الجمهورية الجزائرية الشعبية الديموقراطية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي الأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كـلـيـــةالـعـلـــوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de MASTER

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Analyse Mathématique

Par:
KOUIDRI BOUCHRA

THEME

Etude d'une équation d'évolution abstraite du second ordre avec un terme de retard.

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Mr. ***MOKHETARI A.Kader***	*Proffeseur*	*Président*
Mr. ***RAHMOUNE Abdelaziz***	*M.C.B*	*Examinateur*
Mem. ***BOUKHATEM Yamna***	*M.C.A*	*Encadreur*
Mlle. ***CHELLAOUA Houria***		*Co-Encadreur*

Année Universitaire 2019/2020

Remerciements

Je remercie d'abord ***ALLAH*** *qui m'a donné la volonté pour la réalisation de ce modeste mémoire.*

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements pour mon encadrante, Madame ***Boukhatem Yamna*** *d'avoir accepté de m'encadrer pour mon projet de fin d'études, ainsi que pour ses remarques pertinentes et s'encouragement.*

Je tiens aussi à remercier Mlle. ***Chellaoua Houria****, mon co-encadreur pour mon projet de fin d'études pour son suivi permanent et ses conseils pratiques qui m'ont aidé.*

Un très grand merci aux professeurs : ***A. Mokhtari****,* ***A. Rahmoune****. qui ont accepté de participer à mon jury de ce mémoire.*

Je veux remercier également tous les collègues d'étude, particulièrement la promotion de master mathématique, 2019/2020.

En fin, je remercie vivement ma famille pour l'aide matérielle et morale durant la période de préparation..

Dédicaces

Je dédie ce travail,

à mes chers parents,

à mon frère et mes sœurs,

à toute ma famille.

à mes professeurs,

à tous ceux qui m'aiment,

à mes amis et à tous ceux que j'aime.

ملخص

في هذا العمل ، نعتبر المسألة الخطية ذات تأخير. و بفرض بعض الشروط على المعطيات الابتدائية، نبرهن وجود و وحدانية الحل الكلي للمسألة و ذالك باستخدام نظرية نصف الزمرة واستنادًا إلى نظرية لومر فيليبس. ثم بطريقة مباشرة ، نبرهن الاستقرار الأسي للحل. في الأخير، نقدم بعض التطبيقات التي توضح النتائج التي تم الحصول عليها.

الكلمات المفتاحية معادلة الموجة، الوجود الكلي، نصف الزمرة، الاستقرار الأسي.

Résumé :

Dans ce travail, on considère un problème d'évolution linéaire abstrait à retard. Sous certaines hypothèses sur les données initiales, on démontre l'existence globale et l'unicité de la solution en utilisant la théorie de semi groupe et en basant sur le théorème de Lummer-Phillips. Ensuite, par une méthode directe, on fournit la stabilité exponentielle de la solution. Enfin, on donne quelques applications qui illustrent les résultats obtenus.

Mots clés : Équation d'onde, Existence globale, Semi groupe, Stabilité exponentielle.

Abstract :

In this work, we consider an abstract linear evolution problem with delay. Under certain assumptions on the initial data, we prove the global existence and uniqueness of the solution using the semi-group theory and basing on the Lummer-Phillips theorem. Then, by a direct method, we provide the exponential stability of the solution. Finally, we give some applications which illustrate the results obtained.

Key-words : Exponential stability, Global existence, Semi group, The wave equation .

Table des matières

Introduction

Les équations aux dérivées partielles interviennent dans de nombreux domaines en Physique, Chimie, Biologie... En particuliers, les problèmes d'évolutions étudient l'évolution avec le temps d'un phénomène (champ, chaleur, vibration, ...) à partir d'un état initial donné et les problèmes avec un terme de retard qui sont devenus un domaine de recherche actif comme ces phénomènes dépend non seulement de l'état actuel, mais aussi du temps passé du système d'une manière plus compliquée.

Le retard est une source d'instabilité, et un retard peut déstabiliser le système qui est asymptotiquement stable dans l'absence du retards (voir [5, 7]). Dans [9], Nicaise et Pignotti ont considéré le problème suivant

$$(P)\begin{cases} u_{tt}(t) + Au(t) + B_1B_1^*u_t(t) + B_2B_2^*u_t(t-\tau) = 0, & t \in (0, \infty), \\ B_2^*u_t(t) = f^0(t), & t \in (-\tau, 0), \\ u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1, \end{cases}$$

où $\tau > 0$ représente le temps du retard, A est un opérateur linéaire positive auto-adjoint avec inverse compact, B_1 est un opérateur linéaire n'est pas forcément un opérateur bornée et B_2 est un opérateur linéaire borné. $u_0,\ u_1$ et $f^0 \in C(0, \tau; H)$ sont les conditions initiales. Ils ont montré l'existence et la stabilité exponentielle de la solution. Dans ce mémoire, on donne une explication et simplification de ce travail. Dans la littérature il existe différents résultats de stabilité, ces résultats montrent que l'amortissement $B_1B_1^*u_t(t)$ est assez fort pour stabiliser le système en présence du terme de retard à condition que $\|B_2B_2^*\|$ soit suffisamment petit. Les mêmes résultats sont obtenus dans le cas des équations d'onde ($A = -\Delta$), par exemples, voir [14, 1, 15, 12]. Pour les problèmes viscoélastiques avec retard, voir [6, 14].

Ce travail constitue trois chapitres, le premier chapitre contient des rappels sur quelques outils mathématiques. On a donné des définitions et des propriétés fondamentales sur les semi groupes fortement continus d'opérateurs linéaires continus. Ensuite, on a cité leurs propriétés élémentaires et nécessaires comme le théorème de Hille-yosida et le théorème de Lumer-phillips. On a terminé par l'étude du problème de Cauchy abstrait homogène, nous citons des théorèmes pour assurer l'existence et l'unicité de la solution faible et classique.

Le seconde chapitre, on considère un problème d'évolution linéaire abstrait à retard. Sous certaines conditions initiales, on montre l'existence et l'unicité de la solution en utilisant la théorie du semi groupe, et en particulier le Théorème de Lumer-Phillips.

Dans le dernier chapitre, on donne quelques applications qui illustrent les résultats obtenus comme l'équation d'onde, système d'élasticité et le système de Petrovsky.

Notations

A^*	L'adjoint de l'opérateur A.
X	Espace de Banach.
X'	Espace dual de X.
H	Espace de Hilbert.
$\langle\ .\ ,\ .\ \rangle$	Le produit scalaire d'un espace de Hilbert.
Id	L'opérateur d'identité.
$\mathcal{D}(A)$	Le domaine de l'opérateur A.
$L(X,Y)$	L'espace des opérateurs linéaires de X dans Y.
$\mathcal{L}(X,Y)$	L'espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y.
Ω	Un ouvert de $\mathbb{R}^n$, de frontière régulière $\partial\Omega$.
u_t	La dérivée première de u par rapport au temps t.
u_{tt}	La dérivée seconde de u par rapport au temps t.
$\mathcal{D}(\Omega),\ C_0^\infty(\Omega)$	L'espace des fonctions réelles infiniment dérivables à support compact contenu dans $\mathcal{D}(\Omega)$.
$C(0,T;X)$	L'espace des fonctions continues de $[0,T]$ dans X.
$C^1(0,T;X)$	L'espace des fonctions continûment différentiables de $[0,T]$ dans X.
$C_K^\infty(\Omega)$	L'ensemble des fonctions de $C_0^\infty(\Omega)$ à support dans K.
$L^p(\Omega)$	L'espace de Lebesgue, $1 \leq p \leq \infty$.
$\|.\|_p$	La norme associée à l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$.
$\|.\|_E$	La norme associée à l'espace E.
$H^1(\Omega), H_0^1$	Espaces de Sobolev.

Chapitre 1

Semi groupes d'opérateurs linéaires bornés

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques définitions et propriétés et quelques notions fondamentales sur la théorie de semi-groupe qu'il faut absolument connaitre pour l'étude du problème considéré. Ensuite, on présentera quelques théorèmes fondamentales, le théorème de Hille-Yosida et le théorème de Lumer-phillips. Les principaux ouvrages utilisés sont [11, 3].

1.1 Semi groupes uniformément continus

Définition 1.1. Soit X est un espace de Banach et soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ Une famille d'opérateurs linéaires bornés de X dans X . On dit que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X si

1. $T(0) = Id, \qquad$ (où Id est l'opérateur d'identité de X)
2. $T(t+s) = T(s)T(t), \qquad \forall t, s \geq 0.$

Définition 1.2. On dit qu'un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X est uniformément continu sur X s'il vérifie

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - Id\| = 0.$$

Définition 1.3. On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, un opérateur A défini sur l'ensemble

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X, \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \textit{existe dans } X \right\},$$

et

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}\Big|_{t=0}, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Exemple 1.1. (Semi groupe de translations)
On considère l'espace de Banach X défini par

$$X = \{ f : [0,\infty) \to \mathbf{R} : \ f \text{ est uniformément continue et bornée} \},$$

muni de la norme
$$\|f\|_X = \sup_{x\in[0,\infty)} |f(x)|.$$
On définit une famille d'opérateurs linéaires $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ par
$$\forall x \in [0,\infty), (T(t)f)x = f(t+x),\ \forall t \geq 0,\ \forall f \in X.$$
Si $t=0$, on a
$$(T(0)f)x = f(0+x) = f(x),$$
c'est-à-dire
$$T(0) = Id_X$$
Donc $T(0) = Id_X$. De plus, $(T(t+s)f)x = f(t+s+x) = (T(t)f)(s+x) = (T(t)T(s)f)(x)$, alors
$$\forall f \in X, \quad T(t+s) = T(t)T(s),\ \forall t,s \geq 0.$$
Donc $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi groupe d'opérateurs linéaires bornés sur l'espace X.
Vérifiant que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$est uniformément continu. On a
$$\lim_{t\to 0} \|T(t)f - f\|_X = \lim_{t\to 0}\left\{\sup_{x\in[0,\infty)} |f(t+x) - f(x)|\right\} = 0,\ \forall f \in X.$$
Par conséquent, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X, nommé un semi groupe de translations à droite.
Soit l'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ défini par
$$Af(x) = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)f(x) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = f^{'}(x),$$
uniformément par rapport à x. Par conséquent
$$\mathcal{D}(A) \subset \left\{f \in X | f^{'} \in X\right\}.$$
Si $f \in X$ telle que $f^{'} \in X$, alors
$$\left\|\frac{T(t)f - f}{t} - f^{'}\right\|_X = \sup_{x\in[0,\infty)}\left|\frac{(T(t)f)(x) - f(x)}{t} - f^{'}(x)\right|,$$
et on a
$$\begin{aligned}
\left|\frac{(T(t)f)(x) - f(x)}{t} - f^{'}(x)\right| &= \left|\frac{f(x+t) - f(x)}{t} - f^{'}(x)\right| \\
&= \left|\frac{1}{t} f(\tau)|_x^{t+x} - f^{'}(x)\right| = \frac{1}{t}\left|\int_x^{x+t} (f^{'}(\tau) - f^{'}(x))d\tau\right| \\
&\leq \frac{1}{t}\int_x^{x+t}\left|f^{'}(\tau) - f^{'}(x)\right| d\tau \to 0,
\end{aligned}$$
uniformément par rapport à x pour $t \to 0$. Par suite
$$\left\|\frac{T(t)f - f}{t} - f^{'}\right\|_X \to 0 \quad si \quad t \to 0,$$
par conséquent, $\mathcal{D}(A) \subset \left\{f \in X | f^{'} \in X\right\}$ et $Af = f^{'}$.

Dans ce paragraphe, nous allons étudier quelques propriétés des semi groupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés.

Lemme 1.1. *Soit $f : [a, b] \to X$ une fonction continue, alors*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s)ds = f(a).$$

Démonstration.
Pour tout $t \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s)ds - f(a) \right\| &= \left\| \frac{1}{t} \int_a^{a+t} (f(s) - f(a))ds \right\| \\
&\leq \frac{1}{t} \times \sup_{s\in[a,a+t]} \|f(s) - f(a)\| \times t \\
&\leq \sup_{s\in[a,a+t]} \|f(s) - f(a)\|.
\end{aligned}$$

La continuité de f nous permet de conclure le résultat. □

Théorème 1.1. *Un opérateur linéaire A est un générateur infinitésimal d'un semi groupe uniformément continu sur X, si et seulement si A est un opérateur linéaire borné sur X.*

Démonstration.
Soit A un opérateur linéaire borné sur X. Posons pour tout $t \geq 0$,

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Cette série, ainsi définie, converge en norme et définie un opérateur linéaire borné $T(t)$ pour tout $t \geq 0$, Il est clair que $T(0) = Id$, de plus on a

$$T(t + s) = e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA} = T(t)T(s), \qquad \forall t, s \geq 0.$$

On vérifié que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi groupe uniformément continu , pour tout $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\|T(t) - Id\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} - Id \right\| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} \\
&\leq e^{t\|A\|} - 1,
\end{aligned}$$

par passage à la limite quand $t \to 0^+$, on obtient

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - Id\| = 0.$$

D'autre part, pour tout $t > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{T(t) - Id}{t} - A \right\| &= \left\| \frac{e^{tA} - Id}{t} - A \right\| \\
&= \left\| \frac{e^{tA} - Id - tA}{t} \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{t} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} \right\| \\
&\leq \frac{1}{t} \sum_{n=2}^{\infty} t^n \frac{\|A\|^n}{n!},
\end{aligned}$$

d'où

$$\left\| \frac{T(t) - Id}{t} - A \right\| = \frac{1}{t}(e^{t\|A\|} - 1 - t\|A\|) \to 0 \quad quand\ t \to 0^+,$$

Donc

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{T(t) - Id}{t} = A.$$

Par conséquent, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur l'espace X de générateur infinitésimal A.

Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un semi groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur X, de générateur infinitésimal A.
L'application $t \to T(t) \in \mathcal{L}(X)$ est continue, donc

$$\int_0^t T(s)ds \in \mathcal{L}(X), \quad \forall t \geq 0.$$

D'après lemme 1.1, on a

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s)ds = f(x),$$

et comme l'application $t \longmapsto T(t)x \in X,\ t \geq 0$ est continue on déduit

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x.$$

D'ou

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)ds = T(0) = Id.$$

Il existe alors $\rho > 0$, tel que

$$\left\| \frac{1}{\rho} \int_0^{\rho} T(s)ds - Id \right\| < 1.$$

Ce qui implique que $\frac{1}{\rho}\int\limits_0^\rho T(s)ds$ est inversible, donc $\int\limits_0^\rho T(s)ds$ est aussi inversible. De plus, Pour tout $h > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{T(h)-Id}{h}\right)\left(\int\limits_0^\rho T(s)ds\right) &= \frac{1}{h}\left(\int\limits_0^\rho (T(h+s)-T(s))ds\right)\\
&= \frac{1}{h}\left(\int\limits_h^{\rho+h} T(s)ds - \int\limits_0^\rho T(s)ds\right)\\
&= \frac{1}{h}\left(\int\limits_\rho^{\rho+h} T(s)ds - \int\limits_0^h T(s)ds\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{T(h)-Id}{h} = \left(\frac{1}{h}\int\limits_h^{\rho+h} T(s)ds - \frac{1}{h}\int\limits_0^h T(s)ds\right)\left(\int\limits_0^\rho T(s)ds\right)^{-1}.$$

En utilisant le lemme 1.1, on obtient

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{T(h)-Id}{h} = (T(\rho)-Id)\left(\int\limits_0^\rho T(s)ds\right)^{-1}.$$

Donc, le générateur infinitésimal du semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est l'opérateur linéaire borné, donné par

$$A = (T(\rho)-Id)\left(\int\limits_0^\rho T(s)ds\right)^{-1}.$$

□

Théorème 1.2. *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ deux semi groupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés, si*

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{T(t)-Id}{t} = A = \lim_{t\to 0^+}\frac{S(t)-Id}{t}, \tag{1.1}$$

alors $T(t) = S(t), \quad \forall t \geq 0$.

Corollaire 1.1. *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés, alors*

1. *Il existe une constante $w \geq 0$ telle que : $\|T(t)\| \leq e^{wt}$.*
2. *Il existe un opérateur linéaire borné A tel que $T(t) = e^{tA}$.*
3. *L'opérateur A de l'assertion 2 est le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.*
4. *L'application $t \to T(t)$ est différentiable et on a*

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A.$$

Démonstration.
Toutes les assertions ci-dessus découlent de l'assertion (2).
Pour montrer (2), notons que puisque $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi groupe uniformément continu, son générateur infinitésimal A est un opérateur linéaire borné et est aussi le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu $(e^{tA})_{t\geq 0}$ et par le théorème président on obtient

$$T(t) = e^{tA}, \qquad t \geq 0.$$

□

1.2 Semi groupes fortement continus

Dans la suite, on suppose que A est un opérateur linéaire de X dans X de domaine $\mathcal{D}(A) \subset X$.

Définition 1.4. Un semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X est dit fortement continu si

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)x - x\|_X = 0, \qquad \forall x \in X.$$

Un semi groupe fortement continu sur X est aussi appelé semi groupe de classe $\mathcal{C}_0$ ou $\mathcal{C}_0$-semi groupe .

Exemple 1.2. Un semi groupe uniformément continu d'opérateur linéaires bornés est un $\mathcal{C}_0$-semi groupe, en effet,

$$\|T(t)x - x\| \leq \|T(t) - Id\|\|x\|_X.$$

Par passage à la limite, on obtient

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)x - x\| = 0, \qquad \forall x \in X.$$

Comme exemple le semi groupe de translation à droite est un $\mathcal{C}_0$-semi groupe.

Théorème 1.3. *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semi groupes sur X, alors il existe des constantes $w \geq 0$ et $M \geq 1$, telles que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}, \qquad \forall t \geq 0. \tag{1.2}$$

Démonstration.
Montrons qu'il existe $\eta > 0$, tel que $\|T(t)\|$ est borné pour tout $0 \leq t \leq \eta$.
Supposons qu'il existe une suite $(t_n)_n \subset \mathbb{R}^+$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$ et $\|T(t_n)\| \geq n$. Donc la suite $(\|T(t_n)\|)_{n\in\mathcal{N}^*}$ est non bornée.
D'après le théorème de Banach-Steinhaus suivant

Théorème 1.4. ***(Banach-Steinhaus)*** *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Supposons que E soit un espace de Banach. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une collection de $\mathcal{L}(E, F)$. Si pour tout $x \in E$, on a $\sup\limits_{i\in I}\|T_i(x)\| < \infty$, alors $\sup\limits_{i\in I}\|T_i\| < \infty$.*

Pour $T_i = T(t_n)$, on déduit qu'il existe $x \in X$ tel que $\|T(t_n)x\|$ est non bornée.
Ce qui contredit la définition 1.4.
Par conséquent, il existe $\eta > 0$ et $M > 0$, tel que

$$\|T(t)\| \leq M, \qquad \forall 0 \leq t \leq \eta.$$

Étant donnée que $T(0) = Id$, on a $M \geq 1$.
On pose $w = \frac{\log(M)}{\eta} \geq 0$.
Soit $t \geq 0$, et soient $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq \delta \leq \eta$ tels que $t = n\eta + \delta$.
Utilisant les propriétés des semi groupes, nous avons

$$\|T(t)\| \leq \|T(\delta)\| \|T(\eta)^n\| \leq M^{n+1} \leq MM^{\frac{t}{\eta}} = Me^{wt}.$$

□

Corollaire 1.2. *Soit* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *un* $\mathcal{C}_0$*-semi groupes sur* X*. Alors pour tout* $x \in X$*, la fonction* $t \mapsto T(t)x$ *est continue de* $\mathbb{R}^+$ *dans* X*.*

Démonstration.
Soit $x \in X$, et soient $t, h > 0$, la continuité de $t \mapsto T(t)x$ découle des inégalités

$$\begin{aligned} \|T(t+h)x - T(t)x\| &= \|T(t)x(T(h)x - x)\| \\ &\leq \|T(t)\| \|T(h)x - x\| \\ &\leq Me^{wt}\|T(h)x - x\| \to 0. \end{aligned}$$

Pour $t \geq h \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \|T(t-h)x - T(t)x\| &= \|T(t-h)(x - T(h)x)\| \\ &\leq \|T(t-h)\| \|x - T(h)x\| \\ &\leq Me^{w(t-h)}\|x - T(h)x\| \\ &\leq Me^{wt}\|x - T(h)x\| \to 0. \end{aligned}$$

□

Théorème 1.5. *Soit* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *un* $\mathcal{C}_0$*-semi groupes sur* X *de générateur infinitésimal* A*, alors*

1. *Pour* $\forall x \in X$*, alors* $\int_0^t T(s)xds \in \mathcal{D}(A)$*, et on a*

$$A\left(\int_0^t T(s)xds\right) = T(t)x - x, \qquad \forall t \geq 0.$$

2. *Pour* $x \in \mathcal{D}(A)$*, alors* $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ *et on a*

$$\frac{dT(t)x}{dt} = AT(t)x = T(t)Ax, \qquad \forall t \geq 0.$$

3. *Pour* $x \in \mathcal{D}(A)$*,*

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)xd\tau.$$

Démonstration.

1. Soient $x \in X$ et $h > 0$, alors
$$\begin{aligned}\left(\frac{T(h)-T(0)}{h}\right)\left(\int_0^t T(s)xds\right) &= \frac{1}{h}\left(\int_0^t (T(h+s)x - T(s)x)ds\right)\\ &= \frac{1}{h}\left(\int_h^{t+h} T(s)xds - \int_0^t T(s)xds\right)\\ &= \frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h} T(s)xds - \int_0^h T(s)xds\right).\end{aligned}$$
En passant à la limite $h \to 0$, on trouve
$$\begin{aligned}A\int_0^t T(s)xds &= \lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)-Id}{h}T(t)x\\ &= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h} T(u)xdu - \int_0^h T(u)xdu\right]\\ &= T(t)x - x,\end{aligned}$$
et on a
$$\int_0^t T(s)xds \in \mathcal{D}(A).$$

2. Soit $x \in \mathcal{D}(A)$, pour tout $t \geq 0$ nous avons
$$\begin{aligned}T(t)Ax &= T(t)\lim_{h\to 0}\frac{T(t)x - x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h},\end{aligned}$$
donc, $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$, et on a
$$T(t)Ax = AT(t)x, \qquad \forall t \geq 0.$$
Soient $x \in \mathcal{D}(A)$, $t \geq 0$ et $h > 0$, alors
$$\begin{aligned}\left\|\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} - T(t)Ax\right\| &\leq \|T(t)\|\left\|\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\right\|\\ &\leq Me^{wt}\left\|\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\right\|.\end{aligned}$$
Par conséquent
$$\lim_{h\to 0}\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)Ax,$$
d'où
$$\frac{d^+}{dt}T(t)x = T(t)Ax, \qquad \forall t \geq 0.$$
Si $t - h > 0$, alors on a
$$\begin{aligned}\left\|\frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} - T(t)Ax\right\| &\leq \|T(t-h)\|\left\|\frac{T(h)x-x}{h} - Ax + Ax + thAx\right\|\\ & Me^{w(t-h)}\left(\left\|\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\right\| + \|T(h)Ax - Ax\|\right).\end{aligned}$$

Par suite
$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{T(t-h)x-T(t)x}{-h}=T(t)Ax.$$
Par conséquent
$$\frac{d^-}{dt}T(t)Ax=T(t)Ax,\qquad \forall t\geq 0.$$
Donc, l'application est dérivable sur $[0,+\infty[$, pour tout $x\in\mathcal{D}(A)$, de plus,on a l'égalité
$$\frac{d}{dt}T(t)x=T(t)Ax=AT(t)x.$$

3. D'après l'assertion (2), on a
$$\frac{d}{dt}T(t)x=T(t)Ax=AT(t)x,\qquad \forall t\geq 0,$$
on intègre l'égalité précédente de s à t, on obtient
$$\int_s^t T(\tau)Axd\tau=\int_s^t AT(\tau)xd\tau=\int_s^t\frac{d}{d\tau}xd\tau=T(t)x-T(s)x.$$

□

Corollaire 1.3. *Si A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur X, alors*

1. *Le domaine $\mathcal{D}(A)$ est dense dans X, c'est-à-dire $\overline{\mathcal{D}(A)}=X$,*
2. *A est opérateur linéaire fermé.*

Démonstration.

1. Soient $x\in X$ et $t_n>0$, $n\in\mathbb{N}$, tels que
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}t_n=0.$$
Posons
$$x_n=\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)xds\in\mathcal{D}(A),\qquad \forall n\in\mathbb{N},$$
d'où
$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)xds=T(0)x=x,$$
Par conséquent, $\overline{\mathcal{D}(A)}=X$.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{D}(A)$ tel que
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}x_n=x\quad et\qquad \lim_{n\longrightarrow+\infty}Ax_n=y,$$
alors
$$\begin{array}{rcl}\|T(s)Ax_n-T(s)y\| & \leq & \|T(s)\|\|(Ax_n-y)\|\\ & \leq & Me^{wt}\|(Ax_n-y)\|,\quad \forall s\in[0,t].\end{array}$$

Par suite $(T(s)Ax_n) \longmapsto T(s)y$, converge quand $n \longmapsto +\infty$, uniformément par rapport à $s \in [0, t]$, d'autre part, puisque $x_n \in \mathcal{D}(A)$. On a

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds,$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty}(T(t)x_n - x_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^t T(s)Ax_n ds.$$

Alors

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y ds,$$

par suite

$$\lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)y ds = y.$$

Donc

$$x \in \mathcal{D}(A) \quad et \quad Ax = y,$$

d'où A est un opérateur fermé.

□

Théorème 1.6. *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ deux $\mathcal{C}_0$-semi groupe sur X, de générateurs infinitésimaux, respectivement A et B. Si $A = B$, alors*

$$T(t) = S(t), \quad pout\ tout \quad t \geq 0.$$

Démonstration.

Soit $x \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$, d'après le théorème 1.5, alors la fonction $s \mapsto T(t-s)S(s)x$ est différentiable, et on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)BS(s)x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Comme la dérivée de la fonction $T(t-s)S(s)x$ est nulle, donc $T(t-s)S(s)x$ est constante, donc, en $s = 0$ et $s = t$ sont identiques, on trouve

$$T(t)x = S(t)x, \quad pout\ tout \quad x \in \mathcal{D}(A).$$

De plus, d'après le corollaire 1.3, alors le domaine $\mathcal{D}(A)$ est dense dans X, et on obtient

$$T(t)x = S(t)x, \qquad pout\ tout \quad x \in X.$$

□

1.2.1 Théorème de Hille-Yosida

Dans ce paragraphe, on présente une caractérisation concernant les $\mathcal{C}_0$-semi groupes de contractions. Il s'agit du théorème de Hille-Yosida.

Définition 1.5. On dit qu'un $\mathcal{C}_0$-semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est de contraction si

$$\|T(t)\| \leq 1, \qquad \forall t \geq 0.$$

Définition 1.6. Soit $A \in \mathcal{L}(X)$

1. On appelle **ensemble résolvante** de A l'ensemble

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{K}|\ \lambda Id - A \ est\ inversible\}.$$

Un élément de $\rho(A)$ est appelé **valeur résolvante** de A.

2. Si $\lambda \in \rho(A)$, on définit la **résolvante** $R_\lambda(A)$ de A au point λ par

$$R_\lambda(A) := (\lambda Id - A)^{-1}.$$

La résolvante $R_\lambda(A)$ est simplement notée R_λ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur A.

3. Le **spectre** $\sigma(A)$ de A est l'ensemble

$$\sigma(A) := \mathbb{K} \setminus \rho(A).$$

Un élément de $\sigma(A)$ est une **valeur spectrale** de A.

Théorème 1.7. ***(Hille-Yosida)*** *Soit A opérateur linéaire. A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi groupe de contractions si et seulement si*

1. A est fermé et $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.

2. L'ensemble $\rho(A)$ contient $\mathbb{R}_*^+$ et pour tout $\lambda > 0$, on a $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$.

Démonstration.
(Condition nécessaire)
Si A est le générateur infinitésimal du $\mathcal{C}_0$-semi groupe puis par le corollaire 1.3, A est fermé et $\mathcal{D}(A) = X$ par conséquent (1) est prouvée. Maintenant, pour $\lambda > 0$, on définie R par

$$R(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) dt.$$

L'intégrale est bien définie puisque $\|T(t)\| \leq 1$.

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda)\| = \|\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) dt.\| &\leq \int_0^{+\infty} \|e^{-\lambda t} T(t) dt.\| \\
&\leq \int_0^{+\infty} \|e^{-\lambda t}\| \|T(t)\| dt \\
&= \lim_{\eta \to +\infty} \int_0^{\eta} e^{-\lambda t} dt = \lim_{\eta \to +\infty} -\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}|_0^\eta = \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Alors $\|R(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda}$. Il s'ensuit que $R(\lambda) \in \mathcal{L}(X, X)$.
On a

$$\|R(\lambda)\| = R(\lambda, A) = (\lambda Id - A)^{-1}.$$

On doit montrer que $R(\lambda)(\lambda Id - A) = Id_{\mathcal{D}(A)}$ et $(\lambda Id - A)R(\lambda) = Id_X$.
Montrons que $R(\lambda)x \in \mathcal{D}(A)$.
Soit $x \in X$ et $h > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{T(h) - Id}{h} R(\lambda)x &= \frac{T(h) - Id}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \\
&= \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t+h)x dt - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt.
\end{aligned}$$

Soit $t + h = u$, alors $dt = du$ et $t = u - h$.
Il s'ensuit que

$$\begin{cases} u = h & si\ t = 0 \\ u = +\infty & si\ t = +\infty \end{cases}$$

$$\frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(u-h)} T(u)x du = \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(t-h)} T(t)x dt.$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t+h)x dt - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt &= \frac{1}{h} \int_h^{+\infty} e^{-\lambda(t-h)} T(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \\
&= \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\lambda t} e^{\lambda h} T(t) - e^{-\lambda t} T(t) \right) x dt \\
&\quad - \frac{1}{h} \int_0^{h} e^{-\lambda t} e^{\lambda h} T(t)x dt \\
&= \frac{e^{\lambda h - 1}}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^{h} e^{-\lambda t} T(t)x dt
\end{aligned}$$

et comme $h \to 0^+$ le coté droit tend vers $\lambda R(\lambda)x - x$.
Alors

$$\lim_{h \to 0} \frac{T(h) - Id}{h} R(\lambda)x = AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x.$$

On peut écrire

$$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x \Rightarrow (\lambda Id - A)R(\lambda) = Id_X.$$

Soit $x \in \mathcal{D}(A)$

$$\begin{aligned} R(\lambda)Ax &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)(Ax)dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} AT(t)xdt \\ &= A\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)xdt \\ &= AR(\lambda)x. \end{aligned}$$

Ici nous avons utilisé le Théorème 1.4 , et le fait que A est fermé .
On a

$$\begin{aligned} R(\lambda)Ax = \lambda R(\lambda)x - x &\Rightarrow \lambda R(\lambda)x - R(\lambda)Ax = x \\ &\Rightarrow R(\lambda)(\lambda Id - A)x = x \\ &\Rightarrow R(\lambda)(\lambda Id - A) = Id_{\mathcal{D}(A)}. \end{aligned}$$

Alors il s'en suit que $R(\lambda) = R(\lambda, A)$.
En conclusion, on a :

$$\lambda > 0, R(\lambda) = R(\lambda, A) \ et \ \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Pour prouver que les conditions (1) et (2) du théorème 1.7 sont suffisantes pour que A soit un générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi groupe de contraction, nous aurons besoin de certains lemmes.

Lemme 1.2. *Soit A un opérateur linéaire sur X vérifiant les conditions 1) et 2) du théorème 1.7, et $R(\lambda, A) = (\lambda Id - A)^{-1}$, Alors*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \quad \forall x \in X.$$

Démonstration.
Supposons d'abord que $x \in \mathcal{D}(A)$.
On peut écrire

$$R(\lambda, A)(\lambda Id - A)x = x,$$

ce qui implique

$$\lambda R(\lambda, A)x - x = R(\lambda, A)Ax,$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda, A)x - x\| &= \|R(\lambda, A)Ax\| \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \to 0 \quad quand \quad \lambda \longrightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Mais $\mathcal{D}(A)$, est dense dans X et $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1$. Donc

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \quad \forall x \in X.$$

□

Définition 1.7. Pour chaque $\lambda > 0$, On appelle approximation de Yosida de l'opérateur linéaire A, l'opérateur

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda Id.$$

Lemme 1.3. *Soit A un opérateur linéaire satisfaisant les conditions 1) et 2) du théorème 1.7, si A_λ est l'approximation de Yosida de A, alors*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda x = Ax, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathcal{D}(A)$, alors

$$A_\lambda x = \lambda A R(\lambda, A)x = \lambda R(\lambda, A)Ax,$$

puisque la résolvante et l'opérateur commutent.
D'après le lemme 1.2, on a

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax = Ax,$$

donc, on déduit que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax = Ax.$$

□

Lemme 1.4. *Soit A satisfaisant aux conditions 1) et 2) du théorème 1.7. Si A_λ est l'approximation de Yosida de A, alors A_λ est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi groupe de contraction $\left\{e^{tA_\lambda}\right\}_{t\geq 0}$.*
De plus, pour chaque $x \in X$ et $\lambda, \mu > 0$, on a

$$\|e^{tA_\lambda} x e^{tA_\mu} x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|, \quad t \geq 0.$$

Démonstration.
Puisque $A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda Id$ et $R(\lambda, A)$ est borné alors A_λ est un opérateur linéaire borné, il est donc le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi groupe e^{tA_λ} d'opérateurs linéaires bornés.
On affirme que

$$\|e^{tA_\lambda}\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0.$$

En effet

$$\begin{aligned} e^{tA_\lambda} &= e^{(t\lambda^2 R(\lambda,A) - t\lambda Id_X)} \\ &= e^{t\lambda^2 R(\lambda,A)} e^{-t\lambda Id_X}. \end{aligned}$$

En prenant la norme, on a

$$\|e^{tA_\lambda}\| = e^{-\lambda t}\|e^{\lambda^2 t R(\lambda,A)}\| \leq e^{-t\lambda} e^{\lambda^2 t\|R(\lambda,A)\|} \leq 1,$$

et donc $e^{tA\lambda}$ est un $\mathcal{C}_0$-semi groupe de contractions. Il est clair à partir de la définition que $e^{tA_\lambda}, e^{tA_\mu}, A_\lambda$ et A_μ commutent entre eux.
Par le théorème des accroissements finis, on a

$$e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x = \int_0^1 \frac{d}{ds}\left(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x\right) ds,$$

d'autre part

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x &= tA_\lambda e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x - tA_\mu e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x \\ &= t(A_\lambda x - A_\mu x)e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x,\end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$\|e^{tA_\lambda}xe^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|$$

$\square$

(Condition suffisante)
Soit $x \in \mathcal{D}(A)$, Alors

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\| \leq t\|A_\lambda x - Ax\| + t\|Ax - A_\mu x\|. \tag{1.3}$$

On affirme que pour $x \in X$, on a

$$\lim_{\lambda \to +\infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x, \quad \forall t \geq 0. \tag{1.4}$$

En effet
Soit $x \in \mathcal{D}(A)$, d'après (1.3) et lemme 1.3, on obtient $\left(e^{tA_\lambda}x\right)_{\lambda>0}$ est une suite de Cauchy Pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$.
On se donne
$\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, tel que $\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\lambda, \mu > \delta$ et $\forall x \in \mathcal{D}(A)$.
Notons sa limite par $T(t)x$ i.e $T(t)x := \lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{tA_\lambda}x$.
$\mathcal{D}(A)$ est dense dans X on peut alors écrire,
soit $x \in X$ arbitraire, et $\varepsilon > 0$ donné, $\exists x_0 \in \mathcal{D}(A)$, tel que $\|x - x_0\| < \frac{\varepsilon}{3}$.
On a,

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq \|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\lambda}x_0\| + \|e^{tA_\lambda}x_0 - e^{tA_\mu}x_0\| + \|e^{tA_\mu}x_0 - e^{tA_\mu}x\|, \quad \forall\lambda, \mu > \delta$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| &\leq \|x - x_0\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|x - x_0\| \quad \forall\lambda, \mu > \delta \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad \forall\lambda, \mu > \delta\end{aligned}$$

C'est-à-dire, soit $x \in X$ $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ tel que $\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| < \varepsilon, \quad \forall\lambda, \mu > \delta$.
Alors, $\left(e^{tA_\lambda}x\right)_{\lambda>0}$ est une suite de Cauchy Pour tout $x \in X$.
D'autre part

$$\|e^{tA_\lambda}\| \leq 1, \qquad \forall t \geq 0.$$

(évidemment $e^{tA_\lambda} \in \mathcal{L}(X, X)$). Donc

$$\lim_{\lambda\to+\infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x, \quad \forall t \geq 0, \ \forall x \in X.$$

Alors par le théorème de Banach Steinhaus on a $T(t) \in \mathcal{L}(X, X)$.
Maintenant, soit $\lambda > 0$ et $x \in X$, Alors

$$\lim_{\lambda\to+\infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x$$

est uniforme par rapport à t dans chaque ensemble compact de $\mathbb{R}^+$
En effet
On a $\left(e^{tA_\lambda}x\right)_{\lambda>0}$ est une suite de Cauchy Pour tout $x \in X$ et $t > 0$. Soit $\lambda, \mu > 0$ et $x \in X$.
Soit $\varepsilon > 0$ donné, $\exists\, \delta > 0$ tel que

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq \varepsilon, \quad t \in [0, \alpha],\ \forall \alpha > 0,\ \lambda, \mu > \delta.$$

Par le critère de Cauchy uniforme $e^{tA_\lambda}x$ converge uniformément dans $[0, \alpha]$ pour tout $\alpha > 0$.
Maintenant, on va vérifier que la limite $T(t)$ est un C_0-semi-groupe de contraction.

1. $T(0)x = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^0 x = x$ qui implique $T(0) = Id$ et puisque $\|T(t)x\| \leq \|T(t)\|\|x\|$, alors $\|T(t)x\| \leq 1$.
2. $T(t+s)x = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{(t+s)A_\lambda}x = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{tA_\lambda}e^{sA_\lambda}x = T(t)T(s)$.
3. $t \longmapsto T(t)x$ et continu pour $t \geq 0$ comme limite uniforme des fonction continues $t \longmapsto e^{tA_\lambda}$.

Ainsi $T(t)$ est un $\mathcal{C}_0$-semi groupe de contraction de X.
Pour conclure la preuve, on montre que A est un générateur infinitésimal de $T(t)$.
Soit $x \in \mathcal{D}(A)$, puis à l'aide de (1.4) et le théorème 1.4, on a

$$T(t)x - x = \lim_{\lambda \to +\infty} (e^{tA_\lambda}x - x) = \lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x ds = \int_0^t T(s)Axds \tag{1.5}$$

La dernière égalité suit de la convergence uniforme de $e^{tA\lambda}A_\lambda x$ à $T(t)Ax$ sur tout intervalle borné i.e

$$\begin{aligned}
\|A_\lambda e^{sA_\lambda}x - T(s)Ax\| &\leq \|e^{sA_\lambda}A_\lambda x - e^{sA_\lambda Ax}\| + \|e^{sA_\lambda}Ax - T(s)Ax\| \\
&\leq \|e^{sA_\lambda}\|\|A_\lambda x - Ax\| + \|e^{sA_\lambda}Ax - T(s)Ax\| \\
&\leq \|A_\lambda x - Ax\| + \|e^{sA_\lambda}Ax - T(s)Ax\|
\end{aligned}$$

Comme $\lambda \longrightarrow +\infty$, le coté droit tend vers zéro.
Donc

$$\sup_{s \in [0,t]} \|A_\lambda e^{sA_\lambda}x - T(s)Ax\| = 0.$$

Maintenant, soit B le générateur infinitésimal de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ et soit $x \in \mathcal{D}(A)$.
On affirme que

$$A = B.$$

En effet,
Divisons (1.5) par $t > 0$ alors pour $t \longrightarrow 0$ on voit que $x \in \mathcal{D}(A)$ et que $Bx = Ax$. Ainsi $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$.
Puisque B est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi groupe de contraction $T(t)$, il résulte de la condition nécessaire que $1 \in \rho(B)$ et avec la fait que $\mathcal{D}(B) \supseteq \mathcal{D}(A)$, on a $(Id - B)\mathcal{D}(A) = (Id - A)\mathcal{D}(A) = X$ (A et B sont égaux dans $\mathcal{D}(A)$ et $Id - A$ est bijective).
Par conséquent $(Id - B)\mathcal{D}(A) = X$ implique que $(Id - B)^{-1}X = \mathcal{D}(A)$ et donc $A = B$, qui est A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi groupe de contraction. $\square$

1.2.2 Théorème de Lumer-Phillips

Dans ce paragraphe, on présente une caractérisation concernant les $\mathcal{C}_0$-semi groupes de contractions. Il s'agit du théorème de Lumer Phillips. On commence par donner quelques préliminaires.

Soit X Un $\mathbb{K}$-espace de Banach ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$) et soit X' son dual topologique.
Pour chaque $x \in X$, on considère l'application $\varphi_x : X' \to \mathbb{K}$ définie par

$$\varphi_x(f) = f(x), \qquad f \in X'.$$

Définition 1.8. Soit X un espace de Banach

1. la **topologie faible** est la topologie la plus faible sur X rendant continues toutes les applications $\varphi \in X'$. On la note $\sigma(X, X')$.
2. la **topologie faible*** est la topologie la plus faible sur X' rendant continues toutes les applications φ_x, $x \in X$. On la note $\sigma(X', X)$.

Définition 1.9. Soit X espace de Banach muni de le norme $\|.\|$, et soit X' l'espace dual du X, posons

$$F(x) = \left\{x' \in X', \langle x, x'\rangle = \|x\|^2 = \|x'\|^2\right\}.$$

On dit que l'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ est dissipatif si pour tout $x \in X$, il existe $x' \in F(x)$, tel que

$$Re\langle Ax, x'\rangle \leq 0.$$

Proposition 1.1. *Un opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow X$ est dissipatif si et seulement si pour tout $\lambda > 0$, on a*

$$\|(\lambda Id - A)x\|_X \geq \lambda \|x\|_X, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Démonstration.
Supposons que l'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow X$ est dissipatif, donc pour tout $x \in X$, il existe $x' \in F(x)$, tel que

$$Re\langle Ax, x'\rangle \leq 0.$$

Si $\lambda > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\|(\lambda Id - A)x\|\|x\| &= \|(\lambda Id - A)x\|\|x'\|_{X'} \\
&\geq |\langle(\lambda Id - A)x, x'\rangle| \\
&\geq Re\langle(\lambda Id - A)x, x'\rangle \\
&= Re\langle\lambda x, x'\rangle - Re\langle Ax, x'\rangle \\
&\geq \lambda\|x\|^2.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|(\lambda Id - A)x\| \geq \lambda\|x\|.$$

Réciproquement, soit $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow X$ tel que pour tout $\lambda > 0$ et $x \in \mathcal{D}(A)$, on a

$$\|(\lambda Id - A)x\| \geq \lambda\|x\|.$$

On pose $y'_\lambda \in F((\lambda Id - A)x)$, donc

$$\langle(\lambda Id - A)x, y'_\lambda\rangle = \|(\lambda Id - A)x\|^2 = \|y'_\lambda\|^2.$$

D'ou
$$\|y'_\lambda\| = \|(\lambda Id - A)x\| \geq \lambda\|x\|.$$
Posons
$$t'_\lambda = \frac{y'_\lambda}{\|y'_\lambda\|_{X'}}.$$
Soit $\overline{B}_{X'}$ la boule unité de X', tel que
$$\overline{B}_{X'}\{x' \in X', \|x'\| \leq 1\},$$
et $\partial\overline{B}_{X'}$ sa frontière, donc $t'_\lambda \in \partial\overline{B}_{X'}$. De plus
$$\begin{aligned} \lambda\|x\| &\leq \|(\lambda Id - A)x\| \\ &\leq \frac{1}{y'_\lambda}\langle(\lambda Id - A)x, y'_\lambda\rangle \\ &\leq \left\langle(\lambda Id - A)x, \frac{y'_\lambda}{\|y'_\lambda\|}\right\rangle \\ &\leq \langle(\lambda Id - A)x, t'_\lambda\rangle \\ &\leq Re\langle\lambda x, t'_\lambda\rangle - Re\langle Ax, t'_\lambda\rangle \\ &\leq |\langle\lambda x, t'_\lambda\rangle| - Re\langle Ax, t'_\lambda\rangle \\ &\leq \lambda\|x\|\|t'_\lambda\| - Re\langle Ax, t'_\lambda\rangle. \end{aligned} \tag{1.6}$$
Donc
$$Re\langle Ax, t'_\lambda\rangle \leq 0.$$
D'où
$$-Re\langle Ax, t'_\lambda\rangle \leq |Re\langle Ax, t'_\lambda\rangle| \leq \|Ax\|,$$
et d'après équation (1.6), on a
$$\lambda\|x\| \leq \lambda Re\langle x, t'_\lambda\rangle + \|Ax\|,$$
par suite
$$Re\langle x, t'_\lambda\rangle \geq \|x\| - \frac{1}{\lambda}\|Ax\|,$$
et d'après le théorème Banach-Aloglu-Bourbaki[4], la boule $\overline{B}_{X'}$ est compact pour la topologie faible*, $\sigma(X, X')$ et puisque X' est un espace de Banach donc de tout suite de $\overline{B}_{X'}$ on peut extraire une sous suite convergente.
Par suite, il existe une sous suite $(t'_\alpha)_{\alpha>0} \subset (t'_\lambda)_{\lambda>0}$ et il existe $t' \in \overline{B}_{X'}$, tel que $t'_\alpha \longrightarrow t'$ et $\alpha \longrightarrow +\infty$ pour la topologie faible, car
$$Re\langle Ax, t'_\alpha\rangle \leq 0 \quad et \quad Re\langle Ax, t'_\alpha\rangle \geq \|x\| - \frac{1}{\alpha}\|Ax\|.$$
On obtient par passage à limite pour $\alpha \longrightarrow +\infty$ $Re\langle Ax, t'\rangle \leq 0$, et
$$Re\langle x, t'\rangle \geq \|x\|.$$
Mais comme
$$Re\langle x, t'\rangle \leq \langle x, t'\rangle \leq \|x\|,$$
alors
$$\langle x, t'\rangle = \|x\|.$$

On pose
$$x' = \|x\|t',$$
il vient
$$\langle x, x'\rangle = \langle x, \|x\|t'\rangle,$$
ainsi on a
$$x' \in F(x), \qquad Re\langle Ax, x'\rangle \leq 0.$$
Donc, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ il existe $x' \in F(x)$, telle que $Re\langle Ax, x'\rangle \leq 0$, et donc A est dissipatif. □

Théorème 1.8. ***(Lumer-Phillips)***
Soit A un opérateur linéaire à domaine $\mathcal{D}(A)$ dense dans X.

1. *Si A est dissipatif et s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $Im(\lambda_0 Id - A) = X$, alors A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi groupe de contractions sur X.*
2. *Si A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi groupe de contractions sur X, alors $Im(\lambda_0 Id - A) = X$ pour tout $\lambda > 0$ et A est un opérateur dissipatif. De plus pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ et tout $x' \in F(x)$ on a $Re\langle Ax, x'\rangle \leq 0$.*

Démonstration.
Soit A un opérateur dissipatif pour tout $\lambda > 0$ et soit $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda_0 Id - A$ est surjectif. D'après la proposition 1.1, de l'opérateur dissipatif, A est inversible.
Il s'en suit que A est fermé. Pour appliquer le théorème de Hille-Yosida, il reste a montrer que $\forall \lambda > 0$, $\lambda Id - A$ est surjective ce qui équivaut a inversible et d'inverse borné par $\frac{1}{\lambda}$ d'après la proposition 1.1, on a
$$\|(\lambda Id - A)^{-1}x\| \leq \frac{1}{\lambda} \qquad \forall \lambda > 0.$$
L'ensemble
$$\Phi = \{\lambda > 0, \qquad \lambda Id - A \; est \; surjective\},$$
est ouvert car l'ensemble des application inversible est un ouvert.
Soit $\lambda_n \in \Phi$ converge vers $\lambda_\infty > 0$ et soit $y \in \mathcal{D}(A)$. Soit x_n tel que
$$\lambda_n x_n - Ax_n = y.$$
On sait que
$$\|x_n\| \leq \lambda_n^{-1}\|y\|,$$
et en outre
$$\lambda_m\|x_n - x_m\| \leq \|\lambda_m(x_n - x_m) - A(x_n - x_m)\| = |\lambda_n - \lambda_m|\|x_n\|.$$
Donc (x_n) est suite de Cauchy et converge vers x. Comme
$$Ax_n = \lambda_n x_n - y,$$
et que A est fermé, on a que $x \in \mathcal{D}(A)$ et
$$\lambda_\infty x - Ax = y.$$

Donc $\lambda_\infty \in \Phi$. A est ouvert et fermé non vide et donc $\Phi = \mathbb{R}_+^*$. $(]0, +\infty[\in \rho(A))$.
Ainsi d'après la Théorème de Hille-Yosida, l'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi groupe de contraction .

Réciproquement Si A est le générateur infinitésimal de $\mathcal{C}_0$-semi groupe de contraction $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. D'après le théorème de Hille-Yosida, on a, $]0, +\infty[\subseteq \rho(A)$. Par suit, $\lambda Id - A$ est surjectif, pour tout $\lambda > 0$, si $x \in \mathcal{D}(A)$ et $x' \in F(x)$, on a

$$|\langle T(t)x, x'\rangle| \leq \|x\|\|T(t)x\| \leq \|x\|^2.$$

Ainsi

$$Re\langle T(t)x - x, x'\rangle = Re\langle T(t)x, x'\rangle - \|x\|^2 \leq 0.$$

Donc

$$\lim_{t\to 0} Re\langle f, Ax\rangle = Re\left\langle \frac{T(t)x - x}{t}, x'\right\rangle \leq 0.$$

Par suite

$$Re\langle Ax - x, x'\rangle \leq 0 \qquad \forall x' \in F(x).$$

La preuve est terminée. □

Le théorème suivant, donne la perturbation d'un $\mathcal{C}_0$-semi groupe par un opérateur linéaire continu.

Théorème 1.9. *Soient X un espace de Banach et A un générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, satisfait $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$. Si B est un opérateur linéaire continu dans X, alors $A + B$ est un générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ dans X, satisfait $\|S(t)\| \leq Me^{(w+M\|B\|)t}$.*

1.3 Problème de Cauchy

Soient X un espace de Banach et $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ un opérateur linéaire qui engendre un $\mathcal{C}_0$-semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Définition 1.10. (Problème homogène abstrait de Cauchy) Le problème à valeur initiale

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & \forall t \geq 0. \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.7}$$

est dit un problème homogène abstrait de Cauchy associé à A où t est la variable de temps, u est une fonction à valeurs dans l'espace de Banach X, avec $u_0 \in X$ est la valeur initiale.

Définition 1.11. Une fonction $u : [0, T[\to X$ est dite solution "classique" du problème (1.7), si

1. u est continue pour $t \geq 0$,
2. u est continûment différentiable,
3. $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ pour $t \geq 0$, et u vérifie (1.7) sur $[0, T]$.

L'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy homogène est donné par le théorème suivant.

Théorème 1.10. *Soit* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *un* $\mathcal{C}_0$*-semi groupe dans* X *et* A *son générateur infinitésimal, alors, pour tout* $u_0 \in \mathcal{D}(A)$. *Le problème(1.7) possède une solution unique* u *vérifiée*

$$u \in C(0, +\infty; \mathcal{D}(A)) \cap C^1(0, +\infty; X),$$

donnée par

$$u(t) = T(t)u_0, \quad \forall t \geq 0.$$

Démonstration. L'existence de la solution est assurée par le théorème 1.5 (assertion 3) on obtient que pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$

$$u(t) = T(t)u_0, \quad \forall t \geq 0,$$

est une solution classique du problème (1.7).
Pour l'unicité, on suppose qu'il existe une autre solution $v \in C^1(0, +\infty; X) \cap C(0, +\infty; \mathcal{D}(A))$ et $t > 0$. Posons

$$z(t) = T(t-s)v(s), \quad \forall s \in [0, t].$$

On a, pour tout $s \in [0, t]$

$$\begin{array}{rcl} \frac{dz}{ds}(s) & = & -AT(t-s)v(s) + T(t-s)v'(s) \\ & = & -T(t-s)Av(s) + T(t-s)Av(s) \\ & = & 0. \end{array}$$

Donc $z \in C^1(0, t; X)$ et $z(s) = z(0)$ pour tout $s \in [0, t]$, on trouve

$$v(t) = z(t) = T(t)v(0) = T(t)u_0, \quad \textit{pour tout} \forall t \geq 0.$$

D'où

$$v(t) = T(t)u_0 = u(t), \quad \forall t \geq 0,$$

par conséquent, le problème(1.7) admet une unique solution u donnée par

$$u(t) = T(t)u_0, \forall t \geq 0.$$

Ainsi, la preuve du théorème 1.10 est achevée. □

1.4 Théorème de Lax-Milgram

Soit H un espace de Hilbert

Théorème 1.11. *Soit* $a(u, v)$ *une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout* $\varphi \in H'$ *il existe* $u \in H$ *unique tel que*

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \qquad \forall v \in H.$$

De plus, si a *est symétrique, alors* u *est caractérisé par*

$$u \in H \quad \frac{1}{2}a(u, v) - \langle \varphi, v \rangle = \min_{v \in H} \Big(\frac{1}{2}a(u, v) - \langle \varphi, v \rangle \Big).$$

Chapitre 2

Existence globale et stabilité exponentielle

Dans ce chapitre, on considère un problème d'évolution linéaire abstrait avec retard. Sous certaines conditions, on démontre l'existence et l'unicité de la solution. En outre, on établit la stabilité exponentielle de la solution en basant sur la stabilité d'un système auxiliaire et le théorème de perturbation, la perturbation d'un $\mathcal{C}_0$-semi groupe par un opérateur linéaire continu.

2.1 Position du problème

Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire noté par $\langle .,. \rangle$ et la norme $\|.\|$, $A : \mathcal{D}(A) \to H$ est un opérateur linéaire positif, auto-adjoint avec inverse compact dans H, U_1, U_2 sont des espaces de Hilbert (identifiés à leur dual) et $B_1 : U_1 \to \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})'$), $B_2 : U_2 \to H$, sont des opérateurs linéaires. Notons $V = \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$. Soit la fonction u définit de V dans H. On dénote par

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

L'objet de ce chapitre est d'étudier l'existence et la stabilité exponentielle du problème d'évolution abstrait suivant

$$(P) \begin{cases} u_{tt}(t) + Au(t) + B_1 B_1^* u_t(t) + B_2 B_2^* u_t(t-\tau) = 0, & t \in (0,\infty), \\ B_2^* u_t(t) = f^0(t), & t \in (-\tau, 0), \\ u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1, & \end{cases}$$

où $\tau > 0$ est un paramètre de retard fixé, la troisième équation est les conditions initiales, avec u_0, u_1 sont les données initiales qui appartient à des espaces approprié.

Dans l'étude du problème (P), on aura besoin de supposer quelques hypothèses utiles pour obtenir les résultats visés.

- **Hypothèses.**

(H1) $B_1 : U_1 \longrightarrow V'$ un opérateur linéaire n'est pas forcement bornée.
(H2) $B_2 : U_2 \longrightarrow H$ un opérateur linéaire bornée.

2.2 Existence globale

Dans ce paragraphe, on doit étudier l'existence et l'unicité d'une solution du problème considéré. Pour cela, on le reformule sous forme problème de Cauchy par un changement de variable. Puis, on utilise la théorie du semi-groupe et on se base sur le théorème de Lumer-phillips et le théorème 1.10.

Pour l'étude du problème (P), suite à [7], on introduit la fonction z comme suit

$$z(\rho,t) := B_2^* u_t(t-\tau\rho), \qquad \rho \in (0,1), t>0.$$

Notons que z vérifie l'équation de transport pour $\rho \in (0,1)$, et $t>0$.
Comme les dérives sont

$$\frac{\partial z}{\partial \rho}(\rho,t) = -\tau \frac{\partial u_t}{\partial x},$$

et

$$\frac{\partial z}{\partial t}(\rho,t) = \frac{\partial u_t}{\partial x}.$$

Donc, on trouve

$$\frac{\partial z}{\partial \rho}(\rho,t) = -\tau \frac{\partial z}{\partial t}(\rho,t),$$

alors, on obtient l'équation

$$\tau \frac{\partial z}{\partial t}(\rho,t) + \frac{\partial z}{\partial \rho}(\rho,t) = 0, \qquad \rho \in (0,1), t>0.$$

Avec les conditions initiales

$$\begin{cases} z(\rho,0) = B_2^* u_t(-\tau\rho) = f^0(-\tau\rho), & \rho \in (0,1), \\ z(0,t) = B_2^* u_t(t), \qquad t>0, \end{cases}$$

Donc, le problème (P) peut être réécrit comme

$$(P_1) \begin{cases} u_{tt}(t) + Au(t) + B_1B_1^* u_t(t) + B_2 z(1,t) = 0, & t>0, \\ \tau \frac{\partial z}{\partial t}(\rho,t) + \frac{\partial z}{\partial \rho}(\rho,t) = 0, & \rho \in (0,1), t>0, \\ z(\rho,0) = B_2^* u_t(-\tau\rho) = f^0(-\tau\rho), & \rho \in (0,1), \\ z(0,t) = B_2^* u_t(t), & t>0, \\ u(0) = u_0, \qquad u_t(0) = u_1. \end{cases}$$

Maintenant, on écrit le système (P_1) sous forme problème de Cauchy. On prend $\mathcal{U} = (u, u_t, z)^T$, alors

$$(P_2) \begin{cases} \mathcal{U}' = \mathcal{A}\mathcal{U} \\ \mathcal{U}(0) = (u_0, u_1, f^0(-\tau))^T, \end{cases}$$

où l'opérateur $\mathcal{A}$ est défini par

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -Au - B_1B_1^* v - B_2 z(1) \\ -\tau^{-1} z_\rho \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

avec le domaine de $\mathcal{A}$, est donnée par

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \Big\{ (u,v,z)^T \in V \times V \times H^1((0,1);U_2) : Au + B_1B_1^* v \in H \ et \ z(0) = B_2^* v \Big\}.$$

On dénote $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert suivant

$$\mathcal{H} := V \times H \times L^2((0,1);U_2),$$

muni du produit scalaire, soient $W = (w_1, w_2, w_3)^T$, $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T$, on a

$$\left\langle \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} \right\rangle := \langle A^{\frac{1}{2}} w_1, A^{\frac{1}{2}} \varphi_1 \rangle + \langle w_2, \varphi_2 \rangle + \xi \int_0^1 \langle w_3(\rho), \varphi_3(\rho) \rangle d\rho,$$

où ξ un constant positive.

Maintenant, pour montrer que le problème (2.1) est bien posé au sens d'existence et d'unicité, il suffit de montrer que $\mathcal{A}$ engendre un semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ fortement continu. Pour cela, on utilise le théorème de Lumer-Phillips 1.8 dans l'espace $\mathcal{H}$. Donc, on a besoin des lemmes suivants.

Lemme 2.1. *Pour tout $\mathcal{U} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}$ est dissipatif .*

Démonstration. Pour montrer que $\mathcal{A}$ est dissipatif, il suffit de montrer qu'il existe $c > 0$, telle que $\mathcal{A} - cId$ est dissipatif d'après le théorème 1.9. Pour $(u, v, z)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, on a

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{A} \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} \right\rangle &:= \left\langle \begin{pmatrix} v \\ -Au - B_1 B_1^* v - B_2 z(1) \\ -\tau^{-1} z_\rho \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle A^{\frac{1}{2}} v, A^{\frac{1}{2}} u \rangle - \langle Au + B_1 B_1^* v + B_2 z(1), v \rangle \\ &\quad -\xi \int_0^1 \langle z_\rho(\rho), z(\rho) \rangle d\rho, \end{aligned}$$

puisque $Au + B_1 B_1^* v + B_2 z(1) \in H \subset V'$, par dualité, on a

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{A} \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} \right\rangle &= \langle A^{\frac{1}{2}} v, A^{\frac{1}{2}} u \rangle - \langle Au, v \rangle - \langle B_1 B_1^* v, v \rangle - \langle B_2 z(1), v \rangle \\ &\quad -\xi \int_0^1 \langle z_\rho(\rho), z(\rho) \rangle d\rho \\ &= -\|B_1^* v\| - \langle z(1), B_2^* v \rangle - \xi \int_0^1 \langle z_\rho(\rho), z(\rho) \rangle d\rho. \end{aligned} \tag{2.2}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \int_0^1 \langle z_\rho(\rho), z(\rho) \rangle d\rho &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d}{d\rho} \|z(\rho)\|^2 d\rho \\ &= \frac{1}{2} \Big(\|z(1)\|^2 - \|z(0)\|^2 \Big) \\ &= \frac{1}{2} \Big(\|z(1)\|^2 - \|B_2^* v\|^2 \Big), \end{aligned}$$

puisque $z(0) = B_2^* v$.
Donc

$$\int_0^1 \langle z_\rho(\rho), z(\rho)\rangle d\rho = \frac{1}{2}\Big(\|z(1)\|^2 - \|B_2^* v\|^2\Big), \tag{2.3}$$

en combinant (2.3) avec (2.2), on trouve

$$\langle \mathcal{AU}, \mathcal{U}\rangle = -\|B_1^* v\|^2 - \langle z(1), B_2^* v\rangle - \frac{\xi}{2}\Big(\|z(1)\|^2 - \|B_2^* v\|^2\Big).$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$-\langle z(1), B_2^* v\rangle \leq \Big|\langle z(1), B_2^* v\rangle\Big| \leq \varepsilon \|z(1)\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|B_2^* v\|^2.$$

Pour $\varepsilon = \frac{\xi}{2}$, on obtient

$$\langle z(1), B_2^* v\rangle \leq \frac{\xi}{2}\|z(1)\|^2 + \frac{1}{2\xi}\|B_2^* v\|^2.$$

Par conséquent

$$\langle \mathcal{AU}, \mathcal{U}\rangle \leq \left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2\xi}\right)\|B_2^* v\|^2 \leq c\|v\|^2. \tag{2.4}$$

L'opérateur $\mathcal{A} - cId$ est dissipative avec $c > 0$, donc $\mathcal{A}$ est dissipative. □

Lemme 2.2. *Pour $\lambda > 0$, $(\lambda Id - \mathcal{A})$ est surjectif .*

Démonstration. Pour $\lambda > 0$, on montrer que l'opérateur $(\lambda Id - \mathcal{A})$ est surjectif. Soit $F = (f, g, h)^T$ un élément de $\mathcal{H}$, on doit chercher une solution $\mathcal{U} = (u, v, z) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ au problème suivant

$$(\lambda Id - \mathcal{A})\mathcal{U} = F,$$

où, de manière équivalente

$$\begin{cases} \lambda u - v = f \\ \lambda v + Au + B_1 B_1^* v - B_2 z(1) = g \\ \lambda z + \tau^{-1} z_\rho = h \end{cases} \tag{2.5}$$

Supposons que on a trouvé u avec la régularité appropriée. Donc, la première équation en (2.5) donne

$$v = \lambda u - f \in V \tag{2.6}$$

Remarquons que la troisième équation du (2.5) est une équation différentielle ordinaire du premier ordre, donc on commence par la résolution de l'équation homogène associée

$$\lambda z(\rho) + \tau^{-1} z_\rho(\rho) = 0,$$

la solution de l'équation homogène est de la forme

$$z(\rho) = C_1 e^{-\lambda\tau\rho} \qquad \textit{avec} \quad C_1 \quad \textit{est une constante},$$

ensuite, on utilise la méthode de la variation de la constante pour trouver la solution particulière, on trouve

$$C_1(\rho) = \int_0^\rho h(s)e^{\lambda\tau s}ds + c.$$

Donc, la solution générale de l'équation différentielle est donnée par

$$z(\rho) = \left(\int_0^\rho h(s)e^{\lambda\tau s}ds + c\right)e^{-\lambda\tau\rho},$$

où c est une constante. Par conséquent, pour $\rho = 0$ on obtient $z(0) = B_2^*v$, alors

$$z(\rho) = \left(\int_0^\rho h(s)e^{\lambda\tau s}ds + B_2^*v\right)e^{-\lambda\tau\rho}, \tag{2.7}$$

en combinant (2.7) avec (2.6), on trouve

$$z(\rho) = \lambda B_2^*ue^{-\lambda\tau\rho} - B_2^*fe^{-\lambda\tau\rho} + \tau e^{-\lambda\tau\rho}\int_0^\rho h(s)e^{\lambda\tau s}ds.$$

Pour $\rho = 1$, on trouve

$$z(1) = \lambda B_2^*ue^{-\lambda\tau} + z_0. \tag{2.8}$$

Où

$$z_0 = -B_2^*fe^{-\lambda\tau} + e^{-\lambda\tau}\tau\int_0^1 h(s)e^{\lambda\tau s}ds.$$

De la première et la deuxième équation en (2.5), u satisfait

$$\lambda^2u + Au + \lambda B_1B_1^*u + B_2z(1) = g + \lambda f + B_1B_1^*f$$

De (2.8), on a

$$\lambda^2u + Au + \lambda B_1B_1^*u + \lambda B_2B_2^*ue^{-\lambda\tau} = g + \lambda f + B_1B_1^*f - B_2z_0.$$

On définit w par

$$g + \lambda f + B_1B_1^*f - B_2z_0 := w \in H \subset V'.$$

Donc, on obtient

$$\langle \lambda^2u + Au + \lambda B_1B_1^*u + \lambda B_2B_2^*ue^{-\lambda\tau}, \varphi\rangle = \langle w, \varphi\rangle.$$

De plus

$$\begin{aligned}\langle \lambda^2u + Au + \lambda B_1B_1^*u + \lambda B_2B_2^*ue^{-\lambda\tau}, \varphi\rangle_{V',V} &= \lambda^2\langle u, \varphi\rangle + \langle Au, \varphi\rangle + \lambda\langle B_1B_1^*u, \varphi\rangle \\ &\quad + \lambda e^{-\lambda\tau}\langle B_2B_2^*u, \varphi\rangle \\ &= \lambda^2\langle u, \varphi\rangle + \langle A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle + \lambda\langle B_1^*u, B_1^*\varphi\rangle \\ &\quad + \lambda e^{-\lambda\tau}\langle B_2^*u, B_2^*\varphi\rangle.\end{aligned}$$

Puisque $w \in V \subset H$, on a

$$\lambda^2\langle u, \varphi\rangle + \langle A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle + \lambda\langle B_1^*u, B_1^*\varphi\rangle + \lambda e^{-\lambda\tau}\langle B_2^*u, B_2^*\varphi\rangle = \langle w, \varphi\rangle. \tag{2.9}$$

Le second membre de l'équation (2.9) est une forme bilinéaire continue et coercive, en effet

1. La continuité. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned}
&|\lambda^2\langle u,\varphi\rangle + \langle A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle + \lambda\langle B_1^*u, B_1^*\varphi\rangle + \lambda e^{-\lambda\tau}\langle B_2^*u, B_2^*\varphi\rangle| \\
\leq\ & \lambda^2\|u\|\|\varphi\| + \|A^{\frac{1}{2}}u\|\|A^{\frac{1}{2}}\varphi\| + \lambda\left(\|B_1^*u\|\|B_1^*\varphi\| + e^{-\lambda\tau}\|B_2^*u\|\|B_2^*\varphi\|\right) \\
\leq\ & \lambda^2\|u\|\|\varphi\| + \|A^{\frac{1}{2}}\|\|u\|\|\varphi\| + \lambda\left(\|B_1^*\|^2\|u\|\|\varphi\| + e^{-\lambda\tau}\|B_2^*\|^2\|u\|\|\varphi\|\right) \\
\leq\ & C\|A^{\frac{1}{2}}u\|\|A^{\frac{1}{2}}\varphi\|,
\end{aligned}$$

   donc, on a la continuité.
2. La coercivité, pour $u = \varphi \in V$

$$\lambda^2\|u\|^2 + \langle A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}u\rangle + \lambda\left(\|B_1^*u\|^2 + e^{-\lambda\tau}\|B_2^*u\|^2\right) \geq \left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2,$$

   donc, on a la coercivité.

Donc, d'après le théorème de Lax-Miligram, il existe une unique solution $u \in V$ de l'équation (2.9), de plus

$$Au + B_1B_1^*v + B_2z(1) = g + \lambda f - \lambda^2 u \in H.$$

Par conséquent, on trouve $(u,v,z)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ satisfait le problème(2.5). Ce qui implique que $\lambda Id - \mathcal{A}$, pour tout $\lambda > 0$, est un opérateur surjectif, donc pour $c > 0$, l'opérateur $\lambda Id - (\mathcal{A} - cId)$ est surjectif. □

L'existence de la solution du problème (P) est assuré par le théorème suivant

Théorème 2.1. *Pour toute donnée initiale $U_0 \in \mathcal{H}$, il existe une unique solution $U \in C([0,\infty),\mathcal{H})$ du problème (P_2). De plus, si $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, alors*

$$U \in C([0,\infty),\mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap C^1([0,\infty),\mathcal{H}).$$

Démonstration. Pour $\mathcal{U} = (u,u_t,z)^T$, on a le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \mathcal{U}' = \mathcal{A}\mathcal{U} \\ \mathcal{U}(0) = (u_0,u_1,f^0(-\tau))^T, \end{cases}$$

avec l'opérateur $\mathcal{A}$ donnée par

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -Au - B_1B_1^*v - B_2z(1) \\ -\tau^{-1}z_\rho \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

On a d'après le lemme 2.1, l'opérateur $\mathcal{A} - cId$ est dissipatif et par le lemme 2.2, l'opérateur $\lambda Id - (\mathcal{A} - cId)$ est surjectif. Donc par le théorème de Lumer Phillips 1.8, on obtient que $\mathcal{A} - cId$ engendre un $\mathcal{C}_0$-semi groupe fortement continu, en utilisant le théorème 1.8, on obtient que l'opérateur $\mathcal{A}$ est un générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi groupe de contraction.
Par conséquent, d'après le théorème 1.10, le problème de Cauchy admet une unique solution. Ainsi, la preuve est complète. □

2.3 La stabilité exponentielle

La stabilité exponentielle de la solution du problème (P) est établie en passant par la stabilité exponentielle d'un problème auxiliaire et en utilisant un résultat classique dans la théorie de semi groupes, le théorème 1.9.

Soit u la solution du problème (P), on définit la fonctionnelle d'énergie associée au problème (P) par

$$E(t) := E(u,t) = \frac{1}{2}\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|^2 + \|u_t(t)\|^2\right) + \frac{\xi}{2}\int_{t-\tau}^{t} \|B_2^* u_t(s)\|^2 ds \tag{2.11}$$

Proposition 2.1. *La fonctionnelle d'énergie E définie par (2.11) vérifiée*

$$E^{'}(t) \leq -\|B_1^* u_t(t)\|^2 + \frac{1+\xi}{2}\|B_2^* u_t(t)\|^2 - \frac{\xi-1}{2}\|B_2^* u_t(t-\tau)\|^2, \qquad \forall t \geq 0.$$

Démonstration. On dérive la fonction d'énergie, on trouve

$$\frac{d}{dt}E(t) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2 + \frac{d}{dt}\frac{\xi}{2}\int_{t-\tau}^{t} \|B_2^* u_t(s)\|^2 ds,$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 &= \frac{d}{dt}\langle A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}u\rangle = \langle Au, u\rangle \\ &= \langle u_t, Au\rangle + \langle Au_t, u\rangle \\ &= 2\langle Au, u_t\rangle. \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\|u_t(t)\|_H^2 = 2\langle u_t, u_{tt}\rangle.$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\xi}{2}\int_{t-\tau}^{t} \|B_2^* u_t(s)\|^2 ds = \frac{\xi}{2}\|B_2^* u_t(t)\|^2 - \frac{\xi}{2}\|B_2^* u_t(t-\tau)\|^2,$$

par conséquent, on obtient

$$E^{'}(t) = -\|B_1^* u_t(t)\|^2 - \langle B_2^* u_t(t), B_2^* u_t(t-\tau)\rangle + \frac{\xi}{2}\|B_2^* u_t(t)\|^2 - \frac{\xi}{2}\|B_2^* u_t(t-\tau)\|^2,$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on trouve

$$\begin{aligned} E^{'}(t) \leq\ & -\|B_1^* u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|B_2^* u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|B_2^* u_t(t-\tau)\|^2 + \frac{\xi}{2}\|B_2^* u_t(t)\|^2 \\ & -\frac{\xi}{2}\|B_2^* u_t(t-\tau)\|^2, \end{aligned}$$

donc

$$E^{'}(t) \leq -\|B_1^* u_t(t)\|^2 + \frac{1+\xi}{2}\|B_2^* u_t(t)\|^2 - \frac{\xi-1}{2}\|B_2^* u_t(t-\tau)\|^2.$$

La preuve est terminée. □

Remarque 2.1. *la fonctionnelle d'énergie E associée au problème (P) n'est pas décroissante en général comme le deuxième terme du second membre de l'estimation (2.11) n'est pas négatif.*

Dans ce paragraphe, pour établir la stabilité exponentielle et en prise en considérons la remarque 2.1. Par conséquent, on considère le problème auxiliaire suivant

$$(P_3)\begin{cases} \varphi_{tt}(t) + A\varphi(t) + B_1B_1^*\varphi_t(t) + B_2B_2^*\varphi_t(t-\tau) + \xi B_2B_2^*\varphi_t(t) = 0, & t > 0, \\ B_2^*\varphi_t(t) = g^0(t), & t \in (-\tau, 0), \\ \varphi(0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(0) = \varphi_1. \end{cases}$$

Pour l'étude du problème (P_3), et de la même manière avec le problème (P), on introduit la fonction $\eta(\rho, t)$ comme suit

$$\eta(\rho, t) = B_2^*\varphi_t(t - \tau\rho), \qquad \rho \in (0, 1),\ t > 0.$$

Le problème (P_3) peut être réécrit comme

$$\begin{cases} \varphi_{tt}(t) + A\varphi(t) + B_1B_1^*\varphi_t(t) + B_2\eta(1) + \xi B_2B_2^*\varphi_t(t) = 0, & t > 0, \\ \tau\eta_t(\rho, t) + \eta_\rho(\rho, t) = 0, & \rho \in (0,1), t > 0, \\ \eta(\rho, 0) = B_2^*\varphi_t(-\tau\rho) = g^0(-\tau\rho), & \rho \in (0, 1), \\ \eta(0, t) = B_2^*\varphi_t(t), & t > 0, \\ \varphi(0) = \varphi_0 \qquad \varphi_t(0) = \varphi_1. \end{cases}$$

On prend $\Phi := (\varphi, \varphi_t, \eta)^T$, alors (P_3) devient

$$\begin{cases} \Phi' = \mathcal{A}^0\Phi, \\ \Phi(0) = (\varphi_0, \varphi_1, g^0(-\tau))^T, \end{cases} \tag{2.12}$$

où l'opérateur $\mathcal{A}^0$ est défini par

$$\mathcal{A}^0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ \eta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \psi \\ -A\varphi - B_1B_1^*\psi - B_2\eta(1) - \xi B_2B_2^*\psi \\ -\tau^{-1}\eta_\rho \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

avec le domaine $\mathcal{D}(\mathcal{A}^0) = \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

L'existence du solution du problème (P_3) est assuré dans la proposition suivante

Proposition 2.2. *Pour toute donnée initiale $\Phi_0 \in \mathcal{H}$, il existe une solution unique $\Phi \in C([0, +\infty), \mathcal{H})$ du problème (2.12).De plus, si $\Phi_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^0)$, telle que*

$$\Phi \in C([0, +\infty), \mathcal{D}(\mathcal{A}^0)) \cap C^1([0, +\infty), \mathcal{H}).$$

Démonstration.
Pour montrer l'existence et l'unicité du problème (2.13), il suffit de montrer que $\mathcal{A}^0$ engendre un semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ fortement continu (voir le théorème 1.9). Pour cela, on utilise le théorème de Lumer-Phillips 1.7 sur l'espace $\mathcal{H}$.
En effet, on montre que $\mathcal{A}^0$ est un opérateur dissipatif. Pour $\Phi = (\varphi, \psi, \eta)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^0)$,

alors

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}^0\Phi, \Phi\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \psi \\ -A\varphi - B_1B_1^*\psi - B_2\eta(1) - \xi B_2B_2^*\psi \\ -\tau^{-1}\eta_\rho \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \left\langle A^{\frac{1}{2}}\psi, A^{\frac{1}{2}}\varphi \right\rangle - \langle A\varphi + B_1B_1^*\psi + B_2\eta(1) + \xi B_2B_2^*\psi, \psi\rangle - \xi \int_0^1 \langle \eta_\rho(\rho), \eta(\rho)\rangle d\rho \\
&= -\|B_1^*\psi\|^2 - \xi\|B_2^*\psi\|^2 - \langle \eta(1), B_2^*\psi\rangle - \xi \int_0^1 \langle \eta_\rho(\rho), \eta(\rho)\rangle d\rho, \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

de plus, on a

$$\int_0^1 \langle \eta_\rho(\rho), \eta(\rho)\rangle d\rho = \frac{1}{2}\left(\|\eta(1)\|^2 - \|B_2^*\psi\|^2\right).$$

En utilisant l'inégalité de Young à le second membre de (2.14), on obtient

$$\left\langle \mathcal{A}^0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle \leq -\|B_1^*\psi\|^2 - \frac{\xi-1}{2}\|\eta(1)\|^2 - \frac{\xi-1}{2}\|B_2^*\psi\|^2.$$

Donc, l'opérateur $\mathcal{A}^0$ est dissipatif.

Ensuite, on montre que $\lambda Id - \mathcal{A}^0$ est surjective. En effet, soit $F = (f_1, f_2, f_3)^T \in \mathcal{H}$, on démontre qu'il existe $\Phi = (\varphi, \psi, \eta) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^0)$ satisfait

$$\left(\lambda Id - \mathcal{A}^0\right)\Phi = F,$$

c'est-à-dire

$$\left(\lambda Id - \mathcal{A}^0\right)\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix},$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \lambda\varphi - \psi = f_1 \\ \lambda\psi + A\varphi + B_1B_1^*\psi + B_2\eta(1) + \xi B_2B_2^*\psi = f_2 \\ \lambda\eta + \tau^{-1}\eta_\rho = f_3. \end{cases} \qquad (2.15)$$

La première équation en (2.15) donne

$$\psi = \lambda\varphi - f_1. \qquad (2.16)$$

Remarquons que η satisfait une équation différentielle ordinaire du premier ordre

$$\lambda\eta + \tau^{-1}\eta_\rho = f_3,$$

et $\eta(0) = B_2^*\psi = B_2^*\lambda\varphi - B_2^*f_3$. Donc, on commence par la résolution de l'équation homogène associée

$$\lambda\eta + \tau^{-1}\eta_\rho = 0,$$

la solution de l'équation homogène est de la forme

$$\eta(\rho) = C_1 e^{-\lambda\tau\rho} \quad \text{avec} \quad C_1 \quad \text{est une constante,}$$

ensuite, on utilise la méthode de la variation de la constante pour trouver la solution particulière, on trouve

$$C_1(\rho) = \int_0^\rho f_3(s) e^{\lambda\tau s} ds + k.$$

Donc, la solution générale de l'équation différentielle est donnée par

$$\eta(\rho) = \left(\int_0^\rho f_3(s) e^{\lambda\tau s} ds + k \right) e^{-\lambda\tau\rho},$$

où k est une constante. Par conséquent, pour $\rho = 0$ on obtient $\eta(0) = B_2^* \psi$, alors

$$\eta(\rho) = \left(\int_0^\rho f_3(s) e^{\lambda\tau s} ds + B_2^* \psi \right) e^{-\lambda\tau\rho},$$

la première équation du (2.15), on trouve

$$\eta(\rho) = \lambda B_2^* \varphi e^{-\lambda\tau\rho} - B_2^* f_1 e^{-\lambda\tau\rho} + \tau e^{-\lambda\tau\rho} \int_0^\rho f_3(s) e^{\lambda\tau s} ds,$$

pour $\rho = 1$, on trouve

$$\eta(1) = \lambda B_2^* \varphi e^{-\lambda\tau} + \eta_0, \tag{2.17}$$

avec

$$\eta_0 = -B_2^* f_1 e^{-\lambda\tau} + \tau e^{-\lambda\tau} \int_0^1 f_3(s) e^{\lambda\tau s} ds.$$

De (2.16) et la deuxième équation de (2.15), la fonction φ vérifié

$$\lambda(\lambda\varphi - f_1) + A\varphi + B_1^*(\lambda\varphi - f_1) + B_2\eta(1) + \xi B_2 B_2^*(\lambda\varphi - f_1) = f_2,$$

donc

$$\lambda^2\varphi + A\varphi + \lambda B_1^*\varphi + B_2\eta(1) + \lambda\xi B_2 B_2^*\varphi = f_2 + \lambda f_1 + B_1^* f_1 + \xi B_2 B_2^* f_1.$$

De (2.17), on a

$$\lambda^2\varphi + A\varphi + \lambda B_1^*\varphi + \lambda e^{-\lambda\tau} B_2 B_2^*\varphi + \lambda\xi B_2 B_2^*\varphi = f_2 + \lambda f_1 + B_1^* f_1 + \xi B_2 B_2^* f_1 - B_2\eta_0,$$

où

$$q = f_2 + \lambda f_1 + B_1^* f_1 + \xi B_2 B_2^* f_1 - B_2\eta_0,$$

par dualité, on a

$$\langle \lambda^2\varphi + A\varphi + \lambda B_1^*\varphi + \lambda e^{-\lambda\tau} B_2 B_2^*\varphi + \lambda\xi B_2 B_2^*\varphi, \omega \rangle = \langle q, \omega \rangle, \tag{2.18}$$

remarquent que (2.18) est une forme bilinéaire continue et coercive donc, d'après le théorème de Lax-Miligram, il existe une unique φ solution de (2.18). Ce qui résulte qu'il existe

$(\varphi, \psi, \eta)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^0)$ satisfait l'équation (2.15), ce qui implique que $\lambda Id - \mathcal{A}^0$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$, donc pour une certaine C, l' opérateur $\lambda Id - (\mathcal{A}^0 - CId)$ est surjectif.

Par conséquent, d'après le théorème de Lumer-Phillips 1.8 on obtient que $\mathcal{A}^0 - CId$ engendre un semi groupe fortement continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de contraction dans l'espace $\mathcal{H}$ et d'après le théorème 1.10 le problème de Cauchy admet une unique solution. □

On définit la fonction d'énergie F solution associée au problème (P_3), par

$$F(t) := F(\varphi, t) = \frac{1}{2}\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}\varphi(t)\right\|^2 + \|\varphi_t(t)\|^2\right) + \frac{\xi}{2}\int_{t-\tau}^{t} \|B_2^*\varphi_t(s)\|^2 ds, \tag{2.19}$$

avec $\xi > 1$.

La fonction F satisfait le résultat suivant

Proposition 2.3. *Pour toute solution du problème (P_3), et $\xi > 1$, on a*

$$F^{'}(t) \leq -\|B_1^*\varphi_t(t)\|^2 - \frac{\xi - 1}{2}\|B_2^*\varphi_t(t)\|^2 - \frac{\xi - 1}{2}\|B_2^*\varphi_t(t-\tau)\|^2.$$

Démonstration. On dérive la fonction F par rapport à t, on trouve

$$F^{'}(t) = \langle A^{\frac{1}{2}}\varphi(t), A^{\frac{1}{2}}\varphi_t(t)\rangle + \langle\varphi_t(t), \varphi_{tt}(t)\rangle + \frac{\xi}{2}\|B_2^*\varphi_t(t)\|^2 - \frac{\xi}{2}\|B_2^*\varphi_t(t-\tau)\|^2,$$

en utilisant la première équation du problème (P_3), on obtient

$$\begin{aligned} F^{'}(t) \quad &= \quad \langle A\varphi(t), \varphi_t(t)\rangle - \langle\varphi_t(t), A\varphi(t)\rangle - \langle\varphi_t(t), B_1B_1^*\varphi_t(t)\rangle - \xi\langle\varphi_t(t), B_2B_2^*\varphi_t(t)\rangle \\ &\quad -\langle\varphi_t(t), B_2B_2^*\varphi_t(t-\tau)\rangle + \frac{\xi}{2}\|B_2^*\varphi_t(t)\|^2 - \frac{\xi}{2}\|B_2^*\varphi_t(t-\tau)\|^2, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} F^{'}(t) \quad &= \quad -\|B_1^*\varphi_t(t)\|^2 - \xi\|B_2^*\varphi_t(t)\|^2 - \langle B_2^*\varphi_t(t), B_2^*\varphi_t(t-\tau)\rangle + \frac{\xi}{2}\|B_2^*\varphi_t(t)\|^2 \\ &\quad -\frac{\xi}{2}\|B_2^*\varphi_t(t-\tau)\|^2, \end{aligned}$$

par l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a

$$\begin{aligned} F^{'}(t) \quad &\leq \quad -\|B_1^*\varphi_t(t)\|^2 - \xi\|B_2^*\varphi_t(t)\|^2 - \frac{1}{2}\|B_2^*\varphi_t(t)\|^2 - \frac{1}{2}\|B_2^*\varphi_t(t-\tau)\|^2 \\ &\quad +\frac{\xi}{2}\|B_2^*\varphi_t(t)\|^2 - \frac{\xi}{2}\|B_2^*\varphi_t(t-\tau)\|^2. \end{aligned}$$

D'où le résultat

$$F^{'}(t) \leq -\|B_1^*\varphi_t(t)\|^2 - \frac{\xi - 1}{2}\|B_2^*\varphi_t(t)\|^2 - \frac{\xi - 1}{2}\|B_2^*\varphi_t(t-\tau)\|^2.$$

Donc, l'énergie F est décroissante pour $\xi > 1$. □

Considérez maintenant le système suivant associé au problème (P)

$$(P_4)\begin{cases} w_{tt} + Aw(t) + B_1{B_1}^* w_t = 0, & t > 0, \\ w(0) = w_0 \qquad w_t(0) = w_1, \end{cases}$$

où $(w_0, w_1) \in V \times H$.

Pour obtenir la résultat du stabilité, on a besoin que ce système doit être exponentiellement stable ou l'estimation (2.20) soit vérifié. Pour cela, on suppose qu'il existe un temps $\overline{T} > 0$ telle que, pour $T > \overline{T}$, il y a une constante c, (dépend de T et indépendante sur les données initiales), telle que

$$E_s(0) \leq c \int_0^T \|B_1^* w_t(t)\|^2 dt, \tag{2.20}$$

pour chaque solution faible du problème (P_4) avec les conditions $(w_0, w_1) \in V \times H$.

La fonctionnelle E_s suivante désigne l'énergie standard pour l'équation de type onde

$$E_s(t) = E_s(w,t) := \frac{1}{2}\left(\left\|A^{\frac{1}{2}} w(t)\right\|^2 + \|w_t(t)\|^2\right).$$

Dénote

$$\|B_2\| = \|{B_2}^*\| = C_2.$$

La stabilité exponentielle du problème (P_3) est donnée par le théorème suivant

Théorème 2.2. *Sous les hypothèses $\xi > 1$, et (2.20). Il existe des constantes positives $K, \tilde{\mu}$ tels que toute solution du système (P_3) satisfait*

$$F(t) \leq K e^{-\tilde{\mu} t} F(0), \qquad t > 0,$$

en particulier

$$\begin{aligned} K &= \frac{C_0 + 1}{C_0} \\ \tilde{\mu} &= \frac{1}{2T} \ln \frac{C_0 + 1}{C_0}. \end{aligned}$$

Avec T satisfait $T > \max\left\{\overline{T}, \tau\right\}$, $\overline{T}$ est un temps d'observabilité pour (2.20), et

$$C_0 = \max\left\{2c, \frac{32cT{C_2}^2 + \xi}{\xi + 1}, \frac{32c{C_2}^2 T\xi^2}{\xi - 1}\right\},$$

où $c := c(T)$.

Démonstration. La stabilité de (P_3) est basée sur une inégalité d'observabilité pour le système associée. On décompose φ solution de (P_3) en

$$\varphi = w + \tilde{w},$$

où w est le solution du problème (P_4) avec $w_0 = \varphi_0, w_1 = \varphi_1$, alors $\tilde{w}$ satisfait

$$\begin{cases} \tilde{w}_{tt}(t) + A\tilde{w}(t) + B_1{B_1}^* \tilde{w}_t(t) = -\xi B_2{B_2}^* \varphi_t(t) - B_2{B_2}^* \varphi_t(t - \tau), & t > 0, \\ \tilde{w}(0) = 0 \qquad \tilde{w}_t(0) = 0. \end{cases}$$

De (2.20), on a

$$\begin{aligned} F(0) &= \frac{1}{2}\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}\varphi(0)\right\|^2 + \|\varphi_t(0)\|^2\right) + \frac{\xi}{2}\int_{-\tau}^{0} \|B_2^*\varphi_t(s)\|^2 ds. \\ &= E_s(w,0) + \frac{\xi}{2}\int_{-\tau}^{0} \|B_2^*\varphi_t(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Par un changement du variable $s = t - \tau$, on a

$$F(0) = E_s(w,0) + \frac{\xi}{2}\int_0^{\tau} \|B_2^*\varphi_t(t-\tau)\|^2 dt,$$

de (2.19), si $T > \max\left\{\overline{T}, \tau\right\}$, on obtient

$$\begin{aligned} F(0) &\leq c\int_0^T \|B_1^* w_t(t)\|^2 dt + \frac{\xi}{2}\int_0^T \|B_2^*\varphi_t(t-\tau)\|^2 dt \\ &\leq c\int_0^T \|B_1^*(\varphi_t(t) - \tilde{w}_t(t))\|^2 dt + \frac{\xi}{2}\int_0^T \|B_2^*\varphi_t(t-\tau)\|^2 dt \\ &\leq 2c\int_0^T \left(\|B_1^*\varphi_t(t)\|^2 + \|B_1^*\tilde{w}_t(t))\|^2\right) dt + \frac{\xi}{2}\int_0^T \|B_2^*\varphi_t(t-\tau)\|^2 dt. \qquad (2.21) \end{aligned}$$

Avec c est une constant.
D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left(\|\tilde{w}_t(t)\|^2 + \left\|A^{\frac{1}{2}}\tilde{w}(t)\right\|^2\right) + \|B_1{}^*\tilde{w}_t(t)\|^2 &= \langle\tilde{w}_t, \tilde{w}_{tt}\rangle + \langle A^{\frac{1}{2}}\tilde{w}, A^{\frac{1}{2}}\tilde{w}_t\rangle \\ &\quad + \langle B_1{}^*\tilde{w}_t, B_1{}^*\tilde{w}_t\rangle \\ &= \langle\tilde{w}_t, \tilde{w}_{tt}\rangle + \langle\tilde{w}_t, A\tilde{w}\rangle + \langle\tilde{w}_t, B_1 B_1{}^*\tilde{w}_t\rangle \\ &= \langle\tilde{w}_t, \tilde{w}_{tt} + A\tilde{w} + B_1 B_1{}^*\tilde{w}_t, \rangle. \end{aligned}$$

mais, $\tilde{w}_{tt} + A\tilde{w} + B_1 B_1{}^*\tilde{w}_t = -\xi B_2 B_2{}^*\varphi_t(t) - B_2 B_2{}^*\varphi_t(t-\tau)$,

alors, on a

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left(\|\tilde{w}_t(t)\|^2 + \left\|A^{\frac{1}{2}}\tilde{w}(t)\right\|^2\right) + \|B_1{}^*\tilde{w}_t(t)\|^2 \\ &= \langle\tilde{w}_t, -\xi B_2 B_2{}^*\varphi_t(t) - B_2 B_2{}^*\varphi_t(t-\tau), \rangle. \qquad (2.22) \end{aligned}$$

On intégre (2.22) par rapport au temps, avec $t \in (0, 2T]$, il résulte

$$\begin{aligned} &\int_0^t \left(\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left(\|\tilde{w}_t(s)\|^2 + \left\|A^{\frac{1}{2}}\tilde{w}(s)\right\|^2\right) + \|B_1{}^*\tilde{w}_t(s)\|^2\right) ds \\ = &\ \frac{1}{2}\left(\|\tilde{w}_t(t)\|^2 + \left\|A^{\frac{1}{2}}\tilde{w}(t)\right\|^2\right) - \frac{1}{2}\left(\|\tilde{w}_t(0)\|^2 + \left\|A^{\frac{1}{2}}\tilde{w}(0)\right\|^2\right) \\ &+ \int_0^t \|B_1{}^*\tilde{w}_t(s)\|^2 ds, \end{aligned}$$

avec, $\tilde{w}(0) = 0$ et $\tilde{w}_t(0) = 0$, alors

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left(\|\tilde{w}_t(t)\|^2 + \left\|A^{\frac{1}{2}}\tilde{w}(t)\right\|^2\right) + \int_0^t \|B_1{}^*\tilde{w}_t(s)\|^2 ds \\ = & \int_0^t \langle \tilde{w}_t, -\xi B_2 B_2{}^*\varphi_t(s) - B_2 B_2{}^*\varphi_t(s-\tau)\rangle ds. \end{aligned}$$

De plus, en utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned} \|\tilde{w}_t(t)\|^2 + 2\int_0^t \|B_1{}^*\tilde{w}_t(s)\|^2 ds \leq\; & \frac{1}{8TC_2{}^2}\int_0^t \|B_2{}^*\tilde{w}_t(s)\|^2 ds + 8TC_2{}^2\xi^2\int_0^t \|B_2{}^*\varphi_t(s)\|^2 ds \\ & + \frac{1}{8TC_2{}^2}\int_0^t \|B_2{}^*\tilde{w}_t(s)\|^2 ds \\ & + 8TC_2{}^2\int_0^t \|B_2{}^*\varphi_t(s-\tau)\|^2 ds, \end{aligned}$$

où $C_2 = \|B_2\| = \|B_2{}^*\|$. Comme $t \in [0, 2T]$, il résulte

$$\begin{aligned} \|\tilde{w}_t(t)\|^2 + 2\int_0^t \|B_1{}^*\tilde{w}_t(s)\|^2 ds \leq\; & \frac{1}{4TC_2{}^2}\int_0^{2T} \|B_2{}^*\tilde{w}_t(s)\|^2 ds + 8TC_2{}^2\xi^2\int_0^{2T} \|B_2{}^*\varphi_t(s)\|^2 ds \\ & + 8TC_2{}^2\int_0^{2T} \|B_2{}^*\varphi_t(s-\tau)\|^2 ds. \end{aligned} \tag{2.23}$$

On intègre (2.23) entre 0 et $2T$, on a

$$\begin{aligned} & \int_0^{2T} \|\tilde{w}_t(t)\|^2 dt + 2\int_0^{2T}\int_0^t \|B_1{}^*\tilde{w}_t(s)\|^2 ds dt \\ \leq\; & \frac{1}{4TC_2{}^2}\int_0^{2T}\int_0^{2T} \|B_2{}^*\tilde{w}_t(s)\|^2 ds dt + 8TC_2{}^2\xi^2\int_0^{2T}\int_0^{2T} \|B_2{}^*\varphi_t(s)\|^2 ds dt \\ & + 8TC_2{}^2\int_0^{2T}\int_0^{2T} \|B_2{}^*\varphi_t(s-\tau)\|^2 ds dt \\ \leq\; & \frac{1}{2C_2{}^2}\int_0^{2T} \|B_2{}^*\tilde{w}_t(s)\|^2 ds + 16T^2C_2{}^2\xi^2\int_0^{2T} \|B_2{}^*\varphi_t(s)\|^2 ds \\ & + 16T^2C_2{}^2\int_0^{2T} \|B_2{}^*\varphi_t(s-\tau)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^{2T} \|\tilde{w}_t(t)\|^2 dt + 2\int_0^{2T}\int_0^t \|B_1{}^*\tilde{w}_t(s)\|^2 ds dt \leq\; & 16T^2C_2{}^2\xi^2\int_0^{2T} \|B_2{}^*\varphi_t(s)\|^2 ds \\ & + 16T^2C_2{}^2\int_0^{2T} \|B_2{}^*\varphi_t(s-\tau)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_0^{2T}\int_0^{t} \|{B_1}^*\tilde{w}_t(s)\|^2 ds dt \leq 8T^2{C_2}^2\xi^2\int_0^{2T}\|{B_2}^*\varphi_t(s)\|^2 ds + 8T^2{C_2}^2\int_0^{2T}\|{B_2}^*\varphi_t(s-\tau)\|^2 ds,$$

en utilisant le fait que

$$\begin{aligned}\int_0^{2T}\int_0^{t} \|{B_1}^*\tilde{w}_t(s)\|^2 ds dt &\geq \int_0^{T}\|{B_1}^*\tilde{w}_t(s)\|^2(2T-s)ds\\ &\geq T\int_0^{T}\|{B_1}^*\tilde{w}_t(s)\|^2 ds,\end{aligned}$$

on déduire que

$$\begin{aligned}T\int_0^{T}\|{B_1}^*\tilde{w}_t(s)\|^2 ds &\leq \int_0^{2T}\int_0^{t} \|{B_1}^*\tilde{w}_t(s)\|^2 ds dt\\ &\leq 8T^2{C_2}^2\xi^2\int_0^{2T}\|{B_2}^*\varphi_t(s)\|^2 ds + 8T^2{C_2}^2\int_0^{2T}\|{B_2}^*\varphi_t(s-\tau)\|^2 ds,\end{aligned}$$

alors

$$\int_0^{T}\|{B_1}^*\tilde{w}_t(s)\|^2 ds \leq 8T{C_2}^2\xi^2\int_0^{2T}\|{B_2}^*\varphi_t(s)\|^2 ds + 8T{C_2}^2\int_0^{2T}\|{B_2}^*\varphi_t(s-\tau)\|^2 ds. \quad (2.24)$$

On exploite (2.24) en (2.21), il résulte que

$$\begin{aligned}F(0) &\leq 2c\int_0^{T}\left(\|B_1^*\varphi_t(t)\|^2 dt + \|B_1^*\tilde{w}_t(t))\|^2\right)dt + \frac{\xi}{2}\int_0^{T}\|B_2^*\varphi_t(t-\tau)\|^2 dt\\ &\leq 2c\int_0^{T}\|B_1^*\varphi_t(t)\|^2 dt + 2c\left(8T{C_2}^2\xi^2\int_0^{2T}\|{B_2}^*\varphi_t(t)\|^2 dt + 8T{C_2}^2\int_0^{2T}\|{B_2}^*\varphi_t(t-\tau)\|^2 dt\right)\\ &\quad+\frac{\xi}{2}\int_0^{T}\|B_2^*\varphi_t(t-\tau)\|^2 dt.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}F(0) &\leq 2c\int_0^{T}\|B_1^*\varphi_t(t)\|^2 dt + \left(16cT{C_2}^2 + \frac{\xi}{2}\right)\int_0^{2T}\|{B_2}^*\varphi_t(t-\tau)\|^2 dt\\ &\quad+16c{C_2}^2T\xi^2\int_0^{2T}\|{B_2}^*\varphi_t(t)\|^2 dt\\ &\leq 2c\int_0^{2T}\|B_1^*\varphi_t(t)\|^2 dt + \frac{32cT{C_2}^2+\xi}{\xi-1}\left(\frac{\xi-1}{2}\int_0^{2T}\|B_2^*\varphi_t(t-\tau)\|^2 dt\right)\\ &\quad+\frac{32cT{C_2}^2\xi^2}{\xi-1}\left(\frac{\xi-1}{2}\int_0^{2T}\|{B_2}^*\varphi_t(t)\|^2 dt\right)\\ &\leq -C_0\int_0^{2T}F'(t)dt.\end{aligned}$$

Car

$$F^{'}(t) \leq -\|B_1^*\varphi_t(t)\|^2 - \frac{1-\xi}{2}\|B_2^*\varphi_t(t)\|^2 - \frac{\xi-1}{2}\|B_2^*\varphi_t(t-\tau)\|^2.$$

On utilisé le fait que F est décroissante et C_0 donnée par

$$C_0 = \max\left\{2c, \frac{32cTC_2{}^2+\xi}{\xi+1}, \frac{32cC_2{}^2T\xi^2}{\xi-1}\right\}.$$

Alors, on a

$$F(2T) \leq F(0) \leq C_0(F(0) - F(2T)).$$

Donc, on obtient

$$F(2T) \leq C_0F(0) - C_0F(2T) \Rightarrow (C_0+1)F(2T) \leq F(0) \Rightarrow F(2T) \leq \frac{C_0}{C_0+1}F(0).$$

La preuve est achevée. □

Théorème 2.3. *Sous l'hypothèse (2.20). Pour tout $\xi > 1$ dans la définition (2.11), il existe $\beta > 0$ dépendent à $\overline{T}, \tau, \xi$ et à l'opérateur B_1, telle que si $B_2{}^*$ satisfait $\|B_2{}^*\| < \beta$, de plus il existe des constantes positives K, μ tels que toute solution du système (P) satisfait*

$$E(t) \leq Ke^{-\mu t}E(0), \qquad t > 0. \tag{2.25}$$

Démonstration.
On peut voire que le problème (P) satisfait

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} = (\mathcal{A}^0 + \mathcal{B})\begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix},$$

avec

$$\mathcal{B}\begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi B_2 B_2{}^* v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème 2.2, on a

$$F(t) \leq Ke^{-\tilde{\mu}t}F(0),$$

en appliquent le théorème 1.9, on obtient

$$-\tilde{\mu} + K\|\mathcal{B}\| < 0, \tag{2.26}$$

où

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{2T}\ln\frac{C_0+1}{C_0},$$

et

$$K = \frac{C_0+1}{C_0}.$$

En trouve l'inégalité (2.25) par le théorème 1.8 pour $\mu = \tilde{\mu} - K\|\mathcal{B}\|$ soit positive ce qui achevé la preuve du théorème.

De (2.26), on a

$$\begin{aligned} \xi\|B_2\|^2 &< \frac{\tilde{\mu}}{K}, \\ \xi {C_2}^2 &< \frac{1}{2T}\frac{C_0}{C_0+1}\ln\frac{C_0+1}{C_0}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Comme $\|B_2\| = C_2$.
On Considère la fonction continue suivante

$$\begin{aligned} h : (0,+\infty) &\longrightarrow (0,+\infty) \\ s &\longmapsto \frac{s}{s+1}\ln\frac{s+1}{s}. \end{aligned}$$

On dérive h, on trouve

$$\begin{aligned} h'(s) &= \left(\frac{s}{s+1}\right)' \times \ln\frac{s+1}{s} + \left(\ln\frac{s+1}{s}\right)' \times \frac{s}{s+1} \\ &= \frac{1}{(s+1)^2}\ln\frac{s+1}{s} - \frac{1}{(s+1)^2}. \end{aligned}$$

Le tableau de variation de la fonction h, est donnée par

s	0		$\frac{1}{e-1}$		$+\infty$
$h(s)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

la fonction h admet un maximum pour $h(\frac{1}{e-1}) = \frac{1}{e}$, de plus est croissante pour $s \in [0, \frac{1}{e}]$, est décroissante pour $s \in [\frac{1}{e}, +\infty[$.

D'après l'inégalité (2.27), on a

$$\begin{aligned} 2T\xi C_2^2 &< \frac{C_0}{C_0+1}\ln\frac{C_0+1}{C_0} \\ 2T\xi C_2^2 &< h(C_0). \end{aligned}$$

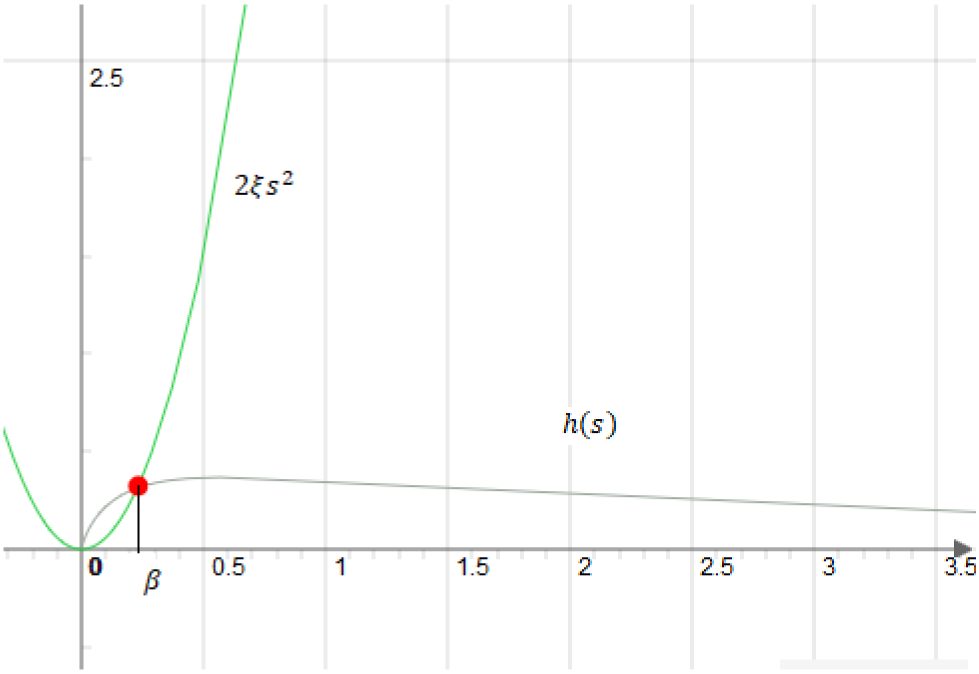
On Considère que $\xi > 1$ et T est fixé, on a $\frac{\xi}{\xi-1} > \frac{1}{e-1}$, de plus C_0 est une fonction en C_2 ($C_0 \simeq C_0(C_2)$), on remarque que $C_0(C_2)$ est une fonction croissant par rapport à C_2, et

$$C_0(0) = \max\left\{2c, \frac{\xi}{\xi-1}\right\} > \frac{1}{e-1}.$$

Donc, $h(C_0(C_2))$ est fonction décroissante avec $h(C_0(0)) > 0$, de plus $2T\xi C_2^2$ est une fonction croissant par rapport à C_2 et $h(C_0(0)) = 0$, donc, il existe un point $\beta > 0$ tel que

$$2\xi\beta^2 T = h(C_0(\beta)),$$

donc, pour tout $C_2 \in [0, \beta)$, l'estimation(2.27) est vérifiée. Voir le graphe.



La preuve est terminé. □

Remarque 2.2. *Le Théorème 2.3 déclare que pour tout $\xi > 1$, il existe $\beta^*(\xi) > 0$ (dépendent de ξ) telle qu'on a la stabilité exponentielle, si C_2 satisfait $C_2 = \|B_2^*\| < \beta^*(\xi)$. De la preuve du théorème 2.3, en effet, on a pour tout $\xi > 1$, et $\beta^*(\xi)$ satisfait*

$$\beta^*(\xi)^2 = \frac{h(C_0(\beta^*(\xi)))}{2\xi T},$$

et comme $\max\limits_{s>0} h(s) = \frac{1}{e}$, on déduire que

$$\beta^*(\xi)^2 \leq \frac{1}{2Te}.$$

En prenant

$$\beta^* = \sup_{\xi>1} \beta^*(\xi).$$

On déduire que pour tout $C_2 < \beta^*$, il existe au moins un $\xi > 1$, tel que $C_2 < \beta^*(\xi)$ et l'estimation (2.27) est vérifiée, autrement dit, pour l'opérateur B_2 vérifie $\|B_2^*\| < \beta^*$, la décroissance exponentielle est validé.

Chapitre 3

Applications

Le but de ce chapitre est de présenter quelques applications qui illustrent les résultats obtenus

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière régulière $\partial\Omega$ et la fonction u définie de $\Omega \times (0, +\infty)$ dans $\mathbb{R}$. On note par $\|.\|$ la norme associée à l'espace $L^p(\Omega)$.

3.1 Équation d'onde

1 Équations d'ondes avec terme d'amortissement interne.
On suppose que b_1, b_2 des fonctions données telles que $b_1, b_2 \in L^\infty(\Omega)$ et

$$b_1(x), b_2(x) \geq 0 \quad x \in \Omega.$$

Soit le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + b_1(x)u_t(x,t) + b_2(x)u_t(x,t-\tau) = 0, & x \in \Omega,\ t \geq 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \geq 0, \\ \frac{\partial u}{\partial v}(x,t) = -k(x)u_t(x,t), & x \in \Gamma_0,\ t > 0, \\ \sqrt{b_2}u_t(x,t) = f^0(x,t) & x \in \omega_2,\ t \in (-\tau, 0), \\ u(x,0) = u_0(x) \quad u_t(x,0) = u_1(x) & x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Avec les données initiales $(u_0, u_1, f^0) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2((-\tau, 0); L^2(\omega_2))$, où $\omega_i = \{x \in \Omega : b_i(x) > 0\}$ est le support de $b_i, i = 1$ *ou* 2.

On prend $H = L^2(\Omega)$, et on définit l'opérateur A par

$$\begin{array}{rcl} A : \mathcal{D}(A) & \longrightarrow & H \\ u & \longmapsto & -\triangle u, \end{array}$$

avec

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in H_0^1(\Omega) : \triangle u \in L^2(\Omega)\}.$$

L'opérateur A est auto-adjoint et positif avec un inverse compact dans H. De plus l'opérateur racine carré de A est bien défini. On a $V = \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}) = H_0^1(\Omega)$.
On définit $U_1 = L^2(\omega_1), U_2 = L^2(\omega_2)$ et l'opérateur $B_i, i = 1, 2,$ par

$$\begin{array}{rcl} B_i : U_i & \longrightarrow & H \\ v & \longmapsto & \sqrt{b_i(x)}\tilde{v}, \end{array}$$

où $\tilde{v} \in L^2(\Omega)$ est l'extension de v par zéro à l'extérieur de ω_i. Il est facile de vérifier que

$$B_i^* \varphi = \sqrt{b_i} \varphi|_{\omega_i} \qquad \forall \varphi \in H.$$

Avec $B_i B_i^* \varphi = b_i \varphi$, pour tout $\varphi \in H$.
Le problème (3.1) est équivaut de problème (P) avec

$$A = -\Delta, \; B_1 B_1^* = b_1(x), \; et \; B_2 B_2^* = b_2(x).$$

Dans ce cas, l'énergie est

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left\{ u_t^2(x,t) + |\bigtriangledown u(x,t)|^2 \right\} dx + \frac{\xi}{2} \int_{t-\tau}^{t} \int_\Omega b_2(x) u_t^2(x,s) dx ds. \tag{3.2}$$

L'énergie standard pour l'équation d'onde

$$E_s(t) = E_s(\omega, t) := \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\omega_t^2 + |\bigtriangledown \omega|^2 \right) dx,$$

puisque B_1 est bornée, d'après la remarque 2.2, la principale assomption concerne l'existence d'une estimation d'observabilité de l'équation d'onde standard

$$\begin{cases} \varphi_{tt}(x,t) - \Delta \varphi(x,t) = 0, & x \in \Omega, \; t \geq 0, \\ \varphi(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, \; t \geq 0, \\ \varphi(x,0) = \omega_0(x) \quad \varphi_t(x,0) = \omega_1(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.3}$$

avec $(\omega_0, \omega_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.
On suppose ensuite qu'il existe un temps $\overline{T} > 0$, telle que pour tout $T > \overline{T}$, il y a une constante c, dépendant à T mais indépendante sur les données initiales, tel que

$$E_s(0) \leq c \int_0^T \int_\Omega b_1(x) \varphi_t^2(x,s) dx ds, \tag{3.4}$$

pour chaque solution faible de problème (3.3).

Comme $\|B_2\| = \|B_2^*\| = C_2$, on a

$$\|B_2\| = \|b_2\|^{\frac{1}{2}},$$

où pour $v \in L^2(\Omega)$, on désigne la norme infini de v, comme suit

$$\|v\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |v(x)|.$$

De plus, d'après le théorème 2.3, on a la résultat suivant

Théorème 3.1. *Supposer que l'estimation (3.4) vérifiée pour l'équation d'onde (3.3). Pour tout $\xi > 1$ dans la définition (3.2), il existe $\beta > 0$ dépendent de $\overline{T}, \tau, \xi$ et b_1 tel que si $\|b_2\|_\infty < \beta$, ensuite, il existe des constantes positives K, μ tels que toute solution de (3.1) satisfait*

$$E(t) \leq K e^{-\mu t} E(0), \quad t > 0.$$

2 Equations d'ondes avec terme d'amortissement interne et aux limites.

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + b(x)u_t(x,t-\tau) = 0, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,t) = 0 & x \in \Gamma_1,\ t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial v}(x,t) = -K(x)u_t(x,t), & x \in \Gamma_0,\ t > 0, \\ \sqrt{b}u_t(x,t) = f^0(x,t), & x \in \Omega,\ t \in (-\tau, 0), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.5}$$

Où $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, avec $\Gamma_0,\ \Gamma_1$ sont des sous-ensembles fermés de $\partial\Omega$ avec $\Gamma_0 \bigcap \Gamma_1 = \emptyset$. De plus, on suppose que $\Gamma_0,\ \Gamma_1$ ont un intérieur non vide sur $\partial\Omega$.
Avec les données initiales $(u_0, u_1, f^0) \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2((-\tau, 0); L^2(\omega_2))$, où $b \in L^\infty(\Omega), K \in L^\infty(\Gamma_0)$ et

$$H^1_{\Gamma_1} := \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \ dans\ \Gamma_1\}.$$

Pour $H = L^2(\Omega)$ et on définit l'opérateur A par

$$\begin{aligned} A : \mathcal{D}(A) &\longrightarrow H \\ u &\longmapsto -\Delta u, \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{D}(A) := \left\{ u \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega)\ et\ \frac{\partial u}{\partial v} = 0\ dans \Gamma_0 \right\},$$

et les opérateurs B_1 et B_2 sont comme suit

$$\begin{aligned} B_2 : U_2 &\longrightarrow H \\ u &\longmapsto \sqrt{b(x)}\tilde{u}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 : U_1 &\longrightarrow V' \\ u &\longmapsto \sqrt{k}A_{-1}Nu, \end{aligned}$$

vérifie $B_1^*\omega = \sqrt{k}w|_{\Gamma_0},\ \forall \omega \in V := \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$, où A_{-1} est l'extension de A dans H, à savoir pour tous $h \in H$ et $\varphi \in \mathcal{D}(A)$, on a $A_{-1}h$ est l'élément unique de $(\mathcal{D}(A))'$, tel que

$$\langle A_{-1}h, \varphi \rangle_{(\mathcal{D}(A))', \mathcal{D}(A)} = \int_\Omega hA\varphi dx.$$

Ci-dessous, $N \in \mathcal{L}(L^2(\Gamma_0); L^2(\Omega))$ est défini comme suit
pour tout $v \in L^2(\Gamma_0)$, Nv est l'unique solution de

$$\Delta Nv = 0,\ Nv|_{\Gamma_1} = 0,\ \frac{\partial Nv}{\partial v}_{\Gamma_0} = v.$$

La fonction d'énergie est défini comme suite

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{ U_t^2(x,t) + |\nabla u(x,t)|^2 \right\} dx + \frac{\xi}{2}\int\limits_{t-\tau}^{t} \int_\Omega b(x)u_t^2(x,s)dxds. \tag{3.6}$$

Comme B_1 est non bornée, on doit considérer le système suivant

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t) - \Delta w(x,t) = 0 & x \in \Omega,\ t \geq 0, \\ w(x,t) = 0 & x \in \Gamma_1,\ t \geq 0, \\ \frac{\partial w}{\partial v}(x,t) = -k(x) w_t(x,t) & x \in \Gamma_0,\ t > 0, \\ w(x,0) = w_0(x) \quad w_t(x,0) = w_1(x) & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.7}$$

avec les données initiales $(w_0, w_1) \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Il existe un temps $\overline{T} > 0$, tel que pour tout temps $T > \overline{T}$, il y a une constante c, dépend de T mais indépendant à les données initiales, tel que, pour tout solution faible du problème (3.7), on a

$$E_s(0) \leq \int_0^T \int_{\Gamma_0} k(x) w_t^2(x,s) dx ds. \tag{3.8}$$

Théorème 3.2. *Suppose que l'estimation (3.8) est vérifié pour chaque solution faible du problème (3.7). Pour tout* $\xi > 1$ *dans le définition (3.6), il y à* $\beta > 0$ *dépendent à* $\overline{T}, \tau, \xi$ *et* k*, tel que si* $\|b(x)\|_\infty < \beta$*, puis il existe des positives constantes* K, μ *tel que tout solution de (3.5) satisfait*

$$E(t) \leq K e^{-\mu t} E(0), \qquad t > 0.$$

3.2 Système d'élasticité

1 Système d'élasticité avec terme d'amortissement interne.

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \mu \Delta u(x,t) - (\lambda + \mu) \Delta div\ u & \\ \ +b_1(x) u_t(x,t) + b_2(x) u_t(x, t-\tau) = 0 & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad u_t(x,0) = v_0(x) & x \in \Omega, \\ \sqrt{b_2} u_t(x,t) = f^0(t), & x \in \omega_2,\ t \in (-\tau, 0), \end{cases}$$

où les données initiales $(u_0, v_0, f^0) \in H^1_0(\Omega)^n \times L^2(\Omega)^n \times L^2((-\tau,0); L^2(\omega_2)^n$, avec μ, λ sont des constantes réel positives. Pour $H = L^2(\Omega)^n$ et on définit l'opérateur A par

$$\begin{aligned} A : \mathcal{D}(A) &\longrightarrow H \\ u &\longmapsto -\mu \Delta u(x,t) - (\lambda + \mu) \bigtriangledown div\ u, \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{D}(A) = \{ u \in H^1_0(\Omega)^n : \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \bigtriangledown div\ u \in L^2(\Omega)^n \}.$$

L'opérateur A est auto-adjoint et défini positif avec un inverse compact dans H. De plus, on a $V = \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}) = H^1_0(\Omega)^n$ muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_V = \int_\Omega \left(\mu \sum_{i,j=1}^n \partial_i u_j \partial_i v_j + (\lambda + \mu) div\ u\ div\ v \right) dx,\ \forall u, v \in H^1_0(\Omega)^n.$$

On défini $U_i = L^2(\omega_i)^n$ et les opérateurs $B_i,\ i = 1, 2$, comme suit

$$\begin{aligned} B_i : U_i &\longrightarrow H \\ v &\longmapsto \sqrt{b_i} \tilde{v}, \end{aligned}$$

où B_i vérifie

$$B_i^*(\varphi) = \sqrt{b_i}\varphi|_{\omega_i} \quad \varphi \in H,$$

et

$$B_i B_i^*(\varphi) = b_i\varphi \quad \forall \varphi \in H \ et \ i = 1, 2.$$

Par conséquent, afin d'appliquer les résultats abstraits de Sec 2, on à besoin de vérifié l'estimation pour le système associé, il existe $T > 0$ et à constante $c > 0$ tel que

$$\frac{1}{2}\left(\langle\varphi_0, \varphi_0\rangle_V + \int_\Omega |\psi_0|^2 dx\right) \leq c \int_0^T \int_\Omega b_1(x)|\varphi_t|^2(x, s) dx ds,$$

pour chaque solution faible φ de

$$\begin{cases} \varphi_{tt}(x,t) - \mu\Delta\varphi(x,t) - (\lambda+\mu) \bigtriangledown \ div \ \varphi(x,t) = 0, & x \in \Omega \ , \ t > 0, \\ \varphi(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, \ t > 0, \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x) \quad \varphi_t(x,0) = \psi_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

avec les données initial $(\varphi_0, \psi_0) \in H_0^1\Omega^n \times L^2\Omega^n$.

Si l'estimation est vérifie, donc la résultat du stabilité de Sec.2 peut être appliquée à ce système.

2 Système d'élasticité avec terme d'amortissement interne et aux limites.

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \mu\Delta u(x,t) - (\lambda+\mu) \bigtriangledown \ div \ u + b(x)u_t(x, t-\tau) = 0, & x \in \Omega \ , \ t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \Gamma_1, \ t > 0, \\ \sigma(u(x,t))v(x) = -K(x)u_t(x,t), & x \in \Gamma_0, \ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \ et \ u_t(x,0) = v_0(x), & x \in \Omega, \\ \sqrt{b}u_t(x,t) = f^0(t), & x \in \omega_2, \ t \in (-\tau, 0), \end{cases}$$

avec les données initiales $(u_0, v_0, f^0) \in H_0^1(\Omega)^n \times L^2(\Omega)^n \times L^2((-\tau, 0); L^2(\omega_2)^n)$ et

$$\sigma(u) = \mu\left(\sum_{i=1}^n \partial_i(u_j)v_i\right)_{j=1}^n + (\lambda+\mu)(div \ u)v \quad dans \Gamma_0.$$

On prend $H = L^2(\Omega)^n$, A est un opérateur auto-adjoint , positive et B_1, B_2 sont les même opérateurs défini dans Sec 3.1.2.
comme B_1 n'est pas bornée, on suppose qu'il existe $\overline{T} > 0$ tel que pour tout $T > \overline{T}$, il existe a constante c, dépendent à T mais indépendant à les données initiales, tel que

$$\frac{1}{2}\left(\langle\omega_0, \omega_0\rangle_V + \int_\Omega |\psi_0|^2 dx\right) \leq c \int_0^T \int_{\Gamma_0} k(x)|\omega_t|^2(x, s) dx ds,$$

pour chaque solution faible ω du système

$$\begin{cases} \omega_{tt}(x,t) - \mu \ \Delta \ \omega(x,t) - (\lambda+\mu) \ \bigtriangledown \ div \ \omega = 0, & x \in \Omega, \ t > 0, \\ \omega(x,t) = 0 & x \in \Gamma_1, \ t > 0, \\ \sigma(\omega(x,t)) \ v(x) = -k(x)\omega_t(x,t) & x \in \Gamma_0, \ t > 0, \\ \omega(x,0) = \omega_0(x) \quad \omega_t(x,0) = \psi_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

avec les données initiales $(\omega_0, \psi_0) \in H_0^1(\Omega)^n \times L^2(\Omega)^n$.
Si l'estimation est vérifiée, la résultat du stabilité de Sec. 2 on peut appliqué au système président.

3.3 Système de Petrovsky

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière régulière $\partial\Omega$ de classe C^4.
On considère le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) + \Delta^2 u(x,t) + b_1(x)u_t(x,t) + b_2(x)u_t(x,t-\tau) = 0 & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,t) = \Delta u(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x)\ et\ u_t(x,0) = u_1(x) & x \in \Omega, \\ u_t(x,t) = f^0(x,t), & x \in \omega_2,\ t \in (-\tau, 0), \end{cases} \tag{3.9}$$

où les données initiales $(u_0, u_1, f^0) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times L^2(\Omega) \times L^2((-\tau, 0); L^2(\omega_2))$ et $b_1, b_2 \in L^\infty(\Omega)$. On définit l'opérateur A par

$$\begin{array}{rcl} A : \mathcal{D}(A) & \longrightarrow & H \\ u & \longmapsto & \Delta^2 u, \end{array}$$

avec

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) \cap H^4(\Omega) : \Delta u = 0\ dans\ \partial\Omega \right\}.$$

L'opérateur A est auto-adjoint et défini positif avec un inverse compact dans H. De plus, on a $\mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. on défini $U_i = L^2(w_i)$ et les opérateur B_i, $i = 1, 2$ par

$$\begin{array}{rcl} B_i : U_i & \rightarrow & H \\ v & \mapsto & \sqrt{b_i(x)}\tilde{v}. \end{array}$$

Par conséquent, le problème (3.9) équivaut le problème (P) et d'après le théorème 2.3, on obtient l'existence et la stabilité de la solution du problème (3.9).

On considère le problème à valeur limite initiale suivant

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) + \Delta^2 u(x,t) + b_1(x)u_t(x,t) + b_2(x)u_t(x,t-\tau) = 0 & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,t) = \frac{\partial u}{\partial v}(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x)\ et\ u_t(x,0) = u_1(x) & x \in \Omega, \\ u_t(x,t) = f^0(x,t), & x \in \omega_2,\ t \in (-\tau, 0), \end{cases} \tag{3.10}$$

où les données initiales $(u_0, u_1, f^0) \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2((-\tau, 0); L^2(\omega_2))$ avec

$$H_0^2(\Omega) := \left\{ \varphi \in H^2(\Omega) : u = \frac{\partial u}{\partial v} = 0\ dans\ \partial\Omega \right\},$$

et $b_1,\ b_2$ satisfait les même hypothèse que la section précédent. Par conséquent, le problème (3.10) équivaut le problème (P) et d'après le théorème 2.3, on obtient l'existence et la stabilité de la solution du problème (3.10).

Conclusion

Dans ce travail, on a considéré un problème d'évolution linéaire abstrait à retard. De plus, on a démontré l'existence globale et l'unicité de la solution. Ensuite, on a étudié la stabilité exponentielle de la solution par un passage par la stabilité exponentielle d'un problème auxiliaire et on a utilisé un résultat classique dans la théorie de semi groupe. À la fin de ce travail, on a donné quelques applications et exemples pour illustrer le résultat obtenu.

Bibliographie

[1] K. Ammari, S. Nicaise, C. Pignotti,*Feedback boundary stabilization of wave equations with interior delay*, Syst. Control Lett. 59 (2010) : 623-628.

[2] Y. Boukhatem, B. Benabderrahmane, *General decay for a viscoelastic equation of variable coefficients with a time-varying delay in the boundary feedback and acoustic boundary conditions*, Acta Mathematica Scientia, 37(5) (2017) : 1453-1471.

[3] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Halsted Press, 1983.

[4] G. Carlier, *Analyse fonctionnelle*, ENS, 2009-2010.

[5] R. Datko, J. Lagnese, MP. Polis, *An example on the effect of time delays in boundary feedback stabilization of wave equations*, SIAM J Control Optim 24 (1986) 152–156.

[6] A. Guesmia, *Well-posedness and exponential stability of an abstract evolution equation with infinite memory and time delay*, IMA Journal of Mathematical Control and Information 30.4 (2013) : 507-526.

[7] S. Nicaise, C. Pignotti, *Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks*, SIAM J. Control Optim., 45 (2006) : 1561-1585.

[8] S. Nicaise, C. Pignotti, *Exponential stability of abstract evolution equations with time delay*, Journal of Evolution Equations 15.1 (2015) : 107-129.

[9] S. Nicaise, C. Pignotti, *Stabilization of second-order evolution equations with time delay*, Mathematics of Control Signals and Systems 26.4 (2014) : 563-588.

[10] S. Nicaise, J. Valein, *Stabilization of second-order evolution equations with unbounded feedback with delay*, ESAIM Control Optim Calc Var 16 (2010) :420-456.

[11] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer Verlag, New York, Berlin, 1983.

[12] C. Pignotti, *A note on stabilization of locally damped wave equations with time delay*, Systems Control Letters 61.1 (2012) : 92-97.

[13] M. Tucsnak, G. Weiss, *Observation and control for operator semi groups*, Birkhauser advanced texts : Basler Lehrbucher. Birkhauser, Basel (2009).

[14] E. Zuazua, *Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping*, Comm. Partial Differential Equations 15 (1990) : 205-235.

[15] GQ. Xu , SP. Yung , LK. Li, *Stabilization of wave systems with input delay in the boundary control.* ESAIM : *Control*, optimisation and calculus of variations, 12(4),12 (2006) : 770–785.