الجمـــــهوريـــة الجـــزائريـــة الديـمقراطيــــــــة الشـــعبيـــــــة
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعـلـيـم الـعـالــي و الـبـحـث الـعـلـمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جـامـعـة عمّـــار ثـلـيــجـــي بالأغــــواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كـلـيــــــة العلوم
FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire de LICENCE

Domain : Mathématiques et Informatique
Filière :Mathématiques
Option :Mathématiques

Par :

SerkhadDjamel et Benzian Ahmed

THEME

Le théorème du point fixe et application

Sous la direction de monsieur : Dr BoukehilaAhcene

AnnéeUniversitaire 2014/2015

Table des matières

Introduction 3

Chapitre IThéorème du Point Fixe Métrique 4

Le Théorème de Picard 4

Le Théorème de Cauchy–Lipschitz. 5

ChapitreIIThéorème du Point Fixe topologique 10

Le Théorème de Brouwer 11

Le Théorème de Schauder 12

Le Théorème de Cauchy–Arzela 14

Chapitre III Applications 16

Approche numérique 16

Déterminer les solutions maximales 18

Le point fixe et la démonstration par l'absurde 19

Table des matières

Notations

-$B(x_0, r)$ est la boule ouverte de centre $x_0$et de rayon r.

-$B_f(x_0, r)$ est la boule fermée centrée en x_0 et de rayon r.

-$\dot{k}$ est l'intérieur de k.

- $\bar{A}$est l'adhérence de A

-$S(x_0, r)$ est la sphère de centre x_0 et de rayon r.

- $C^0(E, F)$ est l'ensemble des fonctions continues de E dans F.

- $C_b^0(E, F)$ est l'ensemble des fonctions continues et bornées de E dans F.

Introduction

Dans ce memoire, on étudie les théorèmes du point fixe de Picard et de Schauder, et quelques-unes de leurs applications . Etant donnés un ensemble E et une application f : E $\rightarrow$ E, ces théorèmes donnent certaines conditions sous lesquelles f admet un point fixe dans E. Ces théorèmes sont importants dans les mathématiques car il y a plusieurs applications, par exemple pour trouver les racines d'un polynôme, ou pour montrer l'existence des solutions numériques des équations différentielles.

Chapitre I

point fixe métrique

Théorème 1.1 (Picard).

Soient (E, d) un espace métrique complet et $\varphi : E \to E$ une application contractante, i.e. Lipschitzienne de rapport $k < 1$.

Alors, φ admet un unique point fixe $a \in E$. De plus, pout tout point initial $x_0 \in E$, la suite itérée $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$, avec $x_0 \in E$ quelconque et$x_{p+1} := \varphi(x_p)$ converge vers a.

Démonstration

Unicité : Supposons qu'il existe $a, b \in E$, tels qu'on ait $\varphi(a) = a$ et $\varphi(b) = b$.

Alors on a $d(\varphi(a), \varphi(b)) = d(a, b)$ et donc $\frac{d(\varphi(a),\varphi(b))}{d(a,b)} = 1 > k$ ce qui contredit le fait que f soit k-Lipschitzienne.

Existence : Soit x_0 un point initial quelconque et (x_p)la suite itérée associée. On a $d(x_p, x_{p+1})$=$d(\varphi(x_{p-1})$,$\varphi(x_p)\ ) \leq kd(x_{p-1}, x_p)$

. On va montrer par récurrence sur p que $d(x_p, x_{p+1}) \leq k^p d(x_0, x_1)$ (p) :

Initialisation : Evident pour $p = 0$.

Généralisation : supposons que pour un certain entier p quelconque mais fixé on ait la propriété (P).

Alors

$$
\begin{aligned}
d(x_{p+1}, x_{p+2}) &= d(\varphi(x_p), \varphi(x_{p+1})) \\
&\leq kd(x_p, x_{p+1}) \\
&\leq kk^p d(x_0, x_1) \\
&\leq k^{p+1} d(x_0, x_1)
\end{aligned}
$$

ce qui achève la récurrence.

On a alors $\forall q > p$:

$$
d(x_p, x_q) \leq \sum_{l=p}^{q-1} d(x_l, x_{l-1}) \leq \left(\sum_{l=p}^{q-1} k^l\right) d(x_0, x_1)
$$

De plus, pour tout $p > q, \sum_{l=p}^{q-1} k^l \leq \sum_{l=p}^{\infty} k^l = \frac{k^p}{1-k}$ d'ou $d(x_p, x_q) \leq \frac{k^p}{1-k} d(x_0, x_1)$.

On en déduit alors que (x_p) est une suite de Cauchy. Comme (E, d) est complet, la suite (x_p) converge vers un point limite $a \in E$. De plus on a $\varphi(x_p) \to \varphi(a)$ quand $p \to +\infty$ est car φ est continue et $\varphi(x_p) = x_{p+1}$. Or $\mathrm{x}_p \to a$ quand $p \to +\infty$, d'où par unicité de la limite on a $\varphi(a) = a$.

Contre-exemples. Les exemples suivant montrent que chacune des hypothèses du théorème est réellement nécessaire.

1.X n'est pas stable par f : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $X = [0, 1]$

Or X est fermé dans R, et complet car R est complet. De plus, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1 \Rightarrow \sup_{x \in X} |f'(x)| < 1$ est contractante. Mais f n'a pas de point fixe car $f([0, 1]) = \left[1, \sqrt{2}\right]$ i.e. X n'est pas stable par f

2.f n'est pas contractante : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $X = [0, \infty[$.

Or $f : X \to X$, et X est un fermé de R. R est complet donc X est complet. Mais $\sup_{x \in X} |f'(x)| = 1$ donc f n'est pas contractante.

3. Xn'est pas complet : $f(x) = \frac{\sin(x)}{2}$ sur $X =]0, \pi/4]$

Or $f(]0; \pi/4]) \subset]0; \pi/4]$ et $\sup_{x \in X} |f'(x)| = \frac{1}{2} < 1$ donc, f est contractante. Mais X n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ donc pas complet.

Défnition 1.2

Soient T$>$ 0et $\mathrm{r}_0 > 0$. On dit que $C + [t_0 - T, t_0 + T] \times B_f(y_0, r_0)$ est un cylindre de sécurité pour (C) si toute solution $y : I \to \mathbb{R}^m$ du problème de Cauchy $y(t_0) = y_0$ avec I$\subset$ $[t_0 - T, t_0 + T]$ reste contenue dans $B_f(y_0, r_0)$.

Défnition 1.3

f est localement Lipschitzienne par rapport à la variable y sur U si $\forall (r_0, y_0) \in U$, il existe un voisinage V de (r_0, y_0) dans U et une constante $k = k(v)$ telle que $\forall (t, y_1)$,$(t, y_2) \in V$, on ait $\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$.

Théorème 1.4 (Cauchy-Lipschitz).

Si $f : U \to \mathbb{R}$ est continue et localement Lipschitzienne par rapport à y sur U , alors pour tout cylindre de sécurité $C = [t_0 - T, t_0 - T] \times B_f(r_0, y_0)$, le problème de Cauchy admet une unique solution $y : [t_0 - T, t_0 - T] \to U$.

De plus, si on pose $\phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\ (u, y(u))du$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que la suite itérée $\phi^p(z)$ converge uniformément vers la solution exacte.

Démonstration :

On commence par construire un cylindre de sécurité pour (C).

Soit V un voisinage de $(t_{0,}y_0)$ sur lequel f est k Lipschitzienne par rapport à y , et soient $T_0 > 0$ $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times B(y_{0,}r_0\ ) \subset V$ un cylindre.

C_0 est un fermé borné de $\mathbb{R}^{m+1}$ donc compact, et on en déduit alors que f est bornée sur C_0.

Soit M $=\sup_{(t,y)\in\ C_0}$ $||\ f\ (t, y(t))||$.On pose $T=$ $\min(\mathrm{T}_{0,} \frac{r_0}{M})$. On va montrer que $C=$ $[t_0 - T, t_0 + T]$ $\times B_f(r_0, y_0)$ est un cylindre de sécurité pour (C).

Soit $y : I \subset [t_0 - T, t_0 - T] \to \mathbb{R}^m$avec $y(t_{0)} = y_0$ et $y' = f(t, y)$ $\forall t \in I$.

Supposonsqu'il existe $\tau \in [t_0\ , T + t_0[$ tel que $y(\tau)$ n'appartient pas à $B_f\ (y_0, r_0)$.

De plus, supposons que $J\{t \in[t_0\ , T + t_0[\ : y(t) \notin B_f\ (y_0, r_0)\}$ soit non vide.

On pose $\tau=$ inf J. Alors $\forall t \in [t_0, \tau[$ on a $y(t) \in B_f\ (y_0, r_0)$, et de plus $d(y_0, y(\tau) = r_0$.

Comme $(t, y(t)) \in C_0 \forall t \in [t_0, \tau]$ et $y' =f\ (t, y)$ on a, par le Théorème des Accroisements Finis,

$r_0 = ||y_0 - y(\tau)|| =||y(t_0) - y(\tau)|| \leq |t_0 - \tau| \sup\limits_{t\in[t_0,\tau]} \quad |y'(t)| < M \times T \leq r_0$.

Donc par passage à la limite ($B(y_{0,}r_0\ )$ étant fermé) on a $y(t) \in B(y_{0,}r_0\ )\forall t \in[t_0\ , T+ t_0[\cap I$.

De même on montre que $y(t) \in B_f\ (y_0, r_0)$ $\forall t \in[t_0\ - T, t_0[\cap I$.et donc $y(t) \in B_f$ $(y_0, r_0)\forall t \in I$.

Dans la suite on travaille avec ce cylindre de sécurité. On remarque que par construction on a $\sup_C|f\ |=M$ et f est k -Lipschitzienne par rapport à y sur C.

On note $F=$ $\mathrm{C}^0([t_0- T\ , t_0+ T], B\ (y_0, r_0))$ muni de la distance d= $||.||_\infty$.

$\forall y \in F$ on associe $\phi(y)$ défnie par :

$$\phi(y)(t) = y_0+ \int_{t_0}^{t} f\ (u, y(u))du \quad .$$

On montre d'abord l'équivalence suivante : y est solution de (E) $\Leftrightarrow$ y est un point fixe de ϕ :

($\Leftarrow$)

Supposons que y est un point fixe de ϕ. Alors $\forall y \in F$ on a $\phi(y) = y$ d'où $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\ (u, y(u))du$.

Or f est continue sur U donc y est continue sur U. De plus, y est dérivable

sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ et sa dérivée égale $f\ (t, y(t))$ i.e $y'(t) = f\ (t, y(t))$. On a aussi $y(t_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0} f\ (u, y(u))du = y_0$.

Donc f est solution du problème de Cauchy (C).

($\Rightarrow$)

Supposons maintenant que y est solution de (E). On a alors $y'(t) = f\ (t, y(t))$ et $y(t_0) = y_0$.

On peut intégrer y' par rapport à u car $y'(u) = f\ (u, y(u))$et $u \to f\ (u, y(u))$ est continue sur un segment et donc intégrable sur ce même segment. Alors on obtient :

$$\int_{t_0}^{t} y'(u)du .= \int_{t_0}^{t} f\ (u, y(u))du = [y(u)]_{u=t_0}^{y=t} = y(t) - y(t_0) = y(t) - y_0.$$

Donc, on a bien $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\ (u, y(u))du = \phi(y)(t)$. et donc y est point fixe de ϕ.

On veut appliquer le théorème du point xe à ϕ^p (pour p bien choisi).

1. On montre d'abord que ϕ est une application de F dans F. Pour cela on montre que $\phi(y)(t) \in B_f(y_0, r_0)$ $\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T[$.

Soit y $\in$ F. On remarque que si t $\in [t_0 - T, t_0 + T[$,

$$\begin{aligned} \|\phi(y)(t) - y_0\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f\ (u, y(u))du \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \|f\ (u, y(u))\|\, du \\ &\leq M \int_{t_0}^{t} du \end{aligned}$$

$$\leq M\,|t-t_0|$$
$$\leq M.T$$
$$\leq r_0$$

Donc $\forall t \in]t_0 - T, t_0 + T[$, $\phi(y)(t) \in B_f(y_0, r_0)$ d'où $\phi(y) \in F$ et on a évidemment la stabilité de F par ϕ^p.

2. On montre maintenant que ϕ^pest contractante. Soient $y, z \in$ F. On note $y_p = \phi^p(y)$ et z_p= ϕ^p(z), $\forall p \in \mathbb{N}^*$. Par récurrence sur p on montre qu'on a :

$$\left\| \quad y_{p(}(t) - z_p(t)\right\| \leq k^p \frac{|t-t_0|^p}{p!} d(y,z) \qquad \text{(HR)}$$

Initialisation : C'est évident dans le cas p = 0.

Généralisation : Supposons que pour un certain entier p quelconque mais fixé on ait (HR).

Alors

$$\left\| \quad y_{p+1(}(t) - z_{p+1}(t)\right\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} k \left\| \quad y_{p(}(u) - z_p(u)\right\| du \right|$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} k.k^p \frac{|u-t_0|^p}{p!} d(y,z) du \right|$$

$$\leq \frac{k^{p+1}}{p!} d(y,z) \left| \int_{t_0}^{t} |u-t_0|^p du \right|$$

$$\leq \frac{k^{p+1}}{p!} d(y,z) \left| \left[\frac{|u-t_0|^{p+1}}{p+1} \right]_{u=t_0}^{u=t} \right|$$

$$= k^{p+1} \frac{|u-t_0|^{p+1}}{(p+1)!} d(y,z)$$

ce qui achève la récurrence.

Comme $|u - t_0| \leq T$, on a $d(y_p, z_p(t)) \leq k^p \dfrac{T^p}{p!} d(y,z)$, donc ϕ est lipschitzienne de rapport $k^p \dfrac{T^p}{p!}$. Et il existe un $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $k^p \dfrac{T^p}{p!} < 1$

(car $\lim\limits_{p \to +\infty} k^p \dfrac{T^p}{p!} = 0$). Donc, pour q$\geq$ p, ϕ^qest contractante.

On déduit que ϕ^qadmet un unique point fixe y. De plus ϕ^q ($\phi(y)) = \phi^q$ ($\phi(y)) = \phi(y)$donc $\phi(y)$ est un point fixe de ϕ^q, et par unicité du point fixe de ϕ^q on a$\phi(y) = y$.

Comme les points fixes de ϕ sont des points fixes de ϕ^qon en déduit que y est l'unique point fixe de ϕ . Finalement, y est l'unique solution de (E).

chapitre II

Théorème du Point Fixe Topologique

Théorème 2.1.

Soit K une partie non vide, compacte et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \to K$ une fonction continue. Il existe $x \in K$ tel que $f(x) = x$.

Remarque Les parties convexes et compactes de $\mathbb{R}$ sont les segments.Le Théorème Brouwer prend donc dans le cas n = 1 la forme particulière suivante :

Théorème 2.2.

Si $f : [a, b] \to [a, b]$ est continue, alors il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

Démonstration.

Si f est continue de $[a, b]$ dans lui-même, la fonction $g : x \to f\ (x) - x$ est continue,prend en a la valeur $f(a)$ - $a \geq 0$ et en b la valeur$f(b) \leq b$ 0. Alors par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule en un point x_0, qui est un point xe de f.

Afin de démontrer le théorème 2.1, on va d'abord le réduire dans le cas où

K = B_f (0,1).

Le cas K = $\mathbf{B}_f$ (0, 1)

On dit qu'un espace topologique a la propriété du point fixe si toute fonction continue $f : E \to E$ possède un point fixe.

Nous allons prouver que la boule B_f $(0\,;\,1)$ a la propriété du point fixe en toute dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On note ici B_n (resp. S_n) la boule unité fermée de R_n (resp. la sphère unité de R_n).

Notre preuve est basée sur l'études des champs de vecteurs sur S_n :

Défnition 2.3

On appelle champ de vecteurs sur la sphère S_{n-1} toute fonction continue

V : $S_{n-1} \to \mathbb{R}^n$ telle que, pour tout $x, V(x)$ soit tangent en x à S_{n-1}, c'est-à-dire orthogonal à x.

Théorème 2.4.

Sur la sphère S_{2n} tout champ de vecteurs s'annule en au moins un point.

Théorème 2.5 (Brouwer).

La boule B_n a la propriété du point fixe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. .

Soient la fonction f : $B_n \to B_n$ continue et la projection défnie par : $(x_1, x_2,.........., x_{n+1}) \to (x_1, x_2,.........., x_n)$.

On a alors $\pi(B_{n+1}) = B_n$, et de plus $(f\ o\pi)(y)$ est continue de B_{n+1} dans $B_n \subset B_{n+1}$.

Donc, il existe $y \in B_{n+1}$ tel que $(f\ o\pi)(y) = y$. Alors $y \in B_n$ donc $\pi(y) = y$. On en déduit que y est un point fixe de f sur B_n.

Démonstration du théorème de Brouwer en dimension 2

Défnition 2.6.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle forme différe±ntielle de degré 1 sur Ω toute application α de sur le dual $(\mathbb{R}^n)^*$ de $\mathbb{R}^n$.

Soit F : $B_f\ (0, 1) \to S(0, 1)$ tel que $F_{|S(0,1)} = id$. On commence par supposer que F est C^1. On note $F(x;y)= (F_1(x,y), F_2(x,y))$ et on considère la forme diférentielle

$$\alpha \to B_f\ (0,1) \to (\mathbb{R}^2)^*$$
$$(x,y) \to \frac{F_1\frac{\partial F_2}{\partial y} - F_2\frac{\partial F_1}{\partial y}}{F_1^2+F_2^2}dy + \frac{F_1\frac{\partial F_2}{\partial x} - F_2\frac{\partial F_1}{\partial x}}{F_1^2+F_2^2}dx = Qdy + Pdx$$

α est bien définie sur $B_f\ (0, 1)$ car $F_1^2 + F_2^2 = 1 \neq 0$. On va appliquer le théorème 2.7 à α :

Théorème 2.7(Green-Riemann).

Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un compact à bord C^1 et $\alpha = Pdx + Qdy$ une forme diférentielle de degré 1, de classe C^1 sur un ouvert contenant K. Alors K est mesurable et

$$\int_{\partial k^+}(Pdx + Qdy) = \iint_k \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right] dxdy.$$

On cherche donc à calculer $\int_{B_f(0,1)} \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right] dxdy$. Après de laborieux calculs on trouve

$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$, d'où $\int_{s(0,1)} \alpha = 0$. En revanche si on fait le changement de variable suivant :

$x\prime = F_1(x, y)$ et $y' = F_2(x, y)$, on a

$$dx' = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y)dy$$

$$dy' = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y)dy$$

Et donc,

$$\alpha(x, y) = \frac{1}{F_1^2 + F_2^2}\left[F_1(\frac{\partial F_2}{\partial y}dy + \frac{\partial F_2}{\partial x}dx) - F_2(\frac{\partial F_1}{\partial y}dy + \frac{\partial F_1}{\partial x}dx)\right] = \frac{1}{x'^2 + y'^2}\left[x'dy' - y'dx'\right]$$

$$\int_{s(0,1)} \alpha = \int_0^1 \frac{1}{x'^2 + y'^2}\left[x'dy' - y'dx'\right] = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}[\cos^2\theta d\theta + \sin^2\theta d\theta] = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

(par le changement de variable $x_0 = \cos\theta$ et $y_0 = \sin\theta$). On a alors une contradiction car $0 \neq 2\pi$ donc une telle fonction F n'existe pas.

On en déduit donc que si f : B_f (0, 1) $\rightarrow$ B_f (0, 1) est C^1 alors elle admet un point fixe. Si f est seulement continue, alors il existe une suite de fonctions C^1,

f_n : B_f (0, 1) $\rightarrow$ B_f (0, 1) qui converge uniformément vers f. On en déduit qu'il existe $x_n \in B_f$ (0, 1) tel que $f_n(x_n) = x_n$, d'où $||f(x_n) - x_n|| = ||f(x_n) - f_n(x_n)|| \leq ||f - f_n||_\infty$. Comme B_f (0,1) est compact, quitte à extraire un sous-suite, on peut supposer que x_n tend vers un point $x_\infty \in B_f$ (0,1) et on a

$|| f(x_n)$ - $x_n|| \leq ||f(x_\infty) - f(x_n)|| + ||f(x_n) - x_n|| + ||x_\infty - x_n|| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$

d'où $f(x_\infty) = x_\infty$.

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

Théorème 2.8(Schauder).

Soient E un espace de Banach et $K \subset E$ convexe et compact. Alors toute application continue $f : K \longrightarrow K$ possède un point fixe.

Démonstration :.

Soit $f : K \longrightarrow K$ une application continue. Comme K est compact, f est uniformément continue; donc, si on fixe $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in K$, on ait $\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$, dès que $\|x - y\| \leq \delta$. De plus, il existe un ensemble fini des points $\{x_1, ..., x_p\} \subset k$ tel que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_i recouvrent K ; i.e. $K \subset \cup_{1 \leq j \leq p} B(x_j, \delta)$. Si on désigne $L := Vect\ (f\ (x_j))_{1 \leq j \leq p}$, alors L est de dimension finie, et $K^\star := K \cap L$ est compact convexe de dimension finie.

Pour $1 \leq j \leq p$, on définit la fonction continue $\psi_j : E \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\psi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x - x_j\| \geq \delta \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta} & \text{sinon} \end{cases}$$

et on voit que ψ_j est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle dehors.

On a donc, pour tout $x \in K, \sum_{j=1}^{p} \psi_j(x) > 0$, et donc on peut définir sur K les fonctions continues positives φ_j par

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^{p} \psi_k(x)}$$

pour lesquelles on a $\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) = 1$,pour tout $x \in K$.

On pose alors, pour $x \in K$, $g(x) := \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) f\ (x_j)$.$g$ est continue (car elle est la somme des fonctions continues), et prend ses valeurs dans $K^\star$ (car $g(x)$ est un barycentre des $f\ (x_j)$). Donc,si on prend la restriction $g_{|K^\star} : K^\star \longrightarrow K^\star$, par le théorème du Brouwer, g possède un point fixe $y \in K^\star$. De plus,

$$\begin{aligned} f\ (y) - y = f\ (y) - g(y) &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) f\ (y) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) f\ (x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y)(f\ (y) - f\ (x_j)) \end{aligned}$$

Or si $\varphi_j(y) \neq 0$ alors$\|y - x_j\| < \delta$, et donc $||\ f\ (y) - f\ (x_j)|| < \varepsilon$. Donc, on a, pour tout j, $\left\|\varphi_j(y)(f\ (y) - f\ (x_j))\right\| \leq \varepsilon \varphi_j(y)$, et donc

$$||\ f\ (y) - y|| \leq \sum_{j=1}^{p} ||\varphi_j(y)(f\ (y) - f\ (x_j))|| \leq \sum_{j=1}^{p} \varepsilon \varphi_j(y) = \varepsilon$$

Donc, pour tout entier m, on peut trouver un point $y_m \in K$ tel que

$\|f\ (y_m) - y_m\| < 2^{-m}$. Et puisque K est compact, de la suite $(y_m)_{m \in Z}$ on peut extraire une sous-suite (y_{mk}) qui converge vers un point $y^* \in K$ Alors f étant continue, la suite $(f\ (y_{mk}))$ converge vers $f\ (y^*)$, et on conclut que $f\ (y^*) = y^*$, i.e. y^* est un point fixe de f sur K.

Théorème 2.9(Cauchy-Arzela)

Soient :

-E un espace normé de dimension finie,

-Uun ouvert de $R \times E$,

-Fune fonction continue de Udans E, et

-$(t_0; x_0)$ un point de U .

Alors l'équation différentielle $x^{\prime} = F(t; x)$ a une solution au voisinage de $(t_0; x_0)$, i.e. il existe un nombre $\rho > 0$et une fonction $f : [t_0 - \rho; t_0 + \rho] \longrightarrow E$ de classe C^1 avec $f\ (t_0) = x_0$, telle que pour tout $t \in\ [t_0 - \rho; t_0 + \rho]$,

1. $(t; f\ (t)) \in U$
2. $f^{\prime}(t) = F(t; f\ (t))$.

Démonstration

Soit M $> \|F(t_0; x_0)\|$. Quitte à remplacer U par l'ensemble ouvert $\{(t; x) \in U : \|F(t_0; x_0)\| < M\}$, on peut supposer que F est majorée en norme par M sur U. Il existe donc $r > 0$ et $h > 0$ tels que $U \supset [t_0 - h; t_0 + h] \times B_f\ (x_0; r)$, et on choisit $\rho = min(h; \frac{r}{M}\ ) > 0$.

On considère l'ensemble K des fonctions M-Lipschitziennes de l'intervalle $J = [t_0 - \rho; t_0 + \rho]$dans E qui valent x_0 en t_0, que l'on munit de la norme uniforme. Si f et g sont dans K et $s \in [0; 1]$, alors $sf + (1 - s)g \in K$, donc K est convexe. Si $(f_i)_{i \in N}$ est une suite de Cauchy de K pour la norme uniforme, alors d'après le théorème 12, il existe une fonction continue $f : J \longrightarrow E$ telle que f_i converge uniformément vers f.

On a alors $f(t_0) = \lim_{i \longrightarrow +\infty} f_i(t_0) = x_0$ et $\forall t\,; t^{\prime} \in J$, $\left\|(f\ (t) - f\ (t^{\prime}))\right\| = \lim_{i \longrightarrow +\infty} \left\|(f\ _i(t) - f\ _i(t^{\prime}))\right\|$ $\leq M \left|t - t^{\prime}\right|$, et donc $f \in K$. On en déduit que K est fermé pour la norme uniforme dans $C^0(J\,; E)$. De plus, pour tout $t \in J$ et tout $f \in K$, on a

$$\|f\ (t) - x_0\| = \|f\ (t) - f\ (t_0)\| \leq M\,|t - t_0| \leq M\rho \leq r$$

ce qui montre que $\{K(t) = f\ (t) : f \in K\}$ est contenu dans la boule $B_f\ (x_0; r)$, et donc $K(t)$ est relativement compact. Et puisque K est uniformément équicontinu, il résulte que K est compact.

On peut alors dé nir une application $\phi : K \longrightarrow C^1(J\ , E)$, en posant

$$\phi(f\ )(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s; f\ (s))ds$$

En effet, si $f \in K$, alors $f\ (s) \in B_f\ (x_0; r)$ pour tout $s \in J$, ce qui montre que la fonction $s \longrightarrow F(s; f\ (s))$ est bien dé nie et continue sur J, à valeurs dans E, et possède une primitive $\phi(f\ )$ de classe C^1, valant x_0 en t_0. Puisque la fonction $g := \phi(f)$ vérifie $g'(t) = F\ (t; f\ (t))$, on a que $\|g'(t)\| \leq M$, c'est-à-dire que g est M-Lipschitzienne sur J. De plus, $g(t_0) = x_0$. Donc $\phi(k) \subset k$. Enfin, comme F est uniformément continue sur le compact $J\times\ B_f(x_0; r)$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $(s; x)$ et $(s'; x')$ appartenant à $J \times B_f\ (x_0; r)$ on ait $\max(|s - s'|\,; \|x - x'\|) < \delta) \Longrightarrow \|F(s; x) - F(s'; x')\| < \frac{\varepsilon}{\rho}$.

Alors, si f et f_1 appartiennent à K et si $\|f - f_1\| < \delta$, on a $\forall s \in J$, $\|F(s; f\ (s)) - F(s; f_1(s))\|$ $< \frac{\varepsilon}{\rho}$ Donc,

$$\begin{aligned} \|\phi(f\ )(t) - \phi(f\ _1)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} F(s; f\ (s)) - F(s; f_1(s))ds \right\| \\ &\leq |t - t_0| \sup_{x \in J} \|F(s; f\ (s)) - F(s; f_1(s))\| \\ &\leq \rho \frac{\varepsilon}{\rho} = \varepsilon \end{aligned}$$

pour tout $t \in J$. Ceci montre que $\|\phi(f\ ) - \phi(f\ _1)\| \leq \varepsilon$, i.e. $\phi : K \longrightarrow K$ est une application continue. Donc il existe un point fixe $f \in K$ de ϕ , c'est-à-dire que f est une solution au problème de Cauchy

Chapitre III

Application

Approche numérique du théorème du point fixe 3.1

Dans ce qui suit, on étudie une application du théorème du point fixe en faisant appel à une méthode itérative convergente.

Soit $f : S \to K^n, n \in \mathbb{N}\ K$ compact.

$x = (x_1, x_2, \dots\dots.., x_n) \in s \to f\ (x) = (f\ _1(x_1), f\ _2(x_2), \dots\dots\dots., f\ _n(x_n))$ On impose les conditions suivantes sur S et f :

S est un ensemble fermé de K^n .

f est une application contractante sur S :

$\exists$ 0<θ <1 tel que $\forall$x, y$\in$S, ||f (x)- f (y) ||$\leq$ θ ||x- y|| .

S est stable par f : f (S) $\subset$ S .

Théorème 3.1.1

Soit S une partie fermé de K^n , et f une application définie sur S et à valeur dans S, contractante sur S, telle que x$\in$ S $\to$f (x)$\in$ S . Alors

f admet un unique point fixe x* dans S.

Ce point fixe est calculable comme limite de la suite des approximations successives $(x_l)_{l\geq 0}$:

$$\begin{cases} x_0 \in S\ quelconque \\ \quad x_{l+1} = f\ (x_l) \end{cases}$$

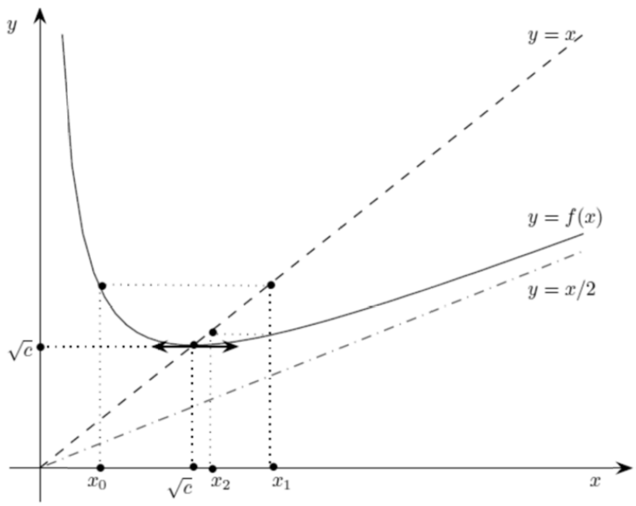
pour tout indice l $\in$ $\mathbb{N}$* , on a les inégalités de majoration d'erreur suivantes :

$$\begin{cases} ||x_l - x^*|| \leq \dfrac{\theta^l}{1-\theta}||x_1 - x_0|| \\ ||x_l - x^*|| \leq \dfrac{1}{1-\theta}||x_{l+1} - x_l|| \end{cases}$$

Voici un exemple où est mis en oeuvre le procédé itératif précédent :

Exemple calcul de la racine carreé d'un nombre positive

Soit $c \in\ \mathbb{R}_+^*$ un nombre .Le théorèmedu point fixe précédent va nous permettre de devlopper une méthode de calcule de $\sqrt{c}$ et justifier sa convergence .



puor c $\in \mathbb{R}_+^*$ $f(x) = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{c}{x})$.calculons sa dérivée : $f\,'\,(x) = \dfrac{x^2 - c}{2x^2}$ et second $f\,''(x) = \dfrac{c}{x^3}$.

On deduit que $f\,'$ s'annule au seul point $\sqrt[2]{c}$,que $f\,'(x)$ est negative sur $]0, \sqrt[2]{c}[$,positive sur $]\sqrt{c}, +\infty[$,avec décroissance de f sur $]0, \sqrt{c}[$ puis croissance sur$]\sqrt{c}, +\infty[$.

par ailleurs on remarque que $\sqrt{c}$ est point fixe de f : $f\,(\sqrt{c}) = \sqrt{c}$.

Sur I :=$[\sqrt{c}, +\infty[$ la dérivée vérifie $0 \leq f\,'(x) \leq \frac{1}{2}$;il en decoule que f est contractante sur l'intervalle $[\sqrt{c}, +\infty[$ de constante $\theta = \frac{1}{2}$.En effet $\forall x_1, x_2 \in I$ on a

$|f(x_1) - f(x_2)| = |(x_1 - x_2) f'(\xi)|$ avec $\xi \in]x_1, x_2[$ selon le théorème des accroissements finis . D'ou l'inégalité : $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$ $\forall x_1, x_2 \in I$.

D'après le graphe de f on a l'inclusion f(]0,+∞[) $\subset I$.On peut donc appliquer le théorème du point fixe sur I pour (c'est $\sqrt{c}$) qu'on peut déterminer par :

y_l quelconque $\in I$ $y_{l+1} = f(y_l) = \frac{1}{2}\left(y_l + \dfrac{c}{y_l}\right), l \geq 1.$

De plus pour l $\geq$ 2 on a l'inégalité

$|y_l - \sqrt{c}| \leq \dfrac{(0,5)^{l-1}}{1 - 0.5}|y_2 - y_1| = (0,5)^{l-2}|y_2 - y_1|$

Par ailleurs si on prend x_0 quelconque dans]0,+∞[alors les termes $x_{l+1} = f\,(x_l)$ pour $l \geq 0$ restent dans I et la suite$(x_l)_{l\geq 0}$ converge vers $\sqrt{c}$ d'après ce qui précède et l'inégalité de majoration d'erreur s'écrit alors, toujours pour $l \geq 2$, 2 $|x_l - \sqrt{c}| \leq (0,5)^{l-2}|x_2 - x_1|$

.

Par exemple pour c = 2 on a, en partant de $x_0 = 1$:1.5

$x_1 =$ 1.4166 . . .

$x_2 =$ 1.414215686274 . . .

$x_3 =$ 1.414213562374 . . .

$x_4 =$ 1.414213562373 . . .

On constate que la convergence vers $\sqrt{2}$ =1.4142135623731 . . . est très rapide et on vérifie bien l'inégalité de majoration d'erreur donnée plus haut :

$|x_5 - \sqrt{2}| \times 10^{-3} \leq (0,5)^3|x_2 - x_1|$ ×0.01.

Déterminer les solutions maximales 3.2

y'=3$|y|^{3/2}$ sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

On veut déterminer l'ensemble des solutions maximales. On a $f\ (t,y) = 3|y|^{3/2}$donc f est

continue sur $\mathbb{R}^2$et di érentiable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. De plus on a $\frac{\partial f}{\partial y} = signe(y), \times 2|y|^{-1/3}$ pour

$y \neq 0$. La dérivée $\frac{\partial f}{\partial y}$ est donc continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. La fonction f est localement Lipschitzienne

en $y$sur $\{y > 0\}$ et $\{y < 0\}$, mais elle ne l'est pas au voisinage des points (t_0,0) $\in \mathbb{R} \times (0)$. Soit

$(y,]A, B[)$ une solution dans $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors $y' \geq 0$, donc y est croissante. On note

a := $\inf\{t \in]A, B[: y(t) = 0\}$, b := $\sup\{t \in]A, B[: y(t) = 0\}$.

Si a $\neq A$, on a $y(a) = 0$ et $y(t) < 0$ pour t < a. Donc, sur l'intervalle]A ; a[, l'équation

diférentielle est équivalente à $\frac{1}{3}y' + (y)^{-3/2} = 1$, d'où $y^{1/3}(t) - y^{1/3}(a) = t - a$, et alors $y(t) = (t-a)^3$. De même y(t) =$y(t) = (t-b)^3$ pour t > b si b ≠ B.

On en déduit que si $y_0 < 0$ alors pour tout $b \in [t_0 - y_0^{1/3}, +\inf ty[$, la fonction

$$y_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$t \to \begin{cases} (t - t_0 + y_0^{1/3})^3 \text{ si } t \leq t_0 - y_0^{1/3} \\ 0 \qquad \text{si } t_0 - y_0^{1/3} \leq b \\ (t-b)^3 \qquad \text{si } \ t \geq b \end{cases}$$

est une solution (nécessairement maximale) de l'équation y'=3$|y|^{3/2}$ et on obtient ainsi toutes

les solutions maximales du problème de Cauchy associées à (t_0, y_0) (pour $y_0 < 0$).

De même, si $y_0 > 0$ alors les solutions maximales du problème de Cauchy associées à (t_0, y_0) sont

les fonctions de la forme :

$$y_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$t \to \begin{cases} (t-a)^3 \text{ si } \quad t \leq a \\ 0 \qquad \text{si } a \leq t \leq t_0 - y_0^{1/3} \\ (t - t_0 + y_0^{1/3})^3 \text{ si } t \geq t_0 - y_0^{1/3} \end{cases}$$

pour tout a $\in$] -∞, $t_0 - y_0^{1/3}$].

Si $y_0 = 0$ alors les solutions maximales associées à $(t_0, 0)$ sont de la forme :

$$y_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$t \to \begin{cases} (t-a)^3 \text{ si } \quad t \leq a \\ 0 \qquad \text{si a} \leq \text{t} \leq \text{b} \\ (t-b)^3 \quad \text{si } \ t \geq b \end{cases}$$

pour tout a $\in$]-∞,t_0] et tout b $\in$ $[t_0, +\infty[$.

Le point fixe et la démonstration par l'absurde 3.3

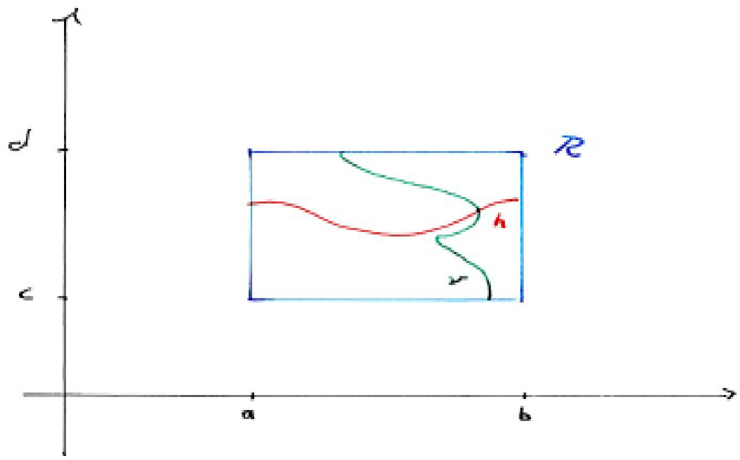
Soit h, v deux applications continues de [-1, 1] dans R le rectangle défni par

$$R = \{(x, y)|x \in [a, b], y \in [c, d]\}.$$

On demande de plus à h et v de vérifier :

-$h(-1)$ a pour abscisse a ; $h(1)$ a pour abscisse b.

-$v(-1)$ a pour ordonné c ; $v(1)$a pour ordonné d.



Montrons alors par l'absurde que ces deux chemins se coupent. On suppose donc que pour tout s, t dans [-1, 1], h(t) $\neq$ v(s).

Considérons l'application :

$$F(t,s) = \left(\frac{v_1(s)-h_1(t)}{N(t,s)}, \frac{h_2(t)-v_2(s)}{N(t,s)}\right)$$

avec $N(t,s)$= $sup\{|v_1(s)-h_1(t)|, |h_2(t)-v_2(s)|\}$.

Alors F : [-1, 1]$^2 \to$ [-1, 1]^2 est continue et pour tout s et t dans [-1, 1]

$F(t,s) \in \partial$[-1, 1]^2 (car$F_1 = \pm 1 ou\ F_2 = \pm 1$).

Comme [-1, 1]^2 est convexe, compacte et non vide, F admet un point fixe.

Donc il existe $(t_0, s_0) \in R$ tel que F$(t_0, s_0)) = (t_0, s_0)$.

$(t_0, s_0) \in \partial$[-1, 1]^2 donc soit $|t_0| = 1$,soit $|s_0| = 1$.

Si $t_0 = 1$ alors $0 < N(t_0, s_0) = v_1(s_0) - h_1(t_0) = v_1(s_0) - b \leq 0$.

Si $t_0 =$ -1 alors $0 < N(t_0, s_0) = h_1(t_0) - v_1(s_0) = a - v_1(s_0) \leq 0$.

Si $s_0 = 1$ alors $0 < N(t_0, s_0) = h_2(t_0) - v_2(s_0) = h_2(t_0) - d \leq 0$.

Si $s_0 =$ -1 alors $0 < N(t_0, s_0) = v_2(s_0) - h_2(t_0) = c - h_2(t_0) \leq 0$.

Dans chacun de ces cas, on obtient une contradiction. Donc h et v se coupent.

References

[1] B.Said-Houari et N. Tatar, Etude de l interaction enter un terme dissipatif et un terme d explosion pour un probleme hyperbolique, 2003. memoire de magister, Université de Annaba

[2] Benoit Perthame, Topologie et analyse différentielle, 2005.

[3] Edited by Ravi P. Agarwal and Donal O Regan,NONLINEAIRE ANAlYSIS,VOLUME 9, Series in Mathematical Analysis and Applications, Boca Raton London New York Singapore,2005.

[4] Henri Bonnel, Cours de Topologie, Departementdes Sciences et Techniques 2005.

[5] J.S.Raymoud,Topologie,espace normé et fonction d une variable complexe.

[6] Jean Mawhin, Autour du théorème du point fixe, Avril 2004.

[7] Kh. ZENNIR ,Existence and asymptotic behavior of solutions of a non linear viscoelastic hyperbolic equation,Memoire de magister, 2008, Université de Annaba.

[8] M. Cosnard et J. Demongeot, THEOREMES DE POINT FIXE ET PROCESSUS DE GALTON-WATSON, Ann. SC. math. Québec, 1984, vol. 8, no 1, pp. 5-21.