

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT



FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES DE L'INGENIEURIE
DEPERTEMENT DE GENIE INFORMATIQUE
Mémoire en vue de l'obtention d'un diplôme de licence en
Mathématiques, Option : Mathématiques

Thème

Calculs des intégrales multiples par la méthode de Monte-Carlo

Proposé et Encadré par :

Prof: Mokhtari Abdelkader

Présenté par :

- Sofrani Rokiya
- Nadjem Oumelkheir
- Siraj Yamina

N° d'ordre :..... 2012-PFE/DGI

Remerciement

Nous remercions dieu tout puissant de nous avoir permis de mener à terme ce mini projet qui est pour nous le point de départ d'une merveilleuse aventure, celle de la recherche, source de remise en cause permanent et de perfectionnement perpétuelle.

On tient tout d'abord à remercier Mr. Mokhtari Abdelkader qui a supervisé avec enthousiasme notre travail dans toutes ses étapes.

Un grand merci aux enseignants qu'on avait l'honneur d'étudier chez eux toute au long des ans de notre formation et en particulier à Mr. Ismail Ibrahim et Mr. Belabassi Youcef et Mr. Abdrahmane Ben Yatou et Ouinten Youcef et Mr. Chetih Ali.

Finalement on adresse un grand merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.



Dédicace

Je dédie ce travail à :

Mes grands pères et mes grandes mères.

Mon cher papa qui m'encourage le début de mes études.

Ma chère maman qui je l'aime beaucoup.

Mes oncles et mes tantes et toutes ma famille surtout mon frère Mustafa.

Toutes mes amies qui portent dans mon cœur.

A tous mes collègues d'étude surtout promo 3ème année mathématique« 2012 »et tout les gens qui m'aiment.

S. Rakiya



Dédicace

A mes chers parents,

A mon mari,

A mes frères et sœurs,

A tous les membres de ma famille,

A tous mes amis,

A tous ceux que j'aime.

Omekkeir



Dédicace

Je vous remercie mon dieu qui me guider et
m'arriver à ce niveau.

Je dédie à ce modeste travail à l'esprit de
mon père qui souhaite à d'arriver à ce grand
moment, à ma chère mère, à mon frère et mes
sœurs à tout mes amis spécialement ma chère
amie Khadra.

À mes voisines de la cité les sœurs bedj « les
deux Imi, Rouba »

Je vous remercie toutes les gens qui m'aider
pour venir à cet heureux événement.

Merci.

Siradi Amina

SOMMAIRE

Introduction	1
Chapitre I : Des Rappels	
1-principe de la méthode... ..	3
2- rappels sur les intégrales multiples.....	5
2.1- intégrales unidimensionnelle.....	5
2.2-intégrales multiples	6
3- rappels sur les nombres aléatoires.....	7
3.1-définition 1.....	7
3.2-définition 2.....	8
3.3- méthode d'obtention des nombres aléatoires	10
Chapitre II : Calcul des intégrales multiples par méthode monte Carlo	
1-Calcul des intégrales multiples par méthode Monte-Carlo.....	17
1.1-première méthode.....	20
1.2- deuxième méthode.....	27
Conclusion.....	35
Bibliographies	

Introduction

INTRODUCTION :

La méthode Monte-Carlo, désigne toute méthode visant à calculer une valeur numérique en utilisant des **procédés aléatoires**, c'est-à-dire des techniques probabilistes. Le nom de ces méthodes, qui fait allusion aux **jeux de hasard** pratiqués à **Monte-Carlo**, a été inventé en 1947 par **Nicholas Metropolis**, et publié pour la première fois en 1949 dans un article on-écrit avec **Stanislas Ulam**.

Les méthodes de Monte-Carlo sont particulièrement utilisées pour calculer des intégrales en dimensions plus grandes que 1 . Elles sont également couramment utilisées en **physique des particules**, où des **simulations** probabilistes permettent d'estimer la forme d'un signal ou la sensibilité d'un détecteur. La comparaison des données mesurées à ces simulations peut permettre de mettre en évidence des caractéristiques inattendues, par exemple de nouvelles particules.

La méthode de simulation de Monte-Carlo permet aussi d'introduire une approche statistique du risque dans une décision financière. Elle consiste à isoler un certain nombre de variables-clés du projet, tels que le chiffre d'affaires ou la marge, et à leur affecter une **distribution de probabilités**. Pour chacun de ces facteurs, un grand nombre de tirages aléatoires est effectué dans les distributions de probabilité déterminées précédemment, afin de trouver la probabilité d'occurrence de chacun des résultats.

Le véritable développement des méthodes de Monte-Carlo s'est effectué sous l'impulsion de **John Von Neumann** et **Stanislas Ulam** notamment, lors de la **Seconde Guerre mondiale** et des recherches sur la fabrication de la **bombe atomique**. Notamment, ils ont utilisé ces méthodes probabilistes pour résoudre des équations aux dérivées partielles dans le cadre de la **Monte-Carlo**.

Dans ce thème on utilise

La méthode Monte-Carlo pour calculs des intégrales multiples.

Chapitre J : Des Rappels

1- Principe de la méthode

2-Rappels sur les intégrales multiples

3- Rappels sur les nombres aléatoires

1- Principe de la méthode :

Le mode usuel de résolution d'un problème consiste à indiquer un algorithme qui permet de trouver la valeur f exacte ou avec une précision donnée.

Notamment, si l'on désigne par $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ les résultats correspondants des opérations successives alors

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n, \quad \dots (1)$$

et dans le cas d'un nombre fini d'opérations le processus s'arrête à un certain pas.

Le processus de calcul est dans ce cas strictement déterministe : en l'absence d'erreurs, deux calculateurs différents aboutissent au même résultat.

Toutefois, il existe des problèmes dans lesquels la construction des algorithmes de ce type est pratique impossible ou l'algorithme lui-même s'avère trop compliqué.

On recourt alors souvent à la simulation du principe mathématique ou physique du problème et on applique les lois des grands nombres de la théorie des probabilités.

Les estimations $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ de la grandeur cherchée f s'obtiennent par traitement statistique des données fournies par les résultats de certaines expériences aléatoires multiples.

Dans ces conditions il faut que la variable aléatoire f_n converge en probabilité pour $n \rightarrow \infty$ vers la grandeur cherchée f , c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ on ait la relation limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|f - f_n|) = 1, \quad \dots (2)$$

où P désigne la probabilité correspondante.

Le choix de la grandeur f_n est conditionné par des particularités concrètes du problème.

Par exemple, on entend souvent par grandeur cherchée f la probabilité d'un certain événement aléatoire (ou pour plus de généralité, l'espérance mathématique d'une certaine variable aléatoire).

Alors, la fréquence f_n d'un événement dans n expériences aléatoires (ou, respectivement, la moyenne empirique des valeurs d'une variable aléatoire) peut être considérés sous des hypothèses très lâches comme une estimation probabiliste de la variable cherchée. D'autres variantes sont également possibles.

Constatons que dans ce cas le processus de calcul est non déterministe, puisqu'il est défini par les résultats des expériences aléatoires.

Les modes de résolution des problèmes faisant appel aux variables aléatoires ont reçu le nom général de la méthode de Monte-Carlo.

Plus précisément par méthode de monte Carlo.

On entend l'ensemble des procédés qui permettent d'obtenir la solution des problèmes mathématiques et physiques à l'aide des expériences aléatoires multiples.

Les estimations de la grandeur cherchée se déduisent statistiquement et ont caractère probabiliste.

Pratiquement les expériences aléatoires sont remplacées par certains calculs appliqués aux nombres aléatoires.

L'utilisation efficace de la méthode de Monte- Carlo est devenue possible grâce aux calculateurs électroniques rapides, car pour obtenir des estimations

suffisamment exactes de la grandeur cherchée, il faut réaliser le calcul d'un très grand nombre de cas particuliers et dépouiller ensuite la statistique d'un volume énorme de données numériques.

Remarquons qu'en utilisant la méthode de Monte –Carlo aucun besoin n'est de connaître les relations précises des grandeurs données et recherchées du problème, il suffit de dégager seulement l'ensemble des conditions qui définissent la manifestation du phénomène observé.

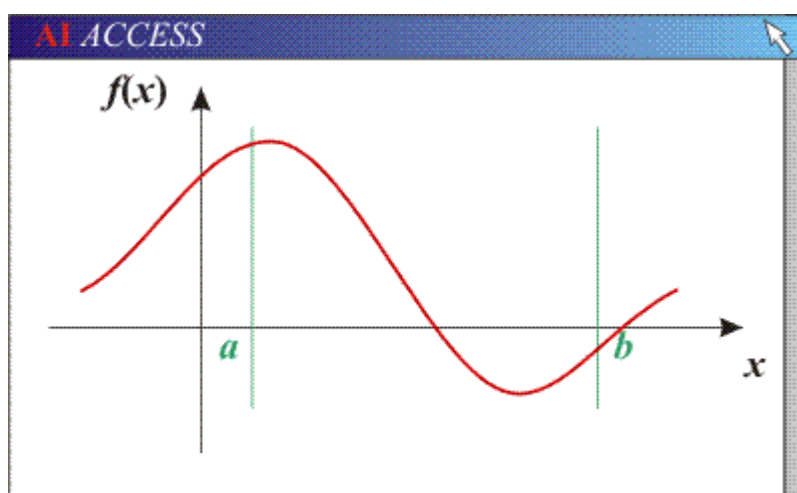
Cette circonstance rend possible l'application de la méthode de Monte–Carlo aux problèmes logiques.

2–Rappels sur les intégrales multiples :

2.1-Intégration unidimensionnelle :

A titre d'exemple, nous décrivons ici une des applications les plus simples de simulation de Monte–Carlo : l'intégration d'une fonction dans une région bornée.

Comment calculer l'intégrale entre a et b de la fonction représentée dans l'illustration ci-dessous ?



Si aucune primitive de $f(x)$ n'est connue, l'intégrale ne peut pas être calculée analytiquement. Mais si $f(x)$ peut être facilement calculée en tout point de

l'intervalle $[a, b]$, on peut obtenir une bonne approximation de la valeur de cette intégrale par des méthodes numériques.

Il existe de nombreuses méthodes d'intégration numérique. La plus simple (et aussi la moins efficace !) consiste à diviser l'intervalle $[a, b]$ par N rectangles adjacents (image inférieure de l'illustration ci-dessus). La hauteur de chaque rectangle est égale à la valeur de $f(x)$ pour x pris au milieu de la base du rectangle. La somme (algébrique) des aires de

ces rectangles est une approximation de l'aire (algébrique) sous la courbe représentant $f(x)$, c'est à dire l'intégrale I recherchée.

$$I \approx \sum_{i=1}^N h \cdot f(x_i) = h \cdot \sum_{i=1}^N f(x_i) = \frac{b-a}{N} \cdot \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

Si $f(x)$ a un comportement suffisamment régulier, et si les rectangles sont suffisamment étroits, alors l'aire ainsi calculée sera une bonne approximation de la valeur de l'intégrale.

Notez que cette approximation de l'intégrale est, à un facteur géométrique de normalisation près, la somme des valeurs de $f(x)$ prises sur des points régulièrement répartis dans la région d'intégration.

2.2-Intégrale multiple :

Que se passe-t-il si nous utilisons la même approche dans le cas d'une intégrale multiple ? Nous rencontrons deux difficultés :

D'abord, la région d'intégration n'est plus définie par une paire de nombres comme précédemment, mais pas une (hyper-) surface fermée dont la forme peut être très compliquée même pour des problèmes simples, et impossible à décrire analytiquement.

La deuxième difficulté est encore plus grave. Revenons un instant à l'intégrale simple, et supposons que nous ayons décidé d'utiliser 100 rectangles. Puis envisageons une intégrale multiple à 100 variables, et décidons de conserver sur chaque axe la même résolution que dans le cas de l'intégrale simple. Nous devons alors définir 100100 hyper-rectangles, un nombre au-delà des capacités des ordinateurs les plus rapides.

Cette difficulté est absolument universelle, et se retrouve dans toute technique locale, qu'elle soit déterministe ou probabiliste. Elle porte le nom facétieux de "malédiction de la dimensionnalité".

Notez que le nombre de rectangles est choisi essentiellement sur la base considérations portant sur la rapidité avec laquelle la fonction varie dans la région d'intégration. Il n'est donc pas possible de réduire arbitrairement le nombre de rectangles jusqu'à une valeur compatible avec des temps de calcul raisonnables, sous peine de perdre tellement d'information sur la fonction que l'approximation obtenue devienne grossièrement fautive.

3-Rappelles sur les nombres aléatoires :

3.1-Définition1 : une grandeur ou une variable et dite aléatoire si sa valeur dépend d'un événement aléatoire.

La variable aléatoire X est définie par la loi de répartition

$$P(\mathbf{X} < \mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}),$$

où x est un nombre réel quelconque *et* $\phi(\mathbf{x})$ Une fonction connue (fonction de répartition). Les valeurs de la variable aléatoire s'appellent nombres aléatoires.

Si une variables aléatoires muni d'une loi de répartition (uniforme, normale...), on dit que les nombres aléatoires correspondants sont repartie par cette loi.

3.2-Définition2 : soient $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ les valeurs d'une même variable aléatoires X fournies par des preuves indépendantes à conditions répétées. Alors la suite des nombres aléatoires

$$\{x_n\} \quad \dots(1)$$

est dite aléatoire, à la loi de répartition correspondante. Dans ce qui suit nous allons étudier en règle général des suites aléatoires (1) répartition uniforme sur un segment unité $0 \leq x \leq 1$.

Si (a, b) est un intervalle quelconque du segment $[0,1]$ et $v_n = v_n(a, b)$, le nombre d'éléments de la sous suite finie x_1, x_2, \dots, x_n appartenant à l'intervalle (a, b) , alors pour la suite (1) à répartition uniforme on a la relation limite suivante

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{v_n(a,b)}{n} \right) = b-a. \quad \dots(2)$$

C'est-à-dire la fréquence relative limite de la suite $\{x_n\}$ répartition uniforme sur $[0,1]$ pour tout intervalle partiel (a, b) est égale à la longueur de cet intervalle avec la probabilité 1.

Si la suite aléatoire $\{x_n\}$ est repartie uniformément sur le segment $[0,1]$, la transformation linéaire

$$y_{n=A+(B-A)x_n} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \dots(3)$$

où A et B sont des nombres donnés, conduit à la suite aléatoire $\{y_n\}$ repartie uniformément sur le segment $[A, B]$.

Cas générale

$\{x_n\}$ Suite aléatoires répartie uniformément sur le segment $[0,1]$ permet de construire suite aléatoire $\{y_n\}$ à la loi de répartition donnée $\phi(y)$.

Soit

$$\phi(y) = \int_{-\infty}^y \varphi(t) dt$$

La fonction de répartition correspondante, où $\varphi(t)$ est la densité de probabilité.

Pour simplifier supposons que la fonction

$$x = \phi(y)$$

Soit continue et strictement monotone .voir figure (3.1).

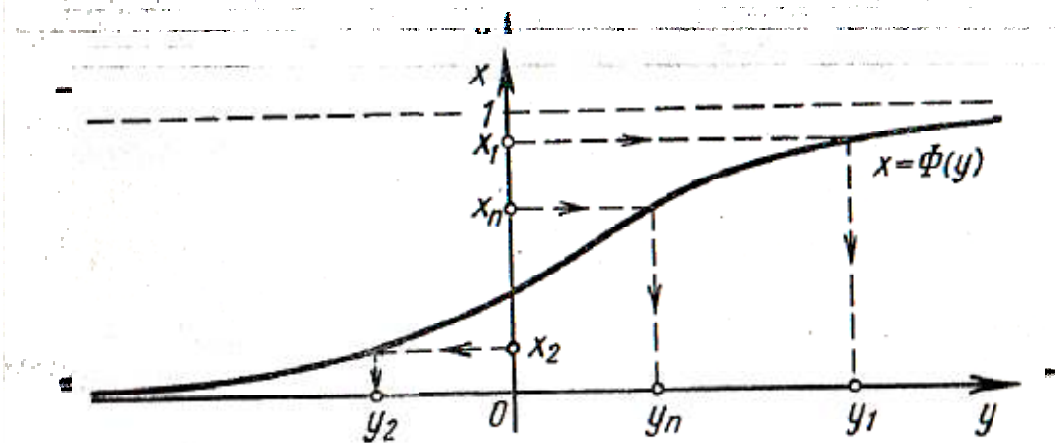


Figure (3.1).

Alors, en définissant y_n d'après l'équation

$$x_n = \phi(y_n) \quad (n=1,2,\dots),$$

on obtient pour x_n la suite aléatoire $\{y_n\}$ munie de la loi de répartition donnée $\phi(y)$.

Par construction, La suite $\{y_n\}$ vérifiée avec la probabilité 1 La relation limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\tilde{v}(a,b)}{n} \right) = \int_a^b \phi(y) dy, \quad \dots(4)$$

où $\tilde{v}_n(a,b)$ est le nombre d'éléments d'une sous suite finie y_1, y_2, \dots, y_n , appartenant a l'intervalle arbitraire (a, b) .

En particulier, en posant

$$\phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}},$$

on obtient de cette façon la suite aléatoire canonique $\{y_n\}$ obéissant à la loi normale (gaussienne) et associée a la variable aléatoire \mathbf{Y} d'espérance mathématique $\mathbf{MY}=\mathbf{0}$ et de variance $\mathbf{DY}=\mathbf{1}$. La transformation linéaire

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{y}_n \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{c} \quad (n=1,2,\dots)$$

donne une suite aléatoire $\{z_n\}$ a répartition normale qui correspond a la variable aléatoire Z telle que l'espérance mathématique $\mathbf{MZ}=\mathbf{c}$ et la variance $\mathbf{DZ}=\boldsymbol{\sigma}^2$.

3.3-Méthodes d'obtention des nombres aléatoires :

Pour élaborer des nombres aléatoires on peut utiliser les résultats de processus physiques aléatoires (par exemple, le jet des dés, la rotation de la roulette, le scintillement du compteur Geiger, le bruit des transmissions électroniques, ...).

Il existe également des tables toutes prêtes des nombres aléatoires.

En toute rigueur, utilisant des dispositifs mécaniques, pour obtenir des nombres aléatoires, on ne peut pas être tout à fait sûr que les événements aléatoires considérés ont une répartition de probabilité donnée.

C'est pour quoi on soumet généralement les données obtenues à une « vérification statistique par le hasard ».

Dans ce sens il est plus sûr d'employer des nombres aléatoires tabulés pour lesquels cette vérification est déjà faite ; pourtant les nombres aléatoires tabulés présentent de grands inconvénients pour le traitement des problèmes sur des machines digitales.

Pour résoudre les problèmes par la méthode de Monte-Carlo il faut avoir à sa disposition une grande quantité de nombres aléatoires.

Dans la pratique le plus commode est d'obtenir ces nombres avec des détecteurs spéciaux couplés à une machine.

Leur fonctionnement est réglé par des processus physiques aléatoires (par exemple, par désintégration radioactive, bruits des tubes électronique).

La reproduction des nombres aléatoires associés au modèle théorique donné étant un processus délicat et compliqué, on se borne souvent en pratique à l'obtention de ce qu'on appelle les nombres pseudo-aléatoires qui grosso modo ressemblent aux nombres aléatoires correspondants. Les nombres pseudo-aléatoires sont tirés à partir des algorithmes assez complexes.

Dans ce qui suit, par «nombre aléatoire» nous allons entendre les nombres de ces deux types s'ils ne présentent pas différence substantielle.

Indiquons certains procédés bien simples pour obtenir des nombres aléatoires, au sens généralisé, uniformément répartis sur le segment $[0,1]$.

Supposant pour simplifier que ces nombres sont des fractions décimales propres des nombres fixe, s par exemple, de décimales significatives (fraction décimale à s rangs), c'est-à-dire pouvant être mise sous la forme

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots + \frac{\alpha_s}{10^s}, \quad \dots(1)$$

où $\alpha_i (i=1,2,\dots,s)$ sont les chiffres de ces nombres, prenant les valeurs $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$.

Pour former tableau des nombres aléatoires de la forme (1), uniformément répartis sur le segment $[0,1]$, il suffit d'indiquer les modes d'obtention des chiffres α_i en respectant les conditions suivantes :

a) α_i est échantillon aléatoire du système des nombres 0 à 9, toutes les valeurs indiquées étant équiprobables et indépendantes.

b) Le choix des chiffres précédents $\alpha_1, \dots, \alpha_i$ n'influe nullement sur celui du chiffre suivant α_{i+1} .

Pour obtenir un nombre aléatoire s rangs, cet échantillonnage est repris s fois. Il existe plusieurs procédés pour réaliser le système de sélection vérifiant les conditions a) et b). Examinons certains d'entre eux.

1* plaçons dans une urne dix boules identiques numérotées de 0 à 9.

Tirons successivement de l'urne une boule et inscrivants son numéro α .

Après chaque tirage la boule est remise dans l'urne et, avant chaque tirage consécutif, toutes les boules dans l'urne sont brassées.

2* on jette simultanément deux dés. Si n_1 et n_2 sont les chiffres amenés ($n_1, n_2 = 1,2,3,4,5,6$) respectivement par le premier et le deuxième dé (les deux dés doivent être différents), le chiffre successifs α du nombre aléatoire est pris égal au reste de division de la somme

$6(n_1 - 1) + n_2$ par 10, où $n_1 < 6$ c'est-à-dire α c'est un entier non négatif inférieur à 10 qui vérifie la congruence

$$6(n_1 - 1) + n_2 \equiv \alpha \pmod{10}.$$

Si $n_1 = 6$, on jette encore une fois les dés, la formule (2) n'entraîne que le chiffre α peut à probabilité égale prendre une valeur quelconque 0 à 9.

3* on prend un entier à s chiffres. Ce nombre est élevé au carré, puis on choisit dans le nombre obtenue s chiffres moyens, ensuite le processus est repris. Si s est suffisamment grand, par exemple $S \geq 10$, les chiffres choisis peuvent être pris à chaque étape comme décimales des nombres pseudo-aléatoires à s rangs.

Pour obtenir une suite de nombres pseudo-aléatoires on peut également multiplier un nombre de plusieurs chiffres par un même nombre et en tirer les chiffres moyens ou élever au carré un nombre de plusieurs chiffres et calculer le reste de la division du résultat par un nombre premier suffisamment grand.

4* Une suite pseudo-aléatoire $\{x_n\}$ s'obtient à l'aide du processus

$$x_n = 2^{-42} u_n,$$

où

$$u_0 = 1, u_{n+1} \equiv 5^{17} u_n \pmod{2^{42}}.$$

5* On utilise le développement décimale d'un nombre irrationnel positif

$$W = \beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s, \dots = \beta_0 + (w),$$

où β_0 est la partie entière du nombre w et (w) sa partie fractionnaire

Pour obtenir une suite aléatoire $\{x_n\}$, on pose :

$$x_n = (n w) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

S'il faut obtenir une suite aléatoire composé de nombres à s rangs dans les nombres (n, w) on se borne aux rangs correspondants.

Pour résoudre certains problèmes il faut avoir à sa disposition plusieurs suites aléatoires

$$\{x_n^{(1)}\}, \{x_n^{(2)}\}, \dots, \{x_n^{(m)}\}.$$

Dans ce cas on choisit m nombres irrationnels positifs w_1, w_2, \dots, w_n L'énéairement indépendants sur le corps des rationnels pour admettre

$$x_n^{(k)} = (n w_k) \quad (k=1,2,\dots,m ; n=1,2,\dots).$$

On peut également prendre une suite aléatoire uniformément répartie $\{x_n\}$ et on tirer m échantillons :

$$\{x_1, x_{m+1}, x_{2m+1}, \dots\},$$

$$\{x_2, x_{n+2}, \dots, x_{2m+2}\},$$

.....

$$\{x_2, x_{2m}, x_{3m}, \dots\},$$

Tableau (1)**Nombre aléatoires repartis uniformément sur le segment [0, 1]**

0,57705	0,35483	0,11578	0,65339	0,66674
0,71618	0,09393	0,93045	0,93382	0,99279
0,73710	0,30304	0,93011	0,05758	0,24202
0,70131	0,55186	0,42844	0,00336	0,94010
0,16961	0,64003	0,52906	0,88222	0,60981
0,53324	0,20514	0,09461	0,98585	0,13094
0,43166	0,00188	0,99602	0,52103	0,35193
0,26275	0,55709	0,69962	0,91827	0,64560
0,05926	0,86977	0,31311	0,07069	0,64559
0,66286	0,31303	0,27004	0,13928	0,68008

En prenant les nombres non pas l'un après l'autre, mais de m à m . Il est clair que de cette façon on aura m sous-suites reparties uniformément.

Ces méthodes ainsi que bien d'autres ont servi pour dresser des tables des nombres aléatoires ; on s'en sert pour construire des nombres aléatoires ayant un nombre déterminé de décimales.

A titre d'exemple voici une partie d'une telle table à cinq décimales (tableau (1)).

Chapitre II

*Calculs des intégrales multiples
par la méthode Monte-Carlo*

1-Calcul des intégrales multiples par la méthode de Monte- Carlo :

Soit la fonction

$$y=f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

Continue dans un domaine S .on va calculer l'intégrale m-uple

$$I= \iint_{(S)} \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 \cdot dx_2 \dots dx_m \quad \dots (1)$$

Géométriquement le nombre I est le volume de dimension (m+1) d'un cylindroïde * droit dans l'espace $O x_1, x_2, \dots, x_m y$ de base S et borné supérieurement par la surface donnée $y=f(x)$, où

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Voir figure(1.1) .

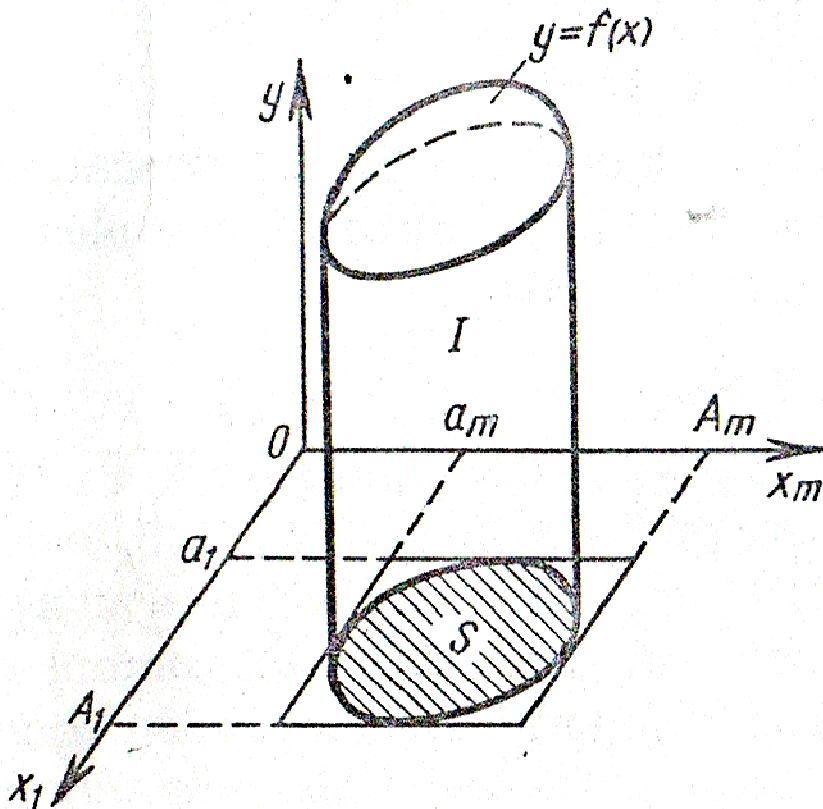


Figure (1.1).

Transformons l'intégrale (1) de façon que le nouveau domaine d'intégration soit intérieur à un cube unité de dimension m .

Soit le domaine S intérieur à un parallélépipède de dimension m

$$a_i \leq x_i \leq A_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m) . \quad \dots(2)$$

Faisons le changement de variables

$$x_i = a_i + (A_i - a_i)\xi_i \quad (i=1, 2, \dots, m) . \quad \dots (3)$$

Il est alors évident que le parallélépipède de dimension m (2) se transforme en un cube de dimension m

$$0 \leq \xi_i \leq 1 \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad \dots(4)$$

et, par conséquent, le nouveau domaine d'intégration σ , qui s'obtient suivant les règles usuelles est intérieur à ce cube.

Voir figure (1.2) .

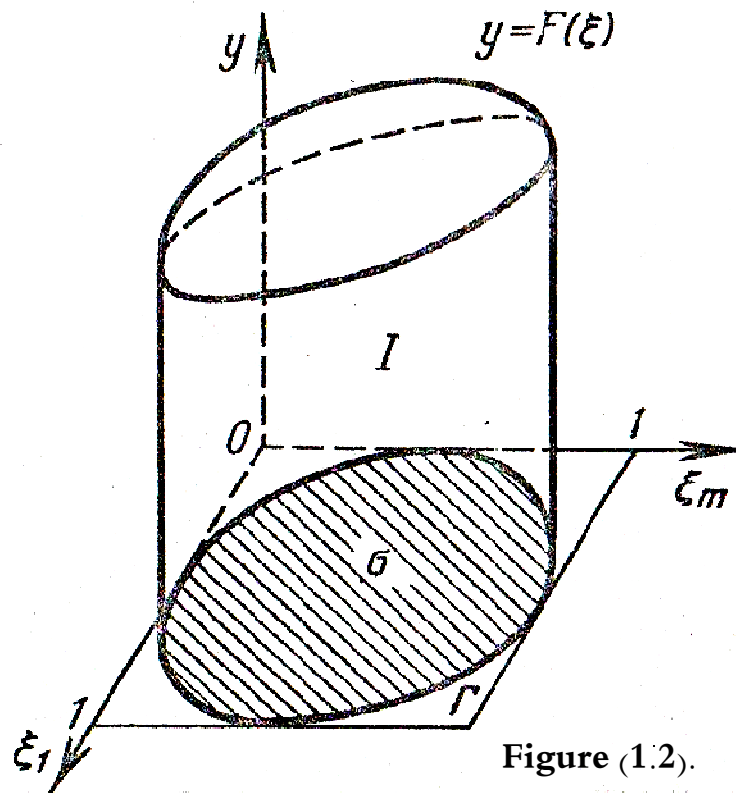


Figure (1.2).

En calculant le jacobin de la transformation, on aura :

$$\frac{D(x_1, x_2, \dots, x_m)}{D(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)} = \begin{vmatrix} A_1 - a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 - a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_m - a_m \end{vmatrix}$$

$$= (A_1 - a_1)(A_2 - a_2) \dots (A_m - a_m).$$

Ainsi

$$I = \iint_{(\sigma)} \int f(a_1 + (A_1 - a_1)\xi_1, a_2 + (A_2 - a_2)\xi_2, \dots, a_m + (A_m - a_m)\xi_m) (A_1 - a_1)(A_2 - a_2) \dots (A_m - a_m) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_m$$

On pose: $F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = (A_1 - a_1)(A_2 - a_2) \dots (A_m - a_m) f(a_1 + (A_1 - a_1)\xi_1, a_2 + (A_2 - a_2)\xi_2, \dots, a_m + (A_m - a_m)\xi_m)$

En introduisant les notations :

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$$

Et

$$d\sigma = d\xi_1, d\xi_2 \dots d\xi_m,$$

d'où

$$I = \iint_{(\sigma)} \int F(\xi) d\sigma. \quad \dots(5)$$

Nous indiquerons deux méthodes de calcul de l'intégrale (5) par la méthode des expériences aléatoires.

1.1-Première méthode :

Choisissons m suites aléatoires indépendantes uniformément réparties sur le segment [0,1] :

$$\begin{aligned} &\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \dots, \xi_n^{(1)}, \dots; \\ &\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \dots, \xi_n^{(2)}, \dots; \\ &\dots\dots\dots \\ &\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \dots, \xi_n^{(m)}, \dots; \end{aligned}$$

Les points $M_i(\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \dots, \xi_i^{(m)}) (i = 1, 2, \dots)$ peuvent être considérés comme aléatoires.

En choisissant un nombre N suffisamment grand de points M_1, M_2, \dots, M_N , vérifions quels sont ceux qui appartiennent au domaine σ (première espèce) et ceux qui n'appartiennent pas (deuxième espèce). Soit la figure (1.3).

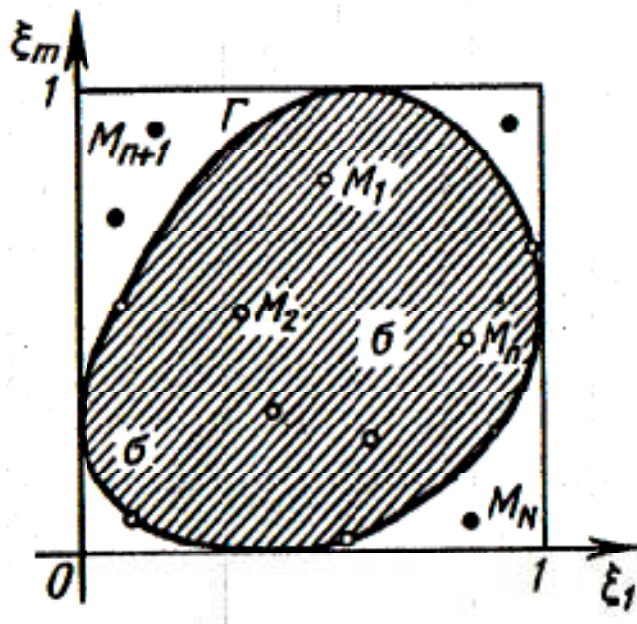


Figure (1.3).

$$1) M_i \in \sigma \quad \text{pour } i=1,2,\dots,n \quad \dots (6)$$

$$2) M_i \notin \sigma \quad \text{pour } i=n+1, n+2, \dots, N \quad \dots (6')$$

Par commodité nous changerons ici la numération des points.

Remarque :

Il faut convenir à l'avance si les points de la frontière Γ où certains d'entre eux appartiennent au domaine σ ou non.

Dans le cas général lorsque la frontière Γ est lisse, cela n'a pas d'importance ; mais dans des cas particuliers cette question doit être tranchée en tenant compte des conditions concrètes.

Pour vérifier les conditions (6) et (6') ont part dans les cas courants de la donnée analytique de la frontière Γ du domaine σ .

Dans le cas le plus simple, lorsque la surface Γ est donné par l'équation

$$\varphi(\xi) = 0, \quad \dots (7)$$

où avec $\varphi(\xi) < 0$ le point $\xi \in \sigma$ et avec $\varphi(\xi) > 0$ le point $\xi \notin \sigma$, on a :

1) si $\varphi(M_i) < 0$, le point M_i est première espèce.

2) si $\varphi(M_i) > 0$, le point M_i est deuxième espèce.

Les points M_i tels que $\varphi(M_i) = 0$ sont attribués à la première ou à la deuxième espèce par convention.

Constatons que l'équation (7) peut être remplacée par n'importe quelle équation équivalente, ce qui rend parfois les calculs bien plus faciles. Ainsi, pour un cercle il est commode de remplacer l'inégalité

$$x^2 + y^2 - x - y + \frac{1}{4} \leq 0$$

($i=1, 2, \dots, m$) et $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \dots \mathcal{E}_m$. Il est évident que

Si $\mathcal{E} = 1$ alors $M \in \sigma$;

Si $\mathcal{E} = 0$ alors $M \notin \sigma$.

Remarque :

Si $\mathcal{E}_j = 0$ ($j < m$) aucun besoin n'est de calculer les valeurs ultérieures $\mathcal{E}_{j+1}, \dots, \mathcal{E}_m$, Puisqu'elles n'influent pas sur le résultat définitif.

La valeur de la fonction $Y = F(M)$ ne se calcule que pour les points M tels que $\mathcal{E} = 1$.

En prenant un nombre n suffisamment grand de points $M_i \in \sigma$, on peut poser l'approximativement

$$y_{moy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(M_i),$$

d'où il résulte la formule de l'intégrale cherchée

$$I = y_{moy} \sigma = \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n F(M_i), \quad \dots(9)$$

où par σ on entend le volume de dimension m du domaine d'intégration σ .

Si le calcul du volume σ est difficile, on peut poser

$$\sigma \simeq \frac{n}{N},$$

d'où

$$I \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(M_i).$$

Remarque :

Cas particulier :

Lorsque σ est un cube unité ($\sigma = 1$), la vérification devient superflue, c'est-à-dire $n = N$ et on a simplement :

$$I = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(M_i).$$

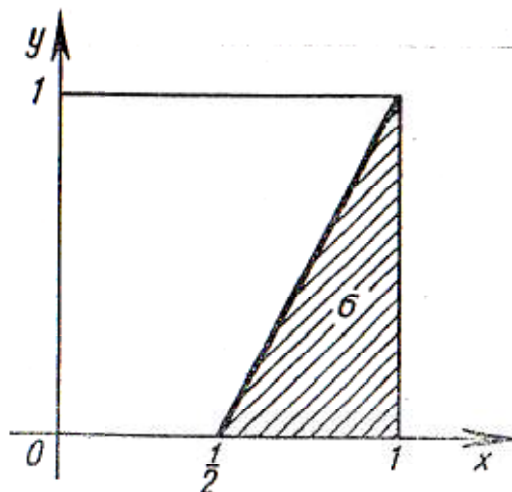
Exemple

Calculer approximativement par la méthode de Monte - Carlo l'intégrale

$$I = \iint_{\sigma} x^2 + y^2 dx dy \quad \dots (10)$$

Où le domaine d'intégration σ est défini par les inégalités suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2x - 1 \end{array} \right\} \quad \dots(\sigma)$$



Solution

L'intégrale (10) est donnée sous une forme réduite, c'est-à-dire le domaine σ donnée par forme réduite, c'est-à-dire le domaine d'intégration σ est intérieur au Carré unité

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$$

Pour résoudre le problème faisons appel au tableau(1) des nombres aléatoires réparties uniformes sur le segment $[0,1]$ en considérant chaque couple successif des nombres du tableau comme les coordonnées correspondants x et y du point aléatoires $M(x, y)$.

Le calcul ayant un caractère illustratif, bornons -nous a $N=20$ points aléatoires en arrondissant pour simplifier leurs coordonnées à trois chiffres décimaux. Les résultats du calcul sont portés sur le tableau(1), ou nous avons posé

$$\underline{x} = \frac{1}{2}, \bar{x} = 1;$$

$$\underline{y}(x) = 0, \bar{y}(x) = 2x - 1;$$

$$z = x^2 + y^2.$$

Tableau(1)

Calcul de l'intégrale double (10) par la méthode de Monte-Carlo

x	\underline{x}	\bar{x}	ε_1	y	$\underline{y}(x)$	$\bar{y}(x)$	ε_2	ε	z
0,577	0,500	1,000	1	0,716	0	0,154	0	0	0
0,737	0,500	1,000	1	0,701	0	0,474	0	0	0
0,170	0,500	1,000	0	0,533	0				
0,430	0,500	1,000	0	0,263	0				
0,059	0,500	1,000	0	0,663	0				
0,355	0,500	1,000	0	0,094	0				

0,303	0,500	1,000	0	0,552	0				
0,604	0,500	1,000	1	0,205	0	0,280	1	1	0,452
0,002	0,500	1,000	0	0,557	0				
0,870	0,500	1,000	1	0,323	0	0,740	1	0	0,855
0,116	0,500	1,000	0	0,930	0				
0,930	0,500	1,000	1	0,428	0	0,860	1	1	1,048
0,529	0,500	1,000	1	0,095	0	0,058	0	0	
0,996	0,500	1,000	1	0,700	0	0,922	1	1	1,482
0,313	0,500	1,000	0	0,270	0				
0,653	0,500	1,000	1	0,994	0	0,306	0		
0,058	0,500	1,000	0	0,003	0				
0,882	0,500	1,000	1	0,986	0	0,764	0		
0,521	0,500	1,000	1	0,918	0	0,042	0		
0,071	0,500	1,000	0	0,239	0	0			
Σ								4	3,837

D'ou

$$z_{moy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(M_i) = \frac{1}{4} \cdot 3,837 = 0,96$$

Et donc d'après la formule (7) en prenant en considération que

$$\sigma = \frac{1}{4} \text{ On a :}$$

$$I = z_{moy} \cdot \sigma = 0,96 \cdot \frac{1}{4} = 0,24. \quad \dots(11)$$

Si l'on pose approximativement

$$\sigma = \frac{n}{N} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5},$$

on obtient :

$$I \simeq 0,96 \cdot \frac{1}{5} = 0,19.$$

Remarquons que la valeur exacte de l'intégrale

$$I = \frac{7}{32} = 0,22 ;$$

Et donc l'erreur relative de (11) est égale à

$$\delta = \frac{0,24 - 0,22}{0,22} = 9 \text{ \%}.$$

Certes, le nombre de points $N=20$ ne suffit pas pour faire manifester ici dans leur pleine mesure les lois statistiques, néanmoins le résultat obtenu est satisfaisant pour une estimation grossière.

1.2-Deuxième méthode :

Si la fonction $F(\xi) = F(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_m)$ est non négative,

l'intégrale $I = \iint_{(\sigma)} \int F(\xi) d\sigma$, peut être considérée comme le volume d'un corps V dans l'espace $0 \leq \xi_1, \xi_2 \dots \xi_m \leq y$ de dimension $(m + 1)$, c'est-à-dire

$$I = \iint_{(V)} d\xi_2 \dots d\xi_m dy, \quad \dots (12)$$

Où le domaine d'intégration V est défini par les conditions

$$\xi = (\xi_1, \xi_2 \dots \xi_m) \in \sigma, \quad 0 \leq y \leq F(\xi).$$

Soit

$$0 \leq F(\xi) \leq B. \quad \dots (13)$$

Introduisant dans l'intégrale (12) une nouvelle variable

$$n = \frac{1}{B} y, \quad \dots (14)$$

on obtient :

$$I = B \iint_{(V)} \dots \int d\xi_1, d\xi_2 \dots d\xi_m dn,$$

où le nouveau domaine ν est un cylindroïde de l'espace $O\xi_1, \xi_2 \dots \xi_m \eta$, construit sur le domaine σ et borné inférieurement par l'hyperplan $\eta = 0$ et supérieurement par l'hyper surface

$$\eta = \frac{1}{B} F(\xi)$$

Voir figure (2.1).

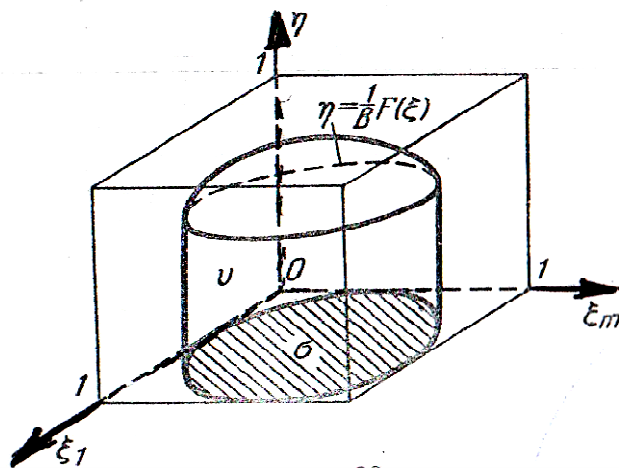


Figure (2.1).

En vertu de l'intégralité (13) le volume ν est intérieur au cube de dimension $(m + 1)$

$$0 \leq \xi_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad 0 \leq \eta \leq 1.$$

Prenons maintenant $m+1$ suites aléatoires indépendantes réparties uniformément sur $[0,1]$

$$\{\xi_i^{(1)}\}, \{\xi_i^{(2)}\}, \dots, \{\xi_i^{(m)}\}, \{\eta_i\},$$

dont les éléments correspondants sont considérés comme les coordonnées des points aléatoires

$$M_i \left\{ \xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \dots, \xi_i^{(m)}, \eta_i \right\} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

De l'espace $O\xi_1, \xi_2 \dots \xi_m \eta$. Si du nombre total de N points aléatoires n points appartiennent au volume ν et $N-n$ points n'y appartiennent pas, on pose approximativement pour N suffisamment grand :

$$I \simeq B \cdot \frac{n}{N}, \quad \dots (15)$$

c'est-à-dire

$$I = B \cdot P \quad (M \in \nu),$$

où le point M peut occuper avec la même probabilité les positions M_1, M_2, \dots, M_N . La relation

$$M \in \nu$$

est vérifiée de même qu'à la première méthode.

Remarque :

Si σ est le cube unité $0 \leq \xi_i \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, m$), pour le point $M_i \left(\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \dots, \xi_i^{(m)}, \eta_i \right)$, dont toutes les coordonnées sont supposées appartenant au segment unité $[0, 1]$, il suffit de vérifier seulement les relations

$$\eta_i \leq \frac{1}{B} F \left(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(2)}, \dots, \xi_m^{(m)} \right).$$

Considérons maintenant le cas général ou la fonction

$$F(\xi) = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$$

Est de signe variable.

Soit

$$-b \leq F(\xi) \leq B, \quad \dots (16)$$

où b et B sont des nombres non négatifs.

Posons

$$F(\xi) = -b + (B + b)\tilde{F}(\xi),$$

alors on aura :

$$\iint_{(\sigma)} \dots \int F(\xi) d\sigma = -b \sigma + (B + b) \iint_{(\sigma)} \dots \int \tilde{F}(\xi) d\sigma,$$

où la fonction $\eta = \tilde{F}(\xi)$, en vertu de l'inégalité(16), vérifie les inégalités

$$0 \leq \tilde{F}(\xi) \leq 1.$$

L'intégrale

$$\iint_{(\sigma)} \dots \int \tilde{F}(\xi) d\sigma = \iint_{(\tilde{v})} \dots \int d\sigma d\eta$$

Peut être calculée par la méthode indiquée ci-dessus.

Pour évaluer la précision de l'égalité approchée.

$$I_0 = \iint_{(\sigma)} \dots \int d\sigma d\eta = p(M\epsilon v) \simeq \frac{n}{N} \quad \dots(17)$$

supposons d'abord qu'on ait affaire aux suites aléatoires idéales des points M_i répartis uniformément ($i = 1, 2, \dots$) et dont les coordonnées appartiennent au segment unité $[0, 1]$.

En vertu du théorème de Bernoulli, l'application de l'inégalité de Tchebychev donne.

$$P\left(\left|\frac{n}{N} - I_0\right| < \xi\right) \geq 1 - \frac{I_0(1-I_0)}{\xi^2 N} \geq 1 - \frac{1}{4\xi^2 N}. \quad \dots (18)$$

En se donnant pour ϵ donner d'une probabilité garantie

$$P\left(\left|\frac{n}{N} - I_0\right| < \epsilon\right) \geq 1 - \delta, \quad \dots (19)$$

on obtient de l'inégalité (18) que la condition (19) à bien lieu si

$$\frac{1}{4 \varepsilon^2 N} = \delta . \quad \dots (20)$$

On en déduit :

$$\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{\delta N}} . \quad \dots (21)$$

Ainsi la précision de l'estimation

$$I_0 \simeq \frac{n}{N} .$$

Pour sa probabilité garantie est inversement proportionnelle à la racine carrée du nombre d'épreuves : $\varepsilon = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$.

Cette circonstance conditionne une convergence relativement lente de la méthode de Monte-Carlo : par exemple, pour diminuer de 10 fois l'erreur du résultat, le nombre d'épreuves doit être centuplé.

Si la précision de l'estimation ε et la probabilité garantie $1-\delta$ sont données, on tire de la formule (20) le nombre d'épreuves nécessaire

$$N = \frac{1}{4 \varepsilon^2 \delta} . \quad \dots (22)$$

Par exemple, pour $\varepsilon=0,001$ et $\delta = 0,01$ on a :

$$N = 25\,000,000 .$$

L'estimation (22) est trop grande et peut être nettement améliorée !

Relevons encore une circonstance importante : Le nombre d'épreuves N ne dépend pas de la dimension de l'intégrale I_0 et donc l'utilisation de la méthode Monte-Carlo est avantageuse pour calculer les intégrales multiples de

dimensions élevées dans lesquelles l'application des formules de cubature usuelles présente de grandes difficultés. Par exemple, pour le calcul approché par la méthode courante de l'intégrale décuple appliquée à un volume unité dans le cas d'un pas $h=0,1$, il faut disposer d'une somme d'environ 10^{10} termes!

Lors de l'application pratique de la méthode de Monte-Carlo pour le calcul des intégrales multiples, dans les cas courants on fait appel aux suites aléatoires de nombres à S rangs réparties uniformément.

Alors, si N est grand, la fraction $\frac{n}{N}$ sera voisine non pas du vrai volume I_0 , mais d'un certain volume fictif \hat{I}_0 qui représente approximativement la mesure relative du nombre de points M de coordonnées

$$\xi_{i=1} = \frac{k_i}{10^s}, \quad \eta = \frac{k}{10^s} \quad \dots(23)$$

$$(i = 1,2, \dots, m ; k; k = 0,1,2 \dots, 10^s),$$

qui se trouvent dans le volume ν de plus, en toute rigueur, \hat{I}_0 change suivant que l'on rapporte les points frontières au volume ν ou non l'erreur totale du résultat est évaluée de la façon suivante :

$$\left| \frac{n}{N} - I_0 \right| \leq \left| \hat{I}_0 - I_0 \right| + \left| \hat{I}_0 - \frac{n}{N} \right|. \quad \dots(24)$$

Le premier terme $\left| \hat{I}_0 - I_0 \right|$ du deuxième membre de l'inégalité (24) est une erreur de calcul ordinaire qui s'obtient en remplaçant l'intégrale I_0 par la somme intégrale relative à la division du volume ν en éléments cubiques dont les sommets appartiennent au réseau (23).

La valeur de cette erreur peut être évaluée à l'aide de l'inégalité

$$\left| \hat{I} - I_0 \right| \leq \bar{\nu} - \underline{\nu},$$

où $\bar{\nu}$ est la somme intégrale supérieure et $\underline{\nu}$ est la somme intégrale inférieure.

La valeur de l'erreur $|\hat{I} - I_0|$ dépend essentiellement du nombre de rangs S des nombres aléatoires.

*Si la frontière du corps ν est lisse par morceaux, pour S suffisamment grand cette erreur peut être rendue aussi petite que l'on veut.

L'inconvénient que présente l'augmentation de s consiste dans l'augmentation du volume des calculs ces derniers devant se faire avec des chiffres supplémentaires.

Le deuxième terme $|\hat{I}_0 - \frac{n}{N}|$ du second membre de l'inégalité (24) s'appelle erreur d'échantillonnage et, comme nous l'avons indiqué dans ce qui précède, peut-être évalué par une méthode probabiliste à l'aide du théorème de Bernoulli.

Conclusion

CONCLUSION :

Avantages de l'intégration par de Monte-Carlo

Malgré sa simplicité, cette approche atténue les conséquences des deux difficultés précédemment mentionnées.

Nous n'avons plus besoin de connaître la forme mathématique de la région d'intégration, mais seulement son volume, qui peut être estimé si nous avons une procédure nous permettant de savoir si un point donné est à l'intérieur de, ou bien à l'extérieur de la région d'intégration, un problème beaucoup plus simple que le précédent.

Mais l'intérêt principal de là l'intégration par simulation de Monte-Carlo réside dans son comportement en grande dimension. Cette question est difficile mais la réponse est simple.

Considérons une méthode quelconque d'intégration numérique déterministe reposant sur le calcul de valeurs de la fonction sur les nœuds d'une grille dans la région d'intégration. Si nous comparons les performances de cette méthode et de celle de la méthode de Monte-Carlo pour des dimensions de plus en plus grandes, il se trouvera une dimension d au-delà de laquelle la méthode de Monte-Carlo sera plus efficace que la méthode déterministe pour un nombre N donné de tirages. Ceci veut-dire que les valeurs de l'intégrale trouvées par la méthode de MC seront, le plus souvent, plus proches de la valeur vraie de l'intégrale que celle trouvée par l'approximation déterministe.

Quel est le prix à payer pour ces avantages ?

En raison de la nature aléatoire de l'échantillonnage de $f(x)$, la valeur obtenue à la fin d'une simulation est la réalisation d'une variable aléatoire. En d'autres termes, deux simulations de MC sur un même problème, toutes choses égales par ailleurs, produiront deux valeurs différentes. Ces valeurs suivent une distribution de probabilité ayant une certaine variance.

Alors qu'une méthode déterministe d'intégration numérique produit une approximation de la valeur d'une intégrale, une simulation de MC produit une estimation de cette valeur. La différence peut paraître subtile, mais elle est importante : il est souvent possible de trouver une borne supérieure à l'erreur d'une approximation, mais il n'y a en général pas de limite supérieure à l'erreur sur une estimation. Tout ce que nous savons, c'est que pour un ε donné, la probabilité pour que cette erreur soit supérieure à ε peut être rendue aussi petite que l'on veut en augmentant le nombre de tirages (ceci est une conséquence de la Loi des Grands Nombres). Bien sûr, une conséquence pratique de ceci est que les simulations de Monte-Carlo sont toujours très longues.

Bibliographies :

1- B.DİMİDOVITCH. et I.MARON. Elément de calcul numérique.

Traduction Française, Editions Mit, 1979, chapitre XVII.

2- N.BAKHVALOV. Méthodes Numériques. Analyse, algèbre, équations différentielles ordinaires. Edition MIR–Moscou, chapitre VI.

Web graphies :

1- www.insp.jussieu.fr/jsnum/old/MC-Meetropolis.pdf

2- www.pequan.lip6.fr/graillat/teach/.../cours.pdf

3- www.damas.ift.ulaval.ca/.../2008-04-28-article.pdf

4- www.aiaccess.net/French/Glossaires/.../f-gn.monte-carlo.htm