RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Amar Telidji de Laghouat

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Polycopié pédagogique

Intitulé :

Cours d'Analyse 4 et Exercices corrigés

Présenté par : **BOUGOUTAIA Amar**

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA)

Email : a.bougoutaia@lagh-univ.dz.

2022/2023

Table des matières

Introduction

Ce document est destiné aux étudiants de deuxième année licence en Mathématiques, sciences de la matière, sciences techniques et ..., comporte la matière d'**Analyse 4**. Il contient des cours bien détaillés avec des exemples importantes. A cause mon expérience, lors de l'enseignement de ce module durant quelques années, j'ai préparé ce polycopié qui contient toutes les notions fondamentales programmées.

Selon le programme proposé, j'ai partagé ce modeste travail en cinq chapitres:

1. Généralités sur les fonctions de plusieurs variables;
2. Différentiabilité;
3. Fonctions implicites et Extremums;
4. Intégrales multiples;
5. Champs de vecteurs, formes différentielles.

A la fin de chaque chapitre, j'ai proposé une série d'exercices corrigés. Je ne termine l'introduction sans présenter le grand hommage plus personnel à mes collègues enseignants qui expertiseront sérieusement ce travail. Je remercie également et tout particulièrement les futurs lecteurs. Enfin, prière de me signaler, s'ils existent des erreurs.

A. Bougoutaia.

CHAPITRE 1

Généralités sur les fonctions de plusieurs variables

Dans ce chapitre on étudie les fonctions de plusieurs variables, on s'intéresse aux fonctions $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ qui a tout $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de D on lui associe $f(x) = (f_1(x), ..., f_p(x))$. On distingue des fonctions scalaires si $p = 1$ et des fonctions vectorielles si $p > 1$.

1.1 Définitions

Définition 1.1.1

Une application de $\mathbb{R}^n$, ou d'une partie de $\mathbb{R}^n$, dans $\mathbb{R}$ est appelée fonction numérique réelle de n variables réelles

Exemple 1.1.2

Les fonctions f et g définies par

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = x+y \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & g(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2} \end{array}$$

sont des fonctions réelles a plusieurs variables (resp. a 2 et 3 variables).

On s'intéressera aussi parfois aux fonctions de n variables et a valeurs vectorielles $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, pour $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)) \in \mathbb{R}^m$. Notons que chacune des fonctions f_i est une fonction de n variables et a valeur réelle. On dit parfois que f est un champ de vecteurs a m composantes définis sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 1.1.3

Pour la fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x \sin y, xyz)$ on a

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & f(x+y+z) = x\sin y \end{array} \quad \text{et} \quad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & g(x,y,z) = xyz \end{array}$$

Définition 1.1.4

Soit E une partie de $\mathbb{R}^n$, $a \in E$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application de E dans $\mathbb{R}^m$. Alors

♣ E est appelé domaine de définition de la fonction f.

♣ L'ensemble $f(E) = \{f(x), x \in E\}$ est appelé l'image de E par f.

♣ Si E est un voisinage de a, i.e. si E contient une boule ouverte de centre a, on dit que f est définie au voisinage de a.

♣ Si $F \subset \mathbb{R}^m$, on appelle image réciproque de F par f, l'ensemble noté $f^{-1}(F)$ où $f^{-1}(F) = \{x \in \mathbb{R}^3, f(x) \in F\}$.

Exemple 1.1.5

Soit f la fonction à deux variables réelles x, y définie par $f(x, y) = x + \log y$. Le domaine de définition de f est $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ car $\log y$ est définie uniquement pour $y > 0$.

L'image de f est $\mathbb{R}$ car pour tout $z \in \mathbb{R}$ on a $z = x + \log y$ où $(x, y) = (z, 1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1.2 Représentation graphique

Une fonction d'une variable définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$ et a valeurs réelles est décrite par son graphe, qui est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2, x \in D\},$$

et que l'on représente par la courbe du plan d'équation $y = f(x)$.

Dans le cas d'une fonction de deux variables définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ et a valeurs réelles on définit de même le graphe

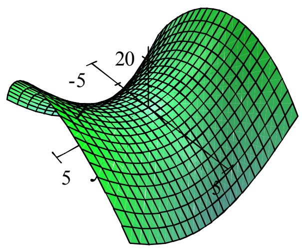
$$G_f = \left\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in D\right\},$$

que l'on peut représenter comme une surface d' equation $z = f(x, y)$ dans l'espace a 3 dimensions.

Exemple 1.2.1

La représentation géométrique de la fonction

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$



La notion de graphe s'étend de manière évidentes au cas des fonctions de n variables.

Définition 1.2.2 (*graphe d'une fonction*)

On appelle graphe d'une fonction f de n variables définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ et a valeurs réelles, l'ensemble des points $(x, f(x)) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ où x parcours D. Le graphe de f est noté

$$G_f = \left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}; x \in D \subset \mathbb{R}^n\right\}.$$

Remarque 1.2.3

Il n'existe aucune méthode évidente pour représenter géométriquement une fonction numérique définie sur une partie de $\mathbb{R}^n, n \geq 3$.

Définition 1.2.2 (*courbe de niveau*)

Soit f une fonction de n variables définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ et a valeurs réelles. Pour tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$, on appelle **courbe de niveau** de la fonction f, l'ensemble C_λ des points de $\mathbb{R}^n$ dont l'image par f vaut λ, c'est- a-dire

$$C_\lambda = \{x \in D; f(x) = \lambda\}.$$

1.3 Limite d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Soit f une fonction d'une partie de $\mathbb{R}^n$ a valeurs dans $\mathbb{R}$, définie au voisinage d'un point a, sauf peut-être en a, et soit $\ell \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est muni d'une norme quelconque $\|.\|$ des normes définies sur $\mathbb{R}^n$ car celles-ci sont equivalentes.

Dans tout ce chapitre si aucune précision n'est donnée, $\|.\|$ désigne l'une quelconque des trois normes connues $\|.\|_1, \|.\|_2, \|.\|_\infty$.

Définition 1.3.1

On dit que la fonction f admet ℓ pour limite au point a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad : \quad 0 < \|x - a\| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

et on écrit $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = \ell$.

On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) au point a si

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0 \quad : \quad 0 < \|x - a\| < \delta \Longrightarrow f(x) > A \text{ (resp. } f(x) < -A).$$

Exercice 1.3.2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = 2x + y^2$. En utilisant la définition montrer que $\lim\limits_{(x,y) \to (1,0)} f(x, y) = 2$.

Remarque 1.3.3

Si une fonction admet une limite en un point alors cette limite est unique.

Démonstration.

Si une fonction f admet deux limites ℓ et ℓ' en un point a alors

$$0 \leq |\ell - \ell'| \leq |\ell - f(x) + f(x) - \ell'| \leq |f(x) + \ell| + |f(x) - \ell| .$$

D'où en faisant tendre x vers a dans l'inégalité précédente on trouve $0 \leq |\ell - \ell'| \leq 0$. Donc $\ell = \ell'$. ■

Exemple 1.3.4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

Pour voir si f admet une limite au point $(0;0)$, on remarque, par exemple, que

$$\lim_{x \to 0} f(x,0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1 \text{ et que } \lim_{y \to 0} f(0,y) = \lim_{x \to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

Par conséquent si f admettait une limite ℓ on aurait $\ell = 1$ et $\ell' = -1$, ce qui est contradictoire d'aprés l'unicité de la limite. Donc f n'admet pas de limite au point $(0,0)$.

Les théorèmes sur les opérations pour les fonctions de n variables admettant des limites en a sont les mêmes que pour les fonctions d'une variable réelle à valeur réelle.

Théorème 1.3.5

Si f a pour limite ℓ en a, la restriction de f à toute courbe continue (non seulement les droites !) passant par a admet la même limite ℓ.

▲ *Attention Pour prouver qu'une fonction de plusieurs variables*

♣ n'admet pas de limite en a, il suffit d'expliciter une restriction à une courbe continue dans $D \cup \{a\}$ passant par a qui n'admet pas de limite, ou deux restrictions qui conduisent à des limites différentes ;

♣ admet ℓ comme limite en a, il faut considérer le cas général : si on a juste que la restriction à toute droite passant par a admet la même limite, on ne peut pas conclure que la limite existe !

Exercice 1.3.6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 - 2x^2 y + 3y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) , \end{cases}$$

Montrer que la restriction de f à toute droite passant par l'origine est continue mais que f n'est pas continue à l'origine.

Correction. Remarquons tout d'abord que la fonction est bien définie dans $\mathbb{R}^2$ puisque

$x^4 - 2x^2y + 3y^2 = (x^2 - y)^2 + 2y^2$

ne s'annule qu'en $(0, 0)$.

La restriction de f aux droites $x = 0$ et $y = 0$ est la fonction nulle. De plus, la restriction de f à la droite $y = mx$, avec $m \neq 0$,

donne

$$f(x, mx) = \frac{mx}{x^2 - 2mx + 3m^2}$$

et tend vers 0 quand x tend vers 0.

Considérons la restriction de f à la parabole $y = x^2$. On a

$$f(x, x^2) = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, $f(x, x^2)$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0.

1.3.1 Coordonnées polaires

Lorsque $n = 2$, il est souvent utile de passer aux coordonnées polaires pour ramener le calcul de la limite d'une fonction de deux variables à celui de la limite d'une fonction d'une seule variable. En effet, tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2 \backslash \{(a, b)\}$ peut être représenté par ses coordonnées polaires centrées autour d'un point (a, b) grâce aux relations : $x = a + r\cos(\theta), y = b + r\sin(\theta)$ avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. Dans cette écriture, r représente la distance entre (a, b) et (x, y) de sorte que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \lim_{r\to 0, \forall\theta} f(a + r\cos(\theta), b + r\sin(\theta)).$$

Exemple 1.3.6

Montrons d'une autre manière que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ avec $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ n'existe pas en utilisant les coordonnées polaires. En posant $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, on a

$$f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{r^2} = \cos^2\theta - \sin^2\theta.$$

Le résultat varie selon la direction θ, donc $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ n'existe pas.

1.3.2 Coordonnées sphériques généralisées

Pour un point x de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $(x_1, ..., x_n)$, on définit les coordonnées sphériques généralisées $(r; \theta_1, ..., \theta_{n-1})$ par

$$\begin{array}{lcl} r & = & \|x\|_2 \\ x_1 & = & r\cos\theta_1 \\ x_2 & = & r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ & \cdots & \\ x_{n-1} & = & r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ x_n & = & r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-1}\cos\theta_n. \end{array}$$

Les coordonnées sphériques constituent le cas particulier $n = 3$ et les polaires $n = 2$.

1.4 Fonction continue

Définition 1.4.1 (*Continuité*). *Une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est continue en un point $a \in D$ si la limite de f en ce point existe et est égale à la valeur de la fonction en a, i.e*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

La fonction est continue sur D si elle est continue en tout point de D.

Ou bien on peut reformuler cette définition à l'aide des suites.

Définition 1.4.2 *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $a \in D$. On dit que f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de D telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.*

Propriété 1.4.3 (*Opérations sur les fonctions continues*)

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions continues de $D \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Soit h une fonction continue de $D' \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^m$.

1. *La fonction $\lambda f + \mu g$ est continue sur D.*

2. *Si $p = 1$ alors $f.g$ est continue sur D. Si de plus g ne s'annule pas sur D, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue.*

3. *Si D' contient l'image de g, alors la fonction $h \circ g$ est continue de D dans $\mathbb{R}^m$.*

Démonstration.

Soient f et g deux fonction continues en a, alors

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} (\lambda f + \mu g)(x) &= \lambda f(a) + \mu g(a) \\
\lim_{x \to a} (fg)(x) &= fg(a) = f(a) g(a) \\
\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) &= \frac{f(a)}{g(a)}.
\end{aligned}$$

Exemple 1.4.4

1) $f(x, y) = x^3 - y^2 x + 3$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ (polynôme du second degré à deux variables).

2) $g(x, y, z) = e^y + xy^2 + z^2$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ comme somme d'une exponentielle et d'un polynôme.

3) $h(x,y) = \ln(x + y^2) - 3$ est continue sur $D = \{f(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y^2 > 0\}$ comme somme du logarithme d'un polynôme (fonction composée) et d'une constante.

Exemple 1.4.5

On considère sur $\mathbb{R}^2$ l'application f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 / \{(0,0)\}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. On étudie maintenant la continuité en $(0,0)$. En passant aux coordonnées polaires $x = r\cos\theta$ et $y = r \sin\theta$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on trouve

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = \frac{r^4 \left|\cos(\theta)^2\right| \left|\sin(\theta)^2\right|}{r^2} \leq r^2 \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

Cela prouve que f est continue en $(0,0)$.

Proposition 1.4.6 (Continuité des fonctions partielles)

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction continue en $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ les p fonctions $f_1, f_2, ..., f_p$ définie par

$$\begin{array}{rccl} f_j: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ & t & \longmapsto & f_j(t) = f(a_1, ..., a_{j-1}, t, a_{j+1}, ..., a_p) \end{array}$$

pour $j = 1, ..., p$ sont continues en a_j.

Remarque. La réciproque est fausse

Exemple 1.4.7

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ses 2 fonctions partielles en $(0,0)$ sont

$$f(0,y) = \begin{cases} \dfrac{0.y}{0+y^2} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

et

$$f(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x.0}{x^2+0} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

sont donc continues. Pourtant f n'est pas continue en $(0,0)$.

Définition 1.4.8 (Prolongement par continuité)

Soient la fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et a un point de $\mathbb{R}^n$ n'appartenant pas à D. Si f a une limite ℓ lorsque x tend vers a on peut étendre le domaine de définition de f à $D \cup \{a\}$ en posant $f(a) = \ell$. On dit que l'on a prolongé f par continuité au point a.

Proposition 1.4.9

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est continue sur D.
2. Pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^p$, $f^{-1}(U) \cap D$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
3. Pour tout fermé F de $\mathbb{R}^p$, $f^{-1}(F) \cap D$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.
4. Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $D \subset \mathbb{R}^n$ convergeant vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$ pour $a \in D$.

1.5 Dérivées partielles

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I, sa dérivée en $a \in I$ est donnée par

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Comme nous considérons des fonction définies sur $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}$, la définition précédente perd son sens parce que diviser par $x - a$, qui est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, n'a aucun sens. Lorsqu'on fixe toutes les variables, sauf une, on peut alors définir les dérivées partielles.

1.5.1 Dérivées partielles premières

Définition 1.5.1

Soient $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a = (a_1, ..., a_n)$ de D. Pour $i = 1, ..., n$ on pose

$$\begin{array}{rccl} g_i : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & g_i(t) = f(a_1, ..., a_{i-1}, t, a_{i+1}, ..., a_n), \end{array}$$

on appelle dérivée partielle par rapport à x_i de f en a et on note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, la dérivée de la fonction g_i en a_i

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, ..., a_n) = g_i'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + h, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{h}$$

Remarque 1.5.2

Dans le cas d'une fonction f de deux variables, les dérivées partielles premières de f au point (x_0, y_0) sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Exemple 1.5.3

Soit

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Les dérivées partielles premières de la fonction f en $(0, 0)$ sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = 0.$$

Remarque 1.5.4 *L'existence des dérivées partielles premières n'implique pas la continuité.*

Exemple 1.5.5 Soit la fonction f définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

f n'est pas continue en $(0,0)$, car en passant aux coordonnées polaires, on trouve

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \cos\theta \sin\theta$$

la limite n'existe pas car elle dépend de θ. Cependant les dérivées partielles premières en $(0,0)$ existent, en effet

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

1.5.2 Dérivées partielles suivant un vecteur

Dans le cas d'une fonction f d'une seul variable, la dérivée en a, $f'(a)$ représente la frontière de la droite perpendiculaire à la courbe de f au point $(a, f(a))$. Cependant, dans le cas des fonctions de plusieurs variables la dérivée perd son sens et obtient une infinité de droites perpendiculaires à la courbe de f, on définie la dérivée d'une fonction de plusieurs variables f suivant un vecteur comme suit:

Définition 1.5.6 (*Dérivée suivant un vecteur*)

*Soient la fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un voisinage du point $a = (a_1, ..., a_n)$ et $v = (v_1, ..., v_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On appelle dérivée suivant un vecteur v (ou **dérivée directionnelle**) de f au point a, la dérivée en $t = 0$ (si elle existe) de la fonction*

$$t \longmapsto f(a_1 + tv_1, ..., a_n + tv_n),$$

qui est définie par

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(a) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1 + tv_1, ..., a_n + tv_n) - f((a_1, ..., a_n))}{t}, \end{aligned}$$

si elle existe.

Dans le cas d'une fonction de deux variables

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2) - f(a_1, a_2)}{t};$$

Pour $v = e_1 = (1, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial e_1}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t}$$

et pour $v = e_1 = (0, 1)$

$$\frac{\partial f}{\partial e_2}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + t) - f(a_1, a_2)}{t}$$

Exemple 1.5.7

Examinons le cas de la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2$ avec $a = (1, -1)$ et $v = (1, 1)$. On a

$$f(1 + t, -1 + t) = (1 + t)^2 - (-1 + t)^2 = 4t \quad \text{et} \quad f(1, -1) = 0,$$

alors

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} &= \lim_{t \to 0} \frac{f(1 + t, -1 + t) - f(1, -1)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{4t}{t} \\ &= 4, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 4$$

1.5.3 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Soit f une fonction définie de $D \subset \mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$

Définition 1.5.8

Soient $\{i_1, ..., i_k\} \in \{1, ..., n\}$. *On dit que* f *admet une dérivée partielle d'ordre* k *au* *point $a \in \mathbb{R}^n$ par rapport aux variables $x_{i_1}, ..., x_{i_k}$ si et seulement si*

$$\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(a), \frac{\partial f}{\partial x_{i_2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(a)\right), ..., \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_{k-1}}}\right) ... \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)(a)\right),$$

existent. On note cette dérivée $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}$.

Dans le cas d'une fonction de deux variables, on a quatre dérivées partielles deuxièmes

1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ est la dérivé deux fois par rapport à x.

2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ est la dérivé deux fois par rapport à y.

3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ est la dérivé une fois par rapport à y, et une fois par rapport à x.

4) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ est la dérivé une fois par rapport à x, et une fois par rapport à y.

Exemple 1.5.9

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x^3 e^y$$

Si x est fixé, $y \longrightarrow f(x, y)$ est une fonction usuelle classique infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ par rapport à x, et si y est fixé, $x \longrightarrow f(x, y)$ est aussi infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ par rapport à x. Les dérivées partielles premières de f sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 3x^2 e^y, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x^3 e^y, \end{aligned}$$

et les dérivées partielles deuxièmes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 6xe^y, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= x^3e^y, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = 3x^2e^y.
\end{aligned}$$

Définition 1.5.10

On dit que la fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *est de classe* C^k *si toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre* k *existent et sont continues. Une fonction est dite de classe* C^∞ *si elle est de classe* C^k *pour tout* $k \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.5.11 (*Théorème de SCHWARZ*) Si les dérivées partielles mixtes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ sont continues en (x_0, y_0), alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)$.

1.6 Exercices corrigé sur le chapitre 1

Exercice 1.6.1

Quelles sont les lignes de niveau (c'est-'à-dire les fonctions $f(x,y) = k$*) pour*

1. $f_1(x,y) = y^2$, avec $k = 1$ et $k = -1$.
2. $f_2(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{\sqrt{x^2+y^2-1}} + \sqrt{8-x^2y^2}$ avec $k = 2$.

Corrigé 1.6.1

1. Pour $k = -1$, $N_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 = -1\}$. Or l'´equation $y^2 = -1$ n'a pas de solutions, donc la courbe de niveaux pour $k = -1$ est vide $N_{-1} = \varnothing$.

Pour $k = 1$, $N_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 = 1\}$. Or l'´equation D'autre part, l'´equation $y^2 = 1$ admet pour solution les droites $y = 1$ et $y = -1$. Donc la courbe de niveaux est la réunion des droites d'équations cartésienne $y = 1$ et $y = -1$.

2. Pour $k = 2$, $N_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f_2(x,y) = 2\}$. Or l'´equation $f_2(x,y) = 2$ donne

$(x^2+y^2)^2 = 16$, ce qui, compte tenu du fait que $x^2+y^2 \geq 0$, donne le cercle $x^2+y^2=4$, cercle centré à l'origine et de rayon 2.

Exercice 1.6.2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

Montrer que

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) \tag{1.1}$$

et que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *n'existe pas.*

Corrigé 1.6.2

On a

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = 0,$$

et il est clair, qu'en passant à la limite pour x tendant vers 0 dans la première et y tendant vers 0 dans la deuxième, on obtient l'égalité (1.1).

D'autre part, $f(x,x) = \dfrac{x^4}{x^4} = 1$, d'où $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = 1$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ne peut pas exister.

Exercice 1.6.3

Étudier l'existence des limites suivantes

1. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x+y\neq 0}} \dfrac{x^2y}{x+y}$ 2. $\lim\limits_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ 2x^3+yz^2\neq 0}} \dfrac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2}$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$ 4. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$.

Corrigé 1.6.3

1. Pour $y = x^4 - x$, on obtient $\dfrac{x^2y}{x+y} = x^2 - \dfrac{1}{x}$ d'où $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x+y\neq 0}} \dfrac{x^2y}{x+y}$ n'existe pas.

2. Si $x=y=z\neq 0$ on a $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2} = \dfrac{2}{3}$ et si $x\neq 0, y=z=0$ on a $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2} = 0$. Il s'ensuit que $\lim\limits_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ 2x^3+yz^2\neq 0}} \dfrac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2}$ n'existe pas.

3. Sur $\mathbb{R}-\{0\}$, la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2} = \dfrac{1}{|x|}$ tend vers $+\infty$ quand x

tend vers zéro d'où $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$ n'existe pas en tant que limite finie.

4. Le long de la demi-droite $x > 0, y = 0, z = 0$, la limite existe et vaut zéro et le long de la demi-droite $x = y = z > 0$ la limite existe et vaut $\frac{1}{3}$ d'où

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2} \text{ n'existe pas.}$$

Exercice 1.6.4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si \ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \ \ (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

Corrigé 1.6.4

On pose $x = y = t$, et on fait tendre t vers 0. On a alors $f(t,t) = \dfrac{1}{2}$.

En faisant tendre t vers 0, on voit que ceci tend vers $\dfrac{1}{2}$, qui n'est pas 0. La fonction f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 1.6.5

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & si \ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \ \ (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

1. *Étudier la continuité de f sur* $\mathbb{R}^2$.
2. *La fonction est-elle bornée*? *Justifier.*

Corrigé 1.6.5

1. Comme $x^2+y^2 > 0$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, f est définie sur $\mathbb{R}^2$, et continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ comme quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$. Si $x > 0, f(x,x) = \sqrt{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x,x) = \sqrt{2} \neq 0$, donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

2. On a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$$|f(x,y)| = \left|\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2,$$

et $f(0,0) = 0$. Donc f est bornée sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.6.6

Posons $f(x,y) = xy \sin\left(\frac{1}{y}\right)$ *si* $y \neq 0$ *et* 0 *pour tout* x *de* $\mathbb{R}$.

1. *Établir que la fonction* f *est continue en tout point de* $\mathbb{R}^2$.

2. *Montrer que* f *admet des dérivées partielles premières par rapport à* x *et par rapport à* y *en tout point* (x, y) *de* $\mathbb{R}^2$ *tel que* $y \neq 0$ *et en* $(0,0)$.

3. *Étudier la continuité des fonctions dérivées partielles* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Corrigé 1.6.6

1. Établir que la fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.

$-$Continuité sur $\mathbb{R}^2 \backslash \Delta$ où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y \neq 0\}$.

Les fonctions $(x,y) \mapsto xy, (x,y) \mapsto \frac{1}{y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \backslash \Delta$ comme fonction polynôme et fonction rationnelle et la fonction $t \mapsto \sin t$ et continue sur $\mathbb{R}$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \Delta$ comme produit et composée de fonctions continues.

$-$ Continuité sur Δ.

Soit $(a, 0)$ dans Δ avec a dans $\mathbb{R}$. On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \Delta$

$$|f(x,y) - f(a,0)| = \left|xy \sin\left(\frac{1}{y}\right)\right| \leq |xy|,$$

mais $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} |xy| = 0$, donc $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} |f(x,y) - f(a,0)| = 0$, d'où la continuité en $(a, 0)$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que f admet des dérivées partielles premières par rapport à x et par rapport à y en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tel que $y \neq 0$, et en $(0,0)$.

– Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \Delta$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \sin\left(\frac{1}{y}\right) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\left(\sin\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{1}{y}\cos\left(\frac{1}{y}\right)\right).$$

– En $(0,0)$,on a

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$ car $f(h,0) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0.$

3– Il est clair que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \backslash \Delta$. Au point $(a,0)$ on a

$\frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,0) - f(a,0)}{h} = 0$ car $f(a+h,0) = f(0,0) = 0$. Donc

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,0)\right| = \lim_{(x,y)\to(a,0)} \left|y \sin\left(\frac{1}{y}\right)\right| = 0,$$

d'où la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(a,0)$.

On a $\frac{\partial f}{\partial y}(a,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,k) - f(a,0)}{k} = \lim_{k\to 0} a.\sin\left(\frac{1}{k}\right)$.

Si $a \neq 0$; cette limite n'existe pas.

Si $a = 0$; on a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0$. Donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|x\left(\sin\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{1}{y}\cos\left(\frac{1}{y}\right)\right)\right|.$$

Pour $x_n = y_n = \frac{1}{2n\pi}$ on a

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{1}{2n\pi}(\sin(2n\pi) - 2n\pi.\cos(2n\pi))\right| = -1 \neq 0,$

d'où la discontinuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$.

Exercice 1.6.7

Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} \ \textit{si} \ \ (x,y) \neq (0,0)\,, \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

Est-ce que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé 1.6.7

Les fonctions polynômiales $(x+y) \to (x+y)^2$ et $(x+y) \to x^2+y^2$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et la fonction $\dfrac{1}{x^2+y^2}$ est continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Leur produit est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

La fonction f est continue en point (x_0,y_0) si la $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = f(x_0,y_0)$. Alors $f(0,0) = 0$, et il faut comparer cette valeur à la $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$. On ne la calcule pas pour toutes les valeurs $(x,y) \to (0,0)$, mais on remarque que par exemple, si $x = y$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(2x)^2}{x^2+x^2} = 2,$$

ce qui implique que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 1.6.8

Posons $f(x,y) = y^2 \sin \dfrac{x}{y}$ si $y \neq 0$ et $f(x,0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Établir que la fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. Étudier la continuité des fonctions dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Corrigé 1.6.8

1. Établir que la fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.

– Continuité sur $\mathbb{R}^2 \backslash \Delta$ où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \neq 0\}$.

Les fonctions $(x,y) \to y^2$ et $(x,y) \to \dfrac{x}{y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \backslash \Delta$ comme fonction polynôme et fonction rationnelle et la fonction $t \to \sin(t)$ et continue sur et continue sur $\mathbb{R}$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \Delta$ comme produit et composée de fonctions continues.

– Continuité sur Δ.

Soit $(a,0)$ dans Δ avec a dans $\mathbb{R}$. On a pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\Delta$

$$|f(x,y)-f(a,0)|=\left|y^2\sin\frac{x}{y}\right|\leq y^2,$$

mais $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} y^2=0$,donc $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)}|f(x,y)-f(a,0)|=0$, d'où la continuité en $(a,0)$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Dérivées partielles premières par rapport à x et par rapport à y en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tel que $y\neq 0$, et en $(a,0)$.

– Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\Delta$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\cos(x/y)\ \text{ et }\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y\left(\sin\left(\frac{x}{y}\right)-x\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right).$$

– En $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0 \text{ car } f(h,0)=f(0,0)=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=0.$$

Il est clair que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2\backslash\Delta$.

Au point $(a,0)$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h,0)-f(a,0)}{h}=0 \text{ car } f(a+h,0)=f(a,0)=0.$$

Donc

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,0)\right|=\lim_{(x,y)\to(a,0)}\left|y\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right|=0,$$

d'où la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $(a,0)$.

On a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,0)=\lim\limits_{k\to0}\dfrac{f(a,k)-f(a,0)}{h}=\lim\limits_{k\to0}a\sin\left(\dfrac{1}{k}\right)$.

Si $a=0$ on a $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0,0\right)=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f\left(0,k\right)-f\left(0,0\right)}{h}=0$. Donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right|=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(2y\sin\left(\frac{x}{y}\right)-x\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right).$$

Pour $y=\dfrac{a}{2n\pi}$ et $a\neq 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(a,\dfrac{a}{2n\pi}\right)=-a$ et

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(a,+\infty)}\left(2y\sin\left(\frac{x}{y}\right)-x\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right) &= \lim_{(x,y)\to(a,+\infty)}\left(\frac{2a}{2n\pi}\sin\left(2n\pi\right)-x\cos\left(2n\pi\right)\right)\\ &= -a\neq\frac{\partial f}{\partial y}\left(a,0\right).\end{aligned}$$

CHAPITRE 2

Différentiabilité

Le but de ce chapitre est de généraliser la notion de dérivée pour une fonction f de plusieurs variables en donnant une définition qui permet de retrouver autant que possible toutes les bonnes propriétés de la dérivation d'une fonction d'une seul variable. Notamment la propriété : En tout point x_0 où la fonction est dérivable, la dérivée doit permettre de définir une fonction simple qui approche f au voisinage d'un points x_0, comme c'est le cas pour l'application $f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ en dimension 1.

2.1 Différentielle d'une fonction

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable au point a de $\mathbb{R}$. On a par définition

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Soit o la fonction définie au voisinage de 0 par

$$o(h) = f(a+h) - f(a) + \frac{f'(a)}{h},$$

alors

$$f(a+h) - f(a) = o(h) + hf'(a)$$

avec

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0.$$

La dérivabilité de la fonction f en a revient à l'existence d'un nombre $f'(a)$ et une fonction o définie au voisinage de 0 vérifiant $\lim\limits_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

Dans toute la suite de ce chapitre U désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et $a = (a_1, ..., a_n)$ un point de $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.1.1 (*Application différentiable*)

1) *On dit que la fonction* $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *est différentiable en* a *s'il existe une application* L *linéaire continue de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0, \tag{2.1}$$

où $h = (h_1, ..., h_n)$

2) *Lorsque l'application* L *existe, elle s'appelle la différentielle de* f *en* a. *On la note* $Df(a)$, *ainsi* (2.1) *devient*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)}{\|h\|} = 0.$$

3) *Si* f *est différentiable en tout point de* U, *on dit que* f *est différentiable sur* U.

Remarque 2.1.2 *La différentiabilité de* f *en* a *est équivalente à l'existence d'une forme linéaire* L *sur* $\mathbb{R}^n$ *telle que*

$$f(a+h) + f(a) + Df(a)(h) + o(h) \tag{2.2}$$

avec $\lim\limits_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

Exemple 2.1.3

Déterminons la différentielle de $f(x,y) = xy$, définie sur $\mathbb{R}^2$, en un point (a,b). On a

$$\begin{aligned} f(a+h_1, b+h_2) &= (a+h_1)(b+h_2) \\ &= ab + ah_2 + bh_1 + h_1h_2 \\ &= f(a,b) + bh_1 + ah_2 + h_1h_2 \end{aligned}$$

Deux candidats à la formule (2.2) s'offrent aisément $Df(a,b)(h_1,h_2) = bh_1 + ah_2$ et $o(h) = h_1h_2$. Comme

$$\frac{|h_1h_2|}{h_1^2 + h_2^2} \leq \frac{1}{2},$$

si on choisit de travailler avec la norme euclidienne, alors

$$\left|\frac{o(h)}{\|h\|}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|h_1h_2|},$$

qui assure que

Proposition 2.1.4

Si f est une application différentiable en a alors elle est continue en a.

Démonstration.

Supposons que f est différentiable en a alors il existe une application linéaire et continue L telle que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0.$$

ainsi, pour tout $h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0$

$$f(a+h) - f(a) = L(h) + o(h)$$

Par linéarité de L, on déduit que

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a).$$

f est continue en a. $\blacksquare$

Remarque 2.1.5

Si f n'est pas continue alors elle n'est différentiable.

Exemple 2.1.6

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

f n'est pas différentiable en $(0,0)$ parce qu'elle n'est pas continue en $(0,0)$.

Proposition 2.1.7

Si f est différentiable au point a, alors sa dérivée directionnel suivant $v = (v_1, ..., v_n)$ est

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = Df(a)(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, v_i.$$

Démonstration.

Soit f une fonction différentiable en a, alors

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)}{\|h\|} = 0.$$

Soit $v \in \mathbb{R}^n$, avec $v \neq 0$, en prenant $h = tv, t \in \mathbb{R}$, on trouve

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a) - Df(a)(tv)}{|t|\,\|h\|} = 0,$$

ainsi

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a) - Df(a)(tv)}{t} = 0.$$

D'autre part, comme $Df(a)$ est linéaire

$$Df(a)(tv) = tDf(a)(v),$$

donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}=Df(a)(v).$$

Remarque 2.1.8

Une application peut admettre en un point des dérivées directionnelles dans toutes les directions et pourtant ne pas être différentiable en ce point.

Proposition 2.1.9

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n, x \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable en x. Alors la différentielle de f en x s'écrit en fonction des dérivées partielles de f en x de la façon suivante

$$Df(x)(h)=\sum_{i=1}^{n}h_i Df(x)(e_i)=\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Ceci nous donne un moyen pratique d'étudier la différentiabilité en un point d'une fonction définie sur un ouvert U.

Proposition 2.1.10

On dit que la fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en a si et seulement si

1) *Les dérivées partielles premières de f en a existent par rapport à toutes les variables;*

2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i}{\|h\|}=0.$

Remarque 2.1.11

Dans le cas d'une fonction de deux variables, f est différentiable en $a=(a_1,a_2)$ si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$ existent et

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)h_1+\dfrac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)h_2}{\|h\|}=0.$$

Remarque 2.1.12.

Le produit, la somme, l'inverse et la composition d'applications différentiables (resp. de classe C^1) est une application différentiable (resp. de classe C^1).

Proposition 2.1.13

Soient U un ouvert et $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, si $f \in C^1(U)$ alors f est différentielles sur U.

On rappel le schéma suivant

$$\boxed{f \in C^1(U)} \;\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}\; \boxed{f \text{ est différentiable sur } U} \begin{array}{l} \nearrow \quad \boxed{f \text{ est continue sur } U} \\ \\ \searrow \quad \boxed{f \text{ est dérivable sur } U} \end{array}$$

Eexmple 3.4

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si} \qquad x = 0. \end{cases}$$

On a donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y\left(2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si} \qquad x = 0, \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si} \qquad x = 0, \end{cases}$$

En considérant la suite $\left(\dfrac{1}{2\pi n}, y_0\right) \in \mathbb{R}^2$ qui tend vers $(0, y_0)$ quand n tend vers l'infini. On a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2\pi n},y_0\right)=-y_0=\lim_{n\to+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)=0.$$

Donc la fonction f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Posons $E=\{(0,y)\in\mathbb{R}^2, y\in\mathbb{R}\}$. Sur $\mathbb{R}^2\backslash E$ la fonction f est de classe C^1 car ses dérivées partielles sont continues. Prouvons la différentiabilité de f sur E.

$$\begin{aligned}\frac{f(h,y+k)-f(0,y)-\left(h\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)+kh\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)\right)}{|h|+|k|} &= \frac{h^2(y+k)\sin\left(\frac{1}{h}\right)}{|h|+|k|}\\ &\leq |h(y+k)|,\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,y+k)-f(0,y)-\left(h\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)+kh\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)\right)}{|h|+|k|}=0.$$

la fonction f est donc différentiable en tout point de E et $Df(0,y)=0$, pour tout $y\in\mathbb{R}$.

2.2 Différentielle des fonctions vectoriels

Soit

$$\begin{array}{rccl} f: & U\subset & \mathbb{R}^n\rightarrow & \mathbb{R}^p\\ & & x\longmapsto & f(x)=(f_1(x),...,f_p(x))\end{array}$$

telle que $x=(x_1,...,x_n)$ avec n,p dans $\mathbb{N}^*$.

2.2.1 Continuité des fonctions à valeur vectoriel

On dit que la fonction f définie au voisinage de a est continue si et seulement si

$$\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x\in B(a,\alpha)\Longrightarrow\|f(x)-f(\alpha)\|<\varepsilon.$$

c'est-à-dire f est continue en a si et seulement si toute ses composantes sont continues an a.

Exemple 2.2.1

La fonction

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^3 \to & & \mathbb{R}^4 \\ & (x,y,z) \longmapsto & & f(x,y,z) = \left(2x+y, 5, \cos x \sin z, e^{x^2-y-z}\right) \end{array}$$

est continue sur $\mathbb{R}^3$ car toute ses composantes le sont.

Définition 2.2.2

On dit que f définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}^p$ est différentiable au point a, si ses composantes $f_i, i = 1, ..., p$ sont différentiables au point a.

Remarque 2.2.3

Soit $f = (f_1, ..., f_p)$ une fonction de $U \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ différentiable en $a \in U$. La différentielle de f est définie par

$$\begin{array}{rrl} Df(a): & \mathbb{R}^n \to & \mathbb{R}^p \\ & h \longmapsto & Df(a)(h) = (Df_1(a)(h), ..., Df_p(a)(h)). \end{array}$$

2.2.2 Matrice Jacobienne

On appelle matrice Jacobienne de $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ au point $a \in \mathbb{R}^n$ la matrice $n \times p$

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ ... & ... & .. & ... \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

la colonne de l'ordre j de la matrice représente les dérivées partielles de f par rapport à x_i.

Exemple 2.2.4 Soit la fonction f définie par

$$f(x,y) = \left(x^2y, \cos y, e^x\right)$$

Posons $f_1(x,y) = x^2y$, $f_2(x,y) = \cos y$ et $f_3(x,y) = e^x$.

La matrice Jacobienne de f est

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 0 & -\sin y \\ e^x & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 2.2.5

Soit la fonction

$$f(r,\theta,\varphi) = (r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi; r\sin\varphi).$$

Posons $f_1(r,\theta,\varphi) = r\cos\theta\cos\varphi$, $f_2(r,\theta,\varphi) = r\sin\theta\cos\varphi$ et $f_3(r,\theta,\varphi) = r\sin\varphi$.

On a

$$\begin{aligned} J_f(r,\theta,\varphi)) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r}(r,\theta,\varphi) & \frac{\partial f_1}{\partial \theta}(r,\theta,\varphi) & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi}(r,\theta,\varphi) \\ \frac{\partial f_2}{\partial r}(r,\theta,\varphi) & \frac{\partial f_2}{\partial \theta}(r,\theta,\varphi) & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi}(r,\theta,\varphi) \\ \frac{\partial f_3}{\partial r}(r,\theta,\varphi) & \frac{\partial f_p}{\partial \theta}(r,\theta,\varphi) & \frac{\partial f_p}{\partial \varphi}(r,\theta,\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Définition 2.2.6

f est une fonction de classe C^1 sur $U \subset \mathbb{R}^n$ si ses composantes $f_1, ..., f_p$ sont de classe C^1 sur U.

Définition 2.2.7 (*Différentielle et matrice Jacobienne*)

Soit f une fonction différentiable sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}^p$, la différentielle de f au point a, est donnée par

$$Df(a)(h) = J_f(a).h = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ ... & ... & .. & ... \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ ... \\ h_n \end{pmatrix}, \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Proposition 2.2.8 (*Matrice Jacobienne de la composition*)

Soient f une fonction de classe C^1 sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ et g une fonction de classe C^1 sur une ouvert de $\mathbb{R}^p$ inclus dans $f(U)$ dans $\mathbb{R}^q$ alors la composition $g \circ f$ définie sur U dans $\mathbb{R}^q$ est de classe C^1 sur U et sa matrice Jacobienne est donnée par

$$J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a).$$

Exemple 2.2.9

On considère les fonctions

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = (x+y, xy) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g: \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \longmapsto & g(u,v) = (u^2+v^2, u^2-v^2) \end{array}$$

soit h la composition des fonction g et f, on a

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_g(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{pmatrix}$$

h est de classe C^1.

$$J_h(x,y) = J_g(x+y, xy) \times J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix},$$

donc

$$J_h(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x+y) + 2xy^2 & 2(x+y) + 2x^2y \\ 2(x+y) - 2xy^2 & 2(x+y) - 2x^2y \end{pmatrix}$$

Théorème 2.2.10

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et V un ouvert de $\mathbb{R}^p$, f une fonction de U dans V, et g une fonction de V dans $\mathbb{R}$, a un point de U.

Si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$, alors la fonction $g \circ f$ est différentiable en a puis

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a).$$

2.2.3 Quelques opérateurs différentielle

Le Gradient ∇ est définie par

$$\begin{aligned} \nabla &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n} \right), \\ \nabla f &= \overrightarrow{\text{grad}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right). \end{aligned}$$

Le Laplacien Δ

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \\ \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}. \end{aligned}$$

La divergence div

$$\operatorname{div} \overrightarrow{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

2.3 Exercices corrigé sur le chapitre 2

Exercice 2.3.1

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^p y^q}{x^2 - xy + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

où p et q sont des entiers non nuls.

1. *Démontrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ réels, $|xy| \leq x^2 - xy + y^2$.*
2. *Pour quelles valeurs de p et q cette fonction est-elle continue ?*
3. *Montrer que si $p + q = 2$, alors f n'est pas différentiable.*

Corrigé 2.3.1

1. On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\left(|x|^2 - |y|^2\right) = x^2 + y^2 - 2|xy| \geq 0$, donc $x^2 + y^2 \geq 2|xy|$. D'où $|xy| \leq x^2 - xy + y^2$.

2. La continuité sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ est évidente comme fonction rationnelle de domaine de définition $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

Seule la continuité en $(0,0)$ pose problème. On a donc

$$f(x,y) = \frac{|xy| \left|x^{p-1} y^{q-1}\right|}{x^2 - xy + y^2}$$

$*$ si $p - 1 = q - 1 = 0$, c'est-à-dire, $p + q = 2$, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$.

$*$ si $p - 1 \neq 0$ et $q - 1 \neq 0$, le dernier membre de l'inégalité tend vers 0, dans ce cas $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

En conclusion si $p + q = 2$, la fonction n'est pas continue.

3. Si $p+q=2$, la fonction f n'est pas continue donc elle ne peut pas être différentiable.

Exercice 2.3.2

Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ et $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-g(y)}{x-y} & si\ x\neq y\\ g'(x) \quad si\ x\neq y\end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en tout point de $\mathbb{R}^2$ et calculer sa différentielle.

Corrigé 2.3.2

En tout point (x_0,y_0) avec $x_0\neq y_0$, f est continue et même de classe $\mathcal{C}^2$ car composée (projections sur les axes (Ox) et (Oy)), différence et quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

Dans ces points, la différentielle de f est donnée par la matrice jacobienne

$$\begin{aligned}\nabla f(x_0,y_0) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\\ &= \left(\frac{g'(x_0)(x_0-y_0)-(g(x_0)-g(y_0))}{(x_0-y_0)^2},\frac{-g'(y_0)(x_0-y_0)-(g(x_0)+g(y_0))}{(x_0-y_0)^2}\right)\end{aligned}$$

qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ (g étant de classe $\mathcal{C}^2, g'$ est de classe $\mathcal{C}^1$).

Montrons que f est continue aux points de la forme (a,a).

Le développement limité $(\mathcal{DL})$ de g à l'ordre 2 entre x et y donne

$$g(y)=g(x)+(y-x)\,g'(C_{xy})\ \text{avec}\ C_{xy}\in[x,y]$$

d'où

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)}\frac{g(x)-g(y)}{x-y}=\lim_{(x,y)\to(a,a)}g'(C_{xy})=g'(a)=f(a,a)$$

car comme (x,y) tend vers $(a,a), x$ et y tendent tous les deux vers a et donc C_{xy} aussi (et g' est continue).

Pour montrer que f est $\mathcal{C}^1$ (sachant que f est continue), il suffit de montrer que la différentielle de f se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}^2$.

Le $\mathcal{DL}$ de g à l'ordre 2 entre x_0 et y_0 est

$$g(x_0) = g(y_0) + (x_0 - y_0)\, g'(y_0) + \frac{(x_0 - y_0)^2}{2} g''(C_1) \text{ avec } C_1 \in [x_0, y_0],$$

$$g(y_0) = g(x_0) + (y_0 - x_0)\, g'(x_0) + \frac{(y_0 - x_0)^2}{2} g''(C_2) \text{ avec } C_2 \in [y_0, x_0].$$

On a donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{(x_0 - y_0)^2 g''(C_1)}{2(x_0 - y_0)^2} = \frac{g''(C_1)}{2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{(x_0 - y_0)^2 g''(C_2)}{2(x_0 - y_0)^2} = \frac{g''(C_2)}{2}.$$

La fonction g étant de classe $\mathcal{C}^2$, on a

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} Df(x,y) = \left(\frac{g''(C_1)}{2}, \frac{g''(C_2)}{2}\right),$$

et donc Df se prolonge par continuité sur tout $\mathbb{R}^2$, f est donc bien de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 2.3.3

Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 (y-1)^2}{x^4 + (y-1)^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,1) \\ 0 \quad \text{si } (x,y) = (0,1) \end{cases}$$

1. *Donner D_f le domaine de définition.*
2. *Montrer que f est continue sur D_f.*
3. *Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour tout $(x,y) \in D_f$.*
4. *Étudier la différentiabilité de f sur D_f.*

Corrigé 2.3.3

1. Le domaine de définition D_f est

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x,y) \neq (0,1)\right\} \cup \{(0,1)\} = \mathbb{R}^2.$$

2. Montrons que f est continue sur D_f.

(a) Pour $(x,y) \neq (0,1)$ la fonction est une fonction rationnelle de domaine de définition $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,1)\}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,1)\}$.

(b) Pour $(x,y) = (0,1)$ on a

$$|f(x,y) - f(0,1)| = \frac{x^3 (y-1)^2}{x^4 + (y-1)^4}.$$

On sait que $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, donc

$$\begin{aligned} \left|x^3 (y-1)^2\right| &= \left|x^2 (y-1)^2\right| . |x| \\ &\leq \frac{1}{2}\left|x^4 + (y-1)^4\right| . |x| \end{aligned}$$

et on a alors

$$|f(x,y) - f(0,1)| \leq |x| \text{ et } \lim_{(x,y)=(0,1)} |x| = 0$$

d'o'u la continuité de f en $(0,1)$.

3. *Calculer* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *pour tout* $(x,y) \in D_f$

(a) Pour $(x,y) \neq (0,1)$ faire les calculs.

(b) Pour $(x,y) = (0,1)$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,1) - f(0,1)}{h} = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,1+k) - f(0,1)}{k} = 0.$$

4. Étudier la différentiabilité de f sur D_f.

(a) Pour $(x,y) \neq (0,1)$ f est différentiable car les fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues pour tout $(x,y) \neq (0,1)$.

(b) Pour $(x, y) = (0, 1)$ on a

$$\left| \frac{f(h, 1+k) - f(0,1) - h\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1) - k\dfrac{\partial f}{\partial k}(0,1)}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| = \left| \frac{h^3 + (k-1)^2}{(h^4 + (k-1)^4)\sqrt{h^2+k^2}} \right|,$$

dont la limite, quand (h, k) tend vers $(0, 0)$, n'est pas nulle. Ce qui prouve que la fonction n'est pas différentiable en $(0, 1)$.

Exercice 2.3.4

Soit f la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{\sqrt{x^4 + y^2}} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \quad \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. *Soit D une droite quelconque passant par l'origine. Montrer que la restriction de f à D est continue en* $(0, 0)$.

2. *Peut-on en déduire que f est continue en* $(0, 0)$?

3. *Est -ce que f est différentiable en* $(0, 0)$?

Corrigé 2.3.4

1. Une droite de $\mathbb{R}^2$ passant par l'origine a pour équation cartésienne $y = \alpha x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, ou $x = 0$. On a :

(a) si $y = \alpha x$, alors $f(x, \alpha x) = \dfrac{\alpha x^3}{\sqrt{x^4 + \alpha^2 x^2}} \sim \alpha x$ et $\lim\limits_{x \to 0} \alpha x = 0$.

(b) si $x = 0$, alors $f(0, y) = 0$

f est donc continue suivant ces deux directions.

2. Peut-on en déduire que f est continue en $(0, 0)$?

Pourtant, on va prouver que f n'est pas continue en $(0, 0)$, et c'est une erreur qu'il ne faut pas reproduire. En effet, si on pose $y = x^2$, alors

$$f\left(x, x^2\right) = \frac{x^4}{\sqrt{x^4 + x^4}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

qui ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers 0. Donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

3. La fonction f n'est pas continue en $(0,0)$ donc elle ne peut pas être différentiable en $(0,0)$.

Exercice 2.3.5

Soit f la fonction de deux variables définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} f_1(x,y) = (x^2 - y^2)\sin\left(\dfrac{x}{x-y}\right), & \text{si } x \neq y \\ f_2(x,y) = 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

1. *Donner D_f le domaine de définition de f et étudier la continuité de f au point (a,a) pour $a \in \mathbb{R}$.*

2. *Calculer les dérivées partielles premières par rapport à x et y en tout point (x,y) pour $x \neq y$ de $\mathbb{R}^2$.*

3. *Calculer les dérivées partielles premières par rapport à x et y en tout point (a,a) pour $a \in \mathbb{R}^*$.*

4. *Étudier la différentiabilité de f en $(0,0)$.*

Corrigé 2.3.5

1. *Domaine de définition de f.*

On a $D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2}$. En effet $D_{f_1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$ et $D_{f_2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$.

Continuité au point (a,a) pour $a \in R$.

Au voisinage de (a,a) on a

$$|f(x,y) - f(a,a)| = \left|(x^2 - y^2)\sin\left(\frac{x}{x-y}\right)\right| \leq \left|x^2 - y^2\right| \underset{(x,y)\to(a,a)}{\longrightarrow} 0$$

alors la fonction f est continue en (a,a).

2. *Calcul des dérivées partielles premières.*

Pour tout (x, y) tel que $x \neq y$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2x(x-y)\sin\left(\dfrac{x}{x-y}\right) - y(x+y)\cos\left(\dfrac{x}{x-y}\right)}{x-y}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2x(x-y)\sin\left(\dfrac{x}{x-y}\right) + (x+y)\cos\left(\dfrac{x}{x-y}\right)}{x-y}. \end{cases}$$

3. *Calculer les dérivées partielles premières par rapport à x et y en tout point (a, a) pour $a \in \mathbb{R}^*$.*

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,a)-f(a,a)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\left((a+h)^2-a^2\right)\sin\left(\dfrac{a+h}{h}\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(ah+h^2)\sin\left(\dfrac{a+h}{h}\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(a+h)\sin\left(\frac{a+h}{h}\right), \end{aligned}$$

cette limite n'existe pas donc f n'est pas dérivable par rapport à x au point (a, a) pour $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{k\to 0}\frac{f(a,a+k)-f(a,a)}{k} &= \lim_{k\to 0}\frac{\left(a^2-(a+k)^2\right)\sin\left(\dfrac{a}{k}\right)}{k} \\ &= \lim_{k\to 0}\frac{(-ak-k^2)\sin\left(\dfrac{a}{k}\right)}{k} \\ &= \lim_{k\to 0}(-a-k)\sin\left(\frac{a}{k}\right), \end{aligned}$$

de même cette limite n'existe pas donc f n'est pas dérivable par rapport à x au point (a, a) avec $a \neq 0$.

4. Différentiabilité de f en $(0,0)$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\left(\dfrac{h}{h}\right)}{h}=0,$$

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}(-k)\sin\left(\frac{0}{-k}\right)=0.$$

Donc f est différentiable en $(0,0)$ et de différentiel $df(0;0)=0$.

Exercice 2.3.6

Soit f une fonction numérique de deux variables de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0. \tag{2.3}$$

On pose $u=xy$ et $v=x/y$ et $f(x,y)=g(u,v)$.

1. *Donner une équation aux dérivées partielles (E) vérifiée par g.*
2. *Résoudre (E) puis déterminer la fonction f solution de (2.3).*

Corrigé 2.3.6

1. Donner une équation aux dérivées partielles (E) vérifiéee par h.

$$g(u,v)=f(\sqrt{uv},\sqrt{\frac{u}{v}})h \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*,$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial u}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}}\frac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{uv},\sqrt{\frac{u}{v}})-\frac{1}{2v}\sqrt{\frac{u}{v}}\frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{uv},\sqrt{\frac{u}{v}})=0.$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{1}{4v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{1}{4\sqrt{uv}}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{1}{4v\sqrt{uv}}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2u}\frac{\partial g}{\partial v}.$$

Donc l'équation aux dérivées partielles vérifiée par g est

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v)=\frac{1}{2u}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$$

2. Résoudre (E) puis déterminer la fonction f solution de (2.3) :

On a

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = \frac{1}{2u}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)(u,v) = \frac{1}{2u}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v).$$

Si on pose $h(u) = \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)$ on obtiendra l'équation différentielle $h'(u) = \dfrac{1}{2u}h(u)$ dont la solution générale est $h(u) = c(v)\sqrt{u}$ où $v \to c(v)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, par suite on a

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = c(v)\sqrt{u}$$

et par intégration de cette dernière équation différentielle on aura

$$g(u,v) = \sqrt{u}F(v) + H(u)$$

où F désigne une primitive de c et H est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

Finalement la fonction

$$f(x,y) = F(\frac{x}{y})\sqrt{xy} + H(xy),$$

où F et H sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, est solution générale de (2.3). Inversement, on vérifie facilement que de telles fonctions sont bien solutions de l'équation (2.3).

CHAPITRE 3

Fonctions implicites et Extremums

3.1 Théorèmes d'inversion local

Le est d'étudier les ensembles de $\mathbb{R}^n$ définis par une équation de la forme

$$f(x_1, ..., x_n) = 0$$

où f est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Cela signifie que l'on considère la partie de $\mathbb{R}^n$ définie par définie par

$$\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, f(x_1, ..., x_n) = 0\}.$$

On sait déjà étudier quelques cas simples. Par exemple, on est capable de représenter les ensembles de $\mathbb{R}^2$ d'équations

$$x + y - 1 = 0, \quad y - x^2 \sin(x) = 0, \quad x^2 + y^2 - 2 = 0.$$

Dans les deux premiers cas, le plus simple pour étudier l'ensemble considéré est de réécrire l'équation sous la forme $y = \varphi(x)$. L'ensemble étudié n'est alors rien que le graphe de la fonction φ. On en déduit qu'on a affaire à une courbe, et peut obtenir toutes sortes d'informations utiles. Par exemple, en calculant la dérivée de la fonction φ, on peut obtenir la tangente a cette courbe en tout point. Dans le troisième cas on ne peut pas mettre l'équation sous la forme $y = \varphi(x)$, mais on peut la mettre sous la forme $x = \varphi(y)$. On peut alors procéder exactement de la même facon, à ce détail près qu'il faut étudier le graphe d'une fonction pour laquelle c'est l'abscisse qui dépend de l'ordonnée. Pour le dernier cas, on a simplement reconnu l'équation bien connue d'un cercle. Les choses se compliquent si on considère par exemple l'ensemble de $\mathbb{R}^2$ d'équation

$$x^3 - 2xy + 2y^2 - 1 = 0.$$

Il n'est pas clair du tout qu'on puisse mettre l'équation sous la forme $y = \varphi(x)$ ou $x = \varphi(y)$ pour une certaine fonction φ.

3.1.1 Inversions locale et globale

Définition 3.1.1

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On dit qu'une application $f : U \to V$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V si :

1) f est une bijection de U sur V.

2) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

3) f^{-1} est $\mathcal{C}^1$ sur V.

Remarque 3.1.2

Si en remplace dans la définition précédente $\mathcal{C}^1$ par $\mathcal{C}^k$ avec $k > 1$, on dit que f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U sur V.

Théorème 3.1.3 (*Inversion globale*)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application de classe $\mathcal{C}^k$. Les deux proposition suivantes sont équivalentes

1) f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U sur $f(U)$.

2) f est injective et si pour tout $x \in U$ et $Df(x)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^p$.

Exemple 3.1.4

Soit l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \left(\sin\left(\frac{y}{2} - x\right), \sin\left(\frac{x}{2} - y\right)\right).$$

Montrons que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$.

1) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car les composantes le sont. On a

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} \\ \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} & -1 \end{pmatrix},$$

alors

$$Df(x,y)(h_1,h_2) = J_f(x,y).h = \left(-h_1 + \frac{h_2}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right), \frac{h_1}{2}\cos\frac{x}{2} - h_2\right).$$

D'autre part

$$\det(J_f(x,y)) = 1 - \frac{1}{4}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2} \neq 0.$$

Par conséquent la jacobienne est inversible et $Df(x,y)$ l'est aussi.

2) Soient (x_1,y_1) et (x_2,y_2) de $\mathbb{R}^2$. On a

$$f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2),$$

donc

$$\sin\left(\frac{y_1}{2}\right) - x_1 = \sin\left(\frac{y_2}{2}\right) - x_2 \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{x_1}{2}\right) - y_1 = \sin\left(\frac{x_2}{2}\right) - y_2,$$

puis

$$\sin\left(\frac{y_1}{2}\right) - \sin\left(\frac{y_2}{2}\right) = x_1 - x_2 \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{x_1}{2}\right) - \sin\left(\frac{x_2}{2}\right) = y_1 - y_2.$$

D'après le théorème des accroissements finis, on a

$$|\sin(b) - \sin(a)| \leq |b-a|, \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,$$

en déduit alors que

$$|x_1 - x_2| \leq \left|\frac{y_1}{2} - \frac{y_2}{2}\right| \text{ et } |y_1 - y_2| \leq \left|\frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}\right|,$$

d'où

$$|x_1 - x_2| \leq \frac{1}{4}|x_1 - x_2|,$$

par conséquent

$$x_1 = x_2 \text{ et } y_1 = y_2,$$

donc f est injective, et comme $\mathbb{R}^2$ est un ouvert et $\det(J_f(x,y)) \neq 0$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, d'après le théorème d'inversion globale f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et $f(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert.

3.2 Fonctions implicites

Théorème 3.2.1 (*des fonctions implicites*)

Soient n, m et p de $\mathbb{N}^*$, et f une application de classe $\mathcal{C}^k$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Soit (x_0, y_0) un point de U tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et tel que la différentielle partielle $D_y f(x_0, y_0)$ (c'est-à-dire la différentielle en y_0 de $y \mapsto f(x_0, y_0)$) soit un isomorphisme de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^p$. Il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert V de y_0 dans $\mathbb{R}^m$ et une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ définie sur U à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, tels que

1− $U \times V \subset U$

2− $\{(x,y) \in U \times V : f(x,y) = 0\} = \{(x, \phi(x)) : x \in U\}$, autrement dit

$$\{(x,y) \in U \times V \text{ et } f(x,y) = 0\} \Leftrightarrow \{(x, \phi(x)) \text{ et } x \in U\}.$$

La différentielle de en un point $x \in U$ est donnée par

$$D\phi(x) = -\left(D_y f(x, \phi(x))\right)^{-1} \circ D_x f(x, \phi(x)).$$

Théorème 3.2.2 (*Théorème des fonctions implicites, version* $\mathbb{R}^2$)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^k$, avec $k \geq 1$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tel que

$$f(a, b) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0.$$

Alors il existe des voisinages V et W de a et b dans $\mathbb{R}$ et une application $\phi : V \to W$ de classe $\mathcal{C}^k$ tels que $V \times W \subset U$ et

$$\forall x \in V, \forall y \in W, \quad f(x, y) = 0 \Longleftrightarrow y = \phi(x).$$

En outre on peut choisir V et W de sorte que la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ne s'annule pas sur $V \times W$ et alors

$$\forall x \in V, \quad \phi'(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))}.$$

Remarque 3.2.3

Si la dérivée partielle de F par rapport a x est non nulle en (a, b), alors de la même facon l'ensemble d'équation $f(x, y) = 0$ coïncide au voisinage de (a, b) avec le graphe donnant x en fonction de y. Si on oublie les restes d'ordre 2 ou plus on peut écrire

$$f(x, y) \simeq \underbrace{f(a, b)}_{=0} + (x - a)\frac{\partial F}{\partial x}(a, b) + (y - b)\frac{\partial F}{\partial y}(a, b).$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} f(x,y)=0 &\Leftrightarrow (x-a)\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)+(y-b)\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)=0 \\ &\Leftrightarrow y \simeq b-(x-a)\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)}. \end{aligned}$$

C'est bien une formule donnant y en fonction de x. Bien entendu, le symbole $\simeq$ n'a pas de sens et ce calcul n'est en aucun cas une démonstration.

Une fois l'existence de démontrée, on écrit que pour tout $x \in V$ on a

$$f(x,\phi(x))=0$$

En dérivant par rapport à x on obtient pour tout $x \in V$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,\phi(x))+\phi'(x)\frac{\partial F}{\partial y}(x,\phi(x))=0.$$

ce qui donne bien la formule attendue pour 0.

En pratique il faut refaire ce raisonnement simple, et non apprendre la formule puis se tromper en l'utilisant.

Exemple 3.2.4

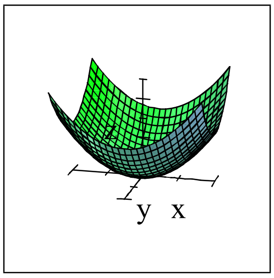
Montrons que la relation $x^4+x^3y^2-y+y^2+y^3=1$ définit y comme fonction de x au voisinage du point $(-1,1)$.

Soit la fonction f définie par

$$f(x,y)=x^4+x^3y^2-y+y^2+y^3-1 \tag{3.1}$$

* On note que $(-1,1)$ est une solution de l'équation $f(x,y)=0$. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 4x^3+3x^2y^2, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2x^3y+2y+3y^3-1, \end{aligned}$$



puis $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = 2 \neq 0$, alors d'après le théorème des fonctions implicites il existe une et une seule fonction $y = g(x)$ définie au voisinage de 1 tel que $f(x, g(x)) = 1$.

** On a

$$g'(-1) = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,1)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,1)} = \frac{1}{2}.$$

3.3 Extremums libres

Définition 3.3.1

1. On dit que f admet un maximum global sur U en a si

$$\forall x \in U, \quad f(x) \leq f(a).$$

2. On dit que f admet un minimum global sur U en a si

$$\forall x \in U, \quad f(x) \geq f(a).$$

Remarque 3.3.2

L'étude de l'existence d'extremum sur un domaine non borné n'est pas facile.

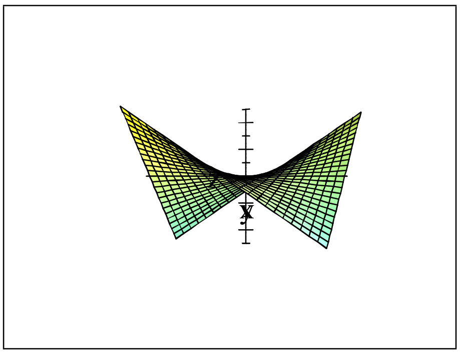
Exemple 3.3.3

1) La fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ admet un minimum en $(0, 0)$. En effet

$$f(x, y) \geq f(0, 0) = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Cependant $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x,y) = +\infty$, f n'admet pas un maximum.

2) La fonction $f(x,y) = xy$



n'admet pas un extremum car $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x,-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x,x) = +\infty$.

Définition 3.3.4

Soit la fonction $f : U \to \mathbb{R}$

1) On dit que f admet un maximum local au point $a \in U$, s'il existe une boule ouverte $B(a,r) \subset U$ telle que

$$f(x) \leq f(a), \quad \forall x \in B(a,r).$$

2) On dit que f admet un minimum local au point $a \in U$, s'il existe une boule ouverte $B(a,r) \subset U$ telle que

$$f(x) \geq f(a), \quad \forall x \in B(a,r).$$

Définition 3.3.5 (*Points critique*)

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f admet en $a \in U$ un point critique si f est differentiable en a et

$$Df(a) = 0.$$

Proposition 3.3.6 (*Condition nécessaire d'existence d'extremum local*)

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable en a. Si f admet en $a \in U$ un extremum local, alors a est un point critique de f, c'est-à-dire

$$Df(a) = 0.$$

Remarque 3.3.7 Après avoir déterminé le point critique a, si on arrive à montrer que le signe de la différence $f(x) - f(a)$ au voisinage de a est constant, il s'agit d'un extrémum local (un minimum si cette différence est positive, un maximum si elle est négative). Sinon, il s'agit d'un point-col (ou point-selle). Si le signe est constant pour tout x, alors l'extrémum est global.

Exemple 3.3.8

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$$

Afin de déterminer les point critique de f, on calcule les dérivées partielles premières

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y - 3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y - 6 \end{cases}$$

L'annulation simultanée de ces dérivées partielles donnent les points critiques. On a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ x + 2y - 6 = 0. \end{cases}$$

après résolution du système on trouve que seul $(0, 3)$ est un point critique de f.

Posons $u = x$ et $v = y - 3$ pour se ramener en $(0, 0)$. Alors

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(u, v + 3) \\ &= u^2 + uv + v^2 - 9 \\ &= \left(u + \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3v^2}{4} - 9 \\ &\geq f(0, 3). \end{aligned}$$

Alors $(0, 3)$ est un minimum local, et même global de f.

Remarque 3.3.9

La proposition 3.3.6 donne une condition nécessaire et non suffisante.

Exemple 3.3.10

1) La fonction

$$\begin{array}{rcll} f: & [0,1]\times[0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x^2+y^2 \end{array}$$

admet un maximum au point $(1,1)$, cependant

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) \neq 0.$$

$[0,1]\times[0,1]$ n'est pas ouvert.

2) La fonction

$$\begin{array}{rcll} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & |x|+|y| \end{array}$$

admet un maximum au point $(0,0)$, mais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ n'existent pas.

Proposition 3.3.11 (*Condition nécessaire d'extremum local : deuxième ordre*)

Soit $f: U \to \mathbb{R}$ une application deux fois différentiable en a. Si f admet en $a \in U$ un minimum local (resp. un maximum), alors a est un point critique de f et $D^2f(a)(h,h) > 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ (resp. $D^2f(a)(h,h) \leq 0$).

Remarque 3.3.12

La proposition 3.3.11 donne une condition nécessaire et non suffisante.

3.3.1 Cas des fonctions de deux variables

Théorème 3.3.13

Soit U un ouvert $\mathbb{R}^2$, $f: U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in U$ un point critique de f. Alors, avec les notations

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \text{ et } \Delta = s^2 - rt$$

1) Si $\Delta < 0$ et $r > 0, f$ admet en a un minimum local.

2) Si $\Delta < 0$ et $r < 0, f$ admet en a un maximum local.

3) Si $\Delta > 0$, f n'admet en a ni maximum ni minimum local, mais un point selle.

4) Si $\Delta = 0$, on ne peut conclure.

En résumé, si a est un point critique de f, sa nature est déterminée par le tableaux suivant

$\Delta = s^2 - rt$	$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$	Nature du point a
$-$	$+$	minimum local
$-$	$-$	maximum local
$+$		point-selle
0		on ne peut pas conclure

Exemple 3.3.14

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = 3x^3 + 3y^3 - x - y$$

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Afin de déterminer les points critiques de f, on calcul les dérivées partielles premières de f

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 9x^2 - 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 9y^2 - 1. \end{cases}$$

L'annulation simultanée de ces dérivées partielles donnent les points critiques

$$\begin{cases} 9x^2 - 1 = 0, \\ 9y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Le système admet donc 4 solutions qui sont les points critiques de f

$$a_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad a_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right), \quad a_3 = \left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad a_4 = \left(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\right).$$

Pour déterminer la nature des points critiques, on calcule les dérivées second

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 18x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 18y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0.$$

- En $a_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, on a $\Delta = -36 < 0$ et $r = 6 > 0$, , f admet en a_1 un minimum local.

- En a_2 et a_3, on a $\Delta = 36 > 0$, f n'admet pas d'extremum en aucun de ces deux points.

- En a_4, on a $\Delta = 36 < 0$ et $r = -6 < 0$, f admet en a_4 un maximum local.

Définition 3.3.15 (*Matrice Hessienne*)

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de $\mathcal{C}^2(U)$ et $a \in U$. On appelle matrice Hessienne de f en a la matrice

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

3.4 Extremum lié

Définition 3.4.1 (*extremum lié*)

Soient $f, g_1, ..., g_m : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $m < n$ *des fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* U, *et*

$$\Gamma = \{x \in U, g_1(x) = \cdots = g_m(x) = 0\}.$$

La fonction f, *appelée fonction objectif, admet un maximum lié (resp. un minimum lié) sous les contraintes* $g_1, ..., g_m$ *en* $a \in \Gamma$ *si en ce point, elle admet un maximum libre (resp. un minimum libre) dans le domaine* Γ.

Théorème 3.4.2 (*des multiplicateurs de Lagrange*)

Soient $f, g_1, ..., g_m : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $r < n$ *des fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur un ouvert* U de $\mathbb{R}^n$. *On suppose que*

1- $f_{/\Gamma}$ *admet un extremum local en* $a \in \Gamma$.

2- *Les formes linéaires* $Dg_1(a), ..., Dg_m(a)$ *sont linéairement indépendantes (dans ce cas la matrice Jacobienne* $J_g(a)$ *est de rang* m*).*

Alors il existe $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$, *appelés multiplicateurs de Lagrange, tels que*

$$Df(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i Dg_i(a).$$

Le théorème de Lagrange peut être vu comme la condition nécessaire d'existence d'extremum libres appliquée à la fonction de $n+m$ variables appelée fonction lagrangienne (ou le lagrangien)

$$\begin{array}{rccl} L: & U \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, \lambda) & \longmapsto & f(a) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i Dg_i(a) \end{array}$$

La méthode de Lagrange permet de transformer un problème d'optimisation liée d'une fonction de n variables sous m contraintes en un problème d'optimisation libre d'une fonction de $n+m$ variables.

Exemple 3.4.3

Cherchons le maximum de la fonction

$$f(x) = \sqrt{x_1 \cdots x_n}$$

sur l'ensemble défini par

$$X = \left\{ x_1 \geq 0, ..., x_n \geq 0, \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = 1 \right\}.$$

En un point où le maximum est atteint, on a forcément $x_i > 0$ et on peut appliquer le théorème précédent avec $g(x) = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$. On obtient

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, Df(a) = \lambda Dg(a).$$

Ainsi

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \nabla f(a) = \lambda \nabla g(a),$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}(a).$$

Mais

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{1}{n} \frac{f(a)}{a_i},$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) = \frac{1}{n},$$

ce qui entraine

$$f(a) = \lambda a_1 = \cdots = \lambda a_n.$$

En particulier, on obtient que tous les a_i sont égaux et qu'il sont tous égaux à 1.Ainsi, sur X, on a $f(x) \leq 1$. Par homogénéité, on obtient l'inégalité des moyennes arithmétiques et géométriques.

3.4.1 Cas d'une fonction de deux variables et une seule contrainte

Récrivons le théorème des multiplicateurs de Lagrange pour une fonction de deux variables et une seule contrainte. Soit les fonctions f et g de classe C^1 dans un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Si f admet en $a = (x_0, y_0)$ un extremum lié sous la contrainte $g(x, y) = 0$ et si $\nabla g(a) \neq 0$, alors

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \nabla f(a) = \lambda \nabla g(a).$$

Formons le lagrangien

$$L(x, y, , \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y),$$

où λ est une inconnue. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les triplets $(x, y, , \lambda)$ tels que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y), \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y), \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

Notons (x_0, y_0, λ) une solution de ce système. Si $\nabla(x_0, y_0)$, alors (x_0, y_0) est un point critique de la fonction f sous la contrainte g. Ces points critiques satisfont la contrainte, mais il s'agit à présent de classer ces candidats. Finalement, comme dans le cas des extremums libres, on peut formuler des conditions du deuxième ordre relatives aux points critiques.

Exemple 3.4.4

Trouvons les extremums de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ sous la contrainte $xy = 1$.

Posons $g(x, y) = xy - 1$, le Lagrangien

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y),$$

s'écrit

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda xy - \lambda,$$

où le multiplicateur de Lagrange λ est inconnue. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les triplets (x,y,λ) tels que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0, \\ g(x,y) = 0. \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda = 0, \\ 2y - \lambda x = 0, \\ xy - 1 = 0. \end{cases}$$

Après résolution du système on trouve

$$(x,y,\lambda) \in \{(1,1,2), (-1,-1,-2)\}$$

Donc $(1,1)$ et $(-1,-1)$ sont des points critiques de la fonction f sous la contrainte $xy = 1$. Par formulation des conditions du deuxième ordre, on montre que ces points critiques sont des minimums locaux.

3.5 Exercices corrigé sur le chapitre 3

Exercice 3.5.1

Soit l'équation définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$(E): \qquad x\ln\left(1+y^2\right) - ye^x = 0.$$

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 de f en $(1,0)$.

2. (a) Montrer que l'équation (E) définit implicitement $y = \phi(x)$ en fonction de x au voisinage de $(1,0)$.

(b) Calculer $\phi'(x)$ au voisinage de 1.

Corrigé 3.5.2

Soit l'équation définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$(E): \qquad x \ln\left(1+y^2\right) - ye^x = 0.$$

1) Développement limité à l'ordre 2 de f en $(1,0)$.

Le développement limité à l'ordre 2 en $(1,0)$ de $(x,y) \to \ln(1+y^2)$ est

$$\ln\left(1+y^2\right) = y^2 + o\left(x^2+y^2\right),$$

et le développement limité à l'ordre 2 en $(1,0)$ de $(x,y) \to e^x$ est

$$e^x = ee^{x-1} = e\left(1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + o\left(x^2+y^2\right)\right).$$

Comme

$$x \ln\left(1+y^2\right) = (x-1)\ln\left(1+y^2\right) + x\ln\left(1+y^2\right),$$

et en faisant le produit et ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 2 en $(x-1)$ et y on obtiendra les développements limités à l'ordre 2 en $(1,0)$ de $(x,y) \to \ln(1+y^2)$ et $(x,y) \to ye^x$ sont $\ln(1+y^2) = y^2 + o(x^2+y^2)$, et $ye^x = ey + ey(x-1) + o(x^2+y^2)$.

Donc le développement limité à l'ordre 2 de f en $(1,0)$ est

$$f(x,y) = ey + ey(x-1) + y^2 + o\left(x^2+y^2\right).$$

2) Soit l'équation $x\ln(1+y^2) - ye^x = 0$.

(a) Existante de la fonction implicite $y = \phi(x)$ en fonction de x au voisinage de

$(1, 0)$.

On a
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2xy}{1+y^2} - e^x \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = -e \neq 0,$$
donc d'après le théorème des fonctions implicites il existe un voisinage V_1 de 1, un voisinage V_0 de 0 et une fonction

$$\begin{array}{rrl} \phi: & V_1 \rightarrow & V_0 \\ & x \rightarrow & y = \phi(x) \end{array}$$

tels que

$\phi(1) = 0$

$\forall x \in V_1 : f(x, \phi(x)) = 0.$

(b) Calcul de $\phi'(x)$ au voisinage de 1. Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \ln(1+y^2) - ye^x$, alors

$$\forall x \in V_1; \quad \phi'(x) = -\left(\frac{\ln\left(1+\phi^2(x)\right) - \phi(x)e^x}{2x\phi(x)}\right)\left(1+\phi^2(x) - e^x\right).$$

Exercice 3.5.2

Soit la fonction

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - e^{2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)} \text{ définie sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.$$

1. Montrer que l'équation $f(x, y) = 0$ définit, au voisinage de $x = 1$, une fonction implicite $y = \phi(x)$.

2. Calculer la dérivée de ϕ.

3. Donner le développement limité à l'ordre de 3 de ϕ en 1.

Corrigé 3.5.2

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme produit et composé de fonctions de classe

$\mathcal{C}^1$, avec $f(1,0)=0$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2y+\left(2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)' e^{2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)} \\ &= 2y-\frac{2x}{x^2+y^2}e^{2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)},\end{aligned}$$

d'où $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)=-2$, donc il existe un voisinage V_1 de 1, un voisinage V_O de 0 et une fonction ϕ de V_1 à V_0 tels que

$$\begin{aligned}\phi:\ V_1 &\longrightarrow V_0 \\ x &\longrightarrow y=\phi(x)\,;\end{aligned}$$

et

$$\forall x\in V_1, f(x,y)=0 \Longleftrightarrow y=\phi(x) \Longleftrightarrow x^2+(\phi(x))^2=e^{2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)} \tag{3.2}$$

2. Dérivée de ϕ.

$$\forall x\in V_1, \phi(x)=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\phi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\phi(x))},$$

Or

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2\left(x+\frac{y}{x^2+y^2}e^{2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}\right)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2\left(y-\frac{x}{x^2+y^2}e^{2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}\right)$$

Donc

$$\forall x\in V_1,\qquad \phi'(x)=-\frac{x+\dfrac{y}{x^2+y^2}}{y-\dfrac{x}{x^2+y^2}e^{2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}}.$$

3. En dérivant 3 fois la relation (3.2) on obtient

$$x+\phi(x)\phi'(x)-\frac{x\phi'(x)-\phi(x)}{x^2}\frac{x^2}{x^2+(\phi(x))^2}e^{2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}=0,$$

soit

$$x + \phi(x)\phi'(x) - x\phi'(x) + \phi(x) = 0, \tag{3.3}$$

car $e^{2\arctan(\phi(x)/x)} = x^2 + \phi^2(x)$.

les dérivées de la relation (3.3) donnent le système

$$\begin{cases} x + \phi(x).\phi'(x) - x\phi'(x) + \phi(x) = 0 \\ 1 + (\phi(x))^2 + \phi(x).\phi''(x) - x\phi''(x) = 0 \\ 3\phi'(x)\phi''(x) + \phi(x).\phi''(x) - x\phi'''(x) - \phi''(x) = 0 \end{cases}$$

Dans la première équation on obtient $\phi(1) = 0$ et $\phi'(1) = 1$, puis dans la deuxième, $\phi''(1) = 2$, puis dans la troisième, $6 - \phi'''(1) - 2 = 0$. Le développement limité à l'ordre 3 est donc

$$\phi(x) = \phi(1) + \phi'(1).(x-1) + \frac{1}{2}\phi''(x)(x-1)^2 + \frac{1}{3!}(x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right),$$

soit

$$\phi(x) = (x-1) + (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right).$$

Exercice 3.5.3

Pour chacune des fonctions suivantes étudier la nature du point critique donné

1) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ au point critique $(0,0)$.

2) $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$ au point critique $(0,0)$.

3) $f(x,y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10$ au point critique $(0,0)$.

Corrigé 3.5.3

1. (*a*) **Point critiques.** On a $df(x,y) = (2x-y)dx + (2y-x)dy = 0$ donc

$$df = 0 \iff \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0).$$

(b) **Nature du point** $(0,0)$. La matrice Héssienne est

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme le déterminant de la matrice Héssienne $\det H_f(0,0) = 5 > 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0$.

Le point $(0,0)$ présente donc un minimum local.

2. On a $df(x,y) = (2x+2y)\,dx + (2x+2y)\,dy$ donc $df(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x + y = 0$.

Les points critiques sont de la forme $(a,-a)$

$$f(x,y) - f(a,-a) = (x+y)^2 - (a-a)^2 = (x+y)^2\, 0 \geq 0,$$

d'où le point $(a,-a)$ présente un minimum local.

3. **Point critiques.**

On a

$$df = \left(3x^2 + 2x + 2y^2 + 3y\right) dx + \left(4xy - y^3 + 3x + 2y\right) dy = 0$$

Il est claire que $(0,0)$ est un point critique.

Nature du point (0; 0).

La matrice Héssienne est

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 6x+2 & 4y+3 \\ 4y+3 & -12y^2 + 4x + 2 \end{pmatrix}.$$

Comme le déterminant de la matrice Héssienne au point $(0,0)$ est

$$\det H_f(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 < 0,$$

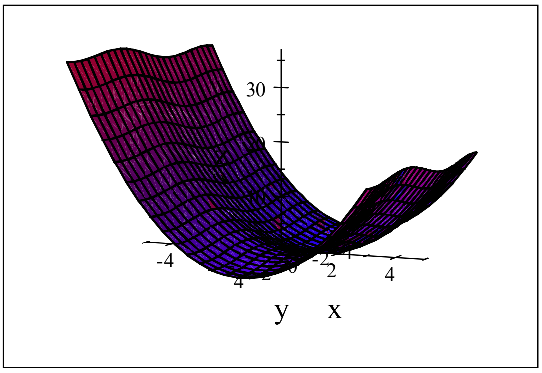
le point $(0,0)$ présente donc un point selle.

Exercice 3.5.4

Trouver les points critiques de la fonction f suivante et déterminer si ce sont des minima locaux, des maxima locaux ou des points selle.

$$f(x,y) = \sin(x) + y^2 - 2y + 1$$

Corrigé 3.5.4



1. Points critiques.

$$df = \cos(x)\,dx + (2y-2)\,dy = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2y - 2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow (x,y) = \left((2k+1)\frac{\pi}{2}, 1\right),$$

les points critiques critiques sont donc $\left((2k+1)\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

2. Nature des points critiques. La matrice Héssienne est

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice Héssienne au point $\left((2k+1)\frac{\pi}{2},1\right)$ est

$$\begin{aligned}
\det H_f\left((2k+1)\frac{\pi}{2},1\right) &= \begin{vmatrix} -\sin(2k+1)\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 2(-1)^{k+1}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, si k est impaire impaire, le point $\left((2k+1)\frac{\pi}{2},1\right)$ présente un minimum local et, si k est paire, le point $\left((2k+1)\frac{\pi}{2},1\right)$ présente un point selle.

Exercice 3.5.5

Le but de l'exercice est l'étude des extremums de la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x^2-2xy+2y^2+e^{-x} \end{array}$$

1. Établir que l'équation $e^{-x}=x$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$, admet une solution et une seule.

2. Montrer qu'il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ unique tel que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0 \end{cases}$$

et établir que $e^{-a}=a$ et $b=\dfrac{a}{2}$

3. Montrer que f admet un extremum en (a,b). Est-ce un minimum ou un maximum?

Corrigé 3.5.5

1. Étudions la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^{-x}-x$.

On a

$$\forall x\in\mathbb{R}, g'(x)=-e^{-x}-1<0.$$

La fonction g est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{-x}-x=+\infty,$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{1}{xe^x} - 1\right) = -\infty,$$

car

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0^-.$$

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$: elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Or $0 \in \mathbb{R}$, donc l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$. Et donc l'équation $e^{-x} = xa$ une unique solution dans $\mathbb{R}$.

2. On a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - e^{-x} = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases}$$

La deuxième égalité implique que $b = \dfrac{a}{2}$. En remplaçant la première équation on obtient $e^{-a} = a$.

La première équation admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ d'après la question précédente. Connaissant la valeur a solution de cette équation, on en déduit b. Il existe donc un unique point critique.

3. La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ comme somme de produits de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, on peut appliquer le théorème de Schwarz.

La matrices Héssienne est

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 + e^{-x} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -2. \end{cases}$$

et son determinant au point (a,b)

$$\det H_f(x,y) = \left| \begin{array}{cc} 2+e^{-x} & -2 \\ -2 & 4 \end{array} \right|_{(a,b)} = 4+2e^{-a} > 0.$$

Donc le point critique est un extremum local.

De plus $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = 4 > 0$, ainsi f admet un minimum local au point (a,b) et ce minimum est

$$f(a,b) = a^2 - 2ab + 2b^2 + e^{-a} = \frac{1}{2}a^2 + e^{-a}.$$

CHAPITRE 4

Intégrales multiples

Dans ce chapitre nous allons étendre la notion d'intégrale définie aux intégrales doubles et triples des fonctions de deux et trois variables. Ces notions sont ensuite exploitées pour calculer des volumes, des aires de surfaces et des masses.

4.1 Intégrale double d'une fonction continue

Dans cette section, nous définissons l'intégrale d'une fonction de deux variables, appelée intégrale double, et nous montrons comment l'évaluer. Elle nous permettra, entre autres, de calculer l'aire d'un domaine d'intégration, ainsi que le volume d'un solide limité par les graphes de fonctions de deux variables.

Théorème 4.1.1 (*de Fubini*)

Soit $x \mapsto \varphi$ et $x \mapsto \psi$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ avec $\varphi \leq \psi$; notons Ω l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \leq x \leq b$ et $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$. Alors

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dydx.$$

Si le domaine le permet, on peut permuter les rôles de x et de y : soit $y \mapsto \varphi$ et $y \mapsto \psi$ deux fonctions continues sur $[c, d]$ avec $\varphi \leq \psi$; notons Ω l'ensemble des points

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $c \leq y \leq d$ et $\varphi(y) \leq x \leq \psi(y)$. Alors

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dxdy = \int_c^d \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dydx.$$

Quelquefois, en inversant l'ordre de l'intégration sur un domaine élémentaire, une intégrale double extrêmement difficile à évaluer devient relativement facile à résoudre.

Exemple 4.1.2 Soit $\mathfrak{R} = [0; 1] \times [0; 2]$; on veut calculer l'intégrale double

$$\iint_{\mathfrak{R}} xe^{xy} dxdy.$$

On a

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathfrak{R}} xe^{xy} dxdy &= \int_0^1 \int_0^2 xe^{xy} dydx = \int_0^1 x \int_0^2 e^{xy} dydx = \int_0^1 x \left[\frac{e^{xy}}{x}\right]_{y=0}^{y=2} dx \\
&= \int_0^1 x\left(\frac{e^{2x}}{x} - \frac{1}{x}\right) dx = \int_0^1 \left(e^{2x} - 1\right) dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} - x\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{e^2}{2} - 1 - \frac{1}{2} = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Exemple 4.1.3 On veut calculer le volume du solide qui s'élève sur le domaine Ω du plan Oxy délimité par la droite d'équation $y = x$ et la parabole $y = x^2$ et couverte par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$.

<u>$1^{\text{ère}}$ *méthode*</u>. Le domaine Ω peut être décrit par

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\right\}.$$

Le volume se calcule alors par

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} \left(x^2 + y^2\right) dxdy &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} \left(x^2 + y^2\right) dydx = \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=2x} dx \\
&= \int_0^2 \left(\frac{14x^3}{3} - x^4 + \frac{x^6}{3}\right) dx = \frac{216}{35}.
\end{aligned}$$

$\underline{2^{ème}\ \textit{méthode}}$. Le domaine Ω peut être décrit par

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq 4, \sqrt{y} \leq x \leq \frac{y}{2}\right\}.$$

Le volume se calcule alors par

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} \left(x^2+y^2\right) dxdy &= \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^{\frac{y}{2}} \left(x^2+y^2\right) dxdy = \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2\right]_{x=\sqrt{y}}^{x=\frac{y}{2}} dy \\
&= \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{13y^3}{24}\right) dy = \left[\frac{2y^{5/2}}{15} + \frac{2y^{7/2}}{7} - \frac{13y4}{96}\right]_{y=0}^{y=4} \\
&= \frac{216}{35}.
\end{aligned}$$

Remarque 4.1.4 Si Ω est le rectangle $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ et si f est le produit d'une fonction qui ne dépend que de x et d'une fonction qui ne dépend que de y, i.e. $f(x,y) = h(x)g(y)$, alors

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dxdy = \left(\int_a^b h(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)\, dy\right).$$

Exemple 4.1.5 Soit $\mathfrak{R} \in [0;1] \times [0;2]$; on veut calculer l'intégrale double $\iint_{\mathfrak{R}} xydxdy$. On a

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathfrak{R}} xydxdy &= \int_0^1 \int_0^2 xydxdy = \int_0^1 xdx \int_0^2 ydy \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=1}^{y=2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Proposition 4.1.6 (*Changement de variables*) Soient $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux bijections de classe $\mathcal{C}^1$. Considérons la fonction de changement de variables

$$\begin{array}{rccl}
F: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\
 & (u,v) & \mapsto & (x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v)).
\end{array}$$

Soit $f(x,y)$ une fonction continue sur un domaine D fermé et borné, alors

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int f(\varphi(u,v), \psi(u,v)). |J| \, dudv$$

où $J = \partial_u(\varphi).\partial_u(\psi) - \partial_v(\varphi).\partial_v(\psi)$, appelé jacobien, est le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} \partial_u(\varphi) & \partial_v(\varphi) \\ \partial_v(\psi) & \partial_u(\psi) \end{pmatrix}$ appelée jacobienne de la fonction F.

Cas des coordonnées polaires

Le changement de variables en coordonnées polaires est donné par l'application

$$(r,\theta) \mapsto (x = a + r\cos\theta, y = b + r\sin\theta),$$

où $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^*$ sont les coordonnées du point $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(a,b)\}$.

Cette application a jacobien

$$\begin{aligned} J &= \det \begin{pmatrix} \partial_r x & \partial_\theta x \\ \partial_r y & \partial_\theta x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r, \end{aligned}$$

donc

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta).rdrd\theta.$$

Exemple 4.1.7 On veut intégrer la fonction $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ sur l'ensemble

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < y < \sqrt{3}x \text{ et } 1 < x^2+y^2 < 4\right\}.$$

Si on passe en coordonnées polaires on a

$$\Omega = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[\, : 0 < \theta < \frac{\pi}{3} \text{ et } 1 < r < 2\right\}.$$

On doit alors calculer

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{1}{1+r^2} r dr d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_1^2 \frac{1}{1+r^2} r dr d\theta = \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \right) \left(\int_1^2 \frac{r}{1+r^2} dr \right) \\
&= \frac{\pi}{3} \left[\frac{\ln(1+r^2)}{2} \right]_{r=1}^{r=2} = \frac{\pi \ln\left(\frac{5}{2}\right)}{2}
\end{aligned}$$

4.2 Intégrale triple

Principe

f étant continue sur un domaine fermé et borné D de $\mathbb{R}^3$, l'intégrale triple

$$\iiint_D f(x,y,z) dx dy dz$$

se définit de façon analogue aux intégrales doubles et se calcule par intégrations successives.

Proposition 4.2.1 (*Changement de variables*)

Le théorème est analogue au cas précédent: soit $f(x,y,z)$ une fonction continue sur le domaine D fermé et borné, soit φ, ψ et ξ trois bijections de D de classe $\mathcal{C}^1$

$$(u,v,w) = (x = \varphi(u,v,w), y = \psi(u,v,w), z = \xi(u,v,w))$$

alors

$$\iiint_D f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_D f(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \xi(u,v,w)) |J| \, du dv dw,$$

où J appelé jacobien, est le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} \partial_u \varphi & \partial_v \varphi & \partial_w \varphi \\ \partial_u \psi & \partial_v \psi & \partial_w \psi \\ \partial_u \xi & \partial_v \xi & \partial_w \xi \end{pmatrix}$.

Cas des coordonnées cylindriques

Un changement de variables en coordonnées cylindriques est donné par l'application

$$(r,\theta,z) \mapsto (x = a + r\cos\theta, y = b + r\sin\theta, z = z)$$

où $(r,\theta,z) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi[\times \mathbb{R}$ sont les coordonnées du point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z)\}$ }. Cette application a jacobien $J = r$ donc

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_D f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta, z) .rdrd\theta dz.$$

De la même manière on peut obtenir

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_D f(a + r\cos\theta, y, b + r\sin\theta) .rdrdyd\theta,$$

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_D f(x, a + r\cos\theta, b + r\sin\theta) .rdxdrd\theta.$$

Cas des coordonnées sphériques

Le changement de variables en coordonnées sphériques est donné par l'application

$$(r,\varphi,\theta) \mapsto (x = a + r\cos(\varphi)\cos(\theta), y = b + r\cos(\varphi)\sin(\theta), z = c + r\sin(\varphi)),$$

où $(r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0;2\pi[\times \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sont les coordonnées du point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \diagdown \{(0,0,0)\}$. Cette application a jacobien $J = r^2\cos(\varphi)$ donc

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_D f(a + r\cos(\varphi)\cos(\theta), b + r\cos(\varphi)\sin(\theta), c + r\sin(\varphi)) .r^2\cos(\varphi) drd\theta$$

4.3 Applications

Définition 4.3.1 (*Aire*) L'intégrale double $\iint_A 1dxdy$ mesure l'aire de A.

Exemple 4.3.2 (*Aire d'un disque*) Calculons l'aire d'un disque D_R de rayon $R \geq 0$

: on se place dans un système de coordonnées centré sur le centre du disque, qui a donc pour équation $x^2+y^2 \leq R^2$. Alors

$$D_R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\right\} = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0;2\pi[\, : r^2 \leq R^2\right\}$$

et

$$\iint_{D_R} 1dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^R rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R d\theta = \frac{R^2}{2}\int_0^{2\pi} 1d\theta = \pi R^2.$$

Définition 4.3.3 (*Volume*) L'intégrale triple $\iiint_V 1dxdydz$ mesure le volume de V.

Exemple 4.3.4 (*Volume d'une sphère*)

Calculons le volume d'une boule B_R de rayon $R>0$:

$$\begin{aligned}\iiint_{B_R} 1dxdydz &= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^2\cos(\varphi)\,drd\theta d\varphi = \left(\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(\varphi)\,d\varphi\right)\left(\int_0^{2\pi}1d\theta\right)\left(\int_0^R r^2dr\right)\\ &= 4\pi\frac{R^3}{3}.\end{aligned}$$

4.4 Quelques intégrales remarquables

1)

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx &= \sqrt{\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy\right)}\\ &= \sqrt{\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy}\\ &= \sqrt{\int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} re^{-r^2}drd\theta} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.\end{aligned}$$

2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

3)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

4.5 Exercices corrigé sur le chapitre 4

Exercice 4.5.1

Calculer les Jacobiens des fonctions suivantes

1. $f(x,y) = (x^2 + yx^2 + y; x - y^2)$,
2. $f(x,y) = (\frac{x^2}{y^2+1}, x - y)$,
3. $f(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v))$.

Corrigé 4.5.1

Calcul des Jacobiens des fonctions suivantes

1. On pose $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) = (x^2 + yx^2 + y; x - y^2)$. Alors la matrice Jacobienne est donnée par

$$J_f(x,y) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y & x^2 + 1 \\ 1 & -2y \end{pmatrix}.$$

Le Jacobien est

$$\det J_f(x,y) = \begin{vmatrix} 2x + y & x^2 + 1 \\ 1 & -2y \end{vmatrix} = -4xy - 2y^2 - x^2 - 1.$$

2. $f(x,y) = (\frac{x^2}{y^2+1}, x - y)$. De la même facon on a

$$\det J_f(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{2x}{y^2+1} & \frac{-4xy}{(y^2+1)^2} \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{2x}{y^2+1} - \frac{-4xy}{(y^2+1)^2}.$$

3. Pour la fonction $f(u,v) = (x,y) = (u\cos(v), u\sin(v))$ la matrice Jacobienne est donnée par

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(v) & -u\sin(v) \\ \sin(v) & u\cos(v) \end{pmatrix}.$$

Le Jacobien est

$$\begin{vmatrix} \cos(v) & -u\sin(v) \\ \sin(v) & u\cos(v) \end{vmatrix} = u.$$

Exercice 4.5.2

Calculer les intégrales doubles suivantes

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^2 \int_0^3 (4 - y^2)\, dxdy.$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^3 \int_{-2}^0 (x^2y - 2xy)\, dxdy.$
3. $I_3 = \displaystyle\int_\pi^{2\pi} \int_0^\pi (\sin x + \cos y)\, dxdy.$
4. $I_3 = \displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-1}^0 (x + y + 1)\, dxdy.$

Corrigé 4.5.2

1.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^2 \int_0^3 \left(4 - y^2\right) dxdy = \int_0^3 \left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 dx \\ &= \frac{16}{3} \int_0^3 dx \\ &= 16, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^2 \int_0^3 \left(4-y^2\right) dxdy \\
&= \int_0^2 \left(4-y^2\right) \left[\int_0^3 dx\right] dy \\
&= \int_0^2 \left(4-y^2\right) [x]_0^3 \, dy \\
&= 3\int_0^2 \left(4-y^2\right) dy \\
&= 3\left[4y-\frac{y^3}{3}\right]_0^2 \\
&= 16.
\end{aligned}$$

2. Calcul de $I_2 = \int_{-2}^{0}\int_0^3 (x^2y-2xy)\, dxdy$.

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-2}^{0}\int_0^3 \left(x^2y-2xy\right) dxdy \\
&= \int_0^3 \left[\int_{-2}^{0} \left(x^2y-2xy\right) dy\right] dx \\
&= \int_0^3 \left[\frac{1}{2}x^2y^2 - xy^2\right]_{-2}^{0} dx \\
&= \int_0^3 \left(4x-2x^2\right) dx \\
&= \left[2x^2-\frac{2x^3}{3}\right]_0^3 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

3. Calcul de $I_3 = \int_{\pi}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} (\sin x + \cos y)\, dxdy$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{\pi}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} (\sin x + \cos y)\, dxdy \\ &= \int_{0}^{\pi} \left[\int_{\pi}^{2\pi} \sin x + \cos y \right] dydx \\ &= \int_{0}^{\pi} [y \sin x + \sin y]_{\pi}^{2\pi}\, dx \\ &= \int_{0}^{\pi} (2\pi \sin x - \pi \sin x)\, dx \\ &= [-\pi \cos x]_{0}^{\pi} \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

4. Calcul de $I_3 = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{0} (x + y + 1)\, dxdy$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{-1}^{0} \int_{-1}^{1} (x + y + 1)\, dxdy \\ &= \int_{-1}^{0} \left[\frac{x^2}{2} + xy + x \right]_{-1}^{1} dy \\ &= \int_{-1}^{0} (2y + 2)\, dy \\ &= \left[y^2 + 2y \right]_{-1}^{0} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Exercice 4.5.3

Calculer les intégrales doubles suivantes

1− $I_1 = \iint_{D_1} (x \sin y)\, dxdy$

où

$$D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi \text{ et } 0 \leq y \leq x \right\}.$$

2− $I_2 = \iint_{D_2} 3y^3 e^{xy} dxdy$

où

$$D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ et } \sqrt{x} \leq y \leq 1\right\}.$$

3− $I_3 = \displaystyle\iint_{D_3} \frac{xe^{2y}}{4-y} dxdy,$

où

$$D_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq 4 - x^2\right\}.$$

Corrigé 4.5.3

1) Calcul de $I_1 = \displaystyle\iint_{D_1} (x \sin y)\, dxdy$

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{D_1} (x \sin y)\, dxdy \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{x} (x \sin y)\, dydx \\ &= \int_0^{\pi} [-x \cos y]_0^x\, dx \\ &= \int_0^{\pi} (x - x \cos x)\, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - (\cos x + x \sin x)\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi^2}{2} + 2. \end{aligned}$$

2) Calcul de $I_2 = \iint_{D_2} 3y^3 e^{xy} dxdy$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \iint_{D_2} 3y^3 e^{xy} dxdy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 3y^3 e^{xy} dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 3y^3 e^{xy} dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy} dx \right) dy \\
&= \int_0^1 \left[3y^2 e^{xy} \right]_0^{y^2} dy \\
&= \int_0^1 \left(3y^2 e^{y^3} - 3y^2 \right) dy \\
&= \left[e^{y^3} - y^3 \right]_0^1 = e - 2.
\end{aligned}$$

3) $I_3 = \iint_{D_3} \frac{xe^{2y}}{4-y} dxdy,$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \iint_{D_3} \frac{xe^{2y}}{4-y} dxdy \\
&= \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} dxdy \\
&= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y} dxdy \\
&= \int_0^4 \left[\frac{x^2 e^{2y}}{2(4-y)} \right]_0^{\sqrt{4-y}} dy \\
&= \int_0^4 \frac{e^{2y}}{2} dy \\
&= \left[\frac{e^{2y}}{4} \right]_0^4 = \frac{e^8 - 1}{4}.
\end{aligned}$$

Exercice 4.5.4

Calculer les intégrales doubles suivantes

1) $I_1 = \iint_{D_1} \frac{dxdy}{(x+y)^2}$, *où*

$$D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 3, x \geq 1 \ et \ y \geq 1\right\}.$$

2) $I_2 = \displaystyle\iint_{D_2} e^{-y^2} dxdy,\ où$

$$D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3 \text{ et } \frac{x}{3} \leq y \leq 1\right\}.$$

Corrigé 4.5.4

1) Calcul de $I_1 = \displaystyle\iint_{D_1} \frac{dxdy}{(x+y)^2}$,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint_{D_1} \frac{dxdy}{(x+y)^2} \\
&= \int_1^2 \left(\int_1^{3-x} \frac{dy}{(x+y)^2} \right) dx \\
&= \int_1^2 \left[-\frac{1}{x+y} \right]_1^{3-x} dx \\
&= \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3} \right) dx \\
&= \left[\ln(x+1) - \frac{x}{3} \right]_1^2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

2) Calcul de $I_2 = \iint_{D_2} e^{-y^2} dxdy$,

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{D_2} e^{-y^2} dxdy \\ &= \int_0^3 \left(\int_{x/3}^1 e^{-y^2} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{3y} e^{-y^2} dx \right) dy \\ &= \int_0^1 3ye^{-y^2} dy \\ &= \left[-\frac{3}{2} e^{-y^2} \right]_0^1 = \frac{3(e-1)}{2e}. \end{aligned}$$

Exercice 4.5.5

Calculer, en utilisant le changement de variables convenable, les intégrales suivantes:

1) $I_1 = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) \, dxdy$.

2) $I_2 = \int_0^6 \int_0^y xdxdy$.

3) $I_3 = \int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} dxdy$.

4) $I_4 = \int_0^1 \int_1^{\sqrt{1-x^2}} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy$.

5) $I_5 = \int_0^2 \int_1^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x + y}{x^2 + y^2} dxdy$.

Corrigé 4.5.5

1) On pose $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, avec $0 \leq r \leq 1$ et $0 \leq \theta \leq \pi/2$, donc

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \left(x^2+y^2\right) dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} r.r^2 drd\theta \\
&= \left(\int_0^1 r^3 dr\right)\left(\int_0^{\pi/2} d\theta\right) \\
&= \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 [\theta]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

2) On pose $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, avec $\dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ et $0 \leq r \leq \dfrac{6}{\sin\theta}$, donc

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^6 \int_0^y xdxdy = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{6/\sin x} r^2 \cos\theta d\theta \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\cos\theta \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{6/\sin x}\right) d\theta = 72 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\theta \frac{1}{\sin^3\theta} d\theta \\
&= 72\left[-\frac{1}{2\sin^2\theta}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = -\frac{72}{2}(1-2) = 36.
\end{aligned}
$$

3) On pose $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, avec $0 \leq r \leq 1$ et $\pi \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{2}$, donc

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}} dxdy \\
&= \int_0^1 \int_\pi^{3\pi/2} \frac{r}{1+r}.dr.d\theta \\
&= \int_0^1 \left(1 - \frac{r}{1+r} dr\right) . \left(\int_\pi^{3\pi/2} d\theta\right) \\
&= \left[r - \ln(1+r)\right]_0^1 [\theta]_\pi^{3\pi/2} = \frac{\pi}{2}(1-\ln 2).
\end{aligned}
$$

4) On pose $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, avec $0 \le r \le 1$ et $0 \le \theta \le \pi/2$, donc

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^1 \int_1^{\sqrt{1-x^2}} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 re^{-r^2}.dr.d\theta \\ &= \left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^1 . \left[\theta\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi\left(1-e^{-1}\right)}{4}. \end{aligned}$$

5) On pose $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, avec $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ et $0 \le \theta \le 2\cos\theta$. On a alors

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} \frac{r\left(\cos\theta + \sin\theta\right)}{r^2} r.dr.d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{2\cos\theta} \left(\cos\theta + \sin\theta\right) dr\right] d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\cos\theta + \sin\theta\right) \left[r\right]_0^{2\cos\theta} d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \left(\cos^2\theta + \sin\theta\right) d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi/2} \left(\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta\right) d\theta = 2\left[\frac{\theta}{2} + \frac{2\sin\theta}{4} + \frac{1}{2}\sin^2\left(\theta\right)\right] \\ &= \frac{\pi}{2} + 1. \end{aligned}$$

Exercice 4.5.6

1. *Calculer la moyenne de la fonction f sur le disque D de centre $O(0,0)$ et de rayon a dans les cas suivants*

(a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$; $\qquad (b)$ $f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

2. *Calculer la moyenne de la fonction f sur le domaine D dans le cas suivant*

$f(x,y) = \dfrac{1}{xy}$ et

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ln 2 \le x \le 2\ln 2, \ln 2 \le y \le 2\ln 2\right\}.$$

Corrigé 4.5.6

1. On fait le changement de variables par passage aux coordonnées polaires $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Alors

(a)

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\pi a^2}\int_0^{2\pi}\int_0^a r^2 dr d\theta \\ &= \frac{1}{\pi a^2}.2\pi.\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a = \frac{2a}{3}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\pi a^2}\int_0^{2\pi}\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2} dr d\theta \\ &= \frac{1}{\pi a^2}.2\pi.\left[-\frac{(a^2-r^2)^{3/2}}{3}\right]_0^a = \frac{2a}{3}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{(\ln 2)^2}\int_{\ln 2}^{2\ln 2}\int_{\ln 2}^{2\ln 2}\frac{dxdy}{xy} = \frac{1}{(\ln 2)^2}\int_{\ln 2}^{2\ln 2}\left[\frac{\ln y}{x}\right]_{\ln 2}^{2\ln 2} dx \\ &= \frac{1}{(\ln 2)^2}\int_{\ln 2}^{2\ln 2}\frac{(\ln 2 + \ln\ln 2 - \ln\ln 2)}{x}dx \\ &= \frac{1}{\ln 2}\int_{\ln 2}^{2\ln 2}\frac{dx}{x} = \frac{1}{\ln 2}\left[dx\right]_{\ln 2}^{2\ln 2} = 1. \end{aligned}$$

Exercice 4.5.7

Calculer les intégrales triples suivantes

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1\int_{1-x}^{x^2}\int_x^{2x+y}(2x+z)\, dxdy.$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^1\left(\iint_D (xy+z^2)\, dxdy\right) dz$, où

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2 \le y \le 1\right\}.$$

CHAPITRE 5

Champs de vecteurs, formes différentielles

Définition 5.1 (*Ouvert étoilé*) Un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est étoilé s'il existe $a \in U$ tel que, pour tout $x \in U$, le segment d'extrémités a et x soit inclus dans U, autrement dit, si tout segment reliant un point de l'ensemble à son centre est inclus dans l'ensemble.

Définition 5.2 (*Ouvert simplement connexe*) Un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est simplement connexe si

1. U est *connexe* par arc, i.e. tout couple de points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) de U peut être joint par une courbe continue:

$$\forall \{(x_0, y_0), (x_1, y_1)\} \subset U \quad \exists \gamma : [a, b] \to U \text{ t.q } \begin{cases} \gamma \in \mathcal{C}^0([a, b]) \\ \gamma(a) \in (x_0, y_0), \\ \gamma(b) \in (x_1, y_1); \end{cases}$$

2. tout courbe fermée contenue dans U peut être ramenée, par déformation continue, à un point.

5.1 Formes différentielles

Définition 5.1.1 (*forme différentielle*)

Une *forme différentielle* de degré 1 définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ est une application

$$w(x,y) = w_1(x,y)\,dx + w_2(x,y)\,dy$$

où w_1 et w_2 sont fonctions de U dans $\mathbb{R}$.

De la même manière, une forme différentielle de degré 1 définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ est une application

$$w(x,y,z) = w_1(x,y,z)\,dx + w_2(x,y,z)\,dy + w_3(x,y,z)\,dz$$

où w_1, w_2 et w_3 sont fonctions de U dans $\mathbb{R}$.

Si tous les w_i sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, on dit que w est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

Définition 5.1.2 (*Forme exacte et primitive*)

Une forme différentielle w est exacte (ou totale) s'il existe une fonction $f : U \to \mathbb{R}$, de classe C^1, telle que $df = w$. On dit alors que f est une primitive de w sur U.

Exemple 5.1.3 Soit $w = 2xdx + 2ydy$ une forme différentielle dans $\mathbb{R}^2$. Elle est exacte car $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + y^2$ vérifie $df = w$.

Définition 5.1.4 (*Forme différentielle fermée*)

Une forme différentielle w définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ est fermée si

$$\partial_y(w_1) = \partial_x(w_2).$$

Une forme différentielle w définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ est fermée si

$$\begin{cases} \partial_y(w_3) = \partial_x(w_2); \\ \partial_z(w_1) = \partial_x(w_3); \\ \partial_x(w_2) = \partial_y(w_1). \end{cases}$$

Théorème 5.1.5(*de Schwarz: condition nécessaire pour w exacte)*

Une forme différentielle exacte de classe $\mathcal{C}^1$ est toujours fermée.

Théorème 5.1.6 (*de Poincaré: condition suffisante pour w exacte*)

Si U est un ouvert étoilé ou si U est simplement connexe et w est une forme différentielle de classe C^1, alors

$$w \text{ est exacte sur } U \Longleftrightarrow w \text{ est fermée sur } U.$$

Exemple 5.1.7

Soit $w = (2x + y)dx + (2y + x)dy$ une forme différentielle dans $\mathbb{R}^2$.

CN pour w exacte: comme $\partial_x (w_1) = \partial_y (2x + y) = 1$ et $\partial_x (w_2) = \partial_x (2y + x) = 1$, la forme différentielle est fermée;

Domaine de définition: $\mathbb{R}^2$ est simplement connexe donc la CN est aussi une CS;

grâce au théorème de Poincaré on conclut que w est exacte, c'est-à-dire qu'il existe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $df = w$. Par exemple $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

5.2 Champs de vecteurs

Définition 5.2.1 On appelle *champ de vecteurs* défini sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ toute application de U dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$\overrightarrow{V}(x, y) = (V_1 (x, y), V_2 (x, y)),$$

où V_1 et V_2 sont fonctions de U dans $\mathbb{R}$.

De la même manière, on appelle champ de vecteurs défini sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$ toute application de U dans $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\overrightarrow{V}(x, y, z) = (V_1 (x, y, z), V_2 (x, y, z), V_3 (x, y, z)),$$

où V_1, V_2 et V_3 sont fonctions de U dans $\mathbb{R}$.

Si tous les V_i sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, on dit que $\overrightarrow{V}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

Définition 5.2.2 (*Champ conservatif et potentiel*)

Un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ est conservatif (*i.e.* il est un champ de gradients) s'il existe une fonction $f : U \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\nabla f = \overrightarrow{V}$. On dit alors que f est un potentiel de $\overrightarrow{V}$ sur U.

Exemple 5.2.3

Soit $\overrightarrow{V}(2x, 2y)$ un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$. Il est conservatif car $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$ vérifie $\nabla f = \overrightarrow{V}$.

Définition 5.2.4 (*Champ à rotationnel nul*)

Un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ est à rotationnel nul si

$$\partial_y (V_1) = \partial_x (V_2).$$

Un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ est à rotationnel nul si

$$\begin{cases} \partial_y (V_3) = \partial_z (V_2), \\ \partial_z (V_1) = \partial_x (V_3), \\ \partial_x (V_2) = \partial_y (V_1). \end{cases}$$

Théorème 5.2.5 (*Théorème de Schwarz:* condition nécessaire pour V conservatif)

Un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ de classe $\mathcal{C}^1$ conservatif est à rotationnel nul.

Théorème 5.2.6 (*Théorème de Poincaré*: condition suffisante pour V conservatif)

Si U est un ouvert étoilé ou si U est simplement connexe et $\overrightarrow{V}$ est un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$, alors

$$\overrightarrow{V} \text{ est conservatif sur } U \Longleftrightarrow \overrightarrow{V} \text{ est à rotationnel nul sur } U.$$

Exemple 5.2.7 Soit $\overrightarrow{V}(2x + y, 2y + x)$ un champ de vecteur dans $\mathbb{R}^2$.

CN pour $\overrightarrow{V}$ conservatif : comme $\partial_y (V_1) = \partial_y (2x + y) = 1$ et $\partial_x (V_1) = \partial_x (2y + x) =$

1, le champ est à rotationnel nul.

Domaine de définition : $\mathbb{R}^2$ est simplement connexe donc la CN est aussi une CS. grâce au théorème de Poincaré on conclut que $\overrightarrow{V}$ est conservatif, c'est-à-dire qu'il existe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\nabla f = \overrightarrow{V}$. Par exemple $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

5.3 Opérateurs classiques

Soit f une fonction différentiable et $\overrightarrow{V}$ un champ vectoriel différentiable définis comme suit :

$$\begin{array}{rrcl} f: & U \subset \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{V}: U \subset \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \overrightarrow{V}(x,y,z) \equiv \begin{pmatrix} V_1(x,y,z) \\ V_2(x,y,z) \\ V_3(x,y,z) \end{pmatrix} \end{array}$$

<u>Gradient</u>: Le gradient de f, noté ∇f ou encore $\mathbf{grad} f$, est le champ vectoriel

$$\begin{array}{rrcl} \nabla f: & U & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \nabla f(x,y,z) \equiv \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y,z) \\ \partial_y f(x,y,z) \\ \partial_z f(x,y,z) \end{pmatrix} \end{array}$$

Si f et g sont deux fonctions différentiables de U dans $\mathbb{R}$, on a

♣ $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

♣ $\nabla(\lambda f) = \lambda \nabla f$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

♣ $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

<u>Divergence:</u> La divergence de $\overrightarrow{V}$, notée $\nabla.\overrightarrow{V}$ ou encore $\mathbf{div}\overrightarrow{V}$, est la fonction

$$\begin{array}{rrcl} \nabla \cdot \overrightarrow{V}: & U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \nabla \cdot \overrightarrow{V}(x,y,z) \equiv (\partial_x V_1(x,y,z) + \partial_y V_2(x,y,z) + \partial_z V_3(x,y,z)). \end{array}$$

Si $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{W}$ sont deux champs vectoriels différentiables de U dans $\mathbb{R}^3$, on a

♣ $\nabla \cdot \left(\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}\right) = \nabla \cdot \overrightarrow{V} + \nabla \cdot \overrightarrow{W}$

♣ $\nabla \cdot \left(\lambda \overrightarrow{V}\right) = \lambda \nabla \cdot \overrightarrow{V}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

♣ $\nabla \cdot \left(f\overrightarrow{V}\right) = f\nabla \cdot \overrightarrow{V} + \overrightarrow{V} \cdot \nabla f$ $\left(\overrightarrow{V}.\nabla f \text{ désignant le produit scalaire de } \overrightarrow{V} \text{ par } \nabla f\right).$

Laplacien: Si f est de classe $\mathcal{C}^2(U)$, le laplacien de f, noté Δf, est la fonction

$$\begin{array}{rccl} \Delta f : & U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \Delta f \equiv \nabla \cdot (\nabla f(x,y,z)) = (\partial_{xx} f(x,y,z) + \partial_{yy} f(x,y,z) + \partial_{zz} f(x,y,z)). \end{array}$$

Si f et g sont deux fonctions différentiables de U dans $\mathbb{R}$, on a

♣ $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$

♣ $\Delta(\lambda f) = \lambda \Delta f$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

♣ $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2(\nabla f).(\nabla g)$

($(\nabla f) \cdot (\nabla g)$ désignant le produit scalaire de Δf par Δg).

Rotationnel: Le rotationnel de $\overrightarrow{V}$, noté $\mathbf{rot}\overrightarrow{V}$, est le champ vectoriel

$$\begin{array}{rccl} \mathbf{rot}\overrightarrow{V} : & U & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \mathbf{rot}\overrightarrow{V}(x,y,z) \equiv \begin{pmatrix} \partial_y V_3(x,y,z) - \partial_z V_2(x,y,z) \\ \partial_z V_1(x,y,z) - \partial_x V_3(x,y,z) \\ \partial_x V_2(x,y,z) - \partial_y V_1(x,y,z) \end{pmatrix}. \end{array}$$

Si f et g sont deux fonctions différentiables de U dans $\mathbb{R}$ et $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{W}$ deux champs vectoriels différentiables de U dans $\mathbb{R}^3$, on a

♣ $\mathbf{rot}\left(\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}\right) = \mathbf{rot}\overrightarrow{V} + \mathbf{rot}\overrightarrow{W}$

♣ $\mathbf{rot}\left(\lambda\overrightarrow{V}\right) = \lambda\mathbf{rot}\overrightarrow{V}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

♣ $\nabla \cdot \mathbf{rot}\left(\overrightarrow{V}\right) = 0$

♣ $\mathbf{rot}(\nabla f) = 0.$

5.4 Intégrale curviligne d'une forme différentielle

Définition 5.4.1 (*Intégrale curviligne d'une forme différentielle*)

Soit $w(x,y) = w_1(x,y)\,dx + w_2(x,y)\,dy$ une forme différentielle définie sur $U \subset \mathbb{R}^2$ et soit $\gamma : [a,b] \to U$ un arc orienté défini par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. w_1 et w_2 étant des fonctions continues, on appelle intégrale curviligne de la forme différentielle w le long de l'arc γ le nombre noté

$$\int_\gamma w$$

et défini par

$$\int_a^b [w_1(x(t), y(t))\,x'(t) + w_2(x(t), y(t))\,y'(t)]\,dt.$$

Soit $w(x,y,z) = w_1(x,y,z)\,dx + w_2(x,y,z)\,dy + w_3(x,y,z)\,dz$ une forme différentielle définie sur $U \subset \mathbb{R}^3$ et soit $\gamma : [a,b] \to U$ un arc orienté défini par $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$. w_1, w_2 et w_3 étant des fonctions continues, on appelle intégrale curviligne de la forme différentielle w le long de l'arc γ le nombre noté

$$\int_\gamma w$$

et défini par

$$\int_a^b [w_1(x(t), y(t), z(t))\,x'(t) + w_2(x(t), y(t), z(t))\,y'(t) + w_3(x(t), y(t), z(t))\,z'(t)]\,dt.$$

Exemple 5.4.2

L'intégrale de la forme différentielle $w(x,y) = ydy$ définie sur $\mathbb{R}^2$ le long du graphe d'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ est égale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Proposition 5.4.3 Si w est une forme différentielle exacte définie sur $U \subset \mathbb{R}^n$ et de primitive f et si la courbe $\gamma : [a,b] \to U$ a pour origine et extrémités respectivement les points $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ alors

$$\int_\gamma w = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

En particulier, si la courbe γ est fermée, c'est-à-dire si ses deux extrémités sont égales, alors la circulation sur γ de toute forme différentielle exacte est nulle.

Définition 5.4.4 (*Circulation d'un champ de vecteurs*)

Soit $\overrightarrow{V}(x,y) = (V_1(x,y), V_2(x,y))$ un champ de vecteurs défini sur $U \subset \mathbb{R}^2$ soit $\gamma : [a,b] \to U$ un arc orienté défini par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. V_1 et V_2 étant des fonctions continues, on appelle circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de l'arc orienté γ le nombre noté

$$\oint_\gamma \overrightarrow{V}$$

et défini par

$$\int_a^b [V_1(x(t), y(t))\, x'(t) + V_2(x(t), y(t))\, y'(t)]\, dt.$$

Soit $\overrightarrow{V}(x,y,z) = (V_1(x,y,z), V_2(x,y,z), V_3(x,y,z))$ un champ de vecteurs défini sur $U \subset \mathbb{R}^3$ et soit $\gamma : [a,b] \to U$ un arc orienté défini par $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$. V_1, V_2 et V_3 étant des fonctions continues, on appelle circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de l'arc orienté γ le nombre noté

$$\oint_\gamma \overrightarrow{V}$$

et défini par

$$\int_a^b [V_1(x(t), y(t), z(t))\, x'(t) + V_2(x(t), y(t), z(t))\, y'(t) + V_3(x(t), y(t), z(t))\, z'(t)]\, dt.$$

Exemple 5.4.5

La circulation du champde vecteurs $\overrightarrow{V} = (-y, x)$ le long de la courbe $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ est égale à

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma \overrightarrow{V} &= \int_0^{2\pi} (-y(t)\, x'(t) + x(t)\, y'(t))\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.
\end{aligned}$$

Proposition 5.4.6

Si $\overrightarrow{V}$ est un champ de vecteurs conservatif défini sur $U \subset \mathbb{R}^n$ et de potentiel f et si la courbe $\gamma : [a,b] \to U$ a pour origine et extrémités respectivement les points $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ alors

$$\oint_\gamma \overrightarrow{V} = f\left(\gamma(b)\right) - f\left(\gamma(a)\right).$$

En particulier, si la courbe γ est fermée, c'est-à-dire si ses deux extrémités sont égales, alors la circulation sur γ de tout champ de vecteurs conservatif est nulle.

Exemple 5.4.7 Soit le champ de vecteurs

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = \left(2xy + z^3, x^2, 3xz^2\right)$$

On veut montrer qu'il dérive d'un potentiel scalaire et déterminer tous les potentiels scalaires dont il dérive. D'une part, comme le champ est défini sur $\mathbb{R}^3$ qui est un ouvert étoilé, pour prouver qu'il dérive d'un potentiel il suffit de montrer qu'il est à rotationnel nul

$$\begin{cases} \partial_y V_3 = \partial_z V_2 \\ \partial_z V_1 = \partial_x V_3 \\ \partial_x V_2 = \partial_y V_1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \partial_y\left(3xz^2\right) = \partial_z\left(x^2\right) \\ \partial_z\left(2xy+z^3\right) = \partial_x\left(3xz^2\right) \\ \partial_x\left(x^2\right) = \partial_y\left(2xy+z^3\right) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 3z^2 = 3z^2 \\ 2x = 2x \end{cases}$$

D'autre part, il est possible de calculer les potentiels : on cherche en effet f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y,z) = 2xy + z^3 \\ \partial_y f(x,y,z) = x^2 \\ \partial_z f(x,y,z) = 3xz^2 \end{cases}$$

On résout ce système d'équations aux dérivées partielles : la deuxième donne par exemple $f(x,y,z) = x^2y + h(x,z)$. En la dérivant par rapport à z on trouve $\partial_z f(x,y,z) = \partial_z h(x,z)$, en utilisant la troisième équation on trouve $\partial_z h(x,z) = 3xz^2$ d'où $h(x,z) = xz^3 + g(x)$ et donc $f(x,y,z) = x^2y + xz^3 + g(x)$. En la dérivant par rapport à x on trouve $\partial_x f(x,y,z) = 2xy + z^3 + g'(x)$, en utilisant la première équation on trouve $g'(x) = 0$ d'où

$g(x) = C$ et finalement

$$f(x, y, z) = x^2y + xz^3 + C \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemple 5.4.8

On veut montrer que la forme différentielle

$$w(x, y) = -\frac{y}{(x-y)^2}dx + \frac{x}{(x-y)^2}dy,$$

définie sur $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$, est exacte et en déterminer toutes les primitives dont elle dérive.

D'une part, comme la forme est définie sur U qui est un ouvert étoilé, pour prouver qu'elle est exacte il suffit de montrer qu'elle est fermée:

$$\partial_y(w_1) = \partial_x(w_2) \Longleftrightarrow \partial_y\left(\frac{x}{(x-y)^2}\right) = \partial_x\left(-\frac{y}{(x-y)^2}\right) \Longleftrightarrow \frac{-2xy}{(x-y)^4} = \frac{-2xy}{(x-y)^4}.$$

D'autre part, il est possible de calculer les primitives : on cherche en effet f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ tel que

$$w_1(x, y) = \frac{y}{(x-y)^2} \quad et \quad w_2(x, y) = \frac{x}{(x-y)^2}.$$

On résout ce système d'équations aux dérivées partielles : en intégrant la deuxième on obtient par exemple $f(x, y) = \frac{y}{x-y} + h(x)$. En la dérivant par rapport à x on trouve $\partial_x f(x, y) = \frac{-y}{(x-y)^2} + h'(x)$, en utilisant la première équation on trouve $h'(x) = 0$ et finalement

$$f(x, y) = \frac{y}{x-y} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

5.5 Exercices corrigé sur le chapitre 5

Exercice 5.5.1

Considérons le champ de vecteurs

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = x\overrightarrow{i} + 2y\overrightarrow{j} + 3z\overrightarrow{k}$$

Montrer que $\overrightarrow{V}$ est conservatif et en calculer un potentiel.

Corrigé 5.5.1

On a

$$V_1(x,y,z) = x,\ V_2(x,y,z) = 2y \text{ et } V_3(x,y,z) = 3z.$$

1. On vérifie que $rot\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$:

$$\begin{cases} \partial_y V_3 - \partial_z V_2 = 0 - 0 = 0, \\ \partial_z V_1 - \partial_x V_3 = 0 - 0 = 0, \\ \partial_x V_2 - \partial_y V_1 = 0 - 0 = 0. \end{cases}$$

V est défini sur $\mathbb{R}^3$ (simplement connexe) et est à rotationnel nul donc il est conservatif.

2. On cherche $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $\nabla f = \overrightarrow{V}$.

$$\begin{aligned} \partial_x f &= x \Longleftrightarrow f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + g(x,z) \Longleftrightarrow \partial_y f = \partial_x g = 2y \\ &\Longleftrightarrow g(x,z) = y^2 + h(z) \Longleftrightarrow f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + y^2 + h(z) \\ &\Longleftrightarrow f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + y^2 + \frac{3}{2}z^2 + c. \end{aligned}$$

Exercice 5.5.2

On considère la forme différentielle

$$w(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy,$$

définie sur le demi-plan $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Montrer que w est exacte et déterminer ses primitives sur U.-

D'une part, comme la forme est définie sur U qui est un ouvert étoilé (par exemple par rapport au point $(1,0)$), pour prouver qu'elle est exacte il suffit de montrer qu'elle est fermée:

$$\partial_y(w_1) = \partial_y(w_2) \Longleftrightarrow \partial_y\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \partial_y\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \Longleftrightarrow \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

D'autre part, il est possible de calculer les primitives: on cherche en effet une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} w_1(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}, \\ w_2(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}. \end{cases}$$

On résout ce système d'équations aux dérivées partielles: en intégrant la deuxième par rapport à y on obtient $f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + h(y) = -\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + h(y)$. En la dérivant par rapport à x on trouve $\partial_x f(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2} + h'(x)$; en utilisant la première équation on trouve $h'(x) = 0$ et finalement

$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Exercice 5.5.3 Montrer que la forme différentielle

$$w(x,y) = \frac{2xydx + (1-x^2)\,dy}{(1-x^2)+y^2}$$

est fermée. Dans un ouvert à préciser déterminer une fonction f telle que $df = w$.

Corrigé 5.5.3

La forme différentielle w est définie sur $\mathcal{D}_w = \mathbb{R}^2 - \{(-1,0);(1,0)\}$, à partir de

$$w_1 = \frac{2xy}{(1-x^2)+y^2} \text{ et } w_2 = \frac{(1-x^2)}{(1-x^2)+y^2},$$

observe que

$$\begin{aligned}
\partial_x w_1 &= \frac{2x\left(1-x^2\right)^2-2xy^2}{\left(\left(1-x^2\right)+y^2\right)^2}, \\
\partial_y w_1 &= \frac{2x\left(1-x^2\right)^2-2xy^2}{\left(\left(1-x^2\right)+y^2\right)^2}.
\end{aligned}$$

Elle est donc fermée. Elle est exacte sur tout ouvert simplement connexe (ce qui n'est pas le cas de son ensemble de définition).

Cherchons un potentiel f de w sur un ouvert à préciser:

$$\begin{aligned}
\partial_x f &= w_1 \\
\partial_y f &= w_2
\end{aligned}$$

Il est plus simple de partir de la seconde égalité et de se placer dans un ouvert où $x^2 = 1$, par exemple $A = \{(x,y) : |x| < 1\}$, qui est simplement connexe. On peut alors écrire

$$\partial_y f = \frac{\frac{1}{1-x^2}}{1+\left(\frac{y}{1-x^2}\right)^2}$$

donc

$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{1-x^2}\right) + g(x).$$

En calculant $\partial_x f$ et en imposant qu'elle soit égale à w_1 on obtient

$$\frac{\frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}}{1+\left(\frac{y}{1-x^2}\right)^2} + g'(x) = \frac{2xy}{\left(1-x^2\right)^2+y^2}$$

d'où $g'(x) = 0$, soit

$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{1-x^2}\right) + K.$$

Exercice 5.5.4 Considérons la forme différentielle

$$w(x,y) = \left(\frac{y}{\cos^2(x)} + \ln\left(1+y^2\right)\right) dy + \left(g(x) + \frac{2xy}{1+y^2}\right) dy$$

définie sur $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R}\right\}$. Déterminer la fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty(\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[)$ telle que $g(0) = 0$ et w soit exacte.

Déterminer ensuite pour la forme différentielle ainsi trouvée une primitive.

Corrigé 5.5.4

La forme différentielle w est définie sur $\mathcal{D}$ (elle est même de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{D})$). Comme le domaine de définition est simplement connexe, la forme différentielle est exacte si et seulement si elle est fermée, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\partial_y(w_1) = \partial_x(w_2) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{2y}{1+y^2} = g'(x) + \frac{2y}{1+y^2} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\cos^2(x)} = g'(x) \\
&\Leftrightarrow \quad g(x) = \tan(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Pour avoir $g(0) = 0$ il faut $C = 0$, ainsi $g(x) = \tan(x)$ et la forme différentielle s'écrit

$$w(x,y) = \left(\frac{y}{\cos^2(x)} + \ln\left(1+y^2\right)\right) dx + \left(\tan(x) + \frac{2xy}{1+y^2}\right) dy.$$

Pour trouver une primitive, c'est à dire une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ telle que $df = w$, on intègre w_1 par rapport à x et on obtient

$$f(x,y) = y\tan(x) + x\ln(1+y^2) + h(y).$$

Pour déterminer h on dérive l'expression ainsi obtenue par rapport ày :

$$\partial_y f = \tan(x) + \frac{2y}{1+y^2} + h'(y),$$

cette fonction doit être égale à w_2 donc $h'(y) = 0$ et finalement

$$f(x,y) = y\tan(x) + x\ln(1+y^2) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.5.5 Considérons le champ de vecteurs

$$\overrightarrow{V}(x,y) = \left(y\sin x + xy\cos x + e^y\right)\overrightarrow{i} + \left(g\left(x\right) + xe^y\right)\overrightarrow{j}.$$

Déterminer la fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $g(0) = 0$ et $\overrightarrow{V}$ soit conservatif. Déterminer ensuite pour le champ ainsi trouvé un potentiel.

Corrigé 5.5.5

Le champ $\overrightarrow{V}$ est défini sur $\mathbb{R}^2$ (il est même de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$). Comme le domaine de définition est simplement connexe, le champ est conservatif si et seulement si il est à rotationnel nul, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\partial_y\left(\overrightarrow{V_1}\right) = \partial_x\left(\overrightarrow{V}_2\right) &\Leftrightarrow \sin x + x\cos y + e^y = g'\left(x\right) + e^y \\
&\Leftrightarrow \sin x + x\cos y = g'\left(x\right) \\
&\Leftrightarrow g\left(x\right) = x\sin x + c, \;\; c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Comme on veut que $g(0) = 0$, alors $g(x) = x\sin(x)$ et le champ de vecteurs s'écrit

$$\overrightarrow{V}(x,y) = \left(y\sin x + xy\cos x + e^y\right)\overrightarrow{i} + \left(x\sin x + xe^y\right)\overrightarrow{j}.$$

Pour trouver un potentiel, c'est à dire une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{\nabla} f = \overrightarrow{V}$, on intègre V_1 par rapport à x et on obtient

$$f(x,y) = xy\sin(x) + xe^y + h(y).$$

Pour déterminer h on dérive l'expression ainsi obtenue:

$$\partial_y f = x\sin(x) + xe^y + h'(y)$$

cette fonction doit être égale à V_2 donc $h'(y) = 0$ et finalement

$$f(x,y) = xy\sin(x) + xe^y + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.5.6 Considérons la forme différentielle

$$w(x,y) = \frac{-1}{(x-y)^2}dx + \frac{1}{(x-y)^2}dy$$

1. Trouver le domaine de définition de w (qu'on notera $\mathcal{D}_w$).
2. Établir si w est exacte sur son domaine de définition.
3. Soit γ_r la famille de courbes

$$\gamma_r(\phi) = (2 + r\cos\phi, -2 + r\sin\phi), \quad \phi \in [0, 2\pi], r > 0.$$

Pour quels valeurs de r on a $\gamma_r \subset \mathcal{D}_w$? Pour ces valeurs calculer $\displaystyle\int_{\gamma_r} w(\phi)\, d\phi$.

Corrigé 5.5.6

1. $\mathcal{D}_w = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq x\}$.

2. On remarque que $\mathcal{D}_w$ n'est pas simplement connexe. On commence alors par vérifier si la forme différentielle est fermée:

$$\partial_y(w_1) = 2\frac{1}{(x-y)^2} = \partial_x(w_2),$$

donc la forme différentielle w est fermée. On va alors en chercher un potentiel, i.e. une fonction f telle $\nabla f = w$:

$$\partial_x f(x,y) = -\frac{1}{(x-y)^2} \Leftrightarrow f(x,y) = \frac{1}{x-y} + g(x)$$

donc

$$\frac{1}{(x-y)^2} = \partial_y f(x,y) = \frac{1}{(x-y)^2} + g'(y) \Leftrightarrow g'(y) = 0$$

donc

$$f(x,y) = \frac{1}{x-y} + C.$$

La forme différentielle est exacte sur $\mathcal{D}_w$ et un potentiel est $f(x,y) = \dfrac{1}{x-y}$.

3. Les courbes γ_r sont les cercles de centre $(2,-2)$ et rayon r. Pour que γ_r soit contenue dans $\mathcal{D}_w$ il faut alors que $r \leq (dist\,(2,-2)\,;y=x) = 2\sqrt{2}$. Puisque toute γ_r est contenue dans un sous-ensemble simplement connexe de $\mathcal{D}_w$ et puisque w est fermée, elle est exacte dans ce sous-ensemble. On en déduit que $\oint_{\gamma_r} w(t)\,dt$.

Exercice 5.5.7 Déterminer la valeur du paramètre μ de sorte que le champ de vecteurs

$$\overrightarrow{V} = \left(x^2 + 5\mu y + 3yz\right)\overrightarrow{i} + (5x + 3\mu xz - 2)\overrightarrow{j} + ((2+\mu)\,xy - 4z)\overrightarrow{k}.$$

soit conservatif. Pour cette valeur de μ, déterminer le potentiel φ de $\overrightarrow{V}$ tel que $\varphi(3,1,-2) = 0$. Calculer le travail nécessaire pour déplacer une particule du point $(1,0,0)$ au point $(0,1,0)$ le longue de la courbe $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos(t)\sin(t))$.

Corrigé 5.5.7

$\overrightarrow{V}$ défini sur $\mathbb{R}^3$ simplement connexe : conservatif ssi à rotationnel nul.

$$\mathbf{rot}\,\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} \partial_y V_3 - \partial_z V_2 \\ \partial_z V_1 - \partial_x V_3 \\ \partial_x V_2 - \partial_y V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+\mu)\,x - 3\mu x \\ 3y - (2+\mu)\,y \\ (5+3\mu z) - (5\mu + 3z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mu = 1.$$

On obtient le champ de vecteurs

$$\overrightarrow{V} = \left(x^2 + 5y + 3yz\right)\overrightarrow{i} + (5x + 3xz - 2)\overrightarrow{j} + (3xy - 4z)\overrightarrow{k}.$$

Calcul des potentiels φ tels que $\nabla\varphi = \overrightarrow{V}$: comme $\partial_x \varphi(x,y,z) = V_1(x,y,z)$ alors

$$\varphi(x,y,z) = \int V_1(x,y,z)\,dx = \frac{x^3}{2} + 5xy + 3xyz + f(x,z),$$

ce qui implique

$$\partial_y \varphi(x,y,z) = 5x + 3xz + \partial_y f(y,z);$$

comme $\partial_y \varphi(x,y,z) = V_2(x,y,z)$ alors $\partial_y f(x,z) = V_2(x,y,z)$ alors $\partial_y f(y,z) = -2$, ainsi $f(y,z) = -2y + g(z)$ et par conséquent

$$\varphi(x,y,z) = \frac{x^3}{2} + 5xy + 3xyz - 2y - 2z^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

L'unique potentiel qui vérifie la condition $\varphi(3,1,-2) = 0$ correspond à $c = 4$.

Comme le champ est conservatif, le travail ne dépend pas du chemin parcouru mais seulement du point de départ et d'arrivé, ainsi

$$\oint_\gamma \overrightarrow{V} = \varphi(0,1,0) - \varphi(1,0,0) = -\frac{7}{3}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Avez, Calcul différentiel, Collection Maîtrise de Mathématiques Pures, Masson, Paris, 1983.

[2] A. Djadane, B.K. Sadallah ; calcul dieeérentielle ; OPU, Alger, 1992.

[3] H. Cartan, Calcul différentiel, Collection Méthodes, Hermann, Paris, 1967.

[4] G. Christol, A. Cot et C.-M. Marle, Calcul Différentiel, Ellipses, 1997.

[5] B. El Mabsout, Calcul différentiel, Exercices, Masson, 1995.

[6] F. Rideau, Exercices de Calcul différentiel, Hermann, 1979.

[7] S. B. Gavage, Calcul différentiel et Equations Différentielles, cours et exercices corrigés, Dunod, 2014.