t \geq 0. \\ \varphi_x(1,t) = \psi(1,t) = w(1,t) = q(1,t) = 0 & \forall t \geq 0. \end{array}$$

peut être écrit comme suit

$$\begin{cases} \phi'(t) + \mathcal{A}\phi(t) = 0 & t > 0. \\ \phi(0) = \phi_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1, \theta_0, q_0)^T. \end{cases} \tag{2.1}$$

où l'opérateure $\mathcal{A}$ est défini par

$$\mathcal{A}\phi = \begin{pmatrix} -u \\ -\dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_t + \psi + lw)_x - \dfrac{k_0 l}{\rho_1}(w_x - l\varphi) \\ -v \\ -\dfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \dfrac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + lw) + \dfrac{\gamma}{\rho_2}\theta_x \\ -\omega \\ -\dfrac{k_0}{\rho_1}(w_x - l\varphi)_x + \dfrac{kl}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw) \\ \dfrac{1}{\rho_3}q_x + \dfrac{\gamma}{\rho_3}u_x \\ \dfrac{\beta}{\tau}q + \dfrac{1}{\tau}\theta_x \end{pmatrix}$$

Pour déterminer le cadre fonctionnelle de notre problème, on considère les espace de Hilbert suivants

$$\begin{aligned} H^1_*(0,1) = &\ \{f \in H^1(0,1) : f(0) = 0\}. \\ \tilde{H}^1_*(0,1) = &\ \{f \in H^1(0,1) : f(1) = 0\}. \\ H^2_*(0,1) = &\ H^2(0,1) \cap H^1_*(0,1). \\ \tilde{H}^2_*(0,1) = &\ H^2(0,1) \cap \tilde{H}^1_*(0,1). \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{H} = H^1_*(0,1) \times L^2(0,1) \times \tilde{H}^1_*(0,1) \times L^2(0,1) \times \tilde{H}^1_*(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1).$$

muni du produit scalaire

$$
\begin{aligned}
(\phi,\tilde{\phi})_{\mathcal{H}} &= k\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)(\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}+l\tilde{w})dx \\
&+k_0\int_0^1(w_x-l\varphi)(\tilde{w}_x-l\tilde{\varphi})dx+\rho_1\int_0^1 u\tilde{u}dx+b\int_0^1\psi_x\tilde{\psi}_xdx \\
&+\rho_2\int_0^1 v\tilde{v}dx+\rho_1\int_0^1\omega\tilde{\omega}dx+\rho_3\int_0^1\theta\tilde{\theta}dx+\tau_0\int_0^1 q\tilde{q}dx.
\end{aligned}
$$

Alors le domaine de l'opérateure $\mathcal{A}$ est donné par

$$
D(\mathcal{A})=\left\{\begin{matrix}\phi\in\mathcal{H}|\varphi\in H_*^2(0,1):\psi,w\in\tilde{H}_*^2(0,1);u,\theta\in H_*^1(0,1): \\ v,\omega,q\in\tilde{H}_*^1(0,1):\varphi_x(1)=0.w_x(0)=\psi_x(0)=0\end{matrix}\right\}.
$$

Nous prouvons maintenant que $\mathcal{A}$ est un opérateur maximal monotone. A cet effet, on a besoin les deux lemmes suivants

Lemme 2.1 L'opérateure $\mathcal{A}$ est monotone et satisfait, pour tout $\phi\in D(\mathcal{A})$

$$
(\mathcal{A}\phi,\phi)_{\mathcal{H}}=\beta\int_0^1 q^2dx\geq 0. \tag{2.2}
$$

La preuve : En utilisons le produit scalaire et l'intégration par partie, pour tout $\phi\in D(\mathcal{A})$ on a

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{A}\phi,\phi)_{\mathcal{H}}= &-k\int_0^1(u_x+v+l\omega)(\varphi_x+\psi+lw)dx-k_0\int_0^1(w_x-lu)(w_x-l\varphi)dx \\
&+\int_0^1(-k(\varphi_x+\psi+lw)_x-lk_0(w_x-l\varphi))udx \\
&-b\int_0^1 v_x\psi_xdx+\int_0^1(-b\psi_{xx}+k(\varphi_x+\psi+lw)+\gamma\theta_x)vdx \\
&+\int_0^1(-k_0(w_x-l\varphi)_x+lk(\varphi_x+\psi+lw))\omega dx \\
&+\int_0^1(q_x+\gamma_x)\theta dx+\tau\int_0^1\frac{1}{\tau}(\beta q+\theta_x)qdx
\end{aligned}
$$

Aprés la simplification, on trouve

$$
\begin{aligned}
\langle\mathcal{A}\phi,\phi\rangle_{\mathcal{H}}= &-kl\int_0^1 wu_xdx-k\int_0^1\psi u_xdx-k\int_0^1\varphi_xu_xdx-k_0l\int_0^1\varphi\omega_xdx-k_0\int_0^1 w_x\omega_xdx \\
&-kl\int_0^1 uw_xdx-k\int_0^1 u\psi_xdx-k\int_0^1 u\varphi_{xx}dx-b\int_0^1\psi_xv_xdx+\gamma\int_0^1 v\theta_xdx \\
&-b\int_0^1 v\psi_{xx}dx+k_0\int_0^1 l\varphi_x\omega dx-k_0\int_0^1\omega w_{xx}dx+\gamma\int_0^1\theta v_xdx+\int_0^1\theta_xqdx \\
&+\int_0^1\theta q_xdx+\beta\int_0^1 q^2dx.
\end{aligned}
$$

et gâce à la formule d'integration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}\phi, \phi\rangle_{\mathcal{H}} = \quad & -kl[wu]_0^1 - k[\psi u]_0^1 - k[\varphi_x u]_0^1 + k_0 l[\varphi\omega]_0^1 - k_0[w_x\omega]_0^1 \\ & -b[\psi_x v]_0^1 + \gamma[v_x\theta]_0^1 + [q_x\theta]_0^1 + \beta \int_0^1 q^2 dx.\end{aligned}$$

Alors, les conditions au bord impliquent

$kl[wu]_0^1 = 0, k[\psi u]_0^1 = 0, k[\varphi_x u]_0^1 = 0, k_0 l[\varphi\omega]_0^1 = 0, k_0[w_x\omega]_0^1 = 0,$

$b[\psi_x v]_0^1 = 0, \gamma[v_x\theta]_0^1 = 0, [q_x\theta]_0^1 = 0.$

D'où

$$\langle \mathcal{A}\phi, \phi\rangle_{\mathcal{H}} = \beta \int_0^1 q^2 dx.$$

Lemme 2.2 L'opérateure $I + \mathcal{A}$ est surjective.

La preuve Pour montrer que $I + \mathcal{A}$ est surjective il faut montrer que pour tout $G = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8)^T \in \mathcal{H}$, il existe $\phi \in D(\mathcal{A})$ tel que

$$\phi + \mathcal{A}\phi = G \tag{2.3}$$

i.e,

$$\begin{cases} -u + \varphi = g_1 \in H_*^1(0,1). \\ -k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) + \rho_1 u = \rho_1 g_2 \in L^2(0,1). \\ -v + \psi = g_3 \in \tilde{H}_*^1(0,1). \\ -b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x + \rho_2 v = \rho_2 g_4 \in L^2(0,1). \\ -\omega + w = g_5 \in \tilde{H}_*^1(0,1). \\ -k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) + \rho_1\omega = \rho_1 g_6 \in L^2(0,1). \\ q_x + \gamma v_x + \rho_3\theta = \rho_3 g_7 \in L^2(0,1). \\ (\beta + \tau)q + \theta_x = \tau g_8 \in L^2(0,1). \end{cases} \tag{2.4}$$

l'intégration de $(2.4)_8$ donne

$$\theta = \tau \int_0^x g_8(y)dy - (\beta + \tau) \int_0^x q(y)dy. \tag{2.5}$$

Donc $\theta(0,t) = 0$. Par substitution $u = \varphi - g_1, v = \psi - g_3, \omega = w - g_5$, et (2.5) en $(2.4)_2, (2.4)_4, (2.4)_6$ et $(2.4)_7$, on a

$$\begin{cases} -k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) + \rho_1\varphi = h_1 \in L^2(0,1). \\ -b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \rho_2\psi - \gamma(\beta+\tau)q = h_2 \in L^2(0,1). \\ -k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) + \rho_1\omega = h_3 \in L^2(0,1). \\ -q_x + \rho_3(\beta+\tau)\int_0^x q(y)dy - \gamma\psi_x = h_4 \in L^2(0,1). \end{cases} \tag{2.6}$$

où

$$\begin{cases} h_1 = \rho_1(g_1 + g_2). \\ h_2 = \rho_2(g_3 + g_4) - \tau\gamma g_8. \\ h_3 = \rho_1(g_5 + g_6). \\ h_4 = -\gamma g_{3x} - \rho_3(g_7 - \tau\int_0^x g_8(y)dy). \end{cases} \tag{2.7}$$

Pour résourdre (2.6) on consédère

$$B((\varphi,\psi,w,q),(\tilde{\varphi},\tilde{\phi},\tilde{w},\tilde{q})) = F(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi},\tilde{w},\tilde{q}) \tag{2.8}$$

où $B : [H^1_*(0,1) \times \tilde{H}^1_*(0,1) \times \tilde{H}^1_*(0,1) \times L^2(0,1)]^2 \to \mathbb{R}$ est un forme bilinéaire donné par :

$$\begin{aligned} B((\varphi,\psi,w,q),(\tilde{\varphi},\tilde{\phi},\tilde{w},\tilde{q})) &= k\int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{w})dx + (\beta+\tau)\int_0^1 q\tilde{q}dx \\ &+ b\int_0^1 \psi_x\tilde{\psi}_x dx + \rho_2\int_0^1 \psi\tilde{\psi}dx - \gamma(\beta+\tau)\int_0^1 q\tilde{\psi}dx \\ &+ \rho_1\int_0^1 \varphi\tilde{\varphi}dx + \gamma(\beta+\tau)\int_0^1 \psi\tilde{q}dx + k_0\int_0^1 (w_x - l\varphi)(\tilde{w}_x - l\tilde{\varphi})dx \\ &+ \rho_3(\beta+\tau)^2\int_0^1 (\int_0^x q(y)dy\int_0^x \tilde{q}(y)dy)dx + \rho_1\int_0^x w\tilde{w}dx. \end{aligned}$$

La preuve On multiple les équations de system (2.6) respectivement par $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{w}$ et

$(\beta+\tau)\int_0^1 \int_0^x \tilde{q}(y)dy$ puis en sommant les termes, on trouve la formulation variationnelle suivante

$B((\varphi,\psi,w,q),(\tilde{\varphi},\tilde{\phi},\tilde{w},\tilde{q})) = \tilde{\varphi}(-k(\varphi_x+\psi+lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) + \rho_1\varphi)$
$+\tilde{\psi}(-b\psi_{xx}+k(\varphi_x+\psi+lw)+\rho_2\psi-\gamma(\beta+\tau)q)+\tilde{w}(-k_0(w_x-l\varphi)_x+kl(\varphi_x+\psi+lw)+\rho_1\omega)$
$+ (\beta+\tau)\displaystyle\int_0^1\int_0^x \tilde{q}(y)dy(-q_x+\rho_3(\beta+\tau)\int_0^x q(y)dy - \gamma\psi_x)$.

Par la formule d'intégration par parties on obtient

$$\begin{aligned}
B((\varphi,\psi,w,q),(\tilde{\varphi},\tilde{\phi},\tilde{w},\tilde{q})) = \; & -k[\tilde{\varphi}(\varphi_x+\psi+lw)]_0^1 + k\int_0^1 \tilde{\varphi}_x(\varphi_x+\psi+lw)dx - k_0 l[\tilde{\varphi}w]_0^1 \\
& +k_0 l\int_0^1 \tilde{\varphi}_x w dx + k_0 l^2\int_0^1 \tilde{\varphi}\varphi dx - b[\tilde{\psi}\psi_x]_0^1 \\
& +b\int_0^1 \tilde{\psi}_x\psi_x dx + k\int_0^1 \tilde{\psi}(\varphi_x+\psi+lw)dx \\
& -k_0[\tilde{w}(w_x-l\varphi)]_0^1 + k_0\int_0^1 \tilde{w}_x(w_x-l\varphi)dx \\
& +lk\int_0^1 \tilde{w}(\varphi_x+\psi+lw)dx \\
& -(\beta+\tau)[\tilde{q}q]_0^1 + (\beta+\tau)\int_0^1 q\int_0^x \tilde{q}(y)dydx \\
& -\gamma(\beta+\tau)[\psi\tilde{q}]_0^1 + \gamma(\beta+\tau)\int_0^1 \tilde{q}\psi dx + \rho_1\int_0^1 \tilde{\varphi}\varphi dx \\
& +\rho_2\int_0^1 \tilde{\psi}\psi dx + \gamma(\beta+\tau)\int_0^1 \tilde{\psi}q dx \\
& +\rho_1\int_0^x \tilde{w}w dx + \rho_3(\beta+\tau)\int_0^1\int_0^x q(y)\tilde{q}(y)dydx.
\end{aligned}$$

d'aprés les conditions au bord on a :

$-k[\tilde{\varphi}(\varphi_x+\psi+lw)]_0^1 = 0, -k_0 l[\tilde{\varphi}w]_0^1 = 0, -b[\tilde{\psi}\psi_x]_0^1 = 0$

$, -k_0[\tilde{w}(w_x-l\varphi)]_0^1 = 0, -(\beta+\tau)[\tilde{q}q]_0^1 = 0, -\gamma(\beta+\tau)[\psi\tilde{q}]_0^1 = 0$

Donc on trouve B.

Et $F : [H_*^1(0,1)\times\tilde{H}_*^1(0,1)\times\tilde{H}_*^1(0,1)\times L^2(0,1)]^2 \to \mathbb{R}$ est un application linéaire définie par

$F(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w},\tilde{q}) = \int_0^1 h_1\tilde{\varphi}dx + \int_0^1 h_2\tilde{\psi}dx + \int_0^1 h_3\tilde{w}dx + \int_0^1 h_4\int_0^x \tilde{q}(y)dydx.$

Maintenant, pour $V = \tilde{H}^1_*(0,1) \times \tilde{H}^1_*(0,1) \times \tilde{H}^1_*(0,1) \times L^2(0,1)$ muni de la norme :

$$\| (\varphi, \psi, w, q) \|_V^2 = \| (\varphi_x + \psi + lw) \|_2^2 + \| (w_x - l\varphi) \|_2^2 + \| \psi_x \|_2^2 + \| q \|_2^2$$

. et utilisant l'inégalité suivante :

$$\int_0^1 (\varphi_x^2 + \psi_x^2 + w_x^2)dx \leq c \int_0^1 ((\varphi_x + \psi + lw)^2 + (w_x - l\varphi)^2 + \psi_x^2)dx. \tag{2.9}$$

Pour l assez petit, B et F sont bonrés, de plus par la définition de B on a :

$$\begin{aligned}
B((\varphi,\psi,w,q),(\varphi,\phi,w,q)) = \;& k\int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx + (\beta+\tau)\int_0^1 q^2 dx + b\int_0^2 \psi_x^2 dx \\
& + \rho_2 \int_0^1 \psi^2 dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi^2 dx \;\; + k_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx \\
& + \rho_3(\beta+\tau)^2 \int_0^1 (\int_0^x (q(y)dy)^2) dx + \rho_1 \int_0^1 w^2 dx \\
& \geq k\int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx + k_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx \\
& + \rho_3(\beta+\tau)^2 \int_0^1 (\int_0^x (q(y)dy)^2) dx \\
& + (\beta+\tau)\int_0^1 q^2 dx + b\int_0^2 \psi_x^2 dx \\
& \geq k \| \varphi_x + \psi + lw \|_2^2 + k_0 \| w_x - l\varphi \|_2^2 + b \| \psi_x \|_2^2 + c \| q \|_2^2 \\
& \geq min(k, k_0, b, c) \| (\varphi, \psi, w, q) \|_V^2 \\
& \geq c \| (\varphi, \psi, w, q) \|_V^2
\end{aligned}$$

D'où B est coercive.

Par conséquent, d'aprés le théorème de $Lax - Miligram$, la formulation variationelle admet une solution unique tel que

$$\varphi \in H^1_*(0,1),\ \psi \in \tilde{H}^1_*(0,1),\ w \in \tilde{H}^1_*(0,1),\ q \in L^2(0,1).$$

Par substitution φ, ψ, w et q respectivement dans $(2.4)_1$, $(2.4)_3$, $(2.4)_5$ et $(2.4)_8$, on obtient

$$u \in H^1_*(0,1),\ v \in \tilde{H}^1_*(0,1),\ \omega \in \tilde{H}^1_*(0,1),\ \theta \in H^1_*(0,1).$$

D'autre part, si $(\tilde{\psi}, \tilde{w}, \tilde{q}) \equiv (0,0,0) \in \tilde{H}^1_*(0,1)$, $w \in \tilde{H}^1_*(0,1)$, $q \in L^2(0,1)$, (2.8) réduit

$$k\int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)\tilde{\varphi}_x dx + k_0 l \int_0^1 (w_x - l\varphi)\tilde{\varphi}dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi\tilde{\varphi}dx = \int_0^1 h_1\tilde{\varphi}dx. \quad (2.10)$$

Alors, on a

$$\int_0^1 (-k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) + \rho_1\varphi - h_1)\tilde{\varphi}dx = 0$$

Ce qui implique que pour tout $\tilde{\varphi} \in H^1_*(0,1)$

$$-k\varphi_{xx} = k\psi_x + l(k+k_0)w_x - (k_0 l^2 + \rho_1)\varphi + h_1 \in L^2(0,1). \quad (2.11)$$

Par conséquent, d'aprés la théorie de la régularité des équations elleptique linéaire, on trouve

$$\varphi \in H^2_*(0,1)\ .$$

Par ailleurs, (2.10) est également vrai pour tout $\phi \in C^1([0,1]), \phi(0) = 0 \subset H^1_*(0,1)$. Ainsi, pour tout $\phi \in C^1([0,1]), \phi(0) = 0$, on a

$$k\int_0^1 \varphi_x\phi_x dx - \int_0^1 (k\psi_x + l(k+k_0)w_x - (k_0 l + \rho_1)\varphi + h_1)\phi dx = 0.$$

Donc, en utilisant l'intégration par parties, on trouve

$$k\int_0^1 \varphi_x\phi_x dx - \int_0^1 -k\varphi_{xx}\phi dx = 0$$

$$k[\varphi_x\phi]_0^1 - k\int_0^1 \varphi_{xx}\phi + k\int_0^1 \varphi_{xx}\phi dx = 0$$

D'aprés les conditions au bord

$$k[\varphi_x\phi]_0^1 = 0$$

$$\varphi_x(1)\phi(1) - \varphi_x(0)\phi(0) = 0$$

on obtient

$$\varphi_x(1)\phi(1) = 0, \forall \phi \in C^1([0,1]), \phi(0) = 0.$$

On déduit que

$$\varphi_x(1) = 0.$$

De même, nous obtenons

$$\begin{cases} -b\psi_{xx} = -k\varphi_x - (k+\rho_2)\psi - lkw - \gamma(\beta+\tau)\int_0^1 q\tilde{\varphi}dx + h_2 \in L^2(0,1). \\ -kw_{xx} = -l(k+k_0)\varphi_x - lk\psi + (\rho_1 + l^2k_0)w + h_3 \in L^2(0,1). \\ -q_x = \gamma\psi_x - (\beta+\tau)\rho_3\int_0^x q(y)dy + h_4 \in L^2(0,1). \end{cases}$$

Donc nous avons

$$\psi, w \in \tilde{H}_*^2(0,1)\ ,\ q \in \tilde{H}_*^2(0,1)\ ,\ w_x(0) = \psi_x(0) = 0.$$

Enfin, l'application de la théorie de la régularité des équations linéaires elliptiques garantit l'existance d'un unique $\phi \in D(\mathcal{A})$ tel que (2.3) est satisfaite .

Par conséquent, en utilisant les lemmes (2.1) et (2.2), nous concluons que l'opérateure $\mathcal{A}$ est maximale monotone. Ainsi, par le théoreme de Lumer-Philips nous avons le résultat suivant

Théorème 2.3 Soit $\phi_0 \in \mathcal{H}$, alors il existe une solution faible unique $\phi \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$ du problème (1,4)-(1,5). De plus, si $\phi_0 \in D(\mathcal{A})$, $\phi \in C(\mathbb{R}^2, D(\mathcal{A})) \cap C(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$.

Chapitre 3

Stabilité exponentielle

Dans cette section, nous montrons la stabilité exponentielle de l'énergie de la solution du système (4), (5) en utilisant la technique des multiplicateurs. A cet effet, nous avons besoin du lemmes suivante :

Lemme 3.1 Soit $\phi_0 \in \mathcal{H}$. Alors la fonctionnelle d'énergie définie par :

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 [\rho_1\varphi_t^1 + \rho_2\psi_t^1 + b\psi_x^2 2 + \rho_1 w_t^1 + \rho_3\theta^2 + \tau q^2 + k(\varphi_x + \psi + lw)^2 + k_0(w_x - l\varphi)^2]dx \tag{3.1}$$

satisfait

$$E'(t) = -\beta\int_0^1 q^2 dx \geq 0.\forall t \geq 0 \tag{3.2}$$

Démonstration En multipliant les équantions $(4)_1, (4)_2, (4)_3, (4)_4$ et $(4)_5$ par $\varphi_t, \psi_t, w_t, \theta$ et q respectivement

en multipliant l'équation $(4)_1$ par φ_t et en intégrant sur (0,1) on trouve

$$\rho_1\int_0^1 \varphi_t\varphi_{tt}dx - k\int_0^1 \varphi_t(\varphi_x + \psi + lw)_x dx - k_0 l\int_0^1 \varphi_t(w_x - l\varphi)dx = 0.$$

en intégrant par parties le terme $\int_0^1 \varphi_t(\varphi_x + \psi + lw)_x dx$, on obtient

$$\rho_1\int_0^1 \varphi_t\varphi_{tt}dx - k[\varphi_t(\varphi_x + \psi + lw)]_0^1 + k\varphi_{xt}(\varphi_x + \psi + lw)dx - k_0 l\int_0^1 \varphi_t(w_x - l\varphi)dx = 0.$$

Les conditions au bord permettent d'écrire la dernière égalité sous la forme

$$\frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \varphi_t^2 dx + k\int_0^1 \varphi_{xt}(\varphi_x+\psi+lw)dx - k_0 l\int_0^1 \varphi_t(w_x-l\varphi)dx = 0 \tag{3.3}$$

Par ailleurs, en multipliant l'équation $(4)_2$ par ψ_t et intégrant sur (0,1), on trouve

$$\rho_2\int_0^1 \psi_t\psi_{tt}dx - b\int_0^1 \psi_t\psi_{xx}dx + k\int_0 \psi_t(\varphi_x+\psi+lw)dx + \gamma\int_0^1 \psi_t\theta_x dx = 0.$$

et grâce à la formule d'intégration par parties avec les conditions au bord, on déduit que

$$\frac{\rho_2}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_t^2 dx + b\int_0^1 \psi_{xt}\psi_x dx + k\int_0^1 \psi_t(\varphi_x+\psi+lw)dx + \gamma\int_0^1 \psi_t\theta_x dx = 0.$$

autrement dit, on trouve la forme :

$$\frac{\rho_2}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_x^2 dx + k\int_0^1 \psi_t(\varphi_x+\psi+lw)dx + \gamma\int_0^1 \psi_t\theta_x dx = 0. \tag{3.4}$$

en multipliant l'équation $(4)_3$ par w_t et en intégrant sur (0,1) on trouve

$$\rho_1 \textstyle\int_0^1 w_t w_{tt}dx - k_0\displaystyle\int_0^1 w_t(w_x-l\varphi)_x dx + kl\int_0^1 w_t(\varphi_x+\psi+lw)dx = 0.$$

En intégre par parties le terme $\displaystyle\int_0^1 w_t(w_x-l\varphi)_x dx$, et utilisant les conditions au bord on obtient la forme

$$\frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 w_t^2 dx + k_0\int_0^1 w_{xt}(w_x-l\varphi)dx + kl\int_0^1 w_t(\varphi_x+\psi+lw)dx = 0 \tag{3.5}$$

De même, en multipliant l'équation $(4)_4$ par θ et en intégrant sur (0.1), on obtient

$$\rho_3\int_0^1 \theta\theta_t dx + \int_0^1 \theta q_x dx + \gamma\int_0^1 \theta\psi_{xt}dx = 0.$$

La formule d'intégration par parties et les conditions au bord impliquent la forme

$$\frac{\rho_3}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \theta^2 dx + \int_0^1 \theta q_x dx - \gamma\int_0^1 \theta_x\psi_t dx = 0. \tag{3.6}$$

En multipliant l'équation $(4)_5$ par q et intégrant sur (0,1), on trouve

$$\tau\int_0^1 q_t q dx+\beta\int_0^1 q^2 dx+\int_0^1 \theta_x q dx=0.$$

en utilisant l'intégration par parties et les conditions au bord on obtient la forme

$$\frac{\tau}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 q^2 dx-\int_0^1 q_x\theta dx=0. \tag{3.7}$$

et donc en additionnant les formes (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) et (3.7) on arrive à

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 [\rho_1\varphi_t^2+\rho_2\psi_t^2+b\psi_x^2+\rho_1 w_t^2+\rho_3\theta^2+\tau q^2]dx\\ &+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 [k(\varphi_x+\psi+lw)^2+k_0(w_x+l\varphi)^2]dx\\ &=-\beta\int_0^1 q^2 dx.\end{aligned}$$

D'où (3.2).

Lemme 3.2 Soit $(\varphi,\psi,\theta,w,q)$ une solution de (4)-(5) . Alors la fonctionnelle

$$F_1(t)=\tau\rho_3\int_0^1\theta\int_0^x q(y)dydx$$

vérifier, pour tout $\varepsilon_1>0$

$$F_1'(t)\leq-\frac{\rho_3}{2}\int_0^1\theta^2dx+\varepsilon_1\int_0^1\psi_t^2dx+c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\int_0^1 q^2dx. \tag{3.8}$$

Pour la preuve en prenant la dérivée de F_1, en utilisant le quatrième et cinquième équations de (4), puis en intégrant sur (0.1) on trouve

$$F_1'(t)=-\rho_3\int_0^1\theta^2dx+\tau\int_0^1 q^2dx+\tau\gamma\int_0^1 q\psi_t dx-\beta\rho_3\int_0^1\theta\int_0^x q(y)dydx.$$

Démonstration En intégrant l'équation $(4)_5$ sur $(0,x)\subset(0,1)$, puis en intégrant sur (0,1) aprés la musltiplication par θ, on trouve

$$\tau\int_0^1\theta\int_0^x q_t(y)dydx+\beta\int_0^1\theta\int_0^x q(y)dydx+\int_0^1\theta\int_0^x\theta_x dydx=0.$$

alors

$$\tau\int_0^1\theta\int_0^x q_t(y)dydx+\beta\int_0^1\theta\int_0^x q(y)dydx+\int_0^1\theta^2dx=0.$$

on déduit que

$$\tau\rho_3\frac{d}{dt}\int_0^1\theta\int_0^x q(y)dydx=\tau\rho_3\int_0^1\theta_t\int_0^x q(y)dydx+\tau\rho_3\int_0^1\theta\int_0^x q_t(y)dydx.$$

d'ou

$$\tau\rho_3\frac{d}{dt}\int_0^1\theta\int_0^x q(y)dydx=\tau\rho_3\int_0^1\theta_t\int_0^x q(y)dydx-\rho_3\beta\int_0^1\theta\int_0^x q(y)dydx-\rho_3\int_0^1\theta^2dx. \tag{3.9}$$

d'aprés $(4)_3$ on a :

$$\theta_t=-\frac{1}{\rho_3}q_x-\frac{\gamma}{\rho_3}\psi_{tx}$$

En remplaçant θ_t dans (3.9), on trouve

$$\begin{aligned}\tau\rho_3\frac{d}{dt}\int_0^1\theta\int_0^x q(y)dydx= \quad & \tau\rho_3\int_0^1(-\frac{1}{\rho_3}q_x-\frac{\gamma}{\rho_3}\psi_{tx})\int_0^x q(y)dydx\\ & -\rho_3\beta\int_0^1\theta\int_0^x q(y)dydx-\rho_3\int_0^1\theta^2dx.\end{aligned}$$

d'ou

$$F_1'(t)=$$
$$-\tau\int_0^1 q_x\int_0^x q(y)dydx-\tau\gamma\int_0^1\psi_{tx}\int_0^x q(y)dydx-\rho_3\beta\int_0^1\theta\int_0^x q(y)dydx-\rho_3\int_0^1\theta^2dx.$$

En utilisant l'intégration par parties et les conditions au bord, on obtient

$$F_1'(t)=-\rho_3\int_0^1\theta^2dx+\tau\int_0^1 q^2dx+\tau\gamma\int_0^1 q\psi_tdx-\beta\rho_3\int_0^1\theta\int_0^x q(y)dydx.$$

En appliquant les inégalités de Young et de Cauchy-Schwarz avec $\varepsilon_1 > 0$, on obtient

$$F_1'(t) \leq -\frac{\rho_3}{2}\int_0^1 \theta^2 dx + \varepsilon_1 \int_0^1 \psi_t^2 dx + c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\int_0^1 q^2 dx.$$

Lemme 3.3 Soit $(\varphi, \psi, w, \theta, q)$ une solution du problème (4)-(5). Alors la fonctionnelle

$$F_2(t) = -\frac{\rho_2\rho_3}{\gamma}\int_0^1 \theta \int_0^x \psi_t(y)dydx$$

vérifie, pour tout $\varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$,

$$\begin{aligned} F_2'(t) &\leq -\frac{\rho_2}{2}\int_0^1 \psi_t^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx \\ &+\varepsilon_3 \int_0^1 \psi_x^2 dx + c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_2}+\frac{1}{\varepsilon_3}\right)\int_0^1 \theta^2 dx + c\int_0^1 q^2 dx. \end{aligned} \tag{3.10}$$

pour la preuve en utilisant la deuxième et le quatrième équation en (4) et l'intégration par parties , nous obtenons

$$\begin{aligned} F_2'(t) = &-\rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx - \frac{\rho_2}{\gamma}\int_0^1 q\psi_t dx + \rho_3 \int_0^1 \theta^2 dx - \frac{b\rho_3}{\gamma}\int_0^1 \theta\psi_x dx \\ &+\frac{k\rho_3}{\gamma}\int_0^1 \theta \int_0^x (\varphi_x + \psi + lw)dydx \end{aligned}$$

Démonstration En multipliant l'équation $(4)_4$ par $\displaystyle\int_0^x \psi_t(y)dy$ et en intégrant sur (0,1), on voit que

$$\rho_3 \int_0^1 \theta_t \int_0^x \psi_t(y)dydx + \int_0^1 q_x \int_0^x \psi_t(y)dydx + \gamma \int_0^1 \psi_{tx} \int_0^x \psi_t(y)dydx = 0.$$

et grâce à la formule d 'intégration par parties avec les conditions au bord, on déduit que

$$\rho_3 \int_0^1 \theta_t \int_0^x \psi_t(y)dydx - \int_0^1 q\psi_t dx - \gamma \int_0^1 \psi_t^2 dx = 0.$$

D'aprés l'égalité précédente, on a

$$\rho_3\frac{d}{dt}\int_0^1\theta\int_0^x\psi_t(y)dydx \;= \rho_3\int_0^1\theta_t\int_0^x\psi_t(y)dydx+\rho_3\int_0^1\theta\int_0^x\psi_{tt}(y)dydx$$
$$=\int_0^1 q\psi_t dx+\gamma\int_0^1\psi_t^2dx+\rho_3\int_0^1\theta\int_0^x\psi_{tt}(y)dydx$$

D'aprés $(1.4)_2$ on a

$$\psi_{tt}=\frac{1}{\rho_2}[b\psi_{xx}-k(\varphi_x+\psi+lw)-\gamma\theta_x]$$

d'ou

$$\begin{aligned}-\frac{\rho_2\rho_3}{\gamma}\frac{d}{dt}\int_0^1\theta\int_0^x\psi_t(y)dydx = \;& -\frac{\rho_2}{\gamma}\int_0^1 q\psi_t dx-\rho_2\int_0^1\psi_t^2dx\\ & -\frac{\rho_3}{\gamma}\int_0^1\theta\int_0^x[b\psi_{xx}-k(\varphi_x+\psi+lw)-\gamma\theta_x](y)dydx\\ & =-\frac{\rho_2}{\gamma}\int_0^1 q\psi_t dx-\rho_2\int_0^1\psi_t^2dx\\ & -\frac{b\rho_3}{\gamma}\int_0^1\theta\psi_x dx\\ & +\frac{k\rho_3}{\gamma}\int_0^1\theta\int_0^x(\varphi_x+\psi+lw)dydx+\rho_3\int_0^1\theta^2dx.\end{aligned}$$

Par l'intégration par parties et les condition au bord

$$\begin{aligned}F_2'(t)= \;& -\rho_2\int_0^1\psi_t^2dx-\frac{\rho_2}{\gamma}\int_0^1 q\psi_t dx+\rho_3\int_0^1\theta^2dx-\frac{b\rho_3}{\gamma}\int_0^1\theta\psi_x dx\\ & +\frac{k\rho_3}{\gamma}\int_0^1\theta\int_0^x(\varphi_x+\psi+lw)dydx\end{aligned}$$

En appliquant alors linégalité de Young et linégalité de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned}F_2'(t) \;& \le -\frac{\rho_2}{2}\int_0^1\psi_t^2dx+\varepsilon_2\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)^2dx\\ & +\varepsilon_3\int_0^1\psi_x^2dx+c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_2}+\frac{1}{\varepsilon_3}\right)\int_0^1\theta^2dx+c\int_0^1 q^2dx.\end{aligned}$$

Lemme 3.4 Soit $(\varphi,\psi,w,\theta,q)$ une solution de problème (4)-(5). Alors la fonctionnelle

$$F_3'(t)=-\rho_1\int_0^1(\varphi\varphi_t+ww_t)dx$$

satisfait,

$$F_3'(t) \leq -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 w_t^2 dx + c \int_0^1 \psi_x^2 dx + k_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx + c \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx. \tag{3.11}$$

En utilisant (4)-(5), on obtient

$$F_3'(t) = -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 w_t^2 dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx - k \int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi + lw) dx + k_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx$$

Démonstration : On a

$$-\rho_1 \frac{d}{dt} \int_0^1 (\varphi\varphi_t + ww_t) dx = -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 w_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 ((\varphi\varphi_{tt} - \rho_1 \int_0^1 ww_{tt}) dx. \tag{3.12}$$

En multipliant $(4)_1$ par φ, et on intégrant sur (0,1), on trouve

$$\rho_1 \int_0^1 \varphi\varphi_{tt} dx - k \int_0^1 \varphi(\varphi_x + \psi + lw)_x dx - lk_0 \int_0^1 \varphi(w_x - l\varphi) = 0$$

d'où

$$\rho_1 \int_0^1 \varphi\varphi_{tt} dx = k \int_0^1 \varphi(\varphi_x + \psi + lw)_x dx + lk_0 \int_0^1 \varphi(w_x - l\varphi) dx \tag{3.13}$$

puis, en multipliant $(4)_3$ par w, et on intégrant sur (0,1), on trouve

$$\rho_1 \int_0^1 ww_{tt} dx - k_0 \int_0^1 w(w_x - l\varphi)_x + lk \int_0^1 w(\varphi_x + \psi + lw) = 0$$

d'où

$$\rho_1 \int_0^1 ww_{tt} dx = k_0 \int_0^1 w(w_x - l\varphi)_x - lk \int_0^1 w(\varphi_x + \psi + lw) dx \tag{3.14}$$

En remplçant (3.13) et (3.14) dans (3.12), on trouve :

$$
\begin{aligned}
-\rho_1 \frac{d}{dt}\int_0^1 (\varphi\varphi_t + ww_t)dx = \quad & -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 w_t^2 dx - k\int_0^1 \varphi(\varphi_x + \psi + lw)_x dx \\
& -lk_0 \int_0^1 \varphi(w_x - l\varphi)dx - k_0 \int_0^1 w(w_x - l\varphi)_x dx \\
& +lk \int_0^1 w(\varphi_x + \psi + lw)dx
\end{aligned}
$$

d'où, à l'aide de la formule d'intégration par parties avec les conditions au bord on obtient

$$
\begin{aligned}
-\rho_1 \frac{d}{dt}\int_0^1 (\varphi\varphi_t + ww_t)dx = \quad & -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 w_t^2 dx - k\int_0^1 \varphi_x(\varphi_x + \psi + lw) dx \\
& -lk_0 \int_0^1 \varphi(w_x - l\varphi)dx - k_0 \int_0^1 w_x(w_x - l\varphi) dx \\
& +lk \int_0^1 w(\varphi_x + \psi + lw)dx
\end{aligned}
$$

On ajout le terme $-k\displaystyle\int \psi(\varphi_x + \psi + lw)dx + k\int \psi(\varphi_x + \psi + lw)dx$, on trouve

$$
\begin{aligned}
-\rho_1 \frac{d}{dt}\int_0^1 (\varphi\varphi_t + ww_t)dx = \quad & -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 w_t^2 dx - k\int_0^1 \varphi_x(\varphi_x + \psi + lw) dx \\
& -lk_0 \int_0^1 \varphi(w_x - l\varphi)dx - k_0 \int_0^1 w_x(w_x - l\varphi) \\
& +lk \int_0^1 w(\varphi_x + \psi + lw)dx \\
& -k\int \psi(\varphi_x + \psi + lw)dx - k\int \psi(\varphi_x + \psi + lw)dx.
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
F_3'(t) &= -\rho_1 \tfrac{d}{dt}\int_0^1 (\varphi\varphi_t + ww_t)dx \\
&= -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 w_t^2 dx + k\int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx \\
& -k\int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi + lw)dx + k_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx.
\end{aligned}
$$

En utilisant les inégalités de Young et de Poincaré, on trouve

$$F_3'(t) \leq -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 w_t^2 dx + c \int_0^1 \psi_x^2 dx + k_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx + c \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx.$$

Lemme 3.5 Soit $(\varphi, \psi, w, \theta, q)$ une solution de problème (4)-(5). Alors la fonctionnelle

$$F_4(t) = \rho_2 \int_0^1 \psi\psi_t dx$$

vérifie

$$F_4'(t) \leq -\frac{b}{2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{k^2}{b} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx + c \int_0^1 \theta^2 dx. \tag{3.15}$$

Démonstration On a :

$$\rho_2 \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi\psi_t dx = \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi\psi_{tt} dx. \tag{3.16}$$

En multipliant l'équation $(4)_2$ par ψ, on trouve

$$\rho_2 \int_0^1 \psi\psi_{tt} dx = b \int_0^1 \psi\psi_{xx} dx - k \int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi + lw) dx - \gamma \int_0^1 \psi\theta_x dx.$$

D'aprés l'inégalité précedent

$$\rho_2 \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi\psi_t dx = \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + b \int_0^1 \psi\psi_{xx} dx - k \int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi + lw) dx - \gamma \int_0^1 \psi\theta_x dx.$$

d'où, à l'aide de la formule d'intégration par parties avec les conditions au bord on obtient

$$\begin{aligned} F_4'(t) &= \rho_2 \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi\psi_t dx \\ &= \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx - b \int_0^1 \psi_x^2 dx - k \int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi + lw) dx - \gamma \int_0^1 \psi_x \theta dx. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Young et Poincaré, on obtient

$$F_4'(t) \leq -\frac{b}{2}\int_0^1 \psi_x^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{k^2}{b}\int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx + c\int_0^1 \theta^2 dx.$$

Lemme 3.6 Soit $(\varphi, \psi, w, \theta, q)$ une solution de problème (4)-(5). Alors la fonctionnelle

$$F_5(t) = -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t (w_x - l\varphi) dx - \rho_1 \int_0^1 w_t(\varphi_x + \psi + lw) dx$$

vérifie

$$F_5'(t) \leq -lk_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx - \frac{l\rho_1}{2}\int_0^1 w_t dx + l\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + lk \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx + c\int_0^1 \psi_t^2 dx. \tag{3.17}$$

Démonstration On a

$$\rho_1 \frac{d}{dt}(\int_0^1 \varphi_t(w_x - l\varphi)dx - \rho_1 \int_0^1 w_t(\varphi_x + \psi + lw))dx = -\rho_1 \int_0^1 \varphi_{tt}(w_x - l\varphi)dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t (w_x - l\varphi)_t dx$$
$$-\rho_1 \int_0^1 w_{tt}(\varphi_x + \psi + lw)dx - \rho_1 \int_0^1 w_t(\varphi_x + \psi + lw)_t dx \tag{3.18}$$

. D'apres $(4)_1, (4)_3$, on a

$$-\rho_1 \varphi_{tt} = -k(\varphi_x + \psi + lw)_x - lk_0(w_x - l\varphi).$$
$$-\rho_1 w_{tt} = -k_0(w_x - l\varphi)_x + lk(\varphi_x + \psi + lw).$$

Donc, on trouve

$-\rho_1 \int_0^1 \varphi_{tt}(w_x - l\varphi)dx = \int_0^1 (-k(\varphi_x + \psi + lw)_x - lk_0(w_x - l\varphi))(w_x - l\varphi)dx$.
$-\rho_1 \int_0^1 w_{tt}(\varphi_x + \psi + lw)dx = \int_0^1 (-k_0(w_x - l\varphi)_x + lk(\varphi_x + \psi + lw))(\varphi_x + \psi + lw)dx.$

En utilisant l'intégration par parties et les conditions au bord on obtient

$$\rho_1 \int_0^1 \varphi_{tt}(w_x - l\varphi)dx = k\int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)(w_x - l\varphi)_x dx - lk_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx. \tag{3.19}$$

$$\rho_1 \int_0^1 w_{tt}(\varphi_x + \psi + lw)dx = -k_0 \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)(w_x - l\varphi)_x dx + lk \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx. \tag{3.20}$$

En remplacant (3.19) et (3.20) dans (3.18) on obtient

$$
\begin{aligned}
\rho_1\frac{d}{dt}(\int_0^1 \varphi_t(w_x-l\varphi)dx-\rho_1\int_0^1 w_t(\varphi_x+\psi+lw))dx = \; & k\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)(w_x-l\varphi)_x dx \\
& -lk_0\int_0^1(w_x-l\varphi)^2dx-\rho_1\int_0^1\varphi_t(w_x-l\varphi)_t dx \\
& -k_0\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)(w_x-l\varphi)_x dx \\
& +lk\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)^2dx \\
& -\rho_1\int_0^1 w_t(\varphi_x+\psi+lw)_t dx.
\end{aligned}
$$

.

D'aprés l'intégration par partieset les conditions au bord, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\rho_1\frac{d}{dt}(\int_0^1 \varphi_t(w_x-l\varphi)dx-\rho_1\int_0^1 w_t(\varphi_x+\psi+lw))dx \; & = -lk_0\int_0^1(w_x-l\varphi)^2dx-l\rho_1\int_0^1\varphi_t^2dx \\
& lk\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)^2dx-\rho_1\int_0^1\psi_t w_t dx.
\end{aligned}
$$

En appliquant l'inégalité de Young, on trouve

$$
F_5'(t)\leq -lk_0\int_0^1(w_x-l\varphi)^2dx-\frac{l\rho_1}{2}\int_0^1 w_t dx+l\rho_1\int_0^1\varphi_t^2dx+lk\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)^2dx+c\int_0^1\psi_t^2dx.
$$

Lemme 3.7 Soit $(\varphi,\psi,w,\theta,q)$ une solution de problème (1.4)-(1.5). Alors sous la condition $k=k_0$, la fonctionnelle

$$
F_6'(t)=-\rho_1\int_0^1(w_x-l\varphi)\int_0^x w_t(y)dydx-\rho_1\int_0^1\varphi_t\int_0^x(\varphi_x+\psi+lw)(y)dydx.
$$

vérifie

$$
F_6'(t)\leq\frac{-\rho_1}{2}\int_0^1\varphi_t^2dx-k_0\int_0^1(w_x-l\varphi)^2dx+\rho_1\int_0^1 w_t^2dx+k\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)^2dx+\frac{\rho_1}{2}\int_0^1\psi_t^2dx. \tag{3.21}
$$

Démonstration On a

$$
\begin{aligned}
&\rho_1 \frac{d}{dt} \int_0^1 (w_x - l\varphi) \int_0^x w_t(y)dydx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \int_0^x (\varphi_x + \psi + lw)(y)dydx = \\
&-\rho_1 \int_0^1 (w_x - l\varphi)_t \int_0^x w_t(y)dydx - \rho_1 \int_0^1 (w_x - l\varphi) \int_0^x w_{tt}(y)dydx \\
&-\rho_1 \int_0^1 \varphi_{tt} \int_0^x (\varphi_x + \psi + lw)(y)dydx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \int_0^x (\varphi_x + \psi + lw)_t(y)dydx.
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

D'aprés $(4)_1$ et $(4)_3$, on a

$$
\begin{aligned}
\rho_1 \varphi_{tt} &= k(\varphi_x + \psi + lw)_x + lk_0(w_x - l\varphi) \\
\rho_1 w_{tt} &= k_0(w_x - l\varphi)_x + lk(\varphi_x + \psi + lw)
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

En remplacant les formes de (3.23) dans (3.22), on obtient

$$
\begin{aligned}
&-\rho_1 \frac{d}{dt} \int_0^1 (w_x - l\varphi) \int_0^x w_t(y)dydx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \int_0^x (\varphi_x + \psi + lw)(y)dydx = \\
&-\rho_1 \int_0^1 (w_x - l\varphi)_t \int_0^x w_t(y)dydx - \int_0^1 (w_x - l\varphi) \int_0^x (k_0(w_x - l\varphi)_x + lk(\varphi_x + \psi + lw))dydx \\
&- \int_0^1 (k(\varphi_x + \psi + lw)_x + lk_0(w_x - l\varphi)) \int_0^x (\varphi_x + \psi + lw)(y)dydx \\
&-\rho_1 \int_0^1 \varphi_t \int_0^x (\varphi_x + \psi + lw)_t(y)dydx.
\end{aligned}
$$

.

à l'aide de la formule de l'intégration par parties et les conditions au bord, on obtient

$$
\begin{aligned}
&-\rho_1 \frac{d}{dt} \int_0^1 (w_x - l\varphi) \int_0^x w_t(y)dydx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \int_0^x (\varphi_x + \psi + lw)(y)dydx = \\
&-\rho_1 \int_0^1 w_{tx} \int_0^x w_t dydx + \rho_1 l \int_0^1 \varphi_t \int_0^x w_t dydx - k_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx \\
&-lk \int_0^1 (w_x - l\varphi) \int_0^x (\varphi_x + \psi + lw)dydx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx \\
&-lk_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi) \int_0^x (\varphi_x + \psi + lw)dydx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \int_0^x \varphi_{tx} dydx \\
&-\rho_1 \int_0^1 \varphi_t \int_0^x \psi_t dydx - \rho_1 l \int_0^1 \varphi_t \int_0^x w_t dydx.
\end{aligned}
$$

ceci implique que

$$\begin{aligned}
F_6'(t) = \ & \rho_1 \int_0^1 w_t^2 dx - k_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx \\
& + l(k-k_0) \int_0^1 (w_x - l\varphi) \int_0^x (\varphi_x + \psi + lw) dy dx \\
& + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \int_0^x \psi_t dy dx
\end{aligned} \tag{3.24}$$

En appliquant les inégalités de Young et de Cauchy-Schwarz avec $k = k_0$, on obtient

$$F_6'(t) \leq \frac{-\rho_1}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx - k_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx + \rho_1 \int_0^1 w_t^2 dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx + \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx.$$

Lemme 3.8 Soit $(\varphi, \psi, w, \theta, q)$ une solution de problème (4)-(5) et (6). Alors la fonctionnelle

$$\begin{aligned}
F_7(t) = \ & \rho_2 \int_0^1 \psi_t (\varphi_x + \psi + lw) dx + \frac{b\rho_1}{k} \int_0^1 \varphi_t \psi_x dx \\
& + \frac{b\rho_3}{\gamma} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^1 \theta \varphi_t dx - \frac{b}{\gamma} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^1 q (\varphi_x + \psi + lw) dx \\
& - \frac{bl^2 \rho_2}{k_0} \int_0^1 \psi_t \psi dx + \frac{bl\rho_2}{k_0} \int_0^1 w_t \psi dx.
\end{aligned}$$

vérifie, pour tout $\varepsilon_4, \varepsilon_5 > 0$

$$\begin{aligned}
F_7'(t) \leq \ & -\frac{k}{2} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^1 w_t^2 dx + \frac{2b^2 l^2}{k} \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
& + \varepsilon_5 \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4} \right) \int_0^1 \psi_t^2 dx + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4} \right) \int_0^1 q^2 dx \\
& + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_5} \right) \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{b}{\gamma \tau} \xi \int_0^1 \theta_x (\varphi_x + \psi + lw) dx.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Démonstration On a

$$
\begin{aligned}
F_7'(t) &= \rho_2 \int_0^1 \psi_{tt}(\varphi_x + \psi + lw)dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t(\varphi_x + \psi + lw)_t dx \\
&+ \frac{b\rho_1}{k} \int_0^1 \varphi_{tt}\psi_x dx - \frac{b\rho_1}{k} \int_0^1 \varphi_t \psi_{tx} dx + \frac{b\rho_3}{\gamma}\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right) \int_0^1 \theta_t \varphi_t dx \\
&+ \frac{b\rho_3}{\gamma}\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right) \int_0^1 \theta \varphi_{tt} dx - \frac{b}{\gamma}\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right) \int_0^1 q_t(\varphi_x + \psi + lw)dx \qquad (3.26) \\
&- \frac{b}{\gamma}\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right) \int_0^1 q(\varphi_x + \psi + lw)_t dx - \frac{bl^2\rho_2}{k_0} \int_0^1 \psi_{tt}\psi dx \\
&- \frac{bl^2\rho_2}{k_0} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{bl\rho_1}{k_0} \int_0^1 w_{tt}\psi dx + \frac{bl\rho_1}{k_0} \int_0^1 w_t \psi_t dx.
\end{aligned}
$$

Maintenant, en utilisant les équations (4)-(5), on obtient

$$
\begin{aligned}
\rho_1 \varphi_{tt} &= k(\varphi_x + \psi + lw)_x + lk_0(w_x - l\varphi). \\
\rho_2 \psi_{tt} &= b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + lw) - \gamma\theta_x. \\
\rho_1 w_{tt} &= k_0(w_x - l\varphi)_x - lk(\varphi_x + \psi + lw).
\end{aligned}
$$

En utilisant l'intégration par parties et les conditions au bord, on trouve

$$
\begin{aligned}
\rho_2 \int_0^1 \psi_{tt}(\varphi_x + \psi + lw)dx = \; & b \int_0^1 \psi_{xx}(\varphi_x + \psi + lw)dx - k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx \\
& -\gamma \int_0^1 \theta_x(\varphi_x + \psi + lw)dx.
\end{aligned} \qquad (3.27)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{b\rho_1}{k} \int_0^1 \varphi_{tt}\psi_x dx = \; & b \int_0^1 \psi_x(\varphi_x + \psi + lw)_x dx + \frac{blk_0}{k} \int_0^1 \psi_x(w_x - l\varphi)dx \\
= & -b \int_0^1 \psi_{xx}(\varphi_x + \psi + lw)dx + \frac{blk_0}{k} \int_0^1 \psi_x(w_x - l\varphi)dx
\end{aligned} \qquad (3.28)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{b\rho_3}{\gamma}\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right) \int_0^1 \theta\varphi_{tt} dx = \; & \frac{b\rho_3 k}{\gamma\rho_1}\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right) \int_0^1 \theta(\varphi_x + \psi + lw)_x dx \\
& + \frac{b\rho_3 lk_0}{\gamma\rho_1}\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right) \int_0^1 \theta(w_x - l\varphi)dx \\
= & -\frac{b\rho_3 k}{\gamma\rho_1}\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right) \int_0^1 \theta_x(\varphi_x + \psi + lw)dx \\
& + \frac{b\rho_3 lk_0}{\gamma\rho_1}\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right) \int_0^1 \theta(w_x - l\varphi)dx
\end{aligned} \qquad (3.29)
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{b}{\gamma}\left(\frac{\rho_1}{k}-\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 q_t(\varphi_x+\psi+lw)dx = &\ \frac{b\beta}{\gamma\tau}\left(\frac{\rho_1}{k}-\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 q(\varphi_x+\psi+lw)dx \\
&+\frac{b}{\gamma\tau}\left(\frac{\rho_1}{k}-\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 \theta_x(\varphi_x+\psi+lw)dx
\end{aligned} \tag{3.30}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{bl^2\rho_2}{k_0}\int_0^1 \psi_{tt}\psi dx = &\ \frac{2b^2l^2}{k_0}\int_0^1 \psi_{xx}^2 dx + bl^2\int_0^1 \psi(\varphi_x+\psi+lw)dx \\
&+\frac{bl^2\gamma}{k_0}\int_0^1 \psi\theta_x dx
\end{aligned} \tag{3.31}
$$

$$
\frac{bl\rho_1}{k_0}\int_0^1 w_{tt}\psi dx = \ -bl\int_0^1 \psi_x(w_x-l\varphi)dx - bl^2\int_0^1 \psi(\varphi_x+\psi+lw)dx \tag{3.32}
$$

En remplacant (3.27), (3.28), (3.29), (3.30), (3.31) et (3.32) dans (3.26), on obtient

$$
\begin{aligned}
F_7'(t) = &\ -k\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)^2dx - \gamma\int_0^1 \theta_x(\varphi_x+\psi+lw)dx + \rho_2\int_0^1 \psi_t\varphi_{xt}dx \\
&+\rho_2\int_0^1 \psi_t^2 dx + \rho_2 l\int_0^1 \psi_t w_t dx - \frac{b\rho_1}{k}\int_0^1 \psi_t\varphi_{xt}dx + \frac{b\rho_3}{\gamma}\left(\frac{\rho_1}{k}-\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 \theta_t\varphi_t dx \\
&-\frac{b\rho_3 k}{\gamma\rho_1}\left(\frac{\rho_1}{k}-\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 \theta_x(\varphi_x+\psi+lw)dx + \frac{b\rho_3 lk_0}{\gamma\rho_1}\left(\frac{\rho_1}{k}-\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 \theta(w_x-l\varphi)dx \\
&-\frac{b\beta}{\gamma\tau}\left(\frac{\rho_1}{k}-\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 q(\varphi_x+\psi+lw)dx - \frac{b}{\gamma}\left(\frac{\rho_1}{k}-\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 q\varphi_{xt}dx \\
&-\frac{b}{\gamma}\left(\frac{\rho_1}{k}-\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 q\psi_t dx - \frac{bl}{\gamma}\left(\frac{\rho_1}{k}-\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 qw_t dx - \frac{bl^2\rho_2}{k_0}\int_0^1 \psi_t^2 dx \\
&+\frac{2b^2l^2}{k_0}\int_0^1 \psi_x^2 + \frac{bl^2\gamma}{k_0}\int_0^1 \psi\theta_x dx + \frac{bl\rho_1}{k_0}\int_0^1 w_t\psi_t dx
\end{aligned}
.
$$

En appliquant l'inégalité de Young avec $k=k_0$, on obtient

$$
\begin{aligned}
F_7'(t) \leq &\ -\frac{k}{2}\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)^2dx + \varepsilon_4\int_0^1 w_t^2dx + \frac{2b^2l^2}{k}\int_0^1 \psi_x^2 dx \\
&+\varepsilon_5\int_0^1(w_x-l\varphi)^2dx + c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_4}\right)\int_0^1 \psi_t^2dx + c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_4}\right)\int_0^1 q^2dx \\
&+c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_5}\right)\int_0^1 \theta^2dx + \frac{b}{\gamma\tau}\xi\int_0^1 \theta_x(\varphi_x+\psi+lw)dx.
\end{aligned}
$$

Lemme 3.9 Soit $(\varphi,\psi,w,\theta,q=)$ une solution du (4)-(5), on suppose que $\xi=0$ et $k=k_0$. Alors pour l assez petit le problème (1.4), (1.5) et (1.6) est exponentiellement stable, c'est à dire, il existe deux constante strictement positives R et r telles que la solution du problème (4), (5) et (6) vérifier

$$E(t) \leq c_0 e^{-c_1 t}, \forall t \geq 0. \tag{3.33}$$

telle que c_0 et c_1 sont des constantes positives.

Démonstration Pour tout $N, N_i > 0$, on a

$$\mathcal{L}(t) = NE(t) + \sum_{i=1}^{7} N_i F_i(t). \tag{3.34}$$

En combinant (3.2), (3.8), (3.10), (3,11), (3.15), (3.17), (3.21) et (3.25), on obtient ainsi

$$N_3 = N_6 = 2l, N_4 = \frac{9bl^2}{k} N_7, N_5 = 2$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \leq \quad & -l\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - [l\rho_1 - \varepsilon_4 N_7] \int_0^1 w_t^2 dx - [2lk - \varepsilon_5 N_7] \int_0^1 (w_x - \varphi)^2 dx \\
& - \left[\frac{\rho_3}{2} N_1 - cN_2 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_3} \right) - cN_7 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_5} \right) \right] \int_0^1 \theta^2 dx \\
& - \left[\frac{5b^2 l^2}{2k} N_7 - \varepsilon_3 N_2 - c \right] \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
& - \left[\frac{\rho_2}{2} N_2 - \varepsilon_1 N_1 - cN_7 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4} \right) - c \right] \int_0^1 \psi_t^2 dx \\
& - \left[k \left(\frac{1}{2} - 9l^2 \right) N_7 - \varepsilon_2 N_2 - c \right] \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx \\
& - \left[\beta N - cN_1 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1} \right) - cN_2 - cN_7 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4} \right) \right] \int_0^1 q^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

De plus, en fixant $\varepsilon_1 = \dfrac{\rho_2 N_2}{4N_1}, \varepsilon_2 = \dfrac{7kN_7}{16N_2}, \varepsilon_3 = \dfrac{9b^2l^2N_7}{4kN_2}, \varepsilon_4 = \dfrac{l\rho_1}{2N_7}, \varepsilon_5 = \dfrac{lk}{N_7}$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'(t) \leq\ & -l\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \frac{l\rho_1}{2}\int_0^1 w_t^2 dx - lk\int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx \\ & - \left[\frac{\rho_3}{2}N_1 - cN_2\left(1+\frac{N_2}{N_7}\right) - cN_7(1+N_7)\right]\int_0^1 \theta^2 dx \\ & - \left[\frac{\rho_2}{4}N_2 - cN_7(1+N_7) - c\right]\int_0^1 \psi_t^2 dx - \left[\frac{b^2l^2}{4k}N_7 - c\right]\int_0^1 \psi_x^2 dx \\ & - \left[k\left(\frac{1}{4} - 3l\right)\left(\frac{1}{4}+3l\right)N_7\right]\int_0^1 (\varphi_x + \psi + lx)^2 dx \\ & - \left[\beta N - cN_1\left(1+\frac{N_1}{N_2}\right) - cN_2 - cN_7(1+N_7)\right]\int_0^1 q^2 dx.\end{aligned} \tag{3.36}$$

A ce point, pour l assez petit et $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert et $\dfrac{1}{4} - 3l > 0$ on choisit N_7 assez grand

$$\alpha_0 := \frac{b^2l^2}{4k}N_7 - c > 0 \text{ et } \alpha_1 := k\left(\frac{1}{4} - 3l\right)\left(\frac{1}{4}+3l\right)N_7 - c > 0.$$

Ainsi, on choisit N_2 assez grand tel que

$$\alpha_2 := \frac{\rho_2}{4}N_2 - cN_7(1+N_7) - c > 0.$$

De plus, on prend N_1 assez grand tel que

$$\alpha_3 := \frac{\rho_3}{2}N_1 - cN_2\left(1+\frac{N_2}{N_7}\right) - cN_7(1+N_7) > 0.$$

D'autre part, en combinant (3.1) et (3.34), et utilisons les inégalités de Young, Poincaré et de Cauchy-schwarz. Nous avons

$$(N-c)E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq (N+c)E(t). \tag{3.37}$$

De plus, on prend N assez grand tel que

$$\alpha_4 := \beta N - cN_1\left(1+\frac{N_1}{N_2}\right) - cN_2 - cN_7(1+N_7) > 0 \text{ et } \alpha_5 := N - c > 0.$$

Par conséquent, (3.36) et (3.37) respectivement, deviennent

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'(t) &\leq -l\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \frac{l\rho_1}{2} \int_0^1 w_t^2 dx - lk \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx - \alpha_3 \int_0^1 \theta^2 dx \\ &-\alpha_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx - \alpha_0 \int_0^1 \psi_x^2 dx - \alpha_1 \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx - \alpha_4 \int_0^1 q^2 sx.\end{aligned} \tag{3.38}$$

et

$$\alpha_5 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \alpha_6 E(t). \tag{3.39}$$

où $\alpha_6 = N + c$.

En utilisant (3.1), l'inégalité (3.38) devient

$$\mathcal{L}'(t) \leq -c_2 E(t), \forall t \geq 0, \tag{3.40}$$

où $c_1 = \dfrac{c_2}{\alpha_6}$. Une intégration simlpe de (3.40) sur $(0, t)$ donne

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0) e^{-c_1 t}, \forall t \geq 0. \tag{3.41}$$

Finalement, en combinant (3.39) et (3.41) il obtient (3.33), ce qui terminer la preuve.

Bibliographie

[1] Alabau-Boussouira, F., Muñoz Rivera, J.E., Almeida Júnior, D.S. : Stability to weak dissipative Bresse system. J. Math. Anal. Appl. **374**(2), 481–498 (2011)

[2] Alves, M.O., Fatori, L.H., Silva, J., Monteiro, R.N. : Stability and optimality of decay rate for a weakly dissipative Bresse system. Math. Meth. Appl. Sci. **38**(5), 898–908 (2015)

[3] Bresse, J. : Cours de Mecanique Appliquee par M. Bresse Rsistance des Matriaux et Stabilit des Constructions. Mallet-Bachelier, Paris (1859)

[4] Fatori, L.H., Monteiro, R.N. : The optimal decay rate for a weak dissipative Bresse system. Appl. Math. Lett. **25**(3), 600–604 (2012)

[5] Fatori, L.H., Munoz Rivera, J.E. : Rates of decay to weak thermoelastic Bresse system. IMA J. Appl. Math. **75**(6), 881–904 (2010)

[6] Gearhart, L. : Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert space. Trans. AMS **236**, 385–394 (1978)

[7] Guesmia, A., Kafini, M. : Bresse system with infinite memories. Math. Methods Appl. Sci. **38**(11), 2389–2402 (2015)

[8] Han, Z., Xu, G. : Spectral analysis and stability of thermoelastic Bresse system with second sound and boundary viscoelastic damping. Math. Methods Appl. Sci. **13**(4), 1395–1406 (2013)

[9] Huang, F. : Characteristic condition for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert space. Ann. Diff. Eqs. **1**(1), 43–56 (1985)

[10] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle Théorie et Application, Dunod, Paris, 1999

[11] Liu, Z., Rao, B. : Energy decay rate of the thermoelastic Bresse system. Z. Angew. Math. Phys. **60**(1), 54–69 (2008)

[12] Liu, Z., Zheng, S. : Semigroups Associated with Dissipative Systems, vol. 398. Chapman Hall/CRC, London (1999)

[13] Pazy, A. : Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer-Verlag, New York (1983)

[14] Prüss, J. : On the spectrum of C0-semigroups. Trans. AMS **284**, 847–857 (1984)

[15] Said-Houari, B., Hamadouche, T. : The Cauchy problem of the Bresse system in thermoelasticity of type III. Appl. Anal. (2015). doi :10.1080/00036811.2015.1089237

[16] Said-Houari, B., Hamadouche, T. : The asymptotic behavior of the Bresse–Cattaneo system. Commun. Contemp. Math. **18**, 1550045 (2015)

[17] Santos, M.L., Almeida Júnior, D.S. : Numerical exponential decay to dissipative Bresse system. J. Appl. Math. **2010**, 1–17 (2010)

[18] Santos, M.L., Soufyane, A., Almeida Júnior, D.S. : Asymptotic behavior to Bresse system with past history. Q. Appl. Math. **73**(1), 23–54 (2015)

[19] Soriano, J., Rivera, J.M., Fatori, L. : Bresse system with indefinite damping. J. Math. Anal. Appl. **387**(1), 284–290 (2012)

[20] Soriano, J.A., Charles, W., Schulz, R. : Asymptotic stability for Bresse systems. J. Math. Anal. Appl. **412**, 369–380 (2014)

[21] Soufyane, A., Said-Houari, B. : The effect of the wave speeds and the fractional damping terms on the decay rate of the Bresse system. Evol. Equ. Control Theory **3**(4), 713–738 (2014)

[22] Wehbe, A., Youssef, W. : Exponential and polynomial stability of an elastic Bresse system with two locally distributed feedbacks. J. Math. Phys. **51**(10), 103523 (2010)

[23] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle Théorie et Application, Dunod, Paris, 1999