

République algérienne démocratique et populaire

**Ministère de l'enseignement supérieures et
de la recherche scientifique**

Université Ammar Thelidji

Faculté des sciences et sciences de l'ingénieur

Département de Génie Mécanique



MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister en Génie Mécanique

Option : science des matériaux

Par

SOUFFI Ammar

Thème :

**Etude comparative des méthodes d'homogénéisation
– application aux matériaux composites –**

Devant le jury composé de :

Mr H.A.Benhorma	M.C.A	Université de Laghouat	Président
Mr O. Allaoui	M.C.A	Université de Laghouat	Examineur
Mr D. Gueribiz	M.C.A	Université de Laghouat	Examineur
Mr M. Rahmani	Pr	Université de Laghouat	Encadreur
Mr A. Yousfi	M.C.A	Université de Laghouat	Co-encadreur

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier le Bon Dieu, sans qui ce mémoire n'aurait pu exister.

*J'adresse, mes vifs remerciements à Monsieur **M. Rahmani** Professeur à l'université de Laghouat encadreur de ce travail.*

*J'exprime mes profonds remerciements à Monsieur **A. Yousfi** Maître conférence à l'université de Laghouat. Co-encadreur, pour son aide précieuse, sa confiance, ses encouragements, sa patience et son soutien favorable pour l'aboutissement de ce travail.*

*Je tiens aussi à adresser, mes vifs remerciements à Monsieur **H.A.Benhorma** Maître conférence à l'université de Laghouat, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance de ce mémoire.*

*Je désire aussi adresser mes remerciements les plus respectueux à Monsieur **O. Allaoui** Maître conférence à l'Université de Laghouat, et qui m'a fait l'honneur de bien vouloir juger ce travail.*

*Mes remerciements vont également à Monsieur **D. Gueribiz** Maître conférence à l'université de Laghouat d'avoir accepté d'examiner ce mémoire et d'être membre de jury.*

Sans oublier de remercier vivement tous les enseignants du Département de Génie Mécanique qui ont contribué à la formation.

Ma reconnaissance va à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.

SOUFFI Ammar

À mon père, à ma mère,

À mes grands-parents,

À toutes ma famille,

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 Demande en fibres de carbone des différents secteurs industriels en tonnes/an.	page 5
Figure 1.2 Types de matrice	page 6
figure 1.3 Types de renfort	page 8
figure 1.4 Stratifié constitué de couches parfaitement liées	page 12
Figure 1.5. Evolution du pourcentage en masse des structures composites au sein de la gamme Airbus.	page 13
Figure 1.6 . Utilisation du composite Sic/Titane pour la fabrication de disque ANAM	page 14
Figure 1-7 Désignations du stratifié	page 15
Figure 1-8 Désignations d'une âme nid d'abeilles	page 16
Figure 2.1 : Notion de volume élémentaire représentatif	page 19
Figure 2.2 : Conditions de déformations homogènes au contour	page 23
Figure 2.3 : Conditions de contrainte homogènes au contour	page 25
Figure 2.4 : Les n+1 phases du composite, la frontière S et le volume D du VER	page 26
Figure 3-1 Coupe micrographique d'un composite carbone/époxy	page 28
Figure 3-2 Schéma d'un pli de composite unidirectionnel	page 29
Figure 3-3 Éléments de base de différentes dispositions des fibres	page 32
Figure 3-4 schéma simplifier d'une traction longitudinale	page 33
Figure 3-5 schématisations d'une traction transversale	page 34
Figure 3-6 représentation d'un Cisaillement pur	page 34
Figure 3-7 Module équivalent	page 35
Figure 3-8 Élément de base du modèle de composite selon la théorie élémentaire de la résistance des matériaux.	page 36
Figure 3-9 État de contraintes longitudinales	page 36
Figure 3-10 État de contraintes suivant la direction transverse	page 37
Figure 3-11 Validation de l'équation (2.27) par les données expérimentales	page 39

Liste des tableaux

Tableau 1 1	Caractéristiques des résines	page 2
Tableau 1 2	Caractéristiques des résines thermoplastiques	page 8
Tableau 1 3	Caractéristiques mécaniques des fibres	page 10
Tableau (3.1)	Valeur des modules du composite unidirectionnel pour un taux de fibre $V_f=60\%$	page 64
Tableau (3.1)	Valeur des modules du composite unidirectionnel pour un taux de fibre $V_f=60\%$	page 65

Résumé

A une échelle suffisamment petite, tous les matériaux sont hétérogènes, même les matériaux communément appelés homogènes. Cependant, lors de la conception d'une structure macroscopique, l'échelle est si grande que l'on observe une moyenne statistique des propriétés microscopiques et il est licite de faire l'hypothèse de continuité de la matière. Une fois l'hypothèse de continuité admise, le concept d'homogénéité s'en déduit. Le milieu homogène est celui qui possède des propriétés identiques en chaque point.

Pour l'ingénieur, le concept d'hétérogénéité intervient chaque fois que les propriétés varient en fonction du point. Cette variation peut être soit continue, soit discontinue, ce qui est le cas dans les matériaux composites. Pour un matériau composite, les propriétés ponctuelles subissent des discontinuités au passage des interfaces entre les différentes phases constituantes qui, par contre, sont généralement considérées comme homogènes et isotropes.

Le but de cette étude est le calcul des propriétés effectives d'un matériau composite et la comparaison entre les différentes méthodes d'homogénéisation et notamment les méthodes les plus rigoureuses dans ce domaine telle que la méthode numérique d'Eshelby-Kröner et la méthode analytique ainsi que d'autres méthodes empiriques.

على نطاق صغير بما فيه الكفاية ، جميع المواد غير متجانسة، بما في ذلك المواد التي يشار إليها عادة باسم متجانسة . ومع ذلك ، عند تصميم الهيكل المجهرى ، السلم كبير لدرجة أننا نلاحظ متوسط إحصائي للخصائص المجهرية و أنه يجوز أن نفترض استمرارية للمادة. عند قبول فرضية الاستمرارية، يستخلص مفهوم التجانس . الخليط المتجانس هو الذي له نفس الخصائص في كل نقطة .

للمهندس ، مفهوم عدم التجانس يحدث كلما تختلف خصائص عند هذه النقطة. هذا الاختلاف يمكن أن يكون اما مستمرا أو متقطعا ، كما هو الحال في جميع المواد المركبة. للمادة المركبة خصائص الانقطاعات عند الانتقال بين واجهات المراحل المختلفة ، والتي تعتبر عموما ، هي متجانسة الخواص.

الغرض من هذه الدراسة هو حساب خصائص المواد المركبة و المقارنة بين أساليب مختلفة بما في ذلك أساليب أكثر فاعلياً في هذا المجال : مثل الطريقة العددية اشيلبي - كرونر و المنهج التحليلي و الأساليب التجريبية الأخرى.

At a sufficiently small scale , all the materials are heterogeneous , the same materials commonly referred to as homogeneous . However, when designing a macroscopic structure , the scale is so great that there is a statistical average of the microscopic properties and it is permissible to assume continuity of the material. Once the continuity hypothesis accepted, the concept of homogeneity is deduced . The homogeneous mixture is one that has identical properties at each point.

To the engineer, the concept of heterogeneity occurs whenever properties vary depending on the point . This variation can be either continuous or discontinuous, which is the case in the composite materials . For a composite material, the point discontinuities properties undergo transition interfaces between the different constituent phases , by cons , are generally considered homogeneous and isotropic.

The purpose of this study is to calculate the effective properties of a composite material and the comparison of different homogenization methods including the most rigorous methods in this field such as the Eshelby - Kröner numerical method and the analytical method and other empirical methods .

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE.....	10
1 Généralités sur les matériaux composites.....	11
1-INTRODUCTION	11
2. CONSTITUANTS DES MATÉRIAUX COMPOSITES	12
2.1 Matrices.....	13
2.1.1 Résines thermodurcissables	13
2.1.2 Résines thermoplastiques.....	15
2.1.3 Additifs.....	15
2.2 Renforts.....	15
2.2.1 Fibres de verre	16
2.2.2 Fibres de carbone.....	16
2.2.3 Fibres aramides.....	16
2.2.4 Fibres céramiques	16
2.2.5 Caractéristiques mécaniques des fibres.....	16
3. Structures composites stratifiées	18
3.1 Désignation des structures stratifiées.....	21
3.2 Désignation des structures sandwiches	22
4 Structures composites tissées multi-directionnelles.....	22
2 Homogénéisation et Calcul analytique des tenseurs	25
2.1 introduction.....	25
2.2 Méthodologie analytique de l'homogénéisation	27
2.2.1. L'étape de représentation.....	29
2.2.2. L'étape de localisation.....	30
a. Sollicitation homogène en déformation	30
b. Sollicitation homogène en contrainte.....	31
2.2.3. L'étape d'homogénéisation	32
Condition de Hill-Mandel.....	33
L'étape d'homogénéisation	33
3 Etude Micromécanique & Homogénéisation.....	35
3.1 Micromécanique :.....	35
Modèles :.....	35
3.1.1 Pli unidirectionnel	35
3.2 Caractéristique du mélange renfort-matrice.....	36

3.2.1	Composition du composite (fibre, matrice, vide).....	36
3.2.2	Quelques modèles habituels de disposition des fibres	39
3.3	Constantes élastiques fondamentales.....	40
3.3.1	Les essais mécaniques	40
3.3.1.1	Essai de traction longitudinale	40
3.3.1.2	Essai de traction transversale	41
3.3.1.3	Cisaillement pur.....	41
3.3.2	Modules équivalents	42
3.3.3	Modèles de résistance des matériaux élémentaires	43
3.3.3.1	Module d'élasticité longitudinal du composite (E1)	43
3.3.3.2	Module d'élasticité transversale du composite (E2)	44
3.3.3.3	Module de Poisson (ν_{12}) du composite	46
3.3.3.4	Module de cisaillement du composite (G12)	47
	<i>Figure 3-12</i> Module de cisaillement du composite (G12)	47
3.4	Modèles de résistance des matériaux modifiés	48
3.4.1	Modèle de Hopkins et Chamis :.....	48
3.4.2	Approximations de Voigt et de Reuss (Modèles série et parallèle) :.....	50
3.4.3	Bornes de Hashin et Shtrikman	51
3.4.4	Les modèles Halpin-Tsai	52
3.4.5	La méthode d'Eshelby	56
B.	Approche intuitive	57
C.	Méthode de l'inclusion équivalente	58
D.	Composantes du tenseur d'Eshelby	60
3.4.6	Le modèle de Mori et Tanaka	61
4	Comparaisons entre les différents modèles d'homogénéisation :	65
4.1	Introduction	65
4.2	matériau composite verre-E/époxyde	65
4.3	matériaux composites carbone/époxyde	68
4.4	Confrontation des modèles théoriques au les résultats expérimentaux	71
4.4.1	cas composite verre-E/époxyde	71
4.4.2	cas composite carbone/époxyde.....	72
4.5	Discussion des résultats	72
	Conclusion générale	74

INTRODUCTION GENERALE

L'homogénéisation est parfois appelée la micromécanique ou la modélisation multi-échelle. C'est une discipline relativement ancienne puisque la loi de mélange bien connue remonte à 1889 avec Voigt.

Cependant, beaucoup de travaux théoriques ont été accompli dans les années 1960 et numériques dans le milieu des années 1980 qui rendent cette discipline jeune et active.

On qualifie les méthodes d'homogénéisation des procédures mathématiques consistant à déterminer les propriétés effectives "macroscopique" d'un matériau micro hétérogène (mais macro-homogène) à partir de ses propriétés locales en tout point de son volume.

Le travail réalisée est composée de quatre chapitres à travers lesquels nous avons présenté le comportement micromécanique des matériaux composites par l'utilisation des approches et modèles mathématiques les plus importants et les plus connus dans la littérature. Ces derniers ont été développés en des expressions mathématiques afin de calculer les caractéristiques par le biais de programmes de calcul.

Ce travail s'intéresse en premier lieu à une présentation du cas traité en donnant un aperçu rapide sur les différents modèles utilisés tels que les lois de mélange améliorées de Voigt/Reuss, les modèles bi phasiques d'hashin-shtrikman, Halpin-Tsai et Eshelby-Kroner; qui servent à prédire les modules d'élasticités effectif d'un composite biphase en deuxième lieu une étude comparative a été présentée,

Nous avons commencé cette contribution, par un premier chapitre, à travers lequel nous avons fait une synthèse bibliographique sur l'ensemble des composites à différents renforts et matrices dans le but de mettre en évidence les paramètres pertinents pour de tels matériaux. Leurs propriétés remarquables nous ont obligées de citer les divers domaines d'utilisation pour les différentes applications.

Au second chapitre, il nous a paru très logique d'énoncer le principe d'homogénéisation et ses différentes techniques de traitement et d'analyse.

Le troisième chapitre, cette partie l'analyse du comportement mécanique des matériaux composites à l'échelle des constituants (matrice et fibres) a été développée en considérant le comportement élastique d'un composite unidirectionnel: loi d'élasticité, estimation des modules du composite. et nous avons présenté l'essentiel des modèles et méthodes de caractérisation Micro-mécanique par des approches mathématique telles que celles de Halpin-Tsai. le quatrième chapitre est consacré à la prédiction des modules d'élasticités effectif des matériaux composites fibreux, et une confrontation des différentes approches a été présentée.

1 Généralités sur les matériaux composites

1-INTRODUCTION

Une définition générale des matériaux composites est d'après (Berthelot, 1992), « Un matériau composite est constitué de l'assemblage d'au moins deux matériaux non miscibles et de nature différente, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément ». Un matériau composite est constitué d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue. La phase continue est appelée la *matrice*. La phase discontinue présente usuellement des propriétés mécaniques (rigidités et résistances) supérieures à celle de la matrice et est notée *renfort*. Les propriétés des matériaux composites résultent des propriétés des matériaux le constituant, de la distribution géométrique des renforts, du taux volumique de renfort, de la nature des interfaces renforts/matrice, du procédé de fabrication...

Les matériaux composites sont aujourd'hui principalement utilisés industriellement pour différentes raisons (Hull et Clyne, 1997) dont voici une liste non exhaustive:

- Excellent rapport masse / rigidité / résistance en comparaison des matériaux métalliques,
- Définition de matériaux au « juste » besoin, c'est-à-dire présentant des propriétés élevées uniquement dans les axes de sollicitation afin d'effectuer des gains de masse supplémentaires (Barreau et Laroze, 1987),

- Dimensionnement de structures ayant des propriétés particulières (matériaux à très faibles coefficients de dilatation thermique, intéressants pour les applications satellites) ou à mémoire de forme (tels que des tubes de déploiement pour satellites),

- Utilisation de matériaux multifonctionnels ayant des fonctions structurales mais également autres telles que de bonnes propriétés acoustiques, transparence aux ondes électroniques, bonne résistance aux feux,

- Sensibilité nettement moindre à la fatigue que pour les matériaux métalliques (Harris, 1983)...

Par conséquent, les matériaux composites sont actuellement très utilisés dans l'industrie et particulièrement dans les domaines aérospatial et aéronautique, où les gains de masse sur structures sont stratégiques. On notera toutefois que, bien que l'industrie aéronautique reste un acteur majeur du développement des structures hautes performances, les matériaux composites sont également très utilisés dans le domaine du sport, du génie civil, du domaine naval, du secteur automobile, du domaine éolien (principal consommateur actuel de fibres de carbone) et du domaine pétrolier off-shore (réalisation de risers composites) comme montré sur la Figure 1 . [F. Laurin]

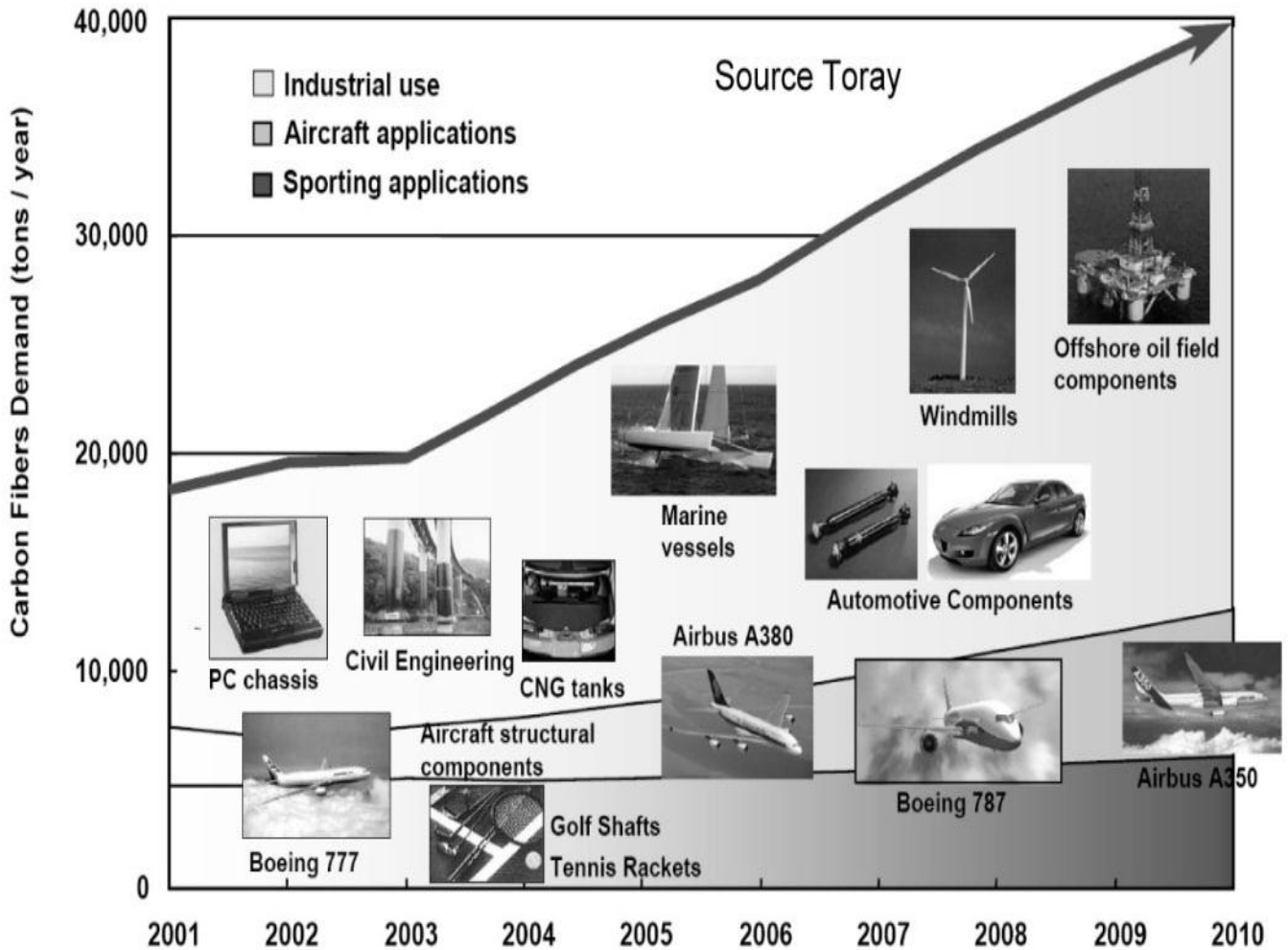


Figure 1.1 Demande en fibres de carbone des différents secteurs industriels en tonnes/an.

Suivant les applications industrielles, différents types de matériaux composites sont utilisés en fonction de leur rapport performances mécaniques / complexité (de mise en œuvre et de dimensionnement) / coût associé. On peut classer les matériaux composites soit en fonction de la nature des constituants, soit en fonction de la géométrie des renforts et du procédé de fabrication associé.

2. CONSTITUANTS DES MATÉRIAUX COMPOSITES

Un matériau composite est constitué de différentes phases nommées renforts et matrice. Lorsque le matériau composite est non endommagé, les renforts et la matrice sont parfaitement liés et il ne peut pas y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases.

Les renforts se présentent sous forme de fibres continues ou discontinues. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. la matrice assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. L'arrangement des fibres, leur orientation permettent de renforcer les propriétés mécaniques

de la structure. Nous étudions plus particulièrement les matériaux composites à renfort fibre longue continue utilisés dans l'industrie nautique, automobile, aéronautique et spatiale. Les pièces structurelles sont réalisées par empilement de nappes en optimisant les directions des renforts en fonction des charges qu'elles doivent subir. La nature de la résine ou du renfort est choisie en fonction de l'application finale visée.

Nous présentons les différents types de matrices et renforts classiquement employés dans l'industrie. Les propriétés mécaniques de l'interface entre fibres et matrice sont très importantes dans la réalisation d'une structure composite. En effet, il ne doit y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases de la structure pour obtenir de bonnes caractéristiques mécaniques élastiques.

Dans cette section, les différents matériaux utilisés pour les matrices et les renforts sont présentés (Bathias, 2009 ; Berthelot, 1992). Il convient de noter que tous les types de matériaux ne peuvent être associés et que la qualité de l'adhésion entre la matrice et les renforts est un point essentiel dans le choix des constituants [L. Gornet et al]

2.1 Matrices

Dans un grand nombre de cas, la matrice constituant le matériau composite est une résine polymère. Les résines polymères existent en grand nombre et chacune à un domaine particulier d'utilisation. Dans les applications où une tenue de la structure aux très hautes températures est requise, des matériaux composites à matrice métallique, céramique ou carbone sont utilisés. Dans le cas des matériaux en carbone des températures de 2 200°C peuvent être atteintes. La classification des types de matrices couramment rencontrées est donnée sur la figure 1.2. [Laurent Gornet]

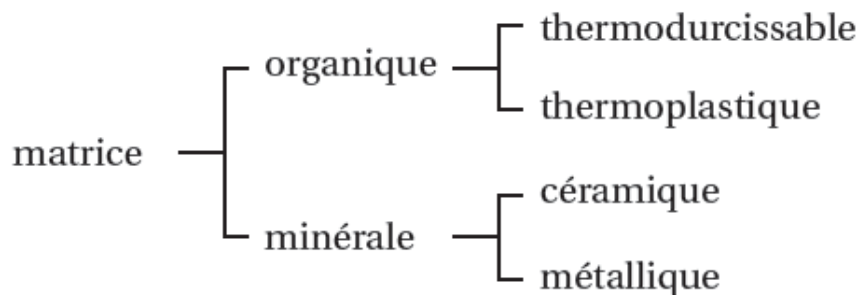


figure 1.2 Types de matrice

2.1.1 Résines thermodurcissables

Les résines thermodurcissables ont des propriétés mécaniques élevées. Ces résines ne peuvent être mises en forme qu'une seule fois. Elles sont en solution sous forme de polymère non réticulé en suspension dans des solvants. Les résines polyesters insaturées, les résines de condensation (phénoliques, amioplastes, furaniques) et les résines époxy sont des résines thermodurcissables. Les exemples de résines thermodurcissables classiquement rencontrées sont 914, 5208, 70, LY556.

Les matériaux les plus performants ont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible. Ces caractéristiques sont présentées dans le tableau.1.

Propriété	Unité	Faible module	Module intermédiaire -faible	Module intermédiaire -haute	Haute résistance	Polyimide
Masse volumique	g/cm ³	1.16256	1.27328	1.21792	1.24560	1.21792
Module d'élasticité	GPa	2.21	3.45	3.45	5.17	3.45
Module de cisaillement	GPa					$G=E/2(1+\nu)$
Coefficient de Poisson		0.43	0.41	0.35	0.35	0.35
Chaleur spécifique	J/g°C	1.045	1.045	1.045	1.045	1.045
Conductivité thermique	W/m°C	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18
Coefficient de dilatation thermique	10 ⁻⁶ /°C	102.6	102.6	64.8	72	36
Diffusivité	10 ⁻⁸ mm ² /s	3.87	3.87	3.87	3.87	3.87
Coefficient de dilatation hygroscopique	/M	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33
Résistance en traction	MPa	55	48	103	137	103
Résistance en compression	MPa	103	145	241	345	207
Résistance en cisaillement	MPa	55	48	90	103	90
Déformation à la rupture en traction	%	8.1	1.4	2.0	2.0	2.0
Déformation à la rupture en compression	%	15	4.2	5.0	5.0	4.0
Déformation à la rupture en cisaillement	%	10	3.2	3.5	4.0	3.5
Conductivité thermique de l'air		0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
Température de transition vitreuse	°C	176.67	215.56	215.56	215.56	371.11

Source : Charnis

Tableau 1 1 Caractéristiques des résines

2.1.2 Résines thermoplastiques

Les résines thermoplastiques ont des propriétés mécaniques faibles. Ces résines sont solides et nécessitent une transformation à très haute température. Les polychlorures de vinyle (PVC), les polyéthylènes, polypropylène, polystyrène, polycarbonate polyamide sont quelques exemples de ces résines thermoplastiques. Les résines thermoplastiques classiquement rencontrées sont PEEK, K3B.

De même que pour les résines thermodurcissables, les matériaux les plus performants ont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible : ces dernières sont présentées dans le tableau 1.2. [Laurent Gornet]

résines	$T_f(^{\circ}\text{C})$	ρ (kg/m ³)	$\epsilon_t^R(\%)$	σ_t^R (MPa)	σ_c^R (MPa)	E (GPa)
polyamide	65 à 100	1 140		60 à 85		1,2 à 2,5
polypropylène	900	1 200		20 à 35		1,1 à 1,4

Tableau 1 2 Caractéristiques des résines thermoplastiques

2.1.3 Additifs

Des produits peuvent être incorporés à la résine pour renforcer les propriétés mécaniques (charges renforçantes, ex : charges sphériques creuses 5 à 150 μm). Des charges non renforçantes peuvent être également utilisées pour diminuer le coût des matrices en résine. Des additifs, de type colorant ou agent de démoulage sont largement utilisés lors de la conception des structures constituées de matériaux composites.

2.2 Renforts

Les renforts assurent les propriétés mécaniques du matériau composite et un grand nombre de fibres sont disponibles sur le marché en fonction des coûts de revient recherchés pour la structure réalisée. Les renforts constitués de fibres se présentent sous les formes suivantes : linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus complexes, tissage tri directionnel ou plus).

On peut distinguer cinq classes de fibres à savoir : (i) les fibres de carbone, (ii) les fibres de verre, (iii) les fibres d'aramide, (iv) les fibres céramiques et (v) les fibres végétales.

La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée sur la figure 1.3.

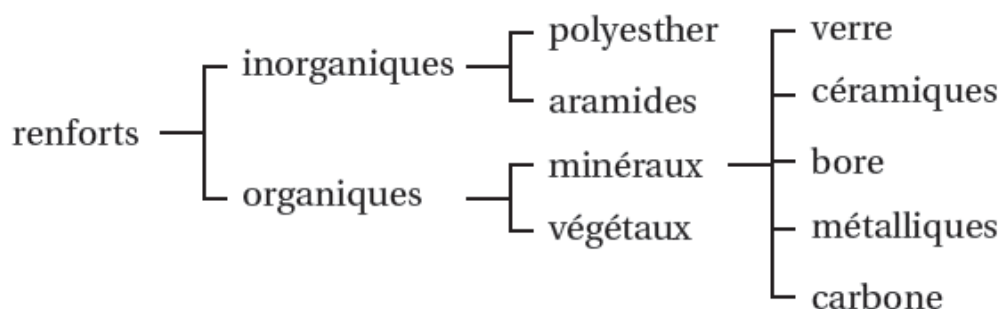


figure 1.3 Types de renfort

2.2.1 Fibres de verre

Les fibres de verre ont un excellent rapport performance–prix qui les placent de loin au premier rang des renforts utilisés actuellement dans la construction de structures composites.

2.2.2 Fibres de carbone

Les fibres de carbone ont de très fortes propriétés mécaniques et sont élaborées à partir d'un polymère de base, appelé précurseur. Actuellement, les fibres *précurseurs* utilisées sont des *fibres acryliques* élaborées à partir du poly acrylnitrique (PAN). La qualité des fibres de carbone finales dépend fortement des qualités du précurseur.

Le principe d'élaboration est de faire subir aux fibres acryliques une décomposition thermique sans fusion des fibres aboutissant à une graphitisation. Le brai qui est un résidu de raffinerie issu du pétrole ou de la houille est également utilisé pour produire des fibres de carbone.

Quelques exemples de fibres de carbone classiquement rencontrées : T300, T800,MR40, TR50, IM6, IM7, GY,M55J.

2.2.3 Fibres aramides

Les fibres aramides ont des propriétés mécaniques élevées en traction comme les carbones mais leurs résistances à la compression est faible. La faible tenue mécanique en compression est généralement attribuée à une mauvaise adhérence des fibres à la matrice dans le matériau composite. Pour y remédier, des enzymages des fibres peuvent être utilisé. L'utilisation de composites à fibres hybrides permet également de remédier aux faiblesses des composites à fibres aramides. Des renforts hybrides de type verre–kevlar ou carbone–kevlar sont largement utilisés dans le domaine des loisirs (ski, raquette de tennis).

Quelques exemples de fibres aramides : KEVLAR (Dupont de Nemours, USA), TWARON (Akzo, Allemagne-Hollande), TECHNORA (Teijin, Japon).

2.2.4 Fibres céramiques

Les matériaux composites de type céramiques sont souvent constitués de renforts et de matrice en céramique. Les fibres sont élaborées par dépôt chimique en phase vapeur sur un fil support. Ces fibres sont rencontrées dans des applications où la température est très élevée entre 500°C et 2 000°C. Ces matériaux sont utilisés notamment dans les parties chaudes des moteurs d'avions. Quelques exemples de fibres céramiques :

- fibres de Carbure de Silicium
- fibres de Bore
- fibres de Bore carbure de silicium [Laurent Gornet]

2.2.5 Caractéristiques mécaniques des fibres

Il existe différents types de fibres. Elles peuvent être scindées en deux groupes, les fibres à haut module et les fibres à haute résistance. Les fibres à haut module ont une résistance faible et celles à forte résistance ont un module faible.

Propriété	Unité	Bore	Carbone (haut module, haute résistance)	AS	T300	KEV	Verre S	Verre E
Diamètre de la fibre	mm	0.14224	0.00762	0.00762	0.00762	0.00117	0.00914	0.00914
Mass volumique (Densité)	g/cm ³	2.62960	1.93760	1.74384	1.77152	1.46704	2.49120	2.49120
Module d'élasticité longitudinal	GPa	400	379	214	221	152	85	73
Module d'élasticité transversal	GPa	400	6	14	14	4	85	73
Module de cisaillement longitudinal	GPa	167	7.6	14	9	3	36	30
Module de cisaillement transversal	GPa	167	4.8	7	5	1.5	36	30
Coefficient de Poisson longitudinal		0.2	0.2	0.2	0.2	0.35	0.2	0.22
Chaleur spécifique	J/g°C	1.2958	0.8360	0.8360	0.9196	1.0450	0.7106	0.7106
Conductivité thermique longitudinale	W/m°C	3.17	83.63	83.63	83.63	0.25	3.03	1.08
Conductivité thermique transversale	W/m°C	3.17	8.36	8.36	8.36	0.25	3.03	1.08
Coefficient de dilatation thermique longitudinal	10 ⁻⁶ /°C	5.04	-0.99	-0.99	-0.99	-3.96	5.04	5.04
Coefficient de dilatation thermique transversal	10 ⁻⁶ /°C ⁻¹	5.04	10.08	10.08	10.08	54	5.04	5.04
Résistance en traction longitudinale	MPa	4 137	1 724	2 413	2 413	2 758	4 137	2 758
Résistance en compression longitudinale	MPa	4 826	1 379	1 793	2 068	517	-----	-----
Résistance en cisaillement	MPa	689	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Source : Charnis

Tableau 1 3 Caractéristiques mécaniques des fibres

Exemples

Le choix d'une association entre un renfort et une matrice est très délicat et ce travail reste du ressort des chimistes. En effet, l'interface résultant de l'association intime de deux constituants différents doit avoir de bonnes performances mécaniques. La codification est la suivante : renfort/matrice. Les modèles de comportement élastiques des matériaux composites seront abordés dans le chapitre 2. Les exemples d'association entre renfort et résine couramment rencontrés dans l'industrie aéronautique et spatiale sont les suivants :

- composites à fibre de carbone et matrice époxy thermodurcissable : carbone/époxy : T300/5208, T300/914, IM6/914, GY/70M55J/M18, AS4/ 3501-6
- composites à fibre de carbone et matrice époxy thermoplastique : carbone/polyamide IM7/K3B, cellion C6000/PMR-15, AS4/PEEK (APC-2)
- composite à fibre et matrice carbone : 3D C/C, 3D EVO, 4D C/C
- composite à fibre et matrice céramique : SiC/SiC, Sic/Mas-L
- composites à matrice métallique : SCS-6/Ti-15-3

3. Structures composites stratifiées

Les structures composites stratifiées sont constituées de couches successives de renforts imprégnés de résines. Les couches sont également nommées plis. Les structures stratifiées réalisées à partir de matériaux composites sont constituées d'empilements de nappes unidirectionnelles ou bi-directionnelles. Ces nappes sont formées de renforts en fibres longues liées par de la résine. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La résine assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. Les pièces structurelles sont réalisées par empilement de nappes en optimisant les directions des renforts en fonction des charges qu'elles doivent subir.

Les matériaux composites sont modélisés à une échelle intermédiaire entre l'échelle microscopique associée aux constituants de base du composite (le renfort et la matrice) et l'échelle macroscopique liée à la structure. À cette échelle, appelée méso-échelle, une structure stratifiée est schématisée par un empilement de monocouches homogènes dans l'épaisseur et d'interfaces inter-laminaires. La couche et l'interface sont les deux entités appelées méso-constituants, comme illustré sur la figure 1.4, qui forment les bases des modèles dédiés à l'étude des structures stratifiées. L'interface inter laminaire est une entité surfacique assurant le transfert des déplacements et des contraintes normales d'une couche à une autre. En élasticité, les couches sont parfaitement liées et l'interface ne joue aucun rôle particulier. L'étude des composites jusqu'à la phase ultime de la rupture montrera l'utilité d'employer un modèle d'interface pour simuler les phénomènes de délaminage (séparation progressive des couches). [Laurent Gornet]

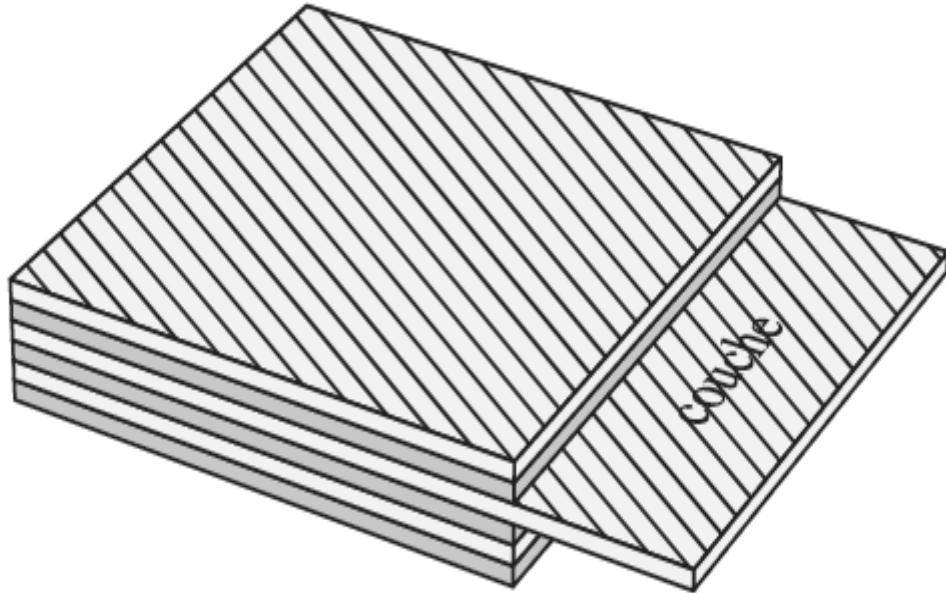


figure 1.4 *Stratifié constitué de couches parfaitement liées*

Les structures composites hautes performances sont essentiellement fabriquées à partir de stratifiés d'unidirectionnels (UD). Ce type de composite est aujourd'hui massivement utilisé dans l'aviation civile et militaire. En effet, le pourcentage de structures composites en masse atteint 50% pour le Boeing 787 et 53% pour l'Airbus A350 (voir Figure 1.5). Il est également important de noter que des structures de classe A (vitales pour la tenue de l'aéronef) sont aujourd'hui réalisées en composites stratifiés d'unidirectionnels comme la poutre ventrale de l'A340-600, le caisson central ou la partie arrière (section 19) de l'A380, les ailes de l'A400M, ou encore le fuselage de l'A350. [**L. Gornet et al**]

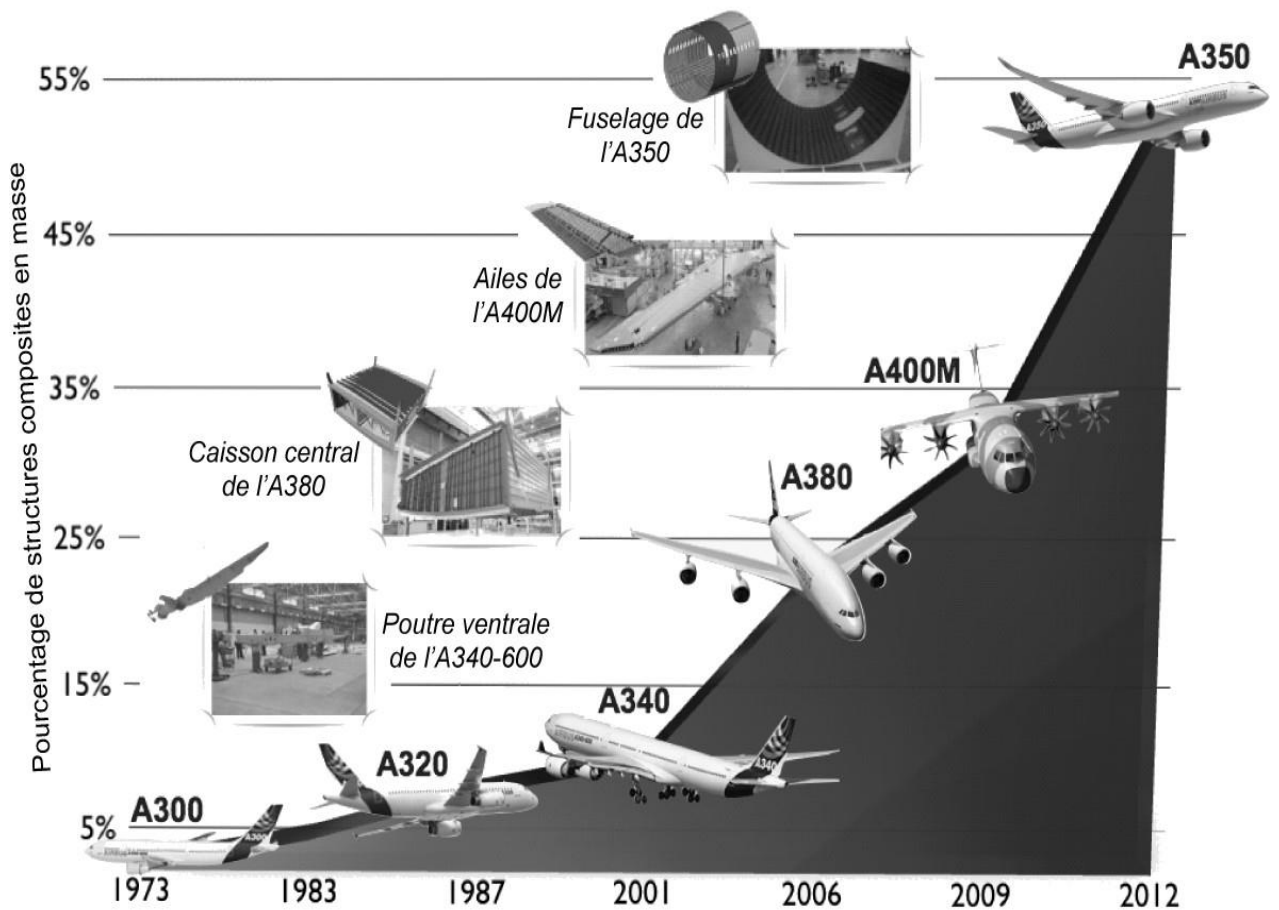


Figure 1.5. Evolution du pourcentage en masse des structures composites au sein de la gamme Airbus. [F. Laurin]

Les stratifiés de plis unidirectionnels présentent des rigidités et des résistances dans le plan très élevés. Toutefois, Le décollement de deux plis, nommé délaminage, constitue le point faible majeur de ce type de matériaux et explique leur faible tenue à l'impact (Abrate, 1998; Reid et Zou, 2000) et plus généralement aux sollicitations hors-plan (directes ou induites).

De ce fait, des matériaux hybrides, association de plis unidirectionnels et de couches métalliques permettant d'augmenter la tenue à l'impact, sont utilisés pour les structures les plus exposées comme la partie supérieure du fuselage de l'Airbus A380 (avec le matériau GLARE, composé de plis en verre/epoxy associés à des couches d'aluminium) ou du Boeing 787 (avec matériau TiGr, composé de plis en carbone/epoxy et de couches de titane).

Les matériaux composites à matrice métallique (CMM) sont utilisés dans les zones de température relativement élevée (jusqu'à 500°C). Le disque ANAM (AnNeau Aubagé Monobloc), développé par Snecma, est fabriqué avec une matrice de titane renforcée des fibres longues Sic. L'usage de ce matériau a permis une optimisation de la structure (passage d'un disque à un anneau) réduisant ainsi la masse, à performance égale, d'environ 50%. Les composites à matrice métallique sont également utilisés par Messier-Dowty pour la fabrication de trains d'atterrissage pour les avions Airbus A400M. [F. Laurin]

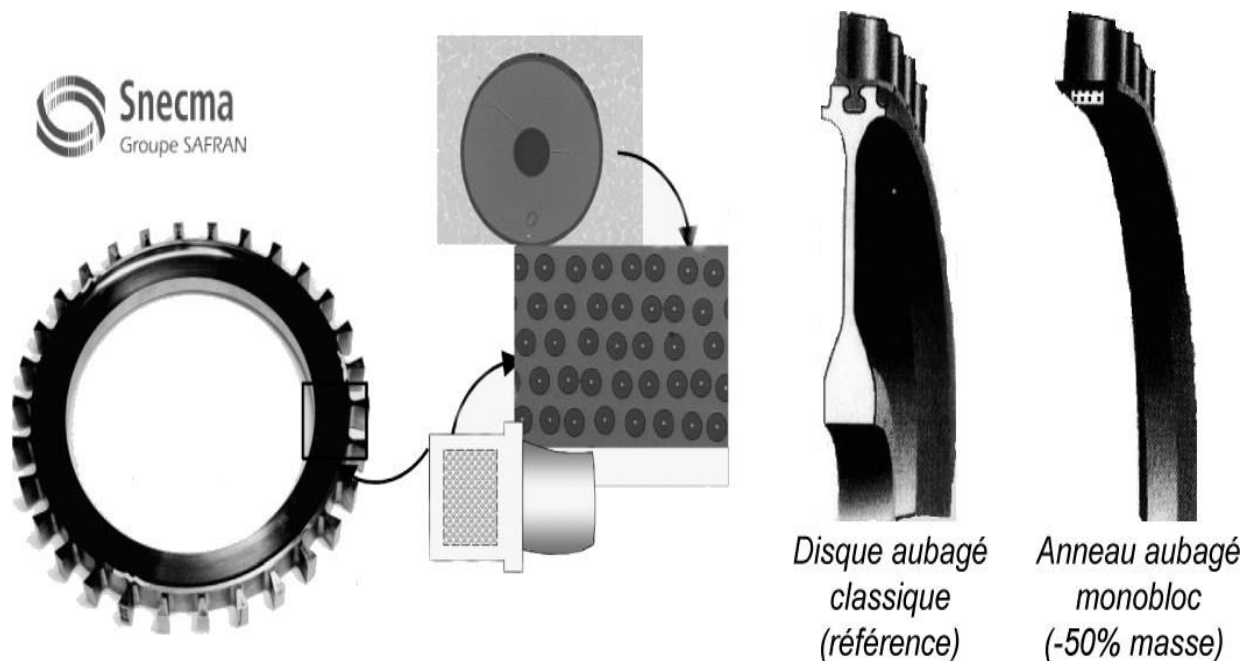


Figure 1.6 . Utilisation du composite Sic/Titane pour la fabrication de disque ANAM

3.1 Désignation des structures stratifiées

Les structures stratifiées à base de tissus unidirectionnels sont constituées d'un grand nombre de couches ou plis. L'épaisseur d'une couche dépend de son grammage. L'épaisseur de chacune des couches est généralement très faible, de l'ordre de 0,125 mm pour un matériau carbone époxy de type Aéronautique et 0,3 mm pour ceux qui sont utilisés dans l'Industrie Nautique. Ces structures stratifiées sont constituées de couches unidirectionnelles avec des fibres orientées de façon différente d'une couche à l'autre afin d'obtenir les propriétés mécaniques souhaitées pour la structure finale.

La désignation des structures stratifiées est délicate car il faut préciser les axes de référence.

Un stratifié est codifié de la façon suivante :

- chaque couche est désignée par un nombre indiquant la valeur en degré de l'angle que fait la direction des fibres avec l'axe de référence x . Sur les figures 1.7(a) et 1.7(b), les couches sont représentées décalées les unes par rapport aux autres. La structure stratifiée est décrite de bas en haut ;
- les couches sont nommées successivement entre crochet en allant de la face inférieure à la face supérieure. Les couches successives sont séparées par le symbole « / » comme l'exemple de la figure 1.4(a) : $[-45/45/-45/-45/45/-45]$;
- les couches successives d'un même matériau et de même orientation sont désignées par un indice numérique, comme l'exemple de la figure 1.7(b) : $[0/452/90/-452/0]$;
- en cas de stratification hybride (différents matériaux dans un même stratifié), il faut préciser par un indice la nature de la couche ;
- en cas de structures symétriques, la moitié est codifiée et le symbole s indique la symétrie : $[-45/45/-45/-45/45/-45]$ devient $[-45/45/-45]_s$ et $[0/45/45/90/-45/-45/0]$ devient $[0/452/90/-452/0]$. [Laurent Gornet]

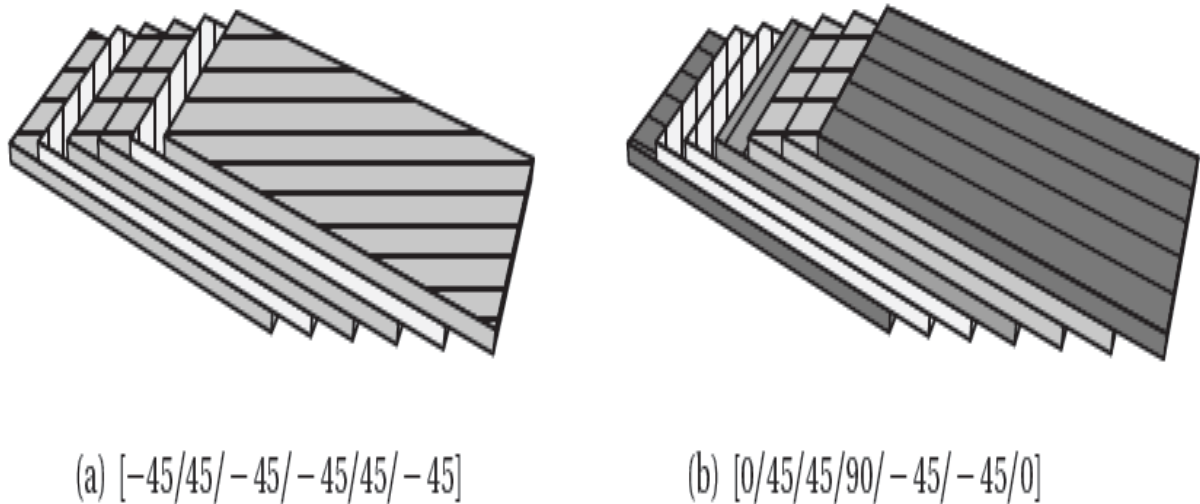


Figure 1-7 Désignations du stratifié

3.2 Désignation des structures sandwichs

Les structures composites subissant des sollicitations de type flexion ou torsion sont généralement construites en matériaux sandwichs. Une structure sandwich est composée d'une âme et de deux peaux en matériaux composites. L'assemblage est réalisé par collage à l'aide d'une résine compatible avec les matériaux en présence. Les âmes les plus utilisées sont de type nid d'abeilles, âme ondulée ou mousse. Les peaux sont généralement constituées de structures stratifiées. Une âme nid d'abeilles est présentée sur la figure 1.8.

Ces structures ont une grande rigidité en flexion et torsion. L'âme de la structure sandwich résiste principalement aux contraintes de cisaillement et de compression hors plan, les peaux inférieures et supérieures supportent quant à elles les efforts dans leur plan. [Laurent Gornet]

4 Structures composites tissées multi-directionnelles

Il est possible de créer des pièces en matériaux composites de type tridimensionnelles massives ou des formes de révolution. Des tissages volumiques de type 2D (deux directions de renfort), 3D-Evolutif (deux directions de renfort et un piquage dans la troisième direction), 3D (trois directions de renfort), 4D (quatre directions de renfort), ou plus sont élaborés dans l'industrie aérospatiale. Il est également possible de tisser des cylindres ou des cônes afin de réaliser des réservoirs ou des tuyères. Dans ces derniers cas, les fils de renforts s'entrecroisent en hélice. Quelques exemples de matériaux composites multi-directionnels sont maintenant présentés. Les structures massives sont principalement utilisées dans le domaine aéronautique et restent très marginales en raison de leur coût de production très élevé. [Laurent Gornet]

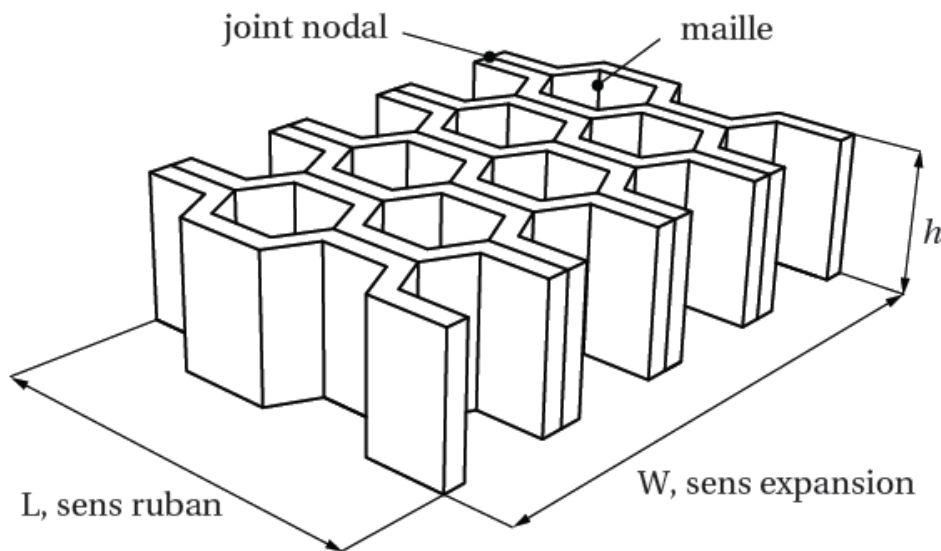


Figure 1-8 Désignations d'une âme nid d'abeilles

L'usage des matériaux composites ne cesse de croître dans différents domaines : automobile, naval, pétrolier, aéronautique et aérospatial. En effet, ces matériaux présentent de nombreux avantages :

- Importantes rigidités et résistances spécifiques afin de concevoir des structures hautes performances tout en réalisant des gains de masse par rapport aux solutions métalliques précédentes.
- Faible sensibilité à la fatigue.
- Faible sensibilité à la corrosion.
- Possibilité de réaliser des structures de formes complexes « one shot » réduisant ainsi les coûts d'assemblages.
- Possibilité de dimensionner les structures « au juste besoin » avec des propriétés élevées uniquement dans les axes de chargement.
- Possibilité de fabriquer des matériaux avec des propriétés particulières (coefficient de Poisson négatif, dilatation quasi-nulle...).

Toutefois, un certain nombre de désavantages sont associés aux matériaux composites :

- Coût important du passage matériau métallique à matériau composite, prenant en compte le coût matériau (des constituants) et le coût associé au procédé de fabrication.
- Dispersion matériau plus importante que les matériaux métalliques induisant un surcoût des campagnes de qualification matériau due aux nombres de répétitions d'essais imposées.
- Forte sensibilité aux singularités géométriques (de type trou, entaille...) constituant des maillons faibles au sein de la structure.
- Faible tenue à l'impact pour les stratifiés d'unidirectionnels ou de tissés 2D, ce qui constitue en revanche l'atout majeur des tissés 3D.
- Sensibilité à l'environnement des matrices organiques entraînant une perte de propriétés mécaniques notables après vieillissement thermique ou hydrique ...
- Faible conductivité électrique des composites à matrice organique, ce qui constitue un problème important pour la résistance aux impacts de foudres des fuselages composites.

Il existe actuellement un manque de confiance des industriels dans la modélisation des structures composites ; de par la complexité des mécanismes de déformation, d'endommagement, et de rupture ; en regard des méthodes de dimensionnement métalliques plus largement éprouvées. Aujourd'hui, ce manque de confiance nécessite des campagnes

d'essais importantes afin de certifier les structures composites induisant ainsi un manque de compétitivité des solutions composites en regard des solutions métalliques.

Le développement d'approche robuste et efficace de la tenue de structures composites est actuellement un enjeu majeur pour les industriels afin de réduire les délais et les couts de développement de structures composites. Un manque de formation spécifique a ces matériaux (Jones, 1975 ; Berthelot, 1992) et a leurs particularités (gestion de l'anisotropie, optimisation des séquences d'empilement ...) constitue également un frein a l'expansion de l'usage des matériaux composites au sein des différents domaines industriels. [F. Laurin]

2 Homogénéisation et Calcul analytique des tenseurs

2.1 introduction

Le comportement mécanique des matériaux au sein de structures sous charge est le résultat des mécanismes actifs au sein de leurs constituants et aux interfaces, ainsi que de l'agencement de ces constituants. La prévision du comportement macroscopique, à partir de ces données, passe par des opérations complexes de changement d'échelle représentant les phénomènes d'interaction entre constituants. C'est dans ce cadre que se situent les méthodes d'homogénéisation.

L'approche classique de la mécanique des solides repose sur une démarche phénoménologique; fondée sur l'expérience. Elle intègre les résultats de tout un ensemble de mesures réalisées sur éprouvettes d'un matériau donné, en réponse à de sollicitations déterminées, dans une représentation unifiée compatible avec ces mesures. La loi de comportement ainsi établie, éventuellement réintégrée dans un cadre thermodynamique qui en assure la cohérence, ne peut avoir comme domaine assuré de validité que celui à l'intérieur duquel elle a été identifiée en relation avec l'expérience. Cette démarche descriptive est d'une grande efficacité pour ce qui concerne la prévision de la réponse des structures mécaniques aux sollicitations de service, tout au moins dans un domaine de sollicitations assurant que chaque élément de matière soit dans un état mécanique couvert par le domaine de validité de la loi de comportement qui lui est attachée. [M. Bornert et al]

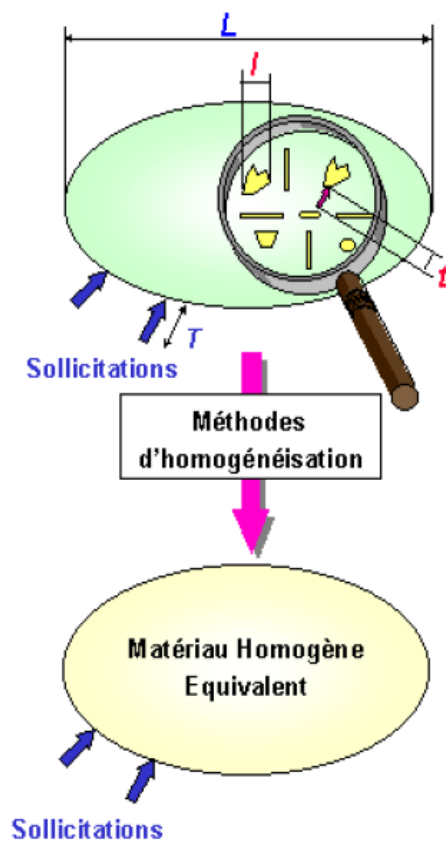
Il est maintenant de plus en plus illusoire de souhaiter modéliser un matériau composite à l'aide d'une approche exclusivement macroscopique et ceci pour deux raisons essentielles. La première est que ce type d'approche masque les phénomènes physiques et ne sait discerner les vraies causes des phénomènes observées à l'échelle macroscopique. La seconde raison est que la puissance des calculateurs permet désormais de résoudre les problèmes d'homogénéisation et de traiter numériquement les procédés multi échelles. Ainsi la prise en compte de phénomènes fins et complexes s'avère tout à fait réalisable et l'homogénéisation devient un outil efficace d'analyse du comportement des matériaux composites. [J. Renard]

Supposons que le matériau étudié possède une microstructure hétérogène en ce sens qu'elle résulte de l'assemblage de différents constituants supposés homogènes. Si on souhaite comprendre les phénomènes physiques au sein de la microstructure (sur contraintes locales, amorçage puis propagation de fissures ainsi que leurs influences sur le comportement macroscopique), l'analyse doit être réalisée à une échelle qui le permette : celle de la microstructure. Dans ce contexte, au procédé d'homogénéisation dont le but est de fournir le comportement du matériau équivalent au matériau hétérogène étudié, on doit associer un procédé de localisation dont le but est d'évaluer plus ou moins précisément les contraintes et les déformations à l'échelle microscopique. L'ensemble des deux processus (homogénéisation et localisation) constitue un procédé multi échelle.

Dans le cas des composites renforcés par des fibres, le but des théories d'homogénéisation est celui, une fois connues les caractéristiques mécaniques des phases et la fraction volumique des fibres, de prédire les caractéristiques mécaniques homologues d'un solide homogène équivalent, qui reste toutefois, dans le cas de fibres orientées, anisotrope. Un concept commun à toutes les théories d'homogénéisation est celui de *volume élémentaire représentatif (VER)*. Le VER (**Figure 1**) est le volume minimum à prendre en considération pour qu'une fois la théorie d'homogénéisation appliquée, le résultat obtenu soit représentatif du comportement macroscopique du milieu hétérogène. Pour cela, il doit être d'une taille telle qu'il soit statistiquement représentatif du matériau étudié et permettre d'obtenir des mesures

reproductibles des caractéristiques du comportement. Il faut également signaler que le choix de l'échelle du VER est imposé par la finesse avec laquelle on veut caractériser le milieu et les phénomènes qui s'y produisent.

Un matériau au niveau microscopique est caractérisé par t (la taille des hétérogénéités) et par L (la taille de la structure au niveau macroscopique). Entre ces deux tailles, on convient de fixer la taille du VER du matériau réel hétérogène par un matériau fictif homogène équivalent, tel que les lois de comportement macroscopique de deux matériaux soient les mêmes. Cette méthode est validée si les trois longueurs caractéristiques ci-dessus (**Figure 2.1**) sont satisfaites à la double condition . La première condition est nécessaire pour que l'on puisse caractériser le comportement du volume élémentaire représentatif par une loi homogène. La deuxième condition est une condition classique qui permet de traiter la structure comme un milieu continu. [N. Quoc Vu]



$$\frac{l}{L} \ll 1 \qquad \frac{t}{T} \ll 1$$

l : taille caractéristique du VER

L : longueur caractéristique macroscopique de l'échantillon

T et t : deux temps caractéristiques, lent et rapide, du phénomène physique

Figure 2.1 : Notion de volume élémentaire représentatif

Diverses approches micromécaniques sont développées pour prédire les propriétés élastiques des matériaux composites renforcés par des fibres courtes. De plus ces approches sont nombreuses et largement abordées dans la littérature.

2.2 Méthodologie analytique de l'homogénéisation

On s'intéresse ici à une structure dont le matériau constitutif est élastique linéaire homogène. On suppose que cette structure est à l'état initial naturel : les champs de contrainte et de déformation sont nuls en tout point en l'absence de chargement extérieur. La loi de comportement de ce matériau s'écrit :

$$\begin{cases} \sigma(\underline{z}) = \mathbb{C} : \varepsilon(\underline{z}) \\ \varepsilon(\underline{z}) = \mathbb{S} : \sigma(\underline{z}) \end{cases} \quad (2.1)$$

Où $\underline{\sigma}$ désigne le tenseur des contraintes de Cauchy et $\underline{\varepsilon}$ désigne le tenseur des déformations. Le tenseur de modules élastiques et le tenseur de souplesse sont inverses l'un de l'autre :

$$\mathbb{C}(\underline{z}) : \mathbb{S}(\underline{z}) = \mathbb{I} \quad (2.2)$$

\mathbb{I} est le tenseur d'identité du quatrième ordre.

Les tenseurs C et S sont symétriques mineurs et majeurs [J. Salençon]

$$\begin{cases} C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk} \\ S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk} = S_{jilk} \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} C_{ijkl} = C_{klij} \\ S_{ijkl} = S_{klij} \end{cases} \quad (2.4)$$

Au total, en tenant compte des relations de symétrie (2.3) et (2.4), C n'aura (ou S) que 21 composantes indépendantes.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

Où les C_{ijkl} sont les composantes d'un tenseur du quatrième ordre C. C est le tenseur des modules d'élasticité. Les sont les coefficients ou modules d'élasticité. Du fait de la symétrie des tenseurs σ et ε , notons que ces coefficients doivent satisfaire les relations de symétrie [H. Quoc Vu]

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk}$$

Nous ferons de plus les deux hypothèses suivantes

(H1) : les coefficients d'élasticité vérifient en outre les relations de symétrie

$$C_{ijkl} = C_{klij}$$

Cette première hypothèse (que l'on peut justifier par des arguments thermodynamiques) est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une énergie de déformation w dont dérive la loi de comportement :

$$w(\varepsilon) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\delta w}{\delta \varepsilon_{ij}}(\varepsilon)$$

(H2) : il existe $\alpha > 0$, tel que $C_{ijkh}\varepsilon_{kh}\varepsilon_{ij} \geq \alpha\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$

Pour tout $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, cette seconde hypothèse équivaut à dire que w est une forme quadratique définie positive des composantes de . Il en résulte que la relation (1) sera biunivoque. Compte tenu des relations de symétrie (2) et (3), il est fréquent d'identifier les coefficients C_{ijkh} à l'ensemble des composantes C_{ij} d'une matrice 6*6 symétrique. La règle habituelle d'échange d'indices est la suivante

$$(I) \leftrightarrow ((i,j) = (j,i))$$

$$(1,2,3,4,5,6) \leftrightarrow ((1,1), (2,2), (3,3), (2,3), (3,1), (1,2))$$

Cette règle donne

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{21} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{21} \end{pmatrix}$$

Le coefficient 2 devant les composantes, $\varepsilon_{23}\varepsilon_{31}$ et ε_{12} de ε est introduit pour compenser le fait que ces composantes apparaissent deux fois dans la sommation $C_{ijkh}\varepsilon_{kh}$

Donc le tenseur des modules d'élasticité peut être représenté par une matrice 6*6 symétrique. Il dépend donc, dans le cas le plus général, de 21 coefficients indépendants. C'est le cas le plus général d'un matériau *anisotrope* dit « *triclinique* » ne possédant aucune symétrie et dont la réponse du VER soumis à une sollicitation, dépend de la direction selon laquelle cette sollicitation est appliquée.

Lorsque le matériau présente l'invariance par rotation autour d'un axe particulier, on dit qu'il est *isotrope transverse*. Un milieu est dit transversalement isotrope d'axe D, s'il est isotrope dans tous les plans orthogonaux à D.

Si l'axe des fibres correspond à l'axe x_1 (cas des plis d'un matériau composite à fibres parallèles noyées dans une matrice), dans la matrice de rigidité du composite, il ne restera que 5 coefficients indépendants

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{22} - C_{23})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

Les composantes du tenseur de rigidité sont alors :

$$C_{11} = \frac{E_1(1-\nu_{23})}{1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21}} ; C_{22} = \frac{E_1(1-\nu_{23}\nu_{21})}{(1+\nu_{23})(1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21})} ; C_{12} = \frac{E_1\nu_{12}}{1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_1\nu_{21}}{1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21}}$$

$$C_{66} = C_{12} ; \quad \frac{C_{22} - C_{23}}{2} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})}$$

Si la réponse à une excitation appliquée au matériau est identique quelle que soit cette direction, on dit que le matériau est *isotrope*. Les propriétés élastiques sont les mêmes dans toutes les directions et la matrice de rigidité est invariante dans tout changement de base orthonormée. La matrice contient uniquement 2 coefficients indépendants [J.m Berthelot]

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 \end{bmatrix}$$

Généralement, les constantes de rigidité sont exprimées en introduisant les constantes de Lamé λ et $\mu = G$

$$C_{12} = \lambda , \quad \frac{C_{11} - C_{12}}{2} = \mu$$

Les coefficients E et ν sont les plus utilisés car ils sont directement accessibles lors d'un essai de traction

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} ; \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

2.2.1. L'étape de représentation

On procède par la description à l'échelle microscopique du système étudié. Pour se faire on doit :

- ❖ Recenser le nombre de phases
- ❖ □Caractériser le comportement mécanique de chaque phase qui est prise comme un milieu homogène et continu (coefficients d'élasticité, directions d'anisotropie, nature des interactions entre phases, ...)
- ❖ Décrire la géométrie de chaque phase (forme, distribution spatiale, ...)

On considère le VER comme étant le volume interne d'une structure constituée d'un matériau élastique linéaire hétérogène occupant un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$ telle que la double condition $d \ll l \ll L$ soit satisfaite. On suppose que le champ des tenseurs d'élasticité C est complètement connu dans le domaine Ω . On suppose également qu'il y a une parfaite adhérence entre les différentes phases du matériau (bonne interface).

2.2.2. L'étape de localisation

Les relations entre les grandeurs microscopiques et macroscopiques sont obtenues par la résolution d'un problème posé sur le domaine Ω occupé par le VER. On formule soit un problème de contraintes homogènes (solicitation homogène en contrainte) ou un problème de déformations homogènes (solicitation homogène en déformation) au contour $\partial\Omega$ du VER.

a. Sollicitation homogène en déformation

Dans le but d'établir une relation entre les deux comportements, macroscopique et microscopique, on définit le chargement appliqué au VER à partir des grandeurs macroscopiques. Alors, la condition de déplacement appliquée est $\underline{\mu}(\underline{z}) = E \cdot \underline{z}$ sur $\partial\Omega$ avec E la déformation macroscopique homogène et $\underline{\mu}(\underline{z})$ le champ de déplacement à l'échelle microscopique (**Figure 1**). Comme les efforts de volume et les quantités d'accélération doivent être des infiniment petits du second ordre pour que l'on puisse définir un comportement homogénéisé, donc $\underline{\text{div}}\sigma(\underline{z}) = 0$ sur Ω . La sollicitation appliquée sur s'écrit : [A. Zaoui]

$$\begin{cases} \underline{\mu}(\underline{z}) = E \cdot \underline{z} & (\partial\Omega) \\ \underline{\text{div}}\sigma(\underline{z}) = 0 & (\Omega) \end{cases} \quad (2.5)$$

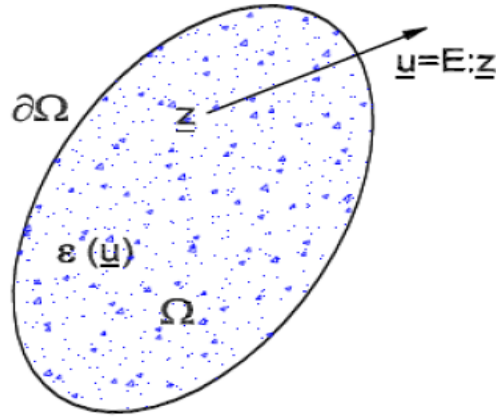


Figure 2.2 : Conditions de déformations homogènes au contour

A partir de (5), compte tenu de la relation entre les champs de déplacement et de déformation et aussi du théorème de Gauss, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mu_{i,j} + \mu_{j,i}) d\Omega &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\mu_i n_j + \mu_j n_i) dS = \frac{1}{2} [E_{ik} \int_{\partial\Omega} z_k n_j dS + E_{jk} \int_{\partial\Omega} z_k n_i dS] = \\ \frac{1}{2} [E_{ik} \int_{\partial\Omega} z_{k,j} d\Omega + E_{jk} \int_{\partial\Omega} z_{k,i} d\Omega] &= |\Omega| E_{ij} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Alors, on a :

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \varepsilon(\underline{z}) d\Omega = E \quad (2.7)$$

désigne l'opérateur de moyenne sur Ω . Pour un VER occupant le domaine géométrique Ω , la moyenne d'une variable sur Ω est définie par :

$$\langle v \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} v(\underline{z}) d\Omega \quad (2.8)$$

Remarque sur l'interprétation mécanique de la formule (7) : les déformations homogènes macroscopiques \mathbf{E} , appliquées sur le contour du VER sont égales à la moyenne spatiale des déformations locales dans le VER.

Pour les contraintes, on définira les contraintes macroscopiques Σ par la relation :

$$\Sigma = \langle \sigma \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma(\underline{z}) d\Omega \quad (2.9)$$

Dans le cas du matériau élastique linéaire considéré ici, le problème de localisation est le problème d'élasticité linéaire à la force de volume nulle et au déplacement imposé sur suivant

$$\begin{cases} \sigma(\underline{z}) = (\underline{z}) : \varepsilon(\underline{z}) & (\Omega) \\ \underline{\text{div}} \sigma(\underline{z}) = 0 & (\Omega) \\ \underline{\mu}(\underline{z}) = E \cdot \underline{z} & (\partial\Omega) \end{cases} \quad (2.10)$$

Ce problème est linéaire et admet une unique solution. Le champ de déformation microscopique ε associé au champ de déplacement dépend linéairement de la valeur du tenseur de déformation homogène macroscopique appliqué \mathbf{E} , ce qui s'écrit :

$$\varepsilon(\underline{z}) = \mathbb{A} : \mathbf{E} \quad (2.11)$$

Où est un tenseur du quatrième ordre, appelé tenseur de localisation en déformation. On peut démontrer en rapportant (11) dans la relation (7), que la moyenne du tenseur est un tenseur identique d'ordre quatre. En plus, est symétrique mineur mais pas symétrique majeure.

b. Sollicitation homogène en contrainte

On impose ici la condition en effort sur avec homogène, représentant le tenseur des contraintes de Cauchy macroscopique (**Figure 2.3**). Dans ce cas, la sollicitation appliquée sur s'écrit :

$$\begin{cases} \sigma(\underline{z}) \cdot \underline{n}(\underline{z}) = \Sigma \cdot \underline{n}(\underline{z}) & (\partial\Omega) \\ \underline{\text{div}} \sigma(\underline{z}) = 0 & (\Omega) \end{cases} \quad (2.12)$$

A partir de (12) et du théorème de Gauss, on montre :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_{ik} z_j)_k d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\sigma_{ik} z_j n_k) dS = \Sigma_{ik} \int_{\partial\Omega} z_j n_k dS =$$

$$\Sigma_{ik} \int_{\Omega} z_{j,k} d\Omega = |\Omega| \Sigma_{ik} \delta_{jk} = |\Omega| \Sigma_{ij} \quad (2.13)$$

Alors, on a

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma(\underline{z}) d\Omega = \underline{\Sigma} \quad (2.14)$$

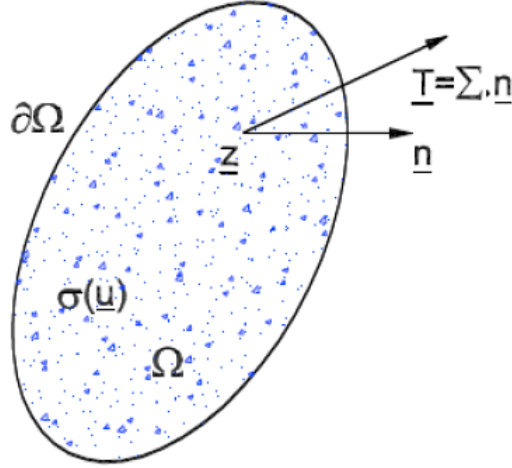


Figure 2.3 : Conditions de contrainte homogènes au contour

Remarque sur l'interprétation mécanique de la formule (13): les contraintes homogènes macroscopiques $\underline{\Sigma}$ appliquées sur le contour du VER sont égales à la moyenne spatiale des contraintes locales dans le VER.

Pour les déformations, on définira les déformations macroscopiques \underline{E} par la relation :

$$\underline{E} = \langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \varepsilon(\underline{z}) d\Omega \quad (2.15)$$

Comme pour le cas de la déformation homogène au contour, le problème d'élasticité posé sur le VER s'écrit

$$\begin{cases} \sigma(\underline{z}) = \mathbb{C}(\underline{z}) : \varepsilon(\underline{z}) & (\Omega) \\ \text{div } \sigma(\underline{z}) = 0 & (\Omega) \\ \sigma(\underline{z}) \cdot \underline{n}(\underline{z}) = \underline{\Sigma} \cdot \underline{n}(\underline{z}) & (\partial\Omega) \end{cases} \quad (2.16)$$

De la même façon que le problème précédent, on trouve que :

$$\sigma(\underline{z}) = \mathbb{B} : \underline{\Sigma} \quad (2.17)$$

Où \mathbb{B} est un tenseur d'ordre quatre, appelé tenseur de localisation en contrainte. Comme pour le tenseur \mathbb{A} , la moyenne du tenseur \mathbb{B} est un tenseur identité d'ordre quatre $\langle \mathbb{B} \rangle = \mathbb{I}$. D'autre part, il possède la symétrie mineure $B_{ijkl} = B_{jikl} = B_{ijlk} = B_{jilk}$ mais il n'est pas symétrique majeure $B_{ijkl} \neq B_{klij}$.

2.2.3. L'étape d'homogénéisation

On va identifier maintenant le comportement macroscopique de l'étape précédente. Pour cela, il faut introduire la condition de Hill-Mandel ci-dessous.

Condition de Hill-Mandel

Soit $\sigma(\underline{z})$ et $\varepsilon(\underline{z})$ deux champs respectifs de contraintes statiquement admissibles ($\text{div}\sigma(\underline{z}) = 0$) et de déformations cinématiquement admissibles avec $E \left(\underline{\mu}(\underline{z}) = E \cdot \underline{z} \text{ sur } \delta\Omega \text{ et } \varepsilon = \varepsilon(\underline{z}) \text{ sur } \Omega \right)$, si $\sigma(\underline{z})$ vérifie des conditions de contraintes homogènes au contour $\delta\Omega$ ou si $\varepsilon(\underline{z})$ vérifie des conditions de déformations homogènes sur Ω , on a :

$$\langle \sigma : \varepsilon \rangle = \langle \sigma \rangle : E \quad (2.18)$$

En définissant la contrainte macroscopique par la relation $\Sigma = \langle \sigma \rangle$, on en déduit

$$\langle \sigma : \varepsilon \rangle = \Sigma : E \quad (2.19)$$

Cette condition assure l'égalité entre le travail macroscopique ($\Sigma : E$) et la moyenne spatiale du travail microscopique ($\langle \sigma : \varepsilon \rangle$).

Sur la **Figure 2.4** est schématisé le VER du composite. Son volume est noté D , sa frontière S et le volume des n renforts ou plus exactement phases qu'il contient Ω_i . La phase matricielle quant à elle sera dénommée par l'indice 0. Elle occupe un volume $(\)$

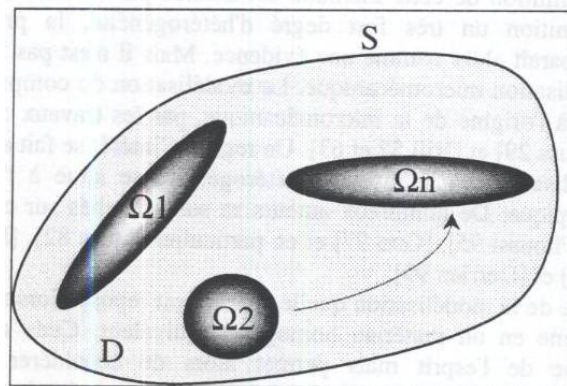


Figure 2.4 : Les $n+1$ phases du composite, la frontière S et le volume D du VER

Après avoir appliqué l'une ou l'autre des conditions aux limites proposées précédemment, le problème se résume à la détermination de l'une ou de l'autre des réponses duales (c'est à dire si la condition aux limites appliquée est de type contrainte alors c'est la déformation qu'il conviendra de calculer et réciproquement). Ainsi, le tenseur élastique du matériau homogène équivalent pourra être établi.

$$\Sigma = C^C \cdot E \quad (2.20)$$

Avec C^C : tenseur élasticité du composite

L'étape d'homogénéisation

Cette étape permet de remonter à l'échelle macroscopique par le fait que la moyenne spatiale des contraintes et déformations locales sont égales aux contraintes et déformations mais à l'échelle macroscopique, cette particularité a déjà été évoquée ci-dessus dans les relations (7) et (14). Ces relations peuvent encore s'écrire, en utilisant le modèle du VER de la **Figure 3**, en fonction de la fraction de chaque phase :

$$\Sigma = \sum_{i=0}^n f^i \sigma^i = \sum_{i=0}^n f^i C^i \varepsilon^i \quad \text{et} \quad E = \sum_{i=0}^n f^i \varepsilon^i \quad (2.21)$$

Rappelons que sur la phase de référence, la résine est toujours dénotée par l'indice 0. Si l'on distingue cette phase particulière dans les équations précédentes :

$$\Sigma = f^0 C^0 \varepsilon^0 + \sum_{i=1}^n f^i C^i \varepsilon^i \quad \text{et} \quad E = f^0 \varepsilon^0 + \sum_{i=1}^n f^i \varepsilon^i \quad (2.22)$$

En combinant ces deux équations, il vient :

$$\Sigma = C^0 E + \sum_{i=1}^n f^i (C^i - C^0) \varepsilon^i \quad (2.23)$$

En réécrivant l'équation (20) en utilisant l'équation (1) reliant la contrainte à la déformation par l'intermédiaire des tenseurs de rigidité et de souplesse, soit pour la i-ème phase, il vient :

$$\Sigma = f^0 \sigma^0 + \sum_{i=1}^n f^i \sigma^i \quad \text{et} \quad E = f^0 S^0 \sigma^0 + \sum_{i=1}^n f^i S^i \sigma^i \quad (2.24)$$

Une combinaison des ces deux équations est de nouveau réalisée, on aura :

$$E = S^0 \Sigma + \sum_{i=1}^n f^i (S^i - S^0) \sigma^i \quad (2.25)$$

En introduisant les relations des localisations (11) et (17) ainsi que la relation (20) dans les relations (23) et (25)

$$C^C = C^0 \Sigma + \sum_{i=1}^n f^i (C^i - C^0) A^i \quad \text{et} \quad S^C = S^0 \Sigma + \sum_{i=1}^n f^i (S^i - S^0) B^i \quad (2.26)$$

Jusqu'à présent, la démarche proposée est commune à tous les modèles micromécaniques. La connaissance des tenseurs de rigidité ou de souplesse du composite est conditionnée par la détermination des tenseurs de localisation et (en notation indicielle). Cette détermination est différente d'un modèle à un autre, ce qui constitue la spécificité de chacun d'entre eux.

3 Etude Micromécanique & Homogénéisation

3.1 Micromécanique :

Étude des propriétés mécaniques du composite en composant les propriétés mécaniques des matériaux constituants

Modèles :

1. résistance des matériaux
2. théorie d'élasticité
3. éléments finis
4. empiriques

3.1.1 Pli unidirectionnel

Un pli de composite unidirectionnel, dont la section est montrée à la figure 3.1, comprend plusieurs fibres parallèles qui se noient dans la matrice. En général, l'épaisseur d'un pli de composite est supérieure à 0.1 mm tandis que le diamètre des fibres est environ 10 μm .

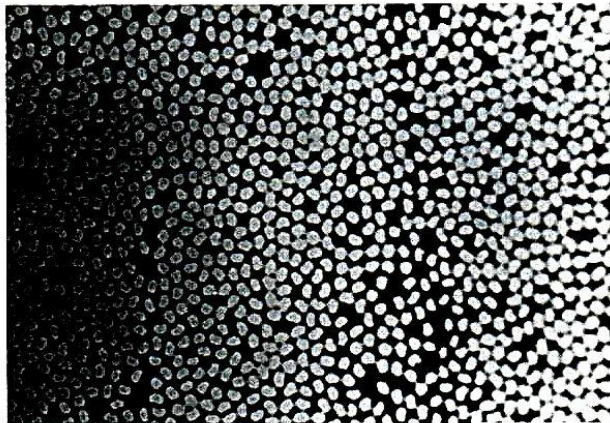


Figure 3-1 Coupe micrographique d'un composite carbone/époxy

La représentation schématique d'un pli de composite unidirectionnel est illustrée à la figure 3.2. La direction parallèle aux fibres est nommée la direction longitudinale. La direction perpendiculaire aux fibres est la direction transversale. Ces axes sont les axes naturels du composite.

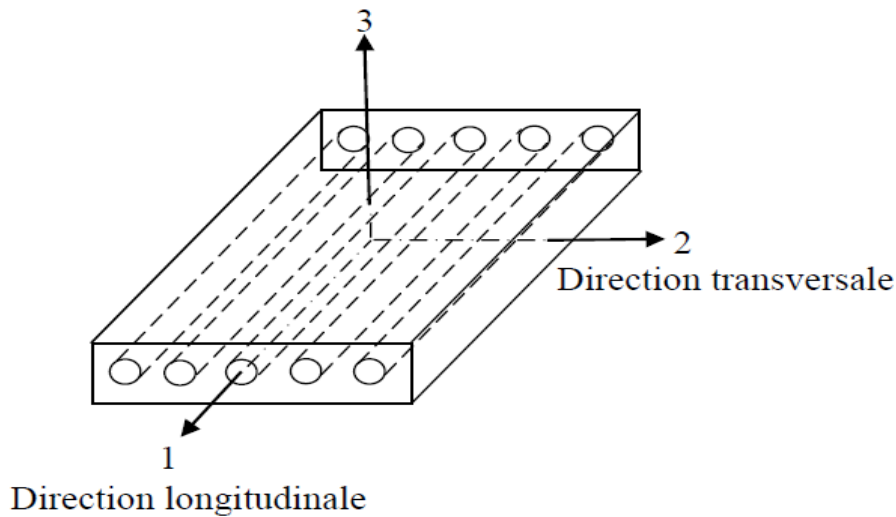


Figure 3-2 Schéma d'un pli de composite unidirectionnel

3.2 Caractéristique du mélange renfort-matrice

3.2.1 Composition du composite (fibre, matrice, vide)

La teneur en volume des fibres est définie comme :

$$v_f = \frac{V_f}{V_c} = \frac{\text{volume des fibres}}{\text{volume total du composite}}$$

De la même façon, la teneur en volume de la matrice est :

$$V_m = \frac{V_m}{V_c} = \frac{\text{volume de la matrice}}{\text{volume total du composite}}$$

Et la teneur en volume des vides (porosité) est :

$$V_V = \frac{V_V}{V_c} = \frac{\text{volume des vides}}{\text{volume total du composite}}$$

Le volume du composite s'écrit :

$$V_c = V_f + V_m + V_V \quad (3.1)$$

ou

$$v_f + v_m + v_V = 1 \quad (3.2)$$

$$\text{d'où} \quad \frac{V_c}{V_c} = \frac{V_f}{V_c} + \frac{V_m}{V_c} + \frac{V_V}{V_c} \quad (3.3)$$

Dans la pratique, il est plus facile de déterminer le pourcentage en poids des fibres par la pyrolyse ou par la dissolution par acide et c'est la raison pour laquelle il est nécessaire d'établir les relations entre les teneurs en volume et les proportions en poids.

Par le même raisonnement que dans le cas précédent, on obtient pour le poids :

$$\omega_f + \omega_m = 1 \quad (3.4)$$

où la teneur en poids des fibres est :

$$\omega_f = \frac{W_f}{W_c} = \frac{\text{poids des fibres}}{\text{poids total du composite}}$$

et la teneur en poids de la matrice est :

$$\omega_m = \frac{W_m}{W_c} = \frac{\text{poids de la matrice}}{\text{poids total du composite}}$$

Le poids des vides est négligeable.

La masse volumique du composite qui se définit comme $\rho_C = \frac{W_C}{V_C}$ peut être calculée en tenant compte ou non de la présence des vides :

$$\text{En négligeant le volume des vides : } V_C = V_f + V_m \quad (3.5)$$

$$\text{Le poids du composite s'écrit : } W_C = W_f + W_m \quad (3.6)$$

$$\text{Ou } \frac{W_C}{V_C} = \frac{W_f + W_m}{V_C} = \frac{W_f}{V_C} + \frac{W_m}{V_C}$$

$$\frac{W_C}{V_C} = \frac{W_f}{V_f} \frac{V_f}{V_C} + \frac{W_m}{V_C} \frac{V_m}{V_C}$$

$$\text{D'où la relation : } \rho_C = \rho_f v_f + \rho_m v_m \quad (3.7)$$

La masse volumique du composite peut s'écrire également en fonction de la teneur en poids des constituants :

$$\rho_C = \frac{W_C}{V_C} = \frac{1}{\frac{V_C}{W_C}} = \frac{1}{\frac{V_f + V_m}{W_C}} = \frac{1}{\frac{V_f}{W_C} + \frac{V_m}{W_C}}$$

$$\rho_C = \frac{1}{\frac{W_f}{\rho_C} + \frac{W_m}{\rho_C}} \quad (3.8)$$

En tenant compte du volume des vides :

En pratique les composites contiennent une quantité de vide non négligeable, il est nécessaire de considérer la teneur en volume des vides.

La masse volumique du composite s'écrit :

$$\rho_C = \frac{1}{\frac{V_C}{W_C}} = \frac{1}{\frac{V_f}{W_C} + \frac{V_m}{W_C} + \frac{V_V}{W_C}}$$

$$\rho_C = \frac{1}{\frac{W_f}{\rho_C} + \frac{W_m}{\rho_C} + \frac{W_V}{\rho_C}}$$

Ou
$$\frac{W_f}{\rho_f} + \frac{W_m}{\rho_m} + \frac{V_V}{\rho_V} = \frac{1}{\rho_C}$$

Alors
$$\frac{V_f}{\rho_C} = -\frac{W_f}{\rho_f} - \frac{W_m}{\rho_m} + \frac{1}{\rho_C}$$

La teneur en volume des vides est :
$$V_V = 1 - \rho_C \left(\frac{W_f}{\rho_f} + \frac{W_m}{\rho_m} \right) \quad (3.9)$$

ou encore
$$V_V = 1 - \left(\frac{\frac{W_f + W_C - W_f}{\rho_f} - \frac{W_C - W_f}{\rho_m}}{\frac{W_C}{\rho_C}} \right) \quad (3.10)$$

3.2.2 Quelques modèles habituels de disposition des fibres

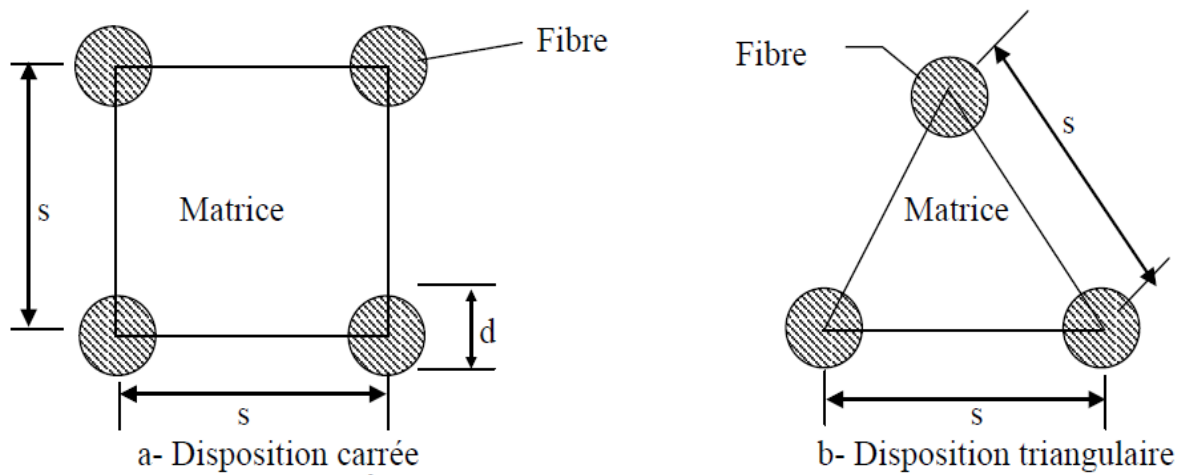


Figure 3-3 Éléments de base de différentes dispositions des fibres

Pour une configuration constante suivant la direction longitudinale des fibres, le rapport des volumes (fibres et matrice) est égal au rapport des sections.

Pour la disposition carrée, la teneur en volume des fibres est :

$$V_f = \frac{\frac{1}{4} \left(\frac{\pi d^2}{4} \right)^4}{S} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{S} \right)^2 \quad (3.11)$$

Lorsque les fibres se touchent $d = S$: et par conséquent

$$V_{f \max} = \frac{\pi S^2}{4 S^2} = \frac{\pi}{4} = 0.785$$

Pour la disposition triangulaire, la teneur en volume des fibres est :

$$V_f = \frac{\frac{1}{6} \left(\frac{\pi d^2}{4} \right)^3}{\frac{\sqrt{3}}{4} S^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left(\frac{d}{S} \right)^2 \quad (3.12)$$

Lorsque les fibres se touchent, on obtient $S = d$ et par conséquent :

$$V_{f \max} = \frac{\pi S^2}{2\sqrt{3} S^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0.907$$

En pratique : $0.5 \leq V_f \leq 0.8$

3.3 Constantes élastiques fondamentales

3.3.1 Les essais mécaniques

3.3.1.1 Essai de traction longitudinale

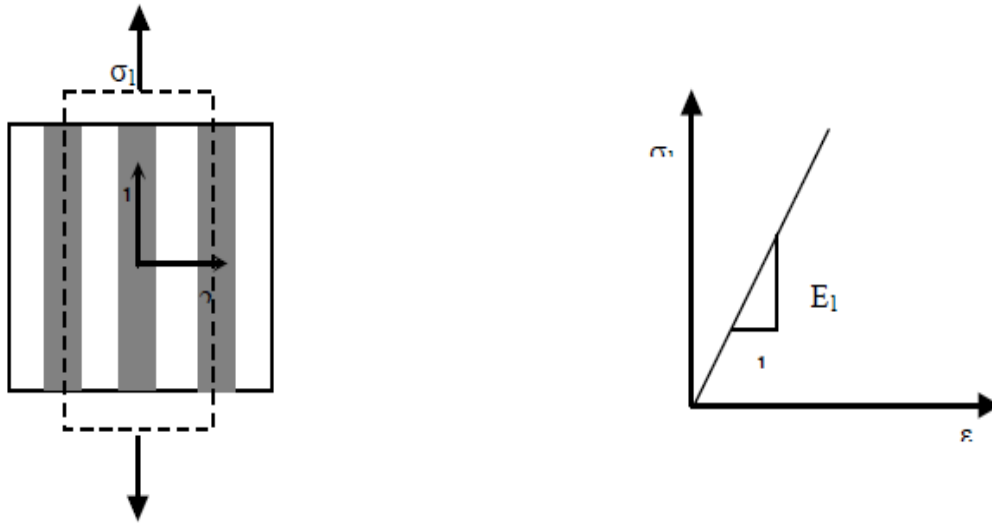


Figure 3-4 schéma simplifié d'une traction longitudinale

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_1} \sigma_1$$

$$\varepsilon_2 = -\nu_{12} \varepsilon_1 = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_1$$

$$\varepsilon_3 = -\nu_{13} \varepsilon_1 = -\frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_1 \quad (3.13)$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{23} = \gamma_{13} = 0$$

E_1 : Module d'élasticité longitudinal du pli

$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}$: Coefficient de Poisson majeur du pli

3.3.1.2 Essai de traction transversale

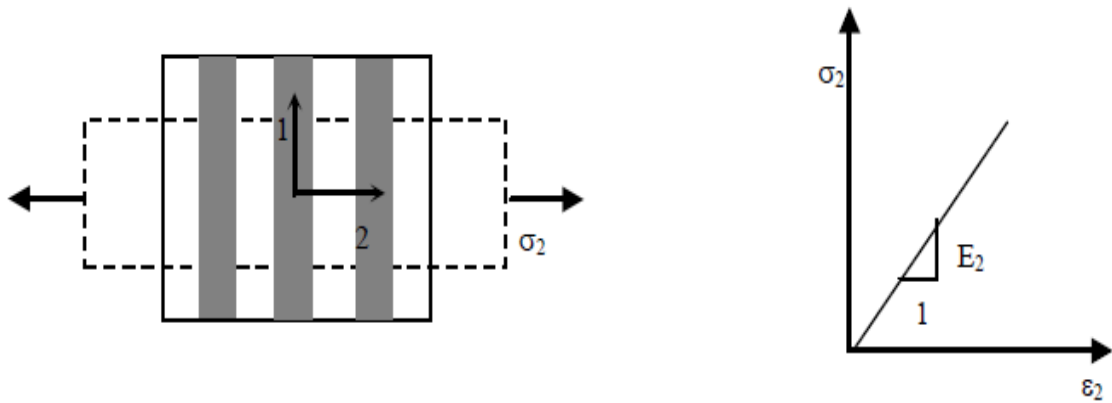


Figure 3-5 schématisation d'une traction transversale

$$\epsilon_2 = \frac{1}{E_2} \sigma_2$$

$$\epsilon_1 = -\nu_{21} \epsilon_2 = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_2$$

$$\epsilon_3 = -\nu_{23} \epsilon_2 = -\frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_2 \quad (3.14)$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{23} = \gamma_{13} = 0$$

3.3.1.3 Cisaillement pur

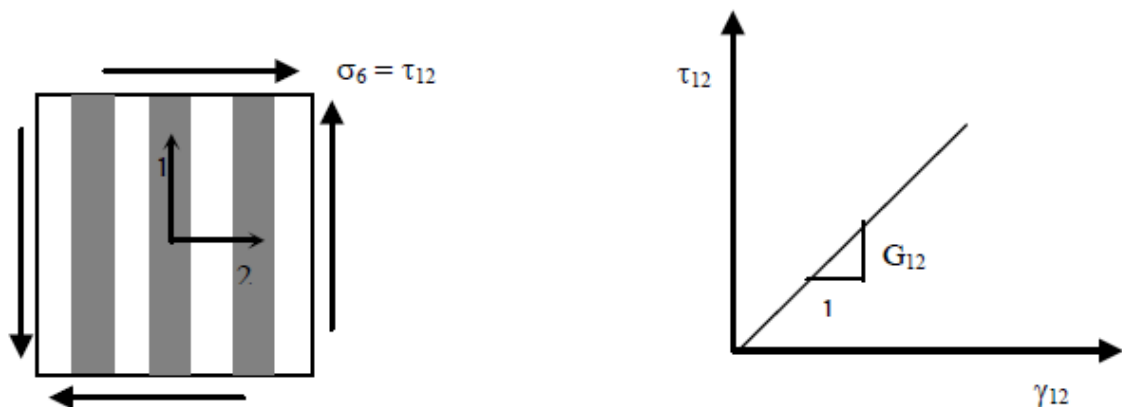


Figure 3-6 représentation d'un Cisaillement pur

$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}} \quad (3.15)$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$$

G_{12} : module de cisaillement ou module de Coulomb.

3.3.2 Modules équivalents

Les composites sont hétérogènes $\Rightarrow \sigma, \epsilon$ dépendant de la location étudiée. Les contraintes moyennes et les déformations moyennes sont définies comme suivantes :

$$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{V} \int_V \sigma_i dV \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3.16)$$

$$\bar{\epsilon}_i = \frac{1}{V} \int_V \epsilon_i dV \quad (3.17)$$

Selon la loi de HOOKE, nous obtenons les relations suivantes :

$$\bar{\sigma}_i = C_{ij} \bar{\epsilon}_j \quad \text{et} \quad \bar{\epsilon}_i = S_{ij} \bar{\sigma}_j \quad (3.18)$$

Où C_{ij} et S_{ij} sont des modules équivalents

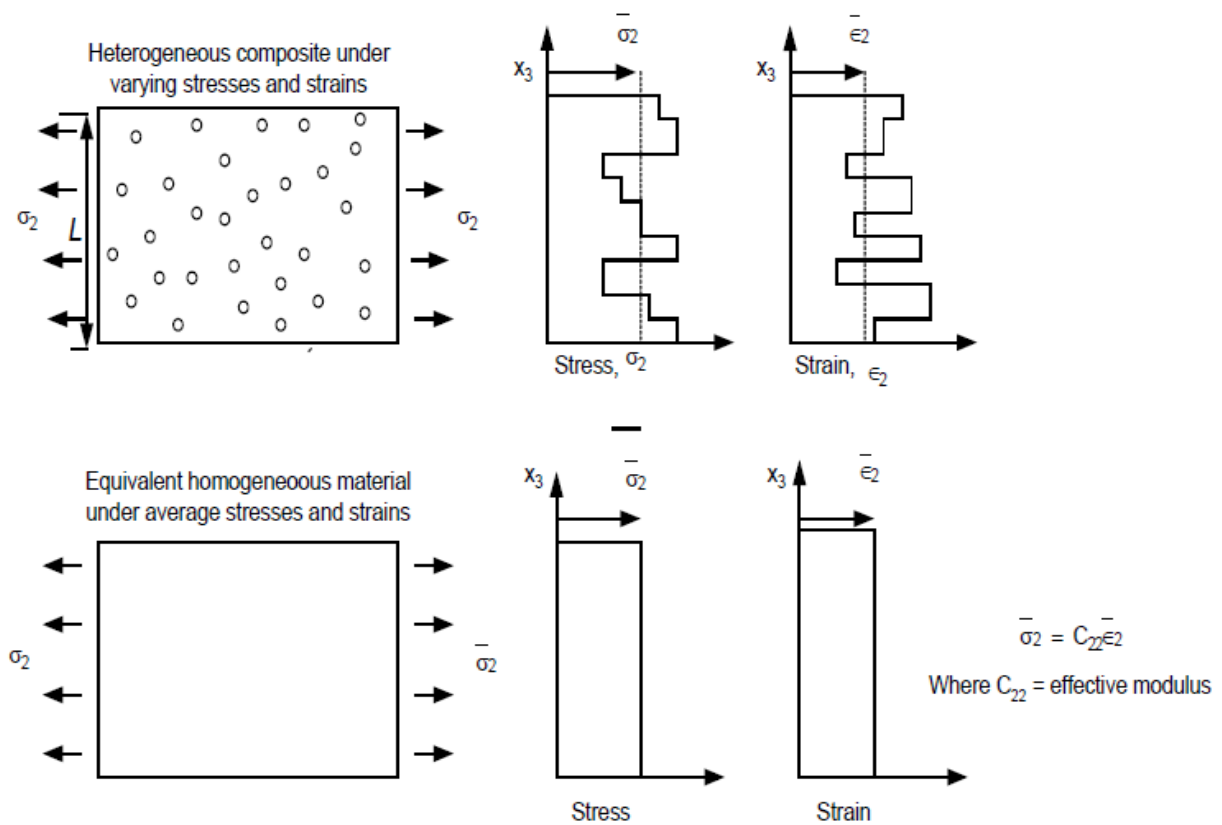


Figure 3-7 Module équivalent

3.3.3 Modèles de résistance des matériaux élémentaires

Note : la disposition des fibres n'est pas considérée dans l'élaboration des solutions.

Hypothèses :

1. Matrice et fibres sont homogènes, élastiques et linéaires
2. Matrice est isotrope
3. Fibres sont isotropes ou orthotropes.

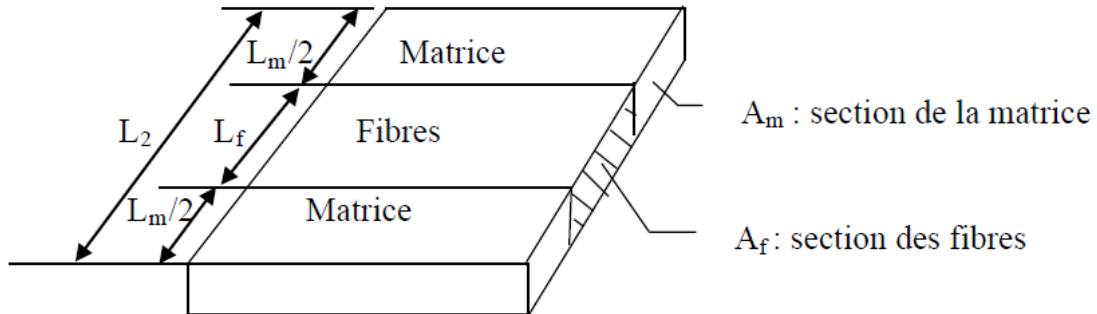


Figure 3-8 Élément de base du modèle de composite selon la théorie élémentaire de la résistance des matériaux.

Méthodologie :

1. Équilibre
2. Compatibilité
3. Relation contrainte –déformation

3.3.3.1 Module d'élasticité longitudinal du composite (E1)

Considérons l'élément de base illustré à la figure suivante qui est soumis à une contrainte normale suivant la direction longitudinale :

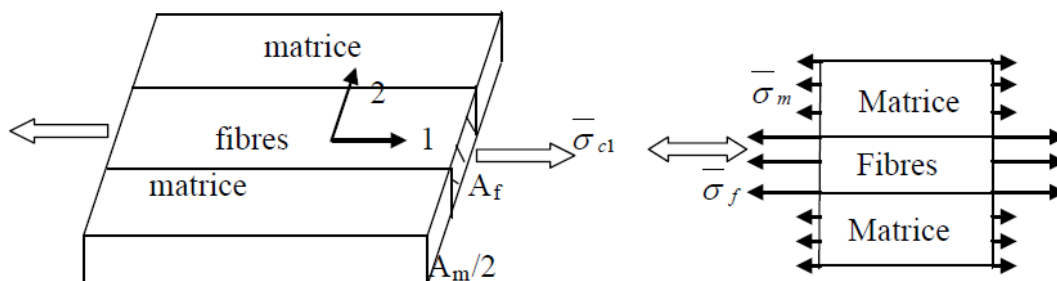


Figure 3-9 État de contraintes longitudinales

$$\text{Équilibre : } F_C = F_f + F_m = (\sigma_C)A_1 = (\sigma_f)A_f + (\sigma_m)A_m \quad (3.19)$$

$$\text{Compatibilité : } \varepsilon_C = \varepsilon_f = \varepsilon_m \quad (3.20)$$

Relation contrainte - déformation : $\sigma_C = E_1 \varepsilon_C$

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_f$$

$$\sigma_m = E_m \varepsilon_m \quad (3.21)$$

Équ. (3.19) peut s'écrire comme : $\overline{\sigma_C} \frac{A_1}{A_1} = \overline{\sigma_f} \frac{A_f}{A_f} + \overline{\sigma_m} \frac{A_m}{A_m}$

D'où $\sigma_C = \sigma_f V_f + \sigma_m V_m \quad (3.22)$

Équ. (3.21) et (3.22) donnent :

$$E_1 \varepsilon_C = (E_f \varepsilon_f) v_f + (E_m \varepsilon_m) v_m$$

$$E_1 = (E_f) v_f + (E_m) v_m \quad (3.23)$$

3.3.3.2 Module d'élasticité transversale du composite (E2)

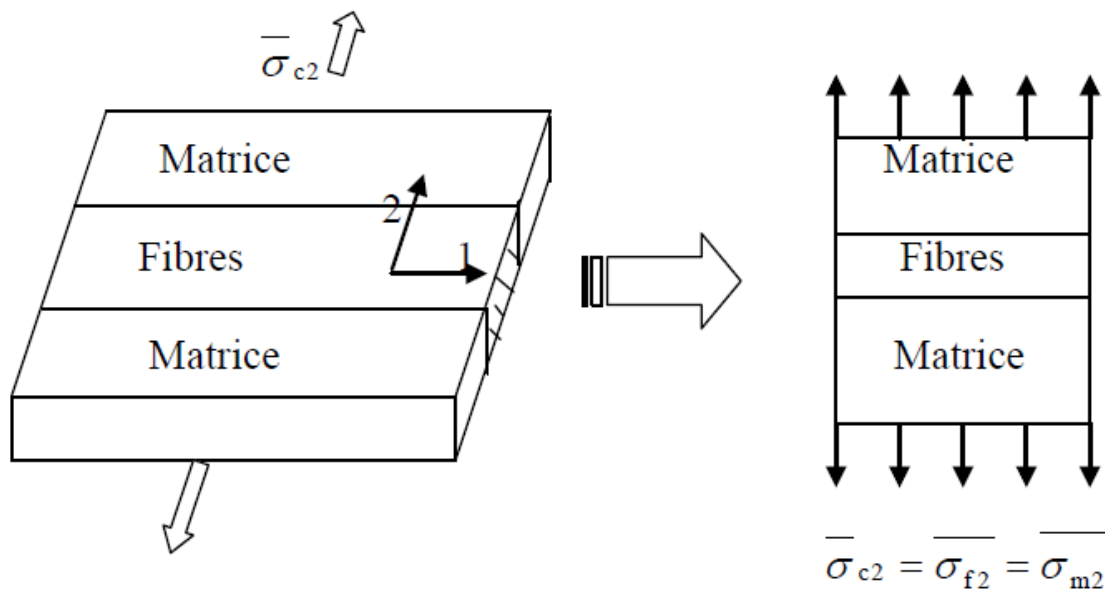


Figure 3-10 État de contraintes suivant la direction transverse

Équilibre :

$$F_{C2} = F_{f2} = F_{m2}$$

d'où

$$\sigma_{C2} = \sigma_{f2} = \sigma_{m2} \quad (3.24)$$

Compatibilité :

$$\delta_{C2} = \delta_{f2} + \delta_{m2} \quad (3.25)$$

Relation contrainte - déformation :

$$\sigma_{C2} = E_2 \varepsilon_{C2}$$

$$\sigma_{f2} = E_{f2} \varepsilon_{f2} \quad (\text{Fibre orthotrope}) \quad (3.26)$$

$$\sigma_{m2} = E_{m2} \varepsilon_{m2} \quad (\text{Matrice isotrope})$$

Équ. (3.25) implique : $L_2 \varepsilon_{C2} = L_f \varepsilon_{f2} + L_m \varepsilon_{m2}$

$$\frac{L_2}{L_2} \varepsilon_{C2} = \frac{L_f}{L_2} \varepsilon_{f2} + \frac{L_m}{L_2} \varepsilon_{m2}$$

d'où

$$\varepsilon_{C2} = \varepsilon_{f2} V_f + \varepsilon_{m2} V_m \quad (3.27)$$

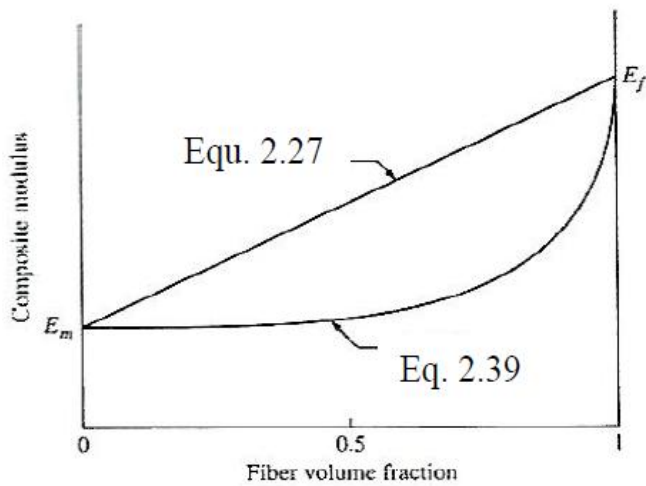
Équ. (3.24), (3.26) et (3.27)

$$\frac{\sigma_{C2}}{E_2} = \frac{\sigma_{f2}}{E_{f2}} V_f + \frac{\sigma_{m2}}{E_m} V_m$$

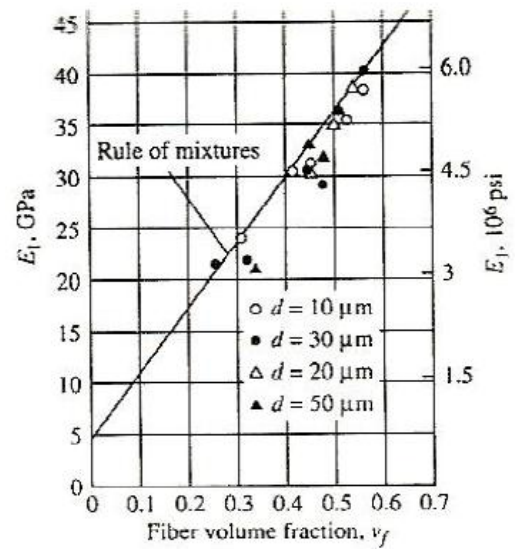
Le module d'élasticité transversale est

$$\boxed{\frac{1}{E_2} = \frac{v_f}{E_{f2}} + \frac{v_m}{E_m}} \quad (3.28)$$

Cette équation est basée sur l'égalité des contraintes dues à l'équilibre des forces appliquées. Cette hypothèse n'est pas supportée par les données expérimentales (voir figure 3.13). En réalité, les dispositions des forces à l'intérieur du composite rendent inégales les sections de fibres et de matrice.



(a) Predicted E_1 and E_2 from elementary mechanics of materials models.



(b) Comparison of predicted and measured E_1 for E-glass/polyester. (From Adams [3.6]. Reprinted with permission of ASM International.)

Figure 3-11 Validation de l'équation (2.27) par les données expérimentales

3.3.3.3 Module de Poisson (ν_{12}) du composite

$$\nu_{12} = -\frac{\epsilon_{C2}}{\epsilon_{C1}} \quad \text{Lorsque } \sigma_1 \neq 0 \quad \sigma_2 = \tau_{12} = 0 \quad (3.29)$$

$$\epsilon_{C2} = -\nu_{12} \epsilon_{C1}$$

$$\epsilon_{f2} = -\nu_{f12} \epsilon_{f1} \quad (3.30)$$

$$\epsilon_{m2} = -\nu_m \epsilon_{m1}$$

Compatibilité :

$$\epsilon_{C1} = \epsilon_{f1} = \epsilon_{m1} \quad (3.31)$$

$$\delta_{C2} = \delta_{f2} + \delta_{m2} \quad (3.32)$$

Équ. (3.32) implique :

$$\epsilon_{C2} L_2 = \epsilon_{f2} L_f = \epsilon_{m2} L_m \quad (3.33)$$

Équ. (3.30) dans (3.33) :

$$-v_{12}\varepsilon_{C1}L_2 = -v_{f12}\varepsilon_{f1}L_f + (-v_m\varepsilon_{m1}L_m)$$

$$-v_{12}\varepsilon_{C1}\frac{L_2}{L_2} = -v_{f12}\varepsilon_{f1}\frac{L_f}{L_2} + \left(-v_m\varepsilon_{m1}\frac{L_m}{L_2}\right) \quad (3.34)$$

Équ. (3.31) et (3.34) donnent :

$$v_{12} = v_{f12}V_f + v_mV_m \quad (3.35)$$

3.3.3.4 Module de cisaillement du composite (G_{12})

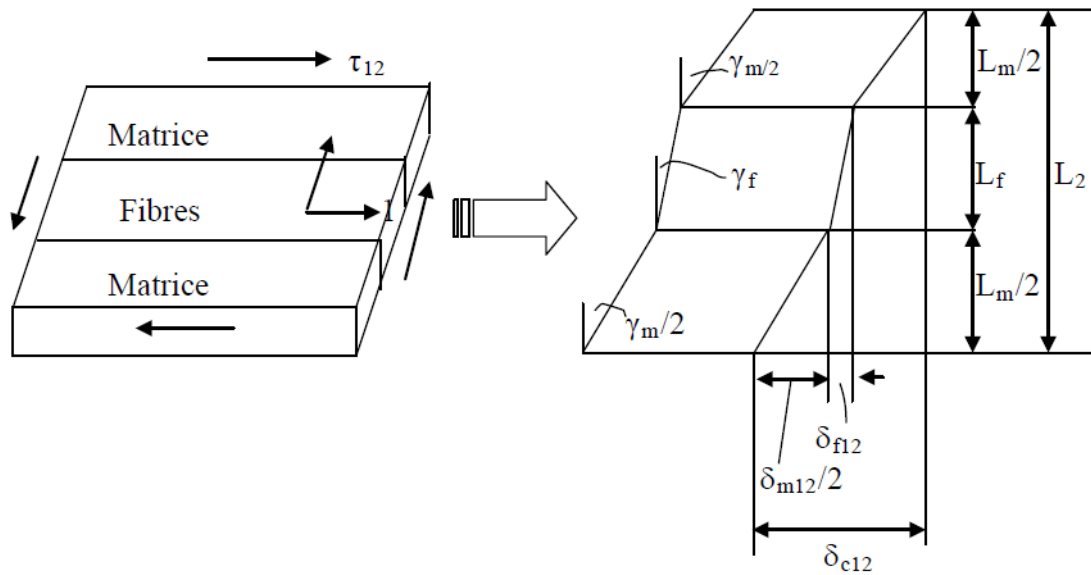


Figure 3-12 Module de cisaillement du composite (G_{12})

$$\text{Équilibre : } \tau_{C12} = \tau_{f12} = \tau_{m12} \quad (3.36)$$

$$\text{Compatibilité : } \delta_{C12} = \delta_{f12} + \delta_{m12} \quad (3.37)$$

Relation contrainte – déformation

$$\tau_{C12} = G_{12}\gamma_{C12}$$

$$\tau_{f12} = G_{f12}\gamma_{f12} \quad (3.38)$$

$$\tau_{m12} = G_{m12}\gamma_{m12}$$

Équ. (3.37) et (3.38) impliquent :

$$L_2 \gamma_{C2} = L_f \gamma_{f2} + L_m \gamma_{m2}$$

$$\frac{L_2 \tau_{C12}}{L_2 G_{12}} = \frac{L_f \tau_{f12}}{L_2 G_{f12}} + \frac{L_m \tau_{m12}}{L_2 G_m} \quad (3.39)$$

$$\text{d'où } \boxed{\frac{1}{G_{12}} = \frac{V_f}{G_{f12}} + \frac{V_m}{G_m}} \quad (3.40)$$

3.4 Modèles de résistance des matériaux modifiés

E_1 et ν_{12} sont assez précis.

E_2 et G_{12} sont trop simplistes.

Il faut maintenant considérer la disposition des fibres lors de l'établissement de l'élément de base.

Disposition carrée

3.4.1 Modèle de Hopkins et Chamis :

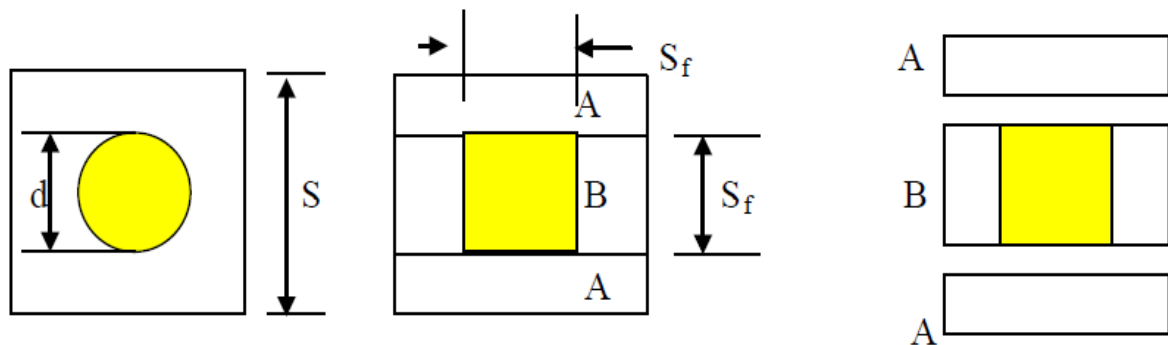


Figure 3-13 Élément de base selon une disposition carrée des fibres et les sous-éléments

La section des fibres : $\frac{\pi d^2}{4} = S_f^2$ (aire du cercle = aire du carrée)

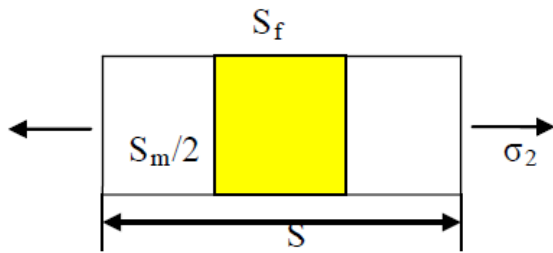
$$\text{D'où } S_f = d \sqrt{\frac{\pi}{4}} \quad (3.41)$$

La teneur en volume des fibres est :

$$V_f = \frac{A_f}{A_C} = \frac{S_f^2}{S^2}$$

$$\text{Alors } S = \sqrt{\frac{S_f^2}{V_f}} = \sqrt{\frac{\pi d^2}{4V_f}} = d \sqrt{\frac{\pi}{4V_f}} \quad (3.42)$$

Considérons le sous-élément B qui est soumis à une contrainte de traction transversale σ_2 :



Équ. (3.41) et (3.42) donnent :

$$(V_f)_{B2} = \frac{S_f^2}{S \times S_f} = \frac{S_f}{S} = \frac{d \sqrt{\frac{\pi}{4}}}{d \sqrt{\frac{\pi}{4V_f}}} = \sqrt{V_f} \quad (3.43)$$

d'où

$$(V_m)_{B2} \frac{S_m}{S} = \frac{S - S_f}{S} = 1 - \frac{S_f}{S} = 1 - \sqrt{V_f} \quad (3.44)$$

Notons que $V_f \neq (V_f)_{B2}$

Le module d'élasticité suivant la direction 2 du bloc B est

$$\frac{1}{E_{B2}} = \frac{1}{E_{f2}} \left(\frac{S_f}{S} \right) + \frac{1}{E_m} \left(\frac{S_m}{S} \right) \quad (3.45)$$

Remplaçant équ. (3.43), (3.44) dans (3.45), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{E_{B2}} &= \frac{1}{E_{f2}} \sqrt{V_f} + \frac{1}{E_m} (1 - \sqrt{V_f}) = \frac{E_m \sqrt{V_f} + E_{f2} (1 - \sqrt{V_f})}{E_{f2} E_m} \\ &= \frac{1 - \sqrt{V_f} \left(1 - \frac{E_m}{E_{f2}}\right)}{E_m}\end{aligned}$$

d'où
$$E_{B2} = \frac{E_m}{1 - \sqrt{V_f} \left(1 - \frac{E_m}{E_{f2}}\right)} \quad (3.46)$$

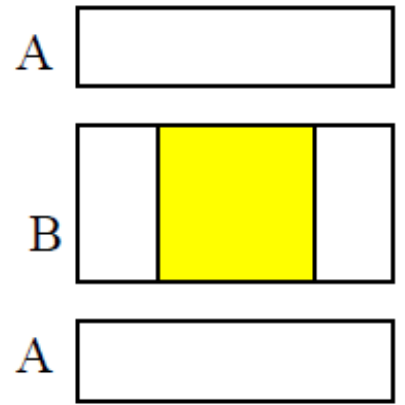
Considérons l'ensemble des sous éléments A et B soumis à σ_2

[Zheng-Ming Huang et al]

$$E_2 = E_{B2} \left(\frac{A_B}{A_C}\right) + E_m \left(\frac{A_m}{A_C}\right) = E_{B2} \left(\frac{S_f}{S}\right) + E_m \left(\frac{S_m}{S}\right)$$

$$= \frac{E_m \sqrt{V_f}}{1 - \sqrt{V_f} \left(1 - \frac{E_m}{E_{f2}}\right)} + E_m (1 - \sqrt{V_f})$$

$$E_2 = E_m \left((1 - \sqrt{V_f}) + \frac{\sqrt{V_f}}{1 - \sqrt{V_f} \left(1 - \frac{E_m}{E_{f2}}\right)} \right) \quad (3.47)$$



3.4.2 Approximations de Voigt et de Reuss (Modèles série et parallèle) :

modèle série est aussi connu sous le nom de loi des mélanges. Ce modèle est simple et représente la borne supérieure de *Voigt (1889)* en ce qui concerne les modules alors que le modèle de *Reuss (1929)* représente la borne inférieure. Le modèle de *Voigt* fait l'hypothèse de la déformation constante contrairement au modèle de *Reuss* qui fait l'hypothèse d'une contrainte constante. Ces deux types d'approches sont des approximations qui ne tiennent nullement compte de la morphologie du matériau.

La procédure d'homogénéisation nécessite de définir des lois de localisations reliant les champs macroscopiques aux champs locaux. Dans le cadre de l'élasticité linéaire, les approximations de Voigt et de Reuss permettent une estimation de ces champs locaux moyennant une hypothèse forte en ce qui concerne le caractère hétérogène de la déformation ou la contrainte.

Ces approximations permettent d'obtenir un encadrement des caractéristiques macroscopiques du matériau étudié. [Jean-Sébastien DUPUY]

Le modèle de Voigt

suppose que la déformation dans chaque phase est identique à la déformation macroscopique appliquée, donc homogène en fonction des proportions volumiques de chaque constituant, le modèle détermine analytiquement la valeur du module élastique homogénéisé du composite :

$$\begin{cases} M_C = M_f V_f + M_m V_m \\ \sigma_C = \sigma_f V_f + \sigma_m V_m \end{cases} \quad (3.48)$$

Avec $V_f + V_m = 1$

L'approximation de Reuss

suppose que la contrainte dans chaque phase est égale à la contrainte macroscopique imposée, donc homogène :

Le module élastique homogénéisé du composite est donné par :

$$\begin{cases} M_C = \frac{M_m M_f}{M_m V_f + M_f V_m} \\ \sigma_C = \frac{\sigma_m \sigma_f}{\sigma_m V_f + \sigma_f V_m} \end{cases} \quad (3.49)$$

Ces deux approches conduisent à un encadrement du tenseur des constantes d'élasticité du matériau composite C_{Comp} .

Ces bornes sont valides quelque soit la microstructure du matériau car elles ne tiennent compte que de la fraction volumique de chaque phase.

Plus précis que les approximations de Voigt et Reuss, d'autres encadrements ou estimations du comportement élastique des matériaux composites ont été obtenus, en retenant des informations microstructurales afin d'évaluer au mieux les contraintes et les déformations au sein d'une phase donnée.

3.4.3 Bornes de Hashin et Shtrikman

Les bornes de Hashin et Shtrikman (Hashin 1962 ; Hashin et Shtrikman 1962, 1963) sont un encadrement des propriétés effectives pour des matériaux biphasés isotropes (isotropie de la répartition des phases ainsi que des propriétés des composants). Elles sont plus restrictives

que les bornes de Voigt et Reuss, car elles font apparaître, en plus des fractions volumiques f_i , l'isotropie du matériau.

Ces bornes sont optimales car il existe des matériaux biphasés isotropes qui admettent ces bornes comme propriétés effectives. [saber BENFERDI]

$$E^{HS+} = \left(V_f E_f + \frac{(1-V_f)E_m}{1+\alpha_f \frac{E_m-E_f}{K_f}} \right) \left(V_f + \frac{1-V_f}{1+\alpha_f \frac{E_m-E_f}{E_f}} \right)^{-1} \quad (3.50)$$

$$E^{HS-} = \left((1-V_f)E_m + \frac{V_f E_f}{1+\alpha_m \frac{E_f-K_m}{K_m}} \right) \left((1-V_f) + \frac{V_f}{1+\alpha_m \frac{E_f-E_m}{E_m}} \right)^{-1} \quad (3.51)$$

$$\mu^{HS+} = \left(V_f \mu_f + \frac{(1-V_f)\mu_m}{1+\beta_f \frac{\mu_m-\mu_f}{K_f}} \right) \left(V_f + \frac{1-V_f}{1+\beta_f \frac{\mu_m-\mu_f}{\mu_f}} \right)^{-1} \quad (3.52)$$

$$\mu^{HS-} = \left((1-V_f)\mu_m + \frac{V_f \mu_f}{1+\beta_m \frac{\mu_f-\mu_m}{K_m}} \right) \left((1-V_f) + \frac{V_f}{1+\beta_m \frac{\mu_f-\mu_m}{\mu_m}} \right)^{-1} \quad (3.53)$$

$$\alpha_f = \frac{3+4V_f}{8(1-V_f)} \quad ; \quad \alpha_m = \frac{3+4V_m}{8(1-V_m)}$$

$$\beta_f = \frac{3-4V_f}{4(1-V_f)} \quad ; \quad \beta_m = \frac{3-4V_m}{4(1-V_m)}$$

3.4.4 Les modèles Halpin-Tsai

Sont utilisés pour décrire les composites à deux phases dans lequel la phase de matrice est isotrope. Les matériaux peuvent être transversalement isotrope, orthotrope, et

isotrope, en fonction de la géométrie de la matière de renforcement de la matrice. Le cadre en matériau composite correspond à la fibre (ou de non-matrice) trame de phase. Cinq modèles de matériaux Halpin-Tsai différents existent dans Patran: fibre continue, la fibre discontinue, ruban continu, discontinu ruban, et les particules.

Les modules d'un matériau composite unidirectionnel sont exprimés :

— par la loi des mélanges pour le module E_L et le coefficient ν_{LT} :

$$P_C = (P_f V_f + P_m V_m) \quad (3.54)$$

— et par l'expression générale suivante pour les autres modules :

$$P_C = P_m \frac{(1+\xi\eta V_f)}{(1-\eta V_f)} \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{(P_f - P_m)}{(P_f + \xi P_m)} \quad (3.55)$$

où P_C est la propriété élastique du composite (qui peut être un module d'élasticité , un coefficient de Poisson , ou un module de cisaillement) , P_f et P_m sont respectivement les propriétés correspondantes de la fibre et la matrice , V_f et V_m sont respectivement les fractions volumiques de la phase de la fibre et de la matrice, ξ et η sont des constantes empiriques spécifié par l'utilisateur . Chaque modèle Halpin - Tsai spécifie un ensemble d'équations pour les constantes d'ingénierie et chaque équation dans l'ensemble a une valeur par défaut pour ce qui peut être remplacée par l'utilisateur

Fibre continue uniforme

Ce modèle suppose la géométrie deux phases représentée sur la Figure 3-14 . Les fibres sont uniforme, continu , cylindrique , et transversalement isotrope. Le composite qui en résulte est donc transversalement isotrope. C'est le seul modèle Halpin - Tsai soutenu par certaines versions antérieures de Patran .

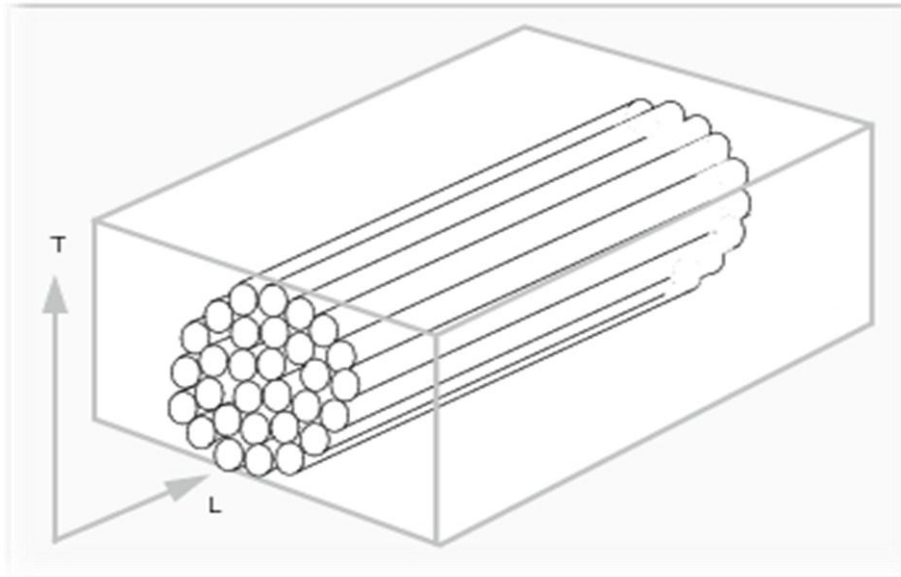


Figure 3- 14 Halpin - Tsai continue fibre Matériel Coordonnées

la loi - de - mélange est utilisés pour déterminer pour le composite , avec la valeur par défaut de la constante empirique étant de 1,0 dans les deux cas . (La valeur par défaut de pour toute équation dans les cinq modèles Halpin - Tsai règle - de - mélanges est toujours 1.0 .) Équations Halpin - Tsai sont utilisés pour déterminer , de sorte que l'expression de , par exemple , est donné par :

$$E_2 = E_{2m} \frac{(1+\xi\eta V_f)}{(1-\eta V_f)} \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{(E_{2f}-E_{2m})}{(E_{2f}+\xi E_{2m})} \quad (3.56)$$

dans lequel E_{2m} est la matrice module transversal et l' E_{TF} est le module de fibre transversale. Les constantes empiriques par défaut pour les sont données par:

$$\xi_{E_2} = 2 + 40V_f^{10} \quad (3.57)$$

$$\xi_{G_{13}} = 1 + 40V_f^{10} \quad (3.58)$$

$$\xi_{G_{23}} = \frac{1}{(4-3\nu_m)} \quad (3.59)$$

où ν_m est le coefficient de Poisson pour le matériau de matrice isotrope et l' expression laïd est un terme de correction pour les composites avec des fractions volumiques de fibres haute . (. . Rappelez-vous, ce sont des relations empiriques Ils n'ont pas été calculées dans le seul but de la recherche élégant et sophistiqué) Le rapport transversale composite Poisson est ensuite déterminée à partir de l'isotropie transversale connue :

$$v_{23} = \frac{E_2}{2G_{23}} - 1 \quad (3.60)$$

Certaines versions antérieures de Patran utilisé une équation Halpin - Tsai pour calculer la place de G_{TT} , et ensuite utilisées pour isotropie transversale relations pour calculer G_{TT} . Bien que le texte de Halpin ne précise pas une valeur par défaut pour, Patran fournit la valeur :

$$\xi_{v_{23}} = 2 + 40V_f^{10} \quad (3.61)$$

qui devrait être choisi avec une certaine prudence. G_{TT} est alors calculée en utilisant l'expression :

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1+v_{23})} \quad (3.62)$$

Fibre discontinue uniforme

Ce modèle suppose que les fibres sont uniformes, discontinue, cylindrique, et transversalement isotrope. Le composite qui en résulte est donc transversalement isotrope. Une équation règle - de - mélanges est utilisé pour déterminer pour le composite, avec la valeur par défaut de la constante empirique étant de 1,0. Tsai - Halpin équations sont utilisées pour déterminer E_L , E_T , G_{LT} et G_{TT} , de sorte que l' expression de E_L , par exemple, est donnée par:

$$E_1 = E_{1m} \frac{(1+\xi\eta V_f)}{(1-\eta V_f)} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{(E_{1f}-E_{1m})}{(E_{1f}+\xi E_{1m})} \quad (3.63)$$

dans lequel l'orme est la matrice module longitudinal et E_{1f} est le module de fibres longitudinales. Les constantes empiriques par défaut pour E_L , E_T , G_{LT} , et G_{TT} sont donnés par:

$$\xi_{E_1} = 2 \left(\frac{l}{d} \right) + 40V_f^{10} \quad (3.64)$$

$$\xi_{E_2} = 2 + 40V_f^{10} \quad (3.65)$$

$$\xi_{G_{13}} = 2 + 40V_f^{10} \quad (3.66)$$

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1+v_{23})} \quad (3.67)$$

où $\left(\frac{l}{d}\right)$ est le rapport de la longueur au diamètre de la fibre . Comme pour le modèle uniforme de fibres continue. [J. C. HALPIN]

3.4.5 La méthode d'Eshelby

La méthode d'Eshelby constitue le point de départ de bon nombre de modèles micromécaniques. Son principe repose sur la résolution d'une configuration élémentaire, à savoir une inclusion dans un premier temps puis une hétérogénéité plongée dans un milieu appelé matrice. Cette méthode peut alors se décomposer en trois mouvements. Le premier, pour lequel l'inclusion est plongée dans la matrice. Une inclusion est définie par le fait qu'elle possède des caractéristiques mécaniques identiques à la matrice. Pour le deuxième mouvement, il s'agira cette fois-ci d'une hétérogénéité plongée dans la matrice. Contrairement au cas précédent, l'hétérogénéité possède des caractéristiques mécaniques différentes de celles de la matrice. La dernière étape consistera à étendre le cas précédent aux composites, c'est-à-dire où la matrice contient plusieurs hétérogénéités. Seul le cas où la matrice et les hétérogénéités possèdent un comportement purement élastique est considéré.

A. *Problème d'inclusion*

Il s'agit du premier volet de la méthode d'Eshelby. L'inclusion Ω subit une déformation qualifiée de libre de contrainte (**Figure 3-15**). Cette déformation e^* est appelée ainsi car elle ne provoquerait pas de contrainte si elle était appliquée au même matériau, pris séparément de son milieu de référence D . Mais dans le milieu de référence, la matrice gêne cette perturbation qu'est e^* ; cette gêne induit en l'occurrence un champ de contrainte et de déformation en tout point du domaine D . C'est précisément la détermination de l'expression de ces champs qui sera l'objet de cette partie. Pour mener à bien cette tâche, deux méthodes sont proposées, l'une analytique et l'autre plus physique basée sur une suite logique d'évènements.

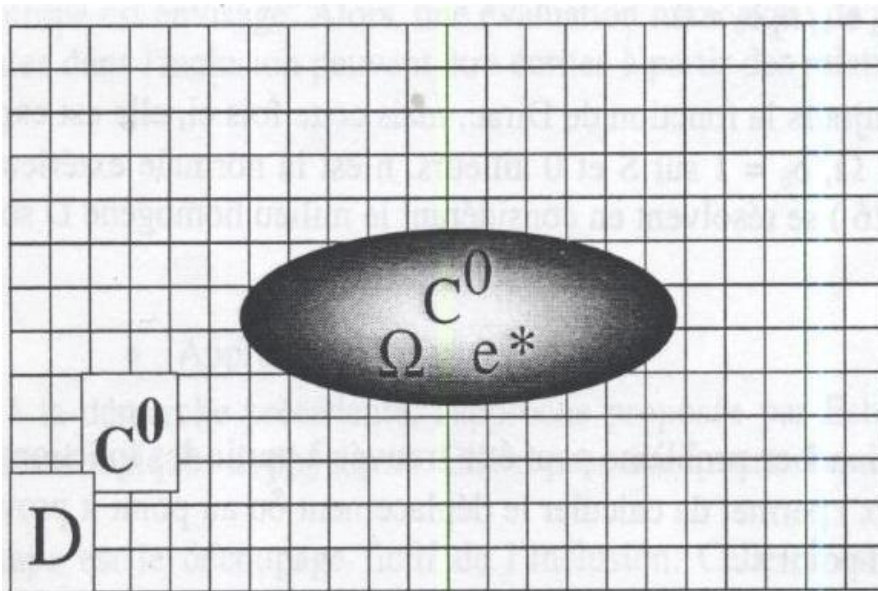


Figure 3.15 : Les inclusions Ω et $(D-\Omega)$ possédant les mêmes caractéristiques mécaniques

B. Approche intuitive

L'approche proposée par Eshelby est basée sur une suite d'évènements logiques et physiques. Elle repose sur quatre étapes schématisée sur la **Figure 3-16**.

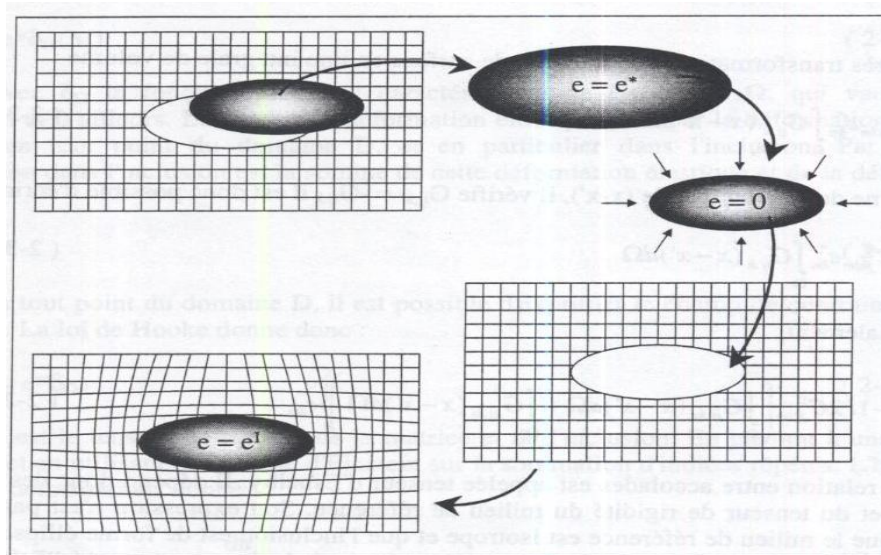


Figure 3.16 : Problème de l'inclusion d'Eshelby et les différentes étapes pour la résolution

La première étape est le découpage fictif de l'inclusion. Celle-ci est sortie de son milieu de référence. La deuxième étape est l'application d'une déformation libre de contrainte e^* à cette inclusion. La troisième étape consiste à replacer l'inclusion dans son milieu de référence. Pour

ce faire, il faut appliquer à celle-ci une force permettant de lui redonner sa taille initiale. La dernière étape est le relâchement de cette force une fois que l'inclusion est replacée dans son milieu initial. Il se crée alors un champ de déformation dans le milieu et dans l'inclusion.

C. Méthode de l'inclusion équivalente

Pour la méthode de l'inclusion équivalente, et contrairement au cas précédent, l'inclusion possède des caractéristiques mécaniques différentes de ceux du milieu de référence. Alors, l'inclusion sera appelée hétérogénéité. En d'autres termes, une hétérogénéité élastique de module C^i est noyée dans une matrice de modules élastiques C^0 . Au voisinage de l'hétérogénéité, la contrainte appliquée macroscopiquement est perturbée par la présence de l'hétérogénéité. Par contre, à l'échelle macroscopique, loin de l'hétérogénéité, la perturbation est négligeable

Si Σ est la contrainte appliquée à l'infini et E la déformation qui lui correspond :

$$\Sigma = C_C E \quad (3.68)$$

Si on note σ^{pt} et ε^{pt} les perturbations respectivement des contraintes et des déformations, alors, au voisinage de l'hétérogénéité et dans chacun des deux domaines, les contraintes et les déformations totales peuvent s'écrire $\Sigma + \sigma^{pt}$ et $E + \varepsilon^{pt}$. La loi de Hooke peut être exprimée pour $(D-\Omega)$ et Ω à l'échelle micro :

$$\Sigma + \sigma^{pt} = C^i (E + \varepsilon^{pt}) \quad \text{dans l'hétérogénéité} \quad (3.69)$$

$$\text{Et } \Sigma + \sigma^{pt} = C^0 (E + \varepsilon^{pt}) \quad \text{dans la matrice}$$

Dans le but de se ramener au cas précédent, la méthode de l'inclusion équivalente assimile la perturbation des contraintes, liée à la présence de l'hétérogénéité, par celle provoquée par une inclusion. Si l'on considère maintenant que tout le domaine D est homogène, le tenseur de rigidité, l'hétérogénéité devient alors une inclusion et elle subit comme pour le cas précédent une déformation libre de contrainte ε^* appelée cette fois-ci déformation de transformation. Alors, les équations (3.69) peuvent s'écrire

$$\Sigma + \sigma^{pt} = C^0 (E + \varepsilon^{pt} - \varepsilon^*) \quad \text{dans l'inclusion} \quad (3.70)$$

$$\Sigma + \sigma^{pt} = C^0 (E + \varepsilon^{pt}) \quad \text{dans la matrice}$$

Pour que les deux problèmes d'inclusion et d'hétérogénéité soit équivalent, il faut que l'expression des contraintes donnée par l'un et l'autre soit identiques :

$$C^i (E + \varepsilon^{pt}) = C^0 (E + \varepsilon^{pt} - \varepsilon^*) \quad \text{dans } \Omega \quad (3.71)$$

Le problème de l'inclusion subissant une déformation libre de contrainte permet de relier par le tenseur d'Eshelby cette dernière à la déformation de perturbation.

$$\varepsilon^{pt} = S_{esh} \varepsilon^* \quad (3.72)$$

Ce qui permet d'exprimer la déformation de transformation, après remplacement dans (3.71)

$$\varepsilon^* = [(C^0 - C^i)S_{esh} - C^0]^{-1}(C^i - C^0)E \quad (3.73)$$

Au final, les déformations dans l'hétérogénéité peuvent être obtenues à partir du fait qu'elles valent $E + \varepsilon^{pt}$, avec la déformation de perturbation exprimée en fonction de la déformation de transformation (3.72). Après quelques manipulations, il vient :

$$\varepsilon^i = [I + S_{esh}(C^0)^{-1}(C^i - C^0)]^{-1}E \quad (3.74)$$

Il est alors possible de déterminer les contraintes dans l'inclusion, en utilisant le fait qu'elles valent $\Sigma + \varepsilon^{pt} = C^i * \varepsilon^i = C^i * (E + \varepsilon^{pt})$ Il vient alors :

$$\sigma^i = C^i [I + S_{esh}(C^0)^{-1}(C^i - C^0)]^{-1}(C^0)^{-1}\Sigma \quad (3.75)$$

La dernière étape de la méthode d'Eshelby consiste à dire que la déformation dans chaque renfort est donnée par la relation (3.74). Cela signifie que le renfort est considéré comme étant noyé dans un milieu ayant les propriétés de la matrice seule et que ce renfort ne subit pas d'interactions avec les autres. Par suite, le domaine d'application d'une telle approche concerne les composites ayant un taux de renfort modéré.

Pour cette approche, les déformations et les contraintes dans les renforts sont données par les relations (3.74) et (3.75). Elles sont fonctions des contraintes et déformations macroscopiques, appliquées à l'infini. De ce fait, il est aisé de définir les tenseurs de localisation en déformations et contraintes, respectivement A^i et B^i

$$A^i = [I + S_{esh}(C^0)^{-1}(C^i - C^0)]^{-1} \quad (3.76)$$

$$\text{Et } B^i = C^i * [I + S_{esh}(C^0)^{-1}(C^i - C^0)]^{-1}(C^0)^{-1}$$

Connaissant l'expression des tenseurs de localisation, les propriétés élastiques équivalentes du matériau composite peuvent alors être calculées. Pour ce faire, il suffit de remplacer ces tenseurs de localisation dans les relations (2.26)

$$C^C = C^0 + \sum_{i=1}^n f^i (C^i - C^0) [I + S_{esh}^i (C^0)^{-1} (C^i - C^0)]^{-1} \quad (3.77)$$

$$\text{Et } S^C = S^0 + \sum_{i=1}^n f^i (S^i - S^0) C^i [I + S_{esh}^i (C^0)^{-1} (C^i - C^0)]^{-1} (C^0)^{-1}$$

Les tenseurs d'Eshelby ont été indicés par "esh" afin d'éviter la confusion avec les tenseurs de souplesse des constituants. En outre, chaque renfort i possède son propre tenseur d'Eshelby. En effet, le tenseur d'Eshelby est fonction de la nature géométrique du renfort, sa forme mais également de son environnement proche (de la nature de la matrice). C^0 est

pourquoi dans la détermination des caractéristiques mécaniques du composite, les tenseurs d'Eshelby sont directement impliqués dans la sommation. [Nathalie EL MAYAS]

D. Composantes du tenseur d'Eshelby

Les composantes, non nulles, du tenseur d'Eshelby pour une *inclusion ellipsoïdale* (**Figure 6**) de rapport d'aspect $\alpha = \frac{a_3}{a_2}$ avec l'axe 3 confondu avec le grand axe de l'ellipsoïde, dans une matrice élastique isotrope s'expriment de la façon suivante :

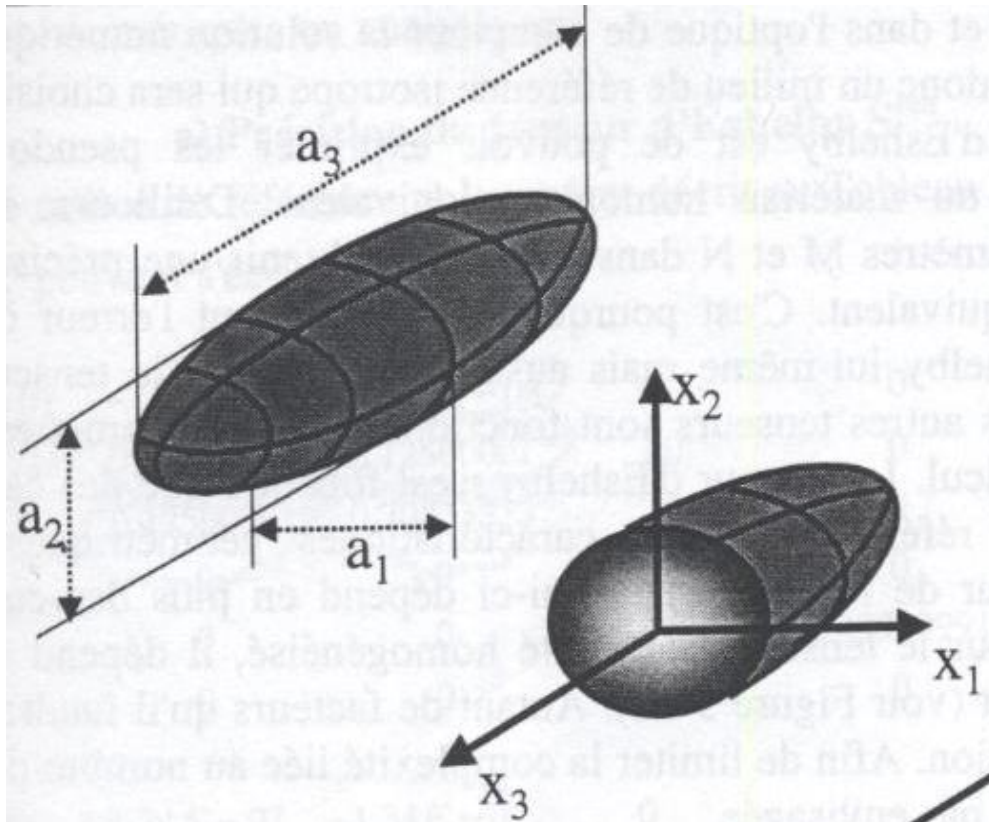


Figure 3.17 : Dimensions de l'inclusion ellipsoïdale

$$S_{3333} = \frac{1}{2(1-\vartheta_m)} \left\{ 1 - 2\vartheta_m + \frac{3\lambda^2 - 1}{\lambda^2 - 1} - \left[1 - 2\vartheta_m + \frac{3\lambda^2}{\lambda^2 - 1} \right] g(\lambda) \right\};$$

$$S_{1111} = S_{2222} = \frac{3\lambda^2}{8(1-\vartheta_m)(\lambda^2 - 1)} + \frac{1}{4(1-\vartheta_m)} \left\{ 1 - 2\vartheta_m + \frac{9}{4(\lambda^2 - 1)} \right\} g(\lambda),$$

$$S_{1122} = S_{2211} = \frac{1}{4(1-\vartheta_m)} \left\{ \frac{\lambda^2}{2(\lambda^2 - 1)} - \left[1 - 2\vartheta_m + \frac{3}{4(\lambda^2 - 1)} \right] g(\lambda) \right\};$$

$$S_{1133} = S_{2233} = -\frac{\lambda^2}{2(1-\vartheta_m)(\lambda^2 - 1)} + \frac{1}{4(1-\vartheta_m)} \left\{ \frac{3\lambda^2}{\lambda^2 - 1} - (1 - 2\vartheta_m) \right\} g(\lambda);$$

$$S_{3311} = S_{3322} = -\frac{1}{2(1-\vartheta_m)} \left[1 - 2\vartheta_m + \frac{1}{\lambda^2 - 1} \right] + \frac{1}{2(1-\vartheta_m)} \left[1 - 2\vartheta_m + \frac{3}{2(\lambda^2 - 1)} \right] g(\lambda);$$

$$S_{3131} = S_{3232} = \frac{1}{4(1-\vartheta_m)} \left\{ 1 - 2\vartheta_m - \frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1} - \frac{1}{2} \left[1 - 2\vartheta_m - \frac{3(\lambda^2+1)}{2(\lambda^2-1)} \right] g(\lambda) \right\} ;$$

$$S_{1212} = \frac{1}{4(1-\vartheta_m)} \left\{ \frac{\lambda^2}{2(\lambda^2-1)} + \left[1 - 2\vartheta_m - \frac{3}{2(\lambda^2-1)} \right] g(\lambda) \right\} ;$$

Avec le coefficient de Poisson de la matrice et l'éclatement de l'inclusion

$$g(\lambda) = \frac{\lambda}{(\lambda^2-1)^{\frac{3}{2}}} \left[\lambda(\lambda^2-1)^{\frac{1}{2}} - \cosh^{-1}(\lambda) \right] \quad \text{pour } \lambda > 1 ;$$

$$g(\lambda) = \frac{\lambda}{(1-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \left[\cos^{-1}(\lambda) - \lambda(1-\lambda^2)^{\frac{1}{2}} \right] \quad \text{pour } \lambda < 1 ;$$

Dans le cas d'une *inclusion cylindrique de section elliptique*, les composantes, non nulles, du tenseur d'Eshelby s'écrivent comme suit : [Nathalie EL MAYAS

$$S_{1111} = \frac{1}{2(1-\vartheta_m)} \left\{ \frac{a_2^2+2a_1a_2}{(a_1+a_2)^2} + (1-2\vartheta_m) \frac{a_2}{a_1+a_2} \right\} ;$$

$$S_{2222} = \frac{1}{2(1-\vartheta_m)} \left\{ \frac{a_1^2+2a_1a_2}{(a_1+a_2)^2} + (1-2\vartheta_m) \frac{a_1}{a_1+a_2} \right\} ;$$

$$S_{1122} = \frac{1}{2(1-\vartheta_m)} \left\{ \frac{a_2^2}{(a_1+a_2)^2} + (1-2\vartheta_m) \frac{a_2}{a_1+a_2} \right\} ;$$

$$S_{2233} = \frac{1}{2(1-\vartheta_m)} \frac{2\vartheta_m a_1}{a_1+a_2} ;$$

$$S_{1133} = \frac{1}{2(1-\vartheta_m)} \frac{2\vartheta_m a_2}{a_1+a_2} ;$$

$$S_{2211} = \frac{1}{2(1-\vartheta_m)} \left\{ \frac{a_1^2}{(a_1+a_2)^2} - (1-2\vartheta_m) \frac{a_1}{a_1+a_2} \right\} ;$$

$$S_{1212} = \frac{1}{2(1-\vartheta_m)} \left\{ \frac{a_1^2+a_2^2}{2(a_1+a_2)^2} + \frac{(1-2\vartheta_m)}{2} \right\} ;$$

$$S_{2323} = \frac{a_1}{2(a_1+a_2)} ;$$

$$S_{3131} = \frac{a_1}{2(a_1+a_2)} ;$$

3.4.6 Le modèle de Mori et Tanaka

Le modèle (ou le schéma) de Mori-Tanaka va tenir compte de l'interaction entre les inclusions dans le processus d'estimation des modules d'élasticité macroscopiques. Pour cela, on estime la moyenne de déformation dans les inclusions par celle qui s'établit dans une inclusion de même forme et de même caractéristiques élastiques, immergée dans une matrice soumise à l'infini à une déformation moyenne E.

A la différence des autres modèles, le modèle de Mori-Tanaka permet de traiter le comportement élastique de matériaux composites renforcés par des hétérogénéités de formes, d'élancements, d'orientations et de nature différentes. De plus, la démarche de résolution de Mori-Tanaka n'est pas directement basée sur la recherche des tenseurs de localisation A^i et B^i . Le processus de résolution repose sur la recherche de la déformation macroscopique E lorsqu'un champ de contrainte macroscopique Σ est appliqué. Ainsi le tenseur d'élasticité peut être déduit par la relation $\Sigma = C^C \cdot E$

Le point de départ est le milieu de référence, à savoir la résine seule sans renforts ni charges. Lorsque celui-ci est soumis à une contrainte, il s'y crée une déformation E , toujours dans ce même milieu de référence : $\Sigma = C^0 \cdot E$ (3.78)

La deuxième étape consiste à introduire les fibres dans le milieu de référence, les n renforts (phases) dans la matrice. Alors, par la présence de ces renforts, vient s'ajouter à la contrainte initiale Σ , une contrainte de perturbation. Dans la matrice, le champ de contrainte s'exprime

$$\text{alors : } \begin{cases} \sigma^0 = \Sigma + \tilde{\sigma} = C^0(E^0 + \tilde{\varepsilon}) \\ \varepsilon^0 = E^0 + \tilde{\varepsilon} \end{cases} \quad (3.79)$$

$\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\varepsilon}$ sont les moyennes des champs de contrainte et de déformation générés par la présence des $i^{\text{ème}}$ renforts

La troisième étape consiste à exprimer les champs moyens de déformation et de contrainte dans le renfort

$$\begin{cases} \sigma^i = \Sigma + \tilde{\sigma} + \sigma^{ipt} = C^i(E^0 + \tilde{\varepsilon} + \varepsilon^{ipt}) \\ \varepsilon^i = E^0 + \tilde{\varepsilon} + \varepsilon^{ipt} \end{cases} \quad (3.80)$$

σ^{ipt} et ε^{ipt} sont les contraintes et les déformations de perturbation par rapport à l'état moyen dans la matrice.

Finalement, et dans le but de déterminer, la méthode de l'inclusion équivalente est utilisée. Le renfort est remplacé par une inclusion, avec les mêmes propriétés mécaniques la matrice, mais se voyant subir une déformation de transformation l'équation (3.80) devient alors :

$$\sigma^i = \Sigma + \tilde{\sigma} + \sigma^{ipt} = C^i(E^0 + \tilde{\varepsilon} + \varepsilon^{ipt}) = C^0(E^0 + \tilde{\varepsilon} + \varepsilon^{ipt} - \varepsilon^i) \quad (3.81)$$

C'est le tenseur d'Eshelby qui relie la perturbation de déformation dans le renfort à la déformation de transformation

$$\varepsilon^{ipt} = S_{esh}^i \varepsilon^{i*} \quad (3.82)$$

Il est alors possible de déterminer en combinant les équations (3.81) et (3.82)

$$\varepsilon^{i*} = L^i(E^0 + \tilde{\varepsilon}) \quad (3.83)$$

Avec $L^i = -[(C^i - C^0)S_{esh}^i + C^0]^{-1}(C^i - C^0)$

est alors défini comme étant le pseudo tenseur de localisation

La relation d'homogénéisation (2.24) est utilisée. Cela consiste à dire que la moyenne des contraintes dans toutes les phases prise sur le VER tout entier vaut la contrainte macroscopique appliquée. Ce qui peut s'écrire compte tenu de (3.79) et (3.81) :

$$\Sigma = f^0 \sigma^0 + \sum_{i=1}^n f^i \sigma^i = f^0 C^0 (E^0 + \tilde{\varepsilon}) + \sum_{i=1}^n f^i C^0 (E^0 + \tilde{\varepsilon} + \varepsilon^{ipt} - \varepsilon^i) \quad (3.84)$$

f^i représente la fraction volumique de la phase i . en utilisant (3.78) et (3.82), l'équation (3.84) peut se simplifier pour aboutir à l'expression de la déformation. Pour aboutir à cette simplification, il ne faut pas perdre de vue que la somme des fractions volumiques de toutes les phases est égale à 1 (*C'est à dire* $f^0 + \sum_{i=1}^n f^i = 1$) :

$$\tilde{\varepsilon} = - \sum_{i=1}^n f^i (\varepsilon^{ipt} - \varepsilon^{i*}) = - \sum_{i=1}^n f^i (S_{esh}^i - I) \varepsilon^{i*} \quad (3.85)$$

L'équation (3.83) permet de remplacer la déformation de transformation dans l'équation (3.85)

$$\tilde{\varepsilon} = [I + \sum_{i=1}^n f^i (S_{esh}^i - I) L^i]^{-1} [- \sum_{i=1}^n f^i (S_{esh}^i - I) L^i] E^0 \quad (3.86)$$

Ce qui vient d'être fait pour les contraintes est réitéré pour les déformations, la moyenne des déformations dans toutes les phases prise sur le VER vaut la déformation macroscopique E . C'est le processus d'homogénéisation sur les déformations. En tenant compte des relations (2.22) et (3.85), on obtient :

$$E = f^0 (E^0 + \tilde{\varepsilon}) + \sum_{i=1}^n f^i (E^0 + \tilde{\varepsilon} + \varepsilon^{ipt}) = E^0 + \sum_{i=1}^n f^i \varepsilon^{i*} \quad (3.87)$$

En combinant les équations (3.86), (3.87) et (3.83), il est alors possible d'écrire :

$$E = \left\{ I + \left(\sum_{i=1}^n f^i L^i \right) [I + \sum_{i=1}^n f^i (S_{esh}^i - I) L^i]^{-1} \right\} E^0 \quad (3.88)$$

Compte tenu de l'équation (3.78), il vient une relation entre les contraintes et les déformations macroscopiques. Il s'agit de la loi de Hooke, et cela permet alors de déterminer le tenseur d'élasticité du matériau homogène équivalent.

$$C^C = C^0 \left\{ I + \left(\sum_{i=1}^n f^i L^i \right) [I + \sum_{i=1}^n f^i (S_{esh}^i - I) L^i]^{-1} \right\}^{-1} \quad (3.89)$$

Le tenseur de rigidité du matériau homogène équivalent est fonction des paramètres microstructuraux du matériau, de la fraction volumique, des caractéristiques mécaniques de la matrice et des renforts ainsi que de la géométrie de ces derniers. Pour traiter le cas des composites à renforts orientés aléatoirement, les orientations sont discrétisées en N familles. Chacune de ces N familles de renforts ayant une orientation particulière, elles sont donc considérées comme N phases différentes. [Abdelmonem ELOUAER]

Remarque

Pouvoir exprimer les tenseurs de rigidité et de contrainte dans les différentes phases permettra par l'intermédiaire de ce modèle (Mori-Tanaka) d'évaluer l'état d'endommagement de chaque phase. Dans notre cas d'étude, on se limitera uniquement à la modélisation du comportement élastique.

Pour la matrice, on pourra écrire :

$$\varepsilon^0 = E^0 + \tilde{\varepsilon} = A^0 E \quad \text{avec} \quad A^0 = \left\{ I + \left(\sum_{i=1}^n f^i S_{esh}^i L^i \right) \right\}^{-1} \quad (3.90)$$

$$\sigma^0 = E^0 \Sigma \quad \text{avec} \quad B^0 = C^0 \left\{ I + \left(\sum_{i=1}^n f^i (S_{esh}^i - I) L^i \right) \right\}^{-1} (C^0)^{-1} \quad (3.91)$$

De la même façon, pour les renforts, les déformations sont exprimées comme étant la somme de la déformation dans la matrice et de la déformation de perturbation. Cette dernière étant déterminée à partir de la relation (3.82):

$$\varepsilon^i = \varepsilon^0 + \varepsilon^{ipt} = (I + S_{esh}^i L^i) \varepsilon^0$$

$$\varepsilon^i = \left\{ I + S_{esh}^i \left[(C^i - C^0) S_{esh}^i + C^0 \right]^{-1} (C^i - C^0) \right\} \varepsilon^0 \quad (3.92)$$

L'expression de la déformation dans la matrice est obtenue par la relation (3.90), ainsi le tenseur de localisation des déformations peut être obtenu pour les cas avec renforts :

$$\varepsilon^i = A^i E \quad \text{avec} \quad A^i = (I + S_{esh}^i L^i) \left\{ I + \left(\sum_{i=1}^n f^i S_{esh}^i L^i \right) \right\}^{-1} \quad (3.93)$$

$$\sigma^i = E^i \Sigma \quad \text{avec} \quad B^i = C^i A^i (C^C)^{-1} \quad (3.94)$$

4 Comparaisons entre les différents modèles d'homogénéisation :

4.1 Introduction

Dans cette étude nous allons essayer de déterminer les bornes sur les propriétés homogénéisées et étudié les modèles d'élasticité et calculé les modules des matériaux composites verre/époxyde, et carbone/époxyde. Les propriétés mécaniques du matériau composite sont déterminées numériquement et analytiquement. Il en ressort que ces modèles permettent de donner des résultats sensiblement très proches de l'expérimentation.

Nous avons proposé une comparaison entre des différents modèles tel que : la loi des mélanges (Voigt/Reuss), modèles de Hashin et Shtrikman et l'estimation de Halpin-Tsai, et La méthode d'Eshelby/Kroner avec application de programmes de calcul en utilisant **Mathematica.9** , pour les différentes approches.

Après, il est nécessaire de calculer ces constantes d'élasticité à partir des propriétés des constituants du composite (fibres et matrice) tableau (1-1), tableau (1-2) et présentation des graphes : modules d'Young longitudinal E_1 , transversal E_2 , coefficient de poisson ν_{12} et le module de cisaillement G_{12} pour chaque modèle.

4.2 matériau composite verre-E/époxyde

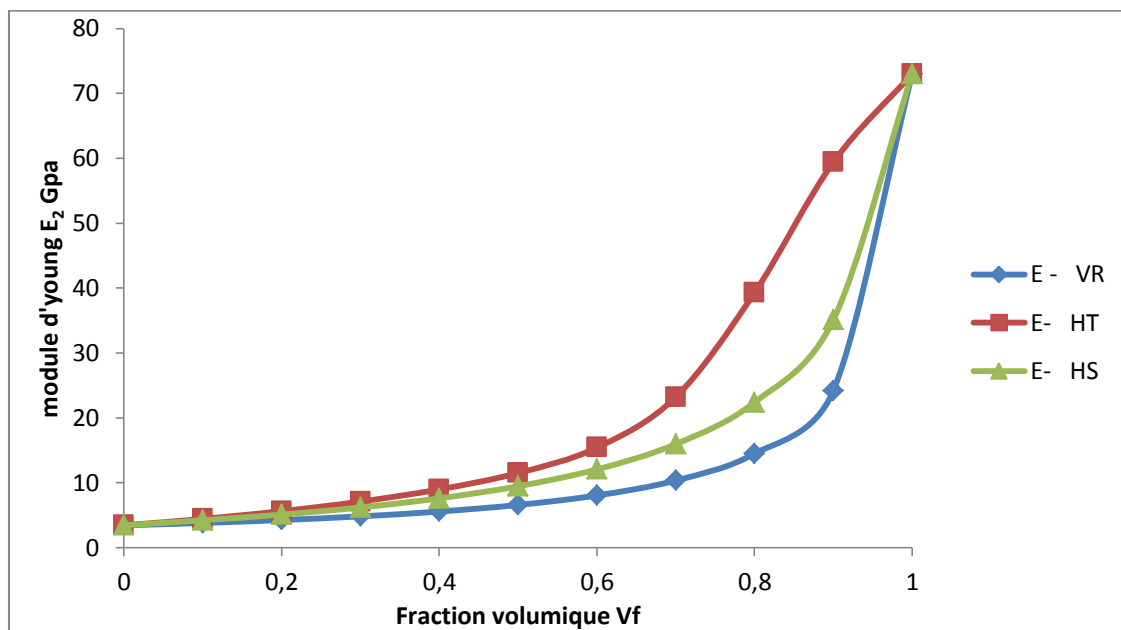


Figure 4-1 : variation du module d'Young transversal E_2 du composite verre-E/époxyde en fonction de V_f .

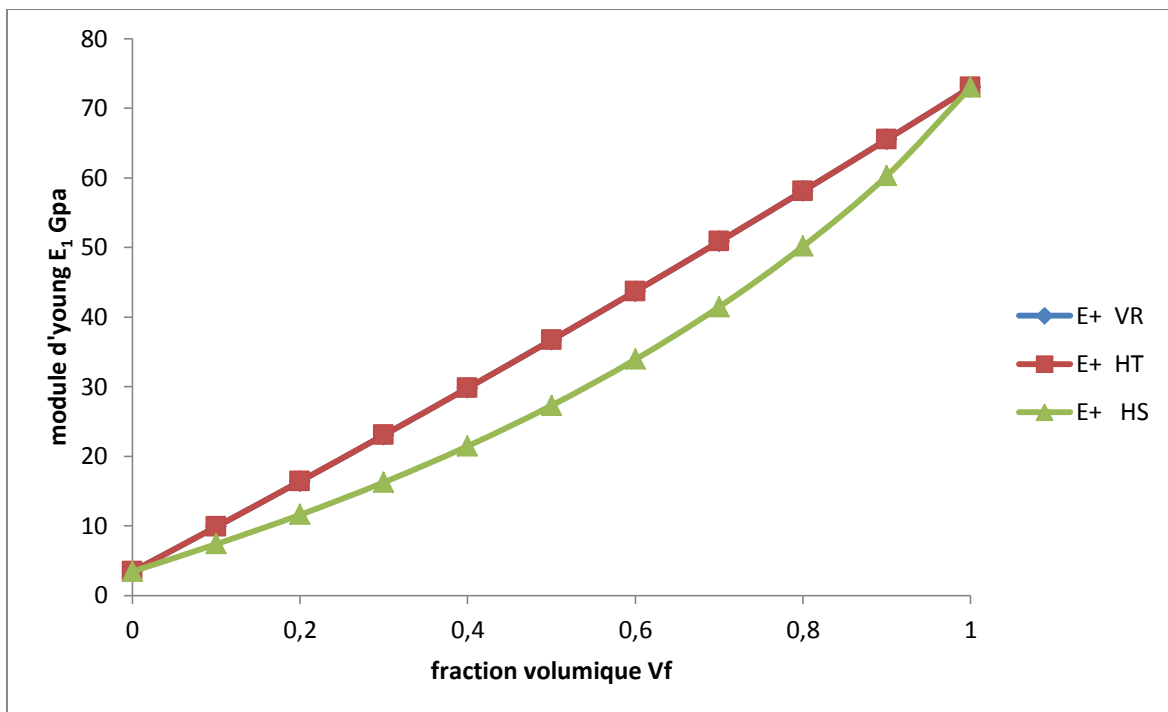


Figure 4-2 : variation du module d'Young longitudinal E_1 du composite verre-E/époxyde en fonction de Vf

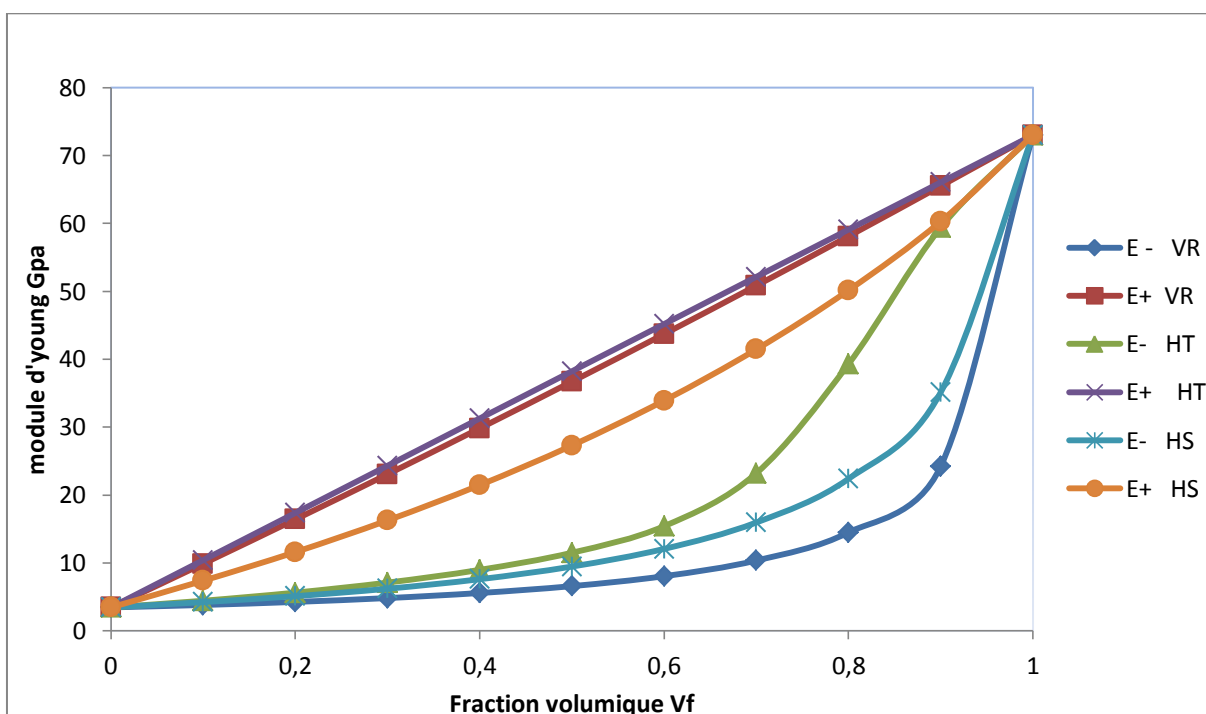


Figure 4-3 : variation du module d'Young E_1 et E_2 du composite verre-E/époxyde en fonction de Vf pour différentes approches.

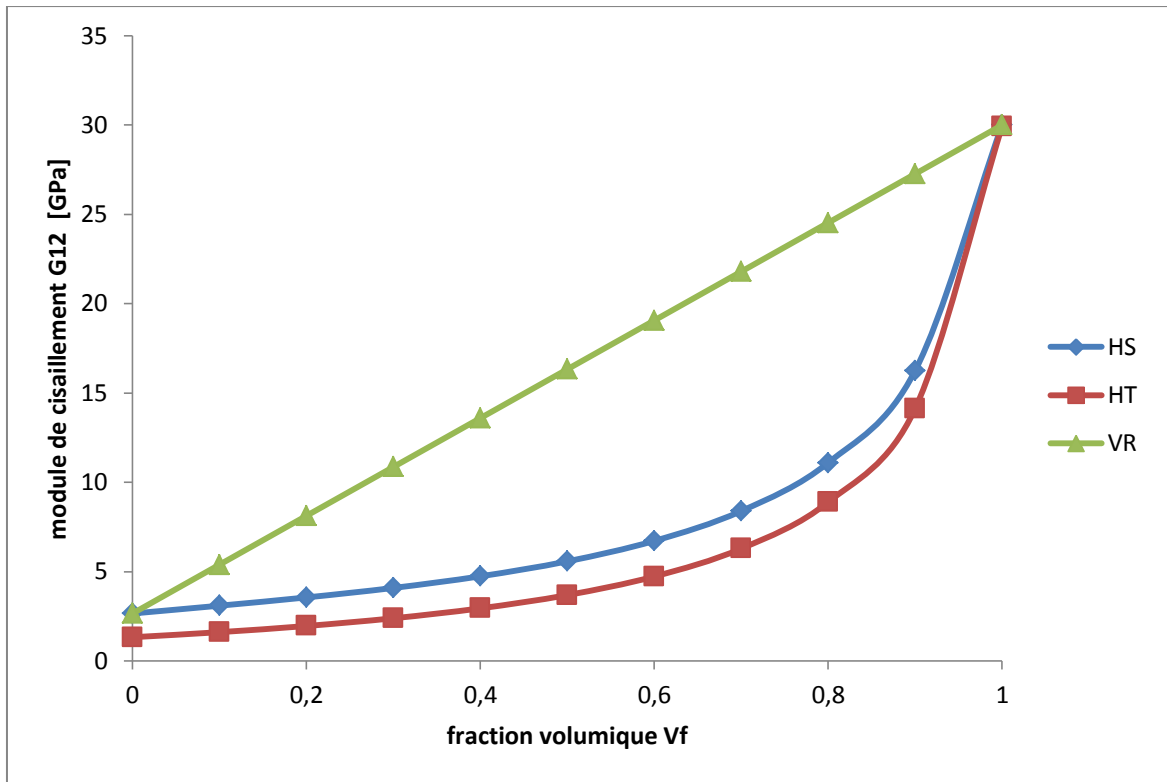


Figure 4-4 : Evaluation du module de cisaillement G_{12} du composite verre-E/époxyde en fonction de V_f pour différentes approches.

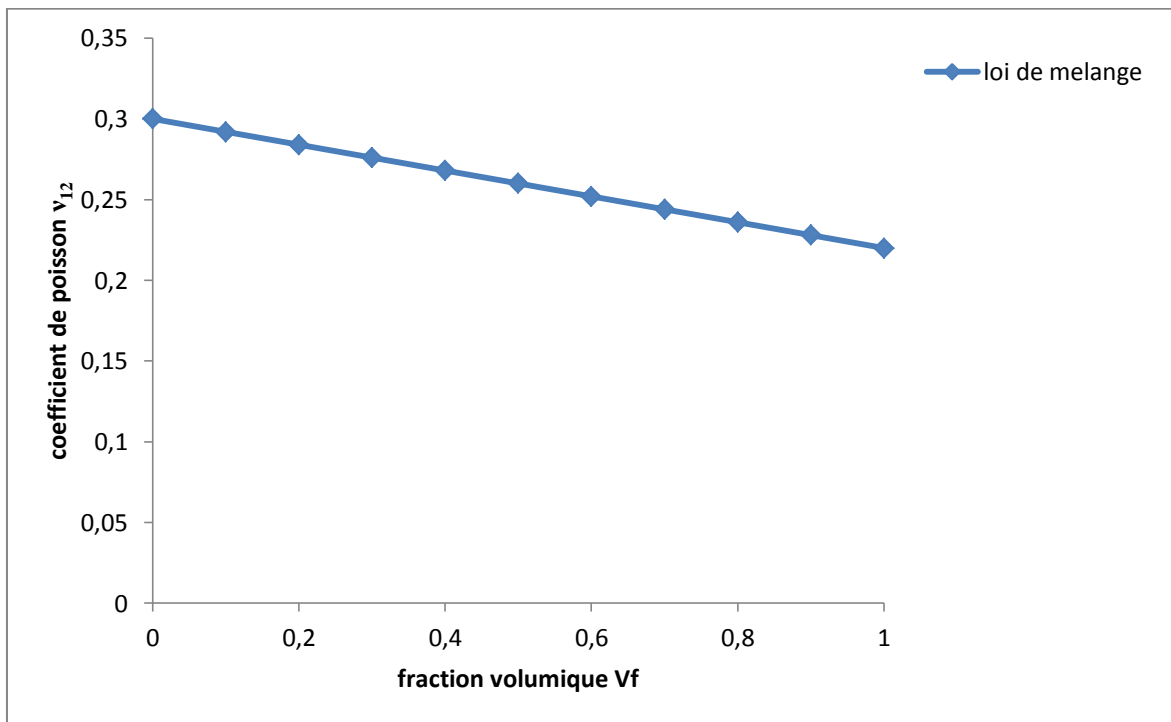


Figure 4-5 : variation du coefficient de poisson ν_{12} du composite verre-E/époxyde en fonction de V_f .

Les figures ci-dessus représentent respectivement la variation du module d'Young longitudinal E_1 , coefficient de poisson, module d'Young transversal E_2 et le module de

cisaillement du matériau composite verre-E/époxyde en fonction de la fraction volumique des fibres V_f par les différentes approches.

On remarque que les modèles Halpin-Tsai et la loi des mélanges donnent les mêmes résultats de variation du module d'Young longitudinal E_1 , et lors du calcul du coefficient de Poisson, les deux modèles : loi des mélanges et l'équation de Halpin-Tsai apparaissent identiques. Pour le module d'Young transversal E_2 , il est observé que les modèles Halpin-Tsai et Hashin-Shtrikman sont très proches que la loi des mélanges. En revanche, la représentation du module de cisaillement G_{12} entraîne une approche très remarquable du modèle Halpin-Tsai et Hashin-Shtrikman et une divergence entre ces derniers modèles et la loi des mélanges.

4.3 matériaux composites carbone/époxyde

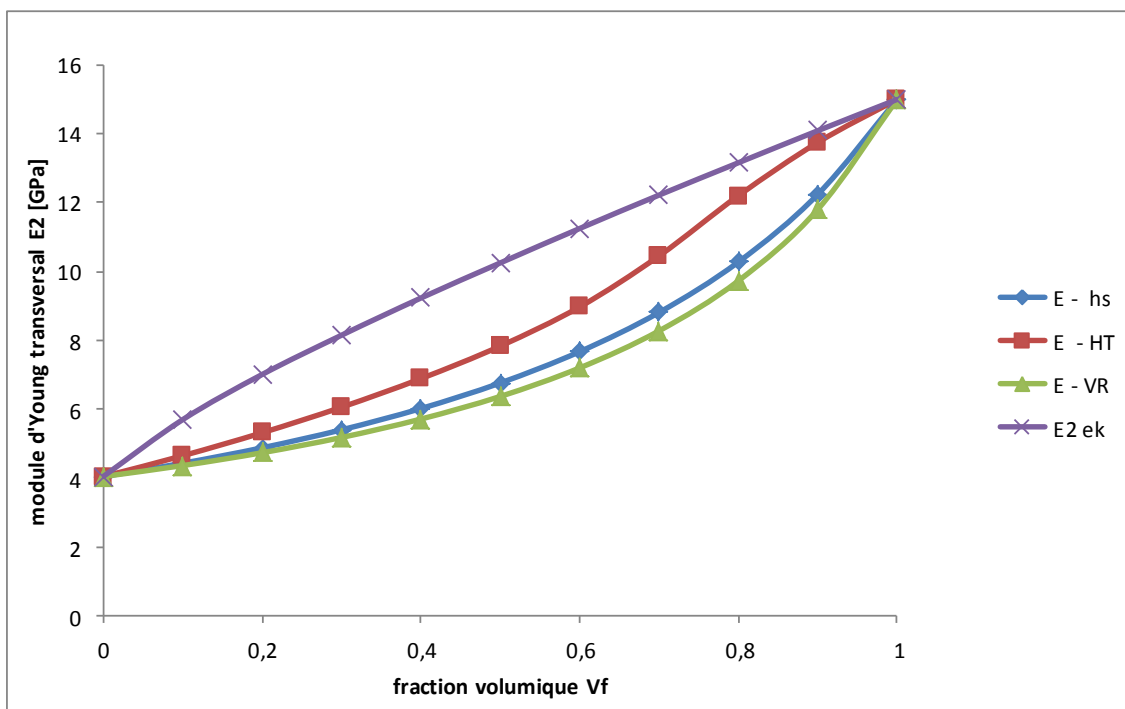


Figure 4-6 variations du module d'Young transversal E_2 du composite carbone/époxyde en fonction de V_f

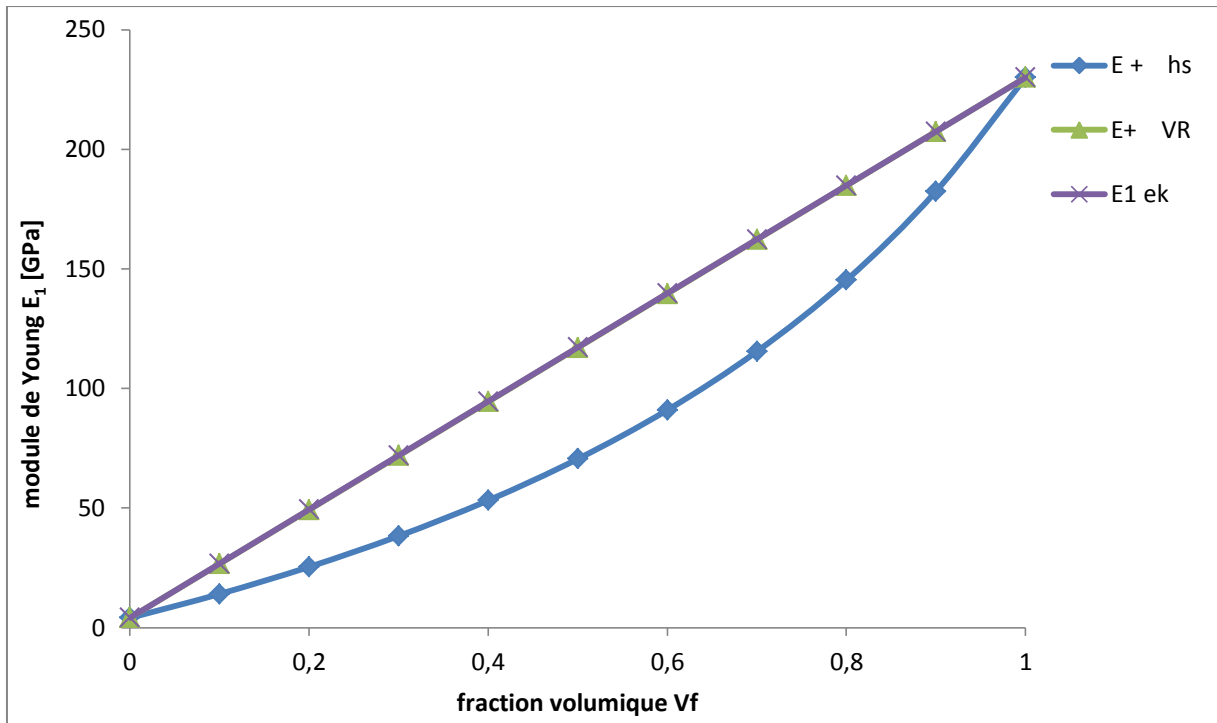


Figure 4-7 variations du module d'Young longitudinal E_1 du composite carbone/époxyde en fonction de V_f .

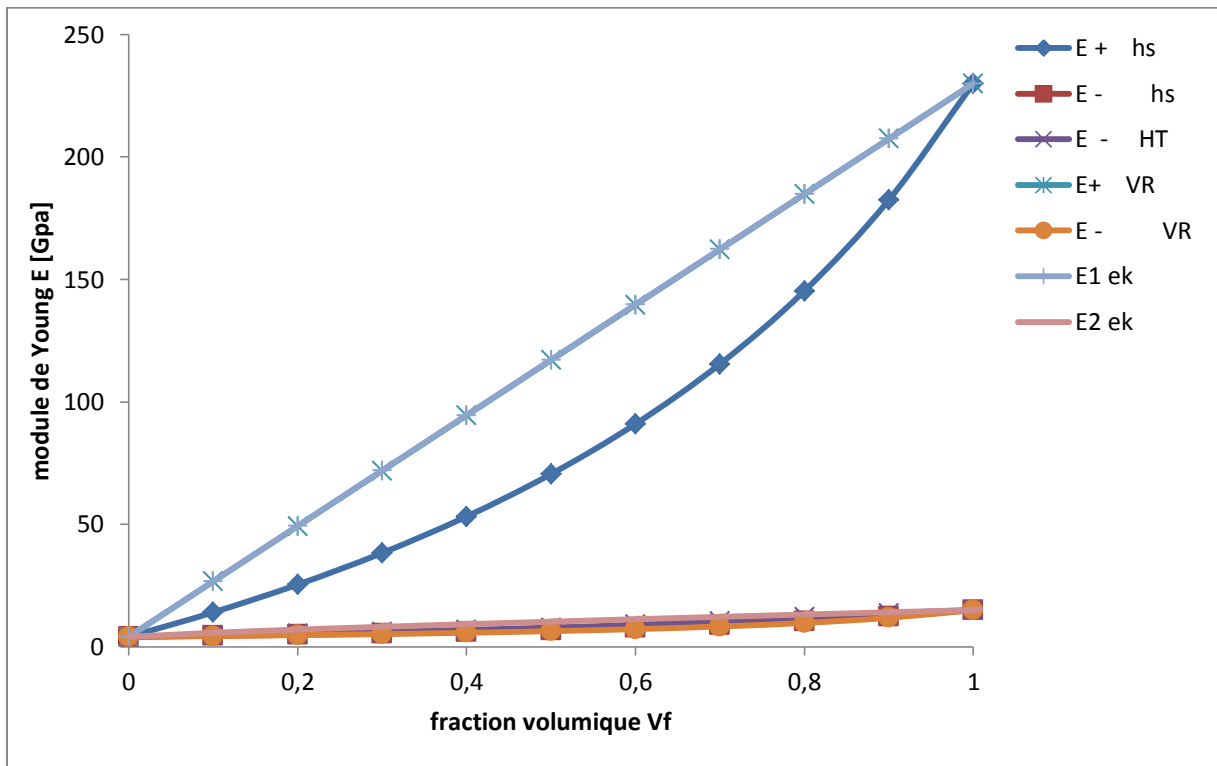


Figure 4-8 variations du module de Young E_1 et E_2 du composite carbone/époxyde pour différentes approches

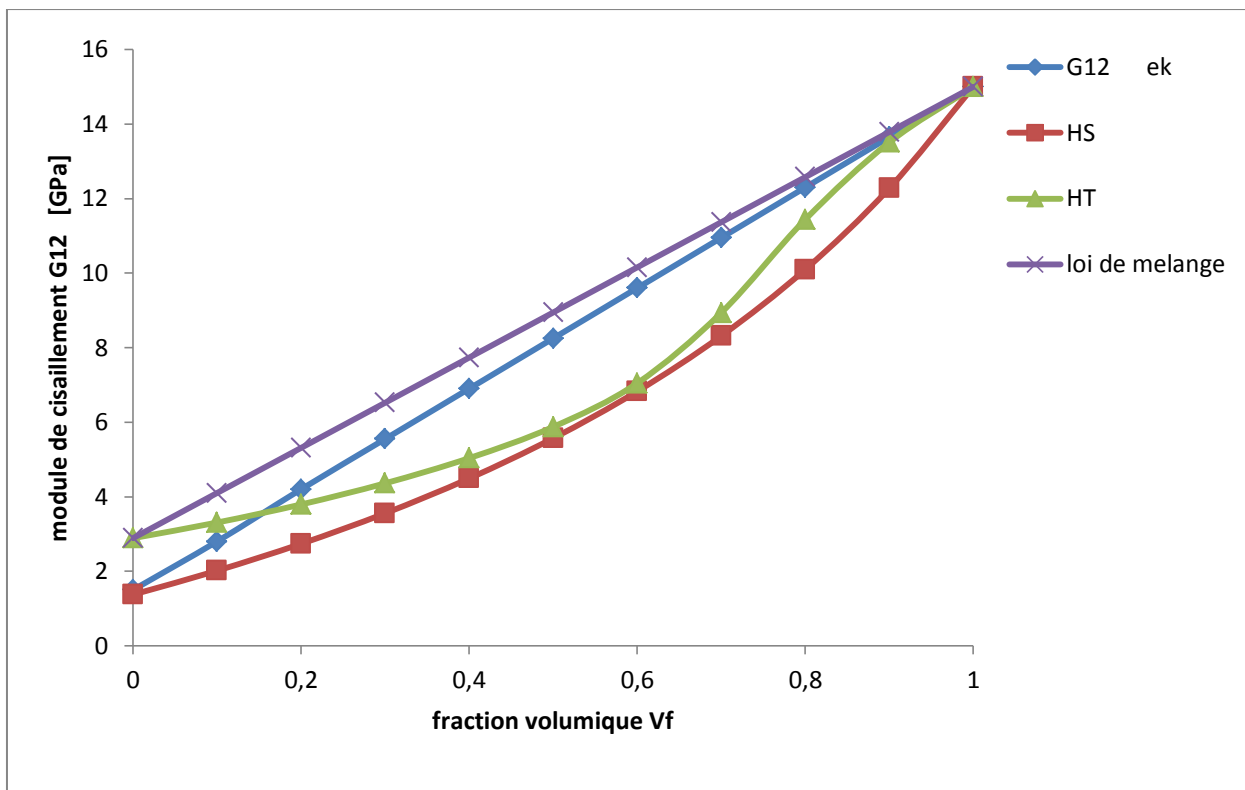


Figure 4-9 Evaluation du module de cisaillement G_{12} du composite carbone/époxyde en fonction de V_f pour différentes approches.

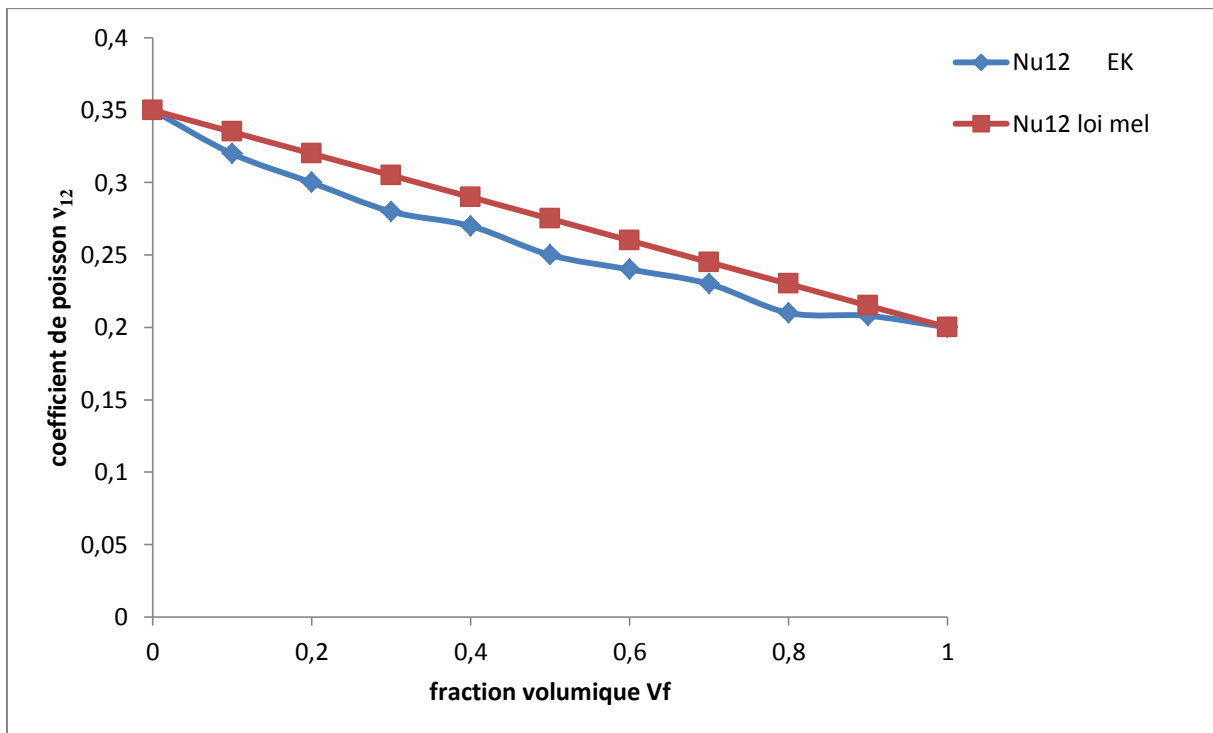


Figure 4-10 variation du coefficient de poisson ν_{12} du composite carbone/époxyde en fonction de V_f .

Les figures représentent respectivement la variation du module longitudinal E_1 , coefficient de poisson, module transversal E_2 et module de cisaillement G_{12} du matériau composite carbone/époxyde par rapport à la fraction volumique des fibres V_f par les différentes approches.

On remarque que les modèles Halpin-Tsai et la loi des mélanges et Hashin-Shtrikman donnent les mêmes résultats de variation du module d'Young longitudinal E_1 , et lors du calcul du coefficient de Poisson, les trois modèles : loi des mélanges et l'équation de Halpin-Tsai et Eshelby-Kroner on remarque pas une grande différence.

Pour le module d'élasticité transversal, on observe que les modèles de Halpin-Tsai et Hashin-Shtrikman et loi des mélanges sont très proches que le modèle d'Eshelby-Kroner, en revanche, la représentation du module de cisaillement entraine une approche très remarquée du modèle Halpin-Tsai et Hashin-Shtrikman et une divergence entre ces derniers modèles et la loi des mélanges et le modèle d'Eshelby Kroner.

4.4 Confrontation des modèles théoriques au les résultats expérimentaux

4.4.1 cas composite verre-E/époxyde

Les résultats expérimentaux obtenus des modules d'élasticité E_1 , E_2 , le coefficient de Poisson ν_{12} et le module de cisaillement G_{12} , d'une couche unidirectionnelle pour différentes fractions volumiques des fibres, sont représentés dans le tableau

	$V_f= 60\%$
E_1 (GPa)	46
E_2 (GPa)	10
G_{12} (GPa)	4.6
ν_{12} (GPa)	0.31

Tableau (3.1) Valeur des modules du composite unidirectionnel pour un taux de fibre $V_f= 60\%$

Module d'young E_1

	donnée estimée (GPa)	Erreur relative
Loi des mélanges	43,7049	4,98%
Hashin-shtrikman	33,9099	26,28%
Halpin-tsai	43,7049	4,98%

Module d'young E_2

	donnée estimée (GPa)	Erreur relative
Loi des mélanges	8,05405	19,45%
Hashin-shtrikman	12,0714	20,7%
Halpin-tsai	15,416	54,16%

Module de cisaillement G_{12}

	donnée estimée (GPa)	Erreur relative
Loi des mélanges	19,0615	/
Hashin-shtrikman	6,7181	46,04%
Halpin-tsai	4,72586	2,73%

4.4.2 cas composite carbone/époxyde

Les résultats expérimentaux obtenus des modules d'élasticité E_1 , E_2 , le coefficient de Poisson ν_{12} et le module de cisaillement G_{12} , d'une couche unidirectionnelle pour différentes fractions volumiques des fibres, sont représentés dans le tableau [Imen KALLEL-KAMOUN]

	Vf= 60%
E_1 (GPa)	159
E_2 (GPa)	14,3
G_{12} (GPa)	6
ν_{12} (GPa)	0.321

Tableau (3.2) Valeur des modules du composite unidirectionnel pour un taux de fibre Vf= 60%

Module d'young E_1

	donnée estimée (GPa)	Erreur relative
Loi des mélanges	139,618	12,18 %
Hashin-shtrikman	90,9541	42,7 %
Halpin-tsai	129,028	18,8 %
Eshelby-kroner	139,74	12,11 %

Module d'young E_2

	donnée estimée (GPa)	Erreur relative
Loi des mélanges	7,20007	49,6 %
Hashin-shtrikman	7,67151	46,3 %
Halpin-tsai	8,97168	37,2 %
Eshelby-kroner	11,25	21,3 %

Module de cisaillement G_{12}

	donnée estimée (GPa)	Erreur relative
Loi des mélanges	10,1557	69,16%
Hashin-shtrikman	6,82861	13,66%
Halpin-tsai	7,04658	17,43%
Eshelby-kroner	9,6	60%

4.5 Discussion des résultats

Les résultats numériques dépendent essentiellement de la modélisation du composite. Celle-ci ne permet pas de tenir compte de facteurs déterminants pour le comportement globale, comme la mauvaise distribution des fibres, leur variation de taille. de même l'interface suppose parfait occulte les phénomènes physico-chimiques et de microfissuration autour de la fibre.

Toutes ces restrictions doivent être présente a l'esprit lorsque l'on compare les resultats numériques et ceux obtenus par l'expérience

A travers les représentations de tous ces modèles, on peut conclure que ces derniers donnent des résultats identiques pour le module longitudinale et le coefficient de poisson et sont différents pour les module transversal et de cisaillement pour raison de l'anisotropie de la fibre non considérés dans l'étude théorique. Aussi, le modèle de Halpin-Tsai peut être

considéré comme étant très proche de la réalité car il prend en compte l'effet de certains facteurs de disposition du renfort. Par contre la méthode de loi des mélanges est moins proche et loin de la réalité.

La simple existence de différentes raideurs prédites pour les différents arrangements conduit à conclure que l'existence de diverses méthodes de mise en œuvre du matériau composite produira toujours des variations dans la géométrie de l'arrangement des fibres et donc en modules des composites. Ainsi, nous ne pouvons pas espérer prédire des constantes élastiques des matériaux composites précises car il y a toujours nécessité à des approximations tant que les équations de Halpin-Tsai ne pouvaient pas satisfaire à toutes les exigences de la pratique.

Les valeurs numériques obtenues, comparées aux valeurs expérimentales montrent que :

- le *module d'Young longitudinal* E_1 est bien décrit par la loi des mélanges, pour l'ensemble des fibres;
- le *module de cisaillement longitudinal* G_{12} est bien décrit par la loi des mélanges
- le *module d'Young transverse* E_2 est assez bien approché par la relation Halpin-Tsai, pour les fibres de verres et de carbonées, bien que les valeurs calculées sous-estiment les valeurs expérimentales lorsque le module d'Young des fibres augmente (verre, carbonées).

Par contre, les valeurs expérimentales, obtenues pour le module de cisaillement G_{12} et le module d'Young transverse E_2 des composites à fibres, sont très nettement inférieures aux valeurs théoriques. Ces faibles valeurs peuvent être attribuées à :

- une mauvaise adhérence des fibres avec les résines,
- de mauvaises propriétés en compression et cisaillement des fibres .

Les valeurs théoriques trouvées par les approches simplifiées pour le module d'Young transversal E_2 et le module de cisaillement G_{12} donnent des valeurs trop faibles. Ce fait est la conséquence du rôle trop important accordé à la matrice dans ces approches simplifiées.

Conclusion générale

Les matériaux composites sont actuellement très utilisés dans l'industrie et particulièrement dans les domaines aérospatial et aéronautique, où les gains de masse sur structures sont stratégiques, et dans le domaine du sport, du génie civil, du domaine naval, du secteur automobile, du domaine éolien (principal consommateur actuel de fibres de carbone) et du domaine pétrolier off-shore (réalisation de risers composites).

Si on souhaite comprendre les phénomènes physiques au sein de la microstructure l'analyse doit être réalisée à une échelle qui le permette : celle de la microstructure. Dans ce contexte, au procédé d'homogénéisation dont le but est de fournir le comportement du matériau équivalent au matériau hétérogène étudié.

La procédure d'homogénéisation nécessite de définir des lois de localisations reliant les champs macroscopiques aux champs locaux.

Dans le cadre de l'élasticité linéaire, les approximations de Voigt et de Reuss et Halpin-Tsai Hashin-Shtrikman et Eshelby-Kroner permettent une estimation de ces champs locaux moyennant une hypothèse forte en ce qui concerne le caractère hétérogène de la déformation ou la contrainte.

Les approches de Voigt et Reuss, si elles ont l'avantage d'être simples, ne fournissent généralement pas une description satisfaisante du comportement d'un matériau hétérogène. En effet, l'approximation de Voigt a tendance à surestimer la rigidité du matériau homogène équivalent tandis que l'approche de Reuss conduit à une sous-estimation. D'autres approches telles que : Halpin-Tsai, Hashin-Shtrikman et Eshelby-Kroner ont donc été proposées afin d'obtenir des descriptions plus réalistes du comportement des matériaux hétérogènes.

Pour le modèle d'Halpin-Tsai, si la simplicité des relations est effectivement séduisante, l'application à la conception et en effet que théorique en effet la difficulté d'utilisation de la relation réside dans la détermination des valeurs appropriées de ξ , les valeurs de ce facteur ne peuvent être déterminées que par comparaison avec une solution analytique ou par ajustement avec les courbes expérimentales.

L'usage d'équations implicites (modèle auto-cohérent d'Eshelby et Kröner) nécessite une résolution par des méthodes itératives, ce qui se traduit par un recours à des ressources processeur plus importantes, ainsi qu'à des temps de calcul plus longs que la mise en œuvre d'équations analytiques explicites (modèle de Hashin-Shtrikman) similaires.

Une partie, des travaux de ce mémoire a été focalisée sur l'établissement de relations analytiques fiables, permettant de procéder à la prédiction des propriétés élastiques de plis composites unidirectionnels (i.e. leur tenseur de raideur élastique).

Les formes analytiques de Hashin-Shtrikman ont été comparées au modèle numérique auto-cohérent de Kröner-Eshelby, le gain de temps réalisé par le modèle analytique de Hashin-Shtrikman est significatif. Une très bonne concordance a été obtenue entre les deux modèles pour n'importe quelle composante du tenseur de raideur.