

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
جامعة عمّار ثليجي بالأغواط  
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT  
كلية العلوم  
FACULTE DES SCIENCES  
DEPARTEMENT Sciences de la Matière



## ***Mémoire de Master***

**Domaine : Sciences de la matière**

**Filière : physique**

**Option : physique appliquée**

**Par :**

Nadjat ben mebark

### **THEME**

---

***Thermodynamique des systèmes classique  
dans un espace non commutative***

---

*Soutenu publiquement le 17/09/2020 ; devant le jury composé de :*

**Maabed Said**

**Souleh Kouidre**

**Bourega abdeldjabar**

**Seffai Djamel**

**MAA**

**MAA**

**MCB**

**MAA**

**Président**

**Examineur**

**Rapporteur**

**Co-Rapporteur**

**Année Universitaire 2019- 2020**

# REMERCIEMENTS

*Nous tenons tout d'abord à remercier Allah, notre créateur de nous avoir donné les forces, la volonté et le courage afin d'accomplir ce modeste travail.*

*Nous remercions l'ensemble des enseignants, qui nous ont apporté leur aide et qui ont permis grâce à leur contribution à l'élaboration de ce mémoire.*

*Nous remercions en particulier notre encadreur Seffaïdjamel, pour nous avoir honorés de son aide dans la direction de ce travail, pour sa confiance et ses conseils ainsi que ses motivations qui ont été pour nous un précieux encouragement.*

*Ainsi pour l'inspiration, Souleh Kouïdre et Maabed Saïd et Bourega Abdeldjabar aux membres de jury .*

*Nos plus vifs remerciements s'adressent aussi à tout le cadre administratif Université Amar Telidji , "Département Sciences de la Matière", Ainsi que .....*

*Nadjet Ben  
Mebarek*



## Sommaire

Introduction	03
<b>Chapitre I: Eléments de physique statistique classique</b>	
I.1 Introduction	06
I.2 Espace des phases Micro états et macro états	07
I.3 Notion d'ensemble statistique	09
I.3.1 L'ensemble micro canonique	10
I.3.2 L'ensemble canonique et grand- canonique	10
I.4 L'entropie et la Probabilité d'un état	10
I.5 Fonction de partition les grandeur thermodynamiques	12
I.5.1 Energie interne	12
I.5.2 La pression	13
I.5.3 La capacite calorifique	14
I.5.4 L'entropie	15
I.5.5 L'énergie libre	16
I.5.6 Potentiel chimique	17
<b>Chapitre II : Géométrie non commutatif</b>	
II.1 La géométrie non commutative	19
II.1.1 Espace-temps non commutatif	20
II.1.2 l'espace des phases non commutatif	20
II.2 La quantification de Weyl et le produit de Moyal	21
II.2.1 La quantification de Weyl	21
II.2.2 Le produit de Moyal (Produit star)	21
II.2.3 Les propriétés du produit star (produit de Moyal)	24
II.3 Le décalage de Bopp	26
II.3.1 dans l'espace-temps non commutatif	26
II.3.2 dans l'espace des phases non commutatif	27
<b>Chapitre III : Propriétés thermodynamiques des systèmes classiques</b>	
III-0 introduction	29
III.1 La relation d'incertitude dans l'espace de phase NC	29
III.2 Fonction de partition classique sur l'espace de phase NC	31
III.3 Gaz classique parfait dans l'espace de phase NC	33
III.4 Gaz relativiste extrême sur l'espace de phase NC	35
III.5 Oscillateur harmonique tridimensionnel dans l'espace de phase NC	35
Conclusion générale	39
Référence	41

# **Introduction**

### **Introduction:**

A la dernière période l'étude mathématique des modèles de la mécanique statistique à l'approche de l'équilibre ou hors équilibre s'est particulièrement développée et commence à dégager quelques principes généraux qui déterminent la physique de tels systèmes et permettent de mieux comprendre comment les lois macroscopiques de la physique des milieux continus surgissent de la description microscopique.

Les modèles mathématiques simplifiés servent aussi pour élucider le comportement des systèmes loin de l'équilibre, sujet important de la physique théorique (les matériaux amorphes et leur vieillissement, les milieux granulaires, fractures, la matière molle) ainsi que la turbulence hydrodynamique. Ces sujets promettent de devenir des sources importantes de problèmes pour la physique mathématique.

Au cours des dernières années, l'utilisation de l'espace non commutatif (NC) dans l'étude des phénomènes physiques a suscité un intérêt croissant, car les effets du non-commutativité spatiale peuvent devenir significatifs dans des conditions extrêmes, comme dans le cas des énergies supérieures à l'échelle TeV, ou même à l'échelle des cordes. Un nombre important de travaux a été consacré à l'étude de divers aspects de la théorie quantique des champs et de la mécanique quantique sur les espaces NC, où les coordonnées spatiales ne sont pas commutantes les unes avec les autres, mais les moments son commutatifs. C.-à-d, dans l'espace de phase NC, les relations de commutativité « espace-espace » et « moment-moment » sont inévitables (voir références [1-10]).

L'étude de la mécanique quantique dans l'espace non commutative peut être réalisée via à le produit Moyal sur l'espace de l'ordinaire, ou redéfinir la fonction de répartition sur un espace non-commutatif et sur un espace des phases non-commutatif [11-12].

Pour avoir les effets non-commutatifs sur les phénomènes naturels les chercheur sont utiliser des simples systèmes, par exemple l'atome d'hydrogène [13, 14, 15], dans ces dernière travaux la non-commutativité joue un rôle de spin.

Les statistiques de Bose-Einstein de la mécanique quantique non commutative nécessitent à la fois la non commutativité des relations espace-espace et moment-moment [16, 17].

## *Introduction*

---

Dans le cadre de la non-commutativité, la situation de la mécanique statistique est plus compliquée pour l'objectif de généralisation des modèles mathématiques pour élucider le comportement de la géométrie non-commutative aux systèmes statistiques. En conséquence, la plupart des résultats disponibles sont basés sur l'espace des phases ordinaire [18-19]. Cela implique qu'un système physique simple, dans l'espace commutatif peut être changé la notion du état quantique pour une particule dans l'espace des phases [20].

Nous considérons dans ce mémoire l'application directe des principes de la physique statistique au cas du gaz parfait, c'est-à-dire un ensemble de molécules dont on néglige les interactions et que l'on traite en mécanique classique. Nous avons avoir rappelé quelques propriétés thermodynamiques valables dans le cadre de l'espace ordinaire, et en chercher une reformulation de la fonction de partition dans l'espace non commutative qui va jouer un rôle similaire en mécanique statistique, elle permet de calculer toutes les grandeurs thermodynamiques. Parmi les méthodes étaient proposées par les physiciens pour traiter les systèmes statistiques Par exemple [20]. Cette dernière article est présentons les relations d'incertitude dans l'espace de phase non commutative pour déduire une nouvelle déformation sur la fonction de partition classique dans l'espace de phase non commutative. C'est l'objectif de notre travail.

Ce mémoire est organisé à trois chapitres comme suit:

Dans le premier chapitre, on a exposé quelques définitions nécessaires dans la formulation de la théorie de la mécanique statistique classique et les principes fondamentaux. Puis, on a écrit La fonction de partition micro canonique, et les grandeurs. Le deuxième chapitre est consacré à la présentation l'algèbre de l'espace non commutatif, la quantification de Weyl et le produit star en quelques lignes puis nous allons définir le décalage de Bopp et leur généralisation sur l'espace des phases non commutative ; le troisième chapitre, est réservée est consacré à l'objectif de cette mémoire, nous avons étudié la formulation de la mécanique statistique classique dans l'espace commutatif [20], nous présentons les relations d'incertitude dans l'espace de phase NC et travaillons sur la déformation NC de la constante de Planck, ce qui conduit à une fonction de partition classique sans dimensions. en supposant l'existence d'une structure symplectique compatible avec les règles de commutation, la fonction de partition classique correspondante est dérivée. puis, en étude trois exemples concrets sont présentés : le gaz parfait classique, le gaz relativiste extrême et l'oscillateur harmonique classique dans un espace de phase NC tridimensionnelle, et les nouvelles caractéristiques qui se présentent sont discutées.

# **Chapitre I: Elements de Physique statistique Classique**

# Chapitre I: Eléments de physique statistique classique

## I.1 Introduction

La physique statistique est la science du passage entre deux mondes : le microscopique (l'infiniment petit) et le macroscopique (l'échelle humaine). Son objectif n'est ni l'étude du microscopique (domaine par exemple de la physique nucléaire, atomique et subatomique), ni la caractérisation du comportement de telle catégorie de systèmes macroscopiques (tache dévolue par exemple à la thermodynamique, à la mécanique du solide, des fluides *etc.* . . ). Son objectif est la construction de méthodes permettant d'accéder aux propriétés macroscopiques de la matière à partir de sa description microscopique (nature des particules et leur interaction) [21].

L'objet générique d'étude de la physique statistique est le système à  $N$  corps où  $N$  est de l'ordre du nombre d'Avogadro. L'enjeu consiste donc, à partir de la connaissance microscopique de la nature des particules et de leur interaction, à déterminer les propriétés collectives de l'assemblée de  $N$  particules, problématique que l'on peut résumer par le schéma de la Fig. 1. [21].

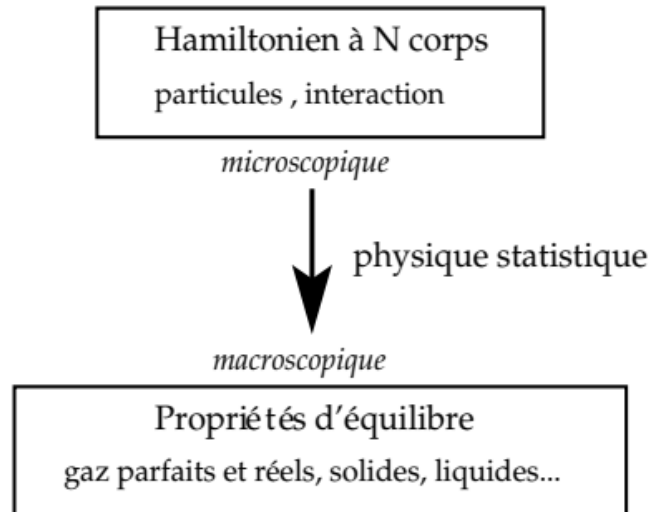


FIGURE 1 – Enjeu de la physique statistique.

## I.2. Espace des phases Micro états

L'évolution de chaque particule ponctuelle est décrite par six variables,  $x, y, z, v_x, v_y, v_z$ , composantes des vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{v}$ . L'espace formé par  $\{r, v\}$  est appelé espace des phases[24].

le principe d'incertitude de Heisenberg stipule que  $\Delta x$  et  $\Delta v_x$  ne peuvent être nulles et doivent vérifier l'inégalité [24]

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar \quad (\text{I.1})$$

En tenant compte de ces faits, une description statistique d'un système de particules se fait en divisant l'espace des phases en petits volumes ou cases, de dimensions  $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$ , de l'ordre de grandeur des incertitudes expérimentales. Les centres de ces cases peuvent être considérés comme les points représentatifs de l'espace des phases discrétisé[24] .

On appelle configuration une répartition donnée de particules dans les cases de l'espace des phases (au même instant) [24] .

On appelle micro état une configuration donnée de l'espace des phases dans laquelle on distingue les particules les unes des autres en les numérotant. Un micro état détermine complètement l'état du système à un instant donné, puisqu'il spécifie pour chaque particule sa position et sa vitesse à cet instant (avec les incertitudes  $\Delta x, \Delta v_x$ , etc.,) [24]

Un état quantique pour une particule dans un espace à une dimension occupe un volume  $\delta \Gamma = h$  de l'espace des phases. Ceci se généralise aisément à trois dimensions. Le volume occupé par un état est  $h^3$  [25] .

Un micro état  $m$  est donc un point dans un espace à  $6N$  dimensions, l'espace des phases. Et La distribution de probabilité est une fonction des variables de position et d'impulsion  $\mathcal{P}_m$  , et les valeurs moyennes des observables thermodynamiques[25] :

$$\langle O \rangle = \sum_m \mathcal{P}_m O_m \quad (\text{I.2})$$

Où  $O_m$  est la valeur que prend l'observable  $O$  dans l'état  $m$ [25] .

Cette correspondance pose immédiatement une difficulté : Comment compter les micro-états qui forment ici un continuum ? Comment transformer la somme discrète (1.2) sur un ensemble dénombrable d'états en une intégrale sur des variables continues ? [25]

$$\sum_m \dots \rightarrow C \int \prod_l dq_l dp_l \dots \tag{I.3}$$

Il faut pour ce là discrétiser l'espace des phases. Cette discrétisation était d'ailleurs un problème conceptuel à l'époque de Boltzmann, une difficulté de la physique statistique naissante avant la mécanique quantique. Quelle valeur attribuer à la constante  $C$  qui a les dimensions de l'inverse d'une action à la puissance  $3N$  ? La solution vint en effet de la mécanique quantique qui, à cause du principe d'indétermination

de Heisenberg, implique qu'un micro état ne peut être défini avec une résolution infiniment petite. On est ainsi amené à attribuer un volume fini  $h^{3N}$ , appelé "cellule de Planck", à chaque micro état, de sorte que (figure 2) [25]

$$C \rightarrow \frac{1}{h^{3N}}. \tag{I.4}$$

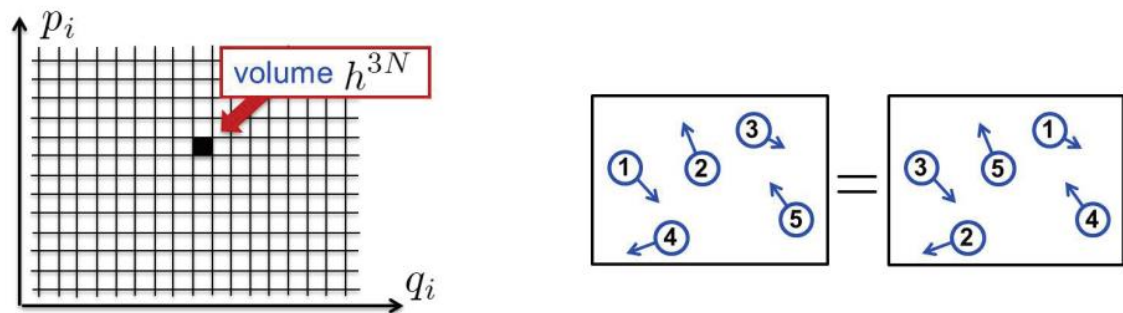


Figure 2 – À gauche : Discretisation de l'espace des phases. On attribue à chaque microétat  $(q_l, p_l)$  représenté par un point dans l'espace des phases, une cellule de volume fini  $h^{3N}$  appelée "cellule de Planck". À droite : Particules indiscernables : ces deux configurations où les particules ont été changées sont identiques. Il ne faut les compter qu'une fois.

Par ailleurs, pour un gaz de particules, deux micro états caractérisés par les mêmes positions et impulsions sont identiques si on échange les particules (figure 2.2). Comme il y a  $N!$  façons de permuer les particules et de reproduire le même micro état, celui-ci ne doit être compté qu'une fois. Par conséquent la contribution de chaque terme dans la somme doit être réduite d'un facteur  $N!$  et il faut donc prendre [25].

$$c \rightarrow \frac{1}{N!h^{3N}} \quad (\text{I.5})$$

On peut donc dénombrer le nombre d'états accessibles dans l'espace des phases en attribuant un volume élémentaire  $h^{3N}$  à chaque micro état et en ne comptant qu'une fois les états déduits les uns des autres par une permutation des particules. Finalement, il faut donc remplacer la somme discrète sur un ensemble dénombrable de ces micro états par l'intégrale[25]

$$\sum_m \dots \rightarrow c \rightarrow \frac{1}{N!h^{3N}} \int \prod_l d_{ql} d_{pl} \dots \quad (\text{I.6})$$

### I.3. Notion d'ensemble statistique

A l'équilibre thermodynamique, les grandeurs thermodynamiques - c'est-à-dire les quantités macroscopiques moyennes - ont une valeur stationnaire. L'ensemble de ces valeurs détermine l'état d'équilibre du système. Du point de vue microscopique, la dynamique n'est pas stoppée et le système est le lieu de transitions entre les différents états microscopiques possibles. Ces états ne sont donc pas rigoureusement états propres du hamiltonien du système à cause par exemple de fluctuations résiduelles parce que le système n'est pas parfaitement isolé, etc... Pour un temps suffisamment long le système va explorer tous les états microscopiques accessibles. Considérons, à un instant donné, un ensemble de répliques du système qui sont dans tous les états microscopiques accessibles. L'hypothèse ergodique implique que la moyenne d'une observable sur l'ensemble des répliques et la même que la valeur moyenne temporelle sur un système donné. L'ensemble des répliques du système qui sont décrites par les mêmes grandeurs thermodynamiques mais par des états microscopiques différents est appelé ensemble statistique. Suivant les contraintes appliquées au système on définit

différents ensembles statistiques. Nous résumons ci-dessous les propriétés des ensembles les plus utiles[22].

### I.3.1 L'ensemble micro canonique

L'ensemble micro canonique est utilisé pour décrire un système isolé. Son énergie  $E$  est donc fixée à une quantité  $\delta E$  près. L'origine de cette incertitude vient du fait qu'il n'est pas possible de déterminer expérimentalement l'énergie d'un système macroscopique avec une précision arbitraire. De plus, l'hypothèse du système isolé est impossible à réaliser rigoureusement et l'énergie n'est donc pas rigoureusement constante. La probabilité de trouver un tel système dans un état microscopique donné avec une énergie  $E$  à  $\delta E$  près est indépendante de cet état. Tous les états microscopiques sont équiprobables[22].

### I.3.2 L'ensemble canonique et grand- canonique

L'ensemble canonique permet de décrire un système à l'équilibre avec un thermostat à la température  $T$ . Le volume  $V$  et le nombre de particules  $N$  du système sont fixés. Son énergie est fixée seulement en valeur moyenne. La probabilité  $\mathcal{P}_\ell$  que le système soit dans un état microscopique d'énergie  $E_\ell$  est donnée par[22]:

$$P_\ell = \frac{1}{Z_C} e^{-\frac{E_\ell}{k_B T}} \quad \text{avec} \quad Z_C(T, V, N) = \sum_\ell e^{-\frac{E_\ell}{k_B T}} \quad (\text{I.7})$$

Dans l'ensemble grand-canonique, le volume est fixé. L'énergie et le nombre de particules sont fixés seulement en valeur moyenne. Le système est en contact avec un thermostat qui fixe sa température à  $T$ . Son potentiel chimique  $\mu$  est fixé par contact avec un réservoir de particules. La probabilité  $\mathcal{P}_\ell$  d'obtenir un état microscopique d'énergie  $E_\ell$  et avec un nombre de particule  $N_\ell$  est donnée par [22]:

$$P_\ell = \frac{1}{Z_G} e^{-\frac{(E_\ell - \mu N_\ell)}{k_B T}} \quad \text{avec} \quad Z_G(T, V, \mu) = \sum_\ell e^{-\frac{(E_\ell - \mu N_\ell)}{k_B T}} \quad (\text{I.8})$$

A la limite thermodynamique ( $N \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty$ , et  $N/V = cte$ ), où les fluctuations deviennent négligeables, les résultats calculés avec les trois ensembles coïncident.

## I.4. L'entropie et la Probabilité d'un état

L'entropie notée  $S$  est une quantité introduite en 1850 par Clausius pour expliquer le fonctionnement des machines à vapeur et expliquer pourquoi spontanément la chaleur passe des corps chauds vers les corps froids. C'est une quantité **extensive** qui n'est

définie qu'à l'équilibre thermodynamique. On peut l'écrire comme une **fonction des autres paramètres extensifs** du système. Par exemple, pour un corps pur[23]:  

$$S = S(E, N, V). \quad (I.9)$$

Pour un mélange de  $k$  espèces,  $S$  dépend de  $N_1, \dots, N_K$ . La connaissance de la fonction  $S(E, N, V)$  pour un système donné permet de retrouver toutes les quantités thermodynamiques de ce système.

La probabilité d'obtenir le système (S) dans l'état (r) d'énergie  $E_r$ , qui est en contact avec le thermostat (t) d'énergie (E), étant donné que l'énergie globale des deux systèmes égale à  $E_0 = E_r + E_T$  vaut [26] :

$$P_r(E_r) = \frac{\Omega_s(E_r) \Omega_t(E_0 - E_r)}{\Omega_{tot}} \quad (I.10)$$

Avec  $\Omega_s(E_r)$  : le nombre d'états microscopiques accessibles correspondant à l'état macroscopique où le système (s) a une énergie  $E_r$ .

$\Omega_s(E_0 + E_r)$  : le nombre d'états microscopiques correspondant à l'état macroscopique où le thermostat a une énergie  $E_t = E_0 + E_r$ .

$\Omega_{tot}$  : est une constante égale au nombre total de microétats accessibles du système total (s+t) correspondant à un état macroscopique donné.

La probabilité  $P_r$  est déduite pour le cas où  $\Omega_s(E_r)=1$  (*C'est la distribution canonique*), alors la relation (I.10) devient :

$$P_r(E_r) = P_r(E_r) = \frac{\Omega_t(E_0 - E_r)}{\Omega_{tot}} \quad (I.11)$$

$$\text{mai } \Omega_{tot} = \sum_r \Omega_t(E_0 - E_r) \quad (I.12)$$

Donc :

$$P_r(E_r) = \frac{\Omega_t(E_0 - E_r)}{\sum_r \Omega_t(E_0 - E_r)} \quad (I.13)$$

La distribution de probabilité doit être normalisée :

$$\sum_r P_r(E_r) = 1 \quad (I.14)$$

comme le thermostat (t) à un nombre de degré de liberté beaucoup plus grand que le système (S) on a :  $(E_r \ll E_t)$  et  $(E_r \ll E_0)$ .

Ceci va nous permettre de développer  $\ln \Omega_t(E_0 - E_r)$  au voisinage de  $E_0$ , en se limitant au premier ordre, on obtient:

$$\ln(\Omega_t(E_0 - E_r)) = \ln(\Omega_t(E_0)) - \left(\frac{\partial \ln \Omega_t}{\partial E}\right)_{E=E_0} E_r + \dots \quad (I.15)$$

L'entropie statistique est donc le logarithme du nombre d'états accessibles au système. Or plus  $\Omega_t$  est élevé, plus l'incertitude sur le système étudié est grande. On dit parfois que S est une mesure du DÉSORDRE. L'entropie thermodynamique S est définie comme une énergie divisée par une température et est donc mesurée en Joule/Kelvin. On pose alors :

$$S = K_B \ln \Omega_t \quad (\text{I.16})$$

Par l'utilisation de la relation thermodynamique de la dérivée partielle de l'entropie (S) par rapport à l'énergie (E) est:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{N,V} = \frac{1}{T} \quad (\text{I.17})$$

et d'après la relation (I.16) de l'entropie (S), l'expression (I.17) devient :

$$\left(\frac{\partial K_B \ln \Omega_t}{\partial E}\right)_{N,V} = \frac{1}{T}$$

On obtient le résultat suivant :

$$\left(\frac{\partial \ln \Omega_t}{\partial E}\right)_{N,V} = \frac{1}{K_B T} = \beta \quad (\text{I.18})$$

Introduisant la relation (I.18) dans (I.15), on a donc:

$$\ln(\Omega_t(E_0 - E_r)) = \ln(\Omega_t(E_0)) - \beta E_r$$

Soit

$$\Omega_t(E_0 - E_r) = \Omega_t(E_0) e^{-\beta E_r} \quad (\text{I.19})$$

Remplaçant la relation (I.19) dans (I.13), on obtient:

$$P_r(E_r) = \frac{\Omega_t(E_0) e^{-\beta E_r}}{\sum_r \Omega_t(E_0) e^{-\beta E_r}} \quad (\text{I.20})$$

Mais  $\Omega_t(E_0) = \text{constante} = c$ , alors l'expression (I.20) peut être écrite sous la forme:

$$P_r(E_r) = \frac{e^{-\beta E_r}}{\sum_r e^{-\beta E_r}} \quad (\text{I.21})$$

Cette expression représente la Distribution Canonique

### I.5 Fonction de partition les grandeur thermodynamiques

La fonction de partition micro canonique, représente le nombre de tous de tous les micro-états accessibles du système considéré. En physique statistique on appelle la

quantité  $\sum$  au dénominateur dans l'expression de la fonction de partition du système , elle est donnée par [26]:

$$Z = \sum_r e^{-\beta E_r} \quad (I.22)$$

La connaissance de la fonction de partition  $Z$  est essentielle :elle permet de calculer toutes les grandeur thermodynamiques.

### I.5.1 Energie interne :

L'énergie libre est maintenant une fonction des états du système et de la température  $T$ , imposée par le thermostat. Pour un volume  $V$ , et nombre  $N$  de particules constants ( $V$  et  $N$  constants), l'énergie interne est la valeur moyenne de l'énergie sur l'ensemble canonique, avec la probabilité d'obtenir l'énergie , alors l'expression de l'énergie moyenne est donnée par[26]:

$$\bar{E} = \langle E \rangle = \sum_r E_r P_r(E_r) = \sum_r E_r \left( \frac{e^{-\beta E_r}}{Z} \right) = \frac{\sum_r E_r e^{-\beta E_r}}{Z} \quad (I.23)$$

On a:

$$-\left( \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_{N,V} = -\frac{1}{Z} \left( \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)_{N,V} = \frac{\frac{\partial}{\partial \beta} \sum_r e^{-\beta E_r}}{\sum_r e^{-\beta E_r}} = \frac{\sum_r E_r e^{-\beta E_r}}{Z} \quad (I.24)$$

De (I.23) et (I.25) on obtient :

$$\langle E \rangle = -\left( \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_{N,V} \quad (I.25)$$

Et comme  $\frac{1}{k_t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \beta} = -K_B T^2 \frac{\partial}{\partial T}$ , la relation (I.25) devient :

$$\langle E \rangle = K_B T^2 \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_{N,V} \quad (I.26)$$

### I.5.2 La pression :

Nous travaillons maintenant à  $T$  et  $N$  constants et supposons que le volume du système change de manière quasi-statique de  $V$  à la valeur  $V+dV$ , cette situation entraîne une modification des niveaux d'énergie , la pression est donnée par [26]:

$$P = -\left( \frac{\partial E_r}{\partial V} \right)_{\beta, N} \quad (I.26)$$

La pression mesurée est la valeur moyenne de toutes les valeurs des pressions  $P_r$  prise sur l'ensemble canonique, on écrit alors :

$$\bar{P} = \langle P \rangle = \sum_r P_r(E_r) P \quad (I.27)$$

Et comme  $P_r(E_r) = \frac{e^{-\beta E_r}}{Z}$  et  $P = -\left( \frac{\partial E_r}{\partial V} \right)_{\beta, N}$ , la relation (I.27) devient :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{Z} \sum_r \left( -\frac{\partial E_r}{\partial V} \right)_{\beta, N} e^{-\beta E_r} \quad (\text{I.28})$$

On remarque que:

$$\left( \frac{\partial e^{-\beta E_r}}{\partial V} \right)_{\beta, N} = -\beta \left( \frac{\partial E_r}{\partial V} \right)_{\beta, N} e^{-\beta E_r}$$

La relation (I.28) devient :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{\beta Z} \sum_r \left( \frac{\partial e^{-\beta E_r}}{\partial V} \right)_{\beta} = \frac{1}{\beta Z} \left( \frac{\partial (\sum_r e^{-\beta E_r})}{\partial V} \right)_{\beta, N} = \frac{1}{\beta Z} \left( \frac{\partial Z}{\partial V} \right)_{\beta, N}$$

Soit :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{\beta Z} \left( \frac{\partial Z}{\partial V} \right)_{\beta, N} = \frac{1}{\beta} \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_{\beta, N} = K_B T \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_{T, N} \quad (\text{I.29})$$

### I.5.3 Capacité calorifique :

$\frac{\delta \langle E \rangle}{\delta T}$  représente l'accroissement de l'énergie  $\delta \langle E \rangle$  du système, lorsqu'on augmente la température du système, les autres paramètres (niveaux d'énergie) restant constants. Dans le cas d'un gaz, on a vu que les niveaux d'énergie sont déterminés par le volume offert au gaz, donc  $\frac{\delta \langle E \rangle}{\delta T}$  est appelé en thermodynamique classique : chaleur spécifique à volume constant  $C_v$ . Il est facile de voir qu'elle est proportionnelle à la taille du système  $S$ , car  $E$  est une grandeur extensive.

La capacité calorifique à volume et nombres de particule constants ( $V$  et  $N$  constants) égale à [26]:

$$C_v = \left( \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} \right)_{N, V} \quad (\text{I.30})$$

Introduisons l'expression (I.25) de l'énergie moyenne dans (I.30):

$$C_v = \frac{\partial}{\partial T} \left( -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_{N, V} \quad (\text{I.31})$$

Et comme  $\frac{\partial}{\partial T} = -\frac{1}{K_B T^2} \frac{\partial}{\partial \beta}$ , alors (I.31) devient :

$$C_v = -\frac{1}{K_B T^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_{N, V} = \frac{1}{K_B T^2} \left( \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} \right)_{N, V}$$

Finalement on a :

$$C_v = K_B \beta^2 \left( \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} \right)_{N, V} \quad (\text{I.32})$$

On peut calculer  $C_v$  à partir de l'écart type  $\Delta E$  associé à la grandeur  $E$ . La

variation  $(\Delta E)^2$  est définie par :  $(\Delta E)^2 = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$   
 on a :

$$\left(\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2}\right)_{N,V} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}\right)_{N,V} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}\right)_{N,V} = \frac{1}{Z^2} \left(\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right)_{N,V}^2 + \frac{1}{Z} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2}\right)_{N,V}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2}\right)_{N,V} = \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2}\right)_{N,V} - \left(\frac{1}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right)\right)_{N,V}^2 \quad (I.33)$$

Le premier terme de (I.33):

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} (\sum_r e^{-\beta E_r}) = \frac{\partial}{\partial \beta} (-\sum_r E_r e^{-\beta E_r}) = \sum_r E_r^2 \left(\frac{e^{-\beta E_r}}{Z}\right) \quad (I.34)$$

Comme  $P_r(E_r) = \frac{e^{-\beta E_r}}{Z}$  la relation (I.34) devient :

$$\left(\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2}\right)_{N,V} = \sum_r E_r^2 p_r(E_r) = \langle E^2 \rangle \quad (I.35)$$

ET comme  $\langle E \rangle = -\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}\right)_{N,V}$  le deuxième terme de (I.33) est :

$$-\left(\frac{1}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right)\right)_{N,V}^2 = -\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}\right)_{N,V}^2 = -\langle E \rangle^2 \quad (I.36)$$

Introduisons les deux termes « relations (I.35) et (I.36) » dans l'expression (I.33), on obtient:

$$\left(\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2}\right)_{N,V} = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = (\Delta E)^2$$

Mais  $C_v = K_B \beta^2 \left(\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2}\right)_{N,V}$ , alors on trouve l'expression de  $C_v$  en fonction de l'écart quadratique moyen de l'énergie  $(\Delta E)^2$ .

$$C_v = K_B \beta^2 (\Delta E)^2 \quad (I.37)$$

#### I.5.4 L'entropie :

Supposons que le nombre de particules est constant. Dans ce cas la fonction de partition dépend de deux variables T (ou  $\beta$ ) et V [26]:

$$Z = Z(\beta, V) = Z(T, V) \quad (I.38)$$

On a :

$$d \ln Z = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \ln Z}{\partial V} dV \quad (\text{I.39})$$

soit :

$$d \ln z = -\langle E \rangle d\beta + \beta \langle P \rangle dv \quad (\text{I.40})$$

Or :

$$d(\langle E \rangle \beta) = \langle E \rangle d\beta + \beta d\langle E \rangle \quad (\text{I.41})$$

l'addition de (I.40) et (I.41) donne :

$$d(\ln z + \langle E \rangle \beta) = \beta (d\langle E \rangle + \langle P \rangle dv) \quad (\text{I.42})$$

or :

$$d\langle E \rangle = T ds - \langle P \rangle dv \quad (\text{I.43})$$

D'où :

$$d(\ln Z + \langle E \rangle \beta) = \beta T ds = \frac{ds}{k_B}$$

après intégration, on obtient :

$$S = K_B (\ln Z + \beta \langle E \rangle) \quad (\text{I.44})$$

On choisit la constante d'intégration nulle car lorsque  $\beta \rightarrow \infty$ ,  $S \rightarrow K_B \ln g_0$ , où  $g_0$  est la dégénérescence de l'état fondamental (troisième principe de la thermodynamique)

### 5.5 L'énergie libre :

L'énergie libre joue un rôle très important car elle permet de décrire un système thermodynamique dont la température est fixée. appelée aussi énergie de Helmholtz, On peut écrire la relation (I.44) sous la forme [26]:

$$\langle E \rangle - TS = -K_B T \ln Z \quad (\text{I.45})$$

Le premier terme de (I.45) représente l'énergie libre, donc (I.45) devient :

$$Z = e^{-\frac{F}{K_B T}} \quad (\text{I.46})$$

On peut déduire :

$$F = -K_B T \ln Z \quad (\text{I.47})$$

C'est l'expression liant l'énergie libre et la fonction de partition. Cette relation est particulièrement simple, parce que en thermodynamique on sait que quand les variables indépendantes choisies sont  $T$ ,  $V$ , et  $N$ , l'énergie libre est la fonction d'état la plus appropriée pour traiter les problèmes. Dans notre cas de l'ensemble canonique, où nous avons les mêmes variables indépendantes, c'est la fonction de partition qui joue ce rôle.

**I.5.6 Potentiel chimique :**

Le potentiel chimique joue, du point de vue de l'échange des particules, un rôle exactement similaire au rôle de la température dans l'échange d'énergie : deux systèmes mis en contact, au sens où ils peuvent échanger des particules, voient leurs potentiels chimiques s'égaliser. Nous avons supposé dans la détermination de l'entropie et l'énergie libre que le nombre de particules  $N$  du système était constant. Supposons ici que  $N$  varie. Alors la différentielle de (I.47) donne[26] :

$$-d(K_B T \ln Z) = -K_B \left( \frac{\partial}{\partial T} T \ln Z \right)_{V,N} dT - K_B T \left( \frac{\partial}{\partial V} \ln Z \right)_{T,N} dV - K_B T \left( \frac{\partial}{\partial N} \ln Z \right)_{T,V} dN \quad (\text{I.48})$$

Or nous savons que :

$$dF = -d(K_B T \ln Z) = -S dT - P dV + \mu dN \quad (\text{I.49})$$

En identifiant (I.48) et (I.49), on retrouve :

$$S = -K_B \left( \frac{\partial T \ln Z}{\partial T} \right) = K_B \ln Z + K_B T \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_{V,N} = K_B (\ln Z + \beta \langle E \rangle) \quad (\text{I.50})$$

$$P = K_B T \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_{T,N} \quad (\text{I.51})$$

Finalement nous obtenons le potentiel chimique :

$$\mu = -K_B T \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial N} \right)_{T,V} = -\frac{1}{\beta} \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial N} \right)_{\beta,V} \quad (\text{I.52})$$

# Chapitre II : Géométrie Non Commutatif

## Chapitre II : Géométrie Non Commutatif

### II.1 La géométrie non-commutative:

Les théories physiques contemporaines – celles qui sont nées et se sont développées au XX<sup>e</sup> siècle – ont conduit à une géométrisation de plus en plus poussée de la physique. En contrepartie apparaît une physicalisation de plus en plus affirmée de la géométrie. C'est déjà le cas avec la théorie de la relativité générale, par exemple, où la géométrisation de la gravitation (les trajectoires des objets sont décrites comme des géodésiques) s'interprète aussi bien comme une physicalisation de l'espace-temps mathématique (la courbure de l'espace-temps est attribuée à la distribution d'énergie-impulsion). Ce l'est encore plus dans les théories quantiques des champs où l'introduction de champs de jauge non abéliens pour rendre compte des interactions quantiques ont conduit pour leur part au développement d'une géométrie elle-même non-commutative. Dès lors, si l'on considère l'épistémologie de l'espace-temps et que l'on accepte de voir dans les déterminations mathématiques de la géométrie le processus d'objectivation des formes de l'intuition que constituent l'espace et le temps phénoménaux, on doit aussi accepter d'aller plus loin, c'est-à-dire accepter que ces formes de l'intuition, comme ces déterminations mathématiques, se trouvent elles-mêmes investies en retour par les déterminations physiques des théories contemporaines.

La géométrie non commutative, développée par Alain Connes, est un type de géométrie algébrique distincte de la géométrie algébrique telle qu'on l'entend habituellement (celle développée par Alexandre Grothendieck), car s'intéressant à des objets non commutatifs.

L'idée principale est qu'un espace au sens de la géométrie usuelle peut être décrit par l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur cet espace. Cet ensemble de fonctions forme une algèbre associative sur un corps, qui est aussi commutative : le produit de deux fonctions ne dépend pas du choix d'un ordre. On peut alors songer à voir les algèbres associatives non commutatives comme des « algèbres de fonctions » sur des « espaces non commutatifs », comme le tore non commutatif.

### II.1.1 Espace-temps non commutatif

La mécanique quantique ordinaire est formulée sur les espaces commutatifs satisfaisant les relations de commutation suivantes [27]:

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$$

Afin de décrire un espace non commutatif, les relations de commutation ci-dessus devraient être changées comme :

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij} \quad (\text{II.2})$$

$$[\hat{p}_i, p_j] = 0$$

Où  $\theta_{ij}$  est une matrice antisymétrique, constante, appelée paramètres de la non commutativité.

### II.1.2 l'espace des phases non commutatif

Sur un espace des phases non commutatif, l'algèbre non commutatif peut être écrite comme suit [28,29] :

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \left( \delta_{ij} - \frac{1}{4} \theta_{ik} \bar{\theta}_{kj} \right)$$

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}\hbar \quad (\text{II.3})$$

$$[\hat{p}_i, p_j] = i\bar{\theta}_{ij}\hbar$$

Où  $\theta_{ij}$  est liée à la non commutativité des coordonnées de l'espace alors que  $\theta_{ij}$  reflète la non commutativité des moments, et les deux sont des matrices antisymétriques avec des éléments constants réels.

## II.2 La quantification de Weyl et le produit de Moyal

### II.2.1 La quantification de Weyl

Pour décrire la mécanique quantique à partir de l'espace de phase de la mécanique classique, la technique utilisée est la quantification de Weyl.

Dans le cadre de la procédure de la quantification canonique Hermann Weyl a donné une prescription comment associer un opérateur quantique à une fonction classique des variables canoniques (variable de l'espace de phase)

Cette prescription peut également être employée pour associer un élément de  $A_x$  avec une fonction  $F(x)$  des variables classiques  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ . Nous utilisons les opérateurs  $\hat{x}^i$  (sont des coordonnées de l'espace non commutatif) pour les éléments du et des pour les variables classique de permutation associative.

On utilise la transformation de Fourier [30,31]:

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int d^n x e^{-ik_i x^i} f(x) \quad (\text{II.4})$$

Remarque que si  $f(x)$  est une fonction réelle alors

$$\widetilde{f^*}(k) = \tilde{f}(-k)$$

La quantification de Weyl consiste à faire une correspondance biunivoque entre l'algèbre des fonctions  $f(x)$  définies sur  $\mathfrak{R}^D$  et l'algèbre des opérateurs. On définit le symbole de Weyl par :

$$\widehat{W}[f] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) e^{ik_i \hat{x}^i} \quad (\text{II.5})$$

où  $\tilde{f}(k)$  est la transformée de Fourier de  $f(x)$ . Si  $f(x)$  est fonction réelle alors l'opérateur de Weyl  $\widehat{W}[f]$  est hermitien .

$$\widehat{W}^+[f] = \widehat{W}[f] \quad (\text{II.6})$$

### II.2.2 Le produit de Moyal (Produit star)

Notre but est de trouver un produit (noté produit star  $*$ ) pour des fonctions (ordinaires) définies sur un espace de Minkowski qui permet au symbole de Weyl d'être un homomorphisme pour la multiplication. En d'autres termes on veut trouver un produit star tel que : Le produit de deux opérateurs de Weyl de deux fonctions soit égal à l'opérateur de Weyl associé au produit star de deux fonctions :

$$\widehat{W}[f]\widehat{W}[g] = \widehat{W}[f * g] \quad (\text{II.7})$$

En d'autres termes on a

$$(A, *) = (\hat{A}, \cdot) \quad (\text{II.8})$$

L'information sur la non commutativité de l'espace – temps est codée dans le produit star. En effet :

$$\begin{aligned} \widehat{W}[f]\widehat{W}[g] &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{g}(l) e^{il_\mu \hat{x}^\mu} \\ &= \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) \tilde{g}(l) e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{il_\mu \hat{x}^\mu} \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

En utilisant la formule de Baker – Campbell – Hausdorff

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A;B]}$$

Valable pour les opérateurs A et B tel que :

$$[A; [A; B]] = [B; [A; B]] = 0$$

On trouve :

$$\widehat{W}[f]\widehat{W}[g] = \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) \tilde{g}(l) e^{i(k_\mu + l_\mu) \hat{x}^\mu} e^{[-\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} k_\mu l_\nu]} \quad (\text{II.10})$$

En effectuant le changement de variable  $l = q - k$  alors :

$$\widehat{W}[f]\widehat{W}[g] = \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) \tilde{g}(q - k) e^{iq_\mu \hat{x}^\mu} e^{[-\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} k_\mu q_\nu]} \quad (\text{II.11})$$

Remarque que lors du changement de variable

$$\begin{aligned} \theta^{\mu\nu} k_\mu l_\nu &= \theta^{\mu\nu} k_\mu (q_\nu - k_\nu) \\ &= \theta^{\mu\nu} k_\mu q_\nu - \theta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu \\ &= \theta^{\mu\nu} k_\mu q_\nu - \frac{i}{2} [\theta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu + \theta^{\nu\mu} k_\mu k_\nu] \\ &= \theta^{\mu\nu} k_\mu q_\nu \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

D'autre part on peut écrire le second membre de l'équation (2.6) comme suit :

$$\widehat{W}[f * g] = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \overline{(f * g)}(q) e^{iq_\mu \hat{x}^\mu} \quad (\text{II.13})$$

Par identification on trouve que

$$\overline{(f * g)}(q) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) \tilde{g}(q - k) e^{\left[-\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} k_\mu q_\nu\right]} \quad (\text{II.14})$$

D'où le produit :

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \overline{(f * g)}(q) e^{(iq_\mu x^\mu)} \\ &= \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) \tilde{g}(q - k) e^{[iq_\mu x^\mu]} e^{\left[-\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} k_\mu q_\nu\right]} \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

On peut montre que ce produit\*, peut s'écrire sous la forme :

$$(f * g)(x) = e^{\left[-\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_\mu^\xi \partial_\nu^\eta\right]} f(x + \xi) g(x + \eta) \Big|_{\xi=\eta=0}$$

En effet :

$$f(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) e^{[ik_\mu x^\mu]}$$

$$g(x) = \int \frac{d^D P}{(2\pi)^D} \tilde{g}(P) e^{[iP_\nu x^\nu]}$$

$$\Rightarrow e^{\left[\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_\mu^\xi \partial_\nu^\eta\right]} f(x + \xi) g(x + \eta) \Big|_{\xi=\eta=0}$$

$$= e^{\left[\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_\mu^\xi \partial_\nu^\eta\right]} \left[ \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D P}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) \tilde{g}(P) e^{[ik_\mu (x + \xi)^\mu]} e^{[iP_\nu (x + \eta)^\nu]} \right]$$

$$= \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D P}{(2\pi)^D} e^{\left[\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} (ik_\mu)(iP_\nu)\right]} \tilde{f}(k) \tilde{g}(P) e^{[ik_\mu x^\mu]} e^{[iP_\nu x^\nu]}$$

On pose  $p_\mu = q_\mu - k_\mu$

$$= \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{\left[-\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} k_\mu q_\nu\right]} \tilde{f}(k) \tilde{g}(q - k) e^{[iq_\mu x^\mu]}$$

$$= (f * g)(x)$$

Donc :

$$(f * g)(x) = e^{\left[\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_\mu^\xi \partial_\nu^\eta\right]} f(x + \xi) g(x + \eta) \Big|_{\xi=\eta=0} \quad (\text{II.16})$$

**Notation :**

La quantité :  $e^{\left[-\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} k_\mu q_\nu\right]}$  est appelée le facteur de la phase non commutative

$$k \wedge q = \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} k_\mu q_\nu \quad (\text{II.17})$$

Une autre écriture du produit star est la suivante :

$$f(x) * g(x) = f(x) e^{\left[\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu\right]} g(x) \quad (\text{II.18})$$

On peut développer le produit star comme suit :

$$f * g = fg + \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_\mu f \partial_\nu g + 0(\theta^2)$$

$$f(x) * g(x) = f(x)g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{2} \frac{1}{n!} \theta^{\mu_1\nu_1} \dots \theta^{\mu_n\nu_n} \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_n} \dots f(x) \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_n} g(x) \quad (\text{II.19})$$

### II.2.3 Les propriétés du produit star (produit de Moyal)

Dans cette partie, nous récapitulons quelques identités utiles de l’algèbre de produit star.

1- Lorsque  $\theta = 0$  on trouve :

$$f(x) * g(x) = f(x)g(x) \quad (\text{II.20})$$

On retrouve donc le cas commutatif

2- le produit star entre exponentiels :

$$e^{ikx} * e^{iqx} = e^{i(k+q)x} e^{\frac{i}{2}(k \wedge q)}$$

$$k \wedge q = k^\mu q^\nu \theta_{\mu\nu} \quad (\text{II.21})$$

3- représentation de l’espace d’impulsion :

Soient  $f$  et  $g$ , trois fonctions arbitraires a partir de  $\mathbb{R}^4$

$$f(x) = \int \tilde{f}(k) e^{ikx} d^4k \quad g(x) = \int \tilde{g}(k) e^{ikx} d^4k$$

$$h(x) = \int \tilde{h}(k) e^{ikx} d^4k \quad (\text{II.22})$$

$\tilde{f}(k), \tilde{g}(k), \tilde{h}(k)$ , Les transformées du Fourier des fonctions  $f, g$  et  $h$  respectivement.

Alors en utilisant (2.20)

$$(f * g)(x) = \tilde{f}(k) \tilde{g}(q) e^{i(k\theta q)/2} e^{i(k+q)x} d^4k d^4q \quad (\text{II.23})$$

4- l’associativité :

En utilisant la propriété (2.22) on trouve:

$$[(f * g) * h](x) = \int \tilde{f}(k) \tilde{g}(q) \tilde{h}(p) e^{-\frac{i(k\theta q)}{2}} e^{-\frac{i[(k+q)\theta p]}{2}} e^{i(k+q+p)x} d^4k d^4q d^4p$$

$$[f * (g * h)](x) =$$

$$\int \tilde{f}(k) \tilde{g}(q) \tilde{h}(p) e^{-\frac{i(q\theta p)}{2}} e^{-\frac{i[(k\theta(q+p)]}{2}} e^{i(k+q+P)x} d^4 k d^4 q d^4 P \quad (\text{II.24})$$

Donc :

$$(f * g) * h = f * (g * h) \quad (\text{II.25})$$

5- produit star sous le signe intégral

$$\int (f * g)(x) d^4 x = \int (g * h)(x) d^4 x = \int (g \cdot h)(x) d^4 x \quad (\text{II.26})$$

En utilisant (2.22) nous pouvons immédiatement effectuer l'intégration sur  $x$  qui donnera un  $\delta^4(k + q)$

n raison de l'antisymétrie de  $\theta$ , l'exposant disparaît ainsi :

$$\int (f * g)(x) d^4 x = \int d^4 k \tilde{f}(k) \tilde{g}(\bar{\mp}k) = \int (f \cdot g)(x) d^4 x \quad (\text{II.27})$$

de (3.25) nous pouvons déduire la propriété cyclique :

$$\int (f_1 * f_2 * \dots * f_n)(x) d^4 x = \int (f_n * f_1 * \dots * f_{n\bar{\mp}1})(x) d^4 x \quad (\text{II.28})$$

6- La conjugaison complexe :

$$(f * g)^{cc} = g^{cc} * f^{cc} \quad (\text{II.29})$$

7- le produit star est non commutatif :

$$f * g \neq g * f \quad (\text{II.30})$$

Par contre [27]:

$$g * f = f * g|_{\theta \rightarrow -\theta} \text{ Et aussi } \{f, g\}_{M,B} = f * g|_{\theta} - f * g|_{-\theta} \quad (\text{II.31})$$

$$\underline{8-} f * g * h|_{\theta} = h * g * f|_{-\theta} \quad (\text{II.32})$$

$$\underline{9-} [e^{ikx} e^{iqx}] = 2ie^{i(k+q)x} \sin(ik \wedge q) \quad (\text{II.33})$$

10- la règle de Leibniz :

$$\partial_{\mu}(f * g) = \partial_{\mu}f * g + f * \partial_{\mu}g \quad (\text{II.34})$$

## II.3 Le décalage de Bopp

### II.3.1 dans l'espace-temps non commutatif

Dans un espace non commutatif on peut écrire le produit de deux fonctions en utilisant le produit star:

$$f(\hat{x}) * g(\hat{x}) = f(\hat{x})g(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2}\right)^n \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} \dots f(x) \theta^{i_1 j_1} \dots \theta^{i_n j_n} \partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} g(x) \quad (\text{II.35})$$

$$\partial_{jk} = \frac{\partial}{\partial x^{jk}} \quad (\text{II.36})$$

$$ip_{jk} = \hbar \frac{\partial}{\partial x^{jk}} \quad (\text{II.37})$$

On prend :  $\hbar = 1 \quad ip_{jk} = \frac{\partial}{\partial x^{jk}}$

On replace  $\partial_{jk}$  par:  $\partial_{jk} = ip_{jk}$

Alors:

$$f(\hat{x}) * g(\hat{x}) = v(\hat{x})\psi(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2}\right)^n \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} \dots f(x) \theta^{i_1 j_1} \dots \theta^{i_n j_n} p_{j_1} \dots p_{j_n} g(x)$$

On pose

$$\tilde{p}_{jk} = \theta^{ik} p_{jk} \quad (\text{II.38})$$

$$f(\hat{x}) * g(\hat{x}) = f(\hat{x})g(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2}\right)^n \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} f(x) \tilde{p}_{i_1 \dots i_n} g(x) \quad (\text{II.39})$$

La transformation de Fourier de  $f(x)$  :

$$f(x) = \int dK e^{(ikx)} \hat{f}(k)$$

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) * g(\hat{x}) &= f(\hat{x})g(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} \int dk e^{(ikx)} \hat{f}(k) \tilde{p}_{i_1 \dots i_n} g(x) \\ &= f(\hat{x})g(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (i)^n \int dk e^{(ikx)} (k \tilde{p})^n \tilde{f}(k) g(x) \\ &= f(\hat{x})g(\hat{x}) + \int dk \tilde{f}(k) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (i)^n (k \tilde{p})^n e^{(ikx)} g(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(\hat{x})g(\hat{x}) + \int dk \tilde{f}(k) \left( e^{\left(\frac{-ik\hat{p}}{2}\right)} - 1 \right) e^{(ikx)} g(x) \\
&= f(\hat{x})g(\hat{x}) + \int dk \tilde{f}(k) e^{ik\left(x-\frac{\hat{p}}{2}\right)} g(x) - \int dk \tilde{f}(k) e^{(ikx)} g(x) \\
&= f(\hat{x})g(\hat{x}) + \int dk \tilde{f}(k) e^{ik\left(x-\frac{\hat{p}}{2}\right)} g(x) - f(\hat{x})g(\hat{x}) \\
&= \int dk \tilde{f}(k) e^{ik\left(x-\frac{\hat{p}}{2}\right)} g(x) \\
&= f\left(x - \frac{\hat{p}}{2}\right) g(x) \tag{II.40}
\end{aligned}$$

En résumé, en mécanique quantique non commutative on peut utiliser l'équation de Schrödinger avec la multiplication et les coordonnées de l'espace- temps ordinaires à condition de décaler l'argument de potentiel d'une quantité égale à  $\frac{\hat{p}}{2}$

$$f(\hat{x}) * g(\hat{x}) = f\left(x - \frac{\hat{p}}{2}\right) g(x) \tag{II.41}$$

Dans le décalage "Bopp shift", On peut écrire les opérateurs d'espace-temps non commutatifs  $\hat{x}_i$  et  $\hat{p}_i$  en termes des opérateurs ordinaires de positions  $x_i$  et d'impulsions  $p_i$  en utilisant la transformation suivante :

$$\hat{x}_i = x_i - \frac{\theta_{ij}}{2} p_j \tag{II.42}$$

$$\hat{p}_i = p_i \tag{II.43}$$

### II.3.2 dans l'espace des phases non commutatif

Le décalage de Bopp relie les variables non commutatives aux variables commutatives. A partir des relations précédentes, on peut obtenir le décalage de Bopp généralise comme[28,29]:

$$\hat{x}_i = x_i - \frac{\theta_{ij}}{2} p_j \tag{II.44}$$

$$\hat{p}_i = p_i + \frac{\bar{\theta}_{ij}}{2} x_j \tag{II.45}$$

Dans un espace non commutatif on peut écrire le produit de deux fonctions en utilisant le produit star[32,33]:

$$\begin{aligned}
(f * g)(x, p) &= f(x, p) e^{\frac{i\bar{\theta}}{2} \partial_\mu^x \theta^{\mu\nu} \bar{\partial}_\nu^x + \frac{i\bar{\theta}}{2} \partial_\mu^p \bar{\theta}^{\mu\nu} \bar{\partial}_\nu^p} g(x, p) \\
&= f(x, p) g(x, p) + \frac{i}{2} \partial_\mu^x f(x, p) \theta^{\mu\nu} \bar{\partial}_\nu^x g(x, p) \\
&\quad + \frac{i}{2} \partial_\mu^p f(x, p) \theta^{\mu\nu} \bar{\partial}_\nu^p g(x, p) + O(\theta^2) + O(\bar{\theta}^2)
\end{aligned}$$

**Chapitre III :**  
**Propriétés**  
**thermodynamiques**  
**des systèmes classiques**

## Chapitre III Propriétés thermodynamiques des systèmes classiques

### III-0 introduction

Dans l'espace des phases NC, l'algèbre NC peut s'écrire sous la forme :

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\hbar\theta_{ij}, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\bar{\theta}_{ij}, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\left(\delta_{ij} - \frac{1}{4}\theta_{ik}\bar{\theta}_{kj}\right), \quad (\text{III.1})$$

Dans l'expression (III.1),  $\theta_{ij}$  et  $\bar{\theta}_{ij}$  sont deux matrices composés d'éléments constants et réelles. La matrice  $\theta_{ij}$  est lié à la noncommutativité des coordonnées spatiales, tandis que la matrice  $\bar{\theta}_{ij}$  reflète la noncommutativité du moment. À partir des relations ci-dessus, on peut obtenir un changement de Bopp généralisé comme suit :

$$\hat{x}_i = x_i - \frac{1}{2}\theta_{ij}p_j \quad (\text{III.2})$$

$$\hat{p}_i = p_i + \frac{1}{2}\bar{\theta}_{ij}x_j \quad (\text{III.3})$$

Où  $x_i$  et  $p_i$  sont les opérateurs de coordonnées et d'impulsion sur l'espace de phase commutatif habituel, et  $i, j = 1, 2, 3$ . Après l'application de ce changement, l'effet causé par l'espace de phase non commutative peut être calculé dans l'espace de phase habituel [34]. Dans la mécanique quantique NC et la théorie quantique des champs NC, le produit étoile entre deux champs sur l'espace de phase NC peut être remplacé par le changement généralisé de Bopp (III.2) pour les coordonnées et (III.3) pour les moments. Le produit étoile sur l'espace de phase NC peut être défini comme [34] :

$$\begin{aligned} (f * g)(x, p) &= f(x, p) e^{\frac{i\hbar}{2}\bar{\theta}_i^x \theta_{ij} \bar{\theta}_j^x + \frac{i\hbar}{2}\bar{\theta}_i^p \theta_{ij} \bar{\theta}_j^p} g(x, p) \\ &= f(x, p)g(x, p) + \frac{i\hbar}{2}\theta_{ij}\partial_i^x f(x, p)\partial_j^x g(x, p) \\ &\quad + \frac{i\hbar}{2}\bar{\theta}_{ij}\partial_i^p f(x, p)\partial_j^p g(x, p) + O(\theta^2) + O(\bar{\theta}^2) \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

### III.1 La relation d'incertitude dans l'espace de phase NC

Dans la fonction de partition classique tridimensionnelle d'une seule particule, nous mettons  $\frac{1}{h^3}$  comme la quantité qui rend le volume de l'espace de phase sans dimension. Dans cette section, on dérive le facteur conforme, qui rend le volume de l'espace de phase NC sans dimension. De la relation (III.1), on peut écrire

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\tilde{\hbar}_{ij}, \quad (\text{III.5})$$

Où  $\tilde{h}_{ij}$  est un tenseur qui joue le rôle de la déformation de la constante de Planck sur un espace de phase NC. En mettant  $\theta_3 = \theta$  et  $\bar{\theta}_3 = \bar{\theta}$ , et on posant le reste des

composants  $\theta$  et  $\bar{\theta}$  à zéro (ce qui peut être fait par une rotation ou une redéfinition des coordonnées), l' Eq. (5) peut être réécrit comme

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \begin{pmatrix} 1 + \frac{\theta\bar{\theta}}{16} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\theta\bar{\theta}}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{III.6})$$

Où

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \theta_k \quad \text{et} \quad \bar{\theta}_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \bar{\theta}_k$$

Les équations suivantes

$$[\hat{x}_1, \hat{p}_1] = i\tilde{\hbar}_{11} = i\hbar \left(1 + \frac{\theta\bar{\theta}}{16}\right), \quad (\text{III.7})$$

$$[\hat{x}_2, \hat{p}_2] = i\tilde{\hbar}_{22} = i\hbar \left(1 + \frac{\theta\bar{\theta}}{16}\right), \quad (\text{III.8})$$

$$[\hat{x}_3, \hat{p}_3] = i\tilde{\hbar}_{33} = i\hbar, \quad (\text{III.9})$$

Conduisent aux relations d'incertitude dans l'espace de phase NC

$$\Delta\hat{x}_1, \Delta\hat{p}_1 \sim \tilde{\hbar}_{11} = h \left(1 + \frac{\theta\bar{\theta}}{16}\right) \quad (\text{III.10})$$

$$\Delta\hat{x}_2, \Delta\hat{p}_2 \sim \tilde{\hbar}_{22} = h \quad (\text{III.11})$$

$$\Delta\hat{x}_3, \Delta\hat{p}_3 \sim \tilde{\hbar}_{33} = h \quad (\text{III.12})$$

De ces relations, il est évident que le facteur suivant rend le volume d'espace de phase NC sans dimension

$$\frac{1}{\tilde{\hbar}_{11} \tilde{\hbar}_{22} \tilde{\hbar}_{33}} = \frac{1}{h^3} = \frac{1}{h^3 \left(1 + \frac{\theta\bar{\theta}}{8}\right)} \quad (\text{III.13})$$

Dans ce travail, nous avons considéré une expansion du dénominateur jusqu'au deuxième ordre dans les paramètres NC. Il convient de mentionner que la déformation de la constante Planck, sur un espace de phase NC bidimensionnel, possède la forme [34] :

$$\tilde{h} = h \left(1 + \frac{\theta\bar{\theta}}{4}\right) \quad (\text{III.14})$$

ou  $\theta_{ij} = \epsilon_{ij} \theta$  et  $\bar{\theta}_{ij} = \epsilon_{ij} \bar{\theta}$ .

Ainsi, le facteur adéquat, qui rend le volume de l'espace de phase NC sans dimension, peut être écrit comme

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{h^2 \left(1 + \frac{\theta \bar{\theta}}{2}\right)} \quad (\text{III.15})$$

### III.2 Fonction de partition classique sur l'espace de phase NC

Le but de ce travail est d'étudier les systèmes classiques non commutatifs. Le passage entre la mécanique classique NC et la mécanique quantique NC est supposé être réalisé via la condition de quantification généralisée de Dirac suivante :

$$\{f, g\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [O_f, O_g] \quad (\text{III.16})$$

Où l'opérateur associé à un observable classique est  $f$  est désignons par  $\cdot$ . Cette quantification généralise les relations (1) de la manière suivante :

$$\{\hat{q}_i, \hat{q}_j\} = \theta_{ij}, \{\hat{p}_i, \hat{p}_j\} = \bar{\theta}_{ij}, \{\hat{q}_i, \hat{p}_j\} = \delta_{ij} - \frac{1}{4} \theta_{ik} \bar{\theta}_{kj}, \quad (\text{III.17})$$

où  $\hat{q}_i$  et  $\hat{p}_i$  désignent les coordonnées et l'observable classique de l'impulsion, respectivement, dans l'espace des phases NC. En outre, les dimensions de  $\theta_{ij}$  et de  $\bar{\theta}_{ij}$  sont  $(\text{longueur})^2 / \hbar$  et  $(\text{amplitude})^2 / \hbar$ , respectivement, avec  $i, j = 1, 2, 3$ . Des relations ci-dessus, on peut dériver une expression pour l'observable classique NC comme :

$$\hat{q}_i = q_i - \frac{1}{2} \theta_{ij} p_j \quad (\text{III.18})$$

$$\hat{p}_i = p_i - \frac{1}{2} \bar{\theta}_{ij} q_j \quad (\text{III.19})$$

où  $q_i = (x, y, z)$  et  $p_i = (p_x, p_y, p_z)$  sont les observables classiques dans l'espace de phase commutatif habituel. Comme on peut le voir, dans la limite classique, la structure symplectique (17) ne dépendra pas de  $\hbar$ , comme prévu. Pour obtenir la fonction de partition classique, dans l'ensemble canonique dans l'espace de phase NC, il est possible de considérer la formule suivante :

$$Q_1^{NC} = \frac{1}{\hbar^3} \int e^{-\beta H^{NC}(\hat{q}, \hat{p})} d^3 \hat{q} d^3 \hat{p}, \quad (\text{III.20})$$

qui est écrit pour une seule particule, et qui comprend le facteur  $\frac{1}{\hbar^3}$ , qui a été dérivé dans la section (III.1).  $H^{NC}(\hat{q}, \hat{p})$  est le Hamiltonien d'un système classique NC,

exprimé en termes de coordonnées non canonique et de impulsions non canonique. Selon les relations (III.18) et (III.19), et considérant, et

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \theta_k \text{ et } \bar{\theta}_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \bar{\theta}_k,$$

il est facile d'écrire la mesure d'intégration dans l'équation (III.20), jusqu'au second ordre dans les paramètres NC, comme :

$$d^3 \hat{q} d^3 \hat{p} = \left(1 - \frac{\theta \bar{\theta}}{8}\right) d^3 p d^3 q \quad (\text{III.21})$$

Nous avons assumé que  $\vec{\theta} = (0, 0, \theta)$  et  $\vec{\bar{\theta}} = (0, 0, \bar{\theta})$

Si l'on écrit l'Hamiltonien  $H^{NC}(\hat{q}, \hat{p})$  en termes de coordonnées canoniques et de impulsions canoniques (ce qui peut être fait en appliquant (III.18) et (III.19) au Hamiltonien), alors l'expression appropriée pour la fonction de partition s'écrit comme :

$$\begin{aligned} Q_1^{NC} &= \frac{1}{h^3 \left(1 + \frac{\theta \bar{\theta}}{8}\right)} \int e^{-BH^{NC}(q,p)} \left(1 - \frac{\theta \bar{\theta}}{8}\right) d^3 q d^3 p \\ &= \frac{1}{h^3} \int e^{-BH^{NC}(q,p)} \left(1 - \frac{\theta \bar{\theta}}{8}\right) d^3 q d^3 p \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

où nous avons utilisé les équations (III.13) et (III.21). Le terme  $H^{NC}(\hat{q}, \hat{p})$  est l'Hamiltonien d'un système classique NC, exprimé en termes de coordonnées et moments canoniques. Ainsi, pour trouver la fonction de partition d'une seule particule d'un système classique NC, il suffit de réécrire l'Hamiltonien du système en termes d'observables classiques canoniques, et le remplacer dans la relation (III.22). Dans le cas où les composantes de base du système sont non-interactives, on peut écrire la fonction de partition classique pour un système de particules N dans un espace de phase NC à 3 dimensions comme :

$$Q_N^{NC} = \frac{1}{N!} [Q_1^{NC}] \quad (\text{III.23})$$

où  $1/N!$  est le facteur de correction de Gibbs.

### III.3 Gaz classique parfait dans l'espace de phase NC

Considérons un système de  $N$  molécules identiques, En fait le calcul que nous ferons ici s'applique donc à un gaz monoatomique, les degrés de liberté électroniques sont interne sont gelés (de sorte qu'il n'y a pas de degrés de mouvement interne à considérer), confinées dans un espace de volume  $V (= L^3)$  et en équilibre à une température  $T$ . Nous ne prenons en compte ici que les mouvements de translation des centres de masse de ces molécules, négligeant toutes les excitations internes (rotation, vibration, excitations électroniques) dont l'étude sera essentiellement abordée en amphi ou en petite classe. Puisqu'il n'y a pas d'interactions intermoléculaires à prendre en compte, l'Hamiltonien d'une seule molécule du système, dans l'espace de phase NC classique, est simplement donné par

$$H^{NC}(\hat{q}, \hat{p}) = \frac{\hat{p}_i \hat{p}_i}{2m} \quad (\text{III.24})$$

Ainsi, à partir des relations (III.18) et (III.19), l'Hamiltonien prend la forme suivante

$$H^{NC}(q, p) = \frac{1}{2m} \left( p^2 - \frac{1}{2} \bar{\theta} L_z + \frac{1}{16} \bar{\theta}^2 (x^2 + y^2) \right) \quad (\text{III.25})$$

où  $\vec{\theta} \cdot (\vec{q} \times \vec{p}) = \bar{\theta} L_z$  et  $(\vec{\theta} \times \vec{q})^2 = \bar{\theta}^2 (x^2 + y^2)$ , avec l'hypothèse

$$\vec{\theta} = (0, 0, \theta), \theta = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \theta_k \quad (\text{III.26})$$

et

$$\vec{\bar{\theta}} = (0, 0, \bar{\theta}), \quad \bar{\theta} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \bar{\theta}_k. \quad (\text{III.27})$$

Par conséquent, Nous cherchons à calculer la fonction de partition canonique classique, s'écrivent :

$$Q_1^{NC} = \frac{1}{h^3} \int e^{-\beta \frac{1}{2m} \left( p^2 - \frac{1}{2} \bar{\theta} L_z + \frac{1}{16} \bar{\theta}^2 (x^2 + y^2) \right)} \left( 1 - \frac{\theta \bar{\theta}}{4} \right) d^3 q d^3 p \quad (\text{III.28})$$

Dans cette expression, l'intégration porte sur les  $6N$  degrés de liberté des  $N$  particules, avec la mesure classique sur l'espace des phases. En exécutant l'intégrale, jusqu'au second ordre dans les paramètres NC, et en utilisant l'Eq. (III.23), on obtien

$$Q_N^{NC} = \frac{V^N}{N! h^{3N}} (2\pi m K T)^{\frac{3N}{2}} \left( 1 - \frac{\theta \bar{\theta}}{4} \right)^N \quad (\text{III.29})$$

dans la limite d'un grand nombre de molécules, nous utilisons la formule de Stirling

$\ln N! = N \ln N - N + O(\ln N)$ . Nous obtenons l'énergie libre Helmholtz est donnée par

$$A^{NC} = -KT \ln(Q_N^{NC}) = A + NKT \theta \bar{\theta} / 4 \quad (\text{III.30})$$

où A est l'énergie libre de Helmholtz dans l'espace de phase ordinaire (commutative).

La thermodynamique complète du gaz idéal peut être dérivée de (III.29) et (III.30)

d'une manière simple. Par exemple,

– L'entropie (formule dite de Sackur-Tetrode) :

$$S^{NC} = - \left( \frac{\partial A^{NC}}{\partial T} \right)_{N,V} = S - NK \theta \bar{\theta} / 4 \quad (\text{III.31})$$

Avec :  $S = NK \left( \ln \frac{V}{N \lambda^3} - \frac{5}{2} \right)$ , où  $\lambda = \frac{h}{(2\pi mKT)^{1/2}}$  est appelée longueur thermique de de

Brogie.

– Le potentiel chimique :

$$\mu^{NC} = - \left( \frac{\partial A^{NC}}{\partial N} \right)_{T,V} = \mu + NK \theta \bar{\theta} / 4 \quad (\text{III.32})$$

Avec :  $\mu = -KT \ln \frac{V}{N \lambda^3}$ .

– La pression du gaz à l'équilibre est donnée par :

$$P^{NC} = - \left( \frac{\partial A^{NC}}{\partial V} \right)_{T,N} = P = \frac{NKT}{V} \quad (\text{III.33})$$

– L'énergie interne du gaz est :

$$U^{NC} = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln(Q_N^{NC})_{T,N} = U = \frac{3}{2} NKT \quad (\text{III.34})$$

– la capacité thermique à volume constant:

$$C_V^{NC} = \left( \frac{\partial U^{NC}}{\partial T} \right)_{V,N} = C_V = \frac{3}{2} NK \quad (\text{III.35})$$

où  $S, \mu, P, U$  et  $C_V$  sont les quantités thermodynamiques ordinaire, qui ont été calculées dans l'espace commutative[35].

Nous voyons que nous avons obtenu l'ensemble des propriétés thermodynamiques d'un gaz parfait à partir de la formulation microscopique du modèle, et cela par des calculs très simples. Cet exemple illustre bien la puissance des méthodes de la physique statistique.

### III.4 Gaz relativiste extrême sur l'espace de phase NC

Considérons maintenant un gaz relativiste extrême idéal, composé de  $N$  molécules monoatomiques liés par la relation énergie-moment  $E = pc$ ,  $c$  étant la vitesse de la lumière, confiné à un espace de volume  $V (= L^3)$  et en équilibre à une température  $T$ . Dans l'espace de phase classique NC, l'Hamiltonien d'une seule molécule du système est donnée par

$$\begin{aligned} H^{NC}(q, p) &= c\sqrt{\hat{p}_i\hat{p}_i} = c\sqrt{\left(p_i + \frac{1}{2}\bar{\theta}_{ij}q_j\right)\left(p_i + \frac{1}{2}\bar{\theta}_{ik}q_k\right)} \\ &= pc - \frac{c\bar{\theta}L_z}{4p} + \frac{c\bar{\theta}^2}{32p}(x^2 + y^2) - \frac{c\bar{\theta}^2L_z^2}{32p^3} + O(\bar{\theta}^3), \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

Où nous avons utilisé les conditions (III.26) et (III.27). Compte tenu de (III.22), la fonction de partition peut être facilement obtenue comme

$$Q_1^{NC} = \frac{1}{h^3} \int e^{-\beta\left(pc - \frac{c\bar{\theta}L_z}{4p} + \frac{c\bar{\theta}^2}{32p}(x^2 + y^2) - \frac{c\bar{\theta}^2L_z^2}{32p^3} + O(\bar{\theta}^3)\right)} \left(1 - \frac{\theta\bar{\theta}}{4}\right) d^3q d^3p = 8\pi V \left(\frac{KT}{hc}\right)^3 \left(1 - \frac{\theta\bar{\theta}}{4}\right) \quad (\text{III.37})$$

d'où

$$Q_N^{NC} = \frac{1}{N!} (8\pi V)^N \left(\frac{KT}{hc}\right)^{3N} \left(1 - \frac{\theta\bar{\theta}}{4}\right)^N. \quad (\text{III.38})$$

Enfin, la thermodynamique complète du gaz relativiste extrême parfait, dans l'espace de phase classique NC, serait similaire à l'Eq. (III.30) à (III.35).

### III.5 Oscillateur harmonique tridimensionnel dans l'espace de phase NC

Un autre résultat expérimental, la fameuse loi de Dulong et Petit (1819), exprimait que la capacité thermique molaire est constante et égale à  $3R$  pour tous les solides. Ce comportement s'explique très facilement grâce au théorème d'équipartition : À température finie, chaque atome vibre autour de sa position d'équilibre. On peut donc décrire comme un oscillateur harmonique à trois dimensions, donc avec 6 degrés de liberté, 3 liés à l'énergie cinétique et 3 liés à l'énergie potentielle, ce qui conduit à une

énergie moyenne par atome égale à  $3kBT$ , d'où la loi de Dulong et Petit. Or certaines mesures, en particulier dans un cristal très dur comme le diamant, semblaient montrer des déviations et une capacité thermique plus faible. C'est A. Einstein qui résolut ce problème par la quantification de l'oscillateur harmonique.

Nous allons maintenant examiner un système d'oscillateurs harmoniques  $N$ , pratiquement indépendants et tridimensionnels. L'Hamiltonien de chacun d'eux, jusqu'au second ordre pour les paramètres de l'espace NC, est alors donné par

$$H^{NC}(\hat{q}, \hat{p}) = \frac{1}{2m}(\hat{p}_i, \hat{p}_i) + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{q}_i, \hat{q}_i), \quad (\text{III.39})$$

ou

$$\begin{aligned} H^{NC}(q, p) &= \frac{1}{2m} \left( p_i + \frac{1}{2} \bar{\theta}_{ij} q_j \right) \left( p_i + \frac{1}{2} \bar{\theta}_{ik} q_k \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} m \omega^2 \left( q_i - \frac{1}{2} \theta_{ij} q_j \right) \left( q_i - \frac{1}{2} \theta_{ik} q_k \right) \\ &= \frac{1}{2m} \left( p^2 - \frac{1}{2} \bar{\theta} \bar{L}_z + \frac{1}{16} \bar{\theta}^2 (x^2 + y^2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} m \omega^2 \left( p^2 - \frac{1}{2} \bar{\theta} \bar{L}_z + \frac{1}{16} \bar{\theta}^2 (p_x^2 + p_y^2) \right) \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

où nous avons utilisé les équations (III.26) et (III.27). Ainsi, par analogie avec Eq. (III.22), nous obtenons facilement la fonction de partition pour l'oscillateur unique comme

$$\begin{aligned} Q_1^{NC} &= \frac{1}{h^3} \int e^{-\frac{\beta}{2m} \left( p^2 - \frac{1}{2} \bar{\theta} \bar{L}_z + \frac{1}{16} \bar{\theta}^2 (x^2 + y^2) \right) - \frac{\beta}{2m} m \omega^2 \left( q^2 - \frac{1}{2} \bar{\theta} \bar{L}_z + \frac{1}{16} \bar{\theta}^2 (p_x^2 + p_y^2) \right)} \\ &\quad \times \left( 1 - \frac{\theta \bar{\theta}}{4} \right) d^3 q d^3 p \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

$$Q_1^{NC} = \frac{1}{(\beta \hbar \omega)^3} \frac{1}{\left( 1 - \frac{\theta \bar{\theta}}{8} \right)} \left( 1 - \frac{\theta \bar{\theta}}{4} \right) \quad (\text{III.42})$$

$$Q_1^{NC} = \frac{1}{(\beta \hbar \omega)^3} \left( 1 - \frac{\theta \bar{\theta}}{8} \right), \quad (\text{III.43})$$

pour que

$$Q_N^{NC} = \frac{1}{(\beta \hbar \omega)^{3N}} \left(1 - \frac{\theta \bar{\theta}}{8}\right)^N \quad (\text{III.44})$$

Par conséquent, les expressions thermodynamiques complètes de l'oscillateur harmonique tridimensionnel NC seront données par :

$$A^{NC} = -KT \ln(Q_N^{NC}) = A + NKT\theta\bar{\theta}/8, \quad (\text{III.45})$$

$$S^{NC} = -\left(\frac{\partial A^{NC}}{\partial T}\right)_{N,V} = S - NKT\theta\bar{\theta}/8, \quad (\text{III.46})$$

$$\mu^{NC} = \left(\frac{\partial A^{NC}}{\partial N}\right)_{V,T} = \mu + KT\theta\bar{\theta}/8, \quad (\text{III.47})$$

$$P^{NC} = -\left(\frac{\partial A^{NC}}{\partial V}\right)_{N,T} = P = 0 \quad (\text{III.48})$$

$$U^{NC} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln(Q_N^{NC}) = U = NKT \quad (\text{III.49})$$

$$C_V^{NC} = \left(\frac{\partial U^{NC}}{\partial T}\right)_{N,V} = C_V = C_p = NK \quad (\text{III.50})$$

Où :

$A = -KT \ln(Q_N) = NKT \ln\left(\frac{\hbar \omega}{KT}\right)$ ,  $S = NKT \left[\ln\left(\frac{\hbar \omega}{KT}\right) + 1\right]$ ,  $\mu = KT \ln\left(\frac{\hbar \omega}{KT}\right)$ ,  $P$ ,  $U$  et  $C_V$  sont les quantités thermodynamiques ordinaire, qui ont été calculées dans l'espace commutative[35].

# Conclusion

## *Conclusion*

---

### **Conclusion :**

Dans ce travail, nous avons présenté aussi une contribution importante à l'approche de la mécanique statistique classique et des notions de base de la mécanique statistique qui nous utiles pour la compréhension de notre travail, nous avons présenté des notions sur l'ensemble micro-canonique qui permet de décrire les propriétés d'un système isolé à partir de grandeurs macroscopiques, comme : le volume  $V$ , le nombre de particules  $N$  et l'énergie totale  $E$ . La fonction la fonction de partition est permet de calculer les grandeurs thermodynamique, comme : la pression  $p$  et le potentiel chimique  $\mu$ . En fait dans la pratique, les systèmes physiques intéressants interagissent avec leur environnement ; ils échangent de l'énergie, des particules, etc.. C'est cette situation qui est analysée dans l'espace non commutative pour des systèmes classiques.

Nous avons étudié les effets d'un espace de phase NC sur certains systèmes statistiques classiques. Nous avons présenté une formulation pour calculer la fonction de partition classique selon la théorie de l'ensemble canonique, jusqu'au deuxième ordre dans les paramètres non commutatifs, Eq. (III.22).

Afin de rendre le volume de l'espace de phase NC sans dimension, nous avons utilisé les relations d'incertitude ((III.10) - (III.12)) et, ensuite, nous avons trouvé les expressions (III.13) et (III.15) pour l'espace de phase NC à trois et deux dimensions, respectivement. Nous avons considéré la généralisation des trois systèmes dans l'espace de phase NC. Les résultats montrent que les termes résultant de la non-conommutativité de l'espace des phases émergent en quantités thermodynamiques non mesurables ( $A$ ,  $S$  et  $\mu$ ).

Nous concluons que, dans la mécanique statistique classique, les instruments expérimentaux actuels ne peuvent pas détecter les effets de la non-conommutativité, du moins jusqu'au deuxième ordre dans les paramètres NC. Le dernier point qu'il faut souligner concerne l'entropie. Il est reconnu que l'espace de phase NC est généralement « plus ordonné » que l'espace de phase commutative correspondant. La raison en est que, pour un problème physique défini dans un espace de phase NC, la dégénérescence du système diminue [36] (une facette connexe de cette question est l'existence de phases « exotiques », telles que les phases rayées, dans les modèles NC, qui ont été observées dans la simulation numérique de la théorie du champ scalaire non commutative.

# Référence

## Référence

---

### Référence :

- [1] N. Seiberg, and E. Witten, JHEP 032, 9909 (1999).
- [2] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, and A. Tureanu, Phys. Rev. Lett. 86, 2716 (2001).
- [3] M. Chaichian, A. Demichev, P. Presnajder, M. M. Sheikh-Jabbari, and A. Tureanu, Nucl. Phys. B 611, 383 (2001).
- [4] M. Chaichian, P. Presnajder, M. M. Sheikh-Jabbari, and A. Tureanu, Phys. Lett. B 527, 149 (2002), p. 149-154.
- [5] O. F. Dayi, and A. Jellal, J. Math. Phys. 43, 4592 (2002).
- [6] H. Falomir, J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez, and J. C. Rojas, Phys. Rev. D 66, 045018 (2002).
- [7] K. Li, and S. Dulat, Eur. Phys. J. C 46, 825 (2006).
- [8] K. Li, and J. Wang, Eur. Phys. J. C 50, 1007 (2007).
- [9] B. Mirza, and M. Zarei, Eur. Phys. J. C 32, 583 (2004).
- [10] B. Mirza, R. Narimani, and M. Zarei, Eur. Phys. J. C 48, 641 (2006)
- [11] M. R. Douglas, N. A. Nekrasov Non-commutative Field Theory; hep-th / 0106048
- [12] M. Chaichian, A. Demichev, P. Presnajder Nucl. Phys. B 567, (2000) 360
- [13] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari and A. Tureanu, Phys. Rev. Lett. 86(2001) 2716.
- [14] T. C. Adorno, M. C. Baldiotti, M. Chaichian, D. M. Gitman, A. Tureanu, Phys. Lett. B 682:235-239(2009).
- [15] H. Motavalli, A. R. Akbarieh, Mod. Phys. Lett. A 25:2523-2528(2010)
- [16] M. Demetrian, and D. Kochan, Acta Phys. Slov. 52, 1 (2002), p. 1-9.
- [17] Jian-zu Zhang, Phys. Lett. B 584, 204 (2004).
- [18] Betrouche Malika, Thèse Doctorat En Sciences ; UNIVERSITE FERHAT ABBAS SETIF 1, 2014.
- [19] Zeroual Farida, Thèse Doctorat En Sciences ; UNIVERSITE LARBI BEN MHIDI DÍOUM EI BOUAGHI, 2013.
- [20] Mojtaba Najafizadeh, and Mehdi Saadat; arXiv:1108.4273v2 [hep-th]
- [21] Léonie CANET , COURS de PHYSIQUE STATISTIQUE AVANCEE ; Université Joseph Fourier ; Année 2015-2016
- [22] JEROME BEUGNON, PHYSIQUE STATISTIQUE QUANTIQUE, Cours disponible sur [www.lkb.upmc.fr/boseeinsteinsondensates/beugnon](http://www.lkb.upmc.fr/boseeinsteinsondensates/beugnon)
- [23] Éric Brunet, Jérôme Beugnon, Élie Wandersman, Cours de Physique Statistique, [http://www.academiesciences.fr/activite/archive/dossiers/Perrin/Perrin\\_pdf/Perrin\\_oeuvre.pdf](http://www.academiesciences.fr/activite/archive/dossiers/Perrin/Perrin_pdf/Perrin_oeuvre.pdf)
- [24] H. SAZDJIAN, PHYSIQUE STATISTIQUE ET THERMODYNAMIQUE , UNIVERSITE PARIS XI ORSAY 2004-2005

## Référence

---

- [25] Georges et Marc Mézard, Physique statistique I,
- [26] Temimi Lahouari ,et al ; Polycopié de Cours ; Introduction à la Physique Statistique, USTO-MB 2014 / 2015.
- [27] A. Micu and M. M. Sheikh- Jabbari, Noncommutative F4 Theory at Two Loops, JHEP 0101 (2001) 025, hep-th/ 0008057.
- Sheikh-Jabbari, Ihab. F. Riad and M.M. *Noncommutative QED and Anomalous Dipole*. Le centre international d'Abdus Salam pour la physique théorique StradaCostiera, 11. 34014, Trieste, Italie : arXiv.com, 30 Sep 2000. hep-th/0008132v3;
- R.J.Szabo, Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces, Physics Reports 378 (2003), [arXiv:hep-th/0109162v4] ; A.R.Camacho and R.J.Szabo, Introduction to Noncommutative Field Theory, 2009.
- [28] M. Demetrian, and D. Kochan, Acta Phys. Slov. 52, 1 (2002).
- [29] Jian-zu Zhang, Phys. Lett. B 584, 204 (2004).
- [30]Farid, khelili. *Aspects mathématiques et physiques de la géométrie non commutative*. Universté d'Arizona : Thèse de Docteur de philosophie, 2007.
- [31]. J.Madore, S.Schraml ,P.Schupp , J.Wess.*Gauge Theory on Noncommutative Spaces*. Université de Paris-Sud, UnivesitéMunchen : arXiv.com, 28 Jan 2000. hep-th/0001203v1.
- [32] Jonke, MarijaDimitrijevic and Larisa. *A twisted look on Kappa-Minkowski: U(1) gauge theory*. UniversitéBelgrade : arXiv.com, 20 Dec 2011. [hep-th] 1107.3475v2.
- [33] K. Li, and S. Dulat, Chin. Phys. C 34, 944 (2010).
- [34] K. Li, and S. Dulat, Chin. Phys. C 34, 944 (2010).
- [35] R. K. Pathria, Statistical Mechanics, 2nd ed. (Butterworth-Heinemann,Oxford, 1996), Chap. 3.
- [36] B. Muthukumar, and P. Mitra, Phys. Rev. D 66, 027701 (2002).

## Résumé

Dans ce travail, on a présenté une déformation de la fonction de partition dans l'espace non commutative, cette dernière permet de généraliser le principe d'incertitude de la mécanique quantique, et on a utilisé ce nouveau principe pour développer une nouvelle fonction de partition dans l'espace non commutative. Puis en calculant quelques propriétés thermodynamiques pour des systèmes classiques.

Mots clés : fonction de partition - propriétés thermodynamiques - l'espace non commutative.

## Abstract

In this work, a deformation of the partition function in the non commutative space has been presented, the latter space is allowed to generalize the principle of uncertainty of quantum mechanics, and we used this new principle to develop a new partition function in non commutative space. Well in calculation some thermodynamic properties for conventional systems.

Keywords: partition function - thermodynamic properties - non commutative space.

## ملخص

وفي هذا العمل، تم عرض كيفية تعميم دالة التوزيع في فضاء لا تبديلي، ويسمح هذا الفضاء بتعميم مبدأ عدم اليقين في ميكانيكا الكم، بحيث استخدمنا هذا المبدأ الجديد من أجل إعادة صياغة دالة توزيع جديدة في الفضاء اللاتبديلي. ثم قمنا بحساب بعض الخصائص الحرارية للأنظمة التقليدية مختارة.

كلمات مفتاحية: دالة التوزيع - الخصائص الحرارية - فضاء لا تبديلي